

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUACÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUACÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
REDE NACIONAL - PROFMAT

PEDRO ALEXANDRE BARROS SANTOS

NÚMEROS COMPLEXOS E CÔNICAS: ABORDAGEM
PELO PROFESSOR DO ENSINO MÉDIO, REFLEXÕES E
PROPOSTAS

SÃO CRISTÓVÃO-SE

2018

PEDRO ALEXANDRE BARROS SANTOS

**NÚMEROS COMPLEXOS E CÔNICAS: ABORDAGEM
PELO PROFESSOR DO ENSINO MÉDIO, REFLEXÕES E
PROPOSTAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós
- Graduação em Matemática PROFMAT da
Universidade Federal de Sergipe, como parte
dos requisitos para obtenção do título de Mes-
tre em Matemática.

Orientador: Prof. Fábio dos Santos

SÃO CRISTÓVÃO–SE

2018

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S237n Santos, Pedro Alexandre Barros
Números complexos e cônicas: abordagem pelo professor do ensino médio, reflexões e propostas / Pedro Alexandre Barros Santos ; orientador Fábio dos Santos. - São Cristóvão, 2018.
90 f.; il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2018.

1. História da matemática. 2. Geometria analítica. 3. Curvas.
4. Números complexos I. Santos, Fábio dos orient. II. Título.

CDU 512.7



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Números e Cônicas: Abordagem pelo Professor do Ensino
Médio, Reflexões e Propostas**

por

Pedro Alexandre Barros Santos

Aprovada pela banca examinadora:

Fábio Dos Santos

Prof. Fábio Dos Santos - UFS
Orientador

Kalásas Vasconcelos De Araújo

Prof. Kalásas Vasconcelos De Araújo - UFS
Primeiro Examinador

Filipe Dantas Dos Santos

Prof. Filipe Dantas Dos Santos - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 13 de Abril de 2018

Dedicatória

*Dedico esse trabalho a minha amada esposa Katiúcia
Que trilha comigo todos os dias esse lindo caminho
Cheio de desafios, superação, trabalho e glórias.*

Agradecimentos

Primeiramente à Deus por me agraciar com o dom da vida me concedendo saúde, força e perseverança para chegar até aqui, a minha querida e amada esposa Katiúcia por sempre me apoiar nos momentos difíceis dessa jornada, principalmente nos períodos dos ENQs, a toda minha família principalmente minha avó (em memória) por sempre acreditar em mim, mesmo quando eu já estava cansado, meus amigos da turma do PROFMAT 2014, que trilharam comigo boa parte dessa trajetória, principalmente, Cleverton e Fernando, que sempre estiveram comigo nas longas, porém, prazerosas horas de estudos e café, aos amigos da turma PROFMAT 2016, aos novos amigos da escola Dom Luciano, por me darem aquela força nessa reta final, aos professores do curso pela paciência, e por dividirem sempre um pouco de seus vastos conhecimentos conosco, principalmente ao meu orientador o Professor Dr. Fábio dos Santos e todas as pessoas que direta ou indiretamente colaboraram relevantemente para a conclusão deste trabalho.

Resumo

Essa dissertação propõe apresentar uma ferramenta a mais para ser trabalhado com os alunos do ensino médio no tocante ao estudo das cônicas, e para isso usaremos as estruturas geométricas que o conjunto dos números complexos oferecem, principalmente quando o utilizamos para representar e classificar as cônicas de forma reduzida, mesmo quando estas não possuem seus eixos paralelos aos eixos do plano cartesiano. Faremos também um estudo de caso sobre o ensino desses conteúdos no ensino médio onde refletiremos a partir das dificuldades vividas pelos professores de matemática no ensino médio.

Palavras-chave: Números Complexos, Cônicas, História da Matemática e Representação Geométrica.

Abstract

This dissertation proposes to present an extra tool to be worked with high school students as regards the study of conics, and for that we will use the geometric structures that the complex number of numbers offer mainly when the We use it to represent and classify conics in a reduced way, even when they do not have their axes parallel to the axes of the Cartesian plane. We will also do a case study on the teaching of these contents in high school where we will reflect from the difficulties experienced by mathematics teachers in high school.

Key words: complex, conical numbers, mathematical history and geometric representation.

Lista de Figuras

1.1	Nicoló Fontana-Tartaglia, 1499-1577	18
1.2	Girolamo Cardano, 1501-1576	19
1.3	Rafael Bombelli, 1526-1572	20
1.4	Descartes, 1596 -1650	20
1.5	Abraham de Moivre, 1667-1754	21
1.6	Leonhard Euler, 1707-1783	21
1.7	Friedrich Gauss, 1777-1855	22
1.8	Plano de Argand - Gauss	26
1.9	Representação Geométrica na Forma Polar	27
1.10	Soma de dois complexos	30
1.11	Subtração de dois complexos	30
1.12	$d(z_1, z_2) = z_2 - z_1 $	31
1.13	$z \rightarrow z + z_1$	32
1.14	Representação de $z.z_1$ com $ z_1 = 1$	33
1.15	Representação de $z.z_1$ com $ z_1 > 1$	33
1.16	Representação de $\frac{z}{z_1}$ com $ z_1 = 1$	34
1.17	Representação de $\frac{z}{z_1}$ com $ z_1 > 1$	34
1.18	Interpretação geométrica para \bar{z} , $-z$ e zi	35
1.19	Translação de z_1 e z_2 por t_z	36
1.20	Rotação de z_1 e z_2 por R_θ	36
2.1	Elipse e seus elementos	40
2.2	Parábola e seus elementos	42
2.3	Hipérbole e seus elementos	43
2.4	Hipérbole Assintotas	44
2.5	Cônicas	45
2.6	Elipse	46

2.7	Parábola	46
2.8	Hipérbole	46
2.9	Comparação entre Coordenadas Cartesianas e Polares	48
2.10	Para $r < 0$, $(r, \theta) = (r , \theta + \pi)$	49
2.11	Elipse, um de seus focos e a reta diretriz à direita.	50
2.12	Hipérbole, um de seus focos e a reta diretriz à direita.	50
2.13	Elipse, um de seus focos e a reta diretriz à esquerda.	51
2.14	Hipérbole, um de seus focos e a reta diretriz à esquerda.	51
2.15	Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à direita.	53
2.16	Hipérbole com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à direita.	54
2.17	Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à esquerda.	54
2.18	Hipérbole com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à esquerda.	54
2.19	Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar à cima.	55
2.20	Hipérbole com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar à cima.	55
2.21	Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar à baixo.	55
2.22	Hipérbole com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar à baixo.	55
3.1	Elipse no Plano W.	68
3.2	Elipse da equação.	69
3.3	Parábola no Plano U de equação $x''^2 = -\sqrt{2}y''$	71
3.4	A ilha do tesouro.	72
3.5	O tesouro.	72
3.6	O "X" marca o local.	75
3.7	Hipérbole parametrizada usando secante e tangente.	78
3.8	Hipérbole parametrizada usando as funções hiperbólicas.	78
3.9	Elipse parametrizada com foco na origem usando a fórmula em coordenadas polares.	80

3.10	Elipse parametrizada com foco na origem usando a fórmula em coordenadas polares.	80
4.1	Gráfico com conteúdos de matemática abordados na prova do ENEM 2015.	82
4.2	Gráfico com resultado da pesquisa questão 1.	84
4.3	Gráfico com resultado da pesquisa questão 2.	84
4.4	Gráfico com resultado da pesquisa questão 3.	85
4.5	Gráfico com resultado da pesquisa questão 4.	85
4.6	Gráfico com resultado da pesquisa questão 5.	85
4.7	Gráfico com resultado da pesquisa questão 6.	86

Sumário

Introdução	14
1 Os Números Complexos	17
1.1 A Origem dos Números Complexos	17
1.2 Corpo	22
1.3 A Forma Algébrica	24
1.3.1 Imersão de \mathbb{R} em \mathbb{C}	24
1.3.2 A unidade imaginária i	25
1.4 Representação Geométrica dos Números Complexos no Plano	25
1.5 Representação dos Números Complexos como Vetores do Plano	27
1.5.1 Interpretação Geométrica da Soma e Subtração de dois Complexos	30
1.5.2 Ângulos entre dois Números Complexos.	32
1.5.3 Interpretação Geométrica para Multiplicação e Divisão de dois Números Complexos.	33
1.5.4 Interpretação Geométrica para \bar{z} , $-z$ e zi	34
1.6 Isometria no Plano Complexo.	35
2 Cônicas	38
2.1 O Estudo das Cônicas	38
2.1.1 Elipse	39
2.1.2 Parábola	41
2.1.3 Hipérbole	43
2.1.4 Equação Geral do Segundo Grau	45
2.1.5 Cônicas degeneradas	47
2.1.6 Cônicas em Coordenadas Polares	48

3	Os Números Complexos e as Cônicas	56
3.1	Estudo das Cônicas usando Complexos	56
3.1.1	A equação $\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0$ com B e D reais	60
3.1.2	Resumo da Equação na Forma Canônica	63
3.1.3	Cônicas como soluções de equações do segundo grau em coordenadas cartesianas	64
3.1.4	Algoritmo	65
3.1.5	Equações Paramétricas	75
4	Ensino dos Complexos e das Cônicas no Ensino Médio	81
4.1	Pesquisa com Professores do 3º Ano do Ensino Médio	84
5	Considerações Finais	88
	Referências Bibliográficas	89

Introdução

A Matemática é a mola que move o mundo, pois suas ramificações estão inseridas em diversas áreas do conhecimento que alavancam o progresso das ciências em todo o mundo. Esta disciplina está presente em toda parte principalmente no cotidiano das pessoas, contribuindo para esclarecimento e oportunizando melhores condições de vida. “A Matemática constitui o instrumento que convém especialmente para tratar as noções abstractas de toda a natureza e, nesse domínio, o seu poder é ilimitado.” (Paul Dirac, 1923).

Apesar de sua importância, a Matemática amedronta muitos alunos, pois, em muitas vezes o processo de ensino-aprendizagem utilizado aborda esta disciplina de forma que afasta a mesma do mundo prático, tornando-a sem sentido e desprazerosa para o aluno, que sentindo-se desmotivado tende a rejeitá-la. Nesta concepção a matemática chega até os dias atuais como “bicho papão” para muitos alunos e até professores de outras disciplinas.

O estudo da Matemática deve ser lúdico e incentivador, muitos autores apontam caminhos diversos para dar sentido a tal estudo, considerando: contextualização, resolução de problemas e o trabalho com a história da matemática, pontos de fundamental importância nas estratégias para tornar esta disciplina mais agradável, embora, temos que lembrar que muitos conteúdos matemáticos não possuem utilização prática no cotidiano do educando, mas isso não deve diminuir a importância e necessidade de aprender sobre eles, logo a meu ver esses conteúdos não devem ser excluídos dos conteúdos programáticos do Ensino Médio, pois trazem muitos benefícios para o avanço do conhecimento na vida acadêmica futura do educando.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), a álgebra é um dos eixos estruturadores do ensino fundamental, pois ela constitui um espaço em que os alunos podem desenvolver capacidades de abstração e generalização, assim como adquirem ferramentas para a resolução de problemas. O PCN sugere que o ensino

da álgebra seja feito de forma clara e objetiva, buscando sempre a construção do conhecimento por parte dos alunos.

A cada dia que passa notamos que muitos professores de matemática estão buscando modificar seus métodos de lecionar a disciplina, trazendo estratégias inovadoras e buscando mostrar a aplicabilidade de muitos conteúdos matemáticos, mas como sabemos nem todos esses conteúdos tem utilização prática em nosso dia a dia. Observamos ainda que na sala de aula o estudo da álgebra está ligado diretamente à manipulação simbólica e resolução de equações, que são apresentadas de modo formal e com poucas aplicações, com uso muitas vezes de exercícios meramente mecânicos, sem dar ideia do porque que se estuda tudo aquilo. Por isso, é de extrema importância que professores e alunos entendam os conceitos algébricos e as estruturas que estão em torno das manipulações. Refletindo sobre o surgimento da matemática percebemos a importância da resolução de problemas, pois foi através de diversas situações que surgiu a matemática, trazendo fórmulas e símbolos, como por exemplo na associação de duas grandezas diretamente proporcionais ao medirmos a quantia a ser paga por um produto que depende da quantidade e do preço de cada unidade comprada, e das grandezas inversamente proporcionais ao relacionamos as grandezas velocidade e tempo para percorrer uma determinada distância, onde nesse momento trabalhamos também a interdisciplinarizamos com outra disciplina neste caso a física.

Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os seus conhecimentos e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá inculcar-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes alguns meios para alcançar este objetivo. (Tradução de parte do livro *How to solve it: A new aspect of the mathematical method*, George Polya. 1945, pág 1, publicado originalmente em Princeton, pela Princeton University Press, em 1945.)

Diante do exposto escolhemos tratar de dois conteúdos que ultimamente vem sendo pouco abordado pelos professores no ensino médio, são eles Números Complexos e Cônicas, então, para responder tais indagações, dividimos essa dissertação em 4 capítulos e as considerações finais, onde, no primeiro faremos uma viagem pela origem

e surgimento dos números complexos, suas características e definições, no segundo abordaremos as cônicas seus elementos e suas classificações, no terceiro mostramos o auxílio que tal conjunto numérico oferece as cônicas principalmente quando o utilizamos para representar suas equações de forma reduzida e suas estruturas geométricas para classificá-las, mesmo quando estas não possuem eixos paralelos aos eixos do plano cartesiano, no quarto capítulo apresentaremos um estudo de caso sobre o ensino desses conteúdos em sala de aula por professores do ensino médio de escolas públicas e privadas, donde explanaremos as opiniões e vivências desses profissionais.

Capítulo 1

Os Números Complexos

Neste capítulo conheceremos um pouco da história do surgimento dos números complexos e a estrutura algébrica do corpo dos números complexos e suas propriedades.

1.1 A Origem dos Números Complexos

Nesta primeira seção convido vocês a viajarem no tempo comigo, nele vou trazer um pouco da história da matemática e juntos vamos entrar neste mundo cheio de imaginação. Especificamente vamos conhecer o trabalho de alguns matemáticos importantes que viveram em diversas épocas, mas que têm algumas coisas em comum. Além de gostar da Matemática, eles ajudaram a construir os conceitos dos Números Complexos. Prontos para a viagem?

O conceito de número complexo se desenvolveu gradativamente, como ocorreu com os demais tipos de números. Para algumas equações de grau 2, como $x^2 + 1 = 0$ não havia solução até o século XVI, pois como sabemos até hoje não existe dentro do Conjunto dos Números Reais raiz de números negativos. Porém, não foi este o motivo pelo qual os números complexos surgiram. Ao passar dos anos, alguns matemáticos viram o mesmo problema para equações de grau 3, foi quando começaram a perceber que os números reais não eram mais suficientes para resolver este tipo de equação. Uma curiosidade é que os números complexos surgiram na época do Renascimento, onde a Europa estava se recuperando da peste negra e tinha uma forte influência do Humanismo.

A matemática grega não era compreendida, pois, poucos sabiam ler grego. Assim,

os europeus acabaram seguindo para outros ramos e continuaram a difundir a Matemática. Para resolver este problema, alguns matemáticos europeus, principalmente italianos desenvolveram pesquisas, e houve algumas disputas. Durante tais disputas, os números complexos começaram a ser desenvolvidos por Scipione del Ferro. Ferro desenvolveu uma teoria para a solução das equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas acabou não publicando sua teoria.

Por que os matemáticos não divulgavam suas teorias? Nesta época os matemáticos tinham costume de desafiar outros matemáticos, para provar que eram mais inteligentes. Outra hipótese seria o medo de outro matemático encontrar algum erro na fórmula, e assim surgiram alguns problemas sobre a notoriedade de algumas teorias. Antonio Maria Fior conheceu a teoria de Ferro e ampliou para as equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. Fior acabou desafiando o jovem Niccolò Fontana, conhecido como Tartaglia a resolver 30 equações de grau 3. Para a surpresa de Fior, Tartaglia conseguiu resolver os problemas. Com muita dedicação e esforço, Tartaglia procurou um método para a resolução destas equações e acabou encontrando. Por este motivo, ele acabou vencendo todas as disputas com Fior.



Figura 1.1: Nicoló Fontana-Tartaglia, 1499-1577

Neste momento, chega aos ouvidos de Girolamo Cardano que Tartaglia sabia resolver tal tipo de equação. Cardano implorou a “fórmula” para resolver estas equações. Tartaglia recusou e acabou sendo acusado de mesquinho e egoísta. Com a insistência de Cardano e jurando que não divulgaria o resultado, Tartaglia revelou a solução. Porém, Cardano não cumpriu com sua palavra, e em 1545 fez a publicação no livro

Ars Magna com o seguinte problema: “Determinar dois números cuja soma seja 10 e o produto seja 40”, e o resolve através dos radicais de maneira similar as equações de 2º grau. Ele somente fez uma menção de Tartaglia na sua obra e até hoje a fórmula é conhecida como “Fórmula de Cardano”. Esta descoberta foi tão inusitada que ficou conhecida como o início da matemática moderna.

Após esta “luta” surge um problema inquietante que Cardano trouxe, conhecido na época como números “sofisticados”, ou seja, as raízes quadradas de números negativos. Cardano concluiu que estas raízes seriam um número “tão sutil quando inútil”. Ao passar dos anos seria provado que estes números não eram inúteis como Cardano achava (BOYER, 1996, p. 197).



Figura 1.2: Girolamo Cardano, 1501-1576

Mas, como resolver o problema dos números “sofisticados”? O que fazer com estes números? Fica evidente que os números reais não eram suficientes para resolver este tipo de equação. Assim, seguiram a mesma ideia que os pitagóricos seguiram quando descobriram o número raiz quadrada de 2. Neste momento da história, se introduz a ideia de aceitar o imaginário, e não somente o real.

Eis que Rafael Bombelli surge para trabalhar com este problema, ele mostrou que ao conhecer uma raiz de uma equação cúbica, conseguimos encontrar as outras duas. Por exemplo, se $x = 4$. Sabemos que a soma das outras duas raízes deve ser 4, logo a parte real da equação é 2. Bombelli teve a ideia de somar um número imaginário a esta parte real, e na outra raiz somar o inverso relativo à adição deste número imaginário. Mais tarde, essa teoria vai ficar conhecida como raiz conjugada.

Crossley escreve: “Assim, temos um engenheiro, Bombelli, fazendo uso prático dos números complexos, talvez porque lhe deram resultados úteis, enquanto Cardan encontrada The Roots quadrada de números negativos inútil. Bombelli é a primeira a dar um tratamento de quaisquer números complexos ... É notável a forma como ele é profundo em sua apresentação das leis de cálculo de números complexos ...”



Figura 1.3: Rafael Bombelli, 1526-1572

René Descartes escreveu no seu livro *Géométrie* a seguinte frase: “Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias”. Com esta citação ficou definido que o número raiz quadrada de -1 seria chamado de número imaginário e que poderia ser manipulado de acordo com as regras da álgebra. (GARBI, 1997, p. 75).



Figura 1.4: Descartes, 1596 -1650

Abraham de Moivre um grande matemático que ficou conhecido pela fórmula de Moivre, que relaciona os números complexos com a trigonometria. O Teorema de

Moivre é $(\cos \Theta + i \sin \Theta)^n = \cos(n\Theta) + i \sin(n\Theta)$. Provavelmente Moivre descobriu esta relação em 1707.



Figura 1.5: Abraham de Moivre, 1667-1754

Tudo na matemática possui uma simbologia, seja o sinal de divisão, seja uma integral, então como ficariam definidos estes números imaginários? Foi Leonhard Euler, este mesmo que tem o número em sua memória que criou entre outros vários símbolos a simbologia para a raiz quadrada de -1 que seria simbolizada por i , em 1777. Segundo Euler, os números complexos também podem possuir uma parte real. Logo, o número complexo é do tipo: $z = a + bi$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$, mas esta ideia só foi aceita quando Gauss a introduziu. Euler ainda mostrou que os números complexos são um corpo fechado, pois aplicando qualquer operação transcendente resultará num número complexo.



Figura 1.6: Leonhard Euler, 1707-1783

Em 1797, Caspar Wessel trabalhou geometricamente os números complexos, fazendo uma correspondência objetiva entre estes e os pontos do plano, mas somente

foi publicado em 1806, por Jean Argand. Hoje, Argand recebe o mérito por esta representação. Em 1798 o matemático Carl Friedrich Gauss demonstrou em sua tese de doutorado que toda equação algébrica de grau $n(n > 0)$ e coeficientes complexos, tem pelo menos uma raiz complexa. Esse é o chamado Teorema Fundamental da Álgebra. Tal teorema resolveu a questão das soluções de equações algébricas. Em 1831, Gauss retomou a ideia Argand e pensou nos números $a + b(\text{raiz} - 1)$, como coordenadas de um ponto em um plano cartesiano, tendo assim (a, b) . Deu-se também uma interpretação geométrica para a adição e multiplicação dos símbolos. Esta representação geométrica “*fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade quanto aos números imaginários, pois estes agora podiam ser visualizados no sentido de que cada ponto no plano corresponde a um número complexo e vice versa*” (BOYER, 1996, p. 350). E para finalizar, em 1832, Gauss introduz a expressão número complexo.



Figura 1.7: Friedrich Gauss, 1777-1855

Finalizamos essa primeira parte lembrando a vocês que os números complexos seguiram um longo caminho até ser aceito pela comunidade matemática.

1.2 Corpo

Definição 1.2.1. *O corpo é um Conjunto \mathbb{K} munido de duas operações adição (+) e multiplicação (.) que satisfazem as seguintes propriedades:*

Para todos k_1 , k_2 e $k_3 \in \mathbb{K}$ tem-se:

A1) Associativa: $(k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + (k_2 + k_3)$.

A2) Comutativa: $k_1 + k_2 = k_2 + k_1$.

A3) Existência de elemento neutro: Existe $0 \in \mathbb{K}$ tal que $k + 0 = k$, para todo $k \in \mathbb{K}$.

A4) Existência do simétrico: Para todo $k \in \mathbb{K}$, existe $-k \in \mathbb{K}$ tal que $k + (-k) = 0$.

M1) Associativa: $(k_1 \cdot k_2) \cdot k_3 = k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3)$.

M2) Comutatividade : $k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1$

M3) Existência do elemento neutro: Existe $1 \in \mathbb{K}$ tal que $k \cdot 1 = k$ para todo $k \in \mathbb{K}$.

M4) Existência do inverso: Para todo $k \neq 0$, existe $k^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $k \cdot k^{-1} = 1$.

AM) Distributiva da multiplicação em relação a adição: $k_1 \cdot (k_2 + k_3) = k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3$.

Corpo dos Números Complexos \mathbb{C}

[...] Se um algebrista desejava negar a existência de números irracionais ou negativos, dizia simplesmente, como os gregos antigos, que as equações $x^2 = 2$ e $x+2 = 0$ não são resolúveis. Semelhantemente os algebristas tinham podido evitar os imaginários, simplesmente dizendo que uma equação como $x^2 + 1 = 0$ não é resolúvel. Não havia necessidade de considerar raízes quadradas de números negativos. Porém, com a solução da equação cúbica, a situação mudou radicalmente. Sempre que as três raízes de uma equação cúbica são reais e diferentes de zero, a fórmula de Tartaglia-Cardano leva inevitavelmente a raízes quadradas de números negativos. Sabia-se que o alvo era um número real, mas ele não podia ser atingido sem que se compreendesse alguma coisa sobre os números imaginários. Era agora necessário levar em conta os imaginários mesmo que se concordasse em só aceitar raízes reais[...] (BOYER, Carl Benjamin, História da Matemática, 1974, p.210).

Consideremos então o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ onde, $\mathbb{C} = \{\mathbb{R}^2, +, \cdot\}$ e nele definamos as seguintes operações de adição representada por $+$ e multiplicação representada por \cdot : seja $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, então teremos:

$$\begin{aligned}
(+): z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\
&= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
(\cdot): z_1 \cdot z_2 &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.2. *O conjunto dos números complexos \mathbb{C} , é um corpo.*

A demonstração do 1.2.2 pode ser facilmente verificada por suas operações, pois atendem a definição de um corpo.

1.3 A Forma Algébrica

1.3.1 Imersão de \mathbb{R} em \mathbb{C}

Considere o subconjunto $\mathbb{R}' \subset \mathbb{C}$ formado pelos pares ordenados cujo segundo termo é zero, ou seja,

$$\mathbb{R}' = \{(x, y) \in \mathbb{C} : y = 0\}$$

Assim, por exemplo, pertencem a \mathbb{R}' os pares $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(x + y, 0)$, $(x \cdot y, 0)$, entre outros.

Agora, considere a aplicação f , de \mathbb{R} em \mathbb{R}' , que aplica cada x de \mathbb{R} ao par ordenado $(x, 0)$ de \mathbb{R}' .

Assim, tem-se que f é sobrejetora, pois todo par $(x, 0) \in \mathbb{R}'$ é correspondente, segundo f , de $x \in \mathbb{R}$

Dados $x \in \mathbb{R}$ e $x' \in \mathbb{R}$, com $x \neq x'$, os seus correspondentes $(x, 0) \in \mathbb{R}'$ e $(x', 0) \in \mathbb{R}'$ são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados e, portanto, f é injetiva.

Além disso, note que f conserva as operações de adição e multiplicação, pois à soma $x + y$ com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, está associada ao par ordenado $(x + y, 0)$, que é a soma dos pares ordenados $(x, 0)$ e $(y, 0)$, correspondentes de x e y , respectivamente:

$$f(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = f(x) + f(y).$$

Ao produto $x \cdot y$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, está associado ao par ordenado $(x \cdot y, 0)$, que é o produto dos pares $(x, 0)$ e $(y, 0)$, correspondente de x e y , respectivamente:

$$f(x.y) = (x.y, 0) = (xy - 0.0, x.0 + 0.y) = (x, 0).(y, 0).$$

Devido ao fato de existir uma aplicação bijetiva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$, que conserva as operações de adição e multiplicação, diz-se que R e R' são isomorfos. E, devido a esse isomorfismo operar com $(x, 0)$ leva a resultados análogos aos obtidos operando com x . Isto justifica a igualdade:

$$x = (x, 0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aceita a igualdade, tem-se os casos particulares já citados: $0 = (0, 0), 1 = (1, 0)$. Assim, pode-se escrever $\mathbb{R} = \mathbb{R}'$ e, portanto, o corpo \mathbb{R} dos números reais passa a ser considerado um subconjunto do corpo \mathbb{C} dos números complexos.

1.3.2 A unidade imaginária i

Como visto anteriormente na seção 1.1 a unidade imaginária i que foi nomeada assim por Euler (1707-1783), é o número complexo $(0, 1)$. Veja ainda que:

$$i^2 = i.i = (0, 1).(0, 1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0) = -1$$

isto é, a propriedade básica da unidade imaginária é

$$i^2 = -1$$

Dado um número complexo $z = (x, y)$, tem-se: $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y.0 - 0.1, y.1 + 0.0) = (x, 0) + (y, 0).(0, 1)$ e, portanto,

$$z = x + yi.$$

Assim, todo número complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito sob a fórmula $z = x + yi$, chamada de **forma algébrica**.

1.4 Representação Geométrica dos Números Complexos no Plano

A representação Geométrica dos números complexos é feita por um referencial cartesiano onde fixamos o eixo das abscissas para representar a parte real do número

complexo com $\mathbb{R} = x + yi \in \mathbb{C}; y = 0$ (conjunto dos números reais) e o eixo das ordenadas para representar a parte imaginária pura do conjunto dos números complexos como $\mathbb{I} = x + yi \in \mathbb{C}; x = 0$ (conjunto dos números imaginários puros). A parte real denotamos como $Re(z) = x$ e a parte imaginária por $Im(z) = y$.

A existência da bijeção entre os conjuntos \mathbb{C} e o plano \mathbb{R}^2 permite chamar o sistema de coordenadas abaixo de **Plano Complexo** ou **Plano de Argand - Gauss**.¹

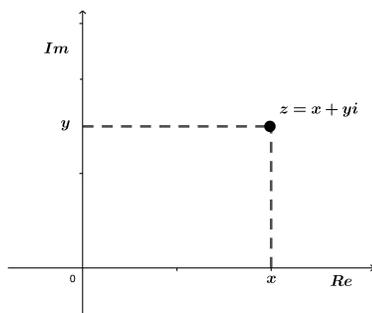


Figura 1.8: Plano de Argand - Gauss

Definição 1.4.1. Se $z = x + yi$, o conjugado de z é o número $\bar{z} = x - yi$.

Exemplo 1.4.2. Geometricamente, \bar{z} representa a reflexão do complexo z em relação ao eixo real.

Dados $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, são válidas as seguintes propriedades:

P.1: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

P.2: $\overline{z_1 + (-z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = z_1 - z_2$.

P.3: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

P.4: Se $z_2 \neq 0$ e $z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2}$, então $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

P.5: $z + \bar{z} = 2Re(z)$

P.6: $z - \bar{z} = 2Im(z)$.

P.7: Se z é real, então $z = \bar{z}$.

P.8: $z = \overline{\bar{z}}$.

P.9: Se n é natural, então $\bar{z}^n = \overline{(z^n)}$.

Notemos que as demonstrações das propriedades citadas são de fácil verificação pelo leitor.

¹Plano de Argand - Gauss, também chamado de Diagrama de Argand

1.5 Representação dos Números Complexos como Vetores do Plano

Vimos que a estrutura algébrica dos números complexos z permite que o escrevamos como um par ordenado $z = (x, y)$ e na forma algébrica $z = x + yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Assim como sua representação algébrica no Plano de Argand - Gauss permite que façamos associações de tais números com vetores. Dessa maneira um número complexo $z = x + yi$ pode ser representado pelo vetor \overrightarrow{OZ} , onde tal vetor pode ser representado na forma polar, em que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e θ é o ângulo entre o semieixo real positivo e o vetor \overrightarrow{OZ} . O número real $|z|$ é chamado de módulo do vetor \overrightarrow{OZ} e representa a distância da origem O do plano complexo para o número complexo z .

O ângulo θ é chamado de um argumento de número complexo z e denotaremos de $Arg(z)$. Vale ressaltar ainda que qualquer ângulo da forma $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, também satisfaz a forma polar, isto é, um complexo não nulo z tem infinitos argumentos que diferem entre si por um múltiplo de 2π . Assim o conjunto de todos os argumentos de z é dado por $arg(z) = (\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z})$. Com isso vamos considerar $Arg(z)$ como aquele único argumento de z pertencente ao intervalo $(-\pi, \pi]$. A figura 1.9 mostra a representação geométrica do número complexo $z = x + yi$, na forma polar.

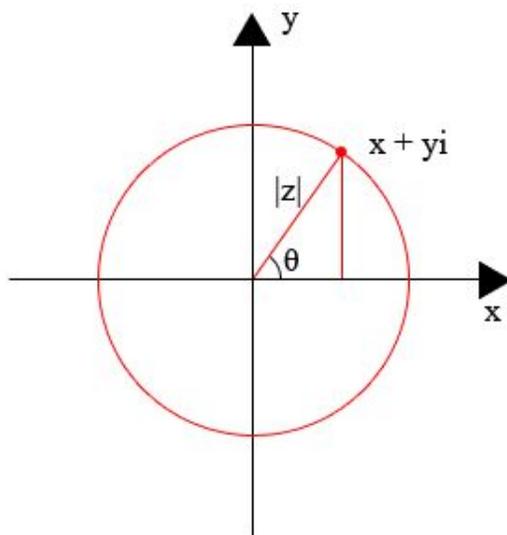


Figura 1.9: Representação Geométrica na Forma Polar

Dado o número complexo $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, seu conjugado é definido por

$$\bar{z} = |z|(\cos\theta - i\sin\theta) = |z|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)).$$

As definições de módulo e argumento citadas anteriormente, permitem listar outras propriedades importantes sobre os números complexos, que nos ajudaram nas próximas interpretações geométricas.

P.10: $z.\bar{z} = |z|^2$

P.11: $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

P.12: Se $z_2 \neq 0$, então $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

P.13: $Arg(z_1.z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$

P.14: $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$

Notem que tais propriedades são de fáceis demonstrações.

Dado um complexo z , não nulo, pode-se obter a representação polar para $\frac{1}{z} = z^{-1}$ utilizando a propriedade P.10., temos,

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = |z|^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

De P.13., sabe-se que o produto de dois números complexos $z_1 = |z_1|.(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|.(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ é dado por,

$$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)) \quad (1.1)$$

A proposição a seguir mostra que a fórmula (1.1) pode ser estendida para n números complexos.

Proposição 1.5.1. *Sejam $z_1 = |z_1|.(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = |z_2|.(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, ..., $z_n = |z_n|.(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$.*

Então:

$$z_1.z_2...z_n = |z_1|.|z_2|...|z_n|(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)) \quad (1.2)$$

Demonstração: Provaremos tal afirmação por indução em n .

Para $n = 2$ temos que $z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$.

Agora suponha que (1.2) seja válida para $n \geq 3$ iremos provar sua validade para $n + 1$.

Seja

$$z_1.z_2...z_n.z_{n+1} = (z_1.z_2...z_n).z_{n+1}.$$

Por hipótese de indução temos que:

$$(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n) \cdot z_{n+1} = [|z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n))] \cdot z_{n+1}.$$

Fazendo

$$z_{n+1} = |z_{n+1}| \cdot (\cos \theta_{n+1} + i \operatorname{sen} \theta_{n+1}),$$

Obtém-se,

$$(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n) \cdot z_{n+1} = [|z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n))] \cdot |z_{n+1}| \cdot (\cos \theta_{n+1} + i \operatorname{sen} \theta_{n+1}).$$

Novamente por (1.1), obtém-se,

$$(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n) \cdot z_{n+1} = |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \cdot |z_{n+1}| (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1}) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1})).$$

E portanto,

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n \cdot z_{n+1} = |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \cdot |z_{n+1}| (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1}) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1})).$$

■

Definição 1.5.2. *Seja $x \in \mathbb{R}$, definamos,*

$$e^{xi} := \cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$$

Como consequência dessa definição temos que a fórmula polar de um complexo z é dada por:

$$z = |z| \cdot e^{i\theta}, \text{ onde } \theta \text{ é o argumento de } z$$

Temos as seguintes propriedades:

- i) $e^0 = 1$
- ii) $e^{xi} e^{yi} = e^{(x+y)i}$
- iii) $e^{-xi} = (e^{xi})^{-1}$
- iv) $(e^{xi})^n = e^{nxi}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$

O grande ganho que se tem quando escrevemos um número complexo não-nulo em sua forma exponencial é a simplicidade vista quando se realiza as operações algébricas. Por exemplo o produto e o quociente desses números se reduzem a $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ e $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$.

As próximas seções serão dedicadas às interpretações geométricas para as operações básicas envolvendo números complexos. Para isso usaremos z para representar o vetor

com origem em O (origem dos complexos) e extremidade em \mathbb{Z} (número complexo) e, caso a origem do vetor não esteja na origem do plano, usaremos números complexos para representar sua origem e extremidade.

1.5.1 Interpretação Geométrica da Soma e Subtração de dois Complexos

A representação vetorial da soma e/ou subtração de dois números complexos, obtém-se somando ou subtraindo os componentes dos vetores que os representam.

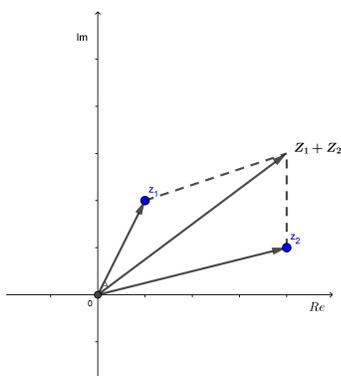


Figura 1.10: Soma de dois complexos

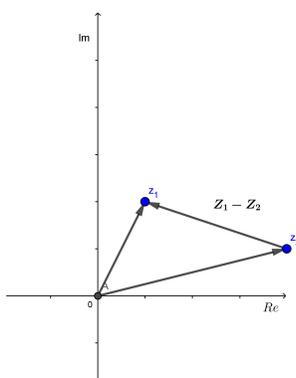


Figura 1.11: Subtração de dois complexos

Proposição 1.5.3. *Para quaisquer dois números complexos z_1 e z_2 vale a desigualdade*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

De fato, pela propriedade P.10 sabe-se que

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\
 &= (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\
 &= z_1 \cdot \bar{z}_1 + \bar{z}_1 \cdot z_2 + \bar{z}_1 \cdot z_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 \\
 &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\
 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
 &= (|z_1| + |z_2|)^2 \\
 |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Para provar a outra desigualdade tomemos $z_1 = (z_1 + z_2) + (-z_2)$ que implica $|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)|$, por (1.3) tem-se, $|(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |(z_1 + z_2)| + |-z_2| = |(z_1 + z_2)| + |z_2|$, assim $|z_1| \leq |(z_1 + z_2)| + |z_2|$ que implica $|z_1| - |z_2| \leq |(z_1 + z_2)|$. Fazendo $z_2 = (z_1 + z_2) + (-z_1)$ e aplicando o mesmo procedimento anterior, obtém-se $|z_2| - |z_1| \leq |(z_2 + z_1)|$ e portanto, $||z_1| - |z_2|| \leq |(z_1 + z_2)|$.

■

Se z_1 e z_2 são números complexos, a distância $d(z_1, z_2)$ entre eles é igual ao módulo de sua diferença.

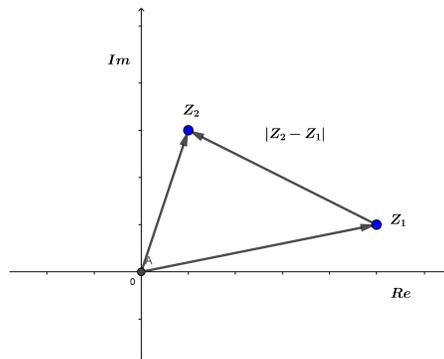


Figura 1.12: $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$

Pensando ainda na soma de dois números complexos como vetores do plano, a expressão $z \rightarrow z + z_1$, representa o deslocamento paralelo do vetor representante de z na direção do vetor representante de z_1 e de mesmo módulo que z_1 , em outras

palavras, esta operação "leva" a origem O no número complexo z e o complexo z_1 no complexo $w = z + z_1$, conforme figura abaixo.

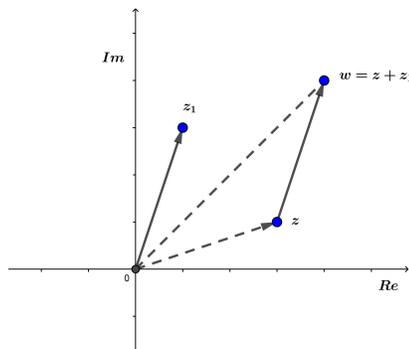


Figura 1.13: $z \rightarrow z + z_1$.

1.5.2 Ângulos entre dois Números Complexos.

Definição 1.5.4. *Sejam z_1, z_2 complexos não nulos. O ângulo formado entre eles é o número real*

$$\theta(z_1, z_2) = \text{Arg} \left(\frac{\frac{z_1}{|z_1|}}{\frac{z_2}{|z_2|}} \right)$$

Como consequência da definição, se $z_1 = |z_1|e^{\beta i}$ e $z_2 = |z_2|e^{\alpha i}$, então

$$\theta(z_1, z_2) = \text{Arg} \left(\frac{\frac{|z_1|e^{\beta i}}{|z_1|}}{\frac{|z_2|e^{\alpha i}}{|z_2|}} \right) = \text{Arg} \left(\frac{e^{\beta i}}{e^{\alpha i}} \right) = \text{Arg}(e^{(\beta-\alpha)i})$$

Observe que $\theta(z_1, z_2) = -\theta(z_2, z_1)$ é um ângulo orientado. Temos também como consequência que $\theta(iz_1, z_1) = \text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$ e $\theta(z_1, iz_1) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$.

Se tomarmos $z_1 = \alpha \cdot z_2 i$, com $\alpha \in \mathbb{R}^*$, então $\theta(z_1, z_2) = \theta(\alpha z_2 i, z_2) = -\theta(z_2, \alpha z_2 i) = \frac{\pi}{2}$, ou seja, a condição para que dois números complexos z_1 e z_2 sejam perpendiculares é $z_1 = \alpha \cdot z_2 i$, com $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

1.5.3 Interpretação Geométrica para Multiplicação e Divisão de dois Números Complexos.

Fixemos um número complexo z tal que $z = |z|.(\cos\theta + isen\theta)$. Ao multiplicarmos z por $|z_1| = |z_1|.(\cos\alpha + isen\alpha)$ a equação (1.1) garante que se $|z_1| = 1$ e $\alpha > 0$, então o produto $z.z_1$ representa a rotação no sentido anti-horário de um ângulo α do vetor z em torno do plano complexo. Caso $|z_1| \neq 1$ a rotação é a mesma do caso anterior, porém, o comprimento de $z.z_1$ será dado por $|z|.|z_1|$.

O produto $z.z_1$ acima representa uma rotação de um ângulo α em torno da origem, seguida de uma homotetia ² com centro na Origem O e coeficiente de semelhança igual a $|z_1|$

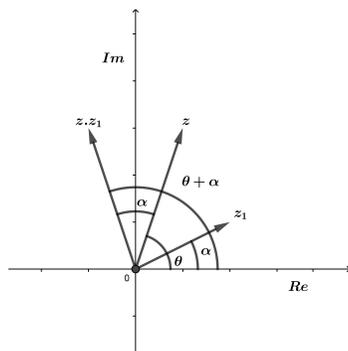


Figura 1.14: Representação de $z.z_1$ com $|z_1| = 1$

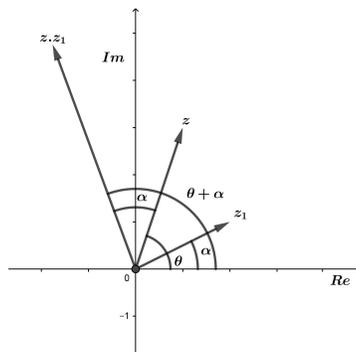


Figura 1.15: Representação de $z.z_1$ com $|z_1| > 1$

Sejam os números complexos $z = |z|.(\cos\theta + isen\theta)$ e $z_1 = |z_1|.(\cos\alpha + isen\alpha)$ com $\alpha > 0$. Pela propriedade P.10. sabe-se que o quociente $\frac{z}{z_1}$ representa a rotação de

²É a ampliação ou a relação de distâncias ou áreas a partir de um ponto fixo.

um ângulo α no sentido horário (negativo) do vetor z em torno da origem do plano complexo seguida de uma homotetia com centro na mesma origem do plano complexo.

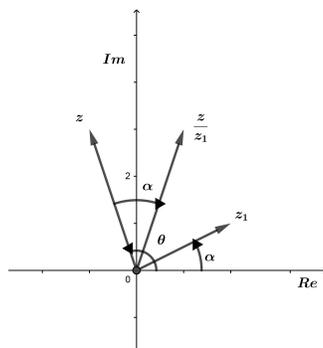


Figura 1.16: Representação de $\frac{z}{z_1}$ com $|z_1| = 1$

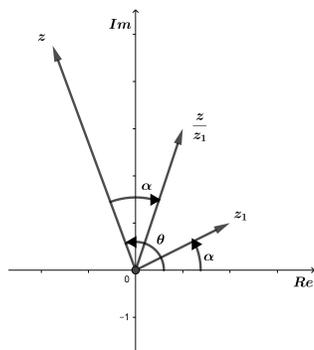


Figura 1.17: Representação de $\frac{z}{z_1}$ com $|z_1| > 1$

1.5.4 Interpretação Geométrica para \bar{z} , $-z$ e zi

Se $z = x + yi$, então $-z = -x - yi$ e $\bar{z} = x - yi$ representam respectivamente a simetria de z em relação à origem e ao eixo real. O produto $z \cdot i = i \cdot (x + yi) = -y + xi$ representa a rotação do vetor z de um ângulo de 90° no sentido anti-horário em torno da origem.

É importante observar que o produto de um número complexo $z = x + yi$ por $(-i)$ representa a rotação do vetor representante de z de um ângulo de 90° no sentido horário em torno da origem.

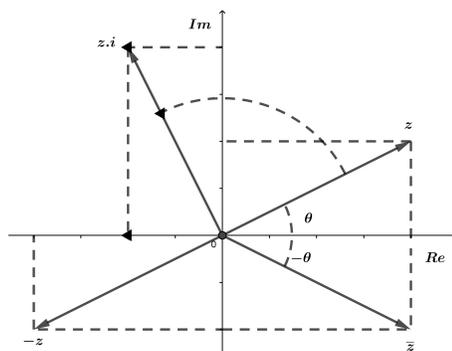


Figura 1.18: Interpretação geométrica para \bar{z} , $-z$ e zi

1.6 Isometria no Plano Complexo.

Nesta seção faremos um breve estudo sobre os movimento rígidos no plano complexo \mathbb{C} , ou seja, movimentos que preservam a forma e a medida dos objetos de \mathbb{C} . Tais transformações ou movimentos são chamdos de **isometrias** (do grego, mesma medida).

Primeiro observe que se tomarmos dois pontos z e w de \mathbb{C} , então a distância entre eles é dada por $|z - w|$.

Definição 1.6.1. Uma **isometria** no plano complexo é uma aplicação $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que, quaisquer que sejam os complexos z e w de \mathbb{C} , tem-se:

$$|T(z) - T(w)| = |z - w|.$$

Definição 1.6.2. Chama-se **translação determinada pelo complexo z** à transformação $T_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que leva cada complexo w de \mathbb{C} no complexo $T_z(w) = w + z$.

Proposição 1.6.3. (Translação) toda translação é uma isometria.

Demonstração: Sejam os complexos z_1 e z_2 de \mathbb{C} , então $T_{(z_1)} = z_1 + z$ e $T_{(z_2)} = z_2 + z$, assim $|T_{(z_1)} - T_{(z_2)}| = |z_1 + z - (z_2 + z)| = |z_1 + z - z_2 - z| = |z_1 - z_2|$.

■

Definição 1.6.4. Sejam o complexo $z \in \mathbb{C}$ e $0 \in [0, 2\pi)$ um ângulo. Chama-se **rotação determinada pelo ângulo θ** a transformação $R_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que leva cada complexo z de \mathbb{C} no complexo $R_\theta(z) = e^{i\theta} z$.

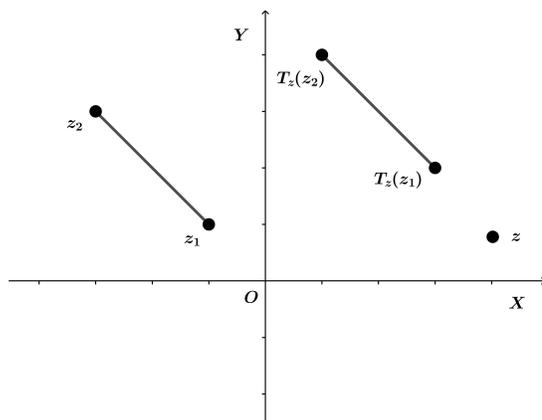


Figura 1.19: Translação de z_1 e z_2 por t_z

Proposição 1.6.5. (Rotação) *Toda rotação é uma isometria.*

Demonstração: Sejam os complexos z_1 e z_2 de \mathbb{C} , então $R_\theta(z_1) = e^{i\theta} z_1$ e $R_\theta(z_2) = e^{i\theta} z_2$, assim $|R_\theta(z_1) - R_\theta(z_2)| = |e^{i\theta} z_1 - e^{i\theta} z_2| = |e^{i\theta}(z_1 - z_2)| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_{=1} |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$.

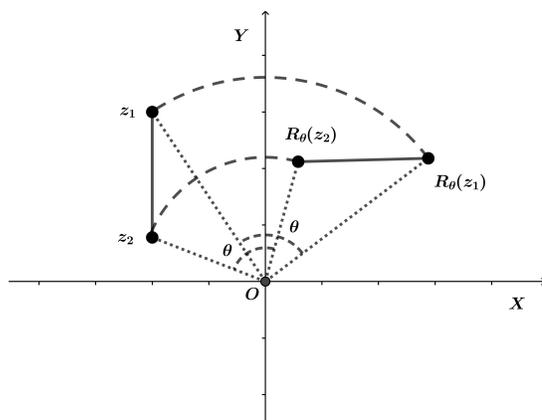


Figura 1.20: Rotação de z_1 e z_2 por R_θ

Vimos que $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$ e $z_2 = |z_2|e^{i\theta}$, então $\theta(z_1, z_2) = \text{Arg}(e^{i\theta})$.

Agora note que as rotações preservam a orientação do ângulo, ou seja po-

$$\begin{aligned} \text{demos tomar } \theta(R_\beta(z_1), R_\beta(z_2)) &= \text{Arg} \left(\frac{\frac{R_\beta(z_1)}{|R_\beta(z_1)|}}{\frac{R_\beta(z_2)}{|R_\beta(z_2)|}} \right) = \text{Arg} \left(\frac{\frac{|z_1|e^{(\beta+\theta)i}}{|z_1|}}{|z_2|e^{(\beta+\alpha)i}}}{|z_2|} \right) = \\ & \text{Arg} \left(\frac{e^{(\beta+\theta)i}}{e^{(\beta+\alpha)i}} \right) = \text{Arg}(e^{(\theta-\alpha)i}) = \theta(z_1, z_2). \end{aligned}$$

■

As transformações que preservam o módulo e a orientação do ângulo são chamadas de transformações conformes.

Proposição 1.6.6. (*Composição*) *A composição de uma isometria é isometria.*

Demonstração: Analogamente, se z_1 e z_2 são complexos, então $(R_\theta \circ T_z)(z_1) = R_\theta(T_z(z_1)) = e^{i\theta}(z_1 + z)$ e $(R_\theta \circ T_z)(z_2) = R_\theta(T_z(z_2)) = e^{i\theta}(z_2 + z)$, assim $|(R_\theta \circ T_z)(z_1)| - |(R_\theta \circ T_z)(z_2)| = |R_\theta(T_z(z_1))| - |R_\theta(T_z(z_2))| = |e^{i\theta}(z_1 + z)| - |e^{i\theta}(z_2 + z)| = |e^{i\theta}z_1 + e^{i\theta}z - e^{i\theta}z_2 - e^{i\theta}z| = |e^{i\theta}(z_1 - z_2)| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_{=1} |z_1 - z_2| = 1 \cdot |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|.$

■

Capítulo 2

Cônicas

2.1 O Estudo das Cônicas

Historiadores atribuem ao matemático **Menaecmus** (380 - 320 a. C. aproximadamente), discípulo de Eudócio na Academia de Platão, a descoberta das **curvas cônicas** ou **seções cônicas** quando trabalhava na resolução do problema da duplicação do cubo. Foi ele o primeiro a mostrar que as **elipses**, as **parábolas**, e as **hipérboles** são obtidas como seções de um cone quando cortado por planos não paralelos à sua base. Neste capítulo estudaremos um pouco sobre essas seções cônicas obtidas através de intersecções em cones completos por meio de um plano paralelo, não-paralelo ou perpendicular à sua base.

Vejamos algumas situações onde estas curvas aparecem.

Suponhamos que temos uma lanterna direcionada para uma parede, então o feixe de luz emitido desenhará nessa parede uma curva cônica. Este fato acontece porque o feixe de luz emitido pela lanterna forma um cone, e também porque a parede funciona como um plano que corta o cone formado. Dependendo da inclinação da lanterna relativamente à parede, assim se obtém uma circunferência, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.

O som emitido por uma avião a jato supersônico tem a forma de um cone, pelo que, ao chocar com a Terra vai formar uma curva cônica. Assim, dependendo da inclinação do avião relativamente à Terra, vamos obter elipses, parábolas ou hipérboles. A audiometria usa este fato, entre outros, para saber a que distância da Terra o avião pode ultrapassar a velocidade do som.

A partir da propriedade reflectora das parábolas, os engenheiros civis construíram

pontes de suspensão parabólica. Se imaginarmos os cabos que predem o tabuleiro da ponte como raios de luz, facilmente verificamos que o cabo principal, aquele que passa pelos pilares da ponte, tem forma de uma parábola.

2.1.1 Elipse

Definição 2.1.1. *Uma elipse \mathcal{E} de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, e maior que a distância entre os focos $2c \geq 0$, ou seja usando a desigualdade triangular temos que $2c \leq 2a$, e, se $2c = 2a$ teremos uma elipse degenerada, sendo assim $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$,*

$$\mathcal{E} = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

Os elementos da elipse são:

- Centro: $C(x_0, y_0)$
- Focos: F_1 e F_2
- Vértices: A_1, A_2, B_1 e B_2
- Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$
- Distância focal: $2c$
- Medida do eixo maior: $2a$
- Medida do eixo menor: $2b$

Como $0 \leq c < a$, então $0 \leq e < 1$, isto é, quando c se aproxima de a a excentricidade se aproxima de 1, pois $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ torna-se pequeno em comparação com a . Já quando c se aproxima de zero, a excentricidade também se aproxima de zero, e nesse caso a elipse torna-se mais arredondada. Se o valor da excentricidade é zero, significa que $c = 0$ e $a = b$, ou seja, um caso particular da elipse conhecido como *circunferência*.

Relação fundamental Na figura (2.1) , aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo OF_2B_2 , retângulo em O , podemos escrever a seguinte relação fundamental:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{2.1}$$

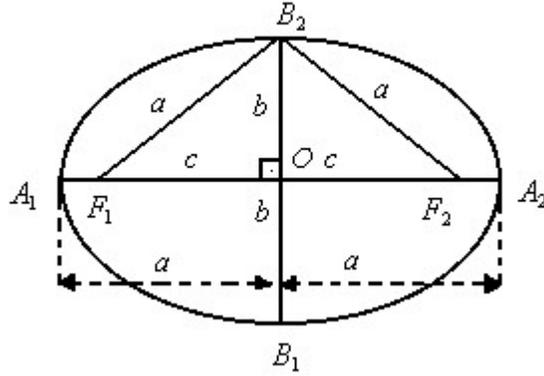


Figura 2.1: Elipse e seus elementos

A partir da definição da elipse, obtem-se sua equação em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY da seguinte forma:

Supondo, inicialmente que a elipse tem focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, vértices nos pontos $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$, e seja $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $0 < c < a$ e $a^2 = b^2 + c^2$, temos então que, se o ponto $P = (x, y)$ pertence à elipse:

$$\begin{aligned}
 d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a &\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\
 &\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 &\iff (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
 &\iff x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
 &\iff 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 &\iff a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 &\iff (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \\
 &\iff a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\
 &\iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
 &\iff b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
 &\iff \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Chegamos assim a equação de uma elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX .

Utilizando as relações de translação podemos escrever a forma canônica da elipse

transladada da seguinte forma:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

Vale ressaltar que, se a elipse possuir focos $F_1 = (0, c)$ e $F_2(0, -c)$, isto é, se os focos da elipse estiverem sobre o eixo OY ou numa reta focal paralela ao eixo OY teremos então, respectivamente:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1,}$$

no qual $C = (x_0, y_0)$ é o centro da elipse.

Curiosidades sobre elipse:

1 - A Terra descreve uma trajetória elíptica em torno do sol, que é um dos focos dessa trajetória. A lua em torno da terra e os demais satélites em relação a seus respectivos planetas também apresentam esse comportamento.

2 - O cometa de Halley segue uma órbita elíptica, tendo o Sol como um dos focos.

3 - As elipses são chamadas cônicas porque ficam configuradas pelo corte feito em um cone circular reto por um plano oblíquo em relação à sua base.

2.1.2 Parábola

Definição 2.1.2. *Seja d uma reta e F um ponto do plano não pertencente a d . A parábola \mathcal{P} de foco F e diretriz d é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a d .*

$$\mathcal{P} = \{P \mid d(P, F) = d(P, d)\}$$

Os elementos da parábola são:

- Diretriz: d
- Foco: F
- Vértices: V
- Parâmetro: $2p = d(F, d)$. Assim não é difícil perceber que $d(V, F) = p$
- Excentricidade: como $d(P, F) = d(P, d)$, temos que a excentricidade é igual a 1

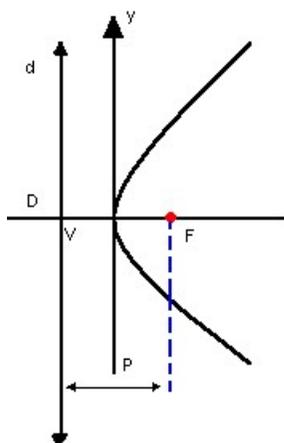


Figura 2.2: Parábola e seus elementos

Utilizando a definição obtém-se a equação da parábola, mas antes cabe uma ressalva: apresentaremos neste trabalho apenas o caso em que o foco F está à direita da diretriz d da parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX . Os outros casos são encontrados de forma análoga.

Por definição, se $P = (x, y)$ é um ponto da parábola com foco $F = (c, 0)$ e a diretriz d é a reta $x = -c$, então vale a equação

$$\begin{aligned}
 d(P, F) = d(P, d) &\iff \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = |x + c| \\
 &\iff (x - c)^2 + y^2 = (x + c)^2 \\
 &\iff x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 && (2.3) \\
 &\iff -2cx + y^2 = 2cx \\
 &\iff \boxed{y^2 = 4cx.}
 \end{aligned}$$

Utilizando as relações de translação podemos escrever a forma canônica da parábola transladada da seguinte forma:

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0).}$$

Curiosidades sobre a parábola:

- 1 - Os telescópios refletores mais simples têm espelhos com secções planas parabólicas.
- 2 - As trajetórias de alguns cometas são parábolas, sendo que o Sol ocupa o foco.
- 3 - A superfície de um líquido contido em um cilindro que gira em torno de seu eixo com velocidade constante é parabólica.

2.1.3 Hipérbole

Definição 2.1.3. Uma hipérbole \mathcal{H} de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$.

$$\mathcal{H} = \{P \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}, \quad 0 < a < c, \quad d(F_1, F_2) = 2c.$$

Os elementos da hipérbole são:

- Centro: $C(x_0, y_0)$
- Focos: F_1 e F_2
- Vértices: A_1, A_2, B_1 e B_2
- Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$, pois $c > a$.
- Distância focal: $2c$
- Medida do eixo real: $2a$
- Medida do eixo imaginário: $2b$
- Assíntotas: $y = \pm \frac{b}{a}x$

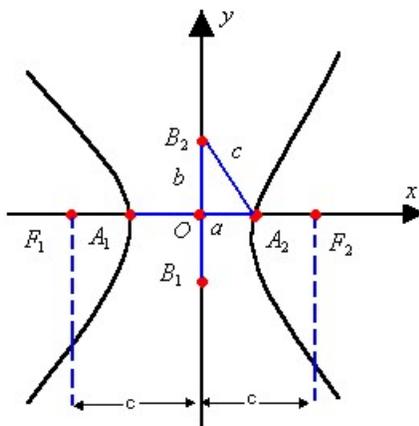


Figura 2.3: Hipérbole e seus elementos

Da mesma forma que a elipse, obtém-se a equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais XOY utilizando sua definição, conforme segue. Supondo que a hipérbole tem focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ tal que $0 < a < c$, com $a \in \mathbb{R}$. Se $P = (x, y)$ é um ponto qualquer da hipérbole, então

$$\left\{ \begin{array}{l} d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a \text{ (ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a \text{ (ramo esquerdo de } \mathcal{H}). \end{array} \right.$$

Equivalentemente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \text{ (ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a \text{ (ramo esquerdo de } \mathcal{H}). \end{array} \right.$$

Lembrando que $b^2 = c^2 - a^2$ e desenvolvendo analogamente ao caso da elipse, concluimos que:

$$\begin{aligned} P(x, y) \in \mathcal{H} &\iff (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \\ &\iff \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Temos assim a equação de uma Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX .

As assíntotas de \mathcal{H} são as retas que passam pela origem e têm inclinação $\pm \frac{b}{a}$ em relação ao eixo OX .

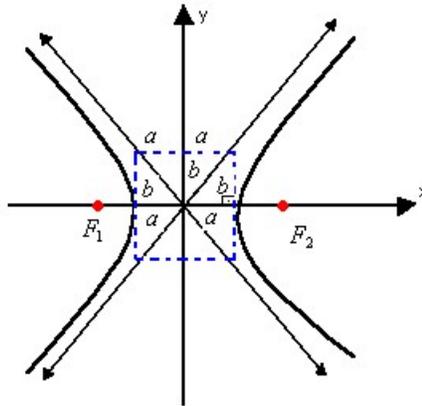


Figura 2.4: Hipérbole Assintotas

Utilizando as relações de translação pode-se escrever a forma canônica da Hipérbole transladada da seguinte maneira:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.} \quad (2.5)$$

Se os focos da hipérbole estiverem sobre o eixo OY ou numa reta focal paralela ao eixo OY teremos então, respectivamente:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1,}$$

no qual $C = (x_0, y_0)$ é o centro da hipérbole.

Curiosidades sobre a hiperbole:

1 - Na Arquitetura e nas torres de resfriamento da usinas nucleares são usados modelos hiperbólicos.

2 - A trajetória de uma partícula alfa no campo electromagnético do núcleo de um átomo traduz-se por uma hipérbole.

3 - O sistema LORAN (long range navigation) e o sistema DECCA de navegação aérea usam a hipérbole. Daq Terraz, concomitantemente são transmitidos sinais de rádio de dois pontos fixos F_1 e F_2 que são captados pelo aeroplano em P , ao longo de t_1 e t_2 segundos, respectivamente. A diferença entre t_1 e t_2 determina 2^a e assim obtêm a característica da hipérbole na qual está P .

2.1.4 Equação Geral do Segundo Grau

Definição 2.1.4. Uma cônica em \mathbb{R}^2 é um conjunto de pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas em relação ao referencial padrão (excentricidade) $e = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ satisfazem uma equação quadrática $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ onde a, b, c, d, e, f são números reais com $a \neq 0, b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

Um dos motivos para o nome cônica vem do fato da mesma ser obtida a partir da interseção de um plano com uma superfície afunilada de duas folhas, conforme ilustração na figura (2.5), neste capítulo vimos os três tipos mais comuns desses cortes que podem ser obtidos por esse processo que são: *elipses, parábolas e hipérbol*es, pois consideramos aqui que a circunferência é um caso especial de elipse.

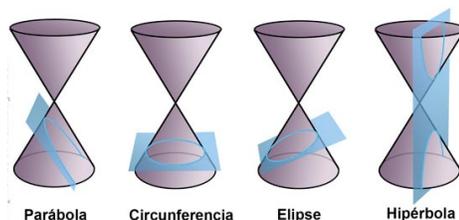


Figura 2.5: Cônicas

- **Elipse:** é uma cônica definida na interseção de um plano que atravessa a superfície de um cone.

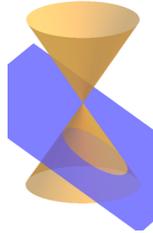


Figura 2.6: Elipse

- **Parábola:** é uma cônica definida na intersecção de um plano que penetra a superfície de um cone.

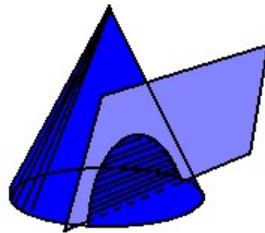


Figura 2.7: Parábola

- **Hipérbole:** é uma cônica formada por dois ramos que são determinados por um plano paralelo ao eixo de simetria de dois cones circulares retos e opostos pelo vértice:

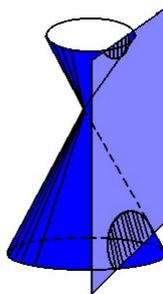


Figura 2.8: Hipérbole

2.1.5 Cônicas degeneradas

Além das cônicas apresentadas acima, podemos encontrar também as formas degeneradas desses tipos de cônicas. Esse tipo de cônica ocorre quando o plano da cônica passa pelo vértice do cone interceptando-o ao longo de duas retas que formam o cone, sendo tangente a ele ou, ao longo de duas retas que formam o cone e que se interceptam no vértice.

Assim, podemos classificá-las da seguinte maneira:

- **Ponto:** é a intersecção do cone com um plano que é oblíquo ao seu eixo e não paralelo a nenhuma de suas geratrizes, passando pelo seu vértice. Neste caso, o plano terá em comum com o cone apenas o vértice V . Trata-se de uma **elipse degenerada**.
- **Reta:** é a intersecção do cone com um plano que é paralelo a uma de suas geratrizes e passa pelo seu vértice. Neste caso, o plano contém o vértice e uma geratriz do cone, sendo tangente a ele.

Num caso particular, obtém-se **duas retas paralelas** quando da intersecção de uma superfície cilíndrica circular (considerada uma superfície cônica de vértice impróprio) por um plano paralelo ao eixo. Se o plano tangenciar a superfície cilíndrica obter-se-á uma reta.

Em ambos os casos, trata-se de uma **parábola degenerada**.

- **Par de retas concorrentes:** é a intersecção do cone com um plano que contém o seu eixo. Neste caso, o plano contém o vértice e duas geratrizes do cone. Trata-se, então de uma **hipérbole degenerada**.

Além destes casos apresentados, a equação das cônicas pode encontrar-se num lugar geométrico representado pelo **conjunto vazio**. Este caso pode representar uma **elipse ou uma parábola degeneradas**.

Como uma cônica é, por definição, uma solução de uma equação do segundo grau em duas variáveis, notamos que estes casos são possíveis, por exemplo as soluções das equações $x^2 + y^2 = 0$, $(x - y)^2 = 0$, $(x - y)^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = -1$ são respectivamente, um ponto, uma reta, um par de retas concorrentes e o conjunto vazio.

2.1.6 Cônicas em Coordenadas Polares

O sistema de coordenadas ao qual estamos acostumados é o sistema de coordenadas cartesianas, que estabelece uma correspondência entre os pontos de um plano geométrico no \mathbb{R}^2 . Mas, existem outros sistemas de coordenadas que podem ser utilizadas para localizar pontos em um plano. Um desses sistemas é o **Sistema de Coordenadas Polares** que é um sistema de coordenadas bidimensional em que cada ponto no plano é determinado por uma distância e um ângulo em relação a um ponto fixo de referência. O sistema de coordenadas polares, é muito útil, visto que algumas curvas terão equações bem mais simples quando tal sistema é usado. Enquanto nas coordenadas cartesianas os números dados da forma (x, y) representam as distâncias de x e y do ponto em relação à origem do plano, nas coordenadas polares esses números representam uma distância e um ângulo. Um ponto P nas coordenadas polares é dado tomando um *polo* como origem e uma reta passando por P , onde a primeira coordenada é a distância r entre o ponto e o polo e a segunda coordenada é dada pelo ângulo de inclinação da reta traçada no sentido anti-horário medido a partir do eixo polar que é a semirreta do polo em direção da referência. Assim o ponto P em coordenada polar será (r, θ)

Observe a comparação entre um ponto P em coordenadas polares e coordenadas cartesianas.

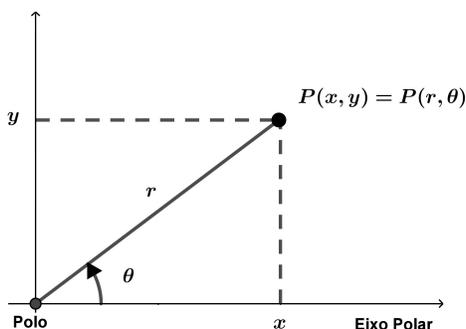


Figura 2.9: Comparação entre Coordenadas Cartesianas e Polares

Proposição 2.1.5. *Suponha que o polo e o eixo polar do sistema de coordenadas polares coincidam com a origem e o eixo x do sistema de coordenadas cartesianas,*

respectivamente. Então a partir da figura percebemos que é possível fazer a transição entre os sistemas de coordenadas utilizando as propriedades de um triângulo retângulo. Seja P um ponto dado por (x, y) em coordenadas cartesianas e por (r, θ) em coordenadas polares temos:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ e } \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Essas equações valem se $x^2 + y^2 \neq 0$ e se o polo coincide com a origem dos eixos cartesianos.

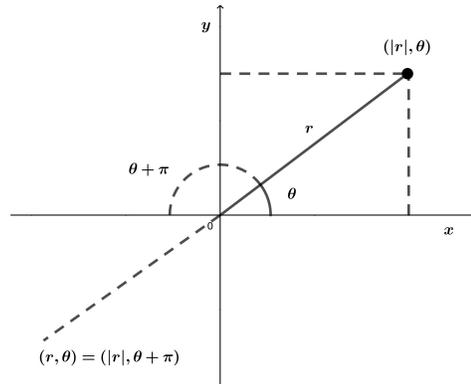


Figura 2.10: Para $r < 0$, $(r, \theta) = (|r|, \theta + \pi)$

Como mencionamos anteriormente utilizaremos tais coordenadas para estudar as cônicas, já que para aquelas que não são circunferências a equação assume uma forma bem mais simples, se considerarmos o caso em que o foco F está no polo e a reta diretriz s é paralela ou perpendicular ao eixo polar.

Proposição 2.1.6. *Seja s uma reta fixa (**diretriz**) e F um ponto fixo (**Foco**) não pertencente à s . O conjunto dos pontos do plano $P = (x, y)$ tais que:*

$$\text{dist}(P, F) = e \text{dist}(P, s) \tag{2.6}$$

em que $e > 0$ seja uma constante fixa, é uma cônica. Dessa forma se:

- (a) $e = 1$, a cônica é uma parábola.
- (b) $0 < e < 1$, a cônica é uma elipse.
- (c) $e > 1$, a cônica é uma hipérbole.

Assim de forma recíproca, toda cônica que não seja uma circunferência pode ser escrita da forma (2.6).

Demonstração: Se $e = 1$ a equação (2.6) é a própria definição da parábola. Consideremos o caso em que $e > 0$, com $e \neq 1$. Seja $d = \text{dist}(F, s)$. Sem perda de generalidade podemos tomar o foco como sendo o ponto $F = (p, 0)$ e a diretriz como sendo a reta vertical $s : \frac{p}{e^2}$, em que $p = \frac{de^2}{1 - e^2}$ se a reta s estiver à direita do foco F figuras (2.11) e (2.12) $p = \frac{de^2}{e^2 - 1}$ se a reta s estiver à esquerda do foco F figuras (2.13) e (2.14).

■

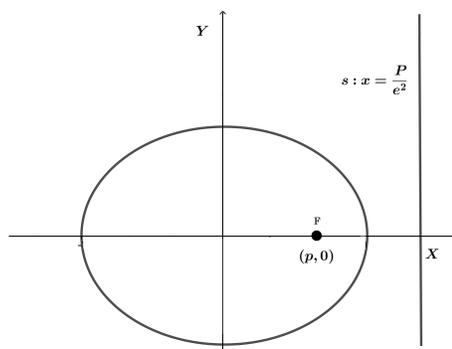


Figura 2.11: Elipse, um de seus focos e a reta diretriz à direita.

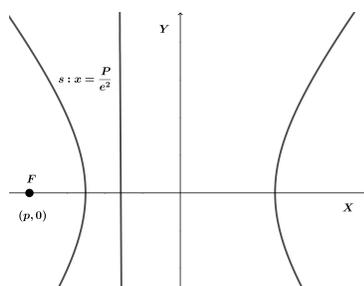


Figura 2.12: Hipérbole, um de seus focos e a reta diretriz à direita.

Assim o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que:

$$\text{dist}(P, F) = e \text{dist}(P, s), \quad (2.7)$$

Pode ser descrito como sendo o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = e \left| x - \frac{p}{e^2} \right|,$$

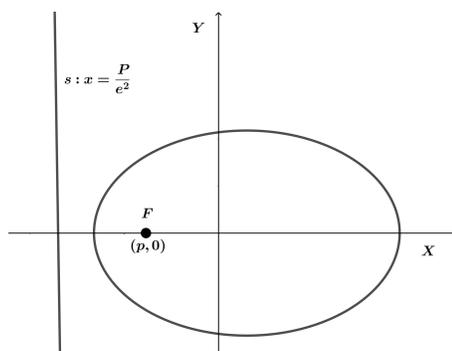


Figura 2.13: Elipse, um de seus focos e a reta diretriz à esquerda.

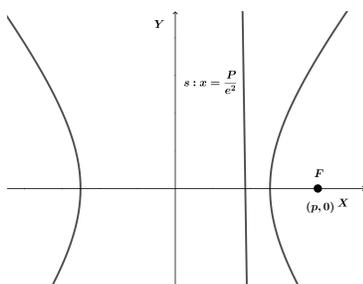


Figura 2.14: Hipérbole, um de seus focos e a reta diretriz à esquerda.

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = p^2\left(\frac{1}{e^2} - 1\right)$$

que pode ser escrito como

$$\frac{x^2}{\frac{p^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2(1 - e^2)}{e^2}} = 1. \quad (2.8)$$

Se $0 < e < 1$, esta é a equação de uma elipse. Se $e > 1$, é a equação de uma hipérbole.

Para mostrar a recíproca, considere uma elipse ou hipérbole com excentricidade $e > 0$ e um dos focos em $F = (p, 0)$. Assim fica fácil ver que (2.8) é equação desta cônica e portanto (2.6) também será, com a reta diretriz sendo $s : x = \frac{p}{e^2}$.

■

Então para deduzir a equação polar das cônicas vamos usar a caracterização dada em (3.1), ou seja, que uma cônica é um lugar geométrico dos pontos P que satisfazem

$$\text{dist}(P, F) = \text{edist}(P, s)$$

Portanto considerando F o foco no polo, temos que $\text{dist}(P, F) = r$, em que (r, θ) são as coordenadas polares de P .

(a) Se a reta diretriz, s , é perpendicular ao eixo polar.

(i) Se a reta s está à **direita** do polo, obtemos que $\text{dist}(P, s) = d - r\cos\theta$. Assim a equação da cônica será

$$r = e(d - r\cos\theta)$$

Isolando r temos

$$r = \frac{de}{1 + e\cos\theta}.$$

(ii) Se a reta s está à **esquerda** do polo, obtemos que $\text{dist}(P, s) = d + r\cos\theta$. Assim a equação cônica fica sendo

$$r = e(d + r\cos\theta)$$

Isolando r temos

$$r = e(d - r\cos\theta).$$

b Se a reta diretriz, s é paralela ao eixo polar.

(i) Se a reta s está **acima** do polo, obtemos que $\text{dist}(P, s) = d - r\sin\theta$. Assim a equação da cônica será

$$r = e(d - r\sin\theta)$$

Isolando r temos

$$r = \frac{de}{1 + e\sin\theta}.$$

(ii) Se a reta s está **abaixo** do polo, obtemos que $\text{dist}(P, s) = d + r\sin\theta$. Assim a equação cônica fica sendo

$$r = e(d + r\sin\theta)$$

Isolando r temos

$$r = e(d - r \operatorname{sen}\theta).$$

Isto prova o seguinte resultado.

Proposição 2.1.7. *Considere uma cônica com excentricidade $e > 0$ (que não é uma circunferência), que tem um foco F no polo e a reta diretriz s ou perpendicular ou eixo polar, com $d = \operatorname{dist}(s, F)$.*

(a) Se a reta diretriz corresponde a F , é perpendicular ao eixo polar e está (**à direita**) do polo, então a equação polar da cônica é

$$r = \frac{de}{1 + e \cos\theta}$$

e se está (**à esquerda**) do polo, então a equação polar da cônica é

$$r = \frac{de}{1 - e \cos\theta}$$

(b) Se a reta diretriz corresponde a F , é paralela ao eixo polar e está (**acima**) do polo, então a equação polar da cônica é

$$r = \frac{de}{1 + e \operatorname{sen}\theta}$$

e se está (**abaixo**) do polo, então a equação polar da cônica é

$$r = \frac{de}{1 - e \operatorname{sen}\theta}$$

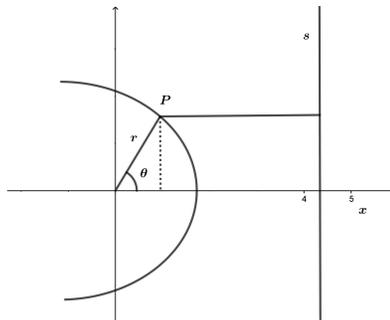


Figura 2.15: Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à direita.

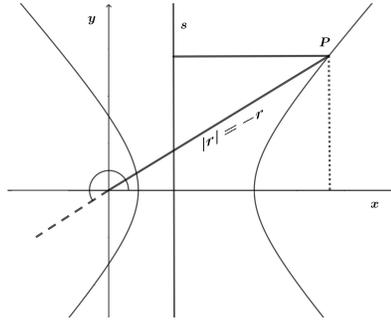


Figura 2.16: Hipérbole com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à direita.

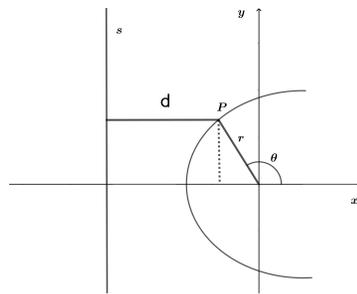


Figura 2.17: Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à esquerda.

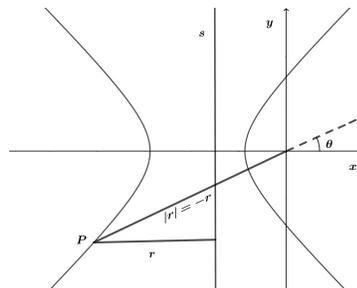


Figura 2.18: Hipérbole com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à esquerda.

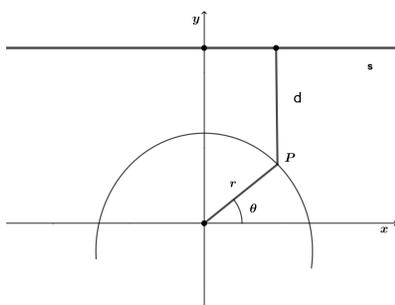


Figura 2.19: Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz paralelala ao eixo polar à cima.

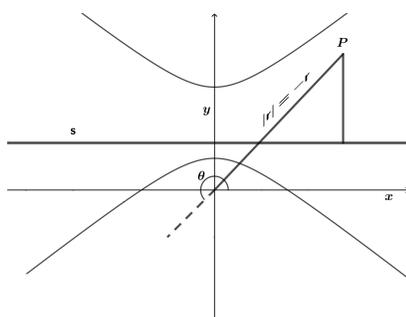


Figura 2.20: Hipérbole com foco no polo e reta diretriz paralelala ao eixo polar à cima.

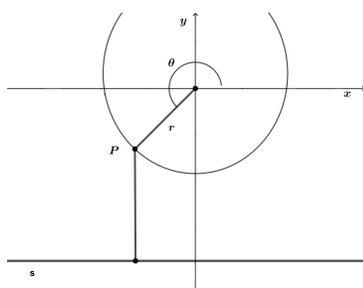


Figura 2.21: Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz paralelala ao eixo polar à baixo.

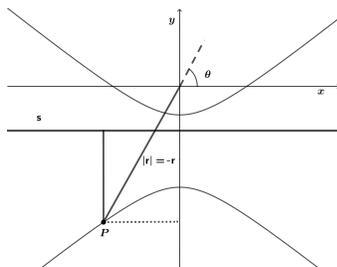


Figura 2.22: Hipérbole com foco no polo e reta diretriz paralelala ao eixo polar à baixo.

Capítulo 3

Os Números Complexos e as Cônicas

Notamos que a matemática muitas vezes tem seus conteúdos abordados de forma desconectada entre si, passando, assim, a ideia de que não há relação entre um assunto e outro. Para exemplificar, verifica-se que o primeiro contato dos alunos com o estudo dos números complexos e das cônicas se dá no terceiro ano do ensino médio. Contudo, a parte que diz respeito ao estudo das cônicas se resume em analisar esses lugares geométricos apenas quando seus eixos são paralelos aos eixos do plano cartesiano, e a parte que diz respeito aos números complexos busca relacionar suas operações algébricas e sua caracterização geométrica. Dessa forma tais conteúdos são abordados sem que se perceba uma conexão entre eles.

Para as cônicas, por exemplo, uma das explicações para tal fato é que quando os eixos das cônicas não são paralelos aos eixos do plano cartesiano a determinação dos seus elementos se torna muito complicada, pois exige conhecimentos a nível de graduação. Porém, neste capítulo pretendemos propor ao estudante um método para determinar todos os elementos das cônicas, mesmo quando seus eixos não são paralelos aos eixos do plano cartesiano, para isso usaremos as ferramentas adquiridas com o estudo das estruturas algébricas dos números complexos.

3.1 Estudo das Cônicas usando Complexos

No primeiro capítulo vimos que a distância entre dois números complexos z e w no plano é dado por $|z - w|$. O resultado a seguir mostra como calcular a distância

de uma reta a um ponto fora dela no plano complexo.

Proposição 3.1.1. *Seja r uma reta em \mathbb{C} definida por $z(t) = z_0 + tv$ com $|v| = 1$ e $t \in \mathbb{R}$. A distância mínima λ de um ponto qualquer f à reta é dada pela equação.*

$$\lambda = |Im((f - z_0)\bar{v})|.$$

Demonstração: Seja $h(t)$ o quadrado da distância de f a um ponto de r , e sabendo que a distância entre dois pontos é dada pelo módulo da diferença de suas coordenadas assim,

$$\begin{aligned} h(t) &= |f - (z_0 + tv)|^2 = |f - z_0 - tv|^2 = ((f - z_0) - tv) \cdot ((\bar{f} - \bar{z}_0) - t\bar{v}) \\ &= (f - z_0)(\bar{f} - \bar{z}_0) - t(f - z_0)\bar{v} - t(\bar{f} - \bar{z}_0)v + t^2v\bar{v} \\ &= |f - z_0|^2 - 2tRe((f - z_0)\bar{v}) + t^2|v|^2, \text{ como } |v| = 1 \\ &= |f - z_0|^2 - 2tRe((f - z_0)\bar{v}) + t^2 \end{aligned}$$

Observe que $h(t)$ é uma função quadrática em t e, portanto, o mínimo é obtido quando $t = Re((f - z_0)\bar{v})$. Assim, substituindo t em $h(t)$, segue que o quadrado da menor distância λ^2 é dado por

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= |f - z_0 - Re((f - z_0)\bar{v})v|^2 \\ &= \left| \frac{(f - z_0)\bar{v} - Re((f - z_0)\bar{v})v\bar{v}}{\bar{v}} \right|^2 \\ &= \left| \frac{2(f - z_0)\bar{v} - 2Re((f - z_0)\bar{v})v\bar{v}}{2\bar{v}} \right|^2 \\ &= \left| \frac{2(f - z_0)\bar{v} - (f - \bar{z}_0)\bar{v} - (f - z_0)v}{2\bar{v}} \right|^2 \\ &= \left| \frac{(f - z_0)\bar{v} - (\bar{f} - \bar{z}_0)v}{2\bar{v}} \right|^2 = \left| \frac{(f - z_0)\bar{v} - (\overline{f - z_0})v}{2\bar{v}} \right|^2 \\ &= \left| \frac{2Im((f - z_0)\bar{v})}{2\bar{v}} \right|^2 = \left| \frac{1}{\bar{v}} Im((f - z_0)\bar{v}) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\bar{v}} \right|^2 |Im((f - z_0)\bar{v})|^2 \\ &= |Im((f - z_0)\bar{v})|^2 \end{aligned}$$

Como λ e $Im|((f - z_0)\bar{v})|$ são números reais não negativos, extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da igualdade temos $\lambda^2 = |Im((f - z_0)\bar{v})|^2$, o que implica em $\lambda = |Im(f - z_0)\bar{v}|$.

■

Sejam r uma reta (**diretriz**) em \mathbb{C} definida por $z(t) = z_0 + tv$, com $|v| = 1$ e f um ponto (**foco**) fora desta reta. Tomando o número real positivo ε , vamos considerar o lugar geométrico dos pontos do plano para os quais as distâncias ao foco f é igual a uma constante positiva ε multiplicada pela distância à diretriz r , ou seja,

$$|z - f| = \varepsilon |Im((z - z_0)\bar{v})|.$$

Demonstração: Elevando ambos os lados da equação acima e obtemos,

$$|z - f|^2 = \varepsilon^2 |Im((z - z_0)\bar{v})|^2.$$

Agora desenvolvendo ambos os lados da última igualdade, desta forma temos

$$\begin{aligned} (z - f)(\bar{z} - \bar{f}) &= \varepsilon^2 \left| \frac{(z - z_0)\bar{v} - (\bar{z} - \bar{z}_0)v}{2i} \right|^2 \\ (z\bar{z} - z\bar{f} - f\bar{z} + f\bar{f}) &= \varepsilon^2 \left(\frac{(z - z_0)\bar{v} - (\bar{z} - \bar{z}_0)v}{2i} \right)^2 \\ (z\bar{z} - z\bar{f} - f\bar{z} + f\bar{f}) &= \frac{\varepsilon^2}{-4} ((z - z_0)\bar{v} - (\bar{z} - \bar{z}_0)v)^2 \\ (z\bar{z} - z\bar{f} - f\bar{z} + f\bar{f}) \frac{-4}{\varepsilon^2} &= ((z - z_0)\bar{v} - (\bar{z} - \bar{z}_0)v)^2 \\ (z\bar{z} - z\bar{f} - f\bar{z} + f\bar{f}) \frac{-4}{\varepsilon^2} &= (z\bar{v} - z_0\bar{v} - \bar{z}v + z_0v)^2 \\ -z\bar{z} \frac{-4}{\varepsilon^2} + z\bar{f} \frac{-4}{\varepsilon^2} + f\bar{z} \frac{-4}{\varepsilon^2} - f\bar{f} \frac{-4}{\varepsilon^2} &= z^2\bar{v}^2 + z_0^2\bar{v}^2 + \bar{z}^2v^2 + z_0^2v^2 - 2z z_0\bar{v}^2 - 2z\bar{z}v\bar{v} \\ + 2z\bar{z}_0v\bar{v} + 2\bar{z}z_0v\bar{v} - 2z_0\bar{z}_0v\bar{v} - 2z\bar{z}_0v^2 & \end{aligned}$$

■

Agrupando os termos semelhantes da última igualdade acima teremos a seguinte equação

$$\begin{aligned} \bar{v}^2 z^2 + v^2 \bar{z}^2 + \left(\frac{4}{\varepsilon^2} - 2 \right) z\bar{z} + \left(2\bar{z}_0 - 2z_0\bar{v}^2 - \frac{4}{\varepsilon^2} \bar{f} \right) z + \left(2z_0 - 2\bar{z}_0v^2 - \frac{4}{\varepsilon^2} f \right) \bar{z} + \\ \left(\frac{4}{\varepsilon^2} f\bar{f} + z_0\bar{v}^2 + \bar{z}_0^2v^2 - 2z_0\bar{z}_0 \right) = 0 \end{aligned}$$

Tomando

$$A = v^2, B = \frac{4}{\varepsilon^2} - 2, C = 2\bar{z}_0 - 2z_0\bar{v}^2 - \frac{4}{\varepsilon^2} \bar{f}, D = \frac{4}{\varepsilon^2} f\bar{f} + z_0\bar{v}^2 + \bar{z}_0^2v^2 - 2z_0\bar{z}_0$$

Com isso obtemos a seguinte equação

$$\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0$$

que denotaremos de **forma padrão**.

Observação 3.1.2. Note que $|A| = |v^2| = |v|^2 = 1^2 = 1$ e $v = \pm\sqrt{A}$, porém $+\sqrt{A}$ e $-\sqrt{A}$ têm a mesma direção e como a direção da diretriz é dada por v tanto faz usarmos $v = +\sqrt{A}$ ou $-\sqrt{A}$, portanto, vamos considerar sem perda de generalidade $v = \sqrt{A}$. Além disso com $\varepsilon > 0$ implica $\frac{4}{\varepsilon^2} > 0$, daí $\frac{4}{\varepsilon^2} - 2 > -2$, portanto, $B > -2$.

Observação 3.1.3. Consideremos a equação $\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0$, com $A \neq 0$. Podemos supor $|A| = 1$ e $B > -2$. Caso $|A| \neq 1$ dividimos a equação por $|A|$ e caso $B < -2$ multiplicamos a equação por -1 , pois se $B < -2$, então $-B > 2 > -2$, dessa forma teremos uma equação na **forma padrão**.

Considerando $A = 0$ na equação $\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0$ teremos a equação $Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0$ e com isso deveremos considerar duas situações:

1. Se $B = 0$, a equação se reduz a $Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0$, ou seja a equação de uma reta.
2. Se $B \neq 0$ podemos reorganizar a equação e obter

$$\begin{aligned} Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D &= 0 \\ z\overline{z} + \frac{Cz}{B} + \frac{\overline{C}\overline{z}}{B} + \frac{D}{B} &= 0 \\ z\overline{z} + \frac{Cz}{B} + \frac{\overline{C}\overline{z}}{B} &= -\frac{D}{B} \\ z\overline{z} + \frac{Cz}{B} + \frac{\overline{C}\overline{z}}{B} + \frac{|C|^2}{B^2} &= \frac{|C|^2}{B^2} - \frac{D}{B} \\ z\overline{z} + \frac{Cz}{B} + \frac{\overline{C}\overline{z}}{B} + \frac{CC}{B\overline{B}} &= \frac{|C|^2 - BD}{B^2} \\ \left(z + \frac{\overline{C}}{B}\right) \left(\overline{z} + \frac{C}{\overline{B}}\right) &= \frac{|C|^2 - BD}{B^2} \\ \left|z + \frac{\overline{C}}{B}\right|^2 &= \frac{|C|^2 - BD}{B^2} \end{aligned}$$

Dessa forma o conjunto solução representa um conjunto vazio sempre que $\frac{|C|^2 - BD}{B^2} < 0$, um ponto caso $\frac{|C|^2 - BD}{B^2} = 0$ e uma circunferência para $\frac{|C|^2 - BD}{B^2} > 0$.

Observação 3.1.4. *A circunferência não tem diretriz e por isso é considerada uma cônica degenerada.*

3.1.1 A equação $\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0$ com B e D reais

Suponha que a equação $\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0$ represente uma cônica e observe que

$$\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 = 2\operatorname{Re}(\overline{A}z^2) \text{ e } Cz + \overline{C}\overline{z} = 2\operatorname{Re}(Cz).$$

Substituindo esses valores na equação temos

$$2\operatorname{Re}(\overline{A}z^2) + Bz\overline{z} + 2\operatorname{Re}(Cz) + D = 0$$

fazendo

$$z = x + yi, A = a_1 + a_2i \text{ e } C = c_1 + c_2i$$

tem-se que

$$2\operatorname{Re}(\overline{A}z^2) = 2a_1x^2 - 2a_1y^2 + 4xya_2 \text{ e } 2\operatorname{Re}(Cz) = 2c_1x - 2c_2y.$$

Substituindo estes valores na equação

$$2\operatorname{Re}(\overline{A}z^2) + Bz\overline{z} + 2\operatorname{Re}(Cz) + D = 0$$

e organizando os termos semelhantes obtém-se a equação

$$(B + 2a_1)x^2 + 4a_2xy + (B - 2a_1)y^2 + 2c_1x - 2c_2y + D = 0$$

e tomando a equação acima temos

$$a = B + 2a_1; b = 4a_2; c = B - 2a_1; d = 2c_1; e = -2c_2, f = D$$

teremos a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \text{ com } a, b \text{ ou } c \neq 0$$

Agora analisaremos a equação

$$\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0 \text{ com } |A| = 1 \text{ e } B > -2$$

Para descobrirmos em quais condições ela representa uma cônica.

Faremos a mudança de variável para $z = \sqrt{A}w$ onde \sqrt{A} é a raiz principal de A , e, $A \in \mathbb{C}$, assim $z = \sqrt{A}w \Rightarrow z^2 = Aw^2$ e observando $\bar{z}^2 = \overline{Aw^2}$ e $\bar{z} = \sqrt{\overline{Aw}} = \sqrt{\overline{A}w}$, dessa forma temos

$$\begin{aligned}\overline{A}Aw^2 + A\overline{A}\bar{w}^2 + B\sqrt{A}w\sqrt{\overline{A}w} + C\sqrt{A}w + \overline{C}\sqrt{\overline{A}w} + D &= 0 \\ w^2 + \bar{w}^2 + \sqrt{A}\sqrt{\overline{A}}Bw\bar{w} + C\sqrt{A}w + \overline{C}\sqrt{\overline{A}w} + D &= 0\end{aligned}$$

Note que $\sqrt{A}\sqrt{\overline{A}} = \sqrt{A\overline{A}} = \sqrt{|A|^2} = |A| = 1$. Assim, tomando $C' = C\sqrt{A}$ temos a equação

$$w^2 + \bar{w}^2 + Bw\bar{w} + C'w + \overline{C'}\bar{w} + D = 0$$

que chamaremos de **forma canônica**.

Onde podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$2\text{Re}(w^2) + B|w|^2 + 2\text{Re}(C'w) + D = 0.$$

E fazendo $w = x_1 + y_1i$ e $C' = c_1 + c_2i$ obtemos

$$\begin{aligned}2(x_1^2 - y_1^2) + B(x_1^2 + y_1^2) + 2(c_1x_1 - c_2y_1) + D &= 0 \\ (B+2)x_1^2 + (B-2)y_1^2 + 2c_1x_1 - 2c_2y_1 + D &= 0\end{aligned}$$

Tomando $\lambda_1 = B+2 > 0$ e $\lambda_2 = B-2 > -4$ a equação fica

$$\lambda_1x_1^2 + \lambda_2y_1^2 + 2c_1x_1 - 2c_2y_1 + D = 0$$

Vamos analisar a equação $\lambda_1x_1^2 + \lambda_2y_1^2 + 2c_1x_1 - 2c_2y_1 + D = 0$ quando $B > -2$ e ($\lambda_2 > 0$) dessa forma temos

$$\begin{aligned}\lambda_1x_1^2 + \lambda_2y_1^2 + 2c_1x_1 - 2c_2y_1 + D &= 0 \\ \lambda_1\left(x_1^2 + \frac{2c_1}{\lambda_1}x_1\right) + \lambda_2\left(y_1^2 - \frac{2c_2}{\lambda_2}y_1\right) + D &= 0 \\ \lambda_1\left(x_1 + \frac{c_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 - \frac{c_2}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_1\left(D - \frac{c_1^2}{\lambda_1} - \frac{c_2^2}{\lambda_2}\right) &= 0 \\ \lambda_1\left(x_1^2 + 2\frac{c_1}{\lambda_1}x_1 + \frac{c_1^2}{\lambda_1}\right) + \lambda_2\left(y_1^2 - 2\frac{c_2}{\lambda_2}y_1 + \frac{c_2^2}{\lambda_2}\right) + \left(D - \frac{c_1^2}{\lambda_1} - \frac{c_2^2}{\lambda_2}\right) &= 0 \\ \lambda_1\left(x_1 + \frac{c_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 - \frac{c_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(D - \frac{c_1^2}{\lambda_1} - \frac{c_2^2}{\lambda_2}\right) &= 0 \\ \lambda_1\left(x_1 + \frac{c_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 - \frac{c_2}{\lambda_2}\right)^2 &= \frac{c_1^2}{\lambda_1} + \frac{c_2^2}{\lambda_2} - D\end{aligned}$$

Agora tomando a translação $u = w + \left(\frac{c_1}{\lambda_1} - \frac{c_2}{\lambda_2}i\right) = x_1 + y_1i + \left(\frac{c_1}{\lambda_1} - \frac{c_2}{\lambda_2}i\right) = \left(x_1 + \frac{c_1}{\lambda_1}\right) + \left(y_1 - \frac{c_2}{\lambda_2}\right)i = x_2 + y_2i$. Além disso tomemos $\frac{c_1^2}{\lambda_1} + \frac{c_2^2}{\lambda_2} - D = D'$ assim após essas substituição teremos

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = D'$$

Então se:

- $D' = 0$, a equação possui uma única solução $x_2 = y_2 = 0$.
- $D' < 0$, a equação $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = D'$ não tem solução e, portanto, representa uma cônica degenerada.
- $D' > 0$, então podemos dividir toda equação por D' como segue

$$\frac{\lambda_1 x_2^2}{D'} + \frac{\lambda_2 y_2^2}{D'} = 1$$

e podemos determinar todos os elementos da elipse.

Se $-2 < B < 2$ e $(\lambda_1 > 0 \text{ e } \lambda_2 < 0)$ a equação $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2c_1 x_1 - 2c_2 y_1 + D = 0$ fica:

$$\lambda_1 x_2^2 - |\lambda_2| y_2^2 = D'$$

Assim, se:

- $D' = 0$, então $y_2 = \pm \sqrt{\frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}} x$, ou seja, a equação representa um par de retas.
- $D' \neq 0$, então podemos dividir tudo por D' como segue.

$$\frac{\lambda_1 x_2^2}{D'} - \frac{|\lambda_2| y_2^2}{D'} = 1$$

E podemos determinar todos os elementos da hipérbole.

Se $B = 2$ e $(\lambda_2 = 0)$ a equação $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2c_1 x_1 - 2c_2 y_1 + D = 0$ fica:

$$\lambda_1 x_1^2 + 2c_1 x_1 - 2c_2 y_1 + D = 0$$

E completando o quadrado obtemos:

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{c_1}{\lambda_1} \right)^2 - 2c_2 y_1 + D - \frac{c_2^2}{\lambda_1} = 0$$

Assim se,

- $c_2 = 0$, não teremos uma cônica.
- $c_2 \neq 0$, podemos dividir toda a equação por $2c_2$ como a seguir

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left(x_1 + \frac{c_1}{\lambda_1} \right)^2 &= 2c_2 y_1 - D + \frac{c_2^2}{\lambda_1} \\ \frac{\lambda_1}{2c_2} \left(x_1 + \frac{c_1}{\lambda_1} \right)^2 &= y_1 - \left(\frac{D - \frac{c_2^2}{\lambda_1}}{2c_2} \right) \\ \frac{\lambda_1}{2c_2} \left(x_1 + \frac{c_1}{\lambda_1} \right)^2 &= y_1 - \left(\frac{\lambda_1 D - \frac{c_2^2}{\lambda_1}}{2\lambda_1 c_2} \right) \end{aligned}$$

tomando

$$u = w + \left(\frac{c_1}{\lambda_1} - \left(\frac{\lambda_1 D - c_2^2}{2\lambda_1 c_2} \right) i \right) = \left(x_1 + \frac{c_1}{\lambda_1} \right) + \left(y_1 - \frac{\lambda_1 D - c_2^2}{2\lambda_1 c_2} \right) i = x_2 + y_2 i$$

fazendo

$$\frac{2c_2}{\lambda_1} = 2p$$

teremos

$$x_2^2 = 2p y_2 \tag{3.1}$$

que é a equação de uma parábola.

3.1.2 Resumo da Equação na Forma Canônica

Considere a equação

$$w^2 + \bar{w}^2 + Bw\bar{w} + C'w + \overline{C'}\bar{w} + D = 0, \text{ onde } B > -2 \text{ e } C' = c'_1 + c'_2 i.$$

Então pelos resultados obtidos na seção anterior, podemos concluir que:

Tabela 3.1: Resumo da Equação na Forma Canônica

<p>1. $(-2 < B < 2)$, a equação possui uma cônica, se e somente se, $\frac{c_1'^2}{B+2} + \frac{c_2'^2}{B-2} - D \neq 0$. a cônica é uma hipérbole</p>
<p>2. $(B = 2)$, a equação possui uma cônica, se e somente se, $c_2' = \text{Im}(C') \neq 0$. a cônica é uma parábola.</p>
<p>3. $(B > 2)$, a equação possui uma cônica, se e somente se, $\frac{c_1'^2}{B+2} + \frac{c_2'^2}{B-2} - D \neq 0$. a cônica é uma elipse.</p>

3.1.3 Cônicas como soluções de equações do segundo grau em coordenadas cartesianas

Vimos na subseção (2.1.4) que se tivermos uma cônica a sua equação em coordenadas cartesianas será dada pela equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, com a, b ou $c \neq 0$.

Agora queremos determinar em que condições tal equação representa uma cônica e sua classificação.

Tomemos

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ e } y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

e fazemos a substituição na equação acima, dessa forma iremos obter:

$$a \left(\frac{z - \bar{z}}{2} \right)^2 + b \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + c \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 + d \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) \bar{z} + f = 0$$

E reagrupando os termos semelhantes temos

$$\left(\frac{a - c - bi}{4} \right) z^2 + \left(\frac{a - c + bi}{4} \right) \bar{z}^2 + \left(\frac{2a + 2c}{4} \right) z\bar{z} + \left(\frac{d - ei}{2} \right) z + \left(\frac{d + ei}{2} \right) \bar{z} + f = 0$$

Notemos que se $a = c$ e $b = 0$ de acordo com as observações da seção (3.1) a equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, representa uma cônica degenerada. Então, devemos tomar $(a - c)^2 + b^2 \neq 0$.

Multiplicando a igualdade acima por 4 e dividindo por $\sqrt{(a - c)^2 + b^2}$ obtém - se

$$\left(\frac{a - c - bi}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \right) z^2 + \left(\frac{a - c + bi}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \right) \bar{z}^2 + \left(\frac{2a + 2c}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \right) z\bar{z} + 2 \left(\frac{d - ei}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \right) z + 2 \left(\frac{d + ei}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \right) \bar{z} + 4f = 0$$

Comparando com a forma padrão temos que:

$$\text{Se } |B| = \left| \frac{2a + 2c}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}} \right| = 2 \text{ donde } |a + c| = \sqrt{(a-c)^2 + b^2}$$

Elevando ambos os membros da última igualdade ao quadrado temos:

$$\begin{aligned} |a + c|^2 &= \left(\sqrt{(a-c)^2 + b^2} \right)^2 \\ (a + c)^2 &= \left(\sqrt{(a-c)^2 + b^2} \right)^2 \\ a^2 + 2ac + c^2 &= a^2 - 2ac + c^2 + b^2 \\ 4ac - b^2 &= 0 \end{aligned}$$

Assim analogamente mostra-se que se $|B| < 2$ tem-se que $4ac - b^2 < 0$, se $|B| > 2$ tem-se $4ac - b^2 > 0$. Portanto, se :

- $|B| > 2 \Rightarrow 4ac - b^2 > 0$, a equação pode representar uma **elipse**.
- $|B| = 2 \Rightarrow 4ac - b^2 = 0$, a equação pode representar uma **parábola**
- $|B| < 2 \Rightarrow 4ac - b^2 < 0$, a equação pode representar uma **hipérbole**

3.1.4 Algoritmo

Apresentaremos nesta seção um algoritmo para classificar e obter os elementos quando a equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ representar uma cônica.

Algoritmo:

- **Passo 1:** Verificar se $a \neq c$ e $b \neq 0$;
- **Passo 2:** Complexificar a equação tomando $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
- **Passo 3:** Colocar a equação na forma padrão (Dividindo a equação por $|A|$ e multiplicando por -1 $B \leq 2$);
- **Passo 4:** Aplicar a rotação $z = \sqrt{A}w$ para obter a forma canônica;
- **Passo 5:** Verificar na tabela se a equação na forma canônica representa uma cônica;
- **Passo 6:** Usar a equação nesse novo sistema de coordenadas;

- **Passo 7:** Determinar todos os elementos na cônica nesse último sistema de coordenadas;
- **Passo 8:** Aplicar a isometria inversa para obter os elementos no sistema de coordenadas original.

Aplicação do algoritmo

Apresentaremos a seguir dois exemplos de aplicação do algoritmo.

Exemplo 3.1.5. Vamos determinar os elementos da cônica cuja equação é dada por $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$

Passo 1: Verificar se $a \neq c$ e $b \neq 0$.

Note que na equação $a = 9, b = -4$ e $c = 6$, como $9 \neq 6$ e $-4 \neq 0$ logo a equação $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$, pode representar uma cônica.

Passo 2: Complexificar a equação tomando $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

$$\begin{aligned}
 9 \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 - 4 \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + 6 \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 &= 30 \\
 9 \left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} \right) - 4 \left(\frac{z^2 + \bar{z}^2}{4i} \right) + 6 \left(\frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4} \right) &= 30, \frac{1}{i} = -i \\
 9 \left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} \right) + 4i \left(\frac{z^2 - \bar{z}^2}{4} \right) + 6 \left(\frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4} \right) &= 30. (4) \\
 9(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) + 4i(z^2 - \bar{z}^2) - 6(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2) &= 120 \\
 9z^2 + 18z\bar{z} + 9\bar{z}^2 + 4iz^2 - 4i\bar{z}^2 - 6z^2 + 12z\bar{z} - 6\bar{z}^2 &= 120 \\
 (3 + 4i)z^2 + (3 - 4i)\bar{z}^2 + 30z\bar{z} &= 120
 \end{aligned}$$

Passo 3: Colocar a equação na forma padrão (Dividindo a equação por $|A|$ e multiplicando por -1 se, $B \leq 2$;).

Para colocar na forma padrão devemos dividir a equação pelo módulo de A , observe que na última equação $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + (-4i)^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 1$, assim vamos dividi-la por $|3 - 4i| = 5$, ou seja

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \bar{z}^2 + 6z\bar{z} = 24.$$

Como $|A| = \left| \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right| = 1$ e $B = 6 > -2$ a equação está na forma padrão.

E a direção da diretriz é dada por

$$v = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} - \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}i = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i.$$

Passo 4: Aplicar a rotação $z = \sqrt{A}w$ para obter a forma canônica;

Fazendo a mudança de variável $z = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i\right)w$, obtemos a forma canônica.

$$w^2 + \bar{w}^2 + 6w\bar{w} = 24 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(w^2) + 6|w|^2 = 24$$

Passo 5: Verificar na tabela se a equação na forma canônica representa uma cônica;

Como $B = 6 > -2$, temos que analisar o caso da elipse:

$$\frac{c_1'^2}{B+2} + \frac{c_2'^2}{B-2} - D = \frac{0^2}{8} + \frac{0^2}{4} - (-24) = 24 > 0$$

e portanto, a equação $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$ representa uma elipse.

Passo 6: Usar a equação nesse novo sistema de coordenadas;

$$\frac{\lambda_1 x_2'^2}{D'} + \frac{\lambda_2 y_2'^2}{D'} = 1$$

Assumiremos agora que $w = x' + y'i$ então teremos

$$\frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{6} = 1 \quad (3.2)$$

Note que a equação (3.2) está na forma canônica em relação ao plano w , ou seja, os eixos da cônica estão paralelos aos eixos coordenados do plano w .

Passo 7: Determinar todos os elementos na cônica nesse último sistema de coordenadas;

- $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$ e pela equação $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se que $c = \sqrt{3}$.
- a medida do eixo maior é $2\sqrt{6}$ e a medida do eixo menor é $2\sqrt{3}$.
- os vértices são: $a'_1 = \sqrt{6}i$, $a'_2 = -\sqrt{6}i$, $b'_1 = \sqrt{3}i$ e $b'_2 = -\sqrt{3}i$.
- os focos são $c'_1 = \sqrt{3}i$ e $c'_2 = -\sqrt{3}i$.
- a excentricidade é $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$.
- a diretriz $\gamma = \pm \frac{a}{\varepsilon}i = \pm 2\sqrt{3}i$.

Observação 3.1.6. Na figura (3.1) temos a representação geométrica da equação (3.2) no plano W . Note que a **diretriz** é sempre paralela ao eixo não focal da cônica e sua localização foi tomada em relação ao foco $-\sqrt{3}i$ por isso $\gamma = -2\sqrt{3}i$. Se tivéssemos tomado como referência o foco $\sqrt{3}i$ a localização da diretriz no eixo $O'Y'$ seria dada por $\gamma = 2\sqrt{3}i$ e, portanto a localização da diretriz estaria no lado positivo do eixo $O'Y'$. Com isso concluímos que as cônicas com exceção da parábola terá sempre duas diretrizes, dependendo apenas do foco que é tomada como referência. No entanto notamos que para gerar uma cônica é suficiente termos apenas um foco e uma diretriz.

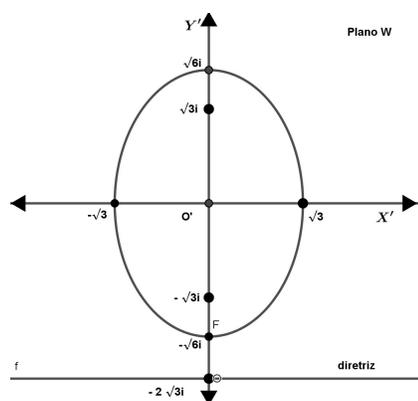


Figura 3.1: Elipse no Plano W .

Passo 8: Aplicar a isometria inversa para obter os elementos no sistema de coordenadas original.

Já sabemos que a direção da diretriz no plano complexo é dada por $v = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right)$. Sabemos ainda que se θ é o ângulo de v forma com o eixo OX do plano complexo, então θ pode ser calculado da seguinte forma:

$$\theta = \arctan \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \right) = \arctan \left(-\frac{1}{2} \right) = -\underbrace{\arctan \left(\frac{1}{2} \right)}_{\alpha} = -\alpha.$$

Como θ é negativo, a equação $z = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) w$ traduz que cada ponto z do plano complexo é obtido pela rotação de cada ponto w do plano W de um ângulo θ no sentido horário.

Dessa forma:

- Os focos $c'_1 = \sqrt{3}i$ e $c'_2 = -\sqrt{3}i$ são levados em $c_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$ e $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$, respectivamente.
- Os vértices $a'_1 = \sqrt{6}i$, $a'_2 = -\sqrt{6}i$ são levados em $a_1 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}i$ e $a_2 = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}i$, respectivamente.
- Os vértices $b'_1 = \sqrt{3}i$ e $b'_2 = -\sqrt{3}i$ são levados em $b_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$ e $b_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$, respectivamente.
- A localização da diretriz $\gamma = -2\sqrt{3}i$ é levada em $\gamma = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$.

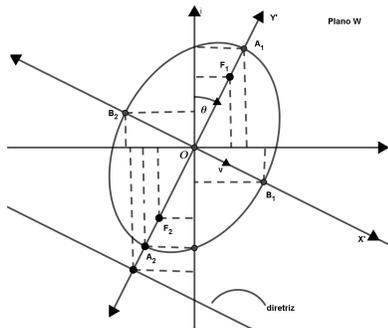


Figura 3.2: Elipse da equação.

Note que $O' = 0 + 0i$ é levada pela equação em $O = 0 + 0i$ e a diretriz é dada por $f(t) = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) + t\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i\right)$.

Exemplo 3.1.7. Vamos determinar os elementos da cônica cuja equação é dada por $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 8y = 0$

Passo 1: Verificar se $a \neq c$ e $b \neq 0$.

Note que na equação $a = 2$, $b = -4$ e $c = 2$, veja que $2 = 2$, ou seja, $a = c$, mas, $b = -4 \neq 0$ logo a equação $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 8y = 0$, pode representar uma cônica.

Passo 2: Complexificando a equação, tomando $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, e depois de simplificarmos e agruparmos os termos semelhantes obtemos a equação:

$$iz^2 + (-i)\bar{z}^2 + 2z\bar{z} + (-4i)z + (4i)\bar{z} = 0$$

Passo 3: Colocar a equação na forma padrão (Dividindo a equação por $|A|$ e multiplicando por -1 se, $B \leq 2$;

Observe que na última equação $|A| = |i| = 1$, e neste caso a equação já está na **forma padrão**.

E a direção da diretriz é dada por

$$v = \sqrt{A} = \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{1+0}{2}} - \sqrt{\frac{1-0}{2}}i = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Passo 4: Aplicar a rotação $z = \sqrt{A}w$ para obter a forma canônica;

Fazendo a mudança de variável $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)w$, obtemos a forma canônica.

$$w^2 + \bar{w}^2 + 2w\bar{w} + \left(-\frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}}i\right)w + \left(-\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}i\right)\bar{w} = 0$$

Passo 5: Verificar na tabela se a equação na forma canônica representa uma cônica;

Como $B = 2$, basta verificar que $c'_2 = -\frac{4}{\sqrt{2}} \neq 0$ e portanto, a forma canônica representa uma parábola:

Passo 6: Usar a equação nesse novo sistema de coordenadas;

E com isso obtemos a equação

$$x''^2 = -\sqrt{2}y'' \quad (3.3)$$

Note que a equação (3.3) está na forma canônica em relação ao plano U , ou seja, os eixos da cônica estão paralelos aos eixos coordenados do plano U .

Passo 7: Determinar todos os elementos na cônica nesse último sistema de coordenadas;

Assim $2p = \sqrt{2}$ e portanto, $\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Assim a parábola tem vértice em O'' , e o foco é dado pelo complexo $c'' = -\frac{\sqrt{2}}{4}i$ e a localização da diretriz no eixo $O''Y''$ é dada pelo complexo $y'' = \frac{\sqrt{2}}{4}i$ como mostra a figura (3.3).

Passo 8: Aplicar a isometria inversa para obter os elementos no sistema de coordenadas original.

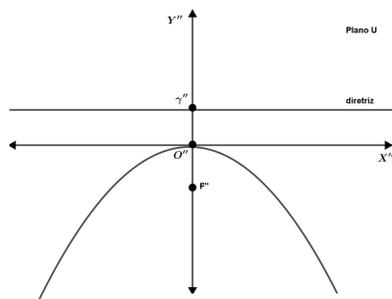


Figura 3.3: Parábola no Plano U de equação $x''^2 = -\sqrt{2}y''$.

Já sabemos que a direção da diretriz no plano complexo é dada por $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$. Sabemos ainda que se θ é o ângulo de v forma com o eixo OX do plano complexo, então θ pode ser calculado da seguinte forma:

$$\theta = \arctan \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \arctan(-1) = -45^\circ.$$

Como θ é negativo, a equação $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) w$ traduz que cada ponto z do plano complexo é obtido pela rotação de cada ponto w do plano W de um ângulo θ no sentido horário.

Dessa forma:

- O foco C é dado por $c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$;
- O vértice V é dado por $v = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$;
- A localização da diretriz $\gamma = 1$.

Exemplo 3.1.8. A ilha do tesouro. (O problema a seguir foi inspirado no livro *Um, dois, três, ... infinito* de George Gamow.)

Era uma vez dois irmãos aventureiros que encontraram no baú de lembranças do seu avô pirata e um exímio conhecedor da matemática, o mapa de um tesouro, juntamente com as instruções para localizá-lo.

Nas instruções do mapa constava que o tesouro fôra enterrado em uma ilha, cuja localização estava descrita de forma clara. Encontrada a ilha, deveriam procurar um campo aberto e arenoso onde deveriam marcar o centro do terreno, e avistariam ao



Figura 3.4: A ilha do tesouro.

lado direito numerosas palmeiras alinhadas ao longo de uma reta (**diretriz**), de modo que uma delas possuiria um desenho geométrico feito em seu topo a uma altura desconhecida (x), e que no momento no qual escondeu o tesouro o sábio pirata percebeu que ao amanhecer a sombra projetada desde o pé da palmeira ao seu final era igual ao dobro da altura da mesma ($2x$). Devido aos seus conhecimentos matemáticos e vasta experiência visitando a ilha, o pirata percebeu que a cada 20 anos a palmeira crescia um valor (y). A partir disso, sabia que passados 60 anos a palmeira cresceria ($3y$) e nova sombra projetada mediria o dobro da distância anterior. Todavia, visando proteger seu tesouro e aspirando que somente hábeis matemáticos seriam dignos e merecedores de tamanha riqueza, ele enterrou seu tesouro no foco da cônica mais distante da linha das palmeiras cuja equação seria representada através do triângulo imaginário formado entre a palmeira após o crescimento, sua nova sombra e a distância entre o desenho e o fim da sombra.



Figura 3.5: O tesouro.

Os netos após a leitura das instruções perceberam que restavam apenas 15 dias

até o tempo previsto pelo seu avô. E, inspirados no espírito aventureiro e gosto pela matemática herdados, foram resolver o desafio. Ao chegar na ilha ao amanhecer como indicava as instruções, perceberam que as informações estavam corretas. Encontrando a palmeira, mediram a distância entre a figura nela desenhada e o fim da sombra, encontrando 60m, construindo o novo triângulo, e usando o teorema de Pitágoras obtiveram:

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= a^2 \\ (x + 3y)^2 + (4x)^2 &= 60^2 \\ 17x^2 + 6xy + 9y^2 &= 3600 \end{aligned}$$

Então a partir da equação gerada puderam dar início aos cálculos para determinar os focos da cônica, assim usando o algoritmo proposto acima podemos ajudá-los a determinar tais elementos;

Passo 1: Verificar se $a \neq c$ e $b \neq 0$.

Note que na equação gerada $a = 17, b = 6$ e $c = 9$, assim temos $17 \neq 9$ e $b = 6 \neq 0$, logo a equação $17x^2 + 6xy + 9y^2 = 3600$, pode representar uma cônica.

Passo 2: Complexificar a equação tomando $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

$$\begin{aligned} 17 \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + 6 \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + 9 \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 &= 3600 \\ 17 \left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} \right) + 6 \left(\frac{z^2 + \bar{z}^2}{4i} \right) + 9 \left(\frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4} \right) &= 3600, \frac{1}{i} = -i \\ 17 \left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} \right) - 6i \left(\frac{z^2 - \bar{z}^2}{4} \right) + 9 \left(\frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4} \right) &= 3600. (4) \\ 17(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) - 6i(z^2 - \bar{z}^2) - 9(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2) &= 14400 \\ 17z^2 + 34z\bar{z} + 17\bar{z}^2 - 6iz^2 + 6i\bar{z}^2 - 9z^2 + 18z\bar{z} - 9\bar{z}^2 &= 14400 \\ (8 - 6i)z^2 + (8 + 6i)\bar{z}^2 + 52z\bar{z} &= 14400 \end{aligned}$$

Passo 3: Colocar a equação na forma padrão (Dividindo a equação por $|A|$ e multiplicando por -1 $B \leq 2$;).

Para colocar na forma padrão devemos dividir a equação pelo módulo de A , observe que na última equação $|8 + 6i| = \sqrt{8^2 + (6)^2} = \sqrt{100} = 10 \neq 1$, assim vamos dividi-la por $|8 + 6i| = 10$, ou seja

$$\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \right) + \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i \right) \bar{z}^2 + \frac{26}{5}z\bar{z} = 1440.$$

Como $|A| = \left| \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i \right| = 1$ e $B = \frac{26}{5} > -2$ a equação está na forma padrão.

E a direção da diretriz é dada por

$$v = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} - \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}}i = \left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}}i \right).$$

Passo 4: Aplicar a rotação $z = \sqrt{A}w$ para obter a forma canônica;

Fazendo a mudança de variável $z = \left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}}i \right) w$, obtemos a forma canônica.

$$w^2 + \bar{w}^2 + \frac{26}{5}w\bar{w} = 1440 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(w^2) + \frac{26}{5}|w|^2 = 1440$$

Passo 5: Verificar na tabela se a equação na forma canônica representa uma cônica;

Como $B = \frac{26}{5} > -2$, temos que analisar o caso da elipse:

$$D' = \frac{c_1'^2}{B+2} + \frac{c_2'^2}{B-2} - D = \frac{0^2}{\frac{26}{5}+2} + \frac{0^2}{\frac{26}{5}-2} - (-1440) = 1440 > 0$$

e portanto, a equação $17x^2 + 6xy + 9y^2 = 3600$ representa uma elipse.

Passo 6: Usar a equação nesse novo sistema de coordenadas;

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1 x_2'^2}{D'} + \frac{\lambda_2 y_2'^2}{D'} &= 1 \\ \frac{x'^2}{200} + \frac{y'^2}{450} &= 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Note que a equação (3.4) está na forma canônica em relação ao plano w , ou seja, os eixos da cônica estão paralelos aos eixos coordenados do plano w .

Passo 7: Determinar todos os elementos na cônica nesse último sistema de coordenadas;

- $a = \sqrt{450}$, $b = \sqrt{200}$ e pela equação $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se que $c = 5\sqrt{10}$.
- a medida do eixo maior é $30\sqrt{2}$ e a medida do eixo menor é $10\sqrt{2}$.
- os vértices são: $a'_1 = 15\sqrt{2}i$, $a'_2 = -15\sqrt{2}i$, $b'_1 = 5\sqrt{2}i$ e $b'_2 = -5\sqrt{2}i$.
- os focos são $c'_1 = 5\sqrt{10}i$ e $c'_2 = -5\sqrt{10}i$.

- a excentricidade é $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5\sqrt{10}}{15\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.
- a diretriz $\gamma = \pm \frac{a}{\varepsilon}i = \pm 9\sqrt{10}i$.

Observação 3.1.9. Na figura (3.6) temos a representação geométrica da equação (3.3) no plano W . Note que a linha das palmeiras **diretriz** é sempre paralela ao eixo não focal da cônica e sua localização foi tomada em relação ao foco $5\sqrt{2}i$ por isso $\gamma = 9\sqrt{10}i$. Pois as palmeiras se encontram à direita da elipse e portanto o tesouro estará enterrado no foco $-5\sqrt{2}i$ que está mais distante da linha das palmeiras.

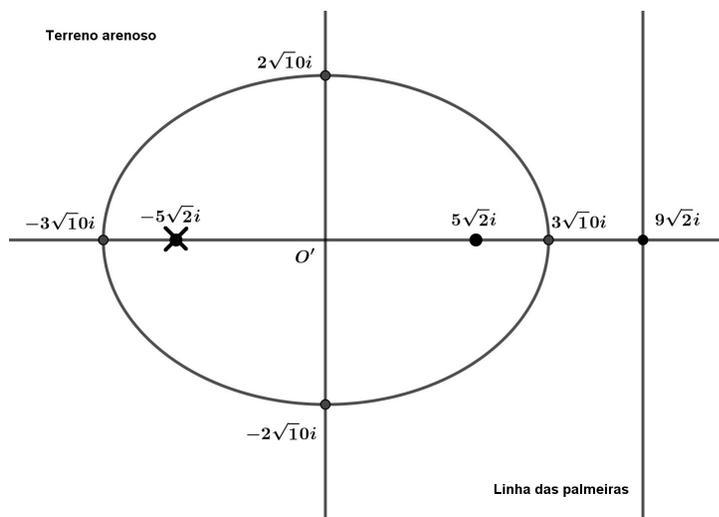


Figura 3.6: O "X" marca o local.

3.1.5 Equações Paramétricas

Seja

$$F(x, y) = 0 \quad (3.5)$$

A equação de uma curva plana C em coordenadas cartesianas retangulares. Sejam x e y funções de uma terceira variável t em um subconjunto, I , do conjunto dos números reais, \mathbb{R} , ou seja,

$$x = f(t)$$

e

$$y = g(t) \tag{3.6}$$

Se para qualquer valor da variável t no conjunto I , os valores de x e y determinados pelas equações (3.6) satisfazem (3.5), então as equações (3.6) são chamadas de **equações paramétricas da curva C** e a variável independente t é chamada de **parâmetro**. Dizemos também que as equações (3.6) formam uma **representação paramétrica da curva C** . A representação paramétrica de curvas tem um papel importante no traçado de curvas pelo computador.

Exemplo 3.1.10. *A Elipse de equação*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.7}$$

Pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = acost$$

e

$$y = bsent \tag{3.8}$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$.

Pois se em (3.6) elevarmos ao quadrado e dividirmos por a^2 a primeira equação, elevarmos ao quadrado e dividirmos por b^2 a segunda equação e depois somarmos os resultados obteremos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1. \tag{3.9}$$

Exemplo 3.1.11. *A Hipérbole de equação*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.10}$$

Pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = asect$$

e

$$y = btant \tag{3.11}$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$, $t \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Pois se em (3.9) elevarmos ao quadrado e dividirmos por a^2 a primeira equação, depois elevarmos ao quadrado e dividirmos por b^2 a segunda equação e depois somarmos os resultados iremos obter

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \sec^2 t - \tan^2 t = 1. \quad (3.12)$$

Agora vamos apresentar uma outra representação paramétrica da hipérbole. Para isso vamos definir duas funções

$$f_1(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

e

$$f_2(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad (3.13)$$

A hipérbole definida por (3.8) pode, também, ser representada parametricamente por

$$x = af_1(t)$$

e

$$y = bf_2(t) \quad (3.14)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Pois em (3.11) elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação, elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação e subtraindo os resultados obteremos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = (f_1(t))^2 - (f_2(t))^2 = \frac{1}{4}(e^{2t} + 2 + e^{-2t}) - \frac{1}{4}(e^{2t} - 2 + e^{-2t}) = 1. \quad (3.15)$$

As funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ definidas por (3.11) recebem o nome de **cosseno hiperbólico** e **seno hiperbólico**, respectivamente e são denotados por $\cosh t$ e $\sinh t$. De (3.11) segue a seguinte relação fundamental entre o cosseno e o seno hiperbólicos

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \quad (3.16)$$

E a representação paramétrica de (3.11) pode ser escrita como

$$x = a \cosh t$$

e

$$y = b \sinh t \tag{3.17}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

$$x = -a \cosh t$$

e

$$y = b \sinh t. \tag{3.18}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$

É uma representação paramétrica da hipérbole (3.8). Note que com apenas (3.11) obtemos somente o ramo direito da hipérbole e com (3.13), somente o ramo esquerdo.

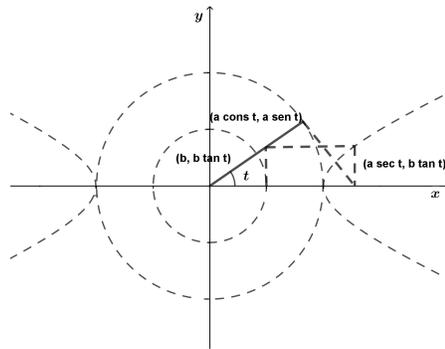


Figura 3.7: Hipérbole parametrizada usando secante e tangente.

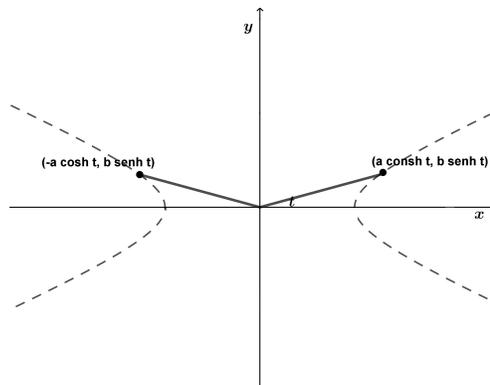


Figura 3.8: Hipérbole parametrizada usando as funções hiperbólicas.

Exemplo 3.1.12. *Vamos mostrar a forma de fazer a parametrização de uma curva no qual sabemos sua equação em coordenadas polares $r = f(\theta)$.*

$$x = f(t)\cos t$$

e

$$y = f(t)\sin t \tag{3.19}$$

A equação dessa curva em coordenadas cartesianas é

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = f(\theta(x, y)), \text{ se } f(\theta(x, y)) \geq 0 \\ -\sqrt{x^2 + y^2} = f(\theta(x, y)), \text{ se } f(\theta(x, y)) < 0 \end{cases}$$

Ou

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |f(\theta(x, y))|. \tag{3.20}$$

Para a parametrização de (3.15) temos que

$$\sqrt{x^2 + y^2} - |f(\theta(x, y))| = \sqrt{[(f(t))^2 \cos^2 t + (f(t))^2 \sin^2 t]} - |f(t)| = 0.$$

O que mostra que (3.14) é uma parametrização para (3.15) e portanto para $r = f(\theta)$. Por exemplo,

$$x = \frac{e \cos t}{1 + e \cos t}$$

e

$$y = \frac{e \sin t}{1 + e \cos t}. \tag{3.21}$$

É uma parametrização de uma cônica com excentricidade $e > 0$, reta diretriz localizada à direita a uma distância igual a 1 e um dos focos na origem.

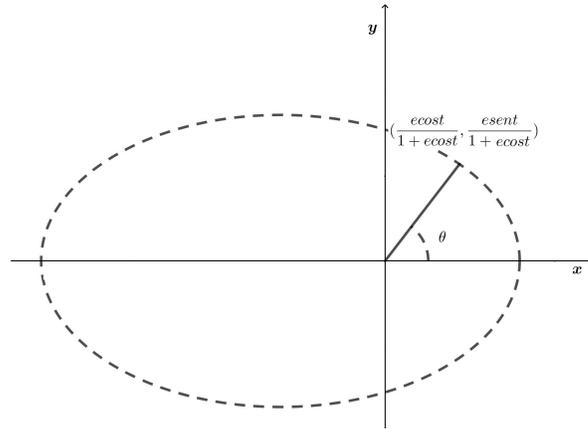


Figura 3.9: Elipse parametrizada com foco na origem usando a fórmula em coordenadas polares.

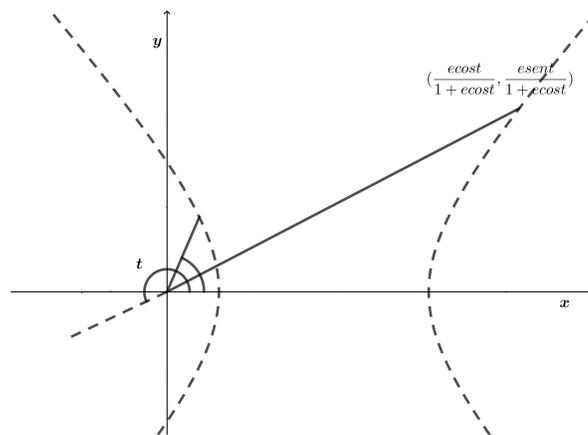


Figura 3.10: Elipse parametrizada com foco na origem usando a fórmula em coordenadas polares.

Capítulo 4

Ensino dos Complexos e das Cônicas no Ensino Médio

Nesta seção realizamos um estudo de caso sobre a utilização dos conteúdos, cônicas e números complexos pelos professores do ensino médio, principalmente os dos 3º anos, suas experiências e pontos de vista na abordagem ou não de tais conteúdos, assim como as dificuldades nessa nova ótica de prioridades de conteúdos adotadas pela B.N.C.C. (Base Nacional Curricular Comum). A Base Nacional Comum Curricular é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Conforme definido na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), a Base deve nortear o mínimo dos currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas, como também as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil e aprovados ano passada.

Alguns conteúdos como os números complexos e as cônicas estão em uma situação, um tanto paradoxal: de um lado não são estudados adequadamente no Ensino Superior por serem considerados conhecimento básico e de outro são evitados no Ensino Médio por serem considerados pouco necessários e inúteis. Talvez esta situação aconteça pela abordagem pouco significativa e contextualizada. Por exemplo, os números complexos, normalmente são utilizadas para dar solução imaginária a uma equação que já sabemos não possuir solução. (XI Encontro Nacional de Educação Matemática Curitiba – PR, 2013, p.13).

Iniciamos nosso estudo conversando com alguns professores do ensino médio e

percebemos que eles passam por um paradoxo parecido, pois em muitas vezes se deparam com o desafio de "recuperar" conteúdos matemáticos básicos que ficaram mal compreendidos pelos alunos durante o ensino fundamental e com a necessidade de apresentar novos conteúdos, se deparando com o paradigma de ter em algumas situações que escolher entre conteúdos matemáticos que são cobrados em avaliação de massa e conteúdos que são pré-requisitos necessários para a vida acadêmica de muitos educandos.

Por ser a principal porta de entrada para as Universidade Públicas brasileiras uma das avaliações de massa mais enfatizadas o, ENEM, (Exame Nacional do Ensino Médio), que vem ao longo dos anos se adaptando e mudando o método como os conteúdos matemáticos são cobrados assim como as formulações de suas perguntas, pois, o exame prioriza uma matemática mais prática, diferenciando e muito, da forma que eram cobrados os conteúdos durante os vestibulares e PSS (Processo Seletivo Seriado).

Por conseguinte, observamos que muitos defendem a maneira que é feita tal mensuração de conteúdos, visto que as questões estão dentro de uma ótica de aplicabilidade da matéria, outros não concordam muito com o método, pois, dizem afastar a matemática científica que será usada pelos alunos em vários cursos pleiteados por eles no nível superior, dificultando o aprendizado do mesmo durante a vida acadêmica. O gráfico da figura 4.1 mostra os conteúdos cobrados no ENEM 2015.

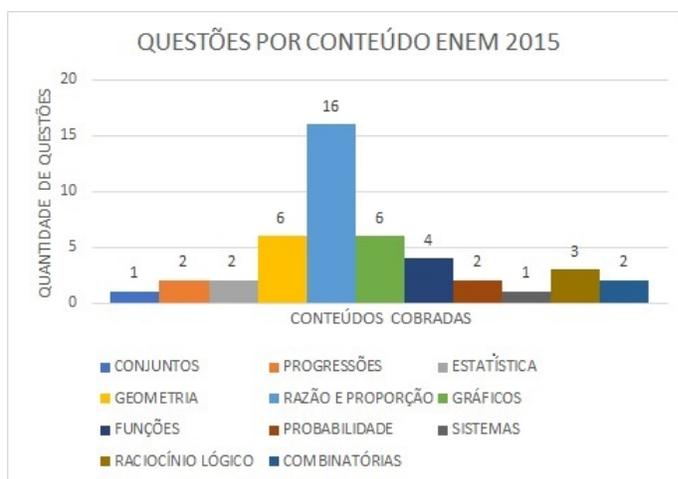


Figura 4.1: Gráfico com conteúdos de matemática abordados na prova do ENEM 2015.

Esta unificação não se daria, entretanto, por uma integração mecânica desses campos, nem simplesmente pela exclusão de velhos temas ou inclusão de novos, mas, sobretudo, pela introdução de elementos unificadores tais como a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e as relações que, acreditava-se, constituiriam a base para a construção lógica do novo edifício matemático. (FIORENTINI, 1992, p.45).

Com o propósito de conhecer a opinião de quem faz o ensino da matemática e está na ponta desse grande desafio, resolvemos fazer uma pesquisa com alguns colegas professores de matemática do ensino básico. Com isso foi elaborado um questionário que servirá de base para nosso estudo, abordando o ensino de cônicas e números complexos no 3º ano do ensino médio, buscando assim conhecer um pouco da opinião, dificuldades e das estratégias usadas por esses profissionais para lecionar os assuntos mencionados.

QUESTIONÁRIO

- 1) Que tipo de instituição você leciona?
 - () Pública
 - () Privada
- 2) Qual é o seu grau de instrução?
 - a) Curso superior. Cite
 - b) Especialização. Cite
 - c) Mestrado. Cite
 - d) Doutorado. Cite
 - e) Em que ano você concluiu seu último curso?
- 3) Há quantos anos você exerce a profissão de professor(a)?
 - a) Menos de 5 anos.
 - b) Entre 5 e 10 anos.
 - c) Entre 10 e 15 anos.
 - d) Mais de 15 anos.
- 4) Qual sua opinião sobre o ensino de Cônicas e Números Complexos no ensino médio? Explique.
- 5) Qual sua opinião no uso de complexos para resolver cônicas?
- 6) Você relaciona esses conteúdos em seu programa anual? Em caso afirmativo consegue ministra-los? Em caso negativo comente.

4.1 Pesquisa com Professores do 3º Ano do Ensino Médio

Nossa pesquisa busca se aproximar da realidade vivida por esses professores no dia a dia, com isso, aplicamos o questionário com 20 profissionais que lecionam nas redes pública e privada dos estados de Sergipe e Alagoas, e com base nas respostas obtidas, faremos uma síntese dessas opiniões através de gráficos e a posteriori uma análise dos dados coletados. As primeiras questões são em relação ao perfil dos entrevistados.

QUESTÃO 1



Figura 4.2: Gráfico com resultado da pesquisa questão 1.

QUESTÃO 2

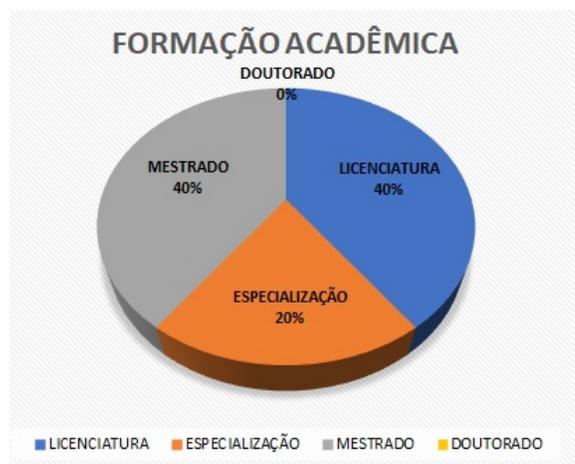


Figura 4.3: Gráfico com resultado da pesquisa questão 2.

QUESTÃO 3



Figura 4.4: Gráfico com resultado da pesquisa questão 3.

QUESTÃO 4



Figura 4.5: Gráfico com resultado da pesquisa questão 4.

QUESTÃO 5

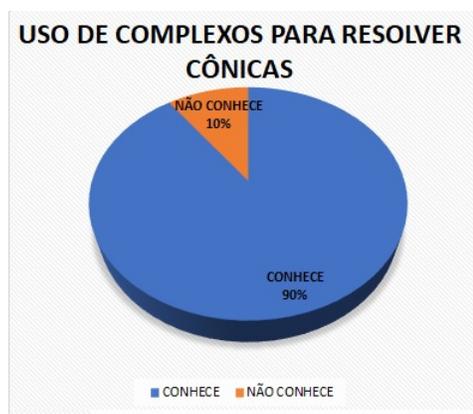


Figura 4.6: Gráfico com resultado da pesquisa questão 5.

QUESTÃO 6



Figura 4.7: Gráfico com resultado da pesquisa questão 6.

ANÁLISE DAS QUESTÕES SUBJETIVAS

As próximas respostas exprimem pensamentos e opiniões dos professores entrevistados em relação ao ensino e dificuldades de lecionar os conteúdos abordados na pesquisa. Diante do exposto observamos uma convergência de opiniões da maioria desses profissionais como apresentados nos gráficos a seguir relataremos algumas dessa opiniões.

QUESTÃO 4

Sobre o ensino dos conteúdos, a maioria dos profissionais responderam que os dois conteúdos são de extrema relevância e valia para o estudo de outras ciências, importante e relevante para os cursos na área das exatas e para concretizar e estruturar os conhecimentos, mencionaram também a falta de ênfase em tais conteúdos no 3º ano do ensino médio devido ao curto tempo e quantidade de conteúdos que tem que revisar para o ENEM.

QUESTÃO 5

Nesta questão gostaríamos de saber se os mesmos conhecem ou não o uso de do conjunto dos números complexos para resolver cônicas. A grande maioria 90 por cento, responderam que conhecem e relacionaram o auxílio e ferramentas que tal conjunto numérico fornece para resolver questões envolvendo cônicas cujos eixos não são paralelos aos eixos cartesianos sem ter a necessidade do uso da álgebra linear.

QUESTÃO 6

Nessa questão queríamos saber se os professores ministram tais conteúdos, e como fazem, visto que em nossa tese e nas conversas que tivemos com alguns colegas professores, as dificuldades de lecioná-los era enorme, pois, havia uma cobrança social grande envolvendo conteúdos abordados no ENEM, e dessa forma ao analisar as respostas comprovamos que devido o foco do 3º ano do ensino médio ser mesmo conteúdos cobrados no ENEM, muitos colegas deixam de relacionar tais assuntos, e quando o fazem, abordam de forma sucinta, não tratando mais detalhes sobre ambos os conteúdos como mostrado no gráfico da questão 6.

Capítulo 5

Considerações Finais

Este trabalho busca servir como material de apoio e pesquisa para professores e alunos em geral, pois, nele foram abordados conteúdos que são considerados intrigantes e de difícil compreensão por muitos. Nos surgiu a dúvida se tais conteúdos estão sendo trabalhados em sala de aula no ensino médio, pergunta esta que buscamos responder no capítulo 3, por isso, resolvemos tratar esses assuntos de forma clara e leve, contruindo um material didático e atrativo.

Assim expomos no primeiro capítulo uma pouco da história e evolução dos números complexos antes de apresentar suas formas e estruturas. No segundo capítulo mostramos as cônicas, seus elementos e um pouco de seu uso em outras ciências, levando a interação desse assunto com a realidade, assim, buscamos aproximar um pouco mais a matemática abstrata, de sua utilização nos vários ramos da ciência e da vida em geral.

No terceiro capítulo, mostramos uma forma de trabalhar com as cônicas quando as mesmas não possuem seus eixos paralelos aos eixos cartesianos, envolvendo para isso o conjunto dos números complexos e suas coordenadas polares, que muito contribui para o estudo e representação das cônicas. E no quarto capítulo relatamos um estudo de caso a partir de uma pesquisa realizada durante este trabalho, retratando um pouco da realidade, opiniões e experiência de vida que alguns professores do 3º ano do ensino médio, dos estados de Alagoas e Sergipe que lecionam em instituições públicas e privadas.

Percebemos em conversas preliminares e reafirmamos ao analisarmos as respostas dadas por esses profissionais em nossos questionários, que mesmo sendo de grande relevância e importância para a estruturação de conhecimentos dos nossos alunos,

para a compreensão de outras ciências e para estudar alguns cursos superiores principalmente na área das exatas, o estudo de Números Complexos e Cônicas, vem sendo deixado de lado, pois, o foco atual do ensino médio passa a ser a aprovação dos estudantes no ENEM e como este exame prioriza alguns conteúdos básicos, como disposto no gráfico 3.19, os mesmos passam a ter maior prioridade. Indagamos os professores sobre o conhecimento dos complexos para ajudar na representação e solução de cônicas e para nossa felicidade 90 por cento afirmou conhecer tais métodos.

Por fim questionamos se tais conteúdos são relacionados em seus planejamentos anuais, e em caso afirmativo quais métodos usam para ministrá-los. Novamente com as respostas dadas por esses profissionais, reinteiramos nossa tese de que, mesmo sendo de grande relevância e importância alguns obstáculos levam esses conteúdos a não serem colocados nos planejamentos anuais e quando são relacionados aparecem no fim do ano letivo de forma sucinta após a realização do ENEM, muitas vezes devido aos calendários escolares do ensino básico, principalmente os das redes públicas estaduais que estão em desacordo com o calendário acadêmico das universidades.

Isto posto, vimos que mudanças impostas na educação de cima para baixo, sem a devida discussão com quem faz a educação básica é menos valiosa e menos eficaz do que as mudanças feitas a partir de ampla discussão e debate com aqueles que estão na ponta dessa atividade desafiadora e instigante, assim debater o processo de avaliação em massa e inclusão ou exclusão de conteúdos no currículo escolar deve ser um trabalho contínuo e processual constante.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER *História da Matemática. Trad. Elza F. Gomide.* SP. Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.
- [2] HEFEZ, ABRAMO. *Curso de álgebra, volume 1 - Coleção Matemática Univer-sitária/Abramo Hefez.* Rio de Janeiro: IMPA, 2011. (nORTH-hOLLAND), 1992.
- [3] GARBI *O Romance das equações algébricas.*SP: Makron Books, 1997.
- [4] IEZZI, GELSON. *Fundamentos da Matemática Elementar, volume 6: Comple-xos, Polinômions e Equações / Gelson Iezzi -7.* São Paulo: ATUAL, 2005.
- [5] DELGADO, FRENSEL,CRISSAFF. *Geometria Analítica, 2ª Ed..* Rio de Ja-neiro: SBM , 2017. 363 p.(Coleção PROFMAT).
- [6] TACILDO de S. *Números Complexos e Cônicas.* 80 p. Dissertação (Mestrado em Matemática). UFA. Manaus, 2014.
- [7] RAFAEL, V. *O Ensino dos Numeros Complexos.* Curitiba. , 2013.
- [8] STEINBRUCH, A; WINTERLE,P. *Geometria Analítica.* 2ª ed. São Paulo: Pe- arson Makron Books, 1987.
- [9] <<http://www.ime.usp.br/martha/caem/complexos.pdf>>. Acesso em: 12 de mar. 2012.>. Acesso em 01/10/2017.
- [10] <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/12_20Ulicio20Pinto.pdf>. Acesso em 20/10/2017
- [11] <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euler/complexoshistoria.htm>>. Acesso em 01/11/2017