

FUNDAÇÃO  
UNIVERSIDADE  
FEDERAL DE  
MATO GROSSO DO SUL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL  
Câmpus de Três lagoas

# O Teorema de Euler para Poliedros Convexos em sala de Aula

José Haddad Alli

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador

Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade

2016



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
Pólo de Três Lagoas

## O Teorema de Euler para Poliedros Convexos em sala de Aula

por

José Haddad Alli

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:




Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade (Orientador)

UFMS/CPTL

  
Prof. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

Unesp/Rio Claro

  
Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza

UFMS/CPTL

agosto de 2016

*Dedico este trabalho às minhas  
filhas Nathalia e Beatriz e  
à minha esposa Elenir por  
darem sentido à minha vida.  
Por serem a razão da minha  
existência. . . .*

# Agradecimentos

À minha avó tão querida, Ward Youssef Haddad, perfeita definição de Amor.

A meus pais, José e Rizete, bases da minha vida. Às minhas filhas Nathalia e Beatriz, razão de meus constantes agradecimentos à vida. À minha esposa Elenir, companheira de tantos anos, meu amor nessa vida e em outras vidas que porventura possam existir.

A meu orientador, Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade pela atenção, paciência, dedicação, compreensão e inspiração.

Ao Coordenador do PROFMAT da UFMS de Três Lagoas, Prof. Dr. Antônio Carlos Tamarozzi pelo incentivo e apoio constantes.

A todos os Professores do PROFMAT da UFMS de Três Lagoas pela forma como nos orientaram nos estudos, pela atenção, pela paciência.

A todos os meus colegas do PROFMAT pela amizade e companheirismo, especialmente à Glaucia Maria Queiroz de Freitas e Silvânia Cintra por todos os momentos que passamos juntos estudando, nos ajudando mutuamente, nos incentivando uns aos outros.

# Resumo

Este trabalho é uma proposta do uso do origami e do software GeoGebra no curso de Geometria Espacial para alunos do 2º ano do ensino médio. A escolha deste software se deu por suas características didáticas e interativas, que tornam a compreensão dos conceitos trabalhados mais acessível e prazerosa aos alunos. O software foi utilizado na construção de Sólidos de Platão e sua planificação, animada ou não. O origami foi utilizado pela possibilidade de construção das faces e montagens dos poliedros pelos alunos ou professores.

Espero que a leitura desse material desperte nos professores o desejo de incorporação de recursos tecnológicos, como o origami e o GeoGebra, no desenvolvimento do trabalho com sólidos geométricos.

**Palavras-chave:** Sólidos de Platão, Origami, GeoGebra, Euler.

# Abstract

This work is a proposal for the use of origami and GeoGebra software in the course of spatial geometry for the 2nd year high school students.

The choice of this software was given for its didactic and interactive features that make the understanding of the concepts worked more accessible and enjoyable for students. The software was used in the construction of Plato's Solids and their planning, animated or not.

The origami was used by the possibility of construction of faces and assemblies of polyhedra by students or teachers.

I hope that reading this material teachers can be desire to incorporate technological resources, such as origami and GeoGebra, in development work with geometric solids .

**Keywords:** Plato's Solids, Origami, GeoGebra, Euler.

# Lista de Figuras

1.1	Platão	10
1.2	Euler	11
1.3	Poliedros Convexo e não Convexo	13
2.1	Sólidos de Platão	19
2.2	Tetraedro	20
2.3	Hexaedro	20
2.4	Octaedro	21
2.5	Dodecaedro	21
2.6	Icosaedro	22
3.1	Contorno Aparente	25
4.1	Construção do módulo e montagem do Hexaedro	37
4.2	Módulos de Encaixe	39
4.3	Montagem do Icosaedro	40
4.4	Parte 1-Construção do Dodecaedro	41
4.5	Parte2- Construção do Dodecaedro	42
4.6	Alunos Manuseando os Sólidos	43
4.7	Alunos respondendo a questionário sobre os sólidos de Platão	43

# Sumário

<b>1</b>	<b>Aspectos Históricos, Tecnológicos e Metodológicos</b>	<b>10</b>
1.1	História . . . . .	10
1.1.1	Platão . . . . .	10
1.1.2	Euler . . . . .	11
1.1.3	A existência de apenas cinco poliedros regulares . . . . .	13
1.2	Recursos Tecnológicos . . . . .	16
1.3	Aspectos Metodológicos . . . . .	16
1.3.1	Objetivos Específicos . . . . .	16
1.3.2	Metodologia . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Sólidos de Platão</b>	<b>19</b>
2.0.3	Tetraedro . . . . .	20
2.0.4	Hexaedro . . . . .	20
2.0.5	Octaedro . . . . .	20
2.0.6	Dodecaedro . . . . .	21
2.0.7	Icosaedro . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Demonstrações do Teorema de Euler</b>	<b>23</b>
3.1	Primeira demonstração - Zoroastro Azambuja Filho . . . . .	23
3.2	Demonstração do Teorema de Euler por Adrien Marie Legendre . . . . .	27
3.3	O caso plano do Teorema de Euler . . . . .	30
3.4	Uma outra Demonstração do Teorema de Euler no Plano . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Estudo Dirigido em Sala de Aula</b>	<b>34</b>
4.1	Introdução . . . . .	34
4.2	Contextualização da Pesquisa . . . . .	34
4.3	Caracterização da Pesquisa . . . . .	35
4.4	Análise prévia dos resultados e construção dos sólidos utilizando Origami . . . . .	35
4.4.1	Pré-teste . . . . .	35
4.4.2	Apresentação dos Sólidos de Platão utilizando o Origami . . . . .	36
4.4.3	Construção do Hexaedro . . . . .	36



4.4.4	Construção do módulo triangular para confecção do Tetraedro, Octaedro e Icosaedro . . . . .	38
4.4.5	Construção do Módulo de Encaixe . . . . .	39
4.4.6	Montagem do Tetraedro e Octaedro . . . . .	39
4.4.7	Montagem do Icosaedro . . . . .	40
4.4.8	Construção do módulo e montagem do Dodecaedro . . . . .	41
4.4.9	Apresentação dos Sólidos de Platão utilizando os recursos do GeoGebra . . . . .	43
4.5	Teste Final do estudo dirigido em sala de aula . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>46</b>
	<b>Referências</b>	<b>48</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>49</b>

# Introdução

A habilidade de visualizar é imprescindível para o crescimento do aluno no processo ensino-aprendizagem quando se trabalha com geometria espacial.

Os PCN afirmam que “O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização” (Brasil, 1997, p. 127), que é um processo complexo e pessoal, ou seja, o que é visto por uma pessoa é visto de outra forma por outra pessoa.

Kaleff (2003, p. 17) afirma que:

“É importante que (a visualização) ocupe seu lugar no ensino da Geometria (...) O material concreto permite ao aluno, efetivamente, ver o objeto de seu estudo.”

A visualização de objetos tridimensionais não pode se prender a livros e lousas, por não serem os instrumentos adequados a isso. Dessa forma, o uso de materiais concretos é um interessante recurso para se fortalecer a aprendizagem de noções geométricas, a fim de que o aluno estabeleça conexões entre o campo das ideias e suas aplicações matemáticas, especificamente da Geometria, deixando de lado a noção de que são conceitos e procedimentos apartados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento.

A criação de uma imagem mental de um objeto geométrico, como os poliedros, é facilitada pela construção de modelos concretos construídos com os mais variados tipos de materiais e processos. O Origami, por exemplo, é uma técnica que poderá tornar prazerosa a aprendizagem.

O material concreto, associado à tecnologia, também deve ser utilizado, pois torna possível a elaboração de modelos tridimensionais que podem ser modificados de várias formas possibilitando a simulação de aspectos da realidade.

Neste trabalho apresentamos algumas ações que possibilitam a professores e alunos a utilização do material concreto de forma a tornar mais dinâmicas as aulas de Geometria, e também a construção de poliedros com um software.

Os alunos são levados a explorar os sólidos regulares de Platão construindo-os com as técnicas do origami e orientações precisas e detalhadas ou visualizando-os, já construídos.

Este trabalho é composto de 5 capítulos.

O capítulo 1 aborda aspectos históricos, tecnológicos e metodológicos com o intuito de encontrar maneiras de tornar a aula mais atrativa, participativa e agradável.

Nos capítulos 2 e 3 apresentamos os poliedros de Platão, o teorema de Euler e quatro demonstrações desse teorema.

No capítulo 4 é apresentado um estudo dirigido em sala de aula em que alunos do ensino médio de uma escola da rede pública respondem a questões sobre os poliedros antes do uso do software GeoGebra e da técnica do origami para construção de sólidos. Depois de os alunos travarem conhecimento com o software e com a técnica do origami, eles são novamente levados a responder às mesmas questões sobre os poliedros. Os resultados serão analisados, tabulados e discutidos.

Finalmente, no capítulo 5 serão abordadas algumas considerações e conclusões concernentes ao desenvolvimento do presente trabalho. No anexo teremos outras informações como gráficos, tabelas e figuras.

# Capítulo 1

## Aspectos Históricos, Tecnológicos e Metodológicos

### 1.1 História

Para essa seção consultamos as seguintes referências [1], [2],[4], [5],[8], [10] e [15].

#### 1.1.1 Platão



Figura 1.1: Platão

Platão, nascido em 427 a.C., não foi propriamente matemático, mas um filósofo e incentivador do estudo da Matemática. Ele e os membros de sua academia estudaram, dentre outros assuntos, os poliedros regulares, chamados assim de Corpos Platônicos.

No entanto, algumas fontes, como Proclo (410 d.C – 485 d.C), atribuem a descoberta destes sólidos a Pitágoras.

Outras evidências, porém, indicam que Pitágoras conhecia apenas o Tetraedro, o Hexaedro e o Dodecaedro, sendo atribuída a Theaetetus (417 a.C. – 362 a.C.) a descoberta do Octaedro e do Icosaedro, que também realizou um estudo aprofundado dos cinco sólidos regulares, e uma demonstração de que há apenas cinco destes sólidos.

A primeira demonstração escrita da existência de apenas cinco poliedros regulares é atribuída a Euclides.

Em um diálogo intitulado “Timeu”, Platão associa cada poliedro regular a um dos elementos clássicos. Água é associada ao icosaedro, terra é associada ao Hexaedro, fogo é associado ao tetraedro e ar ao octaedro. O dodecaedro, Platão associou à organização das constelações.

Os estudantes da academia de Platão associavam cada um dos doze signos do Zodíaco a cada uma das doze faces pentagonais do dodecaedro.

### 1.1.2 Euler



Figura 1.2: Euler

De acordo com um artigo escrito por Carlos Eduardo Tibúrcio, baseado no “The MacTutor History of Mathematics archive”, Leonhard Euler mudou-se de Basel para Riehen, com apenas um ano de idade, levado pelo pai, Paul Euler, ministro protestante. Euler foi conduzido por ele nos seus primeiros estudos matemáticos.

Ao chegar à adolescência, retornou a Basel para estudar e se preparar para o curso de teologia. Não foi na escola que Euler aprendeu Matemática, mas estudando sozinho e tomando lições particulares com o incentivo do pai.

Embora religioso, o estudo de teologia não o entusiasmou, e voltou-se ao estudo da matemática, sempre apoiado pelo pai.

Após terminar o curso, mudou-se para a Rússia em 1727, convidado para assumir um lugar na Universidade de São Petersburgo, onde filiou-se à Academia de Ciências, travando contato com cientistas renomados como Jakob Hermann, Daniel Bernoulli e Christian Goldbach.

Tornou-se professor de Física da Academia em 1730, o que lhe permitiu abandonar o posto de lugar-tenente da marinha russa. Após o retorno de Bernoulli a Basel em 1733, assumiu a cátedra de Matemática da Academia. Casou-se em 1734 com Katharina Gsell, moça de ascendência suíça.

Euler atribui a essa fase algumas de suas maiores proezas científicas. Desenvolveu uma série de projetos acerca de cartografia, magnetismo, motores a combustão, Máquinas e construção naval. Definiu o foco de suas pesquisas: teoria dos números, análises

no infinito e mecânica racional, campos que ele julgava estreitamente ligados.

Euler publica em 1737 o livro *Mechanica*, em que trata extensivamente da análise matemática da dinâmica newtoniana pela primeira vez. Nessa época surgem seus problemas de saúde, com crises febris constantes e o desenvolvimento de catarata, que acabou por tirar-lhe boa parte da visão. Isso não o impediu de ter sua reputação cada vez mais solidificada, como também recebeu dois prêmios da Academia de Paris em 1738 e 1739 e uma oferta, inicialmente recusada por ele, de trabalho em Berlin.

A conturbada situação política da Rússia, no entanto, fez com que reconsiderasse a oferta e, assim, assume o cargo de Diretor de Matemática da recém-fundada Academia de Berlin.

Suas contribuições à Academia foram notáveis: supervisionava o observatório e o jardim botânico, selecionava pessoal, coordenou a publicação de mapas geográficos e publicou inúmeros trabalhos científicos. Sua produção científica foi excepcional: escreveu quase 400 artigos, livros sobre cálculos e órbitas dos planetas, artilharia, balística, construção naval e navegação, movimentos da Lua, cálculo diferencial e muito mais.

Em 1759 morre o presidente da Academia de Berlin, Maupertius, fato que faz com que Euler assuma a direção da Academia. Desavenças com Frederico, o Grande, fazem-no deixar a Alemanha e retornar a São Petersburgo em 1766.

Em, 1771, teve sua casa destruída num incêndio, onde conseguiu salvar apenas seus manuscritos. Foi nesta época que ele ficou totalmente cego. No entanto, isso não o impediu que continuasse com seus projetos, sendo que metade de toda sua produção científica ocorreu nessa época, com a colaboração de seus filhos Johann e Christoph, e de dois membros da Academia, Lexell e Fuss, este último esposo de sua neta. Em 18 de setembro de 1783 Euler morre com 76 anos.

## Obra

Leonhard Euler é considerado como um dos mais prolífico matemáticos de todos os tempos. Para se ter uma ideia, seus trabalhos continuaram a ser publicados pela Academia de São Petersburgo até 50 anos após sua morte.

Entre suas contribuições mais conhecidas estão a introdução da função gama, a relação entre o cálculo diferencial de Leibniz, o método das fluxões de Newton, que é utilizado na resolução do problema de determinar a tangente à determinado ponto de uma curva, a resolução de equações diferenciais com a utilização do fator integrante, a abordagem de seno e cosseno como funções, a raiz quadrada de  $-1$ , o teorema ao qual foi atribuído seu nome para poliedros convexos e muitas outras.

O teorema, ou relação, de Euler para certa classe de poliedros é assim denominado em homenagem a ele, que apresentou a relação numa carta ao matemático e amigo Christian Goldbach em 1750. Euler escreveu dois trabalhos sobre poliedros, em 1750 e 1751. No entanto, esses trabalhos só foram publicados em 1758.

No primeiro deles, apresentou o teorema que estabelece relação entre as arestas ( $A$ ), vértices ( $V$ ) e faces ( $F$ ) dos poliedros, segundo ele válido para vários casos especiais:

$$V - A + F = 2.$$

Não apresentou, porém, uma prova para sua fórmula. Já no segundo trabalho ele apresenta uma prova, que se mostrou, depois, não rigorosa e com falhas. As falhas ocorreram por falta de definição precisa do que vem a ser um poliedro.

### 1.1.3 A existência de apenas cinco poliedros regulares

**Definição 1.1.** *Um conjunto  $C$ , do plano ou do espaço, diz-se convexo quando o segmento de reta que liga quaisquer dois pontos de  $C$  está inteiramente contido em  $C$ .*

**Definição 1.2.** *Um poliedro é uma reunião finita de polígonos planos, satisfazendo as propriedades listadas abaixo. Os polígonos planos são chamados as faces do poliedro, os lados desses polígonos chamam-se arestas do poliedro e os vértices dos polígonos são também chamados vértices do poliedro.*

- a) *A interseção de duas faces quaisquer do poliedro, ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.*
- b) *Cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces desse poliedro.*

*Diz-se que um poliedro é convexo quando ele limita um sólido convexo no sentido da definição acima.*

*Diz-se que um poliedro é regular quando ele for convexo, com todas as faces sendo polígonos regulares congruentes e o número de faces concorrentes em cada vértice sendo sempre o mesmo.*

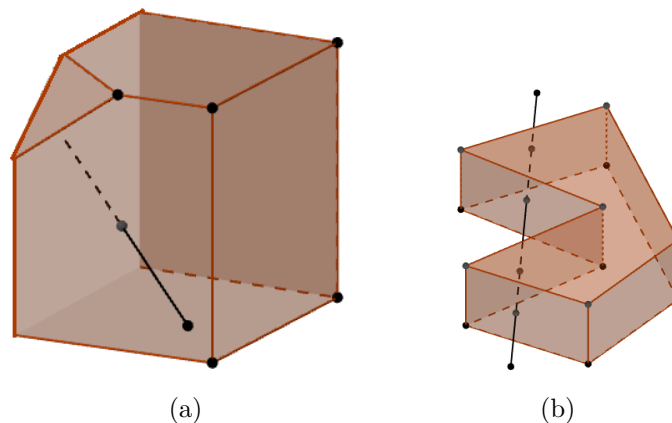


Figura 1.3: Poliedros Convexo e não Convexo

Os cinco sólidos platônicos são descritos no 13 livro de Os Elementos, de Euclides, e são assim chamados porque foram estudados pela escola de Platão. Platão associa cada um dos elementos clássicos (terra, ar, água e fogo) à um poliedro regular.

A seguir apresentaremos uma demonstração geométrica, baseada na prova feita por Euclides, da existência de apenas 5 poliedros regulares.

A soma dos ângulos internos das faces (polígonos) que compartilham o mesmo vértice é menor que  $360^\circ$ , pois se fosse igual a  $360^\circ$ , os polígonos estariam sobre o mesmo plano, e se fosse maior que  $360^\circ$ , os polígonos estariam se sobrepondo.

Assim, a planificação de um sólido, ao ter nivelados os seus vértices, apresentará um ângulo menor que  $360^\circ$ , necessitando ao menos três faces unidas em cada vértice.

Lembrando que um poliedro convexo é regular se suas faces são polígonos regulares, iguais entre si, com o mesmo número de faces em cada vértice. Assim, os únicos polígonos formadores de poliedros convexos regulares são o triângulo, o quadrado e o pentágono.

Ao utilizarmos três triângulos, teremos  $3 \times 60^\circ$  igual a  $180^\circ$ . Ao utilizarmos quatro triângulos, teremos  $4 \times 60^\circ$  igual a  $240^\circ$ . Ao utilizarmos cinco triângulos, teremos  $5 \times 60^\circ$  igual a  $300^\circ$ . Obviamente, é impossível a utilização de seis triângulos, pois seis triângulos totalizariam  $360^\circ$ .

Ao utilizarmos três quadrados, teremos  $3 \times 90^\circ$  igual a  $270^\circ$ . Obviamente, é impossível a utilização de quatro quadrados, pois quatro quadrados totalizariam  $360^\circ$ .

Ao utilizarmos três pentágonos, teremos  $3 \times 108^\circ$  igual a  $324^\circ$ . Obviamente, é impossível a utilização de quatro pentágonos, pois quatro pentágonos ultrapassariam os  $360^\circ$ .

Podemos concluir, assim, que não existem poliedros regulares com faces hexagonais ou com maior número de lados, existindo apenas o Tetraedro (quatro faces triangulares), o octaedro (oito faces triangulares), o Icosaedro (vinte faces triangulares), o Hexaedro (seis faces quadradas) e o Dodecaedro (doze faces pentagonais).

Abaixo temos a sistematização da demonstração acima da existência de apenas 5 sólidos platônicos:

N. de Triângulos equiláteros	Soma dos Ângulos	Poliedro Formado
3	$180^\circ$	Tetraedro
4	$240^\circ$	Octaedro
5	$300^\circ$	Icosaedro
$\geq 6$	$\geq 360^\circ$	Não Existe

Tabela 1.1: Sistematização de faces triangulares

Se as faces forem polígonos regulares com  $n \geq 6$  lados, a soma dos ângulos dos polígonos em torno de cada vértice é  $\geq 360^\circ$ . Portanto, não existe nenhum sólido platônico com faces hexagonais, heptagonais etc.



N. de quadrados	Soma dos Ângulos	Poliedro Formado
3	270°	Hexaedro
$\geq 4$	$\geq 360^\circ$	Não Existe

Tabela 1.2: Sistematização de faces quadradas

N. de Pentágonos regulares	Soma dos Ângulos	Poliedro Formado
3	324°	Dodecaedro
$\geq 4$	$\geq 360^\circ$	Não Existe

Tabela 1.3: Sistematização de faces pentagonais

A seguir apresentaremos uma demonstração da existência de apenas 5 poliedros regulares usando a relação de Euler ( $V - A + F = 2$ ).

Adotemos  $n$  o número de lados de cada face,  $p$  o número de arestas que concorrem em cada vértice,  $A$  o total de arestas do poliedro,  $F$  o total de faces e  $V$  o total de vértices. Tem-se que  $2A = nF = pV$ . Assim, obtemos

$$A = \frac{nF}{2} \text{ e } V = \frac{nF}{p}.$$

Substituindo as igualdades acima na relação de Euler  $V - A + F = 2$ , obtemos

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2.$$

Desenvolvendo a igualdade acima

$$\begin{aligned} \frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2 &\Leftrightarrow F\left(\frac{n}{p} - \frac{n}{2} + 1\right) = 2 \\ &\Leftrightarrow F\left(\frac{2n - np + 2p}{2p}\right) = 2 \\ &\Leftrightarrow F = \frac{4p}{2n - np + 2p}. \end{aligned}$$

Assim, devemos ter  $2n - np + 2p > 0$ , ou seja,

$$\frac{2n}{n-2} < p.$$

Como  $p \geq 3$ , chegamos a  $n < 6$ .

Para  $n = 3$  temos

$$n = 3 \Rightarrow F = \frac{4p}{6 - 3p + 2p} = \frac{4p}{6 - p} \Rightarrow \begin{cases} p = 3 \Rightarrow F = 4 \text{ (Tetraedro)}, \\ p = 4 \Rightarrow F = 8 \text{ (Octaedro)}, \\ p = 5 \Rightarrow F = 20 \text{ (Icosaedro)}. \end{cases}$$

Para  $n = 4$  e  $n = 5$ , temos

$$n = 4 \Rightarrow F = \frac{4p}{8 - 4p + 2p} = \frac{4p}{8 - 2p} \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F = 6 \text{ (Hexaedro),}$$

$$n = 5 \Rightarrow F = \frac{4p}{10 - 5p + 2p} = \frac{4p}{10 - 3p} \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F = 2 \text{ (Dodecaedro).}$$

## 1.2 Recursos Tecnológicos

A palavra tecnologia tem origem no grego “tekhne” que significa “técnica, arte, ofício” juntamente com o sufixo “logia” que significa “estudo”. Por essa razão, podemos abordar neste tópico tanto um recurso como um software computacional quanto uma técnica secular japonesa de dobradura de papéis, o origami. Ambos são, obviamente, recursos tecnológicos.

Com o software GeoGebra, programa gratuito criado por Markus Hohenwarter em 2001, é possível construir todos os poliedros de Platão e suas planificações, como também acompanhar passo a passo da construção de cada um dos poliedros e visualizar individualmente cada um de seus elementos.

O software GeoGebra é indicado aos alunos devido à infinidade de possibilidades que oferece.

A planificação de um poliedro é um arranjo de polígonos com lados comuns que retornam à forma espacial que lhe deu origem, ao serem dobrados.

É aconselhável o uso de atividades em que o aluno possa cortar, montar, modelar e exibir os poliedros. As propriedades matemáticas, os aspectos históricos e os modelos virtuais interativos de cada um dos sólidos platônicos também devem ser explorados. A técnica do Origami para construções de sólidos será utilizada porque, com ela, detalhes como faces, arestas e vértices são manuseados e construídos por professores e alunos.

## 1.3 Aspectos Metodológicos

Analisar os Poliedros de Platão, explorar suas características e sua história, tendo como subsídios os materiais concretos, haja vista que o trabalho com esse material pode contribuir com o processo ensino aprendizagem ao fornecer meios para uma melhor compreensão da Geometria. Considerando que novas concepções de ensino e aprendizagem são oferecidas pelos recursos tecnológicos, faremos uso do computador para construir e identificar figuras geométricas, observar características dos poliedros, destacando-se arestas, faces e vértices a fim de despertar o interesse do aluno e suscitar questionamentos que provavelmente não seriam feitos se a abordagem fosse apenas teórica.

### 1.3.1 Objetivos Específicos

Elencamos a seguir objetivos comuns aos alunos e aos professores:

- Construir os Sólidos de Platão utilizando o origami, principalmente pelos professores. Os alunos também poderão participar de construções;

- Despertar a curiosidade a respeito dos sólidos de Platão;
- Constatar que as faces destas figuras são triângulos equiláteros, quadrados ou pentágonos regulares, e porque isso ocorre;
- Explorar conceitos de geometria através de ambientes dinâmicos e interativos;
- Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas dos poliedros regulares;
- Utilizar os modelos com origami e o software GeoGebra como ferramentas no processo ensino aprendizagem;
- Explorar a criatividade do aluno e seu protagonismo;
- Levar em conta os conhecimentos prévios na construção de conceitos;
- Proporcionar ao aluno o acesso à história da matemática e a demonstrações do teorema de Euler.

### 1.3.2 Metodologia

Para este tópico consultamos [3], [7], [9] e [13].

Fiorentini e Miorim (1990, p.3) afirmam que:

*“Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um “aprender” mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e porque faz. Muito menos um “aprender” que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo, do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade.”*

Para a construção da cidadania, o aluno fará, certamente, uso do conhecimento matemático em vários momentos do seu cotidiano. Um conhecimento desenvolvido e reelaborado por ele e para ele. Para a aprendizagem da matemática é necessário vê-la relacionada com a realidade.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) encontramos:

*Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas (BRASIL/MEC. PCN, 1997, p.19).*

Segundo Bairral(2005), aos professores devem ser oferecidas oportunidades de conhecimento e utilização de novas ferramentas para o ensino-aprendizagem da matemática, notadamente conteúdos de geometria, despertando o interesse do aluno.

A utilização de Softwares educativos é uma nova forma de se desenvolver o conteúdo de Geometria. O uso das novas tecnologias contribui para novas práticas pedagógicas, mas se já é bem aceito pelos alunos, deve, necessariamente, ser aceito pelos professores.

Dessa forma, exploraremos o estudo dos poliedros de Platão utilizando-nos de software matemático e da construção física dos poliedros.

# Capítulo 2

## Sólidos de Platão

Como vimos anteriormente existem apenas 5 poliedros regulares. Cada um desses poliedros é conhecido como sólido platônico e são descritos no 13º livro de “Os Elementos”, de Euclides, e são assim chamados porque foram estudados pela escola de Platão.

Nas próximas seções serão apresentados os 5 sólidos de Platão, assim como suas planificações. Para esta parte foi usado como recurso o software GeoGebra.

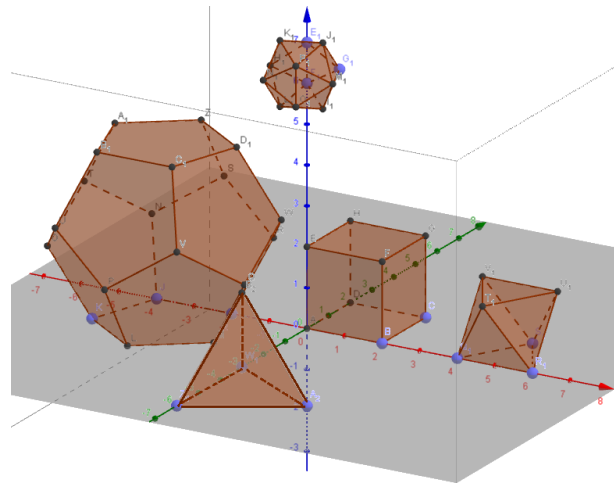


Figura 2.1: Sólidos de Platão

### 2.0.3 Tetraedro

O Tetraedro é o poliedro convexo regular formado por 4 vértices ( $A, B, C, D$ ), 6 arestas ( $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AD}, \overline{BD}$  e  $\overline{CD}$ ), 4 faces triangulares ( $ABC, ABD, ACD, BCD$ ), e três arestas que concorrem em cada vértice (veja figura abaixo).

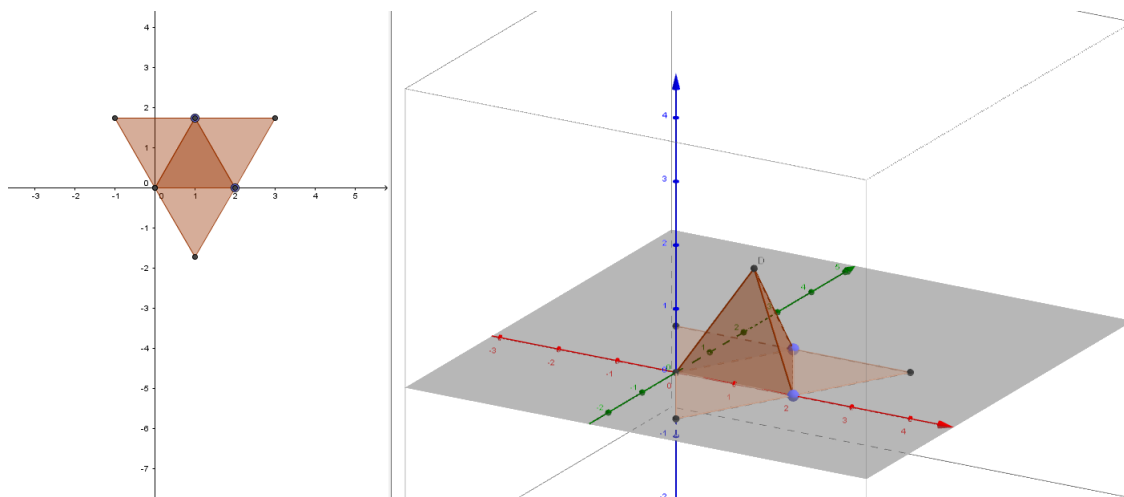


Figura 2.2: Tetraedro

### 2.0.4 Hexaedro

O Hexaedro é o poliedro convexo regular formado por 8 vértices ( $P, Q, R, S, T, U, V$  e  $X$ ), 12 arestas ( $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RS}, \overline{SP}, \overline{TU}, \overline{UV}, \overline{VX}, \overline{XT}, \overline{PX}, \overline{QT}, \overline{RU}$  e  $\overline{SV}$ ), 6 faces quadradas ( $PQRS, TUVX, PQTX, QRUT, RSVU$  e  $SPXV$ ) e três arestas que concorrem em cada vértice.

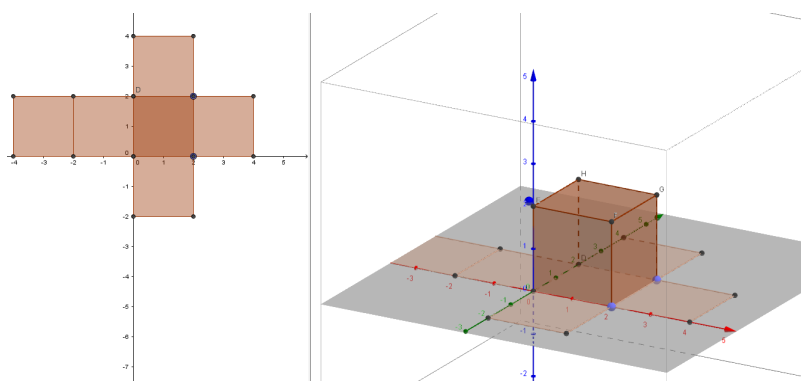


Figura 2.3: Hexaedro

### 2.0.5 Octaedro

Octaedro é o poliedro convexo regular formado por 6 vértices ( $A, B, C, D, E$  e  $F$ ), 8 faces triangulares ( $ABE, BCE, CDE, DAE, ABF, BCF, CDF$  e  $DAF$ ), doze arestas ( $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}, \overline{AE}, \overline{BE}, \overline{CE}, \overline{DE}, \overline{AF}, \overline{BF}, \overline{CF}$  e  $\overline{DF}$ ) e quatro arestas que concorrem em cada vértice.

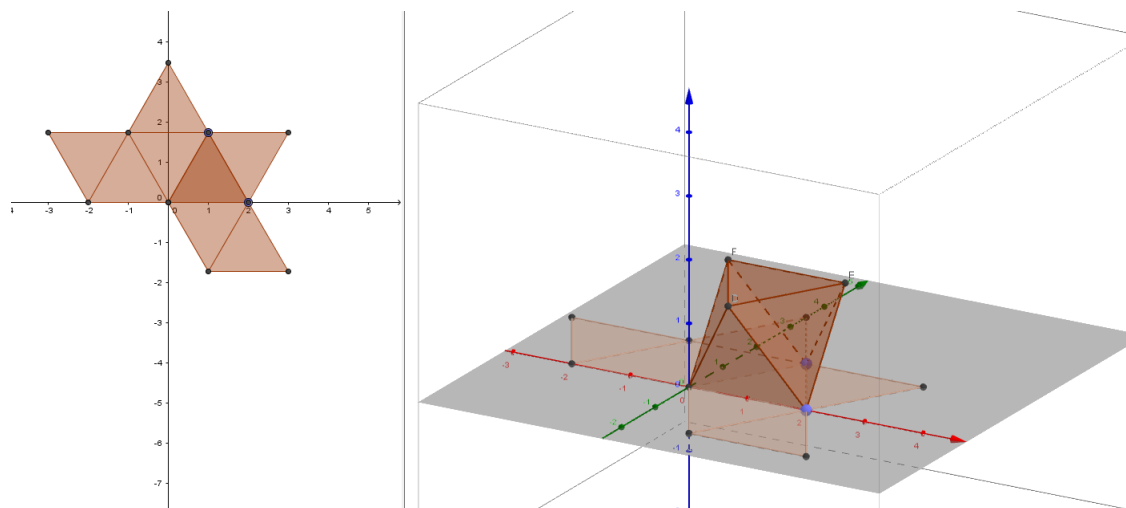


Figura 2.4: Octaedro

## 2.0.6 Dodecaedro

O Dodecaedro é o poliedro convexo regular formado por 20 vértices ( $A, B, C, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S$  e  $T$ ), 12 faces pentagonais: ( $ADSFN, SFGTK, DSKJR, KJQDT, RJQHE, ADREM, EMIPH, PHQCB, CTGOB, GOLNF, AMILN$  e  $BPILO$ ).

30 arestas:

( $\overline{AD}, \overline{DS}, \overline{SK}, \overline{KT}, \overline{TC}, \overline{CB}, \overline{BP}, \overline{PI}, \overline{IM}, \overline{MA}, \overline{AN}, \overline{NF}, \overline{FG}, \overline{GT}, \overline{CQ}, \overline{QH}, \overline{HE}, \overline{EM}, \overline{IL}, \overline{LO}, \overline{OB}, \overline{DR}, \overline{RJ}, \overline{JK}, \overline{LN}, \overline{OG}, \overline{FS}, \overline{RE}, \overline{JQ}$  e  $\overline{HP}$ ).

e três arestas que concorrem em cada vértice.

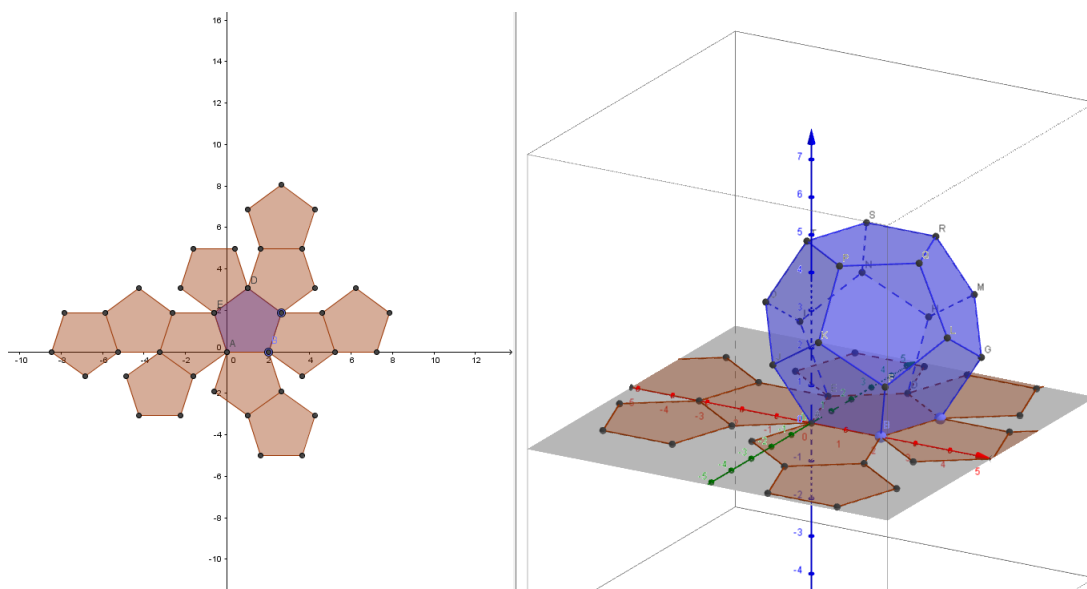


Figura 2.5: Dodecaedro

## 2.0.7 Icosaedro

O Icosaedro é o poliedro convexo regular formado por 12 vértices ( $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K$  e  $L$ ).

30 arestas:

$(\overline{AE}, \overline{EB}, \overline{BJ}, \overline{JK}, \overline{KA}, \overline{AF}, \overline{EF}, \overline{BF}, \overline{JF}, \overline{KF}, \overline{AD}, \overline{AL}, \overline{EL}, \overline{EI}, \overline{BI}, \overline{BC}, \overline{JC}, \overline{JG}, \overline{KG}, \overline{KD}, \overline{DL}, \overline{LI}, \overline{IC}, \overline{CG}, \overline{GD}, \overline{DH}, \overline{LH}, \overline{IH}, \overline{CH}, \overline{GH})$ .

20 faces triangulares:

$(AEF, EBF, BJF, JFK, KAF, AEL, EBI, BJC, JKG, KAD, DLA, LIE, ICB, CGJ, GDK, DLH, LIH, ICH, CGH$  e  $GDH)$ , e cinco arestas que concorrem em cada vértice.

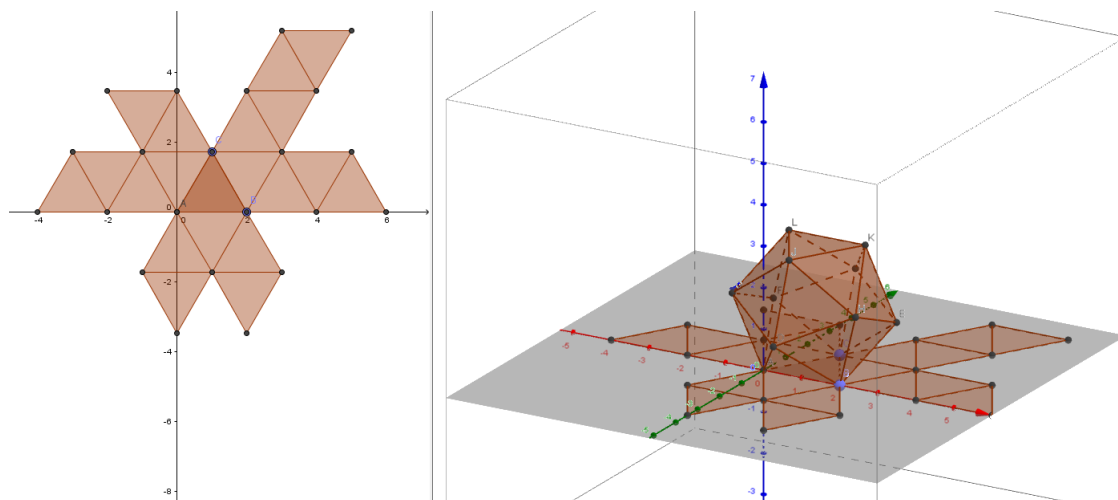


Figura 2.6: Icosaedro



# Capítulo 3

## Demonstrações do Teorema de Euler

Neste capítulo usamos as seguintes referências [6], [10] e [11]. Apresentaremos várias formas de demonstrar o seguinte teorema, conhecido como teorema de Euler para poliedros convexos.

**Teorema 3.1.** *Se  $P$  é um poliedro convexo com  $F$  faces,  $A$  arestas e  $V$  vértices, então*

$$F - A + V = 2.$$

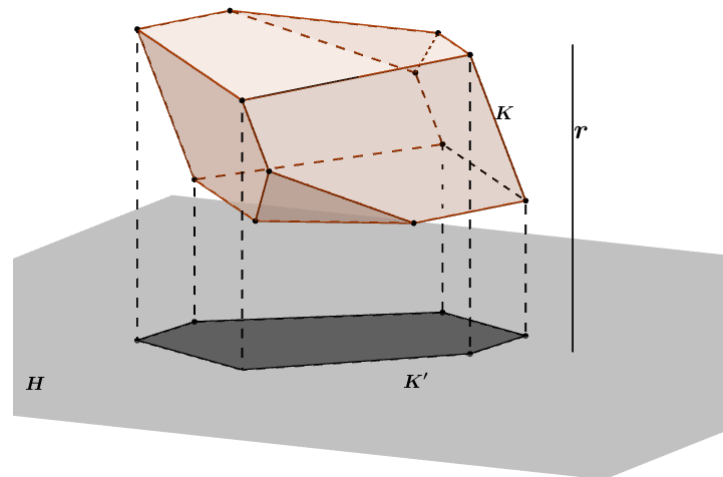
### 3.1 Primeira demonstração - Zoroastro Azambuja Filho

Para demonstrar o teorema de Euler começamos escolhendo uma reta  $r$  que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo  $P$ . Essa é uma condição imprescindível. Tomamos também um plano  $H$ , que não intersecta  $P$  e é perpendicular a reta  $r$ .

O plano  $H$  será chamado *plano horizontal* e as retas paralelas a  $r$ , logo perpendiculares a  $H$ , serão chamadas retas verticais.  $H$  divide o espaço em dois semi-espacos. O semi-espaço que contém o poliedro será chamado de *semi-espaço superior*; seus pontos estão acima de  $H$ .

Imaginemos o Sol brilhando a pino sobre o semi-espaço superior, de tal modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto  $x$  do semi-espaço superior corresponde um ponto  $x \in H$ , chamado sombra de  $x$ , obtido como interseção do plano  $H$  com a reta vertical que passa por  $x$ .

A sombra de qualquer conjunto  $K$ , contido no semi-plano superior é, por definição, o conjunto  $K' \subset H$ , formado pelas sombras dos pontos de  $K$ .

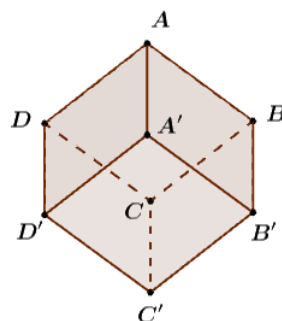


A interseção de uma reta vertical com o conjunto convexo limitado pelo poliedro  $P$  é um subconjunto convexo dessa reta. Logo (se não for vazia) é um segmento de reta, cujos extremos pertencem à  $P$ , ou é um único ponto de  $P$ . Segue-se que uma reta vertical arbitrária só pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro convexo  $P$ .

Tal observação pode ser assim enunciada: cada ponto da sombra de  $P'$  do poliedro  $P$  é sombra de um ou de dois pontos de  $P$ . Ora, a sombra  $P'$  do poliedro  $P$  é um polígono convexo do plano horizontal, cujo contorno  $\gamma'$  é sombra de uma poligonal  $\gamma$  fechada, formada por arestas de  $P$ . Cada ponto de  $\gamma'$  é sombra de um único ponto de  $P$  (pertencente a  $\gamma$ ).

A poligonal  $\gamma$  é chamada o *contorno aparente* do poliedro  $P$ . Cada ponto interior de  $P'$  (isto é, não pertencente a  $\gamma'$ ) é sombra de 2 pontos de  $P$ . Dados dois pontos de  $P$  que têm a mesma sombra, ao mais alto (mais distante de  $H$ ) chamaremos *ponto iluminado*; o mais baixo será chamado de *sombrio*. Assim, o poliedro  $P$  se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente de  $\gamma$ .

Por exemplo, seja  $P$  o hexaedro que tem os quadrados  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  como faces opostas. Pendurando-o pelo vértice  $A$  (de modo que  $A$  e  $C'$  estejam na mesma vertical), as faces  $AA'B'B$ ,  $AA'D'D$  e  $ABCD$  ficarão iluminadas e as outras 3 sombrias. O contorno aparente será a poligonal  $A'B'BCDD'A'$ .



Para uma melhor compreensão do que vem a ser o contorno aparente do poliedro, considere as imagens abaixo:

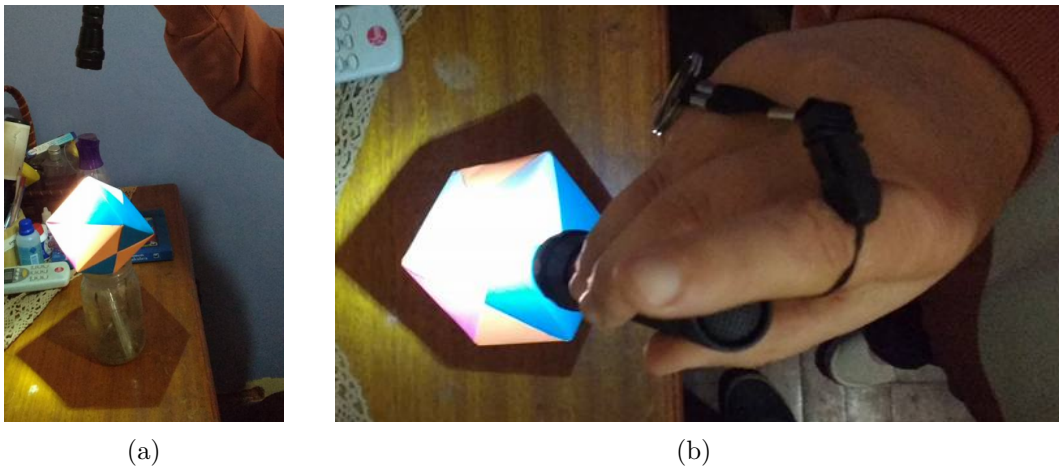


Figura 3.1: Contorno Aparente

Posicionei um hexaedro de forma que os vértices ligados por uma diagonal do hexaedro, ou seja, diagonalmente opostos, ficassem sobre a mesma perpendicular ao plano onde está sendo projetada a sombra.

Nas mesmas fotos podem ser observadas as três faces do hexaedro que são iluminadas pela lanterna. No entanto, o que se pretendia era uma projeção da sombra obtida por raios perpendiculares ao plano. E não raios divergentes como aqueles que obtive. As fotos servem, porém, para ilustrar faces iluminadas e contorno aparente.

Seja  $P_1$  o conjunto dos pontos iluminados de  $P$  mais o contorno aparente  $\gamma$ . Cada ponto de  $P'$  é a sombra de um único ponto de  $P_1$ .

Noutras palavras, a regra que associa a cada ponto  $x$  de  $P_1$  sua sombra  $x'$  é uma correspondência biunívoca entre  $P_1$  e  $P'$ .

Usaremos a notação  $P_1$  para representar o polígono  $P'$  decomposto como reunião de polígonos justapostos, que são sombras das faces contidas em  $P_1$ , isto é, das faces iluminadas.

Evidentemente, poderíamos também considerar o conjunto  $P_2$ , formado pelos pontos sombrios de  $P$  mais o contorno aparente  $\gamma$ . A regra que associa a cada ponto  $x \in P_2$  sua sombra  $x' \in P'$  também é uma correspondência biunívoca entre  $P_2$  e  $P'$ .

Escreveremos  $P'_2$  para indicar a sombra de  $P_2$  expressa como reunião das sombras das faces sombrias de  $P$ , isto é, contidas em  $P_2$ .

Se decomusermos cada face de  $P$  em triângulos, traçando diagonais em cada uma delas, alteraremos os números  $F$ ,  $A$  e  $V$  individualmente, mas a expressão

$$F - A + V,$$

permanecerá com o mesmo valor.

Com efeito, cada vez que se traça uma diagonal numa face, os números  $F$  e  $A$  aumen-

tam, cada um, de uma unidade e o número  $V$  não muda, assim

$$(F + 1) - (A + 1) + V = F - A + V.$$

Portanto, a fim de demonstrar o teorema de Euler, não há perda de generalidade em supor que todas as faces do poliedro  $P$  são triângulos. Esta hipótese será feita a partir de agora.

Note também que, como toda face tem 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces, segue-se que

$$3F = 2A. \quad (3.1)$$

Todo o indispensável posto, iniciemos a demonstração, que consiste em calcular de duas maneiras distintas a soma  $S$  dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro  $P$ .

Em primeiro lugar, há  $F$  triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a  $\pi$  radianos.

Portanto,

$$S = \pi.F.$$

Como  $F = 3F - 2F$  segue de (3.1) que

$$F = 2A - 2F,$$

Assim, podemos escrever:

$$S = 2\pi.A - 2\pi.F. \quad (3.2)$$

Por outro lado, temos  $S = S_1 + S_2$ , onde  $S_1$  é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e  $S_2$  é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios.

A fim de calcular  $S_1$ , partimos da observação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo  $T$  é igual a soma dos ângulos internos de sua sombra  $T'$ .

Daí resulta que  $S_1$  é igual a soma dos ângulos internos dos triângulos nos quais está decomposto o polígono convexo  $P'_1$ , sombra de  $P_1$ . Para calcular esta última soma, somaremos os ângulos vértice a vértice, em vez de somá-lo triângulo por triângulo, como acima.

Sejam  $V_1$  o número de vértices iluminados,  $V_2$  o número de vértices sombrios e  $V_0$  o número de vértices do contorno aparente  $\gamma$ . Então,

$$V = V_0 + V_1 + V_2.$$

Notemos ainda que  $V_0$  também é o número de vértices (e de lados) da poligonal  $\gamma'$ , contorno do polígono convexo  $P'$ .

Em  $P_1$  temos  $V_1$  vértices interiores (sombrias dos vértices iluminados) mais  $V_0$  vértices do contorno  $\gamma'$ . A soma dos ângulos que têm como vértices um dado vértice interior é igual a  $2\pi$  radianos. A soma de todos os ângulos que têm vértice sobre o contorno

$\gamma'$  é igual a  $\pi(V_0 - 2)$ , de acordo com a expressão bem conhecida da soma dos ângulos internos de um polígono com  $V_0$  lados. Segue-se que:

$$S_1 = 2\pi.V_1 + \pi(V_0 - 2).$$

Por raciocínio inteiramente análogo, obteríamos:

$$S_2 = 2\pi.V_2 + \pi(V_0 - 2).$$

Somando estas duas igualdades, vem:

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi = 2\pi V - 4\pi. \quad (3.3)$$

Comparando com as igualdades em (3.2) e (3.3) obtemos

$$2\pi.A - 2\pi.F = 2\pi V - 4\pi,$$

resultando em

$$F - A + V = 2,$$

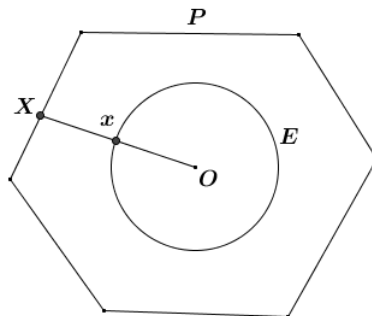
como queríamos demonstrar.

### 3.2 Demonstração do Teorema de Euler por Adrien Marie Legendre

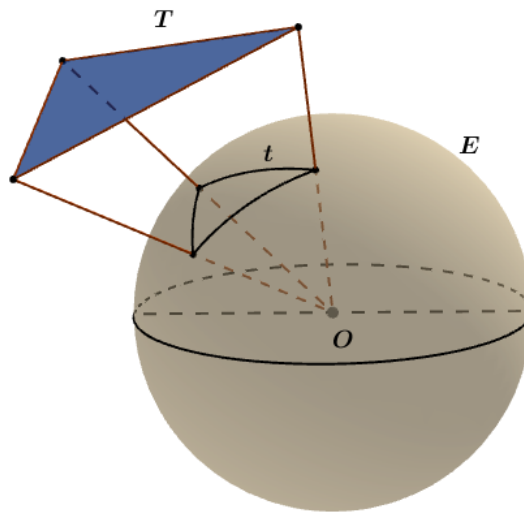
Seja  $P$  um poliedro convexo com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces. Por conveniência suponha que as faces de  $P$  são triangulares (se isto não for verdade, por meio de diagonais decomponemos cada face em triângulos, sem alterar o número  $V - A + F$ ).

Com efeito, cada vez que traçamos uma diagonal numa face, o número  $V$  não se altera, enquanto cada um dos números  $A$  e  $F$  aumenta de uma unidade, esses números se cancelando na expressão  $V - A + F$ .

Consideremos uma esfera  $E$ , de raio  $r$ , cujo centro  $O$  é um ponto situado no interior do poliedro  $P$ . Projetando radialmente o poliedro  $P$  sobre a esfera  $E$ , obtemos uma decomposição de  $E$  em triângulos esféricos, dispostos de modo semelhante à situação das faces de  $P$ . Em particular, a esfera  $E$  fica recoberta por  $F$  triângulos esféricos, com um total de  $A$  lados e  $V$  vértices.

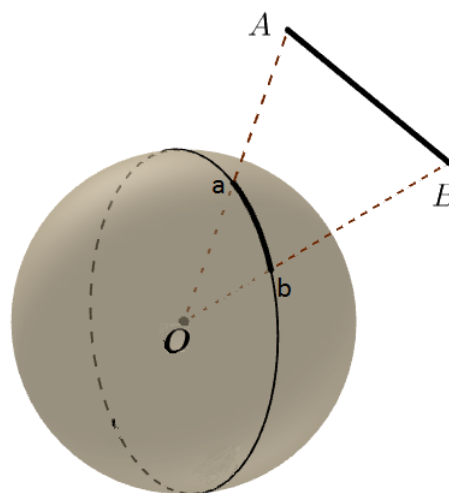


O ponto  $x$  da esfera  $E$  é a projeção radial do ponto  $X$  do poliedro  $P$ .

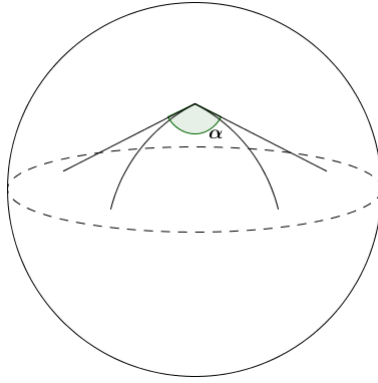


O triângulo esférico  $t$ , sobre a esfera  $E$ , é a projeção radial do triângulo  $T$ . Esclareçamos que uma figura sobre a esfera  $E$  chama-se um triângulo esférico quando seus três lados são arcos de círculos máximos (todos menores do que uma semicircunferência). A interseção  $E \cap L$  de uma esfera  $E$  com qualquer plano  $L$  que a encontre é um círculo ou um ponto. Será um ponto no caso excepcional em que o plano  $L$  é tangente à esfera. Quando o plano  $L$  passa pelo centro da esfera  $E$ , a interseção  $E \cap L$  é chamada de círculo máximo.

A projeção radial de um segmento de reta  $AB$  é um arco de círculo máximo  $\widehat{ab}$  sobre a esfera  $E$  (salvo no caso em que  $A, B$  e o centro  $O$  da esfera estão na mesma reta). Com efeito  $A, B$  e  $O$  determinam um plano, que corta a esfera segundo um círculo máximo do qual  $\widehat{ab}$  é um arco.



Quando dois arcos de círculos máximos têm uma extremidade comum, o ângulo  $\alpha$  formado por esses arcos é, por definição, o ângulo entre as semirretas tangentes a esses arcos.



O geômetra francês Albert Girard demonstrou, em 1629, que se os ângulos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  de um triângulo esférico forem medidos em radianos, a soma  $\alpha + \beta + \gamma$  é dada pela fórmula

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2},$$

onde  $a$  é a área do triângulo e  $R$  é o raio da esfera. Foi nesta fórmula que se fundamentou Legendre para demonstrar o teorema de Euler. Vamos mostrar como o Teorema de Euler resulta dela, de forma simples e elegante.

Voltemos à decomposição da esfera  $E$  em  $F$  triângulos esféricos, com um total de  $A$  lados e  $V$  vértices. Para cada um desses triângulos  $t$ , vale a fórmula de Girard

$$S_t = \pi + \frac{a_t}{r^2},$$

em que  $S_t$  é a soma dos ângulos e  $a_t$  é a área do triângulo esférico  $t$ . Ao todo são  $F$  igualdades como aquela. Ao somá-las todas obtemos

$$\sum_t S_t = \pi F + \frac{1}{r^2} \cdot \sum_t a_t.$$

Mas  $\sum_t S_t = 2\pi \cdot V$ , pois a soma dos ângulos em torno de cada vértice é igual a  $2\pi$ . Além disso,

$$\sum_t a_t = 4\pi r^2 = \text{área da superfície esférica } E.$$

Portanto a igualdade acima se escreve

$$2\pi \cdot V = \pi F + \frac{4\pi r^2}{r^2}.$$

Simplificando, temos  $2V = F + 4$ , isto é:

$$2V - F = 4. \tag{3.4}$$

Para obtermos uma relação entre o número de triângulos esféricos ( $F$ ) e o número total de lados desses triângulos ( $A$ ), observamos que todo triângulo tem 3 lados, e toda aresta é lado de 2 triângulos, logo  $3F = 2A$ , ou seja:

$$F = 2A - 2F.$$

Substituindo  $F$  por este valor em (3.4), vem  $2V - 2A + 2F = 4$ , assim

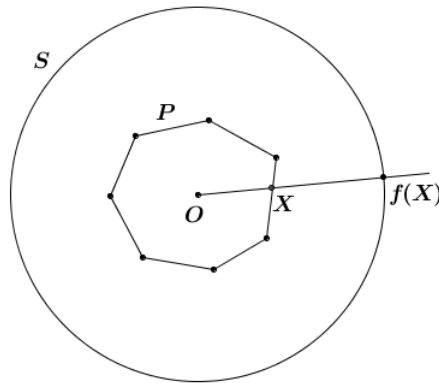
$$V - A + F = 2,$$

que é a relação de Euler.

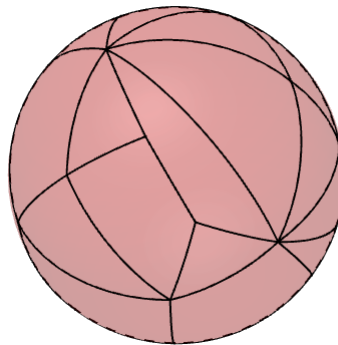
### 3.3 O caso plano do Teorema de Euler

O Teorema de Euler foi demonstrado para poliedros convexos. No entanto, não é difícil observar a validade também em outras situações (veja a próxima demonstração onde o teorema de Euler se aplica em regiões de um plano).

Seja um poliedro convexo  $P$  e uma esfera  $S$  que o contenha. A partir de um ponto interior ao poliedro projetamos  $P$  sobre  $S$  como mostra a figura a seguir.

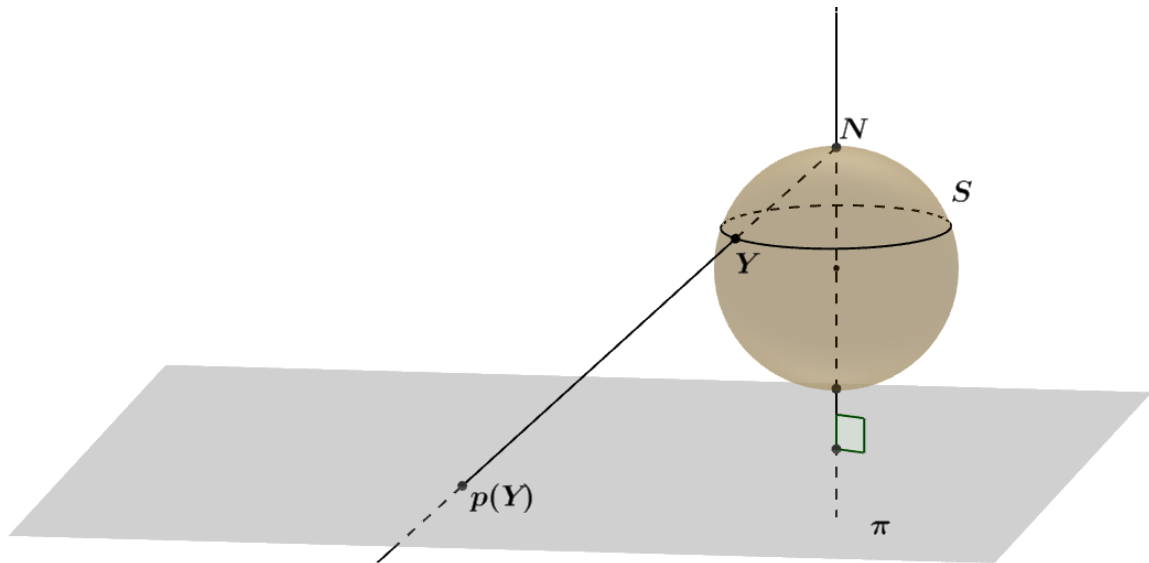


A esfera fica dividida em *regiões* limitadas por arcos de circunferência, que chamaremos de linha. Chamando de *nó* a projeção de cada vértice, temos cada região limitada por pelo menos 3 linhas e também cada nó como extremidade de pelo menos 3 linhas.



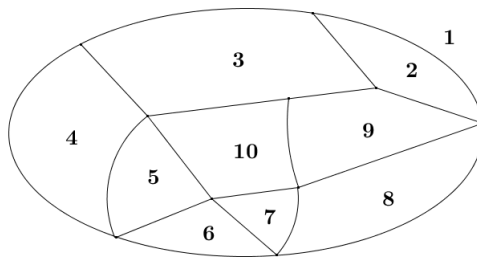
Obviamente, para as linhas, regiões e nós da esfera  $S$ , vale a relação de Euler, uma vez que ela já era válida em  $P$ . Tomemos um ponto  $N$  interior a uma região de  $S$ , um plano  $\pi$  perpendicular ao diâmetro de  $S$  que contém  $N$  e uma função  $p : S - \{N\} \rightarrow \pi$ , tal que, para cada ponto  $Y \in S - \{N\}$ ,  $p(Y)$  é a interseção da semirreta  $\overrightarrow{NY}$  com  $\pi$ .





O poliedro original  $P$  tinha  $F$  faces,  $V$  vértices e  $A$  arestas. Então o plano  $\pi$  está dividido em  $F$  regiões por  $A$  linhas que se encontram em  $V$  nós. Por conveniência, as linhas serão chamadas de arestas, os nós de vértices e as regiões de faces. Das  $F$  regiões, uma é ilimitada - o oceano - porque é projeção da região de  $S$  que contém o ponto  $N$ . Porém isso não invalida a relação de Euler. A figura obtida em  $\pi$  pode ser continuamente deformada, mas a relação de Euler se mantém.

No desenho a seguir, o plano está dividido em 10 regiões (faces), através de 18 linhas (arestas) que concorrem em 10 nós (vértices).



As transformações que fizemos são equivalentes a imaginar um poliedro de borracha e inflá-lo injetando ar até que se transforme em uma esfera. A seguir, a partir de um furo feito em uma das regiões, esticá-lo até que se transforme em um plano. Essa região em que se encontrava o ponto a partir do qual o poliedro de borracha foi aberto e esticado ficará do lado de “fora” da planificação, sendo a região chamada de oceano, região 1.

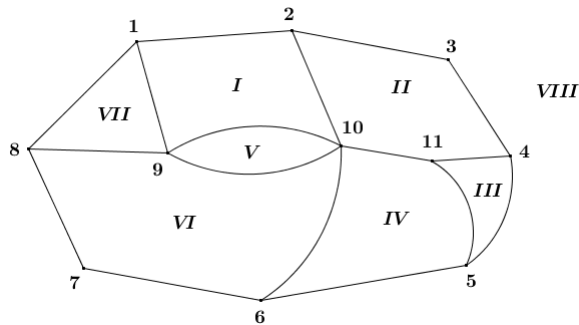
Pode-se assim afirmar que o Teorema de Euler não é um teorema de Geometria, mas sim de Topologia. É irrelevante se as faces são planas ou não, ou, ainda, se as arestas são retas ou não.

Toda a figura pode ser continuamente deformada, desde que essas deformações (transformações) sejam funções contínuas cujas inversas sejam também contínuas (Tais

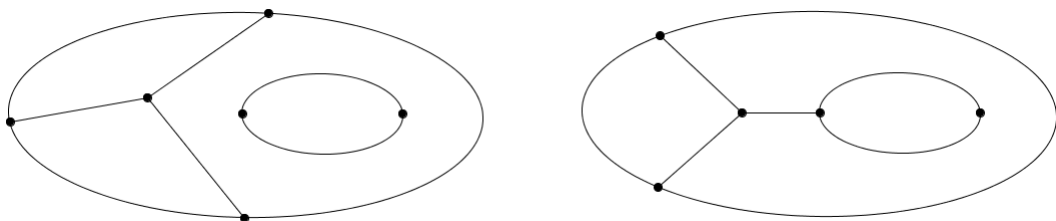
funções são denominadas *Homeomorfismos*). Para cada transformação que fizemos por uma função contínua, deveremos poder voltar à situação original por meio de outra função também contínua.

### 3.4 Uma outra Demonstração do Teorema de Euler no Plano

Como veremos a seguir a demonstração do caso plano do Teorema de Euler pode ser feita sem recorrer ao resultado obtido no espaço. Com ela será possível perceber que a relação de Euler para o plano vale em situações mais genéricas. Consideremos a figura a seguir:



Cada região é limitada por pelo menos duas arestas. Um vértice é um ponto comum a pelo menos duas arestas. O termo aresta não significa um segmento de reta, mas qualquer curva contínua, sem interseções, que liga um vértice a outro vértice. Uma boa ilustração para o que foi dito consiste em observar o mapa de um país com a divisão de seus estados. Cada estado é uma face e cada linha de fronteira é uma aresta. É imprescindível que nenhuma região fique completamente dentro de outra. Decomposições como as abaixo estão proibidas.



O exterior de  $R$  também deve ser considerado como uma região. Observe a figura em que o plano está dividido em  $I, II, III, IV, V, VI, VII$  e  $VIII$  regiões. As regiões numeradas de  $I$  a  $VII$  são limitadas e a região  $VIII$  é ilimitada, tendo o contorno de  $R$  como sua fronteira. A região ilimitada será chamada de *oceano*.

O contorno da região  $R$  é formado pelas arestas que ligam consecutivamente os vértices de 1 a 8 e depois voltando a 1 sem passar por 9.

O oceano, a região  $VIII$ , é formado pelos pontos exteriores ao contorno de  $R$ . A região  $I$  é formada pelas arestas que ligam consecutivamente os vértices  $1-2-10-9-1$ . A região  $II$  é limitada pelas arestas que ligam consecutivamente os vértices  $2-3-4-$

11 – 10 – 2. A região *II* é limitada pelas arestas que ligam consecutivamente os vértices 4 – 5 – 11 – 4. A região *IV* é limitada pelas arestas que ligam consecutivamente os vértices 5 – 6 – 10 – 11 – 5.

A região *V* é limitada apenas pelas duas arestas que ligam os vértices 9 e 10. E assim sucessivamente, cada região é limitada por pelo menos 2 arestas. Consideremos então o plano dividido em  $F$  regiões, sendo uma ilimitada, através de  $A$  arestas que concorrem em  $V$  vértices. Afirmamos que

$$V - A + F = 2.$$

**Demonstração:**

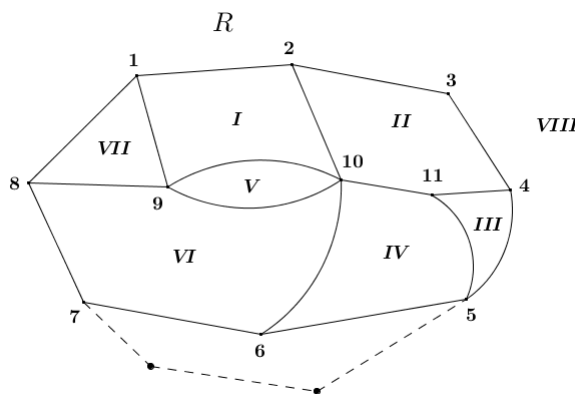
A fórmula  $V - A + F = 2$  vale no caso simples, em que apenas um polígono de  $n$  lados está desenhado no plano. Neste caso,

$$A = V = n, \quad F = 2.$$

Usaremos indução para o caso geral: vamos mostrar que, se a relação de Euler vale para uma decomposição do plano em  $F$  regiões, então ela ainda vale para uma decomposição em  $F + 1$  regiões.

Uma determinada decomposição pode ser construída por etapas, onde, em cada uma delas, uma nova região é acrescentada no oceano das anteriores.

Consideremos uma decomposição do plano em  $F$  regiões através de  $A$  arestas que concorrem em  $V$  vértices como mostra a parte em linhas cheias da figura abaixo, satisfazendo a relação de Euler. Acrescentamos uma nova região contida no oceano das regiões anteriores, como mostra a parte em linhas tracejadas da figura, desenhando uma sequência de arestas ligando dois vértices do contorno da divisão anterior. Ao acrescentarmos  $r$  arestas, acrescentamos  $r - 1$  vértices e uma nova região.



Porém fica evidente que a relação de Euler permanece válida, pois

$$V - A + F = (V + r - 1) - (A - r) + (F + 1),$$

Isso conclui a demonstração.

# Capítulo 4

## Estudo Dirigido em Sala de Aula

### 4.1 Introdução

Nesse período de convivência com os alunos, chamou-me a atenção a dificuldade que eles demonstravam em visualizar as figuras em três dimensões. Percebi, então, que o ensino da Matemática precisava ser inovador para que os alunos pudessem se sentir mais familiarizados e perceberem um sentido na aprendizagem da Geometria Espacial.

Para este estudo dirigido em sala de aula, optei pelo uso do origami e do software GeoGebra para que os alunos tivessem diferentes opções para explorar os problemas que envolvem este conteúdo.

Um aspecto que me chamou a atenção foi que, durante o levantamento prévio de seus conhecimentos, os alunos confundiam polígono e poliedro. Alguns também não se lembravam das definições de arestas, faces e vértices.

### 4.2 Contextualização da Pesquisa

A pesquisa foi feita sobre o conteúdo de Geometria Espacial, especificamente sobre a Relação de Euler, com 20 alunos do segundo ano do Ensino Médio, no primeiro semestre de 2016, em uma escola estadual em Andradina – SP. A escola possui 1450 alunos matriculados, divididos em 760 alunos do Ensino Fundamental e 690 alunos do Ensino Médio. Conta com um corpo docente de 74 professores, um diretor, 3 vice-diretores, duas professoras coordenadoras (uma para Ensino Fundamental e uma para o Ensino Médio), uma supervisora e demais funcionários administrativos.

A escola tem cinquenta anos de existência, conta com 13 salas de aula, uma sala de multimídia, uma sala de informática com 20 computadores e uma biblioteca. O período da manhã apresenta 13 salas de Ensino Médio, o período da tarde 10 salas de Ensino Fundamental e 3 salas de Ensino Médio. No período noturno há 4 salas de ensino médio regular, seis salas de ensino médio supletivo (EJA) e 3 salas de Ensino Fundamental Supletivo (EJA).

A escola possui cinco salas de segundas séries do Ensino Médio, com um total de cento e setenta e cinco alunos. Deste universo foram selecionados, de apenas uma das

salas, os vinte alunos que participaram desta pesquisa. O critério utilizado para esta escolha foi o comprometimento da classe, e mais especificamente, desses alunos, uma vez que participariam com seriedade possibilitando uma análise fidedigna dos resultados apresentados.

### 4.3 Caracterização da Pesquisa

Para o desenvolvimento do estudo dirigido em sala de aula, optei por uma abordagem qualitativa com os alunos selecionados. Foi conduzido por mim, professor da turma, que assumi os trabalhos de intervenção no desenvolvimento do origami e do software GeoGebra.

Foram promovidos quatro encontros para o desenvolvimento desta pesquisa sendo realizados no contra turno, um encontro por semana, com duração de aproximadamente uma hora cada encontro.

No primeiro encontro foi realizado um pré-teste para o levantamento dos conhecimentos prévios sobre o assunto, com apresentação de um questionário (questões 1, 2 e 3 do anexo deste trabalho), o qual foi elaborado pelo Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza docente do curso de Licenciatura em Matemática da UFMS Campus Três Lagoas. Pretendeu-se com isso, uma avaliação da capacidade de visualização dos sólidos nas suas três dimensões.

Na semana seguinte, posterior à aplicação do pré-teste, foram apresentados os Sólidos de Platão com os recursos do origami para um grupo de dez alunos.

Dando continuidade à pesquisa, na semana posterior, foram apresentados os Sólidos de Platão com os recursos do software GeoGebra para o restante do grupo, ou seja, os demais dez alunos.

Para a conclusão do trabalho, reuniu-se o grupo de vinte alunos para que respondessem a um questionário final, que consta nos anexos deste trabalho, com a finalidade de avaliar as contribuições dos dois recursos utilizados (origami e GeoGebra).

### 4.4 Análise prévia dos resultados e construção dos sólidos utilizando Origami

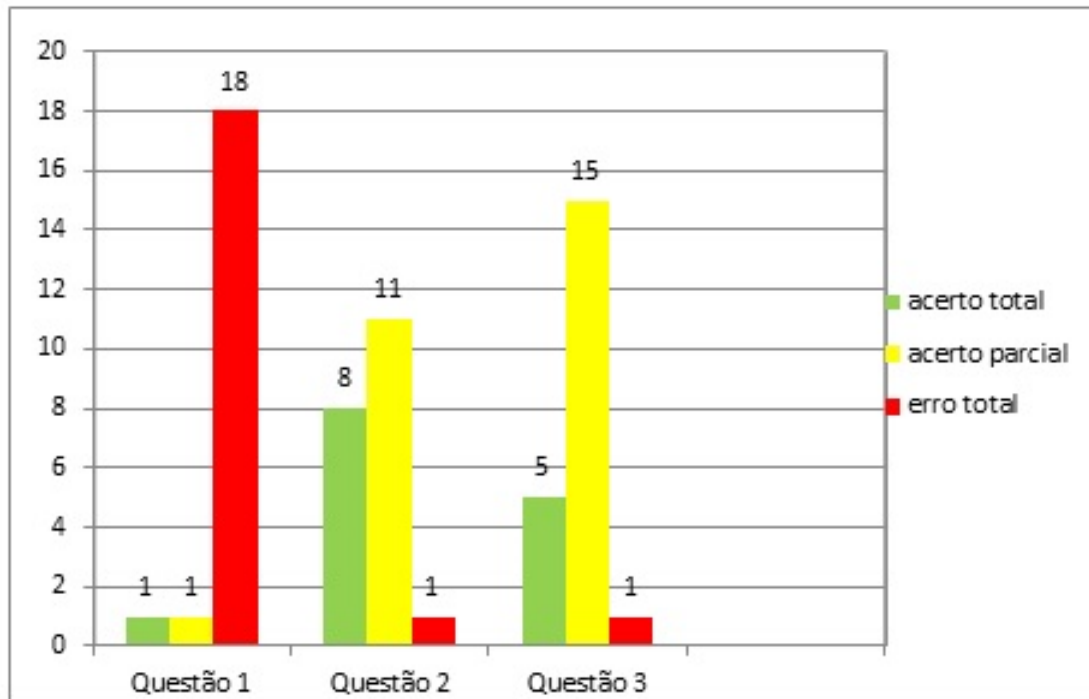
Nesta seção foram utilizados as referências [14] e [15].

#### 4.4.1 Pré-teste

Os vinte alunos do Ensino Médio selecionados realizaram um pré-teste para a identificação de seus conhecimentos sobre os Sólidos de Platão. Alguns deles não se lembravam de quais eram os sólidos em questão e confundiram polígono com poliedro. Alegaram que esse conteúdo tinha sido visto no Ensino Fundamental e que não se lembravam mais.

Outros disseram nunca ter visto poliedro e polígonos. A maioria dos alunos não soube definir Sólidos de Platão e nenhum deles conhecia a relação de Euler. Por incrível

que possa parecer, alguns achavam que os sólidos eram figuras planas.



#### 4.4.2 Apresentação dos Sólidos de Platão utilizando o Origami

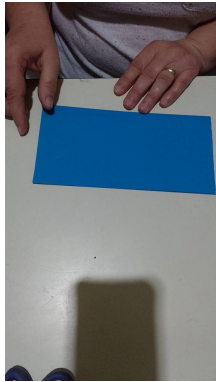
Nessa etapa, dez alunos tiveram contato com os Sólidos de Platão utilizando os recursos do origami.

Mostrei aos alunos os módulos quadrangulares, triangulares e pentagonais já montados, e o módulo de encaixe utilizado para os módulos triangulares. Os módulos quadrangulares e pentagonais não necessitam do módulo de encaixe, uma vez que apresentam duas abas para encaixe.

Durante a apresentação dos sólidos falei das faces, arestas e vértices e respondi às perguntas eventualmente feitas pelos alunos, tais como: “as faces são todas iguais?”, “as faces são polígonos ou poliedros?”, “que são polígonos?”, “que são poliedros?”, “por que as faces têm que ser todas iguais?”, “duas faces seguidas só têm uma aresta em comum?”, “quantas arestas saem de cada vértice?”.

#### 4.4.3 Construção do Hexaedro

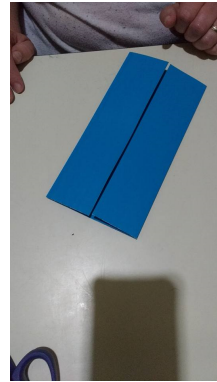
Foram passadas aos alunos as seguintes etapas visuais seguidas de orientações verbais, como mostrado abaixo. Depois de construído o hexaedro, podemos trabalhar planificação com os alunos, pedindo que eles desenhem todas as possíveis planificações do hexaedro.



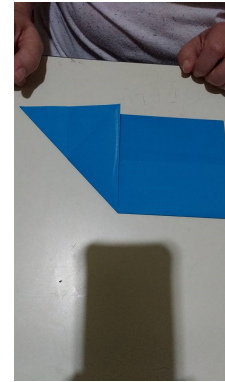
(a) Uma folha quadrada é dobrada ao meio



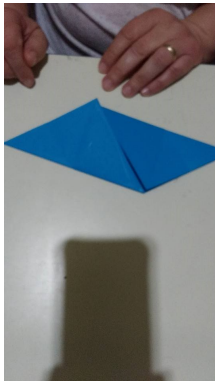
(b) Abra-se a folha



(c) Dobra-se novamente, coincidindo as duas dobras com o vinco inicial



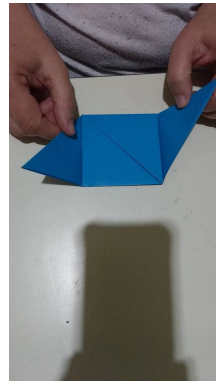
(d) Dobra-se o canto superior para baixo



(e) Dobra-se o canto inferior esquerdo para cima. Encaixa-se cada parte dobrada para dentro.



(f) Vincam-se as abas de encaixe



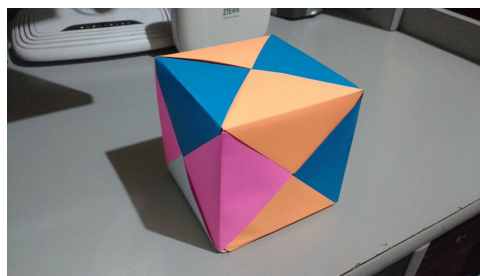
(g) Está pronto um dos seis módulos necessários



(h) Os seis módulos para a montagem do hexaedro

Figura 4.1: Construção do módulo e montagem do Hexaedro

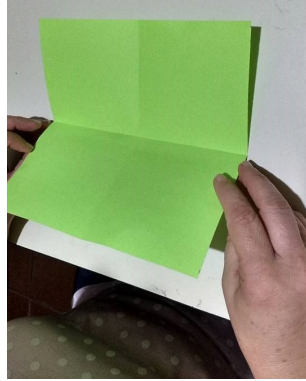
Após a confecção dos seis módulos, encaixe as abas nos bolsos de modo que não fique nenhuma aba sem encaixar e nenhum bolso sem abas. Está pronto o hexaedro regular.



#### 4.4.4 Construção do módulo triangular para confecção do Tetraedro, Octaedro e Icosaedro



(a) Dobre uma folha quadrada ao meio



(b) Dobre novamente, de forma que os vincos fiquem perpendiculares



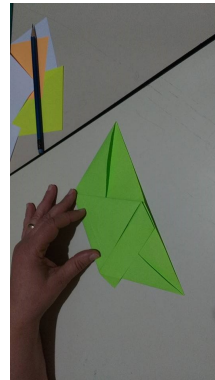
(c) Leve o canto superior direito até um dos vincos



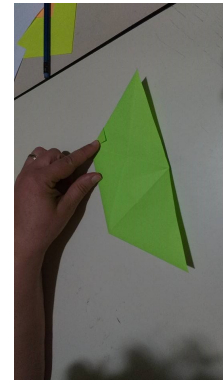
(d) Leve o canto superior esquerdo até o vinco, sobrepassando o vinco anterior



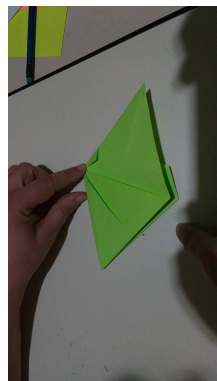
(e) Dobre o triângulo formado ao meio e para trás



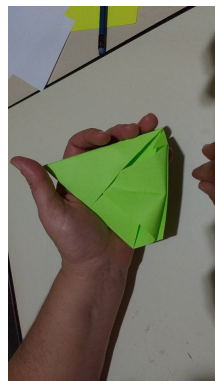
(f) Vinque bem as dobras



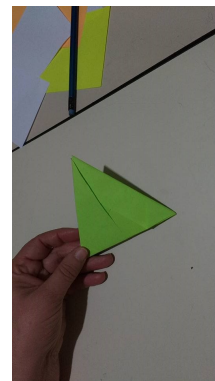
(g) Prenda a pequena aba, virando-a para o outro lado



(h) Embuta uma das abas num dos bolsos da peça



(i) Encaixe a outra aba no outro bolso



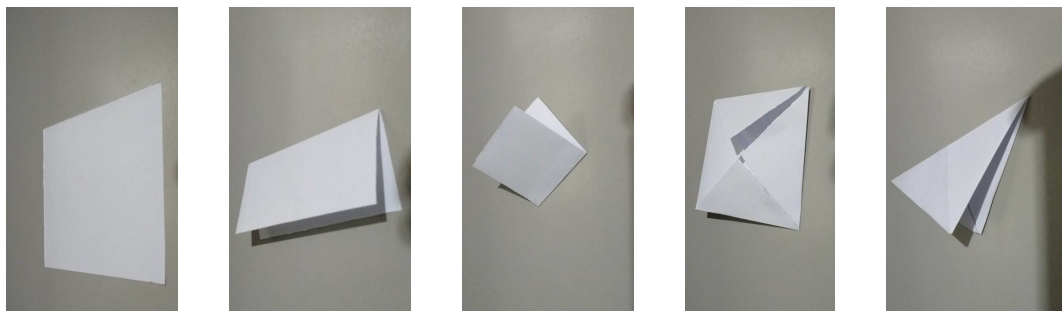
(j) Vinque bem. Está pronto o módulo triangular



A peça montada é um triângulo equilátero que representa o módulo dos poliedros de faces triangulares. Observe que o triângulo obtido contém um bolso em cada um dos três lados, onde serão colocados os módulos de encaixe, que irão unir as faces do poliedro.

#### 4.4.5 Construção do Módulo de Encaixe

Para a confecção do módulo de encaixe, é necessário utilizar um papel com  $\frac{1}{4}$  da área do papel utilizado no módulo triangular.



- (a) Corte o papel original em quatro quadrados iguais
- (b) Dobre um dos pedaços obtidos ao meio fazendo vinco (mediatriz)
- (c) Repita para encontrar a outra mediatriz
- (d) Em seguida, una os vértices no ponto de intersecção obtido
- (e) Vire e dobre na diagonal. Está pronto o módulo de encaixe

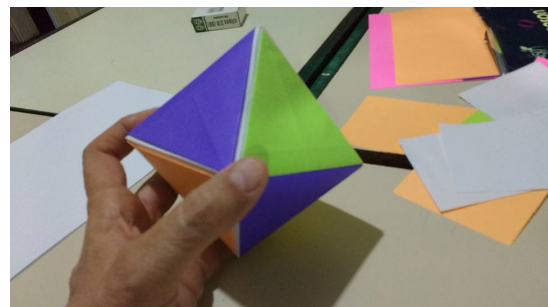
Figura 4.2: Módulos de Encaixe

#### 4.4.6 Montagem do Tetraedro e Octaedro

Para montar o tetraedro são necessários quatro módulos triangulares e seis módulos de encaixe. Encaixe os módulos triangulares introduzindo o módulo de encaixe nos bolsos de encaixe. No caso do Octaedro os módulos de encaixe são arestas do poliedro. Assim para a montagem do octaedro serão necessários 12 módulos de conexão e 8 módulos triangulares.



(a) Módulos para a montar o Tetraedro



(b) Octaedro

#### 4.4.7 Montagem do Icosaedro

Para montagem do icosaedro que possui 20 faces e 30 arestas, serão necessários 20 módulos triangulares e 30 módulos de conexão.



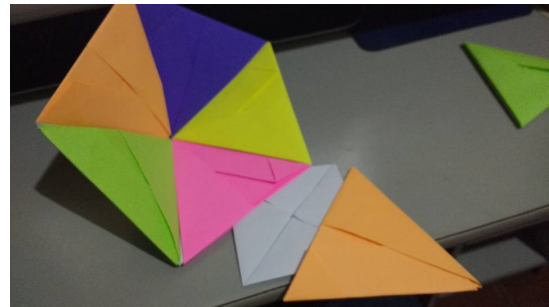
(a) 30 módulos de conexão e 20 módulos triangulares



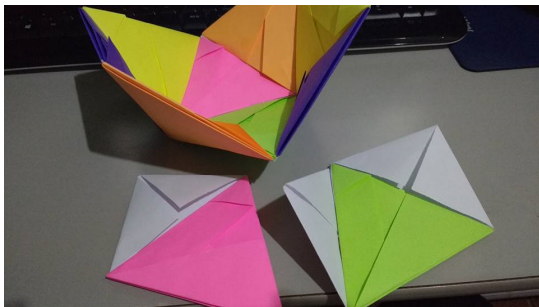
(b) Encaixe da parte superior do icosaedro



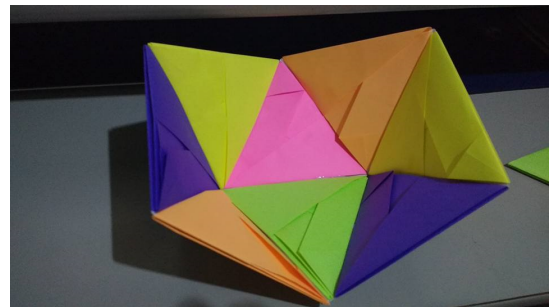
(c) Parte superior do icosaedro já montada



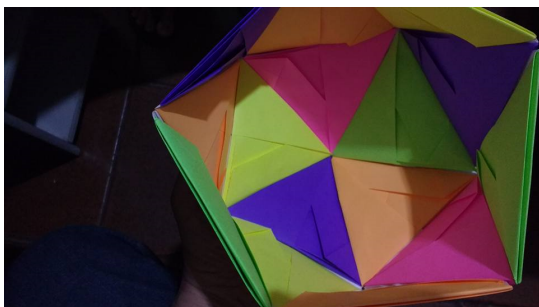
(d) Início da parte lateral do icosaedro



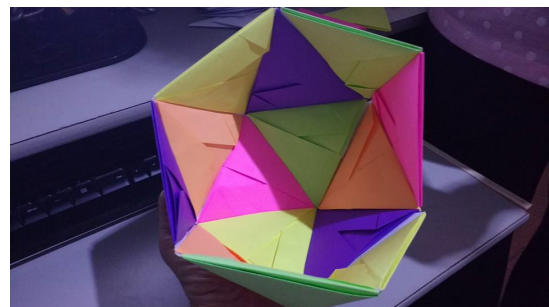
(e) Parte lateral do icosaedro



(f) Parte lateral do icosaedro

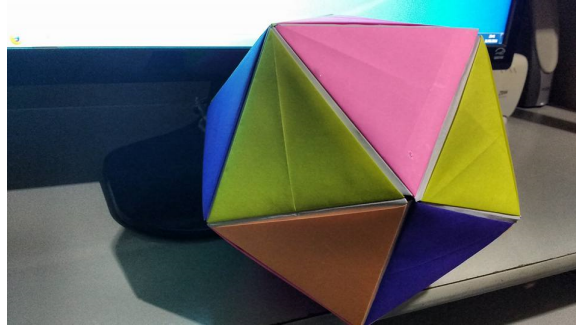


(g) Parte superior e lateral já prontas



(h) Parte inferior do icosaedro sendo montada

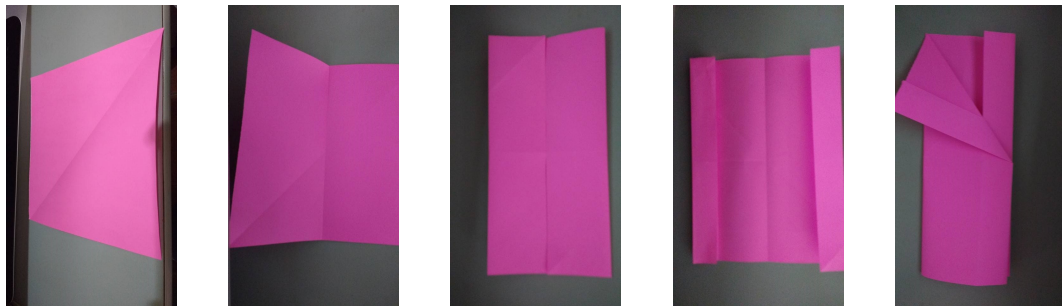
Figura 4.3: Montagem do Icosaedro



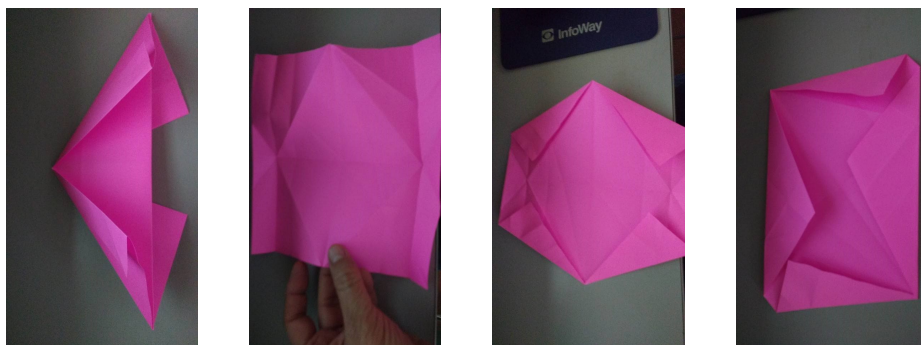
Após juntar as partes superior e inferior o Icosaedro esta pronto.

#### 4.4.8 Construção do módulo e montagem do Dodecaedro

Construção do módulo em forma de pentágono. Não são necessários módulos de encaixe, uma vez que os módulos pentagonais já dispõem de duas abas para encaixe.

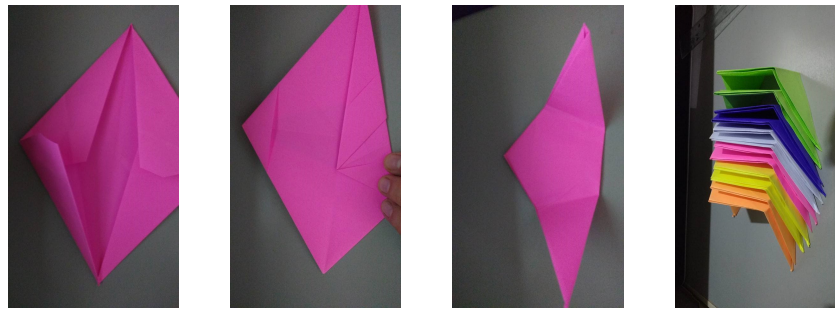


- (a) Vinca-se pela diagonal uma folha quadrada
- (b) Dobra-se a folha pela mediatriz de um dos lados
- (c) Dobra-se a folha novamente, levando os lados paralelos ao vinco até esse vinco
- (d) Desdobra-se e leva-se novamente cada lado ao novo vinco
- (e) Fecha-se ao meio. Abre-se cada um dos quatro cantos como mostrado

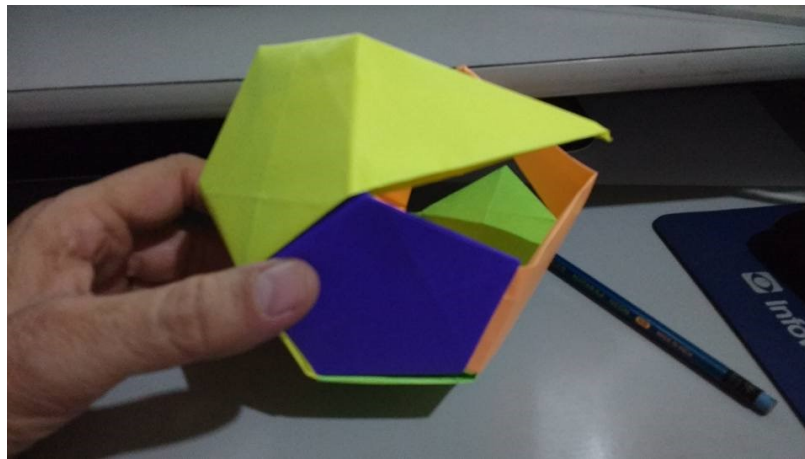


- (f) Os quatro cantos dobrados
- (g) Abre-se toda a folha
- (h) Dobram-se os quatro cantos para dentro, seguindo os vincos, como na figura
- (i) Dobram-se novamente os cantos para dentro, seguindo os vincos, como na figura

Figura 4.4: Parte 1-Construção do Dodecaedro



- (a) Encaixam-se as abas para dentro umas das outras
- (b) Dobram-se novamente duas das abas laterais
- (c) Vinca-se bem. Está pronto um dos 12 módulos pentagonais
- (d) Os 12 módulos pentagonais do Dodecaedro



- (e) Vinca-se bem. Está pronto um dos 12 módulos pentagonais



- (f) Os 12 módulos pentagonais do Dodecaedro

Figura 4.5: Parte2- Construção do Dodecaedro

É importante salientar que a construção dos sólidos não ocorreu em sala de aula. Foram apresentadas orientações verbais e visuais para que os alunos tivessem contato com as etapas percorridas até a confecção final dos sólidos.

No decorrer das apresentações dos sólidos geométricos, discutiram-se as relações matemáticas encontradas e foram respondidos constantes questionamentos efetuados pelos alunos. Ao final, os alunos manusearam os sólidos, identificando seus principais elementos e características.

Ao trabalhar com Origami modular, temos mais opções: identificação dos sólidos e seus elementos (arestas, faces, vértices e base); composição e decomposição; planificação; fórmula de Euler dentre outras opções.



Figura 4.6: Alunos Manuseando os Sólidos

#### 4.4.9 Apresentação dos Sólidos de Platão utilizando os recursos do GeoGebra

Nessa etapa, dez alunos tiveram contato com os Sólidos de Platão utilizando os recursos do GeoGebra.

Construi cada um dos sólidos perante o grupo. Durante as construções falei das faces, arestas e vértices e respondi às perguntas eventualmente feitas pelos alunos, muito parecidas com as questões formuladas pelo primeiro grupo.



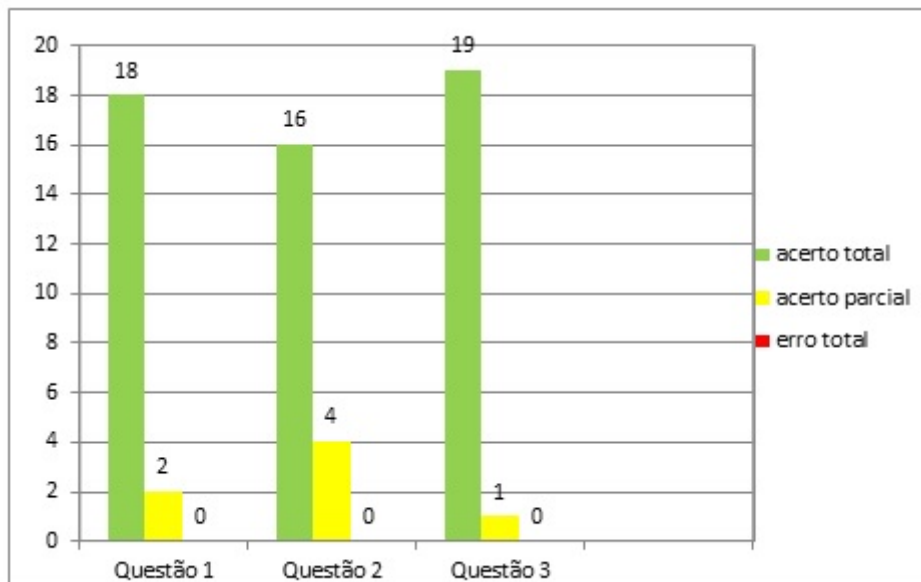
Figura 4.7: Alunos respondendo a questionário sobre os sólidos de Platão

## 4.5 Teste Final do estudo dirigido em sala de aula

Nessa etapa final, reuni os vinte alunos para responderem às questões apresentadas no Formulário que consta no anexo deste trabalho. Algumas questões são exatamente as mesmas feitas na primeira etapa. Foi acrescentada uma coluna em que se solicita ao aluno a verificação da validade da Relação de Euler e uma quarta questão em que o aluno discorre sobre a validade ou não dos recursos utilizados no Estudo dirigido em sala de aula. A primeira questão foi respondida corretamente por dezoito dos vinte alunos.

A segunda questão foi respondida corretamente por dezesseis alunos e teve acerto parcial por parte de quatro alunos.

A terceira questão foi respondida corretamente por dezenove alunos e teve acerto parcial por parte de um aluno. Apresento abaixo um gráfico com o número de acertos, total ou parcial, de cada questão.



Questionário sobre Geometria

Nome:

1) O que é um Sólido de Platão?

---

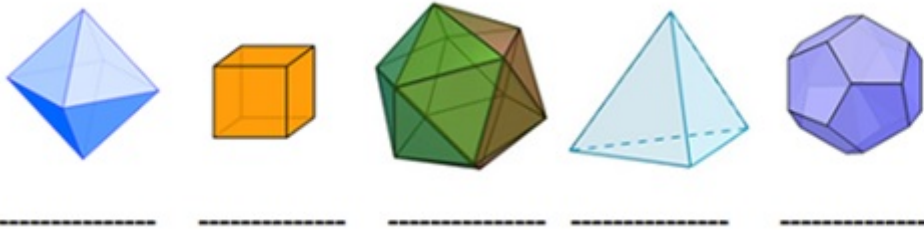


---



---

2) Escreva o nome dos seguintes sólidos.



3) Preencha a seguinte tabela:

Nome do sólido	$N^\circ$ de faces	$N^\circ$ de vértices	$N^\circ$ de arestas	$V - A + F = 2$
Tetraedro				
Hexaedro				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

4) Você considera que os recursos tecnológicos utilizados favoreceram sua aprendizagem? Se afirmativa sua resposta, de que maneira?

---



---



---



---

# Capítulo 5

## Considerações Finais

Quando fui questionado sobre o tema do meu trabalho por meu professor orientador, quis abordar um assunto que fosse relevante para os alunos do Ensino Médio da Rede Pública e, de alguma forma, contribuir com a melhora de sua aprendizagem.

Nossos alunos são constantemente avaliados, tanto com a aplicação de avaliações internas, quanto com a aplicação de avaliações externas como o ENEM e SARESP. E para que possam alcançar bom desempenho, as aulas devem ser bem preparadas e o professor aberto à utilização de recursos tecnológicos. Com meu trabalho quis verificar a eficácia, ou não, da utilização desses recursos.

Apresentei ao meu professor orientador alguns temas cuja relevância se deu pelos baixos índices de acerto em questões que os abordassem: dentre os temas apresentados, acordamos que Geometria Espacial seria de grande importância por fazer parte do currículo oficial da Rede Pública do Estado de São Paulo e pelo fato de os alunos apresentarem dificuldades ao serem questionados sobre o assunto.

Escolhido o tema, precisávamos delimitar o trabalho: optamos pelos Sólidos de Platão e a Relação de Euler, por serem recorrentes nas avaliações externas de nossos alunos. Nos vários encontros entre mim e meu orientador discutimos a estrutura que deveria ter o presente trabalho, e chegamos à conclusão que eram imprescindíveis demonstrações da existência de apenas cinco Sólidos de Platão e demonstrações da validade do Teorema de Euler. E como a intenção primeira deste trabalho é colaborar com a aprendizagem de nossos alunos e a verificação da validade da utilização de recursos tecnológicos, optamos pela inclusão de um estudo dirigido em sala de aula. Com esse estudo seria possível analisar o desempenho dos alunos antes e depois da utilização dos recursos tecnológicos.

A técnica do origami e o software GeoGebra foram os recursos selecionados. Fiquei muito preocupado com a utilização dos dois recursos, pois eu não conhecia praticamente nada do origami e muito pouco do software GeoGebra.

Meu professor orientador imediatamente me tranquilizou quanto a isso. Apresentou-me a aluna Vanessa de Freitas Travello do curso de Licenciatura em matemática que se dispôs a me orientar onde encontrar um material que ensinasse construções utilizando



o origami, e ele próprio me orientou quanto ao uso do software.

Vários foram os encontros em que eu apresentava a evolução dos trabalhos. Muitas vezes apresentei as demonstrações da existência de apenas cinco sólidos de Platão e da validade do teorema de Euler. Sempre havia correções a serem feitas. E sempre havia também palavras de estímulo e incentivo por parte do meu professor.

O estudo dirigido em sala de aula foi planejado de forma que pudesse apresentar com clareza o desempenho dos alunos antes e depois da utilização dos recursos tecnológicos.

Posso afirmar com muita convicção, com base nos resultados apresentados durante o estudo dirigido, que esse trabalho foi muito gratificante. Ao preparar esse trabalho, estudei muito, pois uma aula bem preparada depende disso, do domínio que apresentamos sobre o assunto abordado. Depende, também, da capacidade de se despertar o real interesse e a atenção dos alunos. E esse interesse foi despertado com a utilização do origami e do GeoGebra. Pelo desempenho dos alunos nas várias fases do estudo dirigido podemos afirmar que são recursos válidos e eficientes.

Percebi que o estudo dirigido poderá ser otimizado pelo trabalho interdisciplinar: o professor de Arte pode colaborar com a construção de módulos do origami e da montagem dos sólidos. O trabalho conjunto certamente será ainda mais eficiente, pois o aluno, em vez de receber apenas instruções visuais e orais sobre a construção, realizará ele próprio todas as etapas da confecção. Mesmo o software GeoGebra poderá ser utilizado para o mesmo fim na sala de multimídia ou na sala de informática da escola em parceria com o professor de Arte.

# Referências

- [1] Bicudo, Irineu. Tradução *Os Elementos*, Ed. Unesp, São Paulo, 2009.
- [2] Bortolossi, Humberto José *Os Sólidos Platônicos*, Conteúdos Digitais para o ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense-UFF, Disponível em <<http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>>. Acesso em 12 de fevereiro de 2016.
- [3] Bairral, M. A. *Alguns contributos teóricos para análise da aprendizagem matemática em ambientes virtuais* Paradigma, dez. 2005, v. 20, n. 2, p. 197-214.
- [4] Connor, John J. O.; Robertson, Edmund F. *MacTutor History of Mathematics archive*, Disponível em <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html>>. Acesso em 6 de fevereiro de 2016.
- [5] Elmes, James *A general and bibliographical dictionary of the fine arts, Geometry*, p.375.
- [6] Filho, Zoroastro Azambuja *Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros convexos*, Revista do Professor de Matemática-RPM 3, 1983.
- [7] Fiorentini D.; Miorim, M. A. *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática* Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.
- [8] Hilbert, David *Fundamentos da Geometria* Editora: Gradiva 1<sup>o</sup>-edição.
- [9] Kallef, Ana Maria M.R. *Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos* Niterói- EdUFF,2003.
- [10] Lima, Elon Lages. *A matemática do Ensino Médio* Vol 2 Editora: SBM, 6<sup>o</sup> edição 2006,
- [11] Lima, Elon Lages *Ainda Sobre o Teorema de Euler para Poliedro Convexos*, Revista do Professor de Matemática RPM-5.

- 
- [12] Nakashima, Jo *Tutoriais de Origami*, Disponível em <<https://www.youtube.com/channel/UC3ICcukYYeSn26KlCRnhOhA>>. Acesso em 6 de fevereiro de 2016.
- [13] *Parâmetros curriculares nacionais: Introdução aos parâmetros curriculares nacionais* Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC/SEF, 1997.
- [14] Rodrigues, Fredy Coelho; Gazire, Eliane Scheid *Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão*, REVEMAT- Revista eletrônica de Educação Matemática, Disponível em <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p187/23460>>. Acesso em 10 de fevereiro de 2016.
- [15] Tibúrcio, Carlos Eduardo *Leonhard Euler*, Ambiente de Ensino e Aprendizagem, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMECC, Unicamp, Disponível em <<http://www.ime.unicamp.br/calculo/ambientedeensino/modulos/index.html>>. Acesso em 10 de fevereiro de 2016.