PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

EDUCAÇÃO FINANCEIRA PARA O ENSINO MÉDIO

RODRIGO CESAR PASTROLIN VENTURINI

TRÊS LAGOAS – MS

2016

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Pólo de Três Lagoas

EDUCAÇÃO FINANCEIRA PARA O ENSINO MÉDIO

por

RODRIGO CESAR PASTROLIN VENTURINI

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Edivaldo Romanini

Prof. Dr. Edivaldo Romanini (Orientador)
UFMS/CPTL

Renato Cesar da Silva

Prof. Dr. Renato César da Silva
UFMS/CPTL

Rangel Ferreira do Nascimento

Prof. Dr. Rangel Ferreira do Nascimento
Centro Universitário Toledo/Araçatuba

Julho de 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

EDUCAÇÃO FINANCEIRA PARA O ENSINO MÉDIO

RODRIGO CESAR PASTROLIN VENTURINI

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS – Campus de Três Lagoas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edivaldo Romanini.

TRÊS LAGOAS – MS

2016

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar a capacidade para os estudos.

A meus familiares, que sempre me apoiaram e incentivaram nos estudos.

A minha noiva Daniela Farinassi Miliatti, pelo apoio e auxilio nas revisões e correções do texto.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Edvaldo Romanini, pela atenção, paciência e pelas orientações nos estudos.

Ao Coordenador do PROFMAT da UFMS de Três Lagoas, Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi, pelo apoio e incentivo no decorrer do curso.

A todos os professores do PROFMAT da UFMS, Campus de Três Lagoas, pela forma sábia que nos orientaram nos estudos.

Aos colegas da Turma do PROFMAT 2014, pelo companheirismo e amizade no decorrer do curso.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo destacar a importância do ensino e da aprendizagem da Matemática Financeira no Ensino Médio. Consideramos que este é um assunto de grande relevância no cotidiano dos jovens que provavelmente farão uso do sistema bancário e do comércio. Colocamos em discussão a situação atual do ensino da Matemática Financeira e apresentamos elementos para argumentação da sua importância no momento em que se elencam os conteúdos do Ensino Médio. Além disso, mostraremos, por meio de resoluções de situações-problema que são inerentes ao cotidiano dos alunos como, por exemplo, o financiamento de um veículo, propostas de empréstimos, taxas de juros, planilhas de amortizações. Mostraremos também, que a planilha eletrônica Excel pode ser uma ferramenta de ensino para compreensão de fórmulas matemáticas, em particular fórmulas financeiras, resolução de situações-problema para auxílio de tomadas de decisões que envolvam tempo e dinheiro. Nesse sentido, o tempo das aulas destinado ao estudo da Matemática Financeira poderá ser mais aproveitado para questionamentos adicionais sobre o conteúdo em si, uma vez que o tempo destinado para a execução dos cálculos será mínimo com o auxílio dessa planilha eletrônica, visando assim, auxiliar os professores de Matemática na sua prática docente.

Palavras-chave: Ensino. Aprendizagem. Matemática Financeira. Planilha eletrônica Excel. Financiamento. Empréstimos. Taxas de juros. Amortizações. Prática docente.

ABSTRACT

This work aims to highlight the importance of teaching learning of Financial Mathematics in high school. We believe that this is a very relevant issue in the daily lives of young people who are likely to serve the banking system and trade. We discuss the current situation of financial mathematics teaching and introduce elements for argument of its importance at the time that we list the high school content. In addition, we will show, through resolutions of problem situations that are inherent in the daily lives of students, for example, financing a vehicle, proposals for loans, interest rates, amortization spreadsheets. We will also show that the Excel spreadsheet can be a teaching tool for understanding of mathematical formulas, in particular financial formulas, solving problem situations to aid decision-making involving time and money. In this sense, the time classes for the study of Financial Mathematics can be leveraged for additional questions about the content itself, since the time allotted to perform the calculations will be minimal with the help of this spreadsheet, thus aiming, help Mathematics teachers in their teaching practice.

Keywords: Education. Learning. Financial math. Excel spreadsheet. Financing. Loans. Interest rates. Amortizations. Practice teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Matemática Financeira é um ramo da Matemática que é considerada fundamental nas negociações bancárias e comerciais, sendo de grande importância sua aprendizagem pelos estudantes a partir do 1° ano do Ensino Médio. Esta disciplina oferece a oportunidade de rever tópicos matemáticos, tais como: Porcentagens, logaritmos, funções e progressões aritméticas e geométricas. Esses conteúdos formam a base principal da Matemática Financeira e devem ser abordados com atenção especial pelo professor.

A viabilidade da proposta pode ser constatada por Morgado (1993). Ao ministrar com grande êxito um curso de Matemática Financeira para professores do Ensino Médio no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) em 1992. Originando daí seu livro que ressalta a possibilidade dos docentes explorarem o conteúdo, de forma prática, comparando o assunto a ser desenvolvido em sala de aula, com problemas reais de natureza diversa. Os professores devem propiciar aulas dinâmicas e consequentemente mais interessantes, fazendo uma relação direta e clara com seus pré-requisitos.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação, o professor tem autonomia suficiente para preparar com responsabilidade as aulas que serão ministradas. Portanto, o Professor pode incluir os seguintes conteúdos da Matemática Financeira para serem ministrados em sala de aula: juros, empréstimos, prazos e amortizações, os quais aparecem superficialmente na base curricular [3].

É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações, encadeamentos conceituais e lógicos, tenham uma função principal de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio preceituam que se interpretem informações e seus significados (tabelas, gráficos e expressões). Assim, é interessante que seja demonstrada a relação existente entre os conteúdos relacionados à Matemática Financeira e os temas do cotidiano.

Além disso, devem formular questões a partir de situações da própria realidade e compreender aquelas já enunciadas. Vale também, estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas o do conhecimento de outras áreas do currículo. Mesmo que o conteúdo seja abordado de forma completa e aprofundado, nada garante que o aluno estabeleça algum significado para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras [4].

O ponto central é o da contextualização que insere o assunto na realidade do aluno e da interdisciplinaridade. No tratamento desses temas, a mídia, as calculadoras e os computadores adquirem importância natural como recursos que permitem a abordagem de problemas com dados reais, exigindo do aluno habilidades de seleção e análise de informações [4].

O presente trabalho se volta para o desenvolvimento de metodologias de ensino e aprendizagem para discentes do Ensino Médio conforme artigo 5° do Decreto n° 53.277/08, atendendo as exigências do Programa Bolsa Mestrado/Doutorado da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo de acordo com a Resolução SE n° 17/2011.

Dentre outros pontos, o objetivo deste trabalho é apresentar críticas construtivas e sugestões de ensino, destacando a importância do ensino e da aprendizagem da Matemática Financeira no Ensino Médio, apresentando sugestões e exemplos para que os professores possam enriquecer sua prática pedagógica utilizando tecnologias, tais como: planilhas do Excel, calculadoras científicas, entre outras. Propomos ainda enfatizar a necessidade de pré-requisitos fundamentais para a assimilação dos conteúdos, fazendo com que eles sejam estudados com a devida conexão.

Sem dúvida, este é um assunto do cotidiano; afinal todas as pessoas utilizam ou em alguma oportunidade utilizarão o sistema bancário e comercial. Justamente daí surge a necessidade do desenvolvimento desse tema em sala de aula, com a devida importância.

Até porque, após a estabilização da economia nacional, em virtude do plano real, as pessoas passaram a usufruir de financiamentos e empréstimos com maior frequência o que justificaria uma aprendizagem significativa da Matemática Financeira.

Nesse ínterim é válido comentar que o desenvolvimento desse trabalho não se direciona ao estudo aprofundado da Matemática Financeira, tal qual ocorre em cursos de Administração, Contabilidade e Economia. Na realidade, o que se almeja é que o aluno do Ensino Médio tenha a oportunidade de aprender o suficiente acerca desse tema, para que não seja ludibriado por instituições financeiras, que fazem propagandas atrativas, para induzir os jovens e fazer com que eles paguem por consequência disso, juros altíssimos.

Deste modo, o estudante que adquiriu um conhecimento financeiro adequado e suficiente, poderá ser no futuro um consumidor mais prudente.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos, sendo que no primeiro capítulo, será exposto, de forma sucinta, parte da história da Matemática Financeira e da Educação Financeira no Brasil. Estes são temas que possibilitam uma ampla discussão, que pode ser realizada durante as aulas do Ensino Médio. Acreditamos que a parte histórica desperte motivação entre os jovens, antes mesmo de adentrar nos estudos dos conceitos matemáticos propriamente ditos, bem como da matemática financeira.

No segundo capítulo, abordaremos aspectos teóricos sobre as progressões aritméticas e geométricas, conceitos que são pré-requisitos fundamentais no estudo da matemática financeira.

No terceiro capítulo, trabalhamos com os conceitos básicos da matemática financeira que serão abordados no 1° ano do Ensino Médio, tais como: Juros simples e compostos, equivalência de capitais, aplicações da soma dos termos de uma progressão geométrica em problemas financeiros, séries uniformes, sistemas de amortizações, dentre outros.

No quarto capítulo apresentamos sugestões de atividades práticas que serão trabalhadas com alunos do 1° ano do Ensino Médio com a utilização de diferentes recursos pedagógicos, tais como apresentação de textos e recursos tecnológicos, como, por exemplo, planilhas do Excel.

Ocorre que em razão de ser diretor designado, e portanto, estar fora das salas de aula; para a aplicação de tais atividades tivemos que utilizar das aulas de Matemática cedidas por professor que leciona a disciplina no 1º ano do Ensino Médio, na mesma escola em que trabalho.

As conclusões relatarão os resultados obtidos em relação à aprendizagem dos conceitos de matemática financeira aplicados em situações do cotidiano por parte dos alunos.

1 ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

1.1 Um pouco de história da matemática financeira

Segundo Jean Píton Gonçalves [5], "é bastante antigo o conceito de juros, os juros existem desde a época dos primeiros registros de civilizações existentes na Terra". Apesar de sua grande importância nos tempos antigos, são poucos os registros sobre sua origem.

Na época em que os homens viviam em pequenas comunidades isoladas umas das outras, havia muito pouca comunicação, e cada comunidade retirava o seu sustento da natureza.

Em razão da localização dessas comunidades, muitas vezes, uma podia necessitar de algum produto que não possuía em sua região. Logo, partindo da necessidade de trocar mercadorias é que surgiram as primeiras noções de comércio e por conseguinte a matemática financeira.

A princípio foi utilizado o escambo como método para realização das trocas desses produtos. O escambo é um meio utilizado para a troca de mercadorias, em que não se tem uma moeda para intermediar essas trocas, as transações comerciais eram feitas de forma direta: mercadorias em troca de outras mercadorias.

Muitas vezes havia a necessidade de se utilizar o escambo silencioso, devido à relações pouco amistosas entre algumas comunidades. Esse método consiste em ambas as partes deixarem as mercadorias em um local pré-estabelecido, para que os interessados possam analisar a conveniência ou não de realizar essa troca. Por esse motivo, muitas vezes no mercado não havia trocas.

Transações comerciais como essas, podiam ser observadas em várias regiões do planeta, utilizadas por diferentes povos. Com o aumento das transações comerciais e com a intensificação das comunicações entre os diversos povos, o escambo começou a deixar de ser suficiente para suprir as necessidades comerciais.

Portanto houve a necessidade de se criar uma unidade padrão para o comércio. Várias tentativas de padronização foram experimentadas, até que se chegou ao uso da moeda, unidade padrão que veio para agilizar o comércio e aparentemente dar preço justo às mercadorias.

Segundo Jean Píton Gonçalves, nos registros sobre a história dos juros, “um dos primeiros indícios apareceu na Babilônia no ano 2000 a.C.”, antes mesmo do surgimento da moeda já se cobrava e se pagava juros [5].

Nas civilizações antigas surgem as primeiras formas de pagamento de juros, vindas principalmente da agricultura. Exemplo disso é o pagamento dos juros, que a princípio era feito com sementes. Isso porque, os agricultores que não possuíam sementes suficientes para o plantio, pegavam emprestados com outros agricultores que possuíam sementes excedentes.

Isso ocorria porque essa prática era realizada exclusivamente em decorrência da agricultura, portanto era comum emprestar sementes para o plantio e receber após a colheita as sementes que haviam sido emprestadas, e mais um pouco. Na realidade o que esses agricultores faziam sem se dar conta, era pagar juros em forma de sementes [5].

Partindo da ideia de se emprestar algo recebendo de volta depois de certo tempo aquilo que se emprestou e mais um pouco, é que se obtém a relação entre juros e tempo. Foi assim que surgiram os conceitos básicos de juros.

Com o passar do tempo a matemática financeira evoluiu de acordo com as necessidades de cada época, porém sofreu poucas mudanças mantendo seus princípios.

Com o desenvolvimento comercial entre vários países que utilizavam moedas diferentes, surgem os cambistas. Eles se dedicavam à compra e venda de moedas de vários países, pois havia muitos comerciantes que viajavam de um país para outro com a finalidade do comércio necessitando assim utilizar a moeda corrente no país em que estivesse no momento. Então eles compravam e vendiam moedas diferentes lucrando com essa negociação.

Desde aquela época não era seguro guardar grandes quantias de dinheiro em casa, por isso quem possuía uma boa quantidade em dinheiro, entregava para os cambistas guardarem, já que eles possuíam grandes cofres. Com isso os cambistas perceberam que poderiam obter lucro sobre o dinheiro dos outros.

Assim, partindo do raciocínio de que os donos do dinheiro não pediriam a devolução do dinheiro de uma só vez, foi que os cambistas começaram a emprestar esse dinheiro para outras pessoas, e é claro que recebendo juros juntamente com a quantia emprestada.

Para fazer essas negociações, os cambistas ficavam sentados em bancos de madeira, em algum lugar nos mercados da época, daí vem à origem da palavra banqueiro utilizada atualmente para designar donos de bancos [5].

O primeiro banco privado foi fundado em Veneza no ano de 1157, pelo Duque Vitali. Em seguida surgiram vários bancos, formando assim toda uma rede bancária. Os bancos foram os grandes responsáveis pelos avanços do comércio e consequentemente da matemática financeira até os dias atuais, tendo em vista que os juros são a base de ambos [5].

1.2 Educação Financeira no Brasil

As mudanças que ocorreram nas últimas décadas no setor econômico contribuem para um cenário que aponta para a importância dessas discussões nas salas de aula.

A Educação Financeira é um tema pouco discutido e estudado no Brasil. Saito (2007), por exemplo, aponta para a existência de uma lacuna ao dizer: "[...] não há especificamente trabalhos sobre a implantação da Educação em Finanças Pessoais nos currículos nacionais" [12].

Segundo ele, a maior parte dos trabalhos brasileiros relacionados ao tema está voltada para a discussão da gestão do patrimônio, havendo necessidade de uma análise do ponto de vista de educadores. Discutir a Educação Financeira no sistema de ensino é de extrema importância, pois há a possibilidade de atingir diversos segmentos da população, tendo em vista a busca da universalização da Educação Básica. É importante ainda considerar que os estudantes podem e devem levar questões para serem discutidas em seus lares, ampliando o alcance da proposta [12].

Durante décadas do século XX o Brasil conviveu com um longo período de inflação, este fato contribuiu para que as pessoas não tivessem familiaridade com planejamentos em longo prazo. Após o Plano Real, ocorreram grandes transformações no mercado financeiro, o que fez com que ele sofresse uma ampliação na oferta de crédito.

Para Souza & Torralvo (2008): "o crescente acesso ao crédito, pode significar problemas na gestão financeira impulsionando o consumo [...]", e [...] ainda o surgimento e a rápida expansão do dinheiro eletrônico." Pagamentos e transferências podem ser feitos pela internet ou em caixas eletrônicos; há também o dinheiro de plástico representado pelos cartões de crédito, débito ou pré-pagos. Estas e outras mudanças rápidas e profundas atingem os diversos segmentos da população brasileira [14].

Com a estabilização da moeda, foi possível perceber um aumento da inclusão social que contribuiu para a ampliação do mercado de consumo interno, fato que confluiu para que o Brasil se tornasse um mercado de consumo de massas gerando uma grande expansão do crédito.

Vale destacar que este último aspecto tem sido a preocupação de muitos economistas. Estes têm apontado consequências desastrosas que as facilidades na obtenção do crédito têm representado para a população brasileira. Nesse contexto, que acena para a importância da discussão de uma proposta de Educação Financeira no Brasil, encontramos um documento que apresenta a Estratégia Nacional de Educação Financeira (Enef).

Neste documento, temos a definição de Educação Financeira que foi dada pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Esta definição adotada pelo Brasil foi apresentada nos seguintes termos [2]:

> [...] educação financeira é o processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação, possam desenvolver os valores e as competências necessários para se tornarem mais conscientes das oportunidades e dos riscos nele envolvidos e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda, adotar outras ações que melhorem o seu bem-estar. Assim, podem contribuir de modo mais consciente para a formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro (BRASIL, 2011b, p.23).

Vemos que existe a preocupação com a capacitação do cidadão na gestão de seus recursos financeiros; capacitação esta que está diretamente relacionada ao campo de atuação dos professores trabalhando diretamente com a Educação Básica, ressaltamos a importância de se discutir este tema em sala de aula para os jovens terem condições de tomarem decisões financeiras de modo racional.

Nesse aspecto, é interessante mencionar o papel desempenhado pela mídia, pois é possível observar em diversos comerciais, a preocupação dos meios de comunicação, em divulgar as facilidades de pagamentos e suas taxas imperdíveis;

evidenciando apenas e tão somente as propostas e o valor correspondente as prestações mensais.

Com isso, muitas pessoas preferem as parcelas menores, mesmo que os encargos financeiros sejam mais altos. A preocupação muitas vezes, é encontrar uma parcela cujo valor seja compatível com a renda do comprador que desconhece o peso dos juros no preço final dos produtos adquiridos. É preciso lembrar também que, em muitos casos, os juros podem estar mascarados pelas taxas de abertura de crédito, ou de cadastro, ou ainda na venda de seguros.

Nesse ínterim, Leite (2009) ao discutir a Educação Financeira em nosso país, sinaliza que: "Apesar da importância do tema, no Brasil não existem programas educacionais preocupados com o processo de socialização econômica" [6]. O Brasil não tem contemplado, via sistema de ensino, a Educação Econômica das crianças e jovens.

Araújo (2009) por sua vez, afirma que: "O tema não tem sido tratado com destaque pelos documentos oficiais nacionais, que estabelecem as políticas educativas no Brasil." [1].

Existe ainda a perspectiva de discutir a ética nas relações de consumo e o consumo sustentável. O Instituto Brasileiro de Defesa do Consumidor (IDEC) diz que todos têm um papel pedagógico a ser desenvolvido, debatendo a relação entre consumo e sustentabilidade. O instituto faz uma advertência:

> O tema consumo sustentável foi introduzido nas atividades do IDEC não como mais um item de sua extensa agenda de trabalho na defesa do consumidor. Essa preocupação é uma decorrência natural da consciência do impasse em que nos encontramos: ou se alteram os padrões de consumo ou não haverá recursos naturais nem de qualquer outro tipo para garantir o direito das pessoas a uma vida sustentável. Não haverá como garantir o direito de acesso universal sequer aos bens comuns (IDEC, apud ARAÚJO, 2009, p. 75).

É perceptível que a Educação Financeira ainda não é uma realidade na prática escolar brasileira. Contudo, isso não retira a importância da discussão desses temas, com os jovens que cursam o Ensino Médio, visto que tal abrangência contribui como motivação aos alunos, antes mesmo de começar a estudar diretamente os conceitos da matemática financeira.

Nos Capítulos finais deste trabalho foram selecionadas algumas obras para referência de estudo; na busca de sugestões de atividades que possam contribuir com a perspectiva de refletirmos sobre a importância da Educação Financeira nas escolas e com a produção de atividades que serão aplicadas em aulas de Matemática do 1º ano do Ensino Médio, logo após o estudo das Progressões Aritméticas e Geométricas.

1.3 Considerações Finais Sobre o Ensino de Matemática Financeira

Juro é o aluguel que você paga por usar uma quantia de dinheiro que não é sua. Atualmente o juro aplicado no mercado financeiro é o juro composto, aquele que incide juro sobre juro.

Infelizmente, a maior parte dos alunos não possui a percepção desse significado, ou seja, quando usamos um dinheiro que não é nosso, devemos pagar juros e esses juros podem ser lineares ou não.

O fato é que, somente haverá uma percepção financeira se existir uma educação adequada.

Logo, durante o desenvolvimento desse trabalho em sala de aula, a priori, a intenção é desenvolver essa percepção nos discentes, contribuindo e orientando sobre os altos valores dos juros aplicados do mercado financeiro.

Morgado (2010) em seu curso afirmou que a matemática financeira é um assunto que inexplicavelmente não costuma ser ensinado no Ensino Médio, então chegamos no Brasil a esta situação absurda: um aluno com onze anos de estudo, convivendo com a matemática desde então, ao final do ensino médio, ingressa numa universidade sabendo fazer cálculos com Matrizes e Números Complexos, mas não conseguindo decidir racionalmente, entre uma compra à vista com desconto e uma compra a prazo. Assim evidenciamos que a Matemática Financeira pode e deve ser ensinada no Ensino Médio, e a hora adequada é logo após o estudo das Progressões [8].

Geralmente é deixado de lado o estudo da matemática financeira ou muitas vezes este assunto é trabalhado de modo superficial, não se aprofundando o tema de forma adequada [8].

Um assunto como juros simples não é tratado de forma que o aluno compreenda que este praticamente não existe na vida real. Esta muitas vezes é uma prática no ensino Fundamental, em que geralmente se ministra apenas juros simples.

Consideramos extremamente nocivo para o aluno estudar somente juros simples e deixar de ver juros compostos neste nível de ensino, porque cria no aluno a falsa ilusão que ele aprendeu a fazer cálculos financeiros tornando-se vítima fácil de “espertalhões” [10].

Um outro ponto negativo que acreditamos em ensinar somente juros simples, é o aluno acreditar que um empréstimo de 10% ao mês ao final de 2 meses temos juros de 20%, o que não é verdade, pois juros de 10% ao mês ao final de 2 meses temos juros de 21%.

Deste modo, neste trabalho será dada ênfase ao ensino dos juros compostos para que o aluno compreenda que uma das finalidades de se estudar matemática financeira é de dar subsídios para tomar decisões financeiras de modo racional, ou seja, desenvolver competências e habilidades no educando.

No próximo capítulo o assunto a ser abordado refere-se as Progressões Aritmética e Geométrica, fazendo uma relação com as funções afins e funções exponenciais, tópicos essenciais para o estudo da Matemática Financeira.

2 PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

A seguir serão apresentadas de forma breve algumas propriedades e tópicos fundamentais para o estudo da matemática financeira, a saber, as progressões aritméticas e progressões geométricas.

2.1 Progressões Aritméticas: PA

As progressões aritméticas são comuns na vida real e sempre aparecem quando se apresentam grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais, como por exemplo, no cálculo de juros simples.

Definição 2.1 Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência numérica na qual a diferença entre um termo e seu antecessor é sempre constante. Essa diferença é chamada de razão r [8].

Assim, uma progressão aritmética de razão r é uma sequência (a_n) na qual $a_n - a_{n-1} = r$, para todo n natural.

Exemplo 2.1 As sequências $(a_n) = (2, 5, 8, 11, \dots)$, $(b_n) = (5, 5, 5, 5, \dots)$ e $(c_n) = (10, 5, 0, -5, \dots)$ são progressões aritméticas cujas razões são respectivamente 3, 0 e -5.

Exemplo 2.2 Em uma progressão aritmética, para avançar um termo basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, etc. Assim, em uma progressão aritmética, $a_2 = a_1 + r$, $a_{15} = a_{10} + 5.r$, $a_{50} = a_{40} + 10.r$.

Observemos o esquema da figura 2.1, a seguir:

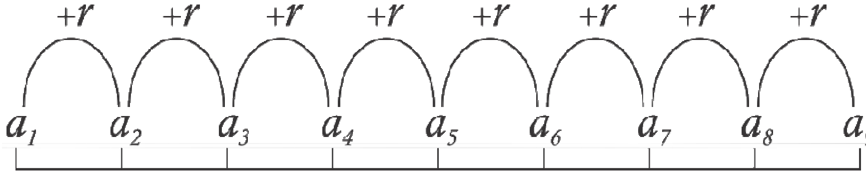


Figura 2.1: Esquema de uma PA.

Exemplo 2.3 Em uma progressão aritmética o oitavo termo vale 14 e o trigésimo termo vale 80. Qual o décimo termo dessa progressão?

Solução: $a_{30} = a_8 + 22r$, pois ao passarmos do oitavo termo para o trigésimo avançamos 22 termos. Logo, 80 = 14 + 22r e r = 3. Analogamente, $a_{10} = a_8 + 2r = 14 + 2.3 = 14 + 6 = 20$. Portanto o décimo termo vale 20.

2.1.1 Termo Geral de uma PA

Seja uma progressão aritmética onde, a_1 é o primeiro termo, r é a razão e o n-ésimo termo é a_n, é possível encontrar uma fórmula geral para um termo qualquer da PA.

Teorema 2.1 Se (a_n) é uma progressão aritmética de razão r, então $a_n = a_1 + (n-1)r$; para todo n inteiro e positivo.

Demonstração: Pela definição de progressão aritmética, temos:

$$a_2 - a_1 = r$$

$$a_3 - a_2 = r$$

$$a_4 - a_3 = r$$

...

$$a_n - a_{n-1} = r.$$

Somando essas $n - 1$ igualdades, obtemos: $a_n - a_1 = (n-1)r$. Ou seja,

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Exemplo 2.4 Na progressão aritmética 4, 7, 10, 13,..., temos, $a_n = a_1 + (n-1)r = 4 + (n-1)3 = 3n + 1$. Em particular $a_{40} = 3 \times 40 + 1 = 121$.

Exemplo 2.5 Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumentou mensalmente, sua produção de 30 veículos. Quantos veículos produziram após um ano?

Solução: Temos a PA (400, 430, 460, ...) onde $a_1 = 400$ de razão $r = 30$. Teremos que calcular o 13° termo, pois a partir do primeiro termo iremos somar 12 vezes a razão, logo pelo Teorema 2.1 temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{13} = 400 + (13-1).30 = 760.$$

Portanto, após um ano a fábrica produziu 760 veículos [7].

Comentário: Note que no exemplo poderíamos ter tomado $a_0 = 400$, logo após um ano teríamos que encontrar o 12° termo. Assim:

$$a_{12} = a_0 + 12.r;$$

$$a_{12} = 400 + 12.30 = 760.$$

Exemplo 2.6 O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem por aqui foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de cristo? E em que ano foi sua primeira passagem na Era Cristã? [7].

Solução: Os anos de passagem do cometa formam a PA (1986, 1910, 1834, ...) de razão – 76. O termo de ordem n dessa progressão é:

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \text{ isto é,}$$

$$a_n = 1986 + (n-1).(-76) = 2062 - 76n.$$

Temos que $a_n > 0$ logo, $2062 - 76n > 0$, então:

$$n < \frac{2062}{76} = 27{,}13 \ldots$$

Portanto, os termos positivos dessa progressão são os 27 primeiros termos. Logo, o cometa nos visitou 27 vezes na Era Cristã e sua primeira passagem foi no ano $a_{27} = 1986 + (27-1).(-76) = 1986 - 1976 = 10.$

Muitas vezes, é conveniente enumerar os termos de uma progressão aritmética a partir do zero, como observamos no comentário do exemplo 2.5 e conforme mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 2.7 O preço de um carro novo é de R$ 15.000,00 e diminui R$ 1.000,00 a cada ano de uso. Qual será o preço com 4 anos de uso? [7]

Solução: Chamando o preço com n anos de uso de a_n, temos $a_0 = 15.000$ e queremos calcular a_4. Como a desvalorização anual é constante, temos uma PA.

Logo,

$$a_4 = a_0 + 4r = 15.000 + 4.(-1.000) = 11.000.$$

Portanto o preço do carro será de R$ 11.000,00.

2.1.2 Progressão Aritmética e a Função Afim

Consideremos uma grandeza a(n) que sofre aumentos periódicos iguais a r, a cada intervalo de n inteiro. Observemos o gráfico a seguir que associa a cada número natural n ao número a(n). Assim, numericamente, a PA comporta-se como uma função afim, tal como é possível representá-la, na figura 2.2.

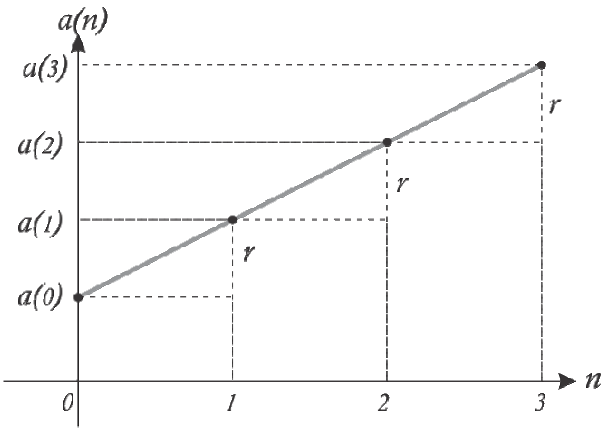


Figura 2.2: Representação gráfica de uma PA.

Notemos que para cada acréscimo de uma unidade em n, temos uma imagem em a(n), ou seja, para 3 no eixo das abscissas, encontramos o terceiro termo a(3) no eixo das ordenadas. Para o n-ésimo número natural no eixo das abscissas encontramos sua respectiva imagem a(n) no eixo das ordenadas [7].

Percebe-se também que o coeficiente angular da função afim, coincide com a razão da PA.

2.1.3 Soma dos termos de uma PA

Quando o grande matemático Carl F. Gauss (1777-1855) tinha sete anos de idade, seu professor pediu que calculasse a soma dos inteiros de 1 a 100. O professor, esperando que o trabalho durasse um bom tempo, ficou surpreso quando, em poucos minutos o pequeno Gauss anunciou que o valor era 5050. A resposta estava correta, e o professor lhe perguntou como tinha feito os cálculos tão rapidamente. Gauss explicou que primeiramente somou 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, ... , 48 + 53, 49 + 52, 50 + 51. Assim obteve 50 somas iguais a 101 e obteve a resposta 50 x 101 = 5.050 [7].

Baseando nessa ideia, é possível encontrar a soma dos n primeiros termos de uma PA a partir de uma fórmula.

Teorema 2.2 A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ é igual a:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \text{ e}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Daí, somando as duas equações temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

Logo,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Exemplo 2.8 Vamos calcular a soma dos vinte primeiros termos da progressão aritmética (2, 5, 8, 11,...).

Solução:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}).20}{2} = (a_1 + a_{20}).10.$$

Como $a_1 = 2$ e $r = 3,$ temos $a_{20} = a_1 + 19r = 59,$ segue que $S_{20} = 610.$

Exemplo 2.9 Determinemos uma expressão para a soma dos n primeiros números inteiros e positivos.

Solução: Queremos calcular a soma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n;$$

$$S_n = \frac{(1+n).n}{2}.$$

Portanto, a expressão da soma dos n primeiros números inteiros e positivos é:

$$S_n = \frac{n.(n+1)}{2}.$$

Exemplo 2.10 A soma dos n primeiros números ímpares é:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{(1+(2n-1))}{2} = n^2.$$

2.2 Progressão Geométrica: PG

Ao utilizarmos progressões aritméticas para modelar problemas de juros simples, obtemos a seguinte situação. Considere um capital de R$ 10.000,00 aplicado a uma taxa mensal de 2%.

Mês	Valor Inicial	Juros	Valor Final
1	10.000	$10.000 \times 2\% = 200$	10.200
2	10.200	$10.000 \times 2\% = 200$	10.400
3	10.400	$10.000 \times 2\% = 200$	10.600
4	10.600	$10.000 \times 2\% = 200$	10.800
5	10.800	$10.000 \times 2\% = 200$	11.000
6	11.000	$10.000 \times 2\% = 200$	11.200

Tabela 2.1: Aplicação a juros simples.

Esse tipo de aplicação como mostra na tabela não acontece na vida real. O que acontece na vida real é que os juros incidem sobre juros, pois já no segundo mês o capital não é mais R$ 10.000,00 e sim R$ 10.200,00, logo é esse capital que deve ser remunerado no segundo mês. Obtemos assim uma nova tabela (com arredondamento na segunda casa decimal).

Mês	Valor Inicial	Juros	Valor Final
1	10.000	$10.000 \times 2\% = 200$	10.200
2	10.200	$10.200 \times 2\% = 204$	10.404
3	10.404	$10.404 \times 2\% = 208,08$	10.612, 08
4	10.612, 08	$10.612,08 \times 2\% = 212,24$	10.824, 32
5	10.824, 32	$10.824,32 \times 2\% = 216,49$	11.040, 81
6	11.040, 81	$11.040,81 \times 2\% = 220,82$	11.260, 92

Tabela 2.2: Aplicação de juros sobre juros.

Observemos que nessa tabela, a menos das aproximações, o quociente entre o capital de um mês e o do mês anterior é uma constante e igual a 1,02 [9].

Isso motiva a seguinte definição.

Definição 2.2 Definimos como progressão geométrica (PG) a sequência que determina taxas de crescimentos iguais para termos consecutivos quaisquer. Ou seja, em uma PG, a taxa de crescimento é constante. Uma grandeza tem taxa de crescimento igual a i, cada valor da grandeza é igual a $(1+i)$ vezes o valor anterior, onde $(1+i)$ chamamos de razão q da PG [9].

A taxa de crescimento de uma grandeza, que passa do valor a para o valor b, é definida por $\frac{b-a}{a}$, isto é, a taxa de crescimento é a razão entre o aumento da grandeza e seu valor inicial [8].

Exemplo 2.11 A taxa de crescimento que passa do valor 4 para o valor 6 é igual a

$$\frac{6-4}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5=50\%.$$

Exemplo 2.12 A população de certo país aumenta 2% ao ano. Então, a população P_n do país no ano n será igual à população P_{n-1} do ano anterior mais o aumento da população que é igual a 2% da população P_{n-1}, isto é, $P_n = P_{n-1} + 0{,}02P_{n-1} =$

$1{,}02P_{n-1}$. Ou seja, a população em cada ano é igual à população do ano anterior multiplicada pela constante 1,02.

Notemos que a taxa de crescimento de P_n é 2% = 0,02 [8].

Exemplo 2.13 Uma bomba de vácuo retira, em cada sucção, 3% do líquido existente em certa câmara. Se A_n é quantidade de líquido existente na câmara após n sucções, temos:

$$A_n = A_{n-1} - 0{,}03A_{n-1} = 0{,}97A_{n-1,}$$

Isto é, cada termo da sequência (A_n) é igual ao termo anterior multiplicado pela constante 0,97. Notemos que a taxa de crescimento de A_n é – 3% = – 0,03 [8].

Os dois últimos exemplos podem ser formalizados no Teorema a seguir.

Teorema 2.3 G_n tem taxa de crescimento constante igual a i, se e somente se $G_{n+1} = (1+i)G_n$, para todo n natural.

Demonstração: Se a taxa de crescimento de G_n é i, então por definição

$$i = \frac{G_{n+1} - G_n}{G_n}.$$

Daí, $G_{n+1} - G_n = iG_n$, segue,

$G_{n+1} = G_n + iG_n$, logo,

$$G_{n+1} = (1+i)G_n.$$

Reciprocamente, se $G_{n+1} = (1+i)\,G_n\cdot$, então $G_{n+1} - G_n = iG_n$.

Daí, $i = \frac{G_{n+1}-G_n}{G_n}$, é a taxa de crescimento de G_n com constante igual a i.

Observação: Chamamos progressão geométrica a sequência na qual a razão entre um termo, a partir do segundo, e seu antecessor é sempre constante. A esta damos o nome de razão da PG, representando por q.

Exemplo 2.14 As sequências (1, 2, 4, 8, 16,...), (5, 5, 5, 5,...) e (18, 6, 2, $\frac{2}{3}$,...) são progressões geométricas cujas razões são respectivamente 2, 1 e $\frac{1}{3}$.

Exemplo 2.15 Em uma Progressão Geométrica, para avançar um termo basta multiplicar o termo atual pela razão q; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão q, ou seja, multiplicar por q^2. Assim, em uma PG, $a_2 = a_1.q$; $a_8 = a_5.q^3$, $a_{100} = a_{60}.q^{40}$. Observemos o esquema da figura 2.3, a seguir.

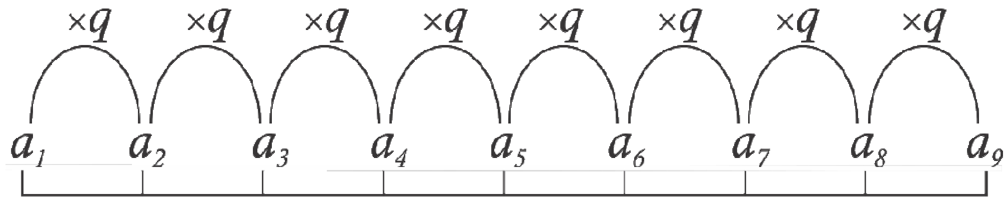


Figura 2.3: Esquema de uma PG.

Exemplo 2.16 Em uma PG o quinto termo vale 18 e o oitavo termo 486. Qual é o sétimo termo?

Solução: Como temos o oitavo e quinto termos, podemos fazer: $a_8 = a_5.q^3$ (note que "pulamos" 3 casas do quinto para o oitavo termo), assim,

$a_8 = a_5.q^3 = 18.q^3 = 486$, segue $q = 3$.

Logo, como queremos encontrar o sétimo termo, podemos encontrá-lo a partir do quinto:

$$a_7 = a_5.q^2 = 18.3^2 = 162.$$

Logo, o sétimo termo da PG dada é 162.

Seguindo este raciocínio podemos formalizar que para "pular" da casa m para n (m, n naturais e m < n), multiplicamos por q (n – m) vezes, ou seja, multiplicamos por q^{n-m}. Observemos a figura 2.4.

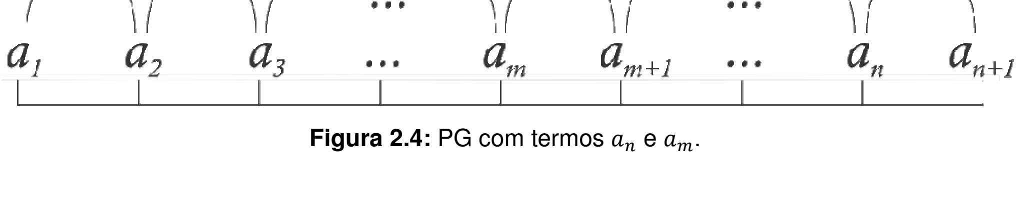


Figura 2.4: PG com termos a_n e a_m.

Assim,

$$a_n = a_m . q^{n-m}.$$

Podemos desta forma, deduzir o termo geral de uma PG, ou seja, como encontrar o n-ésimo termo de uma PG a partir do primeiro termo, embora esta fórmula seja demonstrada em seguida, é fácil deduzí-la.

Note que do primeiro termo até o último “pulamos” n – 1 casas, assim,

$$a_n = a_1 . q^{n-1}.$$

2.2.1 Termo Geral de uma PG

Formalizando a conjectura apresentada, segue o teorema 2.4.

Teorema 2.4 Em toda progressão geométrica (a_n) de razão q, temos, para todo natural n, que:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}.$$

Demonstração: Temos $\frac{a_2}{a_1} = q, \frac{a_3}{a_2} = q, \frac{a_4}{a_3} = q, \ldots , \frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$

Multiplicando essas $n - 1$ igualdades, obtemos $\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$. Daí,

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Observemos que, se enumerarmos os termos a partir de a_0, obteríamos:

$$a_n = a_0 . q^n.$$

Exemplo 2.17 A população de certa cidade é hoje de 500 mil habitantes e cresce 3% ao ano. Qual a população estimada dessa cidade daqui a 10 anos?

Solução: $P_{10} = P_0 . (1 + i)^{10} = 500. (1 + 0.03)^{10} \cong 672$ mil habitantes.

2.2.2 Progressão Geométrica e a Função Exponencial

Considerando o termo geral de uma PG: $a_n = a_1 . q^{n-1}$ podemos afirmar que fixando o primeiro termo e a razão constantes, ou seja, variando n e consequentemente a_n, podemos usar a notação de função e escrever uma PG como uma função exponencial F: N → R tal que: $a(n) = a(1). q^{n-1}$, ou ainda, podemos considerar o primeiro termo da PG como a_0 e usar a notação:

F: N ∪ {0} → R, sendo $a(n) = a(0). q^n$ [7].

Assim, a representação gráfica desta função é uma sequência de pontos que pertence à curva de uma função exponencial real. Observemos a figura 2.5.

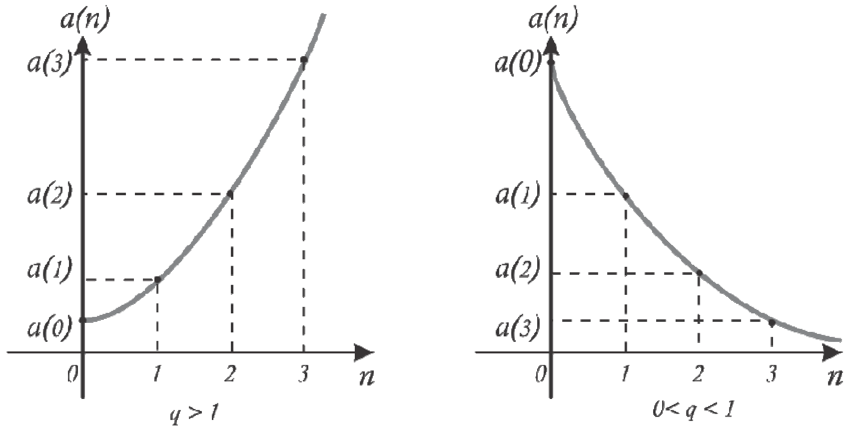


Figura 2.5: Gráfico de uma PG crescente e decrescente.

Logo, por se tratar de uma função exponencial podemos afirmar que uma PG é sempre limitada inferiormente pelo primeiro termo, se a PG for crescente (q > 1) e pode ser limitada superior e inferiormente se 0 < q < 1, pois o limite do termo geral tende a zero para n tendendo ao infinito e a sequência é sempre menor ou igual a a_0 por ser decrescente.

2.2.3 Soma dos termos de uma PG

Assim como é possível deduzir uma fórmula para a soma dos termos de uma PA, é possível deduzir a soma dos termos de uma PG. Observemos o teorema a seguir.

Teorema 2.5 A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$ é igual a:

$$S_n = a_1.\frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Demonstração: Consideremos S_n a soma dos n primeiros termos de uma PG.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e, multiplicando por q, obtemos:

$$qS_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_n.q.$$

Subtraindo essas igualdades, obtemos:

$$S_n - q.S_n = a_1 - a_n.q = a_1 - a_1q^n,$$

Ou seja, $S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$.

Daí, já que $q \neq 1$, segue:

$$S_n = a_1.\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Exemplo 2.18 Diz a lenda, que o inventor do xadrez pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e, assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o número de grãos pedido pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica 1, 2, 4, 8, ... Qual o valor dessa soma? [7].

Solução: Usando a fórmula do teorema 2.5, temos:

$$S_n = a_1.\frac{1-q^n}{1-q} = 1.\frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1.$$

Portanto o valor da soma é $2^{64} - 1$. Calculando, obtemos um estupendo número de dígitos: 18.446.744.073.709.551.615.

2.2.4 Soma dos infinitos termos de uma PG decrescente

Consideremos a PG $(a_n) = 456, 162, 54, 18, 6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ Analisando essa PG, percebemos que a soma cresce cada vez menos a ponto de deduzir um possível limite para a sequência. Qual seria a soma dos 100 primeiros termos? E a soma dos 1000 primeiros termos? Se realmente for limitada seria possível calcular a soma dos termos de uma PG infinita?

Consideremos a PG decrescente. É possível responder as perguntas levantadas anteriormente. Ou melhor, é possível uma generalização para toda PG decrescente.

Conjecturando, podemos tomar a soma dos termos de uma PG decrescente, pela fórmula:

$$S_n = a_1 . \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Sabendo que uma função exponencial da forma $f: R \to R$ como $f(n) = q^n$, é limitada inferiormente em zero, para 0 < q < 1, então, considerando a soma dos infinitos termos de uma PG, temos que,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = S.$$

Para formalizar este resultado, analisaremos os teoremas dados a seguir, estes são essenciais para o resultado que se deseja provar. O primeiro deles é a célebre desigualdade de Bernoulli, devida a Jacques Bernoulli (1654-1705) matemático suíço [8].

Teorema 2.6 (Desigualdade de Bernoulli). Se $h > -1, (1+h)^n \geq 1 + n.h$, para todo natural n [8].

Demonstração. Por indução finita temos:

Se $n = 0$, ambos os membros são iguais a 1 e a desigualdade é verdadeira. Supondo agora a desigualdade verdadeira para $n = k$, podemos mostrar que ela é verdadeira para $n = k + 1$. Se $(1+h)^k \geq 1 + k.h$, multiplicando ambos os membros por $1 + h$, que é positivo, obtemos:

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1} &\geq (1+kh)(1+h)\\ &= 1 + kh + h + kh^2\\ &= 1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h.\end{aligned}$$

Conforme queríamos demonstrar.

Teorema 2.7 Se $|q| < 1, \lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Demonstração: Se $q = 0$, escolhido $\epsilon > 0$, temos $|q^n - 0| = 0 < \epsilon$, para todo $n > 0$.

Se $q \neq 0$, escolhido $\epsilon > 0$ e pondo $h = \frac{1}{|q|} - 1$, h será positivo e

$$|q^n - 0| = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+h} < \frac{1}{nh} < \epsilon, \qquad se\, n > \frac{1}{\epsilon h}.$$

Teorema 2.8 O limite da soma S_n dos n primeiros termos da progressão geométrica (a_n), de razão q tal que $|q| < 1$, é igual a:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Demonstração: Escolhido $\epsilon > 0$, seja $h = \frac{1}{|h|} - 1$. Observemos que $h > 0$ e que $1 - q > 0$. Temos

$$|S_n - S| = \left| a_1 \frac{1-q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \right| = \frac{|a_1|}{1-q} |q|^n.$$

Se $a_1 = 0$, temos $|S_n - S| = 0 < \epsilon$ para todo n natural e, se $a_1 \neq 0$ temos:

$$|S_n - S| = \frac{|a_1|}{1-q} . \frac{1}{(1-q)^n} \leq \frac{|a_1|}{1-q} . \frac{1}{1+nh} < \frac{|a_1|}{(1-q)hn} < \epsilon,$$

$$se, \quad n > \frac{|a_1|}{\epsilon h(1-q)}.$$

Exemplo 2.19 Calcule o limite da soma da progressão geométrica:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Solução:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Portanto, o limite da soma é igual a 1.

O resultado do exemplo anterior admite uma interessante paráfrase. Suponha que Salvador deva correr 1Km. Inicialmente, ele corre metade dessa distância, isto é, $\frac{1}{2}$ Km; em seguida, ele corre metade da distância que falta, isto é, $\frac{1}{4}$ Km; depois, metade da distância restante, isto é, $\frac{1}{8}$ Km, e assim por diante.

Depois de n etapas, Salvador terá corrido:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}Km.$$

Se n for grande, essa soma será aproximadamente igual a 1Km.

Exemplo 2.20 Consideremos um triângulo equilátero cuja medida do lado é 4 cm. Um segundo triângulo equilátero é construído, unindo os pontos médios dos lados do triângulo original. Novamente, unindo os pontos médios dos lados do segundo triângulo, obtemos um terceiro triângulo equilátero, e assim por diante, infinitas vezes.

Calcular a soma dos perímetros das infinidades de triângulos formados na sequência, incluindo o triângulo original.

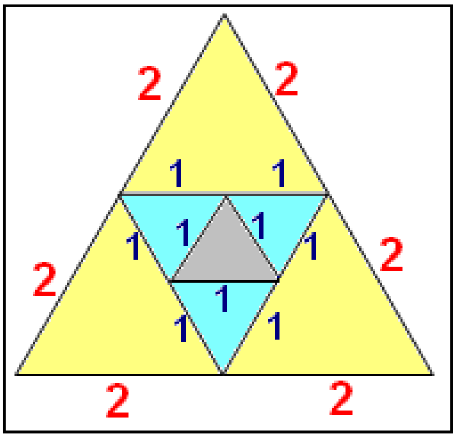


Figura 2.6: Sequência de infinitos triângulos unindo os pontos médios dos lados a partir do primeiro.

Solução: Os perímetros dos triângulos formam uma progressão geométrica infinita (12, 6, 3, ...) de razão $r=\frac{1}{2}$, daí temos:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{12}{1-\frac{1}{2}} = 24.$$

Portanto, a soma dos perímetros dos infinitos triângulos é 24 cm.

Neste capítulo foram apresentadas algumas propriedades das progressões aritméticas e geométricas, que serão pré-requisitos fundamentais para o estudo dos conceitos básicos da Matemática Financeira que apresentaremos no próximo capítulo.

3 MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

A seguir serão estudados conceitos e teoremas da matemática financeira, sendo apresentadas situações reais para os alunos, de modo que os mesmos possam participar ativamente das discussões. Nos exemplos trazidos nesta oportunidade, será necessária que o aluno utilize como ferramenta de resolução a calculadora científica, inserindo assim o estudante nas tecnologias como recomenda os PCNs [4].

Segundo (MORGADO, 2010), operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capital C (chamado de *principal ou capital inicial*) empresta-o a outrem por certo período de tempo.

Após esse período, ele recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de *juro*. A soma C + J é chamada de *Montante* e será representada por M. A razão i = J/C, que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de taxa de juro [8].

Exemplo 3.1 Alguém que tem certo capital de R$ 200,00, empresta este valor a outra pessoa por período de 2 meses, depois deste prazo a pessoa que tomou o empréstimo vai pagar algo a mais como espécie de remuneração pelo empréstimo do dinheiro, digamos R$ 240,00.

A diferença entre o Montante e o Principal são os Juros:

Juros = Montante – Principal = 240,00 – 200,00 = 40,00

Logo os juros são de R$ 40,00.

Taxa de juros representados pela letra i é a razão entre o juro e o Principal:

i = 40/200 = 0,20 = 20 %.

Exemplo 3.2 Aplicando R$ 100,00 durante seis meses à taxa de juros de 10 % ao mês, qual será o Capital Final produzido a juros simples e composto no período?

Neste exemplo propomos que o aluno construa uma tabela mês a mês, como mostrado na tabela 3.1, para o cálculo dos juros simples e outra para o cálculo dos juros compostos e em seguida faça no plano cartesiano os respectivos gráficos, como ilustra o gráfico 3.1 Entendemos que a tabela e o gráfico facilitariam o entendimento do conteúdo e proporcionaria uma análise mais significativa dos tópicos.

Tabela de Juros Simples

Mês	Capital	Juros	Montante Simples
1º	100,00	10,00	110,00
2º	100,00	10,00	120,00
3º	100,00	10,00	130,00
4º	100,00	10,00	140,00
5º	100,00	10,00	150,00
6º	100,00	10,00	160,00

Tabela de Juros Compostos

Mês	Capital	Juros	Montante Composto
1º	100,00	10,00	110,00
2º	110,00	11,00	121,00
3º	121,00	12,10	133,10
4º	133,10	13,31	146,41
5º	146,41	14,64	161,05
6º	161,05	16,11	177,16

Tabela 3.1. Cálculo de juros simples e compostos, a partir de um mesmo capital inicial.

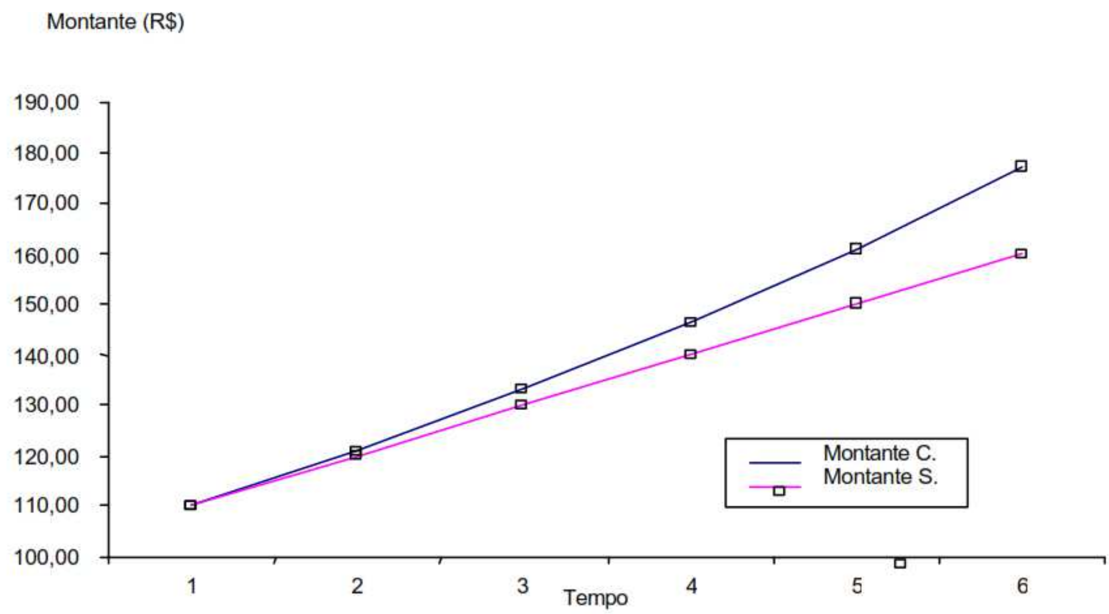


Figura 3.1. Comparação dos gráficos, a partir dos montantes simples e compostos de um mesmo capital inicial e seu desenvolvimento no tempo.

3.1 Soma dos termos de PA ou de uma PG finitas e Aplicações à Matemática Financeira

Nos exemplos 3.3 e 3.4 serão aplicados os conceitos de soma de PA finita na capitalização a juros simples e soma de PG finita na capitalização a juros compostos, respectivamente [13].

Exemplo 3.3 Suponha que um cidadão aplique mensalmente, durante 8 meses, uma quantia fixa de 200 reais a juros simples de 5%. Ao final, depois dos 8 meses de aplicação, quanto terá acumulado essa pessoa?

Comentário: Juros simples não são praticados no mercado financeiro, mas podem servir de contexto inicial para a determinação de valores totais capitalizados em certo período.

Propondo um problema dessa natureza aos alunos, o professor poderá comentar que ele é de fácil resolução por se tratar de juros simples, mas que, no caso real de um capital aplicado a juros compostos, será necessário um método organizado de resolução.

A tabela de capitalização a seguir ajuda a organizar um método de resolução:

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Final
Capital	200	210	220	230	240	250	260	270	280
		200	210	220	230	240	250	260	270
			200	210	220	230	240	250	260
				200	210	220	230	240	250
					200	210	220	230	240
						200	210	220	230
							200	210	220
								200	210

Tabela 3.2. Capitalização a juros simples.

Os 200 reais depositados no primeiro mês tornam-se 210 reais, no segundo mês, 220 reais, no terceiro mês, e assim por diante, tornando-se, ao final, 280 reais. Os 200 reais depositados no segundo mês, de modo análogo, convertem-se em 270 reais ao final de sete meses de aplicação. Seguindo o raciocínio, o saldo final da aplicação será o resultado da adição dos valores da última coluna da tabela, que são os termos de uma PA:

$$Saldo\ final = 210 + 220 + 230 + 240 + 250 + 260 + 270 + 280 =$$

$$Saldo\ final = \frac{(210 + 280).8}{2} = 1.960.$$

Portanto, o saldo final da aplicação será de R$ 1.960,00.

No caso real, de uma aplicação a juros compostos, o esquema de resolução será similar ao apresentado, variando apenas a forma de crescimento das parcelas aplicadas.

Exemplo 3.4 Em relação ao problema anterior, alterando apenas a forma de incidência da taxa de juros, de simples para compostos, podemos de modo análogo construir a tabela:

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Final
Capital	200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$	$200 \cdot 1{,}05^6$	$200 \cdot 1{,}05^7$	$200 \cdot 1{,}05^8$
		200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$	$200 \cdot 1{,}05^6$	$200 \cdot 1{,}05^7$
			200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$	$200 \cdot 1{,}05^6$
				200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$
					200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$
						200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$
							200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$
								200	$200 \cdot 1{,}05$

Tabela 3.3. Capitalização a juros compostos.

A soma dos valores da última coluna da tabela fornece o total capitalizado. Trata-se da soma dos termos de uma PG de razão 1,05.

$$Saldo\ final = 200.(1{,}05 + 1{,}05^2 + 1{,}05^3 + 1{,}05^4 + 1{,}05^5 + 1{,}05^6 + 1{,}05^7 + 1{,}05^8)$$

$$Saldo\ final = 200.1{,}05.\frac{1 - 1{,}05^8}{1 - 1{,}05} = 2.005{,}31.$$

Portanto, o saldo final da aplicação será de R$ 2.005,31.

Comparando os dois resultados do processo de capitalização, fica claro que o processo de juros compostos conduz a um maior valor final (R$ 1.960,00 no caso de juros simples e R$ 2.005,31 no caso de juros compostos).

3.2 Juros Compostos

Os Juros compostos consistem no regime segundo o qual, ao final de cada período de capitalização, os juros calculados são incorporados ao montante do início do período e essa soma passa a render juros no período seguinte, conforme mostrado no exemplo 3.2 na tabela 3.1 de Juros Compostos. Mais precisamente, no regime de juros compostos, os juros em cada período são calculados, conforme é natural sobre a dívida do início desse período.

Teorema 3.1 No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, em n períodos de tempo, em um montante igual a $C_n = C_0.(1+i)^n$.

Demonstração: Para cada k, seja C_k a dívida após k períodos de tempo. Temos:

$$C_{k+1} = C_k + iC_k = (1+i).C_k$$

Daí, (C_k) é uma progressão geométrica de razão $1+i$ e $C_n = C_0.(1+i)^n$.

Exemplo 3.5 Tomemos um empréstimo de R$ 5.000,00 a juros de 3% ao mês. Qual será a divida três meses depois?

Solução: Basta aplicar a fórmula do teorema 3.1.

$$C_3 = C_0(1+1)^3 = 5.000.(1+0{,}03)^3 \cong 5.463{,}64.$$

Portanto, o valor da dívida após três meses será de R$ 5.463,64.

Exemplo 3.6. Marcela aplicou R$ 400,00 num investimento que rende 2% ao mês. Qual o tempo necessário para que ela obtenha um montante de R$ 600,00?

Solução: Depois de substituído os dados na fórmula o aluno terá que aplicar conceitos de logaritmos.

$$C_n = C_0.(1+i)^n$$

$$600 = 400.(1+0{,}02)^n$$

$$\frac{600}{400} = 1{,}02^n$$

$$1{,}02^n = 1{,}5$$

$$n = \frac{log1{,}5}{log1{,}02} \cong 21.$$

Logo, o tempo necessário para Marcela obter o montante desejado é de aproximadamente 21 meses.

Exemplo 3.7 Em algumas situações (prazos pequenos, juros de mora) são usados juros simples e não juros compostos. No regime de juros simples, os juros são em cada época calculados sobre o principal e não sobre o montante da época anterior. Por exemplo, um principal igual a 100, a juros simples de 10% ao mês evolui de acordo com a tabela 3.4 abaixo:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
C_n	100	110	120	130	140	150	160	170	...

Tabela 3.4: Capitalização a juros simples.

Não há dificuldade em calcular juros simples, pois a taxa incide sempre sobre o capital inicial (ver exemplo 3.3). No nosso exemplo, os juros são sempre de 10% de 100, ou seja, 10.

Então $C_n = C_0 + niC_0$, o que faz com que os valores de C_n formem uma progressão aritmética.

Olhando para os gráficos 3.2 de evolução de um mesmo capital C_0 a juros de taxa i, a juros simples e a juros compostos, vemos que o montante de juros compostos é superior ao montante correspondente a juros simples, exceto se o prazo for menor que 1. É por isso que juros simples só são utilizados em cobranças de juros em prazos inferiores ao prazo ao qual se refere à taxa de juros combinada [8].

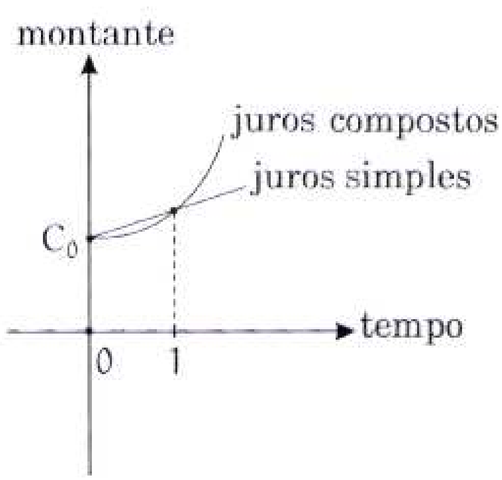


Figura 3.2: Comparando juros simples e compostos.

3.3 Equivalência de Capitais

Inicialmente vale a pena comentar que o valor de uma quantia não depende apenas da quantia, mas depende também da época a qual ela está referida. Na mesma data não há dúvida de que é melhor receber R$ 50,00 do que R$ 10,00, mas em datas diferentes isto não é tão óbvio. Desse modo, considerando uma situação hipotética onde o dinheiro rende 10% ao mês, a situação de pagar R$ 100,00 hoje ou pagar R$ 110,00 daqui a um mês é indiferente.

Assim é mais vantajoso pagar R$ 105,00 daqui a um mês do que pagar R$ 100,00 agora. Ou ainda, é mais vantajoso pagar R$ 100,00 agora do que pagar R$ 120,00 daqui a um mês.

Segundo Morgado:

"No fundo, só há um único problema de Matemática Financeira: que é o de deslocar quantias no tempo." [9].

Fazendo uma discussão sobre o Teorema 3.1, $C_n = C_0.(1+i)^n$ é uma quantia relacionada ao tempo atual, ou seja, C_0, onde transformar-se-á, após n períodos de tempo em $C_0.(1+i)^n$. Isto é, uma quantia, cujo valor atual é A, equivale no futuro, depois de n períodos de tempo, a $A.(1+i)^n$, *daí podemos concluir que para descobrir o valor futuro devemos multiplicar o valor atual por* $(1+i)^n$ *e para descobrir o valor atual devemos dividir o valor futuro por* $(1+i)^n$*.*

Assim é de grande importância discutir com os alunos algumas dessas situações, propondo alguns exemplos, nesse caso iremos perceber por parte dos alunos algumas dificuldades quanto ao fator deslocamento no tempo, evidenciando a necessidade de fazer algumas exposições sobre alguns conceitos importantes.

É importante ressaltar também que ao resolvermos estes problemas, será facilitada em muito à compreensão dos mesmos quando fazemos uma figura para representar a equivalência dos capitais.

Essas discussões se darão a partir dos exemplos a seguir [8].

Exemplo 3.8 João tomou um empréstimo de R$ 4.000,00 a juros de 5% a.m. Um mês depois pagou R$ 2.000,00 e no terceiro mês liquidou sua dívida. Qual o valor do último pagamento?

Solução: Os esquemas a seguir são equivalentes, R$ 4.000,00 hoje equivalem à soma das parcelas de R$ 2.000,00 e P (veja a figura 3.1).

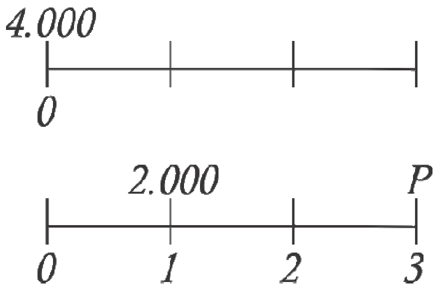


Figura 3.3: Deslocando as parcelas para a data 0.

Assim, para igualar os dois esquemas, deslocamos todas as parcelas para uma mesma data, por exemplo, a data 0. Como a taxa i = 0, 05, temos:

$$4000 = \frac{2000}{(1+0{,}05)} + \frac{P}{(1+0{,}05)^3}$$

$$4000 = \frac{2000}{1{,}05} + \frac{P}{1{,}05^3}$$

$$4000.\,1{,}05^3 = 2000.\,1{,}05^2 + P$$

$$P = 4000.\,1{,}05^3 - 2000.\,1{,}05^2$$

$$P = 2.425{,}50.$$

Logo, o pagamento final foi de R$ 2.425,50.

Para a resolução do exemplo, podemos deslocar todas as quantias para qualquer data, por exemplo, na data 1, temos:

$$4000.\,(1+0{,}05) = 2000 + \frac{P}{(1+0{,}05)^2}$$

$$4000.1{,}05 = 2000 + \frac{P}{1{,}05^2}$$

$$P = 2.425{,}50.$$

Notemos que a quantia de R$ 4.000,00 foi deslocada em um mês à frente e P retrocedeu em dois meses. Assim, deslocando todas as parcelas e valores para o mesmo período, é possível comparar os valores.

Exemplo 3.9 Uma loja oferece duas opções de pagamento:

a) à vista com 10% de desconto;

b) em duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira sendo paga no ato da compra.

Qual a taxa de juros embutidos na venda à prazo?

Solução: Considerando o valor do produto como V, observemos o esquema ilustrado na figura 3.2.

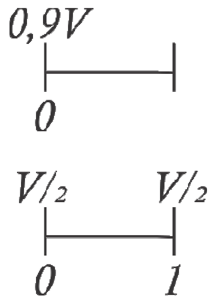


Figura 3.4: Opções de pagamento.

Assim, deslocando as parcelas para a data 0, (a data usada nessas comparações é chamada de data focal), temos:

$$0{,}9V = \frac{V}{2} + \frac{V/2}{(1+i)}$$

$$0{,}9V = \frac{V}{2}.(1 + \frac{1}{(1+i)})$$

$$1{,}8 - 1 = \frac{1}{(1+i)} = 0{,}8$$

$$0{,}8.(1+i) = 1$$

$$i = \frac{0{,}2}{0{,}8} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%.$$

Nesta condição de pagamento está embutida uma taxa de 25% a.m.

Exemplo 3.10 Um empréstimo de 300 reais, a juros de 4% ao mês, foi pago em duas parcelas. Foi pago R$ 150,00 dois meses após o empréstimo, e um mês após esse pagamento o débito foi liquidado. Qual o valor desse último pagamento?

Solução: Utilizando os esquemas de pagamento abaixo, logo R$ 300,00 na data 0 tem o mesmo valor de R$ 150,00 dois meses após, mais um pagamento igual a P, na data 3.

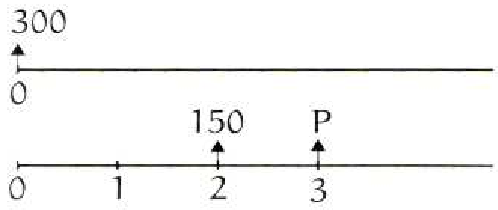


Figura 3.5: Esquemas de pagamento.

Igualando os valores na mesma data, por exemplo, na data 0, dos pagamentos nos dois esquemas, obtemos:

$$300 = \frac{150}{(1+0{,}04)^2} + \frac{P}{(1+0{,}04)^3} = \frac{150}{1{,}04^2} + \frac{P}{1{,}04^3}.$$

$$300.\,1{,}04^3 = 150.1{,}04 + P$$

$$P = 300.\,1{,}04^3 - 150.1{,}04 = 181{,}46.$$

Daí, o último pagamento foi de R$ 181,46.

Exemplo 3.11 Determinada loja oferece duas opções de pagamento na compra de um telefone celular:

a) três prestações mensais de R$ 160,00;

b) sete prestações mensais de R$ 70,00;

Em ambos os casos, a primeira prestação é paga no ato da compra. Se o dinheiro vale 2% para o comprador, isto é, para o comprador é indiferente pagar R$ 100,00 agora ou pagar R$ 102 daqui a um mês. Qual a melhor opção para efetuar a compra desse produto?

Solução: Para comparar, determinaremos o valor das duas possibilidades de pagamento na mesma data, por exemplo, na data 2, como nos esquemas abaixo:

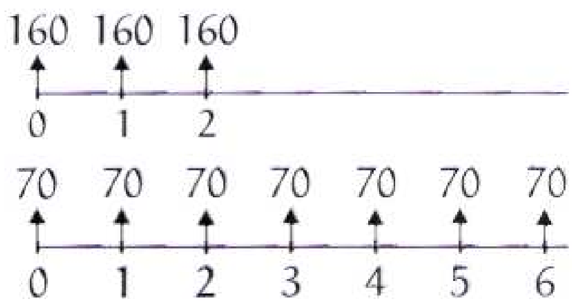


Figura 3.6: Esquemas de pagamento.

Para comparar, determinaremos o valor dos dois pagamentos na data 2, temos:

$$a = 160.(1+0{,}02)^2 + 160.(1+0{,}02) + 160 = 489{,}66.$$

$$b = 70.(1+0{,}02)^2 + 70.(1+0{,}02) + 70 + \frac{70}{(1+0{,}02)} + \frac{70}{(1+0{,}02)^2} + \frac{70}{(1+0{,}02)^3} + \frac{70}{(1+0{,}02)^4} = 480{,}77.$$

Portanto o comprador deve preferir o pagamento em sete prestações. É comum que muitas pessoas achem que o primeiro esquema é melhor, pois o total pago é de R$ 480,00 ao passo que o segundo esquema o total é de R$ 490,00.

Exemplo 3.12 João tem três opções de pagamento na compra de vestuário:

a) à vista com 30% de desconto;

b) em duas prestações mensais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra;

c) em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual a melhor opção para João, se o dinheiro vale, para ele 5% ao mês?

Solução: Fixando o preço do bem em 30, temos os três esquemas da figura 3.5.

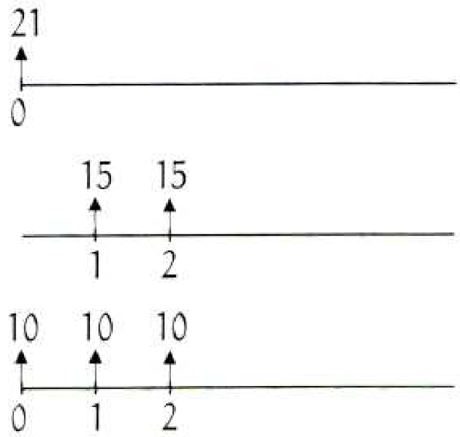


Figura 3.7: Comparando 3 esquemas de pagamento.

Comparando os valores, por exemplo, na data 0, obtemos:

$$a = 21.$$

$$b = \frac{15}{(1+0{,}05)} + \frac{15}{(1+0{,}05)^2} = 27{,}89.$$

$$c = 10 + \frac{10}{(1+0{,}05)} + \frac{10}{(1+0{,}05)^2} = 28{,}59.$$

A melhor alternativa para João é a compra à vista e a pior é a compra em três prestações.

É interessante observar que a melhor alternativa para uma pessoa A pode não ser a melhor alternativa para uma pessoa B. Se a pessoa B é de poucas posses e compra à prazo, tendo dinheiro para comprar à vista, é provável que ele invista o dinheiro que seria usado na compra à vista, em uma caderneta de poupança que lhe renderia, digamos 1% ao mês. Então, para ele seria indiferente comprar à vista ou a prazo com juros de 1% ao mês.

Se a pessoa A é um agiota, por exemplo, ele poderia fazer render o dinheiro a, digamos, 6% ao mês. Então seria atrativo para A comprar à prazo com juros de 5% ao mês. Logo, o dinheiro tem valores diferentes para as pessoas A e B. A taxa de juros que representa o valor do dinheiro para cada pessoa é a taxa na qual a pessoa consegue fazer render seu capital, essa é chamada *taxa mínima de atratividade*. Para essa pessoa, um investimento só é atrativo se render, no mínimo, a essa taxa [8].

Exemplo 3.13. Professor Marcos tem duas opções de pagamento para compra de um refrigerador:

a) à vista com 30% de desconto;

b) em duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira sendo paga no ato da compra.

Qual a taxa de juros embutidos na venda a prazo?

Solução: Fixando o valor do bem em 100, temos os esquemas de pagamento da figura 3.6.

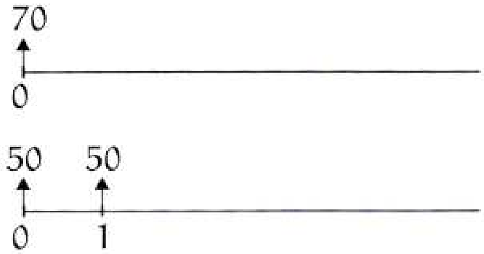


Figura 3.8: Comparando 2 esquemas de pagamento.

Igualando os valores, por exemplo, na data 0, obtemos:

$$70 = 50 + \frac{50}{(1+i)}$$

$$70.(1+i) = 50.(1+i) + 50$$

$$20.(1+i) = 50$$

$$i = 1{,}5 = 150\%.$$

Portanto, a loja cobra 150% ao mês na venda à prazo.

Exemplo 3.14 Investindo um capital a juros mensais de 2%, em quanto tempo dobrará este capital inicial?

Solução: Aplicando a fórmula do Teorema 3.1. temos:

$$C_n = C_0.(1+i)^n$$

$$2C_0 = C_0.(1+0{,}02)^n$$

$$1{,}02^n = 2$$

$$n = \frac{log2}{log1{,}02} \cong 35.$$

Logo, em aproximadamente 35 meses teremos o dobro do capital inicial.

3.4 Taxas Equivalentes

Um resultado importante é a fórmula que relacionada taxas a períodos de tempo diversos.

Teorema 3.2 Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I, tal que $1 + I = (1 + i)^n$.

Demonstração: Seja A o valor inicial de um capital. Após um período $n = 1$, o valor da grandeza será $A(1 + I)^1$. Como o período de tempo T equivale a n períodos iguais a t, o valor do capital será também igual a $A(1 + i)^n$. Logo, $A(1 + i)^1 = A(1 + i)^n$ e $1 + I = (1 + i)^n$.

Exemplo 3.15 A taxa anual de juros equivale a 15% ao mês é I tal que $1 + I = (1 + 0{,}15)^{12}$. Daí, $I \cong 4{,}35 = 435\%$ ao ano.

Um erro muito comum é achar que juros de 15% ao mês equivalem a juros de 12 x 15% = 180% ao ano. Taxas de 15% ao mês e 180% ao ano são taxas proporcionais, pois a razão entre elas é igual á razão dos períodos aos quais elas se referem. Portanto, notemos que taxas proporcionais não são equivalentes [8].

Exemplo 3.16 As taxas de 10% ao mês, 20% ao bimestre, 60% ao semestre e 120% ao ano são taxas proporcionais.

Um problema em Matemática Financeira é o de anunciar taxas proporcionais como se fossem equivalentes. Uma frase como “180% ao ano, com capitalização mensal” significa que a taxa usada na operação não é a taxa de 180% anunciada (observemos o exemplo 3.15.) e sim a taxa mensal que lhe é proporcional.

Assim, a tradução da expressão “180% ao ano, com capitalização mensal” é “15% ao mês” [8].

Exemplo 3.17 “24% ao ano com capitalização mensal” significa “2% ao mês” e “24% ao ano com capitalização trimestral” significa “6% ao trimestre”.

Exemplo 3.18 Joaquim investe seu dinheiro a juros de 9% ao ano com capitalização mensal. Qual a taxa anual de juros à qual está investido o capital de Joaquim?

Solução: O capital de Joaquim está investido à taxa i = 0,75% ao mês. A taxa anual equivalente é I tal que:

$$1 + I = (1 + 0{,}0075)^{12}.$$

$$I = 1{,}0075^{12} - 1.$$

Logo $i \cong$ 0,0938 = 9,38% ao ano.

A (falsa) taxa de 9% ao ano é dita ***taxa nominal***. A taxa (verdadeira) de 9,38% ao ano é dita ***taxa efetiva*** [7].

Exemplo 3.19 A taxa efetiva semestral correspondente a 24% ao semestre com capitalização mensal de 4% ao mês é I tal que $1 + I = (1 + 0{,}04)^6$. Logo, $I \cong 26{,}5\%$ ao ano.

Exemplo 3.20 Um empréstimo de R$ 3.000,00 está anunciado com taxas de 36% ao semestre capitalizado mensalmente. Qual a taxa efetiva desse empréstimo anunciado?

Solução: Temos que 36% ao semestre capitalizado mensalmente, significa taxas de 6% ao mês. Logo,

$$1 + I = (1 + i)^n;$$

$$1 + I = (1 + 0{,}06)^6;$$

$$I = 1{,}06^6 - 1 = 0{,}4185 = 41{,}85\%.$$

Portanto, a taxa efetiva (verdadeira) desse empréstimo é de 41,85% ao semestre, e não de 36% ao semestre como anunciado.

3.5 Taxa real e taxa aparente

Quanto a esse contexto é preciso dizer que quando há um aumento salarial, por exemplo, esse aumento é apenas aparente, pois para obtermos o aumento real é preciso descontarmos a inflação do período.

O cálculo da taxa real tem como objetivo descontar a inflação deste ganho aparente. Em uma aplicação financeira, será permitido apenas o aumento aparente, logo para calcular a verdadeira rentabilidade, é necessário calcularmos a taxa real.

Desse modo, podemos imaginar que um capital C foi aplicado durante algum período à taxa I_A. Suponhamos ainda que durante o mesmo período houve uma inflação representada por I_i. Queremos saber qual foi o ganho real dessa aplicação [11].

Vamos começar com um exemplo.

Exemplo 3.21 João recebe R$ 1.000,00 reais de salário mensal e obteve um aumento de 50% (taxa aparente). A cesta básica que custava R$ 100,00 sofreu um reajuste de 10% em decorrência da inflação desse período. Qual o aumento real do salário de João?

Solução: É comum dizermos que a taxa real é de 50% - 10% = 40%, mas não é.

Note que antes do aumento João poderia comprar com seu salário 10 cestas básicas (1.000/100 = 10) e após o aumento ele passou a comprar com seu salário aproximadamente 13,64 cestas básicas (1.500/110 = 13,64). Assim observamos que a taxa real, ou seja, seu poder de compra aumentou em 36,64%, e não em 40%.

Formalizaremos o exemplo 3.21.

O montante é obtido aplicando ao capital a taxa aparente I_A, assim:

$$C = C_0.(1 + I_A).$$

A taxa aparente é como se o capital tivesse sofrido dois acréscimos simultâneos, um pela taxa de inflação e outro pela taxa real, então o montante também pode ser expresso por $C = C_0.(1 + I_i).(1 + I_R)$, onde I_i e I_R são respectivamente a taxa de inflação e a taxa real.

Logo, temos que a taxa real I_r é dada por:

$$C_0.(1 + I_A) = C_0.(1 + I_i).(1 + I_R);$$

$$(1 + \mathrm{I_A}) = (1 + \mathrm{I_i}).(1 + \mathrm{I_R});$$

Assim,

$$\mathrm{I_R} = \frac{1 + \mathrm{I_A}}{1 + \mathrm{I_i}} - 1.$$

Exemplo 3.22 Vamos resolver novamente o exemplo 3.21, agora usado o resultado anterior.

Solução: Temos que: $I_A = 50\% = 0{,}5;\ I_i = 10\% = 0{,}1.$

Aplicando a fórmula,

$$I_R = \frac{1 + I_A}{1 + I_i} - 1 = \frac{1 + 0,5}{1 + 0,1} - 1 = \frac{1,5}{1,1} - 1 \cong 0,364 = 36,4\%.$$

Portanto, a taxa de aumento real do salário de João foi de 36,4%.

Exemplo 3.23 Um Fundo de Investimento teve no ano de 2015 um rendimento aparente de 10%. Qual será o seu ganho real se considerarmos que nesse mesmo período a inflação acumulada foi de 6%?

Solução: **Comentário:** Um aluno sem pensar muito poderia responder 4% de ganho real. Porém, para descobrirmos o ganho real, devemos descontar a inflação do ganho aparente, e não subtrair.

Assim:

$$I_R = \frac{1 + I_A}{1 + I_i} - 1 = \frac{1 + 0,1}{1 + 0,06} - 1 = \frac{1,1}{1,06} - 1 \cong 0,0377 = 3,77\%.$$

Ou seja, o ganho real foi de 3, 77%.

3.6 Aplicações das Progressões Geométricas em problemas financeiros

Acerca desse tema, serão trazidos a seguir alguns exemplos, onde serão usados os conceitos de equivalência de capitais (seção 3.3) envolvendo as progressões geométricas (seção 2.2.).

Exemplo 3.24 Guilherme comprou um automóvel em 24 prestações iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra, cujo preço à vista era de R$ 24.000, 00. Se os juros são de 2% ao mês, determine o valor das prestações.

Solução: Analisando o problema, temos:

$$24000 = \frac{P}{(1 + 0,02)} + \frac{P}{(1 + 0,02)^2} + \cdots + \frac{P}{(1 + 0,02)^{24}};$$

$$24000 = \frac{\mathrm{P}}{(1,02)} + \frac{\mathrm{P}}{(1,02)^2} + \cdots + \frac{\mathrm{P}}{(1,02)^{24}};$$

$$24000 = \mathrm{P}.\left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}02^2} + \cdots + \frac{1}{1{,}02^{24}}\right);$$

$$\frac{24000}{\mathrm{P}} = \left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}02^2} + \cdots + \frac{1}{1{,}02^{24}}\right).$$

No segundo termo da equação temos uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = \frac{1}{1{,}02}$ e razão $q = \frac{1}{1{,}02}$.

Aplicando a fórmula

$$\mathrm{S_n} = \mathrm{a_1}.\frac{1 - \mathrm{q^n}}{1 - \mathrm{q}}.$$

$$\mathrm{S_n} = \left(\frac{1}{1{,}02}\right).\frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}02}\right)^{24}}{1 - \left(\frac{1}{1{,}02}\right)};$$

Assim com o auxílio de uma calculadora científica temos:

$$\mathrm{S_n} = 18{,}9$$

Logo,

$$\frac{24000}{\mathrm{P}} = 18{,}9;$$

$$\mathrm{P} \cong 1269{,}20.$$

Portanto utilizando a soma dos termos de uma progressão geométrica, concluímos que o valor da parcela seria de aproximadamente R$ 1.269,20.

Exemplo 3.25 (AV1 – Profmat – 2011 – MA12) Um comerciante, para quem o dinheiro vale 5% ao mês, oferece determinado produto por 3 prestações mensais iguais a R$ 100,00, a primeira paga no ato da compra. Que valor o comerciante deve cobrar por esse produto, no caso de pagamento à vista?

Solução: Sabemos que os valores das parcelas são fixas, portanto devemos trazer os valores para o presente, uma vez que a cada parcela está incorporado juros. A primeira parcela é paga no ato da compra e assim não incide juros sobre esta. Para o pagamento à vista temos:

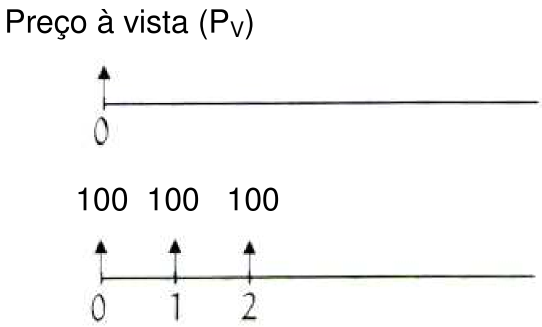


Figura 3.9. Comparando pagamento à vista com pagamento em 3 parcelas.

$$P_V = 100 + \frac{100}{(1+0{,}05)} + \frac{100}{(1+0{,}05)^2};$$

$$P_V = 100.\left(1 + \frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}05^2}\right);$$

$$P_V = 100\,.\,2{,}8594 = 285{,}94.$$

Assim para o pagamento à vista o comerciante deverá cobrar R$ 285, 94.

Exemplo 3.26 Carlos tomou um empréstimo de R$ 2.000,00 onde irá pagar 12 prestações mensais iguais. Se forem cobrados juros de 2% ao mês sobre o saldo devedor, determine o valor de cada prestação se a 1ª parcela é paga:

a) no ato da compra;

b) um mês após a compra;

c) cinco meses após a compra.

Solução: Essa situação também pode ser resolvida utilizando progressão geométrica, sem grandes complicações.

a) Pagamento no ato da compra, o juros passam a ser contabilizados a partir da segunda parcela.

$$2000 = P + \frac{P}{(1+0{,}02)} + \frac{P}{(1+0{,}02)^2} + \frac{P}{(1+0{,}02)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+0{,}02)^{11}};$$

$$2000 = P + \frac{P}{(1{,}02)} + \frac{P}{(1{,}02)^2} + \frac{P}{(1{,}02)^3} + \cdots + \frac{P}{(1{,}02)^{11}};$$

$$2000 = P.(1 + \frac{1}{(1{,}02)} + \frac{1}{(1{,}02)^2} + \frac{1}{(1{,}02)^3} + \cdots + \frac{1}{(1{,}02)^{11}});$$

$$\frac{2000}{P} = (1 + \frac{1}{(1{,}02)} + \frac{1}{(1{,}02)^2} + \frac{1}{(1{,}02)^3} + \cdots + \frac{1}{(1{,}02)^{11}});$$

No segundo termo da equação temos uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = \frac{1}{1{,}02}$.

Aplicando a fórmula

$$S_n = a_1 . \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

$$S_{12} = 1 . \frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}02}\right)^{12}}{1 - \left(\frac{1}{1{,}02}\right)};$$

Assim com o auxílio de uma calculadora científica temos:

$$S_n = 10{,}80.$$

Logo,

$$\frac{2000}{P} = 10{,}80;$$

$$P \cong 185{,}18.$$

Portanto, o valor da prestação, sendo a primeira paga no ato da compra é de R$ 185,18.

b) Primeira parcela, um mês após a compra:

$$2000 = \frac{P}{(1 + 0{,}02)} + \frac{P}{(1 + 0{,}02)^2} + \frac{P}{(1 + 0{,}02)^3} + \cdots + \frac{P}{(1 + 0{,}02)^{12}};$$

$$2000 = P\left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}02^2} + \frac{1}{1{,}02^3} + \cdots + \frac{1}{1{,}02^{12}}\right);$$

$$\frac{2000}{P} = \left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}02^2} + \frac{1}{1{,}02^3} + \cdots + \frac{1}{1{,}02^{12}}\right);$$

No segundo termo da equação temos uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = \frac{1}{1{,}02}$ e razão $q = \frac{1}{1{,}02}$.

Aplicando a fórmula

$$S_n = a_1 . \frac{1 - q^n}{1 - q};$$

$$S_{12} = \frac{1}{1{,}02} . \frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}02}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{1{,}02}};$$

$$S_{12} = 10{,}57.$$

Logo,

$$\frac{2000}{\mathrm{P}} = 10{,}57;$$

$$\mathrm{P} \cong 189{,}21.$$

Portanto, o valor da prestação, sendo a primeira paga um mês após a compra é de R$ 189,21.

c) Primeira parcela paga 5 meses após a compra.

$$2000 = \frac{\mathrm{P}}{(1+0{,}02)^5} + \frac{\mathrm{P}}{(1+0{,}02)^6} + \frac{\mathrm{P}}{(1+0{,}02)^7} + \cdots + \frac{\mathrm{P}}{(1+0{,}02)^{16}};$$

$$2000 = \mathrm{P}(\frac{1}{1{,}02^5} + \frac{1}{1{,}02^6} + \frac{1}{1{,}02^7} + \cdots + \frac{1}{1{,}02^{16}});$$

$$\frac{2000}{\mathrm{P}} = (\frac{1}{1{,}02^5} + \frac{1}{1{,}02^6} + \frac{1}{1{,}02^7} + \cdots + \frac{1}{1{,}02^{16}});$$

No segundo termo da equação temos uma progressão geométrica de primeiro termo $\mathrm{a}_1 = \frac{1}{1{,}02^5}$ e razão $\mathrm{q} = \frac{1}{1{,}02}$.

Aplicando a fórmula

$$\mathrm{S_n} = \mathrm{a}_1.\frac{1-\mathrm{q^n}}{1-\mathrm{q}};$$

$$\mathrm{S}_{12} = \frac{1}{1{,}02^5}.\frac{1-(\frac{1}{1{,}02})^{12}}{1-\frac{1}{1{,}02}};$$

$$S_{12} = 9{,}77.$$

Logo,

$$\frac{2000}{\mathrm{P}} = 9{,}77;$$

$$\mathrm{P} \cong 204{,}70.$$

Portanto, o valor da prestação, sendo a primeira paga cinco meses após a compra é de R$ 204,70.

Exemplo 3.27 Laura aderiu a um plano de capitalização de um banco, depositando mensalmente, R$ 1.000,00 durante 12 meses. Se o banco promete remunerar o dinheiro aplicado a taxa de 2% ao mês, aplicado a juros compostos, calcule quanto Laura resgatará ao final do período.

Solução: Basta calcularmos a soma dos termos de uma PG.

$$S_{12} = 1000.1{,}02 + 1000.\,1{,}02^2 + \cdots + 1000.1{,}02^{12};$$

$$S_{12} = 1000.\,(1{,}02 + 1{,}02^2 + \cdots + 1{,}02^{12});$$

$$\mathrm{S}_{12} = 1000.\left(1{,}02.\frac{1 - 1{,}02^{12}}{1 - 1{,}02}\right) \cong 13680{,}33.$$

Portanto, o resgate será de R$ 13.680,33.

Exemplo 3.28 Uma pessoa deseja comprar um carro por R$ 55.000,00 à vista, daqui a 18 meses. Admitindo que ela vá poupar certa quantia mensal que será aplicada em letras de câmbio rendendo 2,5% ao mês de juros compostos, determine quanto deve ser poupado mensalmente.

Solução: Deslocamos as parcelas para o futuro na data 18, assim basta calcularmos a soma dos termos de uma PG.

$$S_{18} = P + P.\,1{,}025 + P.\,1{,}025^2 + \cdots + P.\,1{,}025^{18};$$

$$55000 = P.\,(1 + 1{,}025 + 1{,}025^2 + \cdots + 1{,}025^{18});$$

$$55000 = \mathrm{P}.\left(1 + 1{,}025.\frac{1 - 1{,}025^{18}}{1 - 1{,}025}\right);$$

$$P = 2.456{,}85.$$

Portanto, a pessoa deverá poupar R$ 2.456,85 por mês.

3.7 Séries uniformes

Um conjunto de pagamentos, referido a épocas diversas, é chamado de série e se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é dita uniforme. Podemos então formalizar a resolução dos exemplos resolvidos anteriormente na seção 3.6 no seguinte Teorema 3.3.

Teorema 3.3 O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, sendo i a taxa de juros, é igual a:

$$A = P.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Demonstração:

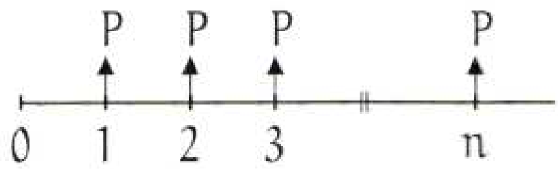


Figura 3.10: Série uniforme.

O valor da série na época 0 é:

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n},$$

$$A = P.\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right).$$

Logo, no segundo membro da igualdade temos a soma de n termos de uma progressão geométrica, daí temos:

$$A = P.\left(\frac{1}{1+i}.\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\frac{1}{1+i}}\right) = P.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Exemplo 3.29 Um liquidificador custa R$ 120,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 3% ao mês, determine o valor das prestações.

Solução: Essas prestações são ditas postecipadas, pois a primeira prestação só é paga um mês depois da compra. Igualando os valores na época 0, observando a figura 3.9, podemos aplicar diretamente a fórmula do Teorema 3.3, assim temos:

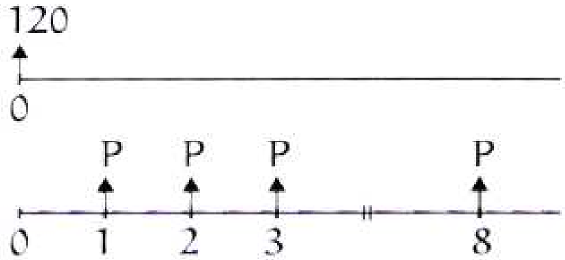


Figura 3.11: Esquema de pagamento em 8 prestações postecipadas.

$$120 = P.\frac{1-(1+0{,}03)^{-8}}{0{,}03};$$

$$P = 120.\frac{0{,}03}{1-(1+0{,}03)^{-8}} \cong 17{,}10.$$

Portanto, as prestações são de R$ 17,10.

Exemplo 3.30 Um liquidificador custa R$ 120,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga no ato da a compra. Se os juros são de 3% ao mês, determine o valor das prestações.

Solução: Igualando os valores na época -1 (essa escolha é muito conveniente pois dispomos de uma fórmula que calcula diretamente o valor da série nessa época), observando a figura 3.10, obtemos:

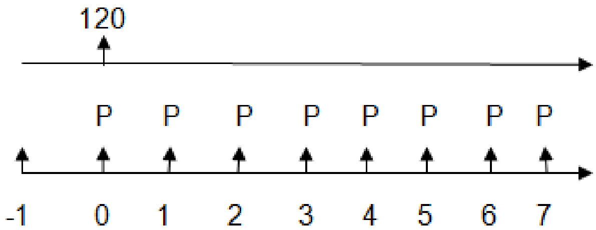


Figura 3.12: Esquema de pagamento em 8 prestações com primeira paga no ato da compra.

$$\frac{120}{1+0{,}03} = P.\frac{1-(1+0{,}03)^{-8}}{0{,}03};$$

$$\frac{120}{1{,}03} = P.\frac{1-(1{,}03)^{-8}}{0{,}03};$$

$$= \frac{\frac{120}{1{,}03}}{\frac{1-1{,}03^{-8}}{0{,}03}} = \frac{3{,}6}{1{,}03.(1-1{,}03^{-8})} \cong 16{,}60.$$

Portanto, as prestações são de R$ 16,60.

Podemos observar que esses problemas podem ser facilmente resolvidos sem precisar decorar a fórmula do Teorema 3.3 usando as progressões geométricas como foi visto na seção 3.6.

3.8 Sistemas de Amortização

Amortizar é saldar uma dívida por um determinado período de tempo de forma parcelada e de acordo com o sistema definido em contrato.

O processo de amortização de um empréstimo consiste nos pagamentos das prestações em épocas predeterminadas, cada prestação sendo subdividida em duas partes. Uma parte do pagamento quita os juros e a outra parte amortiza a dívida.

Alguns dos principais e mais utilizados sistemas de amortização são:

a) Sistema Americano de Amortização – SAA;

b) Sistema de Amortização Constante – SAC;

c) Sistema de Amortização Francês ou Sistema Price.

Qualquer um dos sistemas pode ter, ou não, carência. Durante o período de carência, os juros podem ser pagos ou capitalizados, dependendo do contrato de financiamento.

Para melhor compreensão, vale lançar mão de uma planilha para cada sistema de financiamento, pois através destas planilhas será possível ter uma visão mais ampla da dívida em cada período do contrato.

Para exemplificar cada um dos sistemas será considerado o valor de R$ 50.000,00 a ser pago em 5 parcelas mensais a taxa de 2,5% ao mês.

3.8.1 Sistema Americano de Amortização – SAA

Neste sistema, a amortização é realizada ao final do prazo do contrato em um único pagamento [11].

As principais características desse sistema são:

- Os juros são constantes;
- O principal é devolvido apenas no último período.

Vejamos na planilha:

Planilha de Financiamento – Sistema Americano de Amortização - SAA				
Principal		Taxa de Juros		-
R$ 50 000,00		2,5% ao mês		-
Período	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo Devedor
k	$J_k = i.Sd_{k-1}$	A_k	$P_k = A_k + J_k$	Sd_k
0	-	-	-	R$ 50.000,00
1	R$ 1.250,00	R$ 0,00	R$ 1.250,00	R$ 50.000,00
2	R$ 1.250,00	R$ 0,00	R$ 1.250,00	R$ 50.000,00
3	R$ 1.250,00	R$ 0,00	R$ 1.250,00	R$ 50.000,00
4	R$ 1.250,00	R$ 0,00	R$ 1.250,00	R$ 50.000,00
5	R$ 1.250,00	R$ 50.000,00	R$ 51.250,00	R$ 0,00
Total	R$ 6.250,00	R$ 50.000,00	R$ 56.250,00	-

Tabela 3.5: Sistema Americano de Amortização – SAA.

Com base na planilha anterior, observamos o quão simples e de fácil compreensão é este sistema (SAA).

3.8.2 Sistema de Amortização Constante – SAC

As principais características desse sistema são:

- As amortizações são constantes;
- Os valores das prestações e dos juros vão diminuindo ao longo do período.

Vejamos na planilha:

No SAC as amortizações são constantes e é igual ao valor financiado, dividido pelo número de prestações, assim temos:

$$A_k = \frac{50\,000}{5} = 10\,000, \qquad 1 \leq k \leq 5$$

Portanto, as amortizações são de R$ 10.000,00.

Planilha de Financiamento – Sistema de Amortização Constante - SAC				
Principal		Taxa de Juros		-
R$ 50 000,00		2,5% ao mês		-
Período	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo Devedor
k	$J_k = i.Sd_{k-1}$	A_k	$P_k = A_k + J_k$	Sd_k
0	-	-	-	R$ 50.000,00
1	R$ 1.250,00	R$ 10.000,00	R$ 11.250,00	R$ 40.000,00
2	R$ 1.000,00	R$ 10.000,00	R$ 11.000,00	R$ 30.000,00
3	R$ 750,00	R$ 10.000,00	R$ 10.750,00	R$ 20.000,00
4	R$ 500,00	R$ 10.000,00	R$ 10.500,00	R$ 10.000,00
5	R$ 250,00	R$ 10.000,00	R$ 10.250,00	R$ 0,00
Total	R$ 3.750,00	R$ 50.000,00	R$ 53.750,00	-

Tabela 3.6: Sistema de Amortização Constante – SAC.

Observamos pela planilha anterior que as amortizações em cada período são constantes e iguais ao valor do empréstimo dividido pela quantidade de parcelas contratadas. Os juros continuam incidindo sobre o saldo devedor, que nesta situação decrescem de forma constante após cada pagamento. Como consequência do comportamento da amortização e dos juros, as prestações neste sistema também são decrescentes e se comportam como uma progressão aritmética.

Esse plano geralmente é utilizado nos financiamentos habitacionais.

Teorema 3.4 No SAC, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:

$$A_k = \frac{Sd_0}{n}, \qquad Sd_k = \frac{n-k}{n}.Sd_0, \qquad J_k = i.Sd_{k-1}, \qquad P_k = A_k + J_k.$$

Demonstração: Se a dívida Sd_0 é amortizada em n quotas iguais, cada quota é igual a:

$$A_k = \frac{Sd_0}{n}.$$

O estado da dívida, após k amortizações, é:

$$Sd_k = D_0 - k.\frac{D_0}{n} = \frac{n-k}{n}.Sd_0.$$

As duas últimas fórmulas são óbvias [9].

3.8.3 Sistema de Amortização Francês ou Sistema Price

Este sistema é também conhecido como Tabela Price. As principais características desse sistema são:

- Os pagamentos são constantes;
- O valor das amortizações é crescente;
- O valor dos juros é decrescente.

Para construção da planilha, seguimos os seguintes passos:

1°) Primeiramente devemos calcular o valor da parcela. Como o Principal vai ser devolvido em cinco parcelas iguais, então pelo Teorema 3.3 temos:

$$A = P.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

$$50\ 000 = P.\frac{1-(1+0{,}025)^{-5}}{0{,}025},$$

Assim, com o auxílio de uma calculadora científica temos que o valor da parcela é:

$$P \cong 10.762{,}34.$$

2°) No período "zero", que corresponde ao momento inicial do financiamento, não há qualquer prestação a pagar, tendo em vista que a primeira prestação será paga na data 1.

3°) No período "um", os cálculos serão feitos da seguinte forma:

a) o juro devido incide sobre o saldo devedor inicial, ou seja, 2,5% de 50.000,00, isto é, 0, 025 x 50.000, 00 = 1.250, 00.

b) a amortização será obtida pela diferença entre o valor da primeira prestação e o valor do juro pago, ou seja, a amortização do primeiro mês é: 10.762,34 – 1.250 = 9.512,34.

c) o saldo devedor, que se obtém subtraindo do saldo devedor inicial o valor amortizado nesse mês, é dado por:
50.000 – 9.512,34 = 40.487,66.

4°) Nos períodos subsequentes, repetimos os procedimentos do período "um".

Planilha de Financiamento – Sistema de Amortização Francês - Price				
Principal		Taxa de Juros		-
R$ 50 000,00		2,5% ao mês		-
Período	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo Devedor
k	$J_k = i.Sd_{k-1}$	A_k	$P_k = A_k + J_k$	Sd_k
0	-	-	-	R$ 50.000,00
1	R$ 1.250,00	R$ 9.512,34	R$ 10.762,34	R$ 40.487,66
2	R$ 1.012,19	R$ 9.750,15	R$ 10.762,34	R$ 30.737,51
3	R$.768,44	R$ 9.913,90	R$ 10.762,34	R$ 20.743,61
4	R$ 518,59	R$ 10.243,75	R$ 10.762,34	R$ 10.499,86
5	R$ 262,50	R$ 10.499,84	R$ 10.762,34	R$ 0,00
Total	R$ 3.811,72	R$ 49.999,98	R$ 53.811,70	-

Tabela 3.7: Sistema de Amortização Francês ou Sistema Price.

Observação: Em geral é necessário um pequeno ajuste na prestação do último período para zerar o saldo devedor.

Após uma análise na planilha, vemos que neste sistema, é paga uma prestação constante, de forma que uma parcela da prestação paga os juros e a outra parcela amortiza parte do capital e a cada pagamento os juros diminuem e a quota amortizada aumenta, visto que os juros são calculados sobre o saldo devedor.

Assim, neste sistema, logo nas primeiras prestações são pagas grande parte de juros e as amortizações são menores, portanto é um sistema que não convém quitar, antes do término do financiamento.

Este sistema é utilizado em empréstimos pessoais, obtenção de eletrodomésticos, financiamento de veículos entre outros que possuem parcelas fixas.

Teorema 3.5 No sistema francês de amortização, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:

$$P_k = D_0 . \frac{i}{1-(1+i)^{-n}},$$

$$D_k = D_0.\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}},$$

$$J_k = i.D_{k-1},$$

$$A_k = P_k - J_k.$$

Demonstração: A primeira fórmula é o Teorema 3.3 já demonstrado anteriormente.

Na segunda fórmula, observemos que D_k é a dívida que será liquidada, postecipadamente, por $n-k$ pagamento sucessivos a P_k. Portanto, novamente pelo teorema 3.3, temos:

$$D_k = P_k.\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

Substituindo o valor de P_k, obtemos a segunda fórmula.

As duas últimas fórmulas são óbvias [9].

Com o estudo destes sistemas de financiamentos é possível explorar os conceitos de matemática financeira, trabalhando com assuntos cotidianos, criando o que chamamos de percepção financeira, permitindo ao aluno questionamentos sobre os principais meios de financiamento do mercado financeiro, de forma a exercer o seu papel de cidadão, não aceitando abusos propostos pelas empresas.

No próximo capítulo apresentamos um breve comentário sobre o uso das tecnologias na educação e sugestões de atividades práticas que serão trabalhadas com alunos do 1° ano do Ensino Médio com a utilização de diferentes recursos pedagógicos, tais como apresentação de textos e recursos tecnológicos, como, por exemplo, planilhas do Excel.

4 MATEMÁTICA FINACEIRA NO ENSINO MÉDIO COM O USO DAS TECNOLOGIAS E A VIVÊNCIA NA SALA DE AULA

Neste capítulo será feita uma breve consideração sobre o uso das tecnologias na educação com ênfase no uso das planilhas do Excel e por fim apresentaremos algumas sugestões de atividades envolvendo problemas financeiros que podemos resolver facilmente usando as planilhas do Excel, atividades estas desenvolvidas no mês de junho de 2016, com alunos do 1° ano do Ensino Médio na Escola Estadual João Rodrigues Fernandes, situada na cidade de Auriflama, Estado de São Paulo.

4.1 Tecnologia na Educação

Em 1996, na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) – Lei nº 9394/96 –, a Tecnologia é mencionada, no artigo 32, que ainda vigora: “o aluno de ensino fundamental deve possuir compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, da tecnologia, das artes e dos valores que fundamentam a sociedade” [3].

Nesse aspecto de domínio da tecnologia, vemos que ela abrange todas as fases da educação “a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina” [4]

Diante das dificuldades que se apresentam no processo de ensino da matemática, a utilização de tecnologias, tais como a Informática, podem propiciar aos docentes uma ferramenta capaz de transformar os métodos tradicionais de ensino. Mesmo que não seja capaz de resolver todos os problemas do processo, é um instrumento de ensino que fornece meios para o docente obter seus objetivos de forma adequada, bem como tornar as aulas mais atrativas aos discentes.

De acordo com FISCHER - 2001, o uso das tecnologias de ensino também permite criar estímulos que ativam e aceleram a aprendizagem.

> O problema radical do ensino é vincular a mente do aluno à matéria objeto de aprendizagem. Isso implica em um ensino individualizado, de forma que, dada uma matéria a ensinar, o ideal é encontrar, para cada indivíduo, o molde adequado a seu nível de entendimento e formação, o qual seja capaz de tornar a assimilação do conhecimento algo mais adequado. É óbvio que tais estímulos

> precisam ser ativados para que se acelere a aprendizagem dos alunos e, por essa razão, as chamadas “Tecnologias Educativas”, desde o final do século passado, passaram a ser fator fundamental no processo de ensino e aprendizagem [15].

Ainda segundo FISCHER - 2001, as principais vantagens que demonstram a importância da informatização do ensino são:

> Participação ativa do aluno como um dos protagonistas do processo de construção de sua própria aprendizagem; a possibilidade de dar uma atenção individual e diferenciada aos alunos; a possibilidade de criar micromundos que permitam ao aluno explorar, analisar e conjeturar; permita procurar e administrar informação, potencializando o desenvolvimento cognitivo do aluno; por meio do feedback imediato e efetivo, o aluno pode aprender com seus erros [15].

Existem ainda inúmeras dificuldades em fazer uma relação entre a tecnologia na escola, o professor e o aluno, e isso tem prejudicado especialmente a disciplina da Matemática, uma vez que ela se afasta cada vez mais da realidade do aluno.

A integração da tecnologia na escola com a disciplina da Matemática, é um dos maiores desafios dessa nova educação. Mesmo com a tecnologia a nosso favor, em muitos lugares faltam recursos e pessoas competentes para desenvolver tal ferramenta. De certa forma, a capacidade da escola em conseguir alcançar os objetivos propostos funciona na medida com que a tecnologia é integrada nos currículos escolares.

A tecnologia tem avançado numa velocidade muito grande, e no meio educacional não é diferente: as planilhas eletrônicas têm sido cada vez mais utilizadas para facilitar e agilizar cálculos que antes eram exaustivos. Assim, as planilhas eletrônicas, em particular, o software Microsoft Excel, serão indispensáveis para o desenvolvimento da próxima seção 4.2. O programa é de fácil acesso e manipulação, tanto pelos alunos quanto pelo professor.

A planilha eletrônica é definida como “uma tabela composta por linhas e colunas. Nela, as linhas são identificadas por números e as colunas, por letras. A interseção entre uma linha e uma coluna é chamada célula”.

Portanto, a definição é bastante clara, pois permite compreender que a localização de uma célula na planilha é igual à localização de um ponto no plano cartesiano: ou seja, é só analisar as localizações horizontal e vertical. Assim, a célula C8, por exemplo, é a célula localizada na coluna C, na oitava linha.

Um dos motivos para utilizar as planilhas eletrônicas para o ensino de Matemática Financeira não é apenas o cálculo rápido e preciso, mas também contribuir para a redução do tempo gasto com cálculos repetitivos e já conhecidos. A planilha eletrônica nos permite solucionar problemas complexos, apresentando resultados de forma imediata para análise e tomadas de decisão.

Vale mencionar que um outro recurso tecnológico para resolver problemas financeiros é a calculadora HP 12C, que é a calculadora financeira mais usada no Brasil. Porém, seu uso em sala de aula, torna-se inviável devido seu custo financeiro ser expressivo. Portanto neste trabalho, optaremos pela utilização da planilha do Excel.

Nos capítulos anteriores, pudemos perceber o quanto várias fórmulas precisam ser aprendidas e, consequentemente, aplicadas para resolver um problema de matemática financeira. Veremos na seção 4.2, como alguns problemas podem ser facilmente resolvidas por meio das planilhas do Microsoft Excel.

4.2 Sugestões de Atividades com a Utilização das Planilhas do Excel no Estudo da Matemática Financeira

Primeiramente, apresentamos um pouco da história da matemática financeira, com os alunos do 1º ano do Ensino Médio, motivando-os e fazendo-os refletir sobre o conceito de juros.

Posteriormente foram apresentados alguns conceitos básicos sobre a planilha do Excel conforme citado na seção anterior.

Relataremos a seguir algumas atividades que foram desenvolvidas em sala de aula com alunos do 1° ano do Ensino Médio utilizando a planilha do Excel.

Atividade 1- Calculando juros e Pagamentos

Conhecimentos prévios: Noções básicas de informática, taxa de juros e financiamento.

Material: Anexo I, projetor multimídia e planilha do Excel.

Público alvo: alunos do 1° ano do Ensino Médio.

Tempo de desenvolvimento: 2 (duas) aulas de 50 minutos cada.

Objetivos: Resolver problemas financeiros que envolvam cálculo de taxa de juros e valor das parcelas de um financiamento utilizando a planilha do Excel.

Problema 1.1: Paulo deseja comprar um refrigerador, verificou em determinada loja o anuncio abaixo:

Figura 4.1: Anúncio Comercial de Refrigerador

Paulo não tem condições financeiras de efetuar o pagamento à vista, mas tem a possibilidade de realizar um empréstimo consignado com taxas de juros de 2% ao mês. Com base nas informações do texto apresentado e utilizando a planilha do Excel responda as questões:

a) Qual a taxa de juros cobrado pela loja no parcelamento em 18 vezes?
b) Se Paulo tomar o empréstimo consignado também em 18 vezes, qual o valor da parcela mensal?
c) Qual a melhor opção de financiamento para Paulo?

Desenvolvimento: Primeiramente foi entregue a cada aluno o Anexo I, e na sequencia resolvemos com os alunos o problema 1 de forma coletiva com a utilização de um projetor multimídia. Seguimos os seguinte passos descritos na sequência, esclarecendo as possíveis dúvidas e revisando os conceitos matemáticos.

a) Na planilha do Excel clicar em fórmulas, em seguida na tecla do menu f_x, Com esta operação aparecerá a tela:

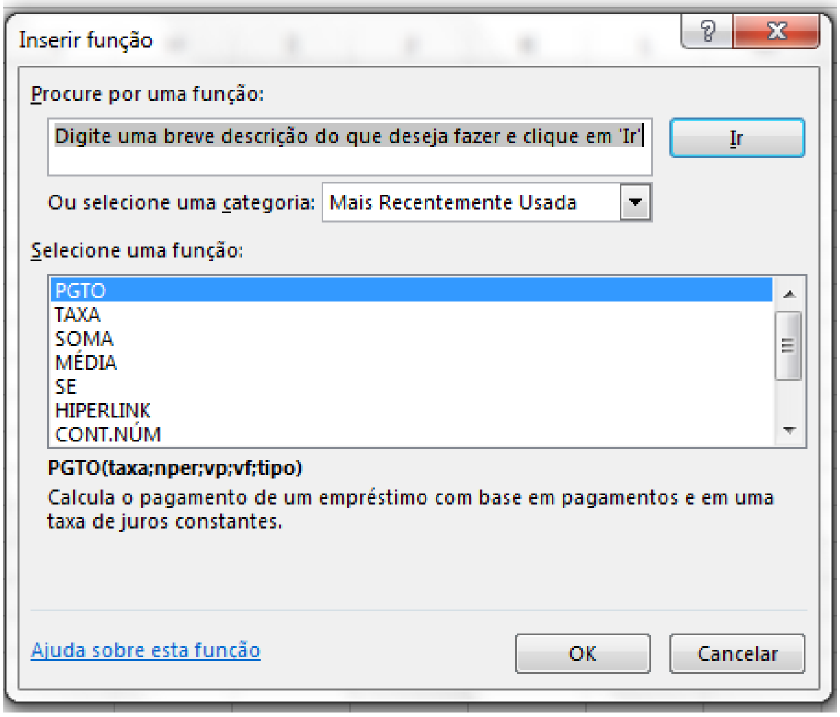


Figura 4.2: Tela do Excel – inserir função

Clique na seta à direta de "Mais Recentes Usada" e clique em Financeira, como mostra a tela a seguir.

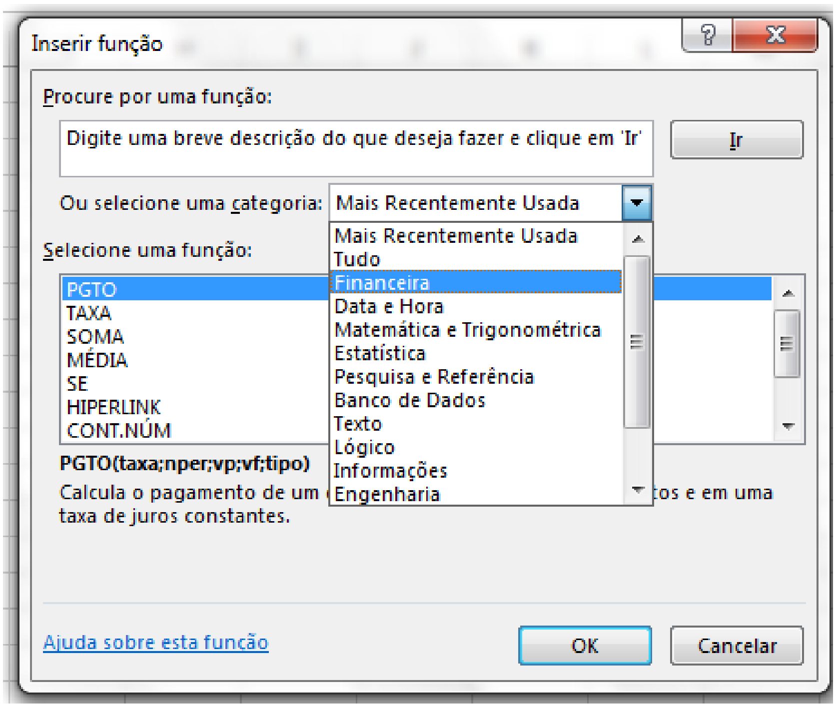


Figura 4.3: Tela do Excel – inserir função

Em seguida selecione a função TAXA e clique OK.

Aparecerá a caixa de diálogo e será necessário preencher com os dados dos problemas.

Nper: número total de pagamentos;

Pgto: valor das prestações;

Vp: valor presente, com sinal contrário ao do pagamento. Se Vp é preenchido Vf deve ficar em branco.

Vf: valor futuro, com sinal contrário ao pagamento. Se Vf é preenchido Vp deve ficar em branco.

Tipo: é o número 0 ou 1, conforme pagamentos sejam postecipados ou antecipados. Se for deixado em branco, o Excel assumirá 0, considerando pagamentos postecipados.

Observação: O Excel trabalha com a "lógica do contador", na qual os pagamentos e os recebimentos devem ter sinais contrários, logo se o valor das prestações é **positivo**, o valor presente obrigatoriamente deve ser **negativo.**

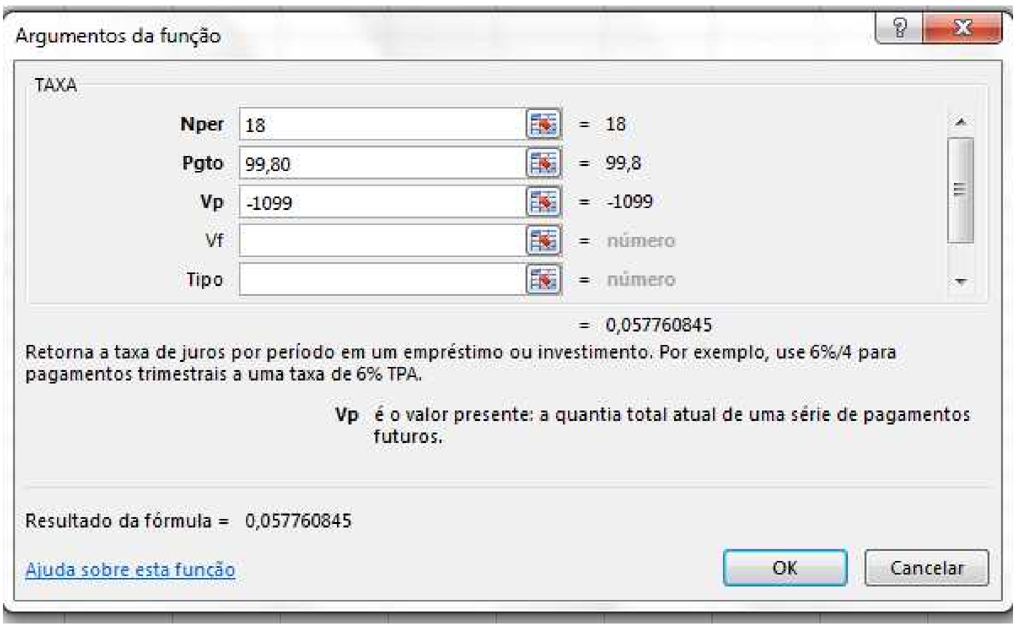


Figura 4.4: Tela do Excel – argumentos da função

Portanto, a taxa de juros cobrado pela loja é de aproximadamente 5,7% ao mês.

b) Na planilha do Excel clicar em fórmulas e em seguida na tecla do menu f_x. Clique na seta à direta de "Mais Recentes Usada" e clique em Financeira. Em seguida selecione a função PGTO e clique OK. **(Lembre-se que o valor presente vp deve ser negativo)**

Aparecerá a caixa de diálogo e será necessário preencher com os dados dos problemas.

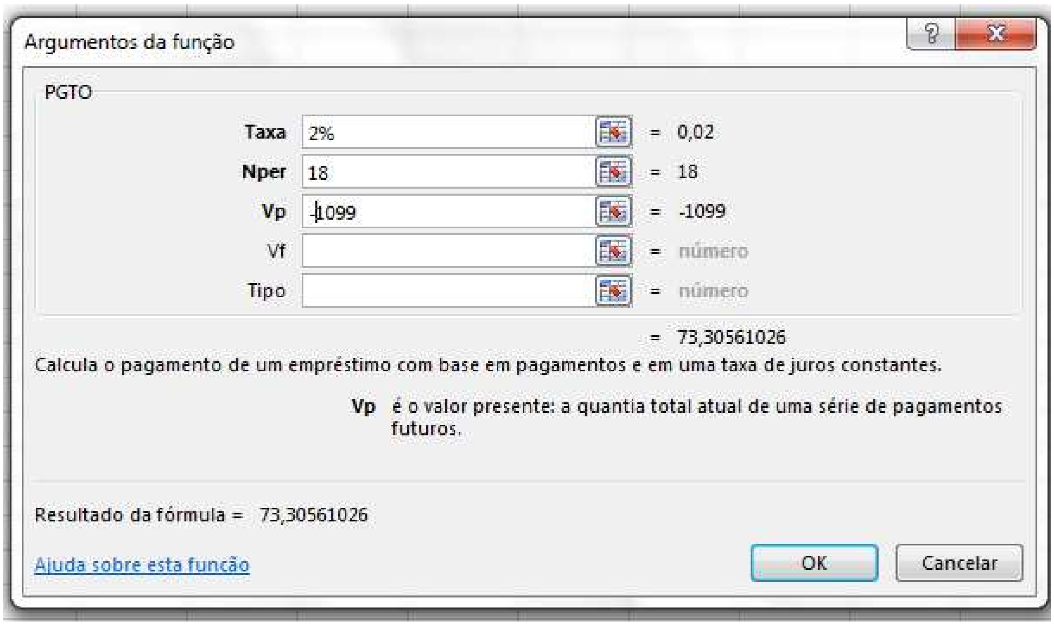


Figura 4.5: Tela do Excel – argumentos da função

Logo, se Paulo tomar o empréstimo consignado para pagar à vista o refrigerador na loja sua parcela mensal será de R$ 73,30.

c) Para Paulo é mais vantajoso o empréstimo consignado pelas condições apresentadas, pois terá um economia mensal de R$ 99,80 – R$ 73,30 = R$ 26,50.

Após o desenvolvimento desta atividade, levamos os alunos para a sala de informática e propomos aos mesmos que em dupla, reproduzissem a atividade anterior e resolvessem as situações problemas a seguir utilizando a planilha do Excel.

Problema 1.2: (Exemplo 3.29 – Página 58) Um liquidificador custa R$ 120,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 3% ao mês, determine o valor das prestações.

Solução esperada:

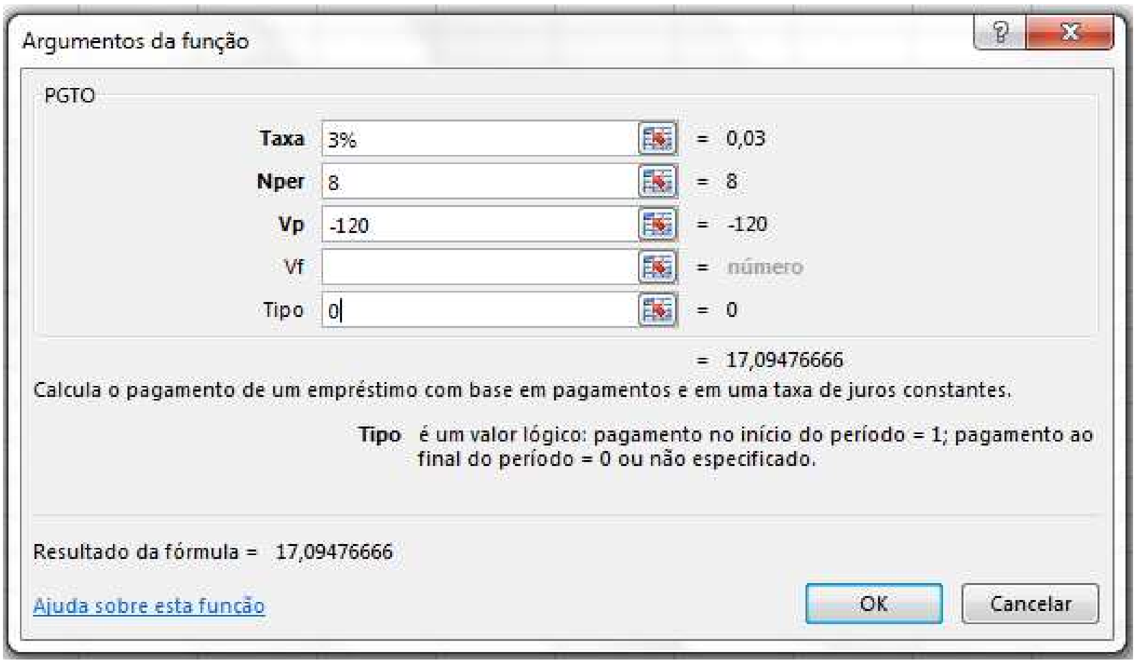


Figura 4.6: Tela do Excel – argumentos da função

Resposta: O valor das prestações com a primeira sendo paga um mês após a compra é de R$ 17,09.

Problema 1.3: (Exemplo 3.30 – Página 59) Um liquidificador custa R$ 120,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga no ato da a compra. Se os juros são de 3% ao mês, determine o valor das prestações.

Solução esperada:

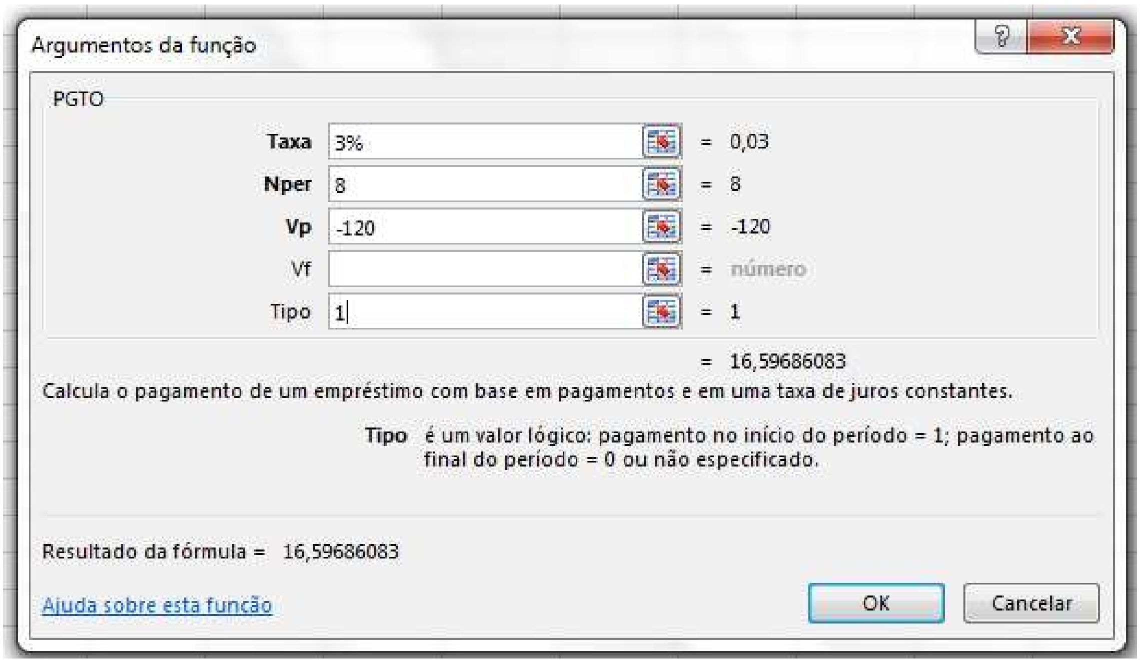


Figura 4.7: Tela do Excel – argumentos da função

Resposta: O valor das prestações com a primeira sendo paga um no ato da compra é de R$ 16,60.

Problema 1.4: (Exemplo 3.24 – Página 52) Guilherme comprou um automóvel em 24 prestações iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra, cujo preço à vista era de R$ 24000, 00. Se os juros são de 2% ao mês, determine o valor das prestações.

Solução esperada:

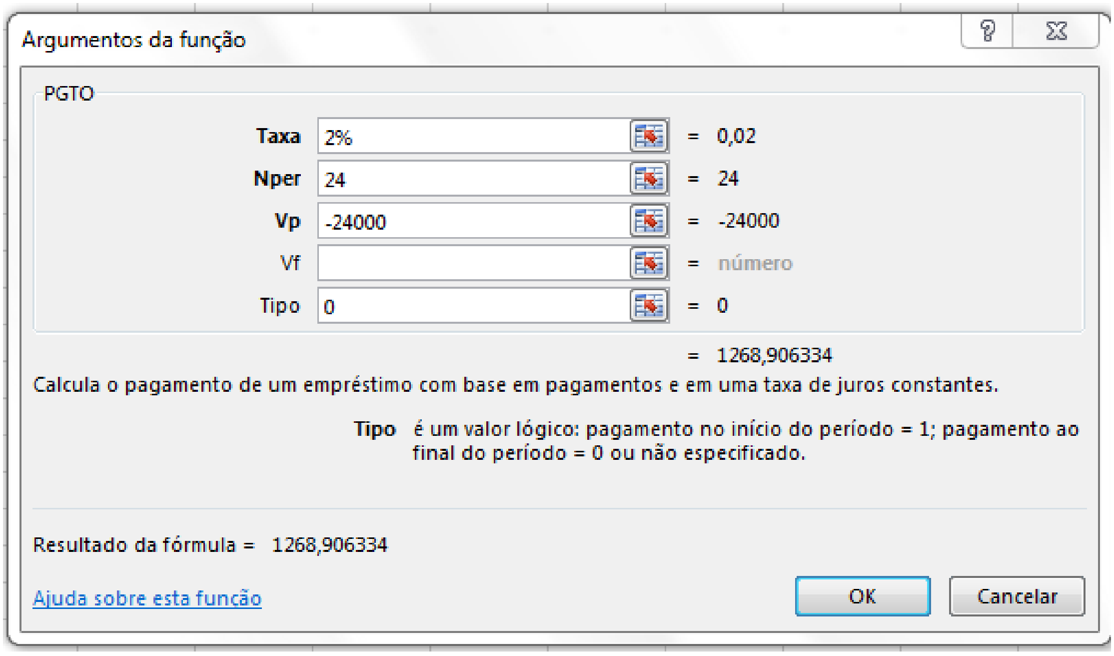


Figura 4.8: Tela do Excel – argumentos da função

Resposta: O valor das prestações com a primeira sendo paga um mês após a compra é de R$ 1268,90.

Problema 1.5: Calcule a taxa de juros cobrada no anúncio a seguir no pagamento parcelado.

Figura 4.9: Anúncio Comercial – IPhone 5C

Observe que os pagamentos são postecipados, ou seja, um mês após a compra (0+23 mensais)

Solução esperada:

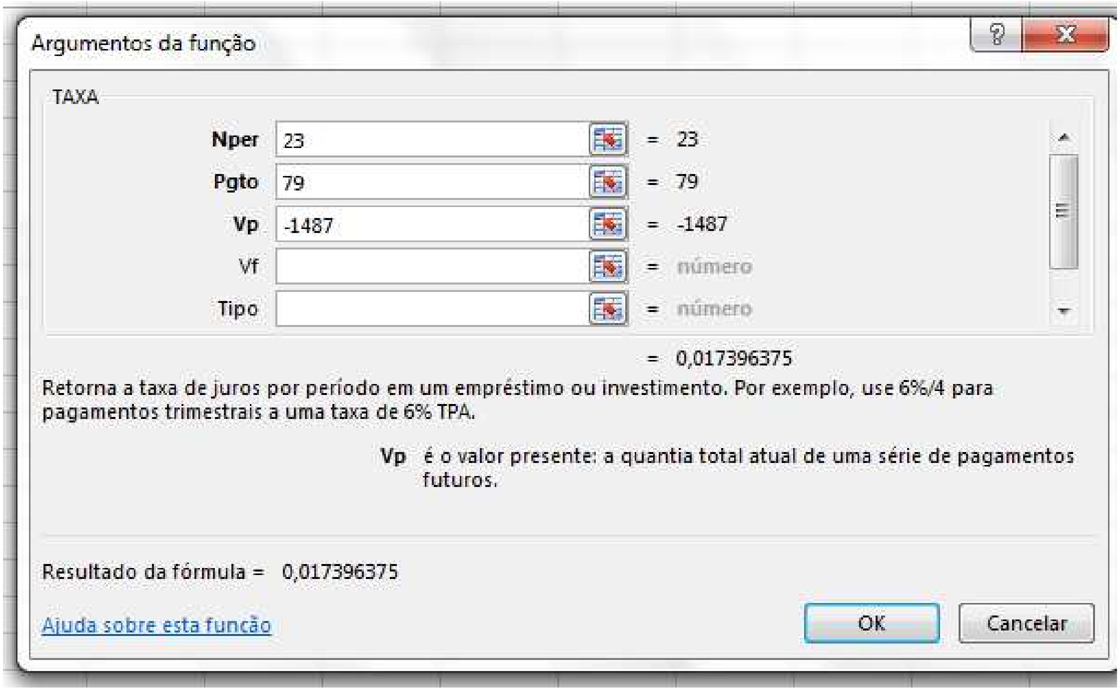


Figura 4.10: Tela do Excel – argumentos da função

Resposta: A taxa de juros cobrada no anuncio é de 1,74.

Avaliação da atividade

Após o desenvolvimento dessas sequência de problemas ficou claro para os alunos a facilidade de resolver problemas financeiros utilizando o Excel.

Durante a realização da atividade surgiram algumas dúvidas quanto a representação e a aproximação dos valores em porcentagem, como por exemplo, 0,017396375 na forma decimal, pode ser representado também por 1,74% multiplicando por 100 e aproximando a quarta casa decimal. Alguns alunos também chegaram em respostas negativas por não ter observado que o Excel usa a “lógica do contador”.

A avaliação dos alunos se deu através da observação da participação e atitude durante o desenvolvimento da atividade.

Com relação à utilização do Excel temos a dizer que o resultado foi satisfatório, pois grande parte dos alunos apresentam facilidade para aprender a manusear instrumentos computacionais.

Nas próximas duas atividades iremos resolver as mesmas situações problemas (Exemplo 3.29 – Página 58 e Exemplo 3.24 – Página 52, respectivamente) para fins didáticos, possibilitando assim a comparação entre os dois sistemas de amortização que serão propostos a seguir:

Atividade 2 - Sistemas de Amortização pelo SAC

As principais características desse sistema são:

- As amortizações são constantes;
- Os valores das prestações e dos juros vão diminuindo ao longo do período.

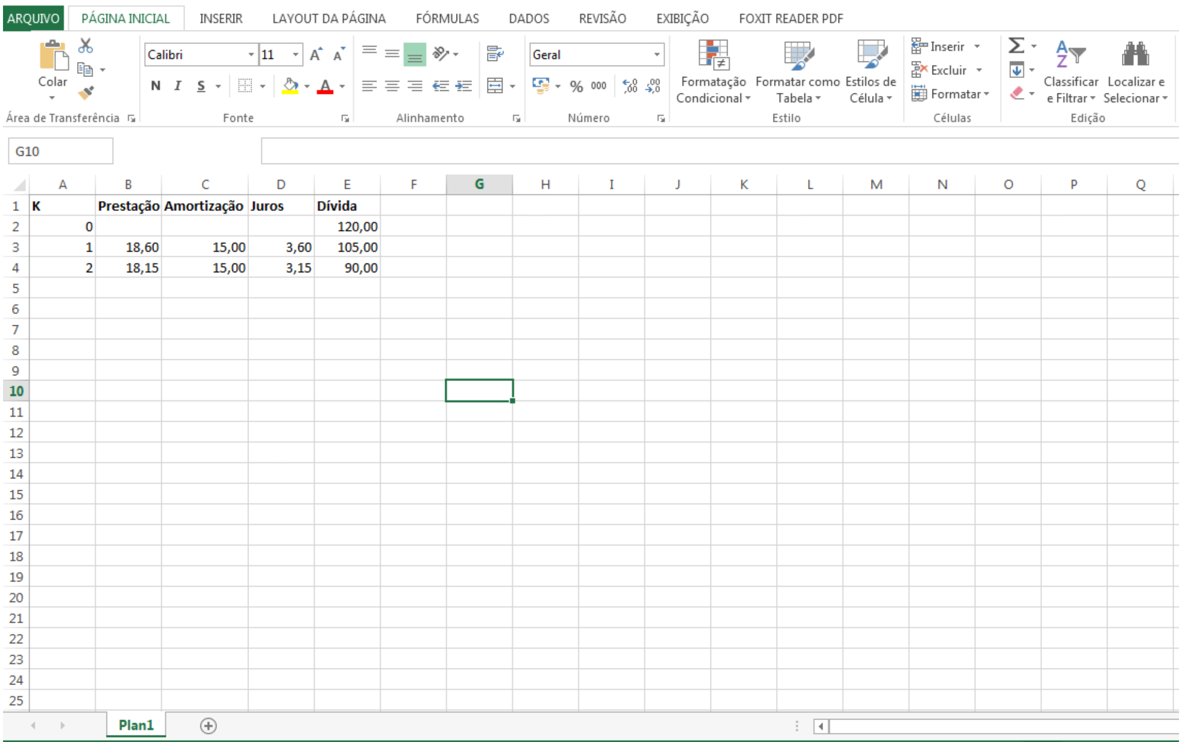
Conhecimentos prévios: Noções básicas de informática, cálculo de porcentagens, conceitos de amortização, financiamento, juros e dívida e progressão aritmética.
Material: Anexo II, calculadora simples e planilha do Excel.
Público alvo: alunos do 1° ano do Ensino Médio.
Tempo de desenvolvimento: 2 (duas) aulas de 50 minutos cada.
Objetivos: Construir planilhas de amortização no SAC a partir de uma situação problema e identificar as principais características deste tipo de financiamento utilizando a planilha do Excel.
Desenvolvimento: Primeiramente disponibilizamos uma cópia do Anexo II para cada aluno distribuídos em dupla por computador. Antes do início da atividade

fizemos uma explanação sobre as principais características deste tipo de sistema de financiamento. Em seguida propomos aos mesmos que observem a resolução do problema 2.1 e em seguida reproduza a mesma na planilha do Excel, e na sequencia resolvam o problema 2.2 observando a resolução do problema 2.1. Finalizando a atividade foi realizada uma discussão sobre as principais características deste tipo de financiamento e sua principal aplicabilidade no cotidiano.

Problema 2.1 - Um liquidificador custa R$ 120,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 3% ao mês, construa uma planilha de amortização pelo sistema SAC.

Resolução: Primeiramente devemos construir as primeiras linhas da tabela. Usaremos as colunas A, B, C, D e E para, quantidade de pagamentos (K), prestação, amortização, juros e dívida, respectivamente.

A amortização é constante, igual a 120/8=15, logo a dívida cai R$ 15,00 por mês. Portanto os valores iniciais da coluna da dívida são 120, 105, 90. Cada parcela de juros é 3% da dívida no mês anterior. Assim as prestações é a soma da amortização com os juros. Daí temos:



K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				120,00
1	18,60	15,00	3,60	105,00
2	18,15	15,00	3,15	90,00

Figura 4.11: Planilha do Excel

Como no SAC, as colunas formam uma progressão aritmética, basta marcar as colunas e arrastar o mouse para baixo, depois de ter posicionado o mouse no canto direito inferior, como mostra nas ilustrações a seguir:

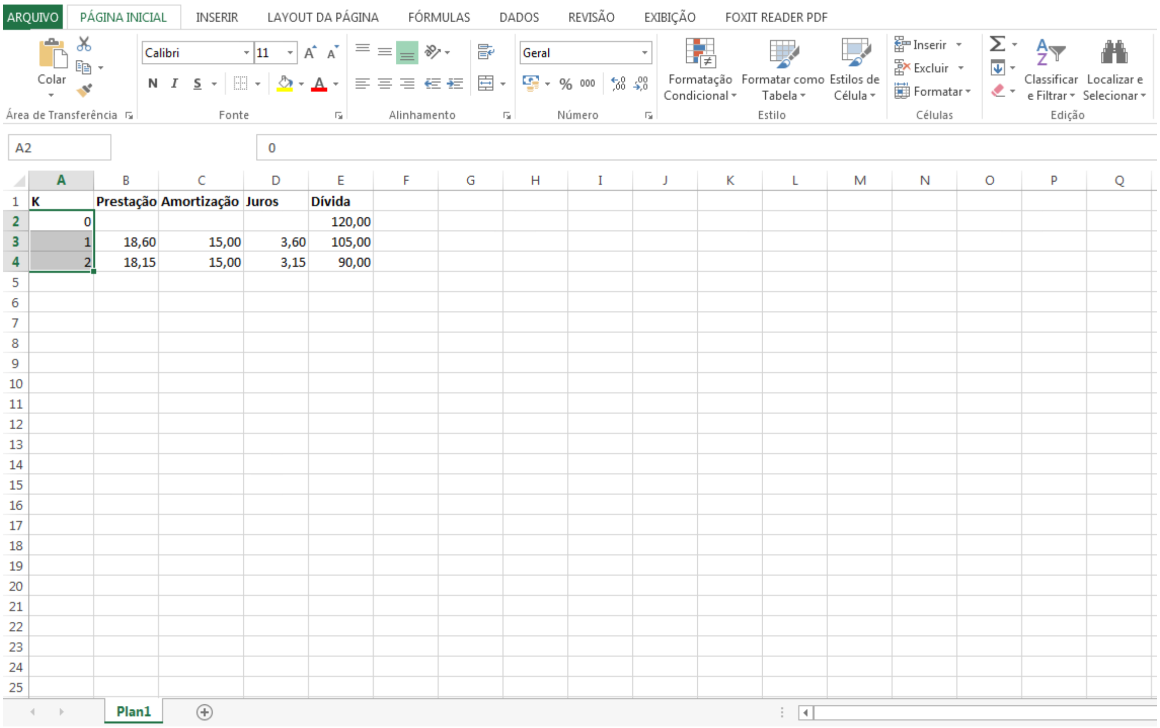


Figura 4.12: Planilha do Excel

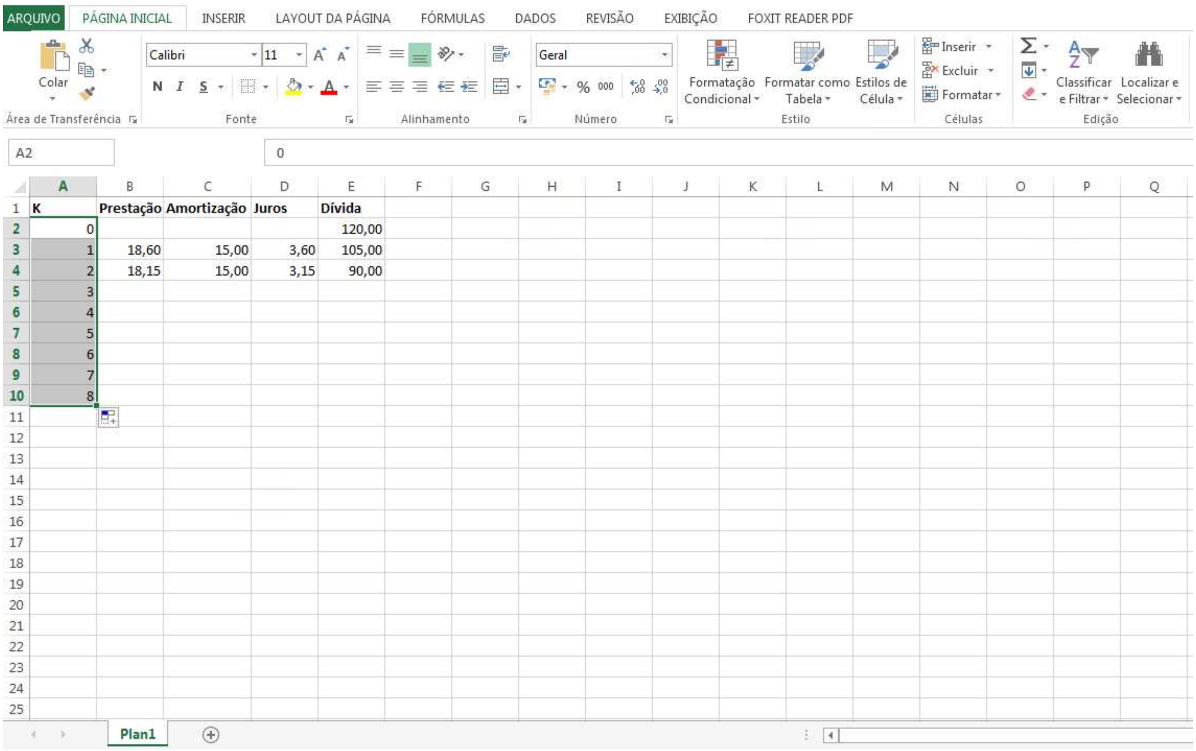


Figura 4.13: Planilha do Excel

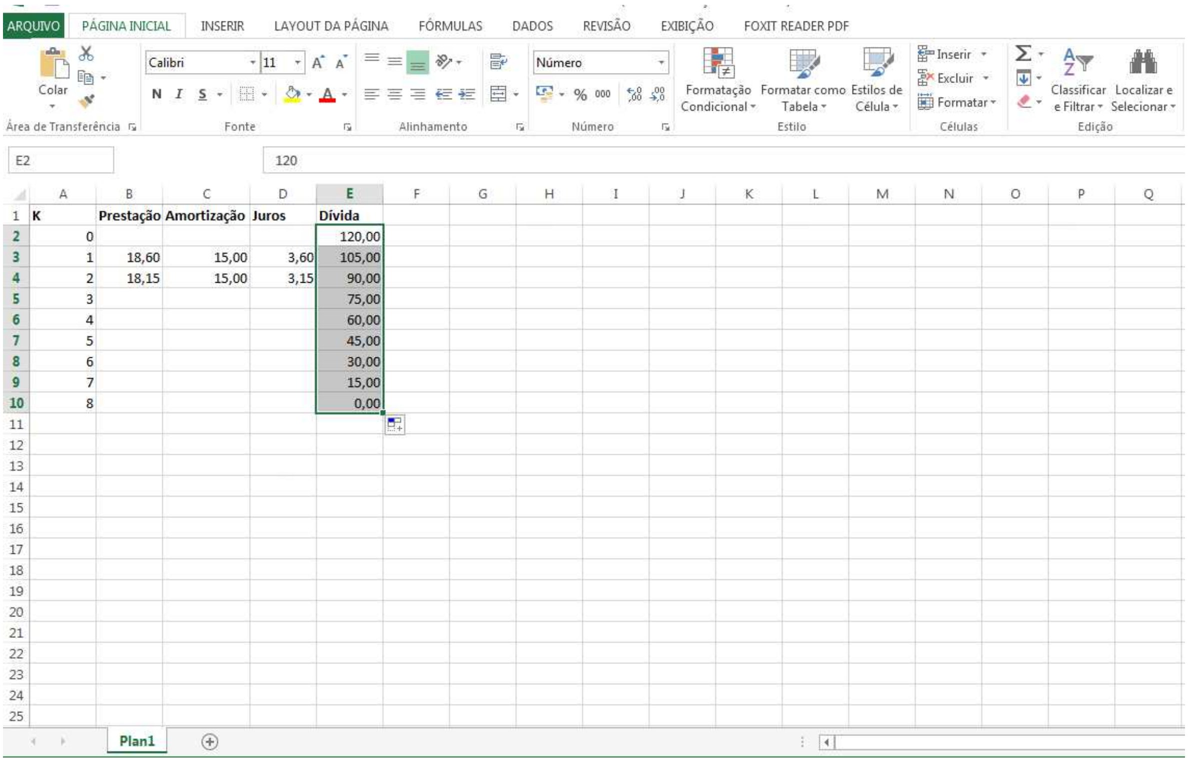


Figura 4.14: Planilha do Excel

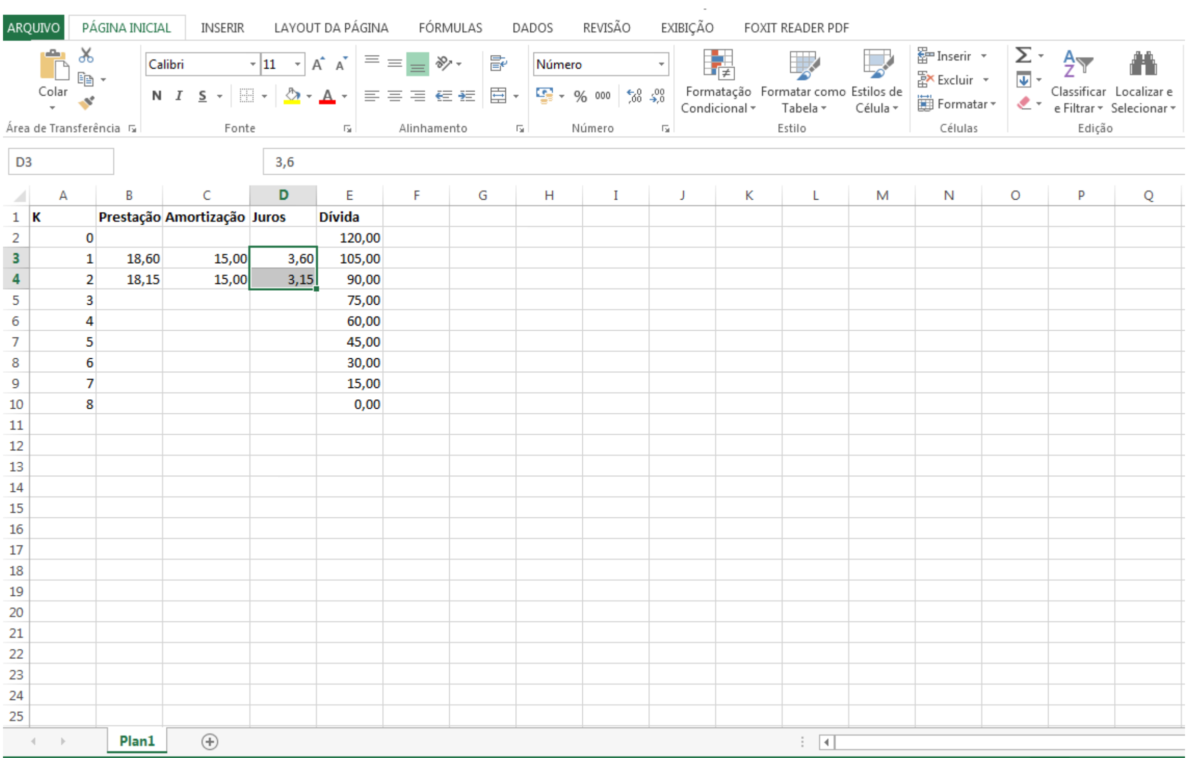
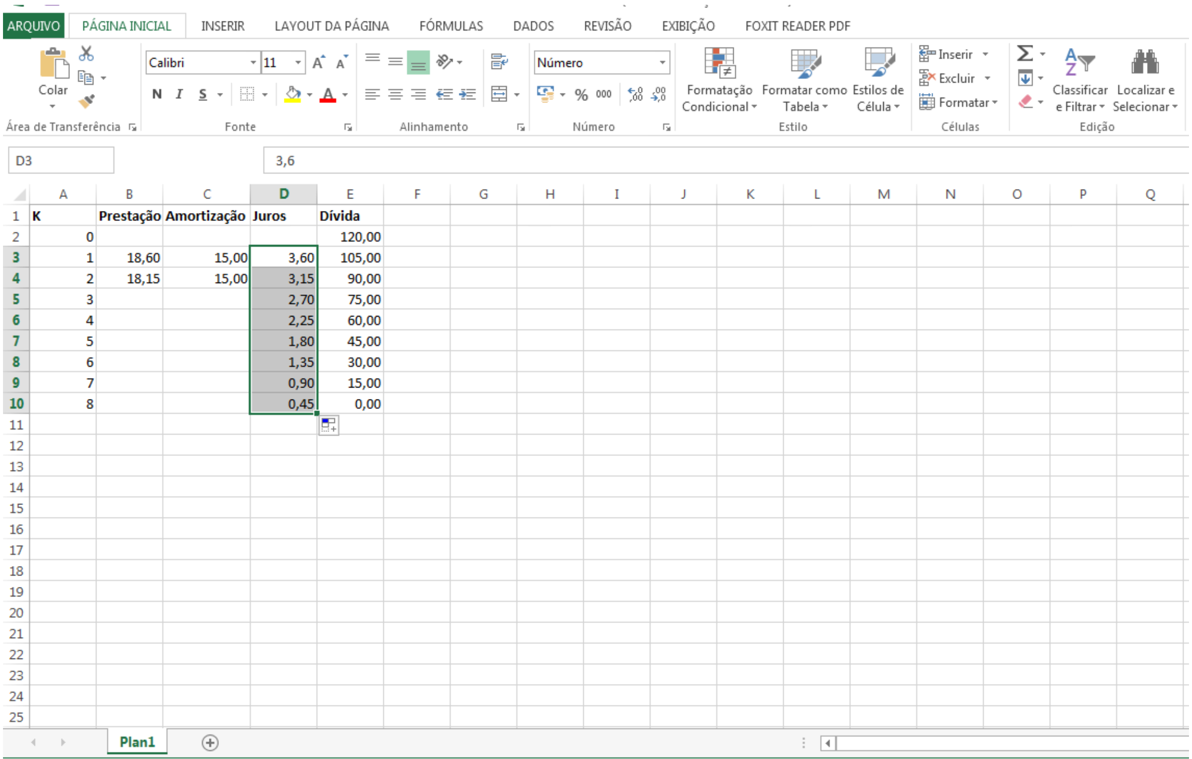
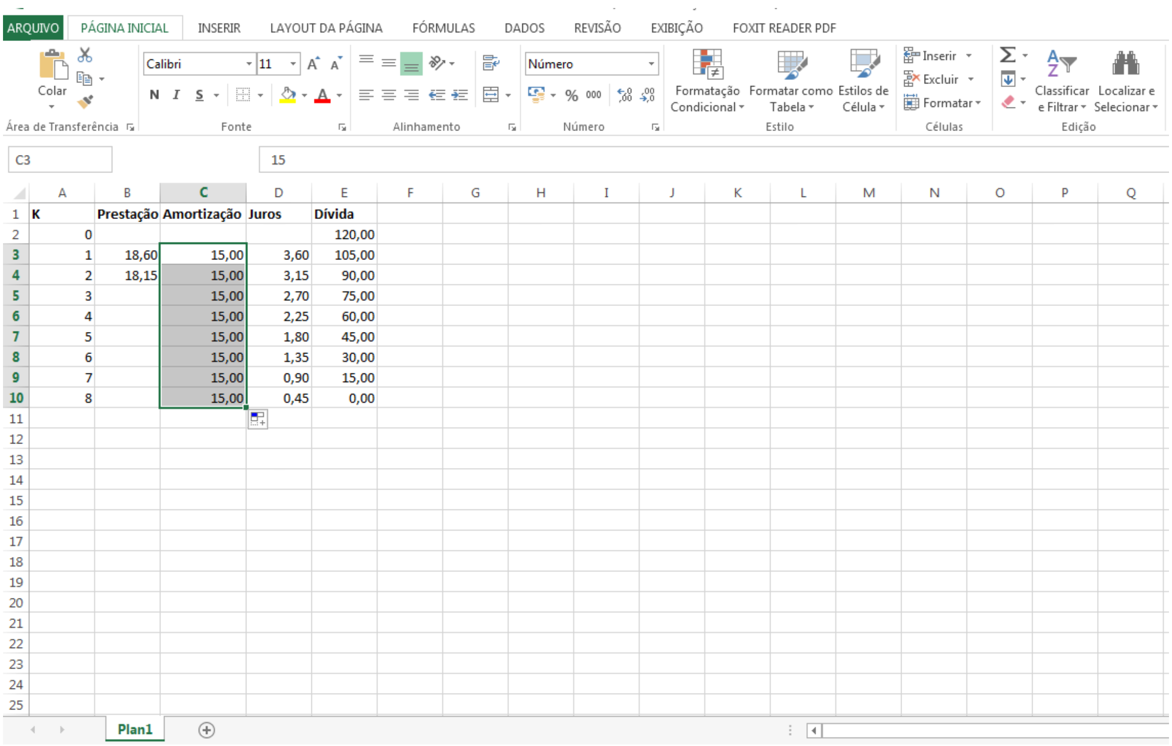


Figura 4.15: Planilha do Excel



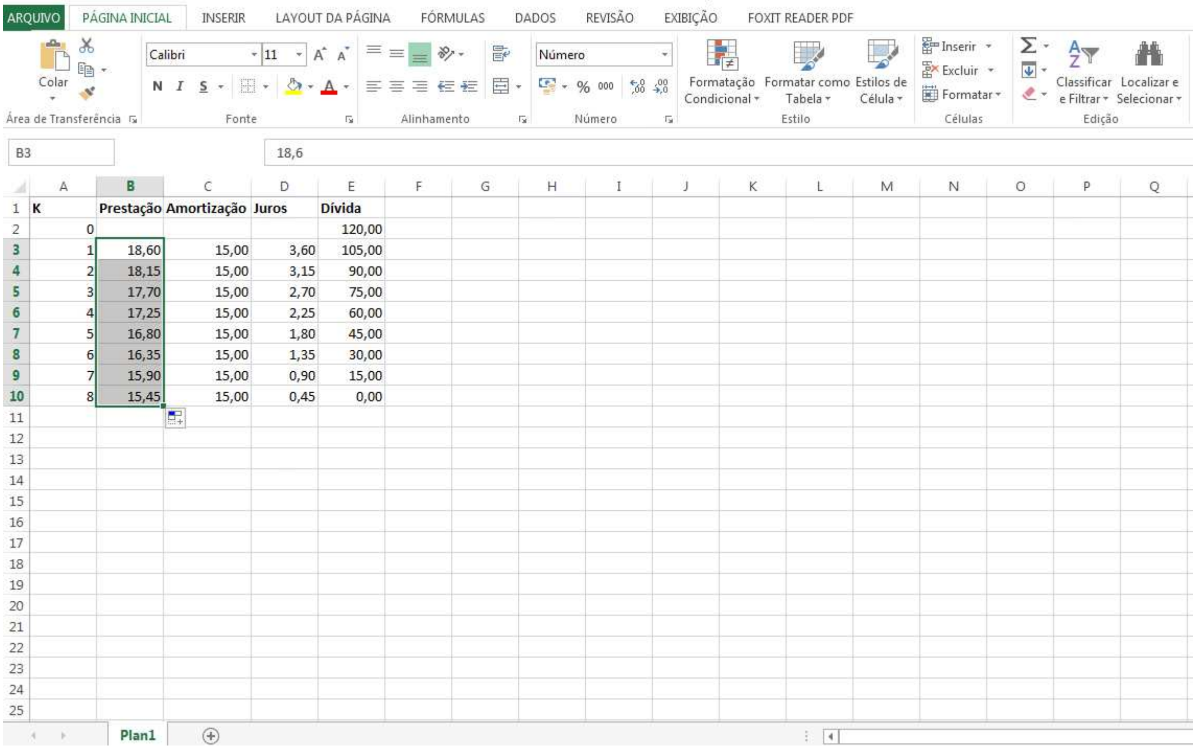
K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				120,00
1	18,60	15,00	3,60	105,00
2	18,15	15,00	3,15	90,00
3			2,70	75,00
4			2,25	60,00
5			1,80	45,00
6			1,35	30,00
7			0,90	15,00
8			0,45	0,00

Figura 4.16: Planilha do Excel



K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				120,00
1	18,60	15,00	3,60	105,00
2	18,15	15,00	3,15	90,00
3		15,00	2,70	75,00
4		15,00	2,25	60,00
5		15,00	1,80	45,00
6		15,00	1,35	30,00
7		15,00	0,90	15,00
8		15,00	0,45	0,00

Figura 4.17: Planilha do Excel



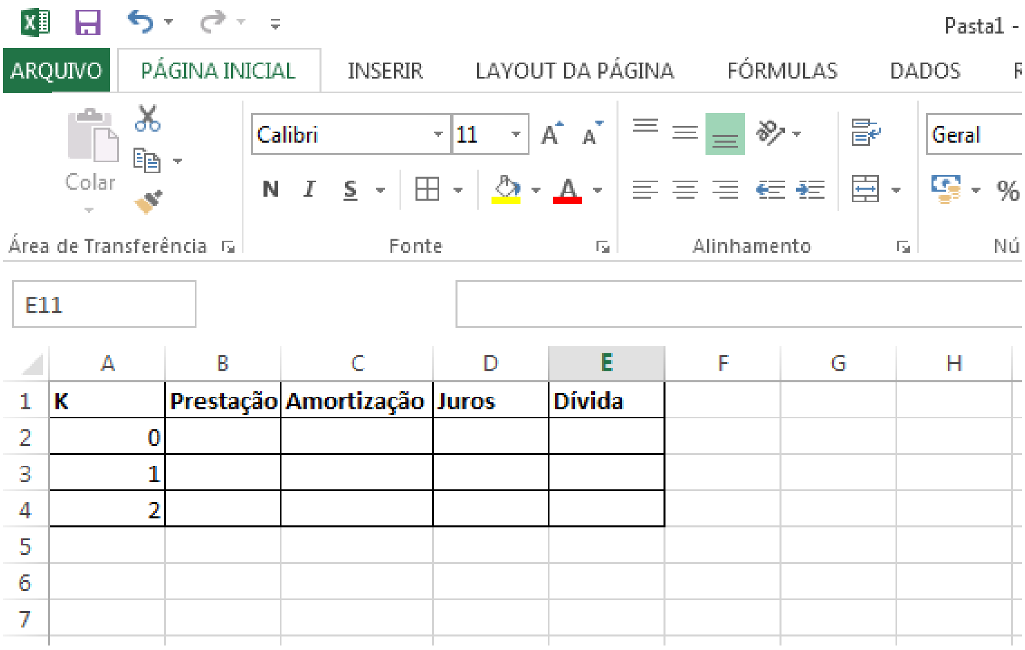
K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				120,00
1	18,60	15,00	3,60	105,00
2	18,15	15,00	3,15	90,00
3	17,70	15,00	2,70	75,00
4	17,25	15,00	2,25	60,00
5	16,80	15,00	1,80	45,00
6	16,35	15,00	1,35	30,00
7	15,90	15,00	0,90	15,00
8	15,45	15,00	0,45	0,00

Figura 4.18: Planilha do Excel

Após isso, construíram uma tabela no sistema de amortização pelo sistema SAC no problema 2.2 a seguir:

Problema 2.2 - Guilherme comprou um automóvel em 24 prestações iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra, cujo preço à vista era de R$ 24.000, 00. Se os juros são de 2% ao mês, construa uma tabela de amortização pelo sistema SAC.

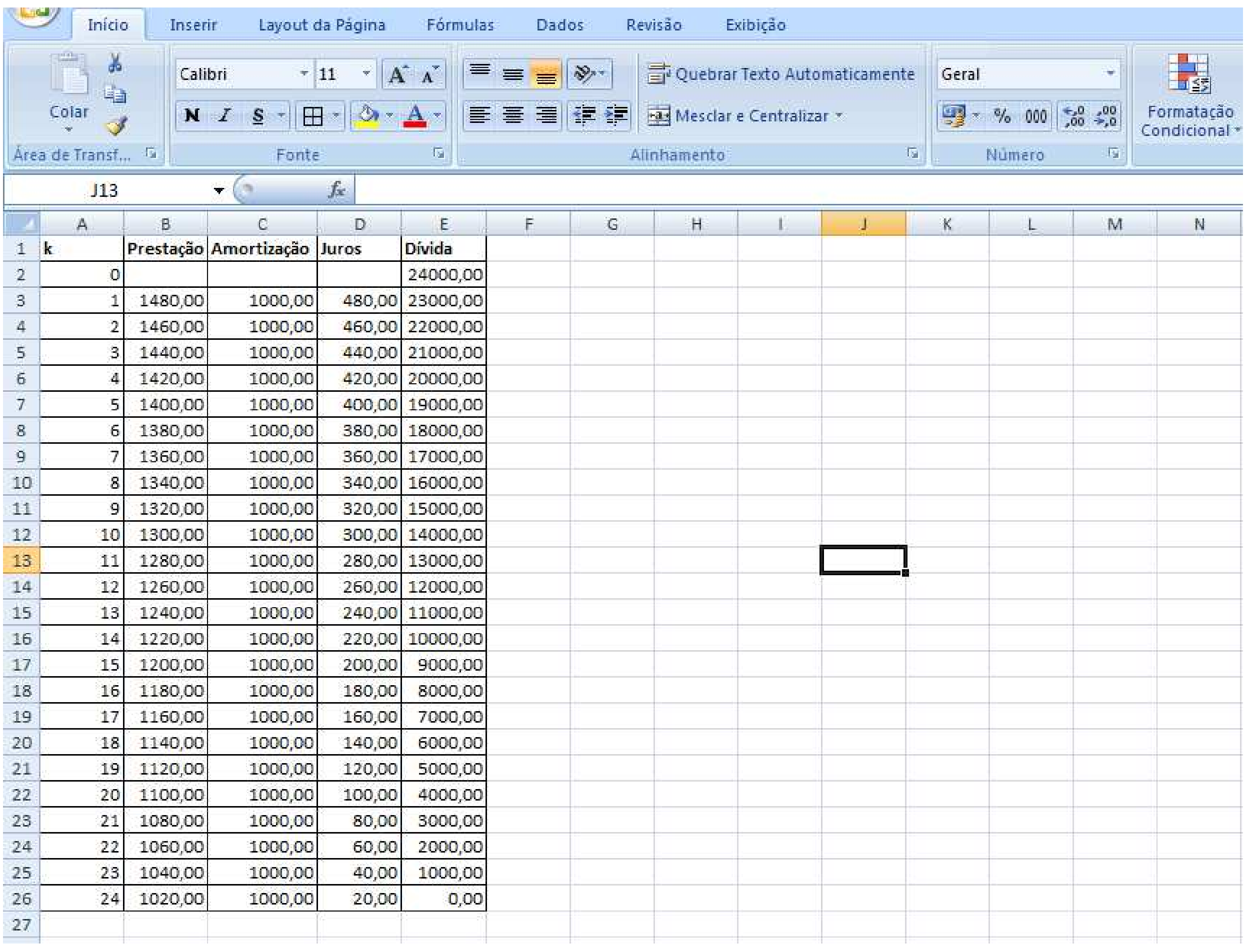
Observação: Antes de iniciar a construção da tabela no Excel, utilizando uma calculadora, preencha as primeiras linhas da tabela a seguir:



	A	B	C	D	E
1	K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
2	0				
3	1				
4	2				

Figura 4.19: Planilha do Excel

Resposta esperada:



	A	B	C	D	E
1	k	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
2	0				24000,00
3	1	1480,00	1000,00	480,00	23000,00
4	2	1460,00	1000,00	460,00	22000,00
5	3	1440,00	1000,00	440,00	21000,00
6	4	1420,00	1000,00	420,00	20000,00
7	5	1400,00	1000,00	400,00	19000,00
8	6	1380,00	1000,00	380,00	18000,00
9	7	1360,00	1000,00	360,00	17000,00
10	8	1340,00	1000,00	340,00	16000,00
11	9	1320,00	1000,00	320,00	15000,00
12	10	1300,00	1000,00	300,00	14000,00
13	11	1280,00	1000,00	280,00	13000,00
14	12	1260,00	1000,00	260,00	12000,00
15	13	1240,00	1000,00	240,00	11000,00
16	14	1220,00	1000,00	220,00	10000,00
17	15	1200,00	1000,00	200,00	9000,00
18	16	1180,00	1000,00	180,00	8000,00
19	17	1160,00	1000,00	160,00	7000,00
20	18	1140,00	1000,00	140,00	6000,00
21	19	1120,00	1000,00	120,00	5000,00
22	20	1100,00	1000,00	100,00	4000,00
23	21	1080,00	1000,00	80,00	3000,00
24	22	1060,00	1000,00	60,00	2000,00
25	23	1040,00	1000,00	40,00	1000,00
26	24	1020,00	1000,00	20,00	0,00

Figura 4.20: Planilha do Excel

Avaliação da atividade

Alguns alunos apresentaram dificuldade em realizar o preenchimento das primeiras linhas da tabela, sendo solicitado o auxílio do professor em alguns momentos, contudo todos os alunos conseguiram desenvolver a atividade.

Esclarecemos que este tipo de financiamento é muito utilizado no financiamento habitacional onde os valor das parcelas são decrescentes e reforçamos que observassem na planilha que as amortizações são constantes e os juros diminuem ao longo do período.

Observamos também que financiamento de veículos e de eletrodomésticos geralmente não pelo sistema SAC, os problemas foram propostos apenas para fins didáticos, pois financiamentos habitacionais são em geral em grandes períodos, como por exemplo 300 parcelas, que dificultaria a construção da planilha e o objetivo da atividade. Porém, deixamos como desafio que simulassem um financiamento habitacional.

Concluímos que os alunos ficaram motivados e participaram de forma satisfatória da atividade.

Atividade 3 - Sistema de Amortização Francês ou Sistema Price

Este sistema é também conhecido como Tabela Price. As principais características desse sistema são:

- Os pagamentos são constantes;
- O valor das amortizações é crescente;
- O valor dos juros é decrescente.

Nesta atividade reproduzimos as mesmas situações problemas da atividade anterior, com o objetivo comparar os dois sistemas de amortização.

Conhecimentos prévios: Noções básicas de informática, cálculo de porcentagens e conceitos de amortização, financiamento, juros e dívida.

Material: Anexo III e planilha do Excel.

Público alvo: alunos do 1° ano do Ensino Médio.

Tempo de desenvolvimento: 2 (duas) aulas de 50 minutos cada.

Objetivos: Construir planilhas de amortização no sistema PRICE a partir de uma situação problema e identificar as principais características deste tipo de financiamento utilizando a planilha do Excel.

Desenvolvimento: Primeiramente disponibilizamos uma cópia do Anexo III para cada aluno distribuídos em dupla por computador. Antes do início da atividade fizemos uma explanação sobre as principais características deste tipo de sistema de financiamento. Em seguida propomos aos mesmos que observem a resolução do problema 3.1 e em seguida reproduza a mesma na planilha do Excel, e na sequência resolvam o problema 3.2 observando a resolução do problema 3.1. Finalizando a atividade foi realizada uma discussão sobre as principais características deste tipo de financiamento e sua principal aplicabilidade no cotidiano.

Problema 3.1 - Um liquidificador custa R$ 120,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 3% ao mês, construa uma planilha de amortização pelo sistema Price.

Para construção da planilha usaremos as colunas A, B, C, D e E para, quantidade de pagamentos (K), prestação, amortização, juros e dívida, respectivamente, seguimos os seguintes passos:

1°) Primeiramente devemos calcular o valor da parcela. Marcamos na célula na qual queremos que o resultado apareça, no caso B3, então basta utilizar o comando f_x (Ver problema 1.2 da atividade 1).

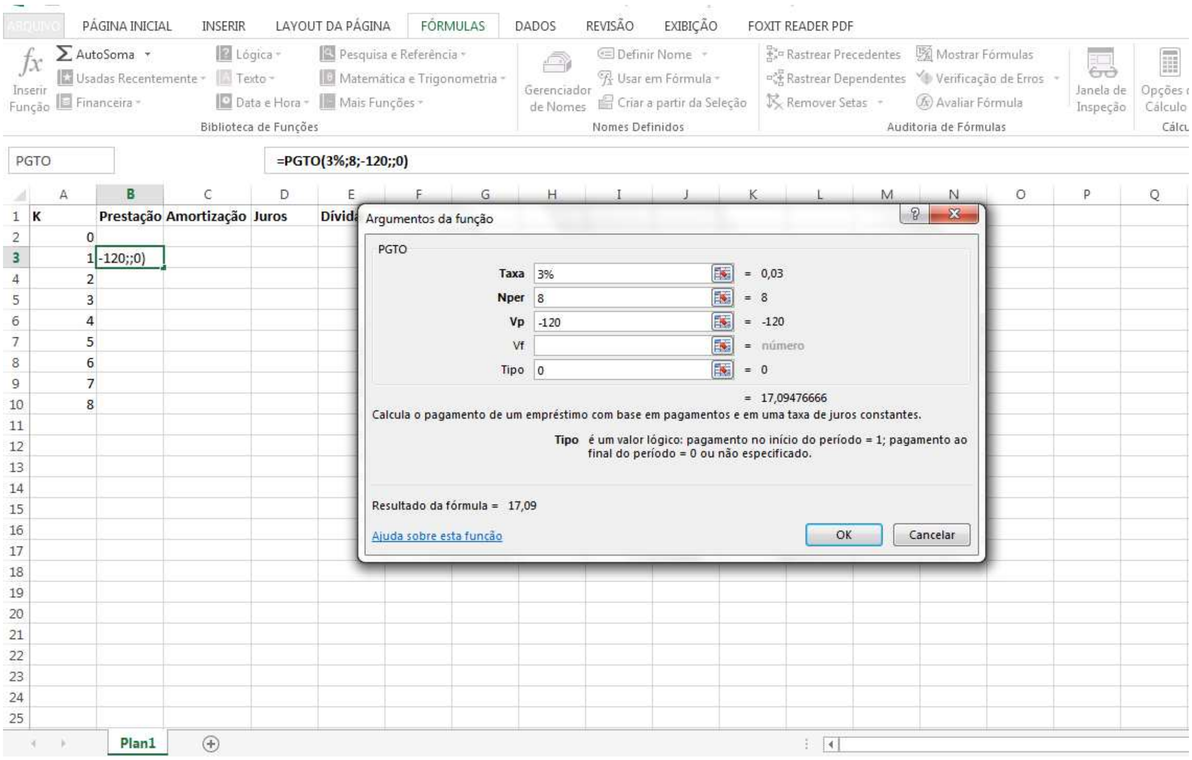


Figura 4.21: Planilha do Excel

Clique em OK, aparecerá na célula B3 o valor R$ 17,09.

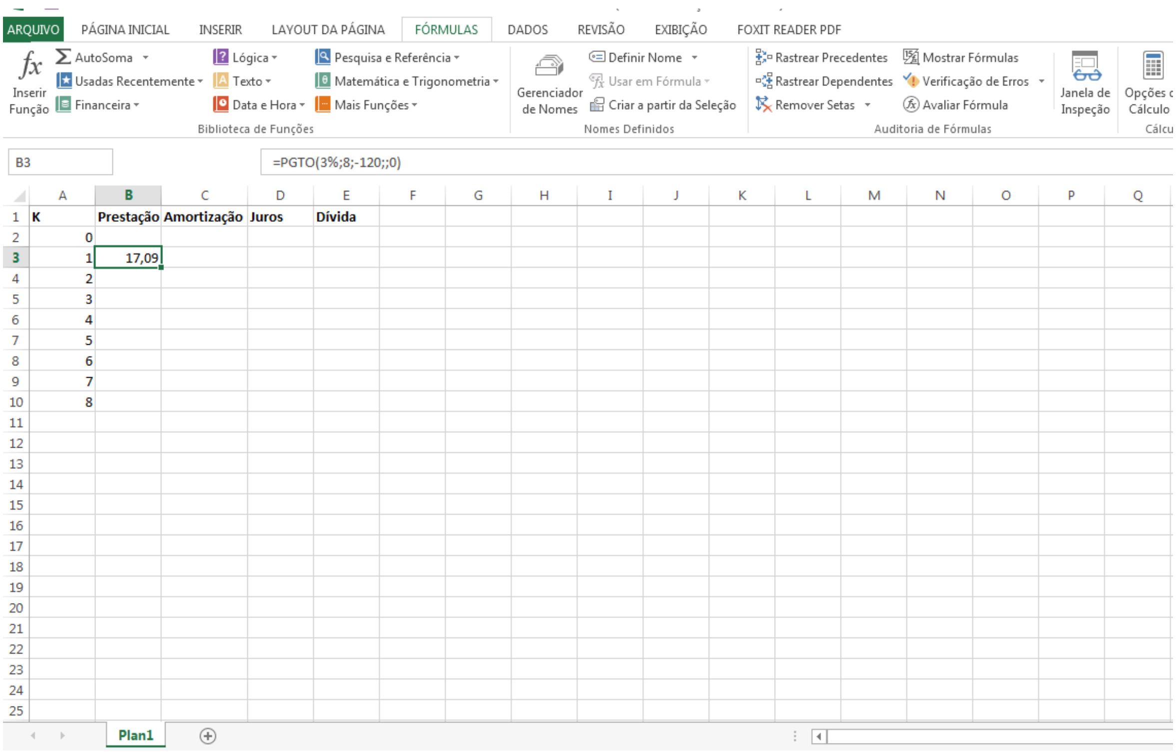


Figura 4.22: Planilha do Excel

2°) No período “zero”, que corresponde ao momento inicial do financiamento, não há qualquer prestação a pagar, tendo em vista que a primeiro pagamento ou prestação será paga na data 1, então na célula E2 digitamos o valor da dívida, como mostra a seguir:

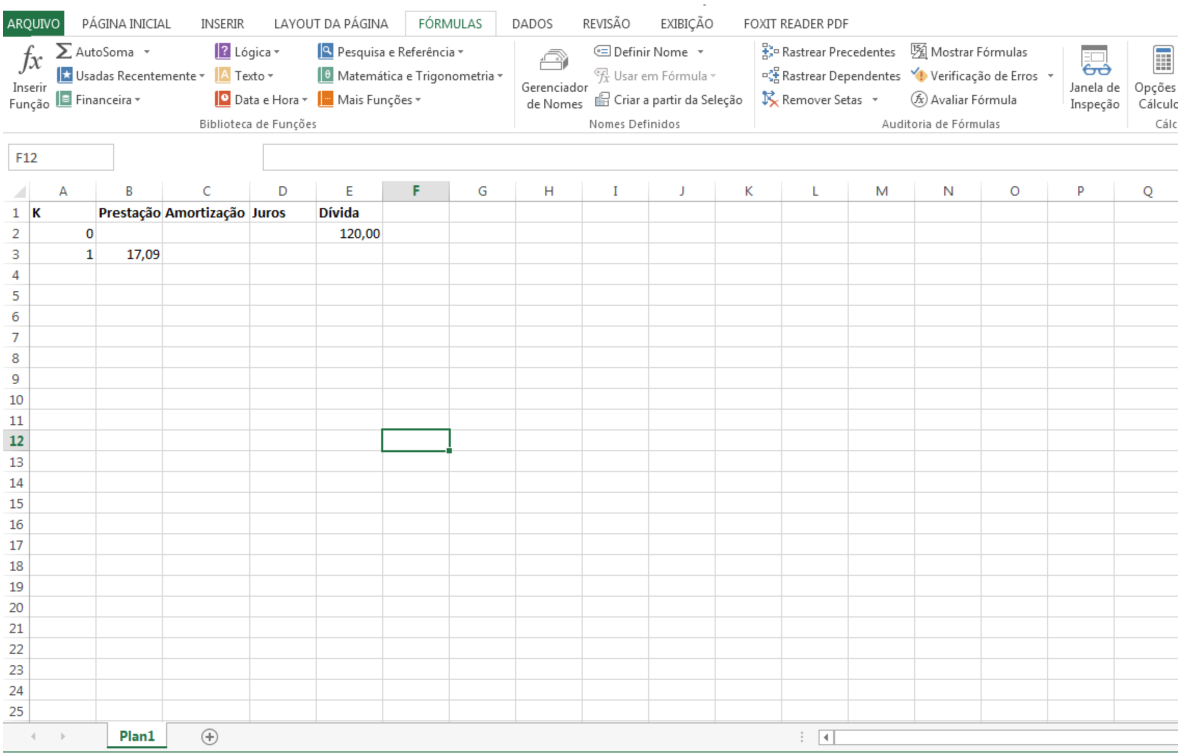


Figura 4.23: Planilha do Excel

3°) Agora vamos preencher a linha que corresponde ao primeiro período da planilha de amortização.

A célula de juros, D3, será determinada digitando =0,03*E2, assim:

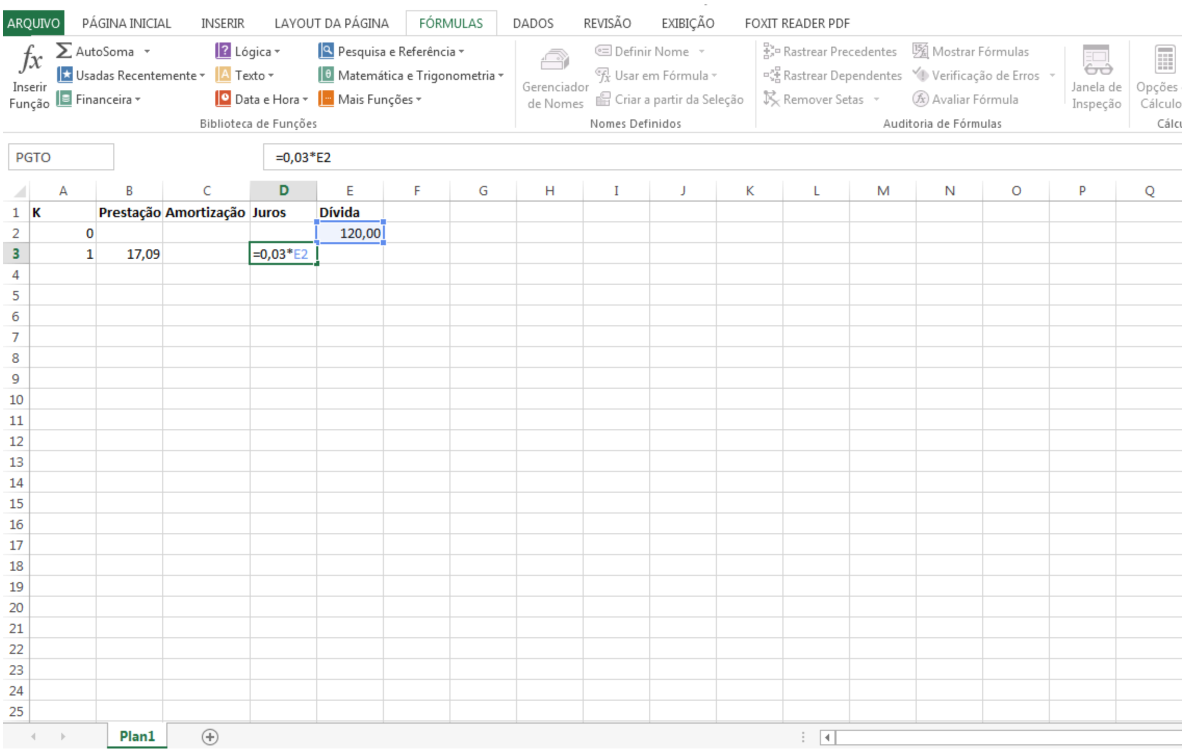


Figura 4.24 Planilha do Excel

Basta teclar ENTER, temos:

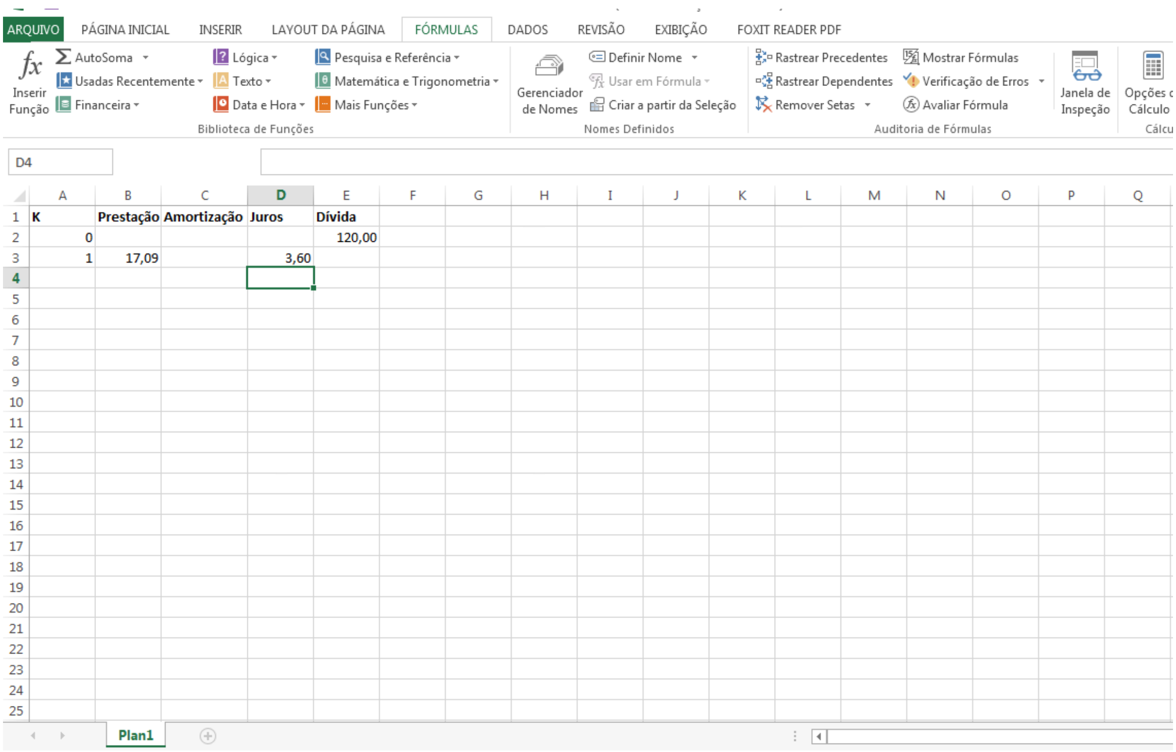


Figura 4.25: Planilha do Excel

O valor da amortização será determinado efetuando, na célula C3 digitando =B3-D3.

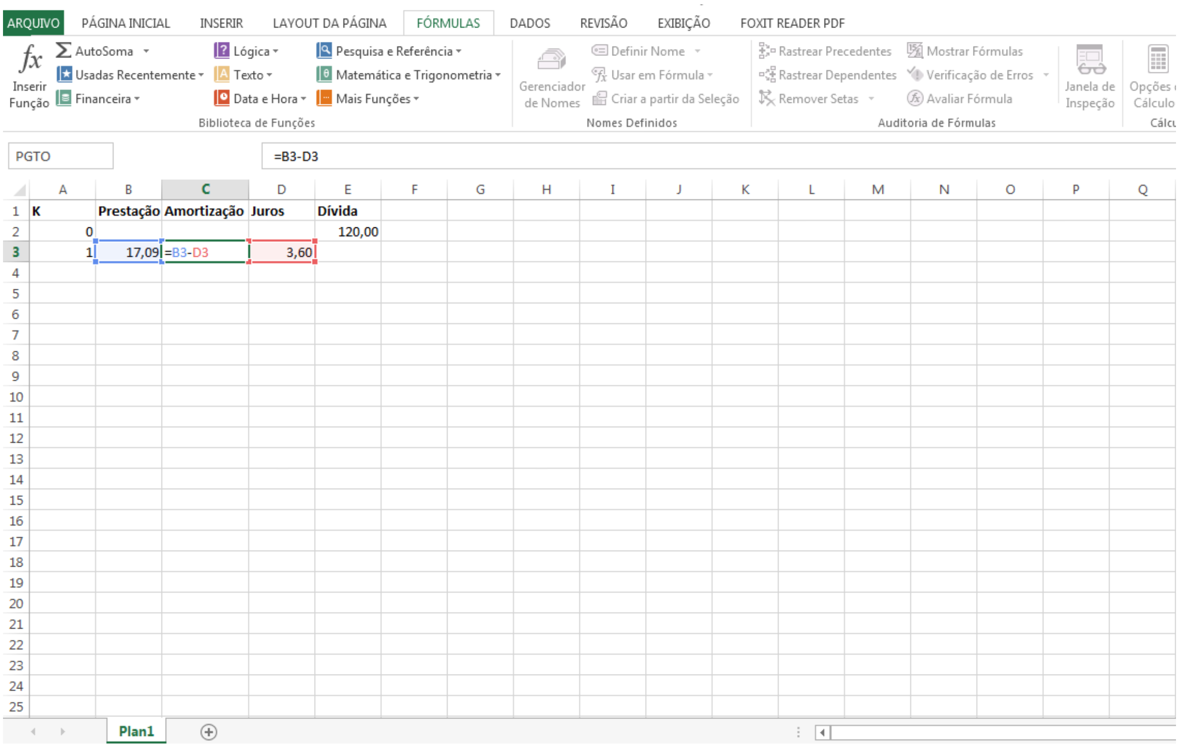


Figura 4.26: Planilha do Excel

Clicando ENTER, temos:

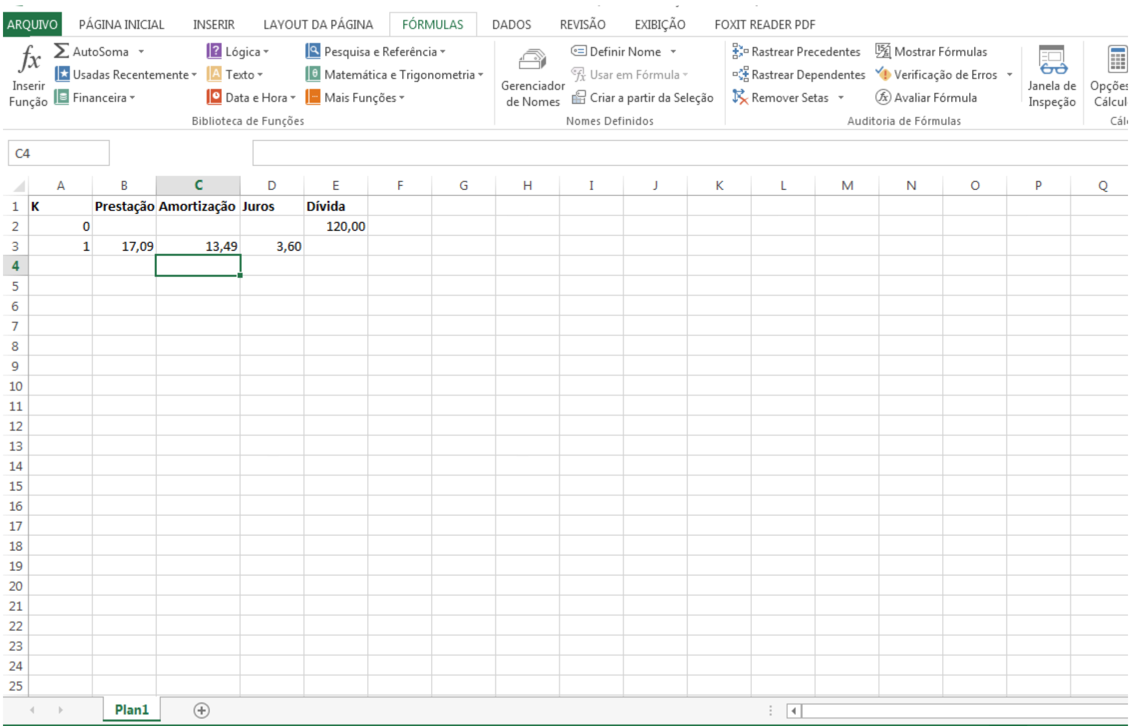


Figura 4.27: Planilha do Excel

Por fim devemos calcular o valor da dívida no pagamento 1. Este valor será colocado na célula E3 digitando =E2-C3.

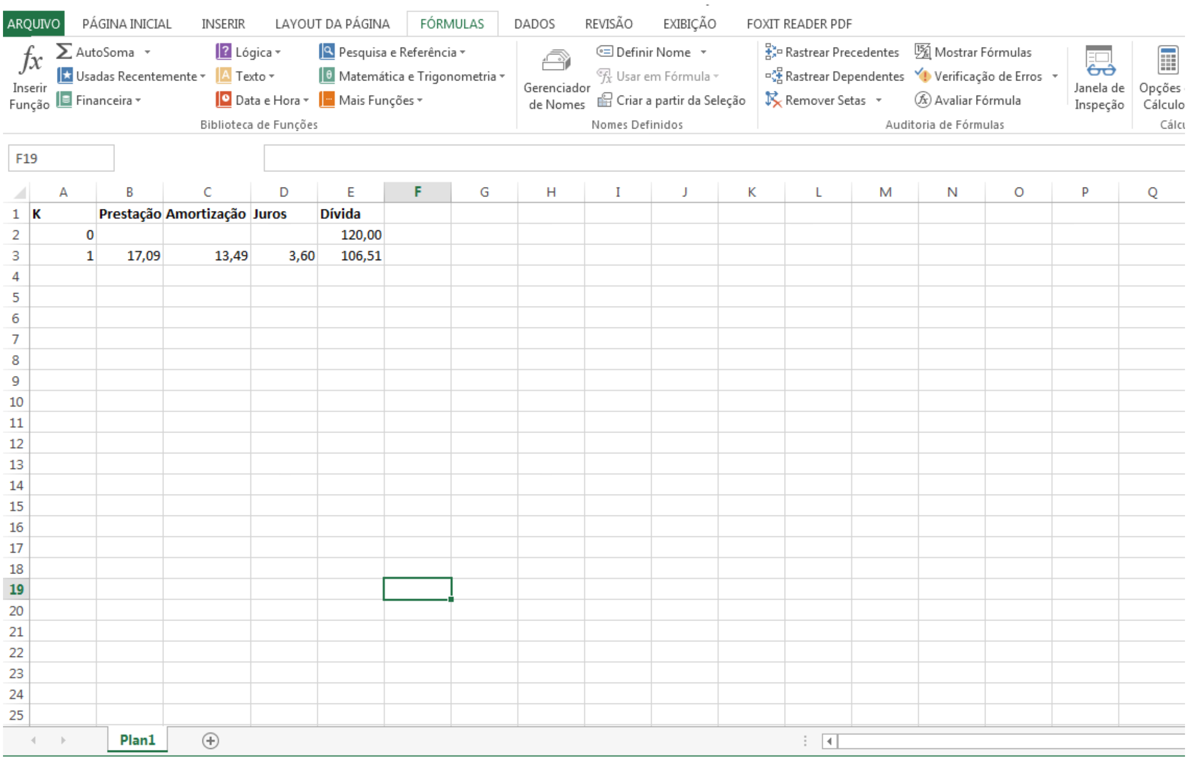


Figura 4.28: Planilha do Excel

Está determinada a primeira linha da planilha PRICE. O restante basta clicar nas quatro células preenchidas desta linha e puxar o cursor até a oitava linha no caso do problema dado.

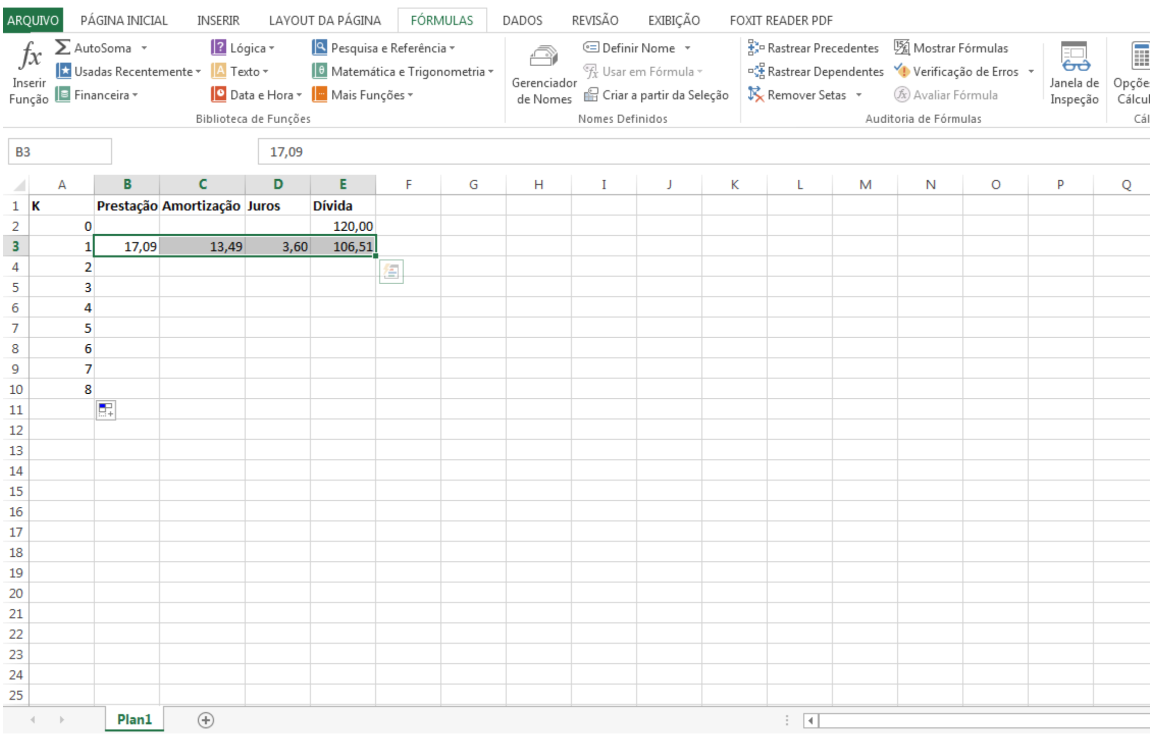
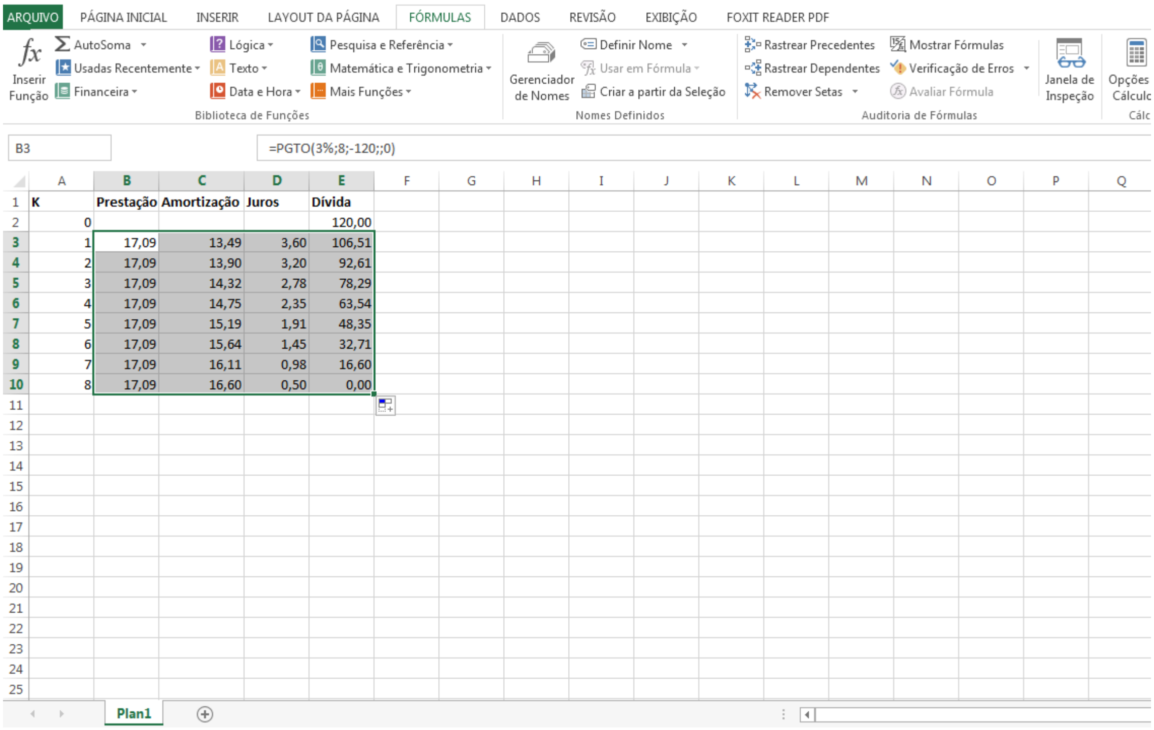


Figura 4.29: Planilha do Excel

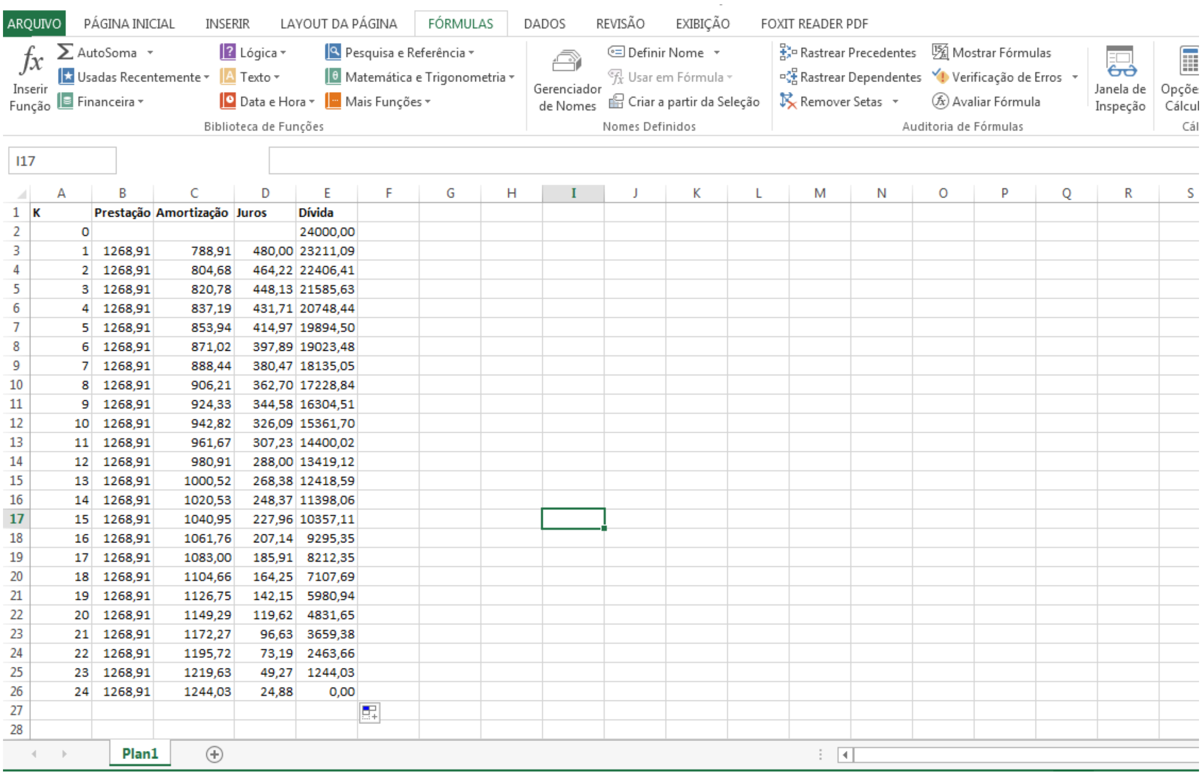


K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				120,00
1	17,09	13,49	3,60	106,51
2	17,09	13,90	3,20	92,61
3	17,09	14,32	2,78	78,29
4	17,09	14,75	2,35	63,54
5	17,09	15,19	1,91	48,35
6	17,09	15,64	1,45	32,71
7	17,09	16,11	0,98	16,60
8	17,09	16,60	0,50	0,00

Figura 4.30: Planilha do Excel

Seguindo os passos do problema 1, construa uma tabela no sistema de amortização pelo sistema PRICE no problema 2.

Problema 3.2 - Guilherme comprou um automóvel em 24 prestações iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra, cujo preço à vista era de R$ 24.000, 00. Se os juros são de 2% ao mês, construa uma tabela de amortização pelo sistema PRICE.



K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				24000,00
1	1268,91	788,91	480,00	23211,09
2	1268,91	804,68	464,22	22406,41
3	1268,91	820,78	448,13	21585,63
4	1268,91	837,19	431,71	20748,44
5	1268,91	853,94	414,97	19894,50
6	1268,91	871,02	397,89	19023,48
7	1268,91	888,44	380,47	18135,05
8	1268,91	906,21	362,70	17228,84
9	1268,91	924,33	344,58	16304,51
10	1268,91	942,82	326,09	15361,70
11	1268,91	961,67	307,23	14400,02
12	1268,91	980,91	288,00	13419,12
13	1268,91	1000,52	268,38	12418,59
14	1268,91	1020,53	248,37	11398,06
15	1268,91	1040,95	227,96	10357,11
16	1268,91	1061,76	207,14	9295,35
17	1268,91	1083,00	185,91	8212,35
18	1268,91	1104,66	164,25	7107,69
19	1268,91	1126,75	142,15	5980,94
20	1268,91	1149,29	119,62	4831,65
21	1268,91	1172,27	96,63	3659,38
22	1268,91	1195,72	73,19	2463,66
23	1268,91	1219,63	49,27	1244,03
24	1268,91	1244,03	24,88	0,00

Figura 4.31: Planilha do Excel

Avaliação da atividade

No desenvolvimento da atividade os alunos mostraram-se bastante motivados por se tratar de um tipo de financiamento mais frequente e apresentaram menos dificuldades no seu desenvolvimento por já terem adquirido certa maturidade após terem desenvolvido a atividade 2, portando, os alunos desenvolveram a atividade de forma satisfatória, com algumas dificuldades pontuais que foram sanadas pelo professor.

Após uma análise na planilha, vemos que neste sistema, é paga uma prestação constante, de forma que uma parcela da prestação paga os juros e a outra parcela amortiza parte do capital. A cada pagamento os juros diminuem e a quota amortizada aumenta, visto que os juros são calculados sobre o saldo devedor.

Explicamos que este sistema é utilizado em empréstimos pessoais, obtenção de eletrodomésticos, financiamento de veículos entre outros que possuem parcelas fixas.

Finalizando, propomos aos alunos que observassem que logo nas primeiras prestações são pagas grande parte de juros e as amortizações são menores, portanto é um sistema que não convém quitar, antes do término do financiamento.

Como conclusão, podemos notar que os alunos ficaram motivados e participaram de forma satisfatória da atividade.

CONCLUSÕES

A utilização de recursos tecnológicos em sala de aula é o grande desafio da atualidade, especialmente para os professores de Matemática, pois além do domínio das tecnologias exigem muita leitura e conhecimento teórico.

Quando proporcionamos ao aluno uma nova forma de aprendizagem, mostramos que ele pode realizar diversas ações com os recursos tecnológicos disponíveis, tornando as aulas mais atrativas e significativas e também úteis a realidade em que cada um vive, ou seja, tornando a matemática, uma ferramenta interessante para o nosso dia-a-dia; desmistificando a ideia de que tal disciplina seja apenas e tão somente algo que exista para tornar difícil a vida acadêmica.

A utilização de softwares para ensinar Matemática, sem dúvida, torna o ambiente favorável para a aprendizagem. O trabalho do professor deve ser planejado e motivador para o aluno, o que implica em uma aprendizagem desafiadora, fazendo com que o aluno possa pensar e partir de situações problemas do seu cotidiano, utilizando das diversas ferramentas disponíveis por meio das tecnologias, para a resolução do problema proposto.

A Educação Financeira, aplicada aos diversos ramos da atividade econômica representa um importante instrumento para auxiliar nas tomadas de decisões de ordem pessoal. Assim, o aprendizado de Matemática Financeira proporciona ao cidadão a possibilidade de compreensão e escolha adequada em caso de análise de suas dívidas, financiamentos, juros, dentre outros.

O Excel, como ferramenta proposta no desenvolvimento deste trabalho, mostra de maneira eficiente, uma ferramenta útil para as aulas de Matemática e inserção na sala de aula; desde que bem planejada pelo professor. Pois, a tecnologia sendo uma realidade nas escolas proporciona aos alunos um novo e interessante ambiente de aprendizagem, visto que os alunos se interessam pelo novo.

O desenvolvimento das atividades com o Excel foi satisfatória em nossa análise, pois os alunos mostraram-se motivados e aprenderam de forma significativa durante o processo, mesmo aqueles que apresentavam dificuldades com a Matemática. Isso porque, tais atividades práticas, permitiram que eles compreendessem os principais tipos de financiamentos para tomadas de decisões de maneira racional, podendo identificar quanto estão pagando de juros durante um período de financiamento através das tabelas de amortizações, por exemplo.

Para o desenvolvimento deste trabalho, nos propusemos a estudar sobre a Educação Financeira no Ensino Médio. O estudo começou a partir do Mestrado PROFMAT, com o estudo da disciplina Matemática Discreta (MA12), posteriormente com pesquisas nos livros indicados pelo programa e textos disponíveis na internet.

Durante o desenvolvimento do presente trabalho, não tivemos a intensão de direcionar ao estudo aprofundado da Matemática Financeira, tal qual ocorre em cursos de Administração, Contabilidade e Economia, mas proporcionar ao aluno do Ensino Médio a oportunidade de aprender o suficiente acerca desse tema e produzir um material que poderá servir para outros professores.

Vale considerar inclusive que, a princípio, a intenção seria desenvolver um trabalho direcionado ao estudo das probabilidades. No entanto, após notar a importância da Matemática Financeira e suas aplicações para os estudos do Ensino Médio, surgiu o interesse pelo desenvolvimento do presente trabalho, voltado a facilitar o aprendizado dos alunos em um conteúdo tão importante quanto a Matemática Financeira, utilizando para tanto recursos acessíveis, tais como as planilhas do Excel.

Nesse contexto, para trabalhos a serem desenvolvidos futuramente, persiste o interesse na utilização da calculadora HP no estudo da Matemática Financeira, e a trabalhos, também voltados ao Ensino Médio, que tragam como tema inclusive o Estudo das Probabilidades, tal como pensado anteriormente.

REFERÊNCIAS

[1] ARAÚJO, Regina Magna Bonifácio de. Alfabetização econômica: compromisso social na educação das crianças. São Bernardo do Campo: Universidade Metodista de São Paulo, 2009.

[2] BRASIL, ENEF. Estratégia Nacional de Educação Financeira. Disponível em < http://www.vidaedinheiro.gov.br/pagina-23-no-brasil.html> acesso em 12/01/2016.

[3] BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, 20 de dezembro de 1996. Brasília: Governo Federal, 1996.

[4] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio. Brasília: MEC, 2000.

[5] GONÇALVES, Jean Piton. A História da Matemática Comercial e Financeira. Disponível em <www.somatematica.com.br/historia/mattinanceira> acesso em 10/12/2015.

[6] LEITE, Iani Dias Lauer. Correlatos Valorativos do Significado do Dinheiro para Crianças. 2009, 194p. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Pará. Belém, Pará.

[7] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E. MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio. Vol. 2, 6a edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[8] MORGADO, Augusto César. Progressões e Matemática Financeira. Rio de Janeiro: SBM, 5. ed., 2010.

[9] MORGADO, Augusto César. Matemática Discreta. Coleção PROFMAT. Augusto Cesar Morgado, Paulo Cesar Pinto Carvalho, 1ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[10] MORGADO, Augusto César. Vídeo aula do PAPMEM. Disponível em <.www.youtube.com/watch?v=Bn1_6QNgCg4> acesso em 05/01/2016.

[11] PARENTE, Eduardo. (2001) Curso de Matemática Comercial e Financeira. 2. Ed. São Paulo: Moderna.

[12] SAITO, Andre Taue. Uma contribuição ao desenvolvimento da educação em finanças pessoais no Brasil. 2007, 152p. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, São Paulo.

[13] SP. Caderno do Professor: 1ª Ensino Médio: vol.1. São Paulo: Governo do Estado de São Paulo, 2014.

[14] SOUZA, Almir Ferreira de; TORRALVO, Caio Fragata. Aprenda a administrar o próprio dinheiro: coloque em prática o planejamento financeiro pessoal e viva com mais liberdade. São Paulo: Saraiva, 2008.

[15] FISCHER, R. Introdução à informática educativa. São Paulo: Universitária, 2001.

ANEXO I

Atividade 1- Calculando juros e Pagamentos

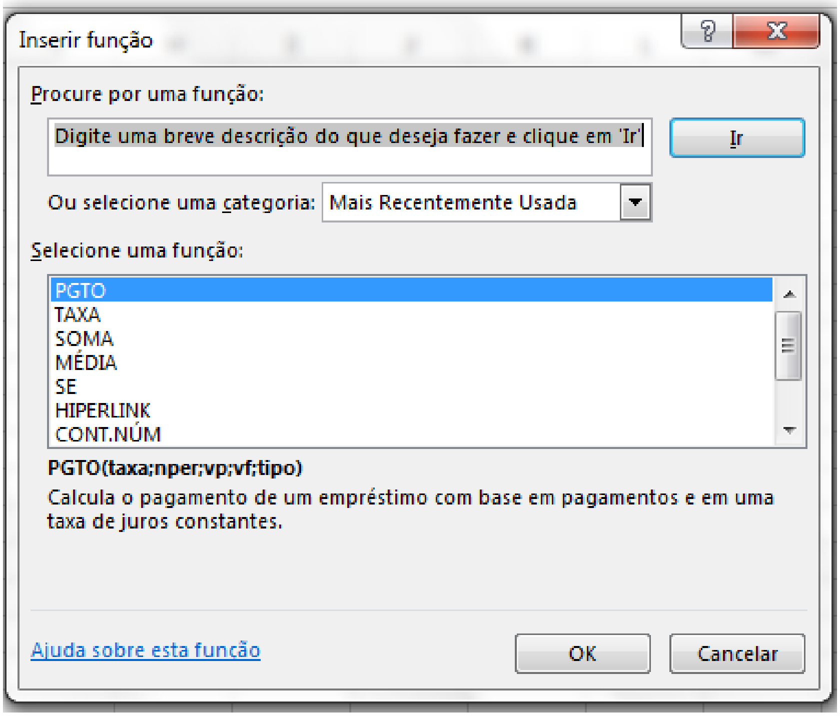
Problema 1.1 - Paulo deseja comprar um refrigerador, verificou em determinada loja o anuncio a seguir:

Paulo não tem condições financeiras de efetuar o pagamento à vista, mas tem a possibilidade de realizar um empréstimo consignado com taxas de juros de 2% ao mês. Com base nas informações do texto apresentado e utilizando a planilha do Excel responda as questões:

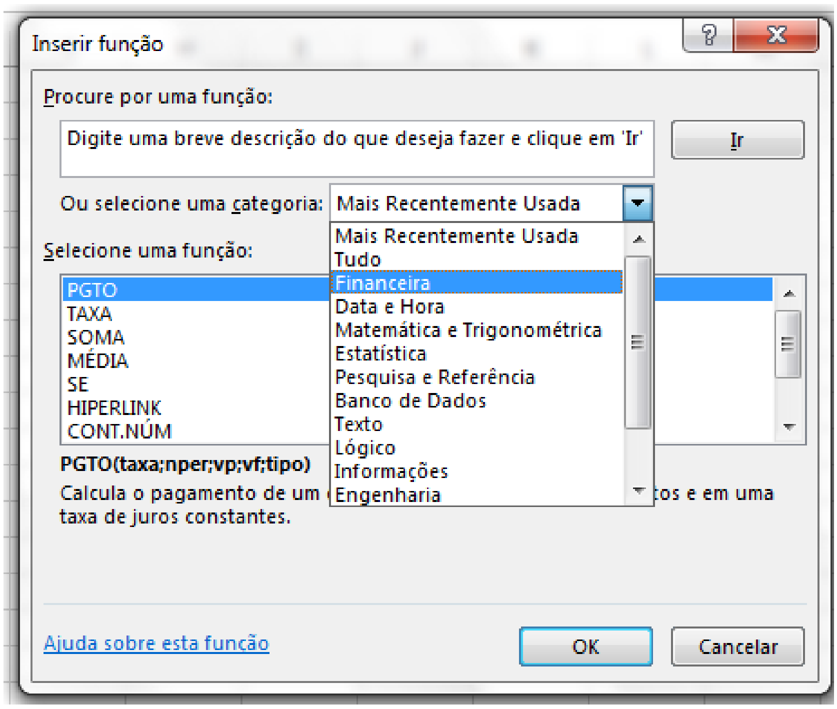
a) Qual a taxa de juros cobrado pela loja no parcelamento em 18 vezes?
b) Se Paulo tomar o empréstimo consignado também em 18 vezes, qual o valor da parcela mensal?
c) Qual a melhor opção de financiamento para Paulo?

Orientação para realização da atividade:

a) Na planilha do Excel clicar em fórmulas e em seguida na tecla do menu f_x, com esta operação aparecera a tela:



Clique na seta à direta de “Mais Recentes Usada” e clique em Financeira, como mostra a tela a seguir.



Em seguida selecione a função TAXA e clique OK.

Aparecerá a caixa de diálogo e será necessário preencher com os dados dos problemas.

Nper: número total de pagamentos;

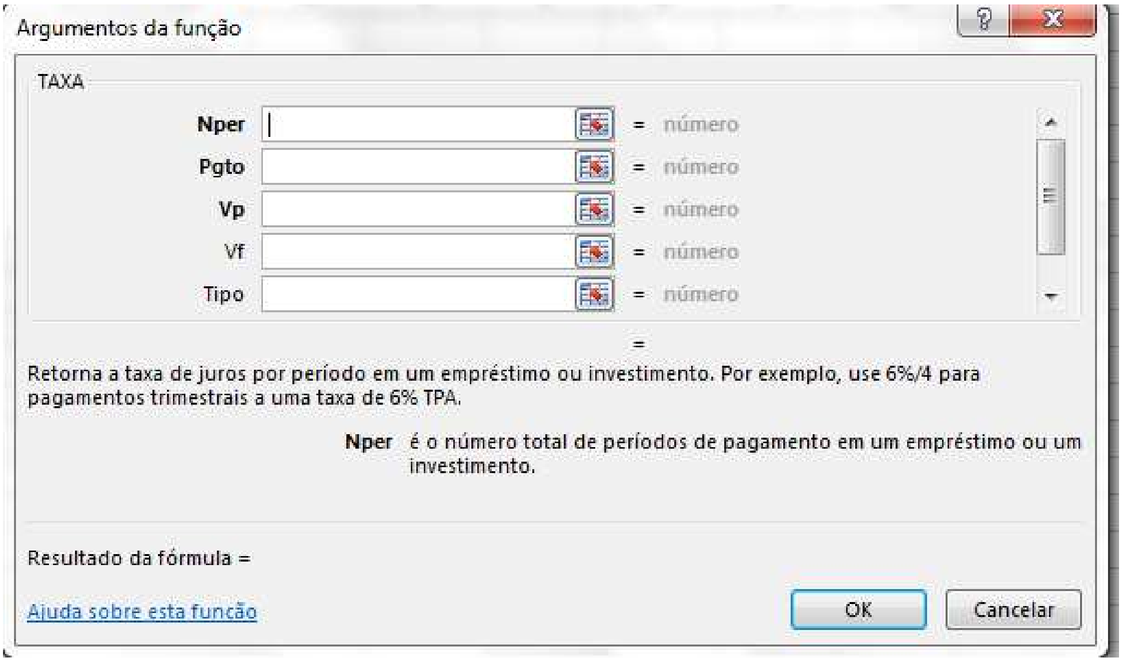
Pgto: valor das prestações;

Vp: valor presente, com sinal contrário ao do pagamento. Se Vp é preenchido Vf deve ficar em branco.

Vf: valor futuro, com sinal contrário ao pagamento. Se Vf é preenchido Vp deve ficar em branco.

Tipo: é o número 0 ou 1, conforme pagamentos sejam postecipados ou antecipados. Se for deixado em branco, o Excel assumirá 0, considerando pagamentos postecipados.

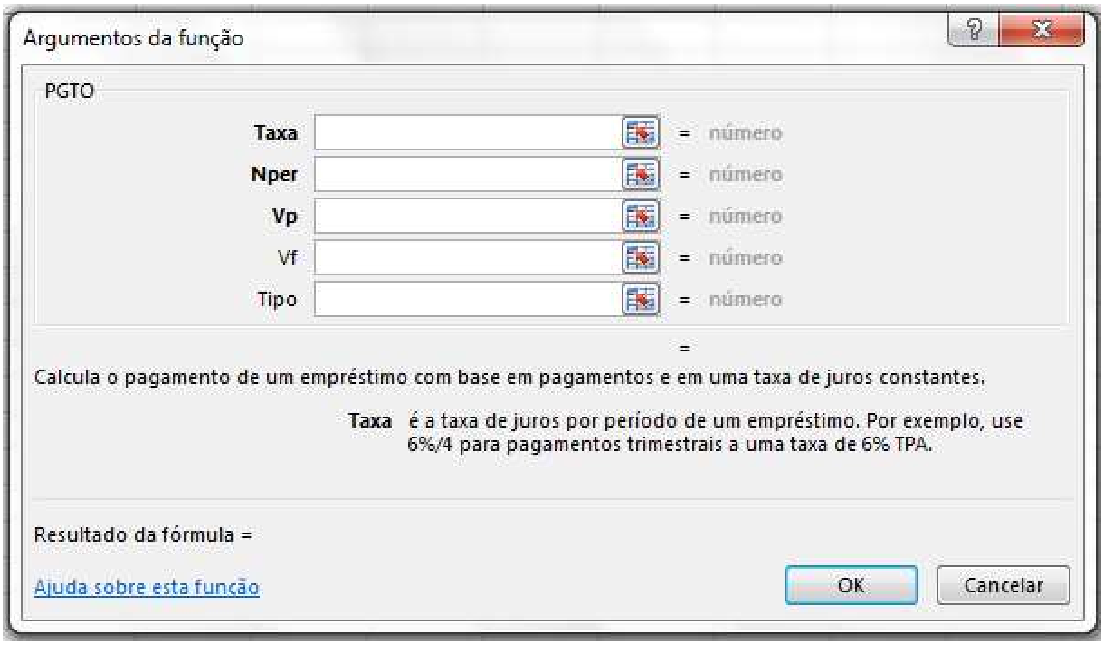
Observação: O Excel trabalha com a "lógica do contador", na qual os pagamentos e os recebimentos devem ter sinais contrários, <u>logo se o valor das prestações é **positivo**, o valor presente obrigatoriamente deve ser **negativo.**</u>



Portanto, a taxa de juros cobrado pela loja é de aproximadamente _______ ao mês.

b) Na planilha do Excel clicar em fórmulas e em seguida na tecla do menu f_x. Clique na seta à direta de "Mais Recentes Usada" e clique em Financeira. Em seguida selecione a função PGTO e clique OK. **(Lembre-se que o valor presente vp deve ser negativo)**

Aparecerá a caixa de diálogo e será necessário preencher com os dados dos problemas.

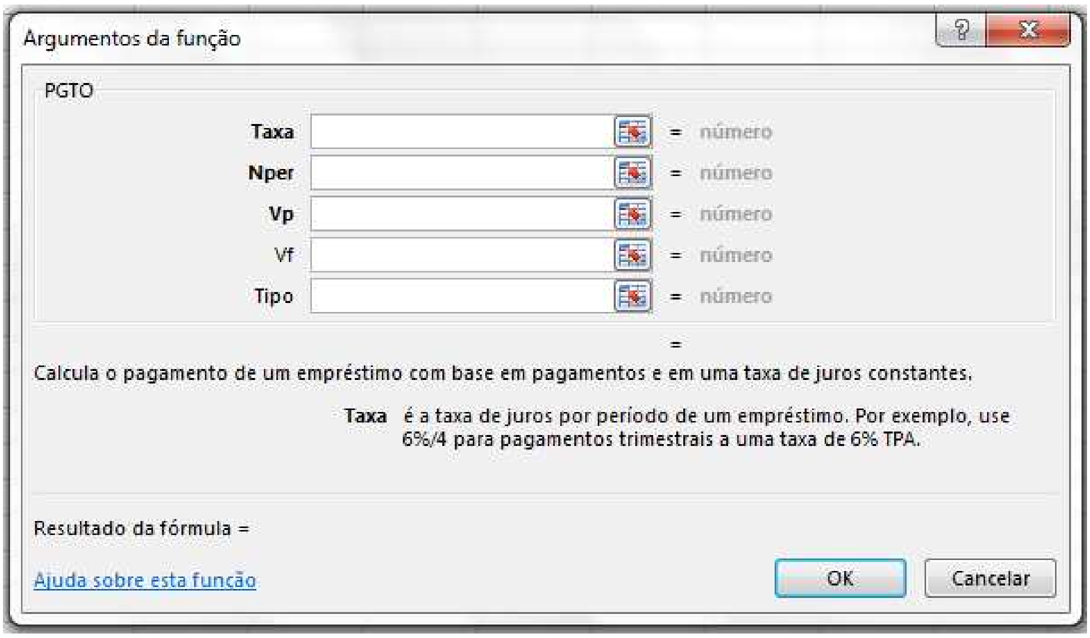


Logo, se Paulo tomar o empréstimo consignado para pagar à vista o refrigerador na loja sua parcela mensal será de R$ _____________.

c) Para Paulo é mais vantajoso _________________________ pelas condições apresentadas, pois terá um economia mensal de R$ ______________.

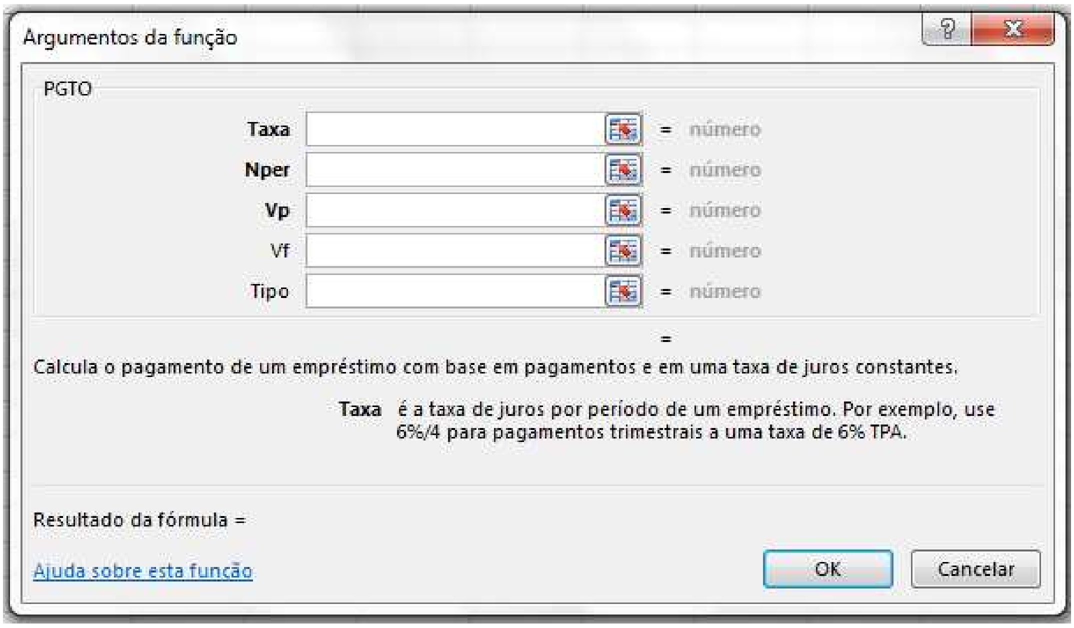
Observando as orientações para resolver o Problema 1.1, resolva os demais problemas:

Problema 1.2 - Um liquidificador custa R$ 120,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 3% ao mês, determine o valor das prestações.



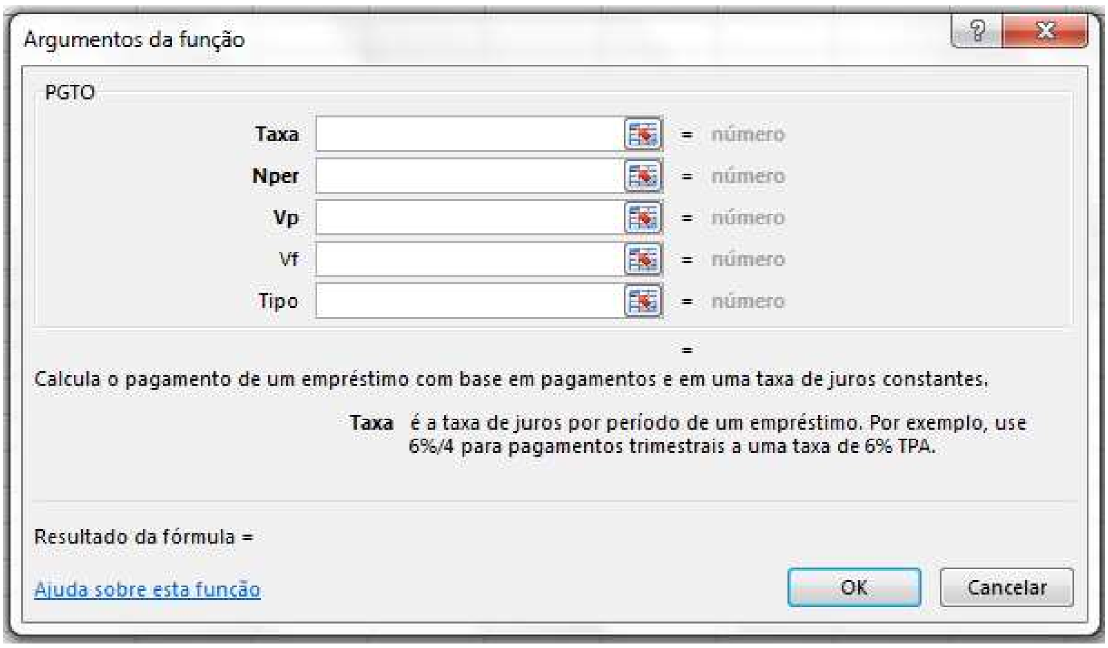
Resposta:

Problema 1.3 - Um liquidificador custa R$ 120,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga no ato da a compra. Se os juros são de 3% ao mês, determine o valor das prestações.



Resposta:

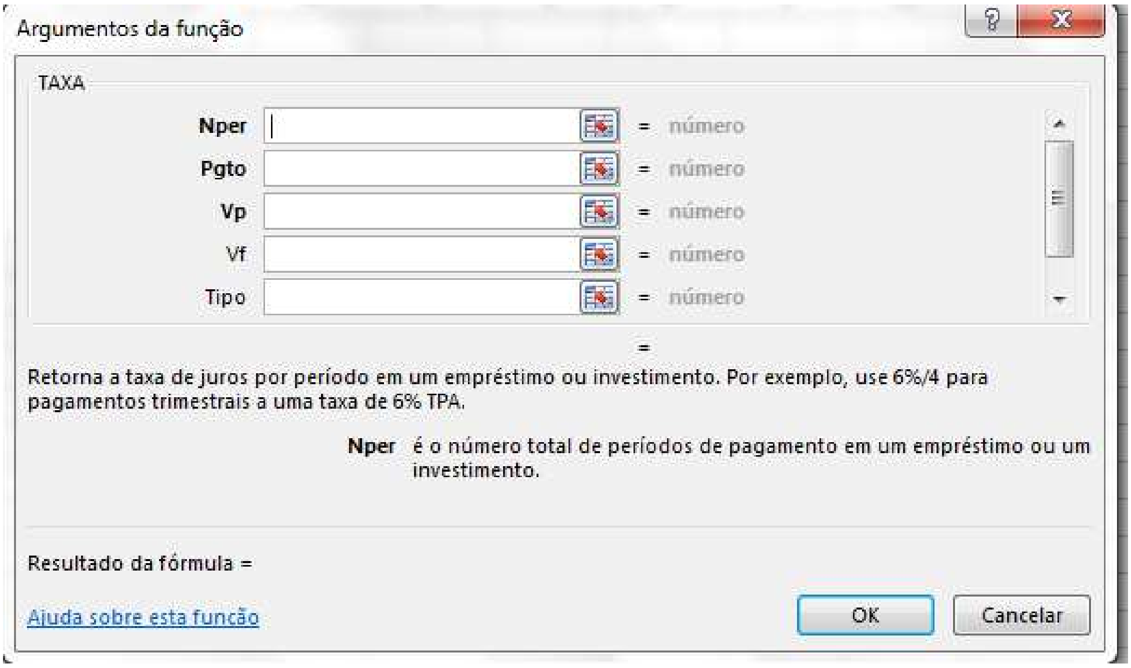
Problema 1.4 - Guilherme comprou um automóvel em 24 prestações iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra, cujo preço à vista era de R$ 24000, 00. Se os juros são de 2% ao mês, determine o valor das prestações.



Resposta:

Problema 1.5 - Calcule a taxa de juros cobrada no anuncio a seguir no pagamento parcelado.

Observe que os pagamentos são postecipados, ou seja, um mês após a compra (0+23 mensais)



Resposta:

ANEXO II

Atividade 2 - Sistemas de Amortização pelo SAC – Sistema de Amortização constante

As principais características desse sistema são:

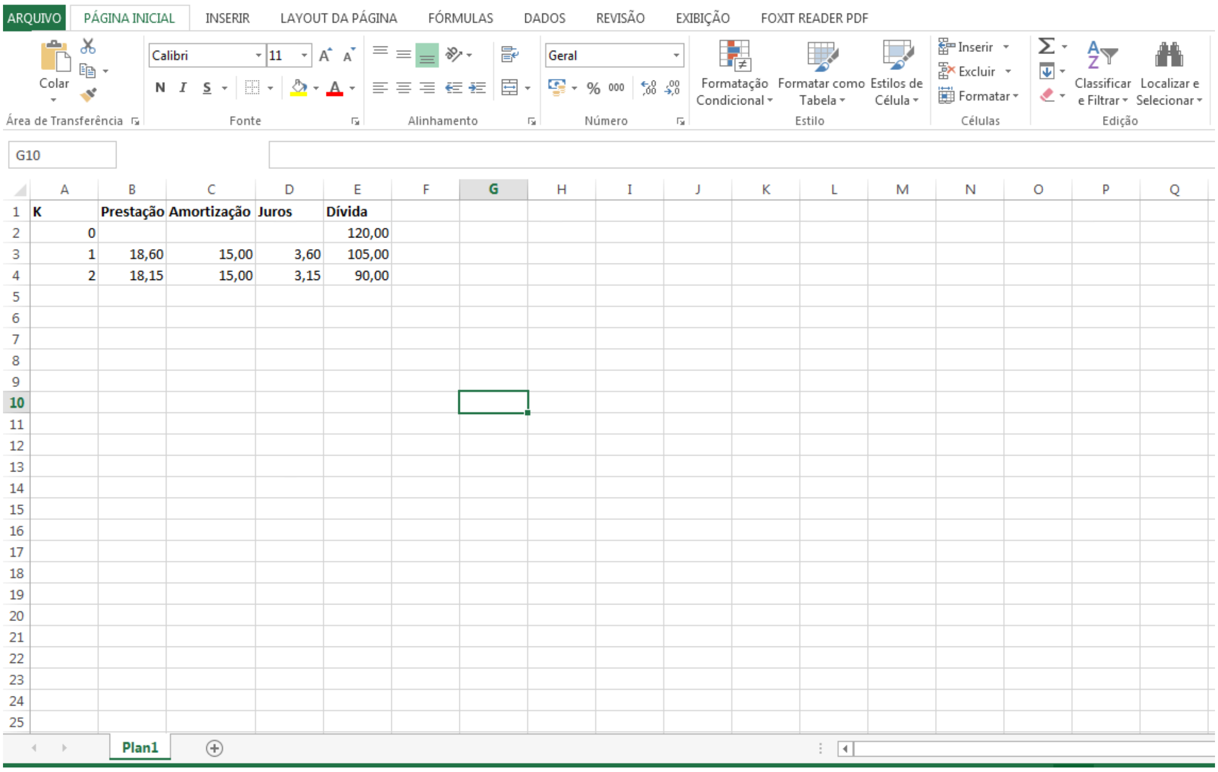
- As amortizações são constantes;
- Os valores das prestações e dos juros vão diminuindo ao longo do período.

Observe a resolução do problema 2.1 e em seguida reproduza a mesma na planilha do Excel.

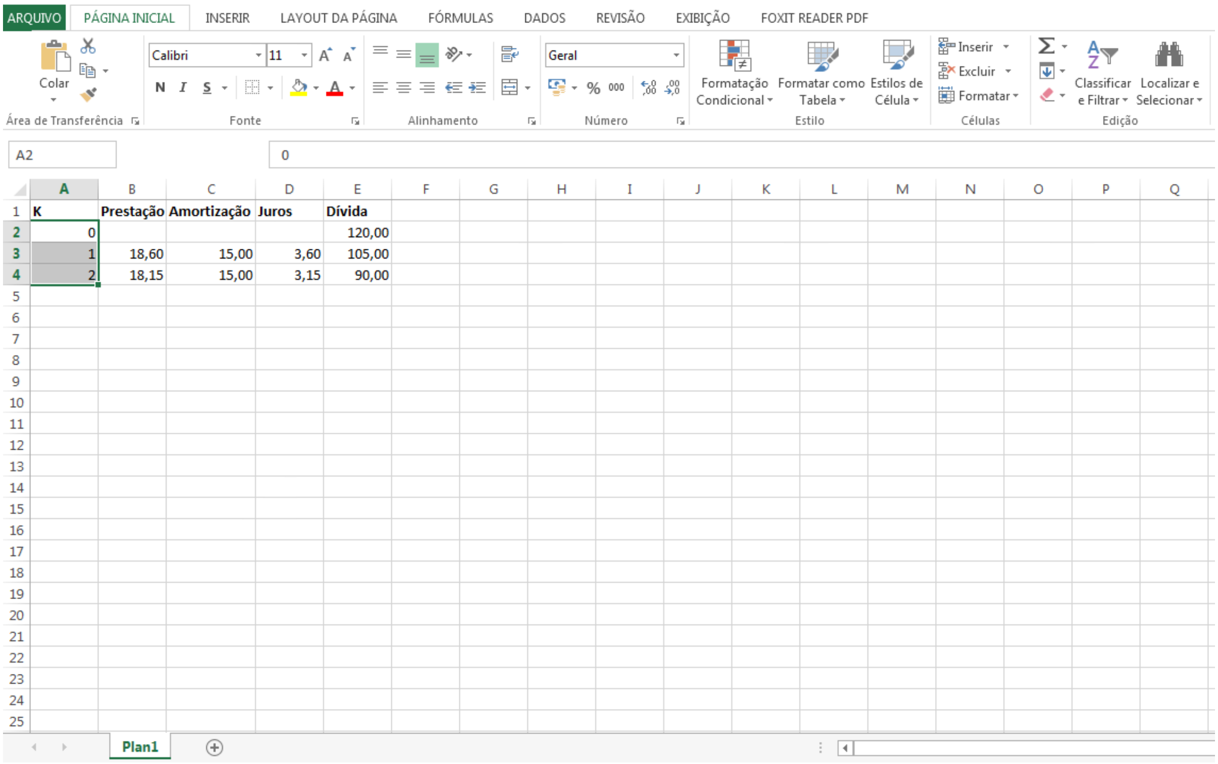
Problema 2.1 - Um liquidificador custa R$ 120,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 3% ao mês, construa uma planilha de amortização pelo sistema SAC.

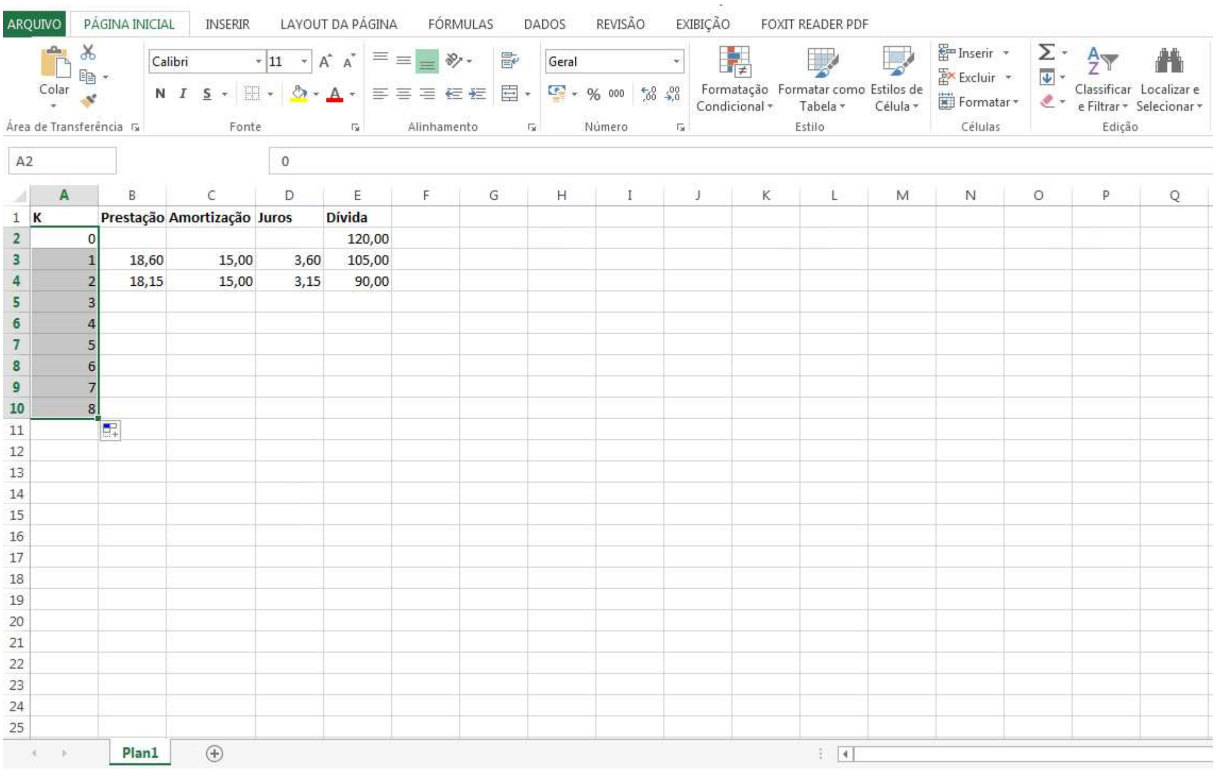
Resolução: Primeiramente devemos construir as primeiras linhas da tabela. Usaremos as colunas A, B, C, D e E para, quantidade de pagamentos (K), prestação, amortização, juros e dívida, respectivamente

A amortização é constante, igual a 120/8=15, logo a dívida cai 15 por mês. Portanto os valores iniciais da coluna da dívida são 120, 105, 90. Cada parcela de juros é 3% da dívida no mês anterior. Assim as prestações é a soma da amortização com os juros. Daí temos:

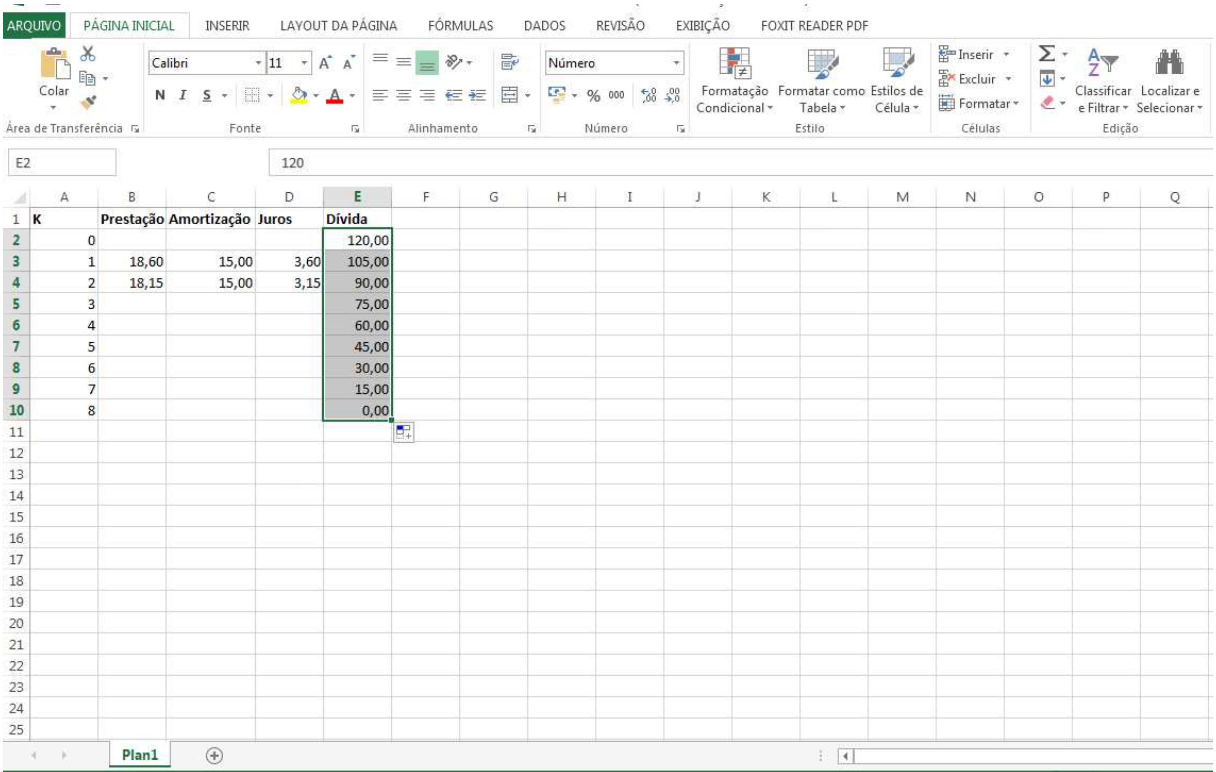


Como no SAC, as colunas formam uma progressão aritmética, basta marcar as colunas e arrastar o mouse para baixo, depois de ter posicionado o mouse no canto direito inferior, como mostra nas ilustrações a seguir:

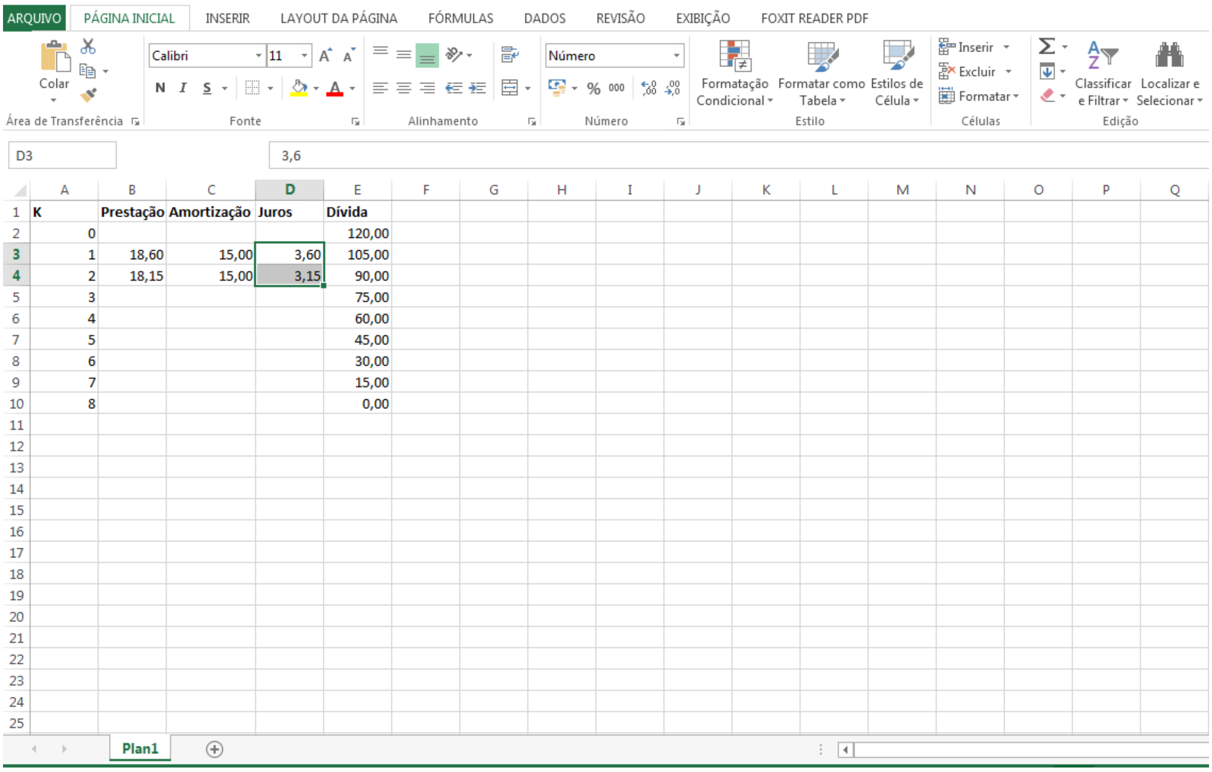




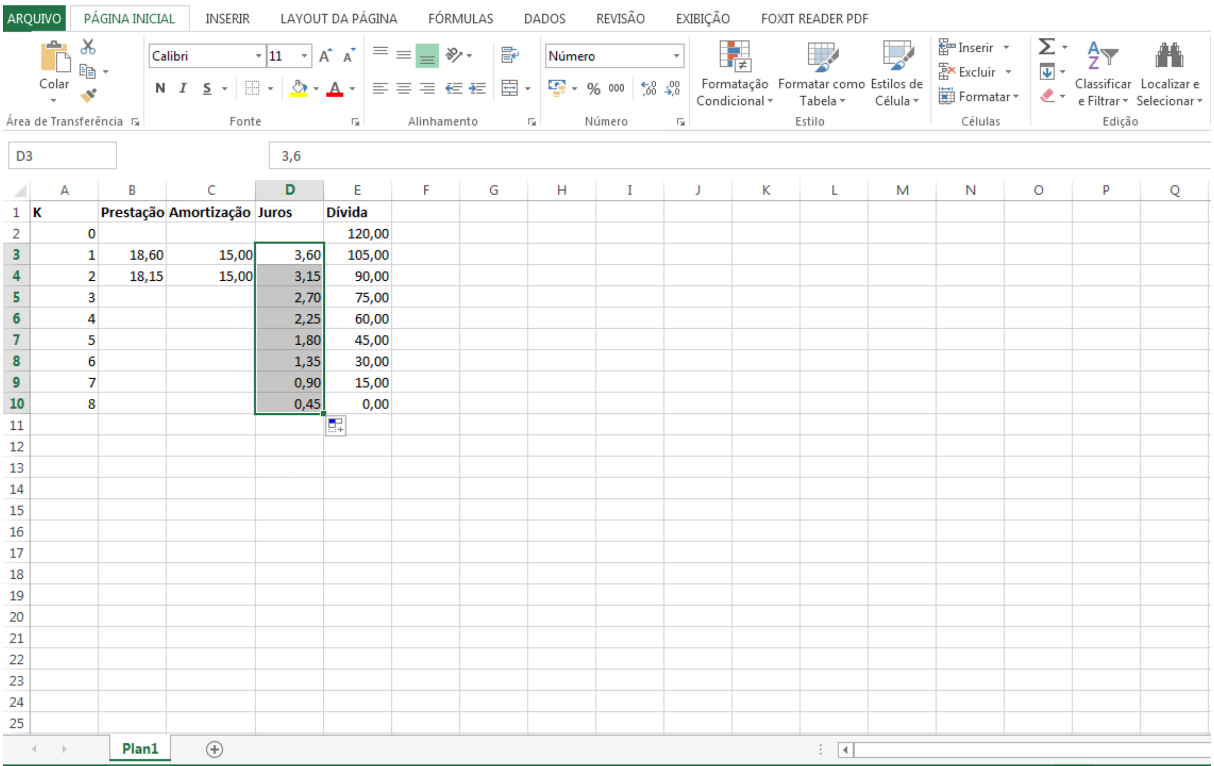
K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				120,00
1	18,60	15,00	3,60	105,00
2	18,15	15,00	3,15	90,00
3				
4				
5				
6				
7				
8				



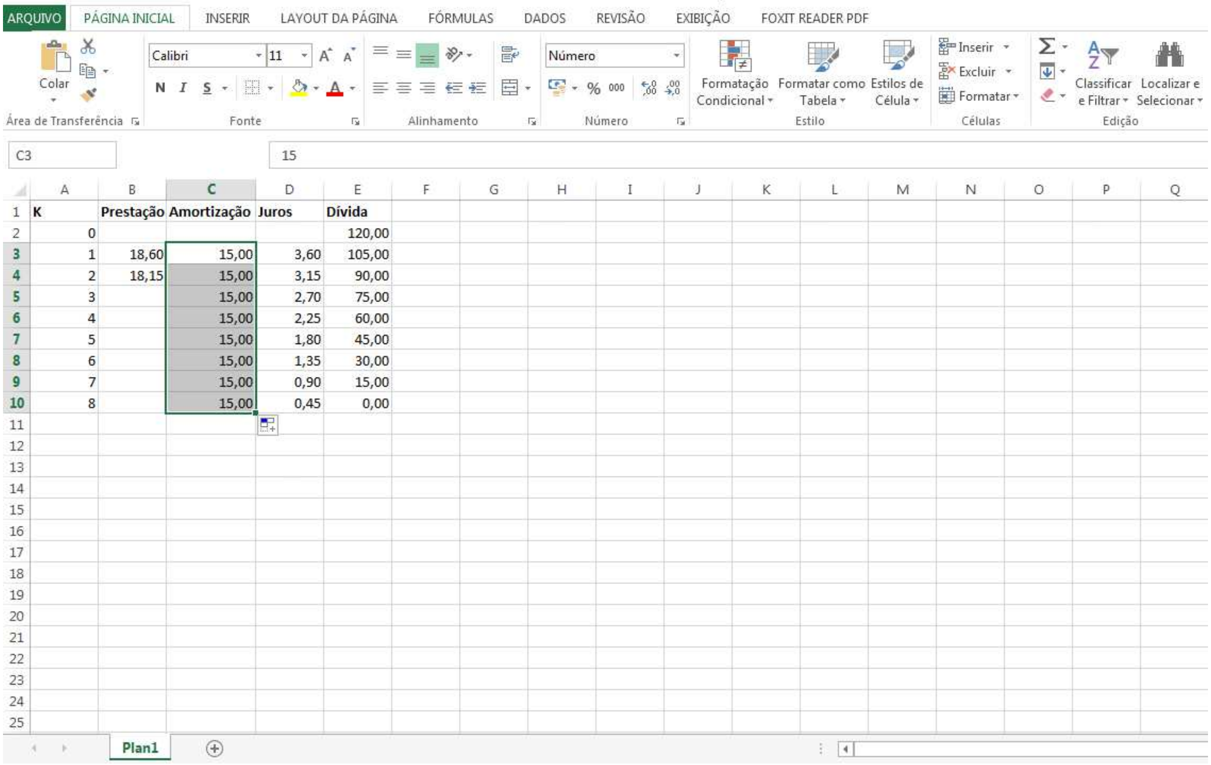
K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				120,00
1	18,60	15,00	3,60	105,00
2	18,15	15,00	3,15	90,00
3				75,00
4				60,00
5				45,00
6				30,00
7				15,00
8				0,00



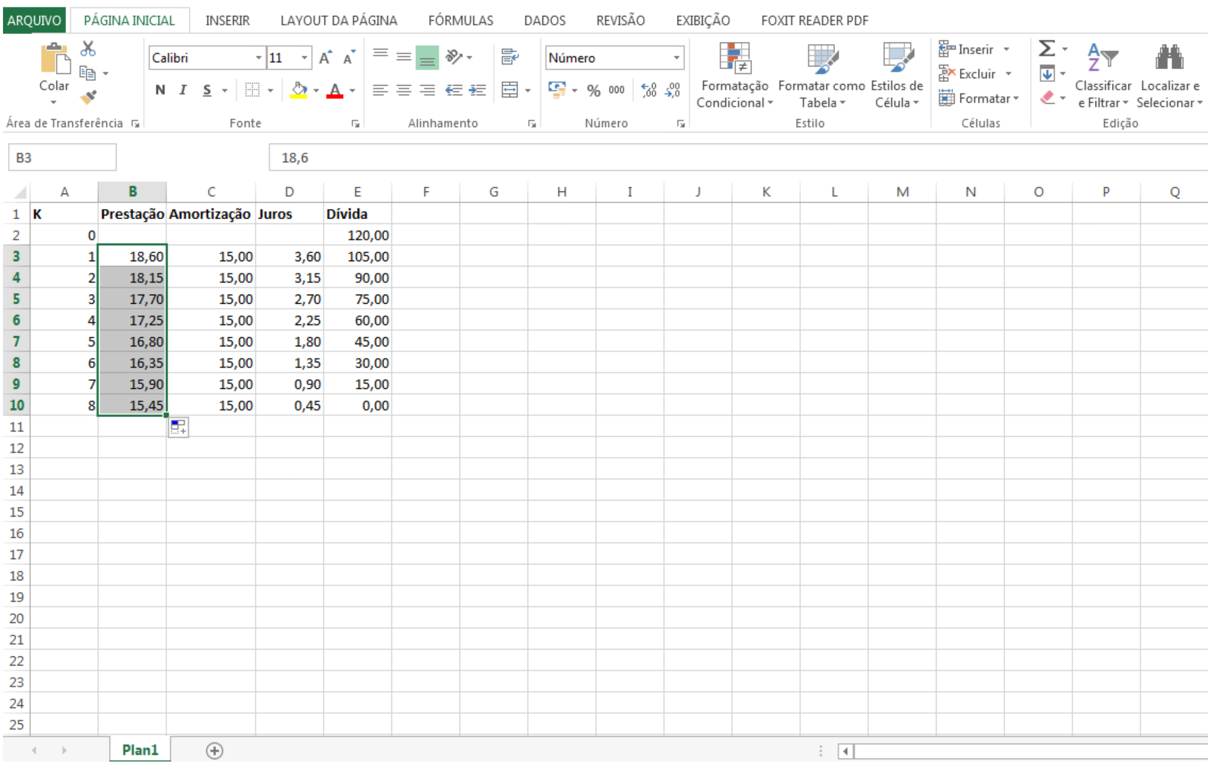
K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				120,00
1	18,60	15,00	3,60	105,00
2	18,15	15,00	3,15	90,00
3				75,00
4				60,00
5				45,00
6				30,00
7				15,00
8				0,00



K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				120,00
1	18,60	15,00	3,60	105,00
2	18,15	15,00	3,15	90,00
3			2,70	75,00
4			2,25	60,00
5			1,80	45,00
6			1,35	30,00
7			0,90	15,00
8			0,45	0,00



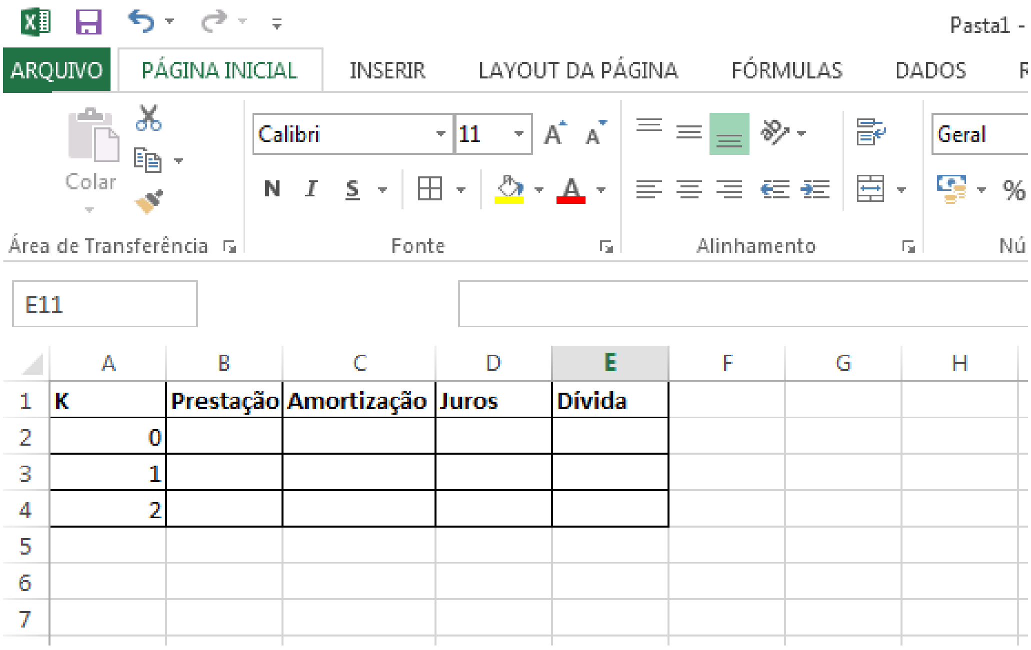
K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				120,00
1	18,60	15,00	3,60	105,00
2	18,15	15,00	3,15	90,00
3		15,00	2,70	75,00
4		15,00	2,25	60,00
5		15,00	1,80	45,00
6		15,00	1,35	30,00
7		15,00	0,90	15,00
8		15,00	0,45	0,00



K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				120,00
1	18,60	15,00	3,60	105,00
2	18,15	15,00	3,15	90,00
3	17,70	15,00	2,70	75,00
4	17,25	15,00	2,25	60,00
5	16,80	15,00	1,80	45,00
6	16,35	15,00	1,35	30,00
7	15,90	15,00	0,90	15,00
8	15,45	15,00	0,45	0,00

Seguindo os passos do problema 2.1, construa uma tabela no sistema de amortização pelo sistema SAC no problema 2.2 a seguir:

Problema 2.2 - Guilherme comprou um automóvel em 24 prestações iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra, cujo preço à vista era de R$ 24.000, 00. Se os juros são de 2% ao mês, construa uma tabela de amortização pelo sistema SAC.
Observação: Antes de iniciar a construção da tabela no Excel, utilizando uma calculadora, preencha as primeiras linhas da tabela a seguir:



K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				
1				
2				

ANEXO III

Atividade 3 - Sistema de Amortização Francês ou Sistema Price

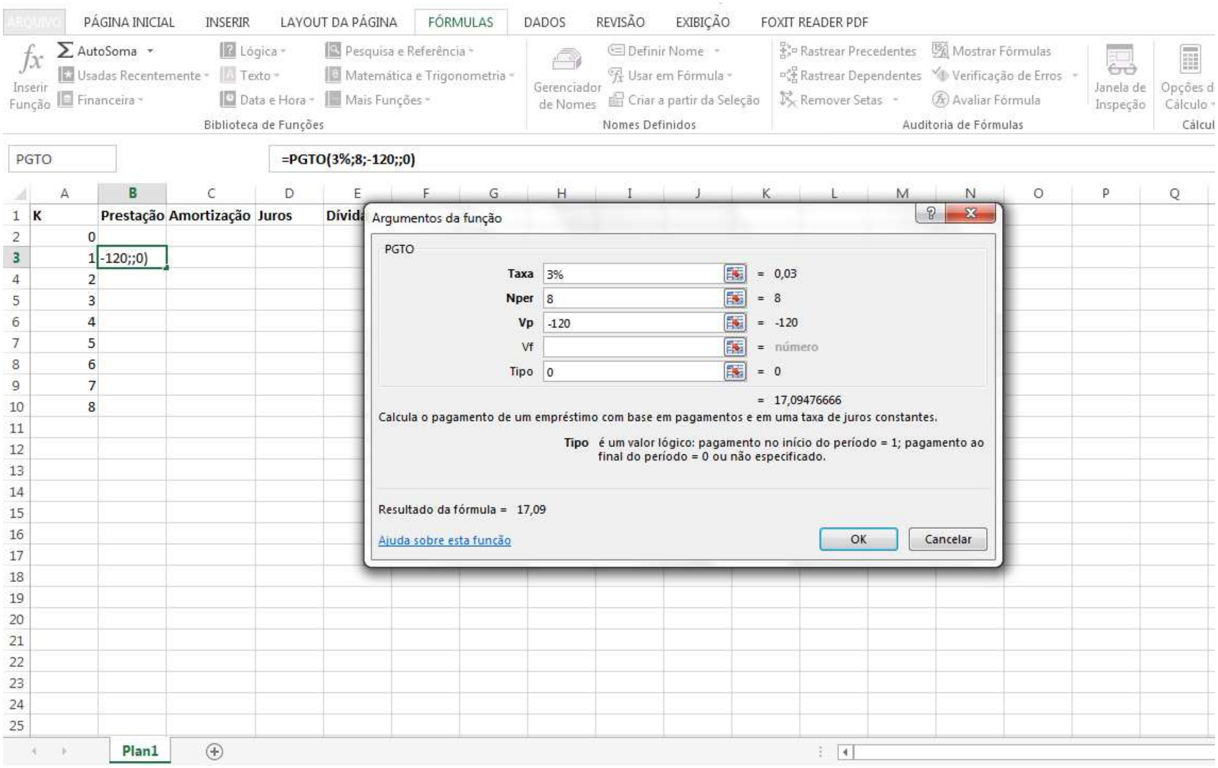
Este sistema é também conhecido como Tabela Price. As principais características desse sistema são:

- Os pagamentos são constantes;
- O valor das amortizações é crescente;
- O valor dos juros é decrescente.

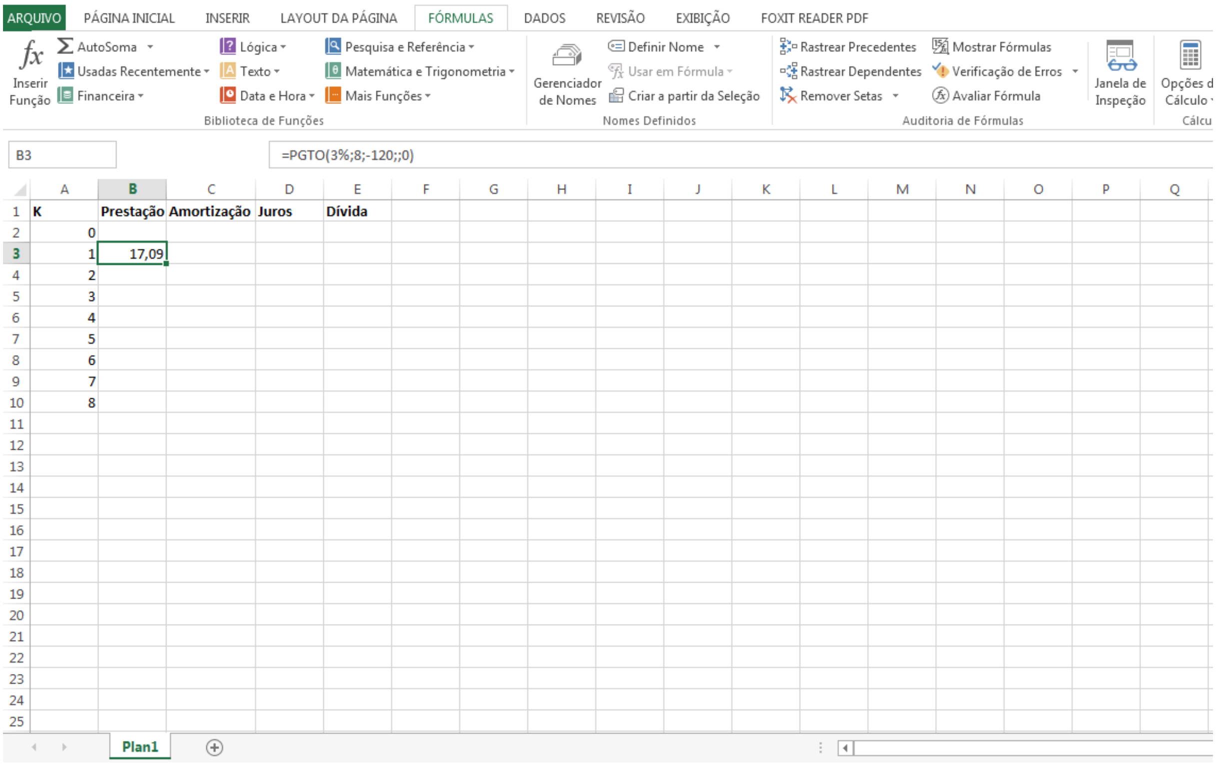
Problema 3.1 - Um liquidificador custa R$ 120,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 3% ao mês, construa uma planilha de amortização pelo sistema Price.

Para construção da planilha, seguimos os seguintes passos:

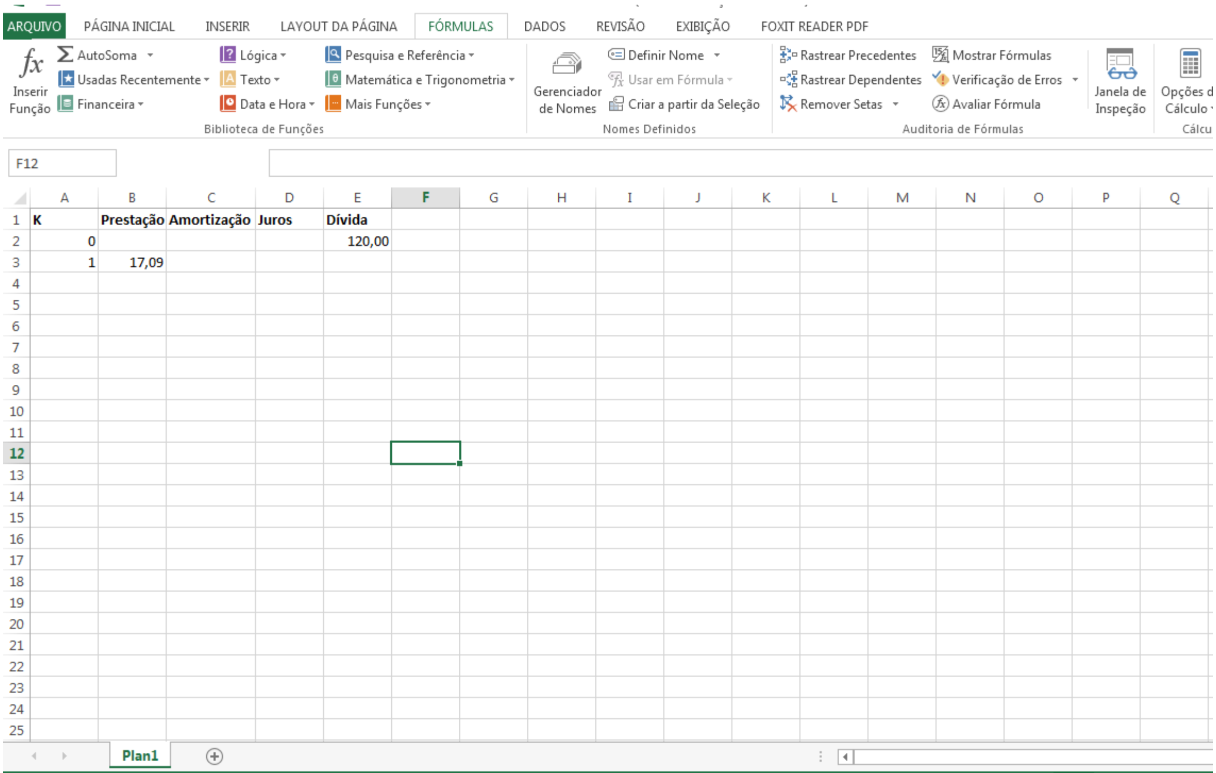
1°) Primeiramente devemos calcular o valor da parcela. Marcamos na célula na qual queremos que o resultado apareça, no caso B3, então basta utilizar o comando f_x (Ver problema 2 da atividade 1).



Clique em OK, aparecerá na célula B3 o valor R$ 17,09.

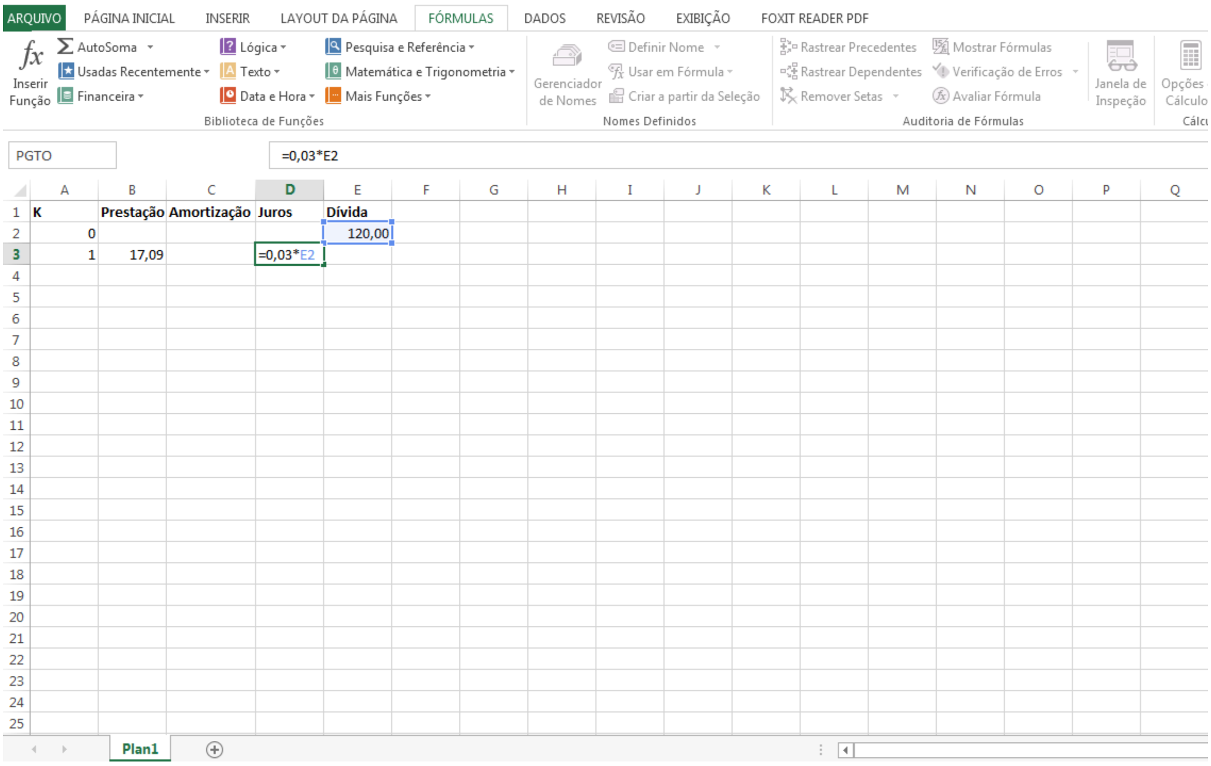


2°) No período “zero”, que corresponde ao momento inicial do financiamento, não há qualquer prestação a pagar, tendo em vista que a primeira prestação será paga na data 1, então na célula E2 digitamos o valor da dívida, como mostra a seguir:

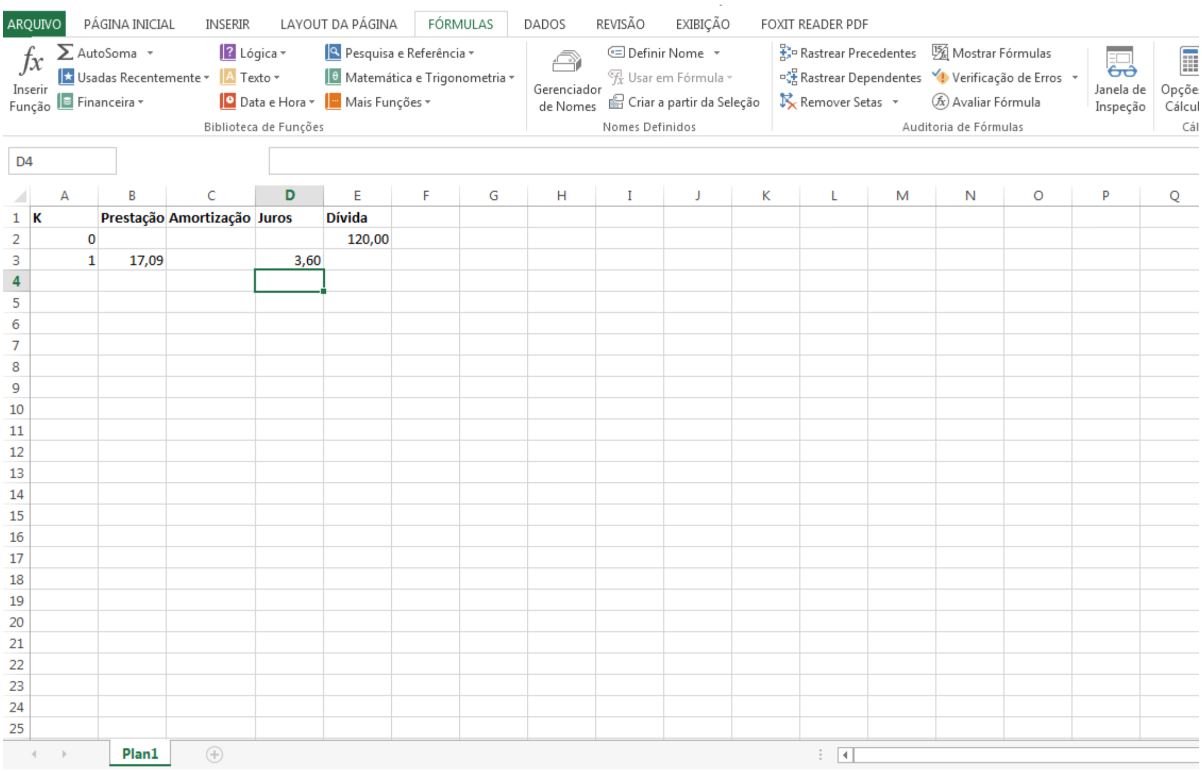


3°) Agora vamos preencher a linha que corresponde ao primeiro período da planilha de amortização.

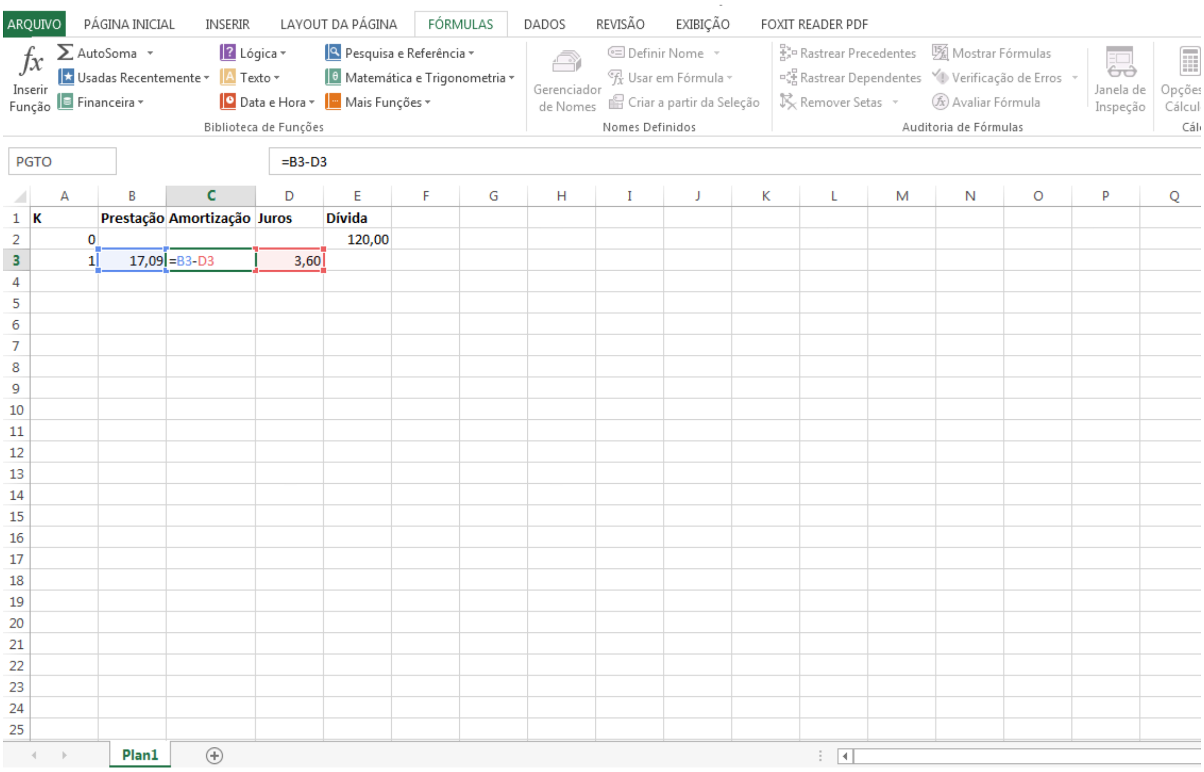
A célula de juros, D3, será determinada digitando =0,03*E2, assim:



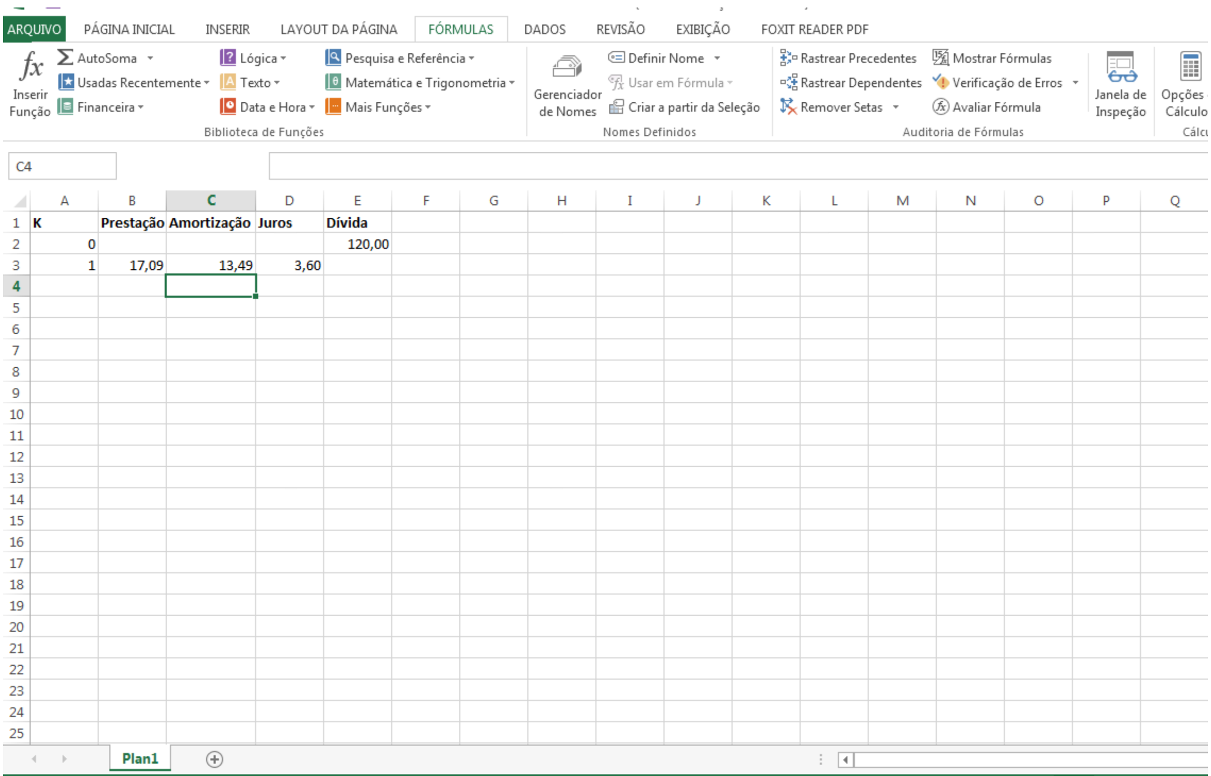
Basta teclar ENTER, temos:



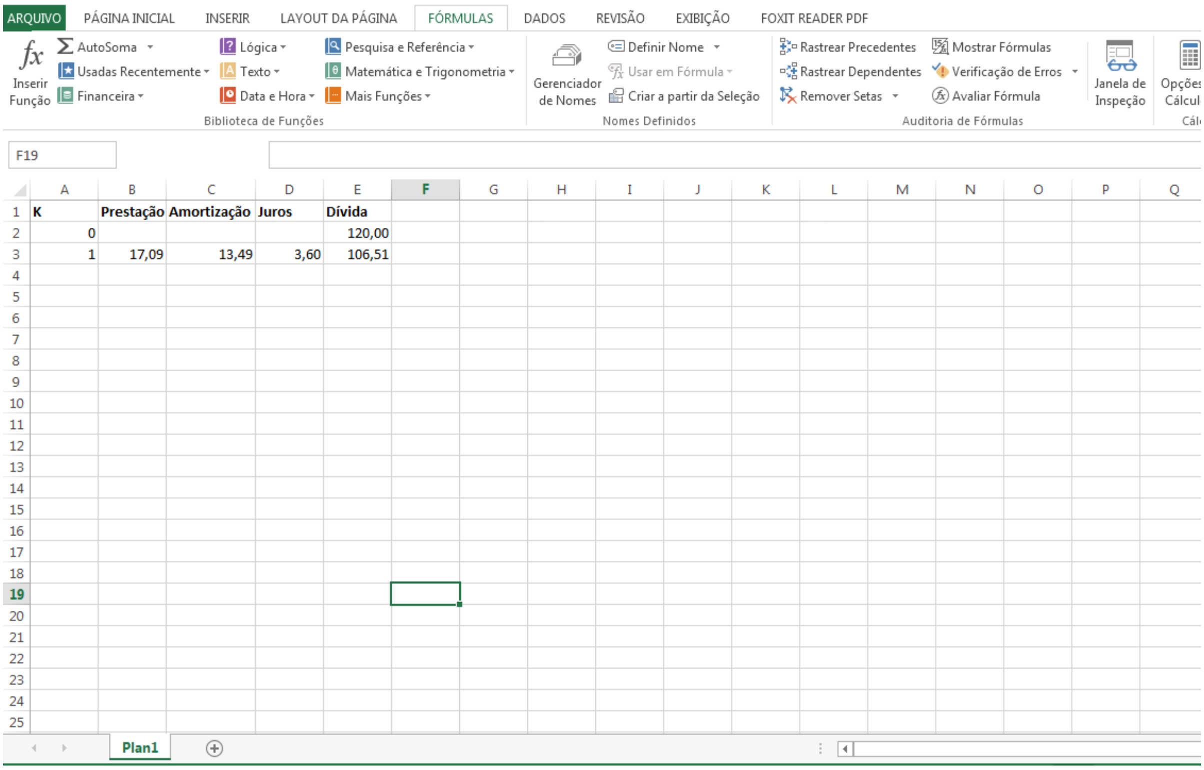
O valor da amortização será determinado efetuando, na célula C3 digitando =B3-D3.



Clicando ENTER, temos:

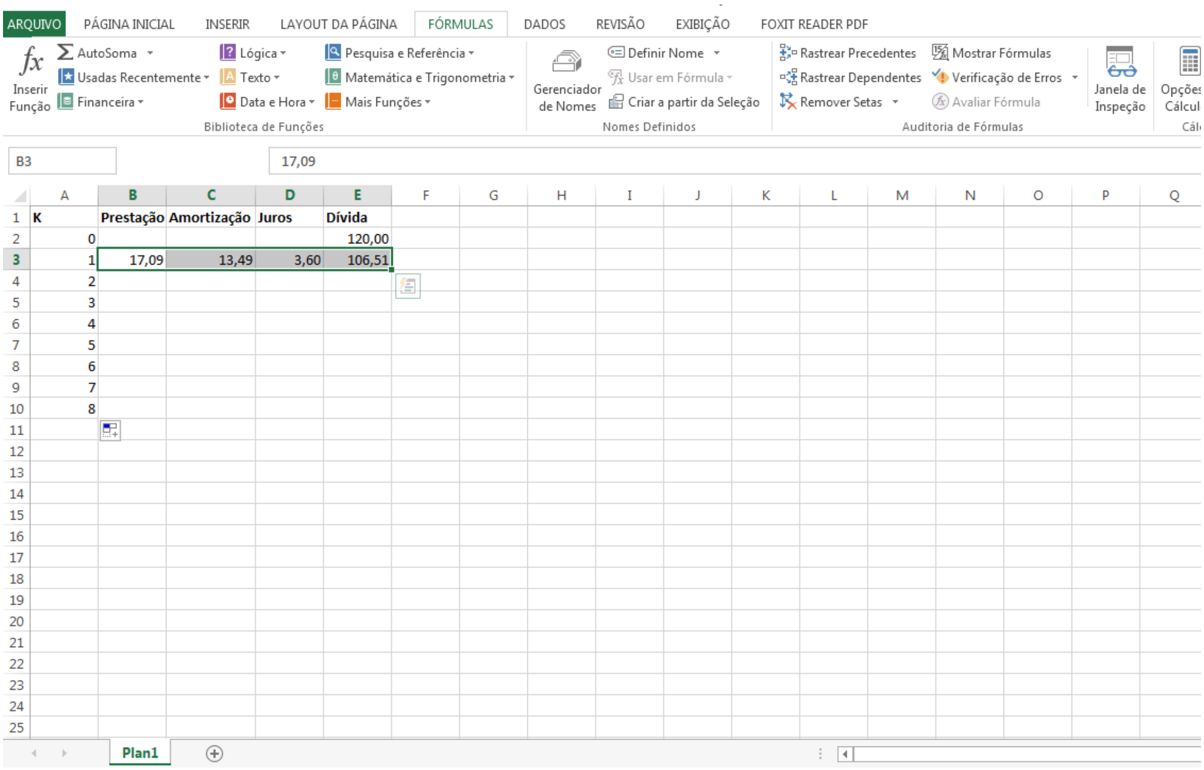


Por fim devemos calcular o valor da dívida na época 1. Este valor será colocado na célula E3 digitando =E2-C3.

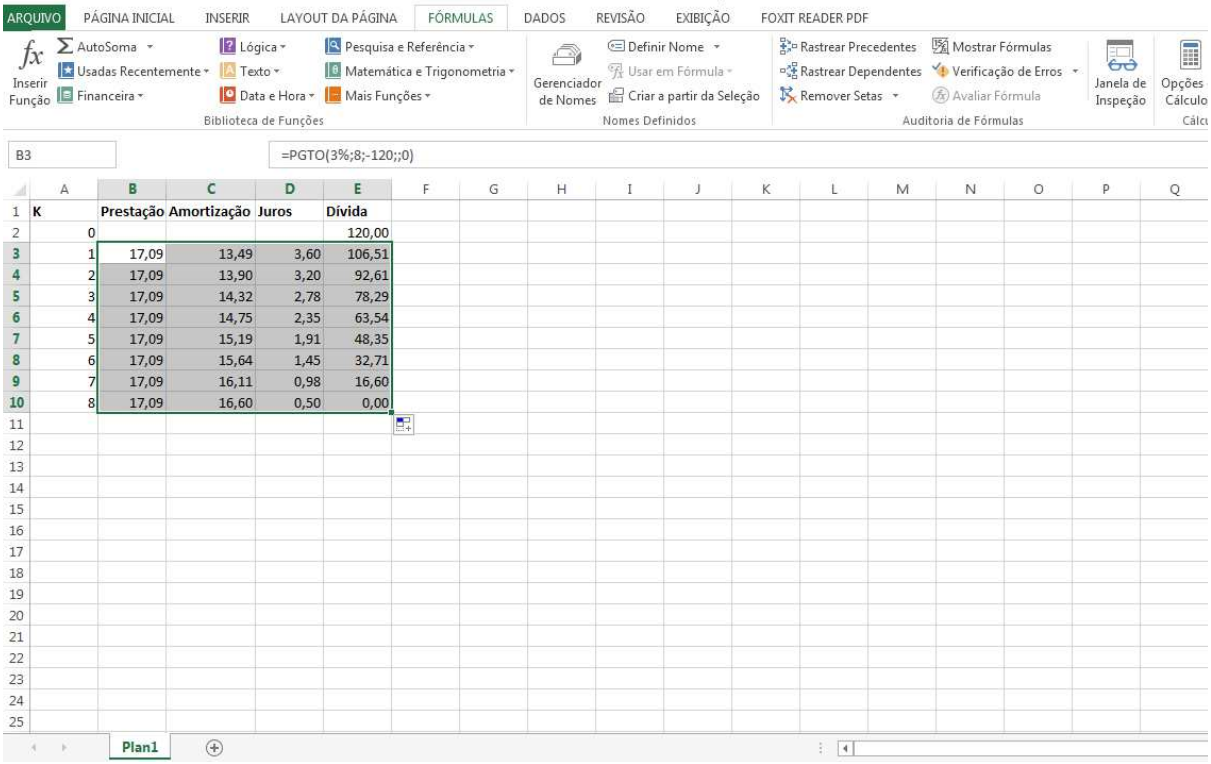


K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				120,00
1	17,09	13,49	3,60	106,51

Está determinada a primeira linha da planilha PRICE. O restante basta clicar nas quatros células preenchidas desta linha e puxar o cursor até a oitava linha no caso do problema dado.



K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				120,00
1	17,09	13,49	3,60	106,51
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				



K	Prestação	Amortização	Juros	Dívida
0				120,00
1	17,09	13,49	3,60	106,51
2	17,09	13,90	3,20	92,61
3	17,09	14,32	2,78	78,29
4	17,09	14,75	2,35	63,54
5	17,09	15,19	1,91	48,35
6	17,09	15,64	1,45	32,71
7	17,09	16,11	0,98	16,60
8	17,09	16,60	0,50	0,00

Seguindo os passos do problema 3.1, construa uma tabela no sistema de amortização pelo sistema PRICE no problema 3.2.

Problema 3.2 - Guilherme comprou um automóvel em 24 prestações iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra, cujo preço à vista era de R$ 24.000, 00. Se os juros são de 2% ao mês, construa uma tabela de amortização pelo sistema PRICE.