UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA PLANA ATRAVÉS DA CONVERSÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS E LINGUAGEM NATURAL

Francinaldo da Silva Bezerra

MANAUS
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Francinaldo da Silva Bezerra

APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA PLANA ATRAVÉS DA CONVERSÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS E LINGUAGEM NATURAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS
2018

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

B574a

Bezerra, Francinaldo da Silva
Aprendizagem da Geometria Plana Através da Conversão de Registros de Representações Geométricas e Linguagem Natural / Francinaldo da Silva Bezerra. 2018
66 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Engenharia Didática. 2. Registros de Representação Semiótica. 3. Geometria Plana. 4. Construções Geométricas. I. Oliveira, Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Francinaldo da Silva Bezerra

APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA PLANA ATRAVÉS DA CONVERSÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS E LINGUAGEM NATURAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 28 de Março de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Presidente

Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto
Membro

Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata
Membro

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Amazonas e à equipe do PROFMAT pela oportunidade.

Aos professores e Coordenadores que fizeram parte da equipe do PROFMAT do Amazonas.

Aos meus pais, que mesmo em situações difíceis, me mantiveram na escola.

Aos meus colegas do PROFMAT da turma de 2015, especialmente a Jair da Silva Matos e Mike de Souza Moraes.

Ao meu orientador o professor doutor Nilomar Vieira de Oliveira, pela sua dedicação e paciência.

À minha esposa Renilda Sobral Siqueira que sempre me apoiou.

RESUMO

Neste trabalho realizou-se uma pesquisa sobre o ensino da Geometria plana e criou-se uma proposta didádica utilizando construções geométricas com régua, compasso, esquadro e transferidor. Objetivou-se articular as representações geométricas e linguagem natural através das construções geométricas. A pesquisa foi realizada com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, em uma escola da rede pública municipal de Manaus. A sequência das atividades foi elaborada tendo como base a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Utilizou-se a metodologia de pesquisa Engenharia Didática, que articula ação didática e pesquisa, também proporciona uma organização na estrutura do trabalho. Verificou-se que o ensino da Geometria Plana através de construções geométricas com régua, compasso, esquadro e transferidor é válido para auxiliar os discentes na aprendizagem da Geometria Plana, podendo assim articular registros de representação geométrica e linguagem natural, além de não confundir o objeto matemático com sua representação.

Palavra-Chave: Engenharia Didática. Registros de Representação semiótica. Geometria plana. Construções Geométricas.

ABSTRACT

In this work a research was carried out on the teaching of Flat Geometry and was created a didactic proposal using Geometric Constructions with ruler, compass, set square and protractor. The objective was articulate the geometric representations and natural language through Geometric Constructions. The research was carried out with eighth grade students of elementary, in a public school of Manaus. The sequence of activities was elaborate based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Records. It used the research methodology Didactic Engineering, which articulates didactic action and research, also provides an organization in the work structure. It was verified that the teaching of Flat Geometry through Geometric Constructions with ruler, set square and protractor is valid to help the students in the learning of Flat Geometry, thus being able to articulate registers of geometric representations and natural language, besides not confusing the mathematical object with their representation.

Key Word: Didactic Engineering. Semiotic Representation Records. Flat Geometry. Geometric Constructios.

.

.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números Reais.
$\overline{AB}$	Segmento AB.
AB	Medida do segmento AB.
$A\widehat{B}C$	Medida do ângulo ABC.
$\widehat{B}$	Ângulo B.
$=$	Sinal de igual.

Lista de Figuras

Sumário

ll

Introdução

A matemática está no cotidiano de todos nós sendo uma das ciências mais antigas. Percebemos a matemática em atividades simples como fazer compras, pensar em um trajeto mais rápido para chegar a algum lugar, resolver um problema doméstico. É tão comum utilizar a matemática no cotidiano que na maioria das vezes nem percebemos que a estamos utilizando, não associamos a um certo conteúdo matemático aprendido na escola. Desta maneira, a matemática, ocupa um papel indispensável na formação do cidadão. Já nos primeiros anos de vida temos que ter noção de altura, distância, volume, pois um simples erro de cálculo mental pode ocasionar um acidente.

Atualmente existe uma grande preocupação dos docentes em encontrar novos métodos eficazes no processo de ensino, métodos que estimulem os discentes a se interessarem pela disciplina. Em observação, seja como discente ou docente, podemos perceber grande dificuldade dos alunos em aprender matemática, sendo que grande parte desses alunos não gostam da matemática (a cada 40 alunos em média 5 gostam da matemática). Acredita-se que uma das possíveis causas seja a forma com que muitas vezes a matemática é apresentada aos alunos sem vínculo com o cotidiano dos mesmo ou de forma desinteressante.

Para realização desta pesquisa escolhemos conteúdos de geometria plana. Desenvolvemos este trabalho a partir de observações, na prática docente, das dificuldades apresentadas na grande maioria dos alunos de sexto ao nono ano do Ensino Fundamental na compreensão dos conceitos da Geometria Plana. Observamos que os alunos chegam ao último ano do Ensino Fundamental sem o conhecimento mínimo exigido dos conteúdos da Geometria Plana, alguns têm menos de 10% do conhecimento que deveriam ter. A pesquisa está fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. A compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro [6].

Como metodologia utilizaremos os princípios da Engenharia Didática, que é uma metodologia baseada na experimentação em sala de aula, proporcionando uma organização na estrutura do trabalho.

Apresentaremos uma análise de como os conteúdos de Geometria Plana são trabalhados no Ensino Fundamental e em livros didáticos. Através desta análise, será elaborada uma proposta de ensino que procura dar preferência as conversões e tratamentos entre os registros de representação geométrica e linguagem natural através de construções geométricas.

Aplicou-se a sequência de ensino com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, em uma escola da rede pública municipal de Manaus, com o objetivo de que o aluno maximize seu aprendizado quanto ao conteúdo da Geometria Plana, articulando registros de representação geométrica e linguagem natural. O objetivo principal é verificar se o uso de construções geométricas utilizando régua, compasso, esquadro e transferidor, pode auxiliar os discentes a compreenderem os diversos registros de representação e realizar conversões entre eles.

Este trabalho foi organizado em 4 capítulos. No capítulo 1 apresentou-se um resumo da Teoria dos Registros de Representação Semiótica que foi utilizada para a implementação desta proposta. No capítulo 2 apresentamos a metodologia de pesquisa utilizada (Engenharia Didática), sendo explicado como desenvolver cada fase da Engenharia Didática. No capítulo 3, apresentam-se os resultados obtidos nas fases da Engenharia Didática. No último capítulo expõem-se as considerações finais acerca das atividades e algumas conclusões sobre o trabalho de pesquisa realizado.

Capítulo 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo escreveremos a base teórica utilizada para a construção do ensino, objetivando a aprendizagem da geometria plana.

1.1 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Charles Sanders Peirce (1839-1914), filho de Benjamin Peirce, um dos mais importantes matemáticos de Harvard. Desde a infância já tinha contato com a ciência devido as reuniões feitas pelo seu pai na sua casa, Peirce contribuiu em diversas áreas como Matemática, Física, Química, Astronomia, entre outras, foi responsável por desenvolver a semiótica [13].

Segundo Santaella, Signo é tudo que nos faz lembrar de algo e é perceptível aos nossos sentidos, uma coisa que lembra outra coisa, como uma fotografia, logotipos, um som, etc.

Semiótica é uma ciência dos signos, ciência que estuda todas as formas de se comunicar, comunicação verbal e não verbal como comunicação escrita, oral, desenhada, corporal, etc [13].

Quando recorremos à história da matemática, podemos observar que as representações estão presentes no desenvolvimento da matemática. Durante a antiguidade e na Idade Média, a base do pensamento matemático era a intuição geométrica, usando a linguagem para demonstrar, explicar ou representar o conhecimento matemático. Na Idade Clássica surgiu uma nova forma de expressar o conhecimento matemático. Surgiu através de símbolos uma representação algébrica e outras diferentes representações semióticas foram surgindo, assim não sendo mais possível fazer matemática sem essas representações [8].

A teoria dos Registros de Representação Semiótica foi criada pelo filósofo e psicólogo Raymond Duval com o objetivo de estudar e analisar a aquisição do conhecimento pelo aluno, através de representações, e a forma com que se processa a aprendizagem. As atividades cognitivas fundamentais ao sujeito como conceitualização, resoluções de problemas, raciocínio, compreensão de texto, requerem a utilização de sistema de expressão e de representação que vão além da linguagem natural ou imagens, possibilitando desenvolver as capacidades de raciocínio para que o aluno participe e dirija seu processo de aprendizagem [6].

Duval explica, em sua teoria, que os registros de representações são maneiras típicas de representar um objeto matemático e o sistema no qual pode ser representado o objeto matemático é chamado de sistema ou registro semiótico. Os registros semióticos são importantes por serem um sistema de comunicação e por possibilitar a organização de informação a respeito do objeto representado.

Duval enfatiza a distinção entre objeto matemático e suas representações. Jamais podemos confundi-los, pois tal confusão pode acarretar a não compreensão da matemática . Para representar um objeto matemático podem ser utilizados diferentes registros de representações: é o objeto matemático que importa e não as suas diversas representações semióticas possíveis.

Um exemplo matemático no qual podemos visualizar destacando seu sistema semiótico e seu registro de representação, pode ser verificado no estudo das funções quadráticas diante do uso de registros simbólicos para representar uma função quadrática conforme demonstra a seguir:

Representação algébrica de uma função quadrática

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

Objeto Matemático: Funções quadráticas

Sistema Semiótico: Simbólico

Representação: Álgebra

Este exemplo mostra uma das formas de representação que está representando um objeto matemático. Existem outros registros semióticos para representar uma função quadrática, entre eles mostraremos a seguir o registro figural, utilizando a representação geométrica que também representa uma função quadrática.

Objeto Matemático: funções Quadráticas

Sistema Semiótico: Figural

Representação: Geométrica

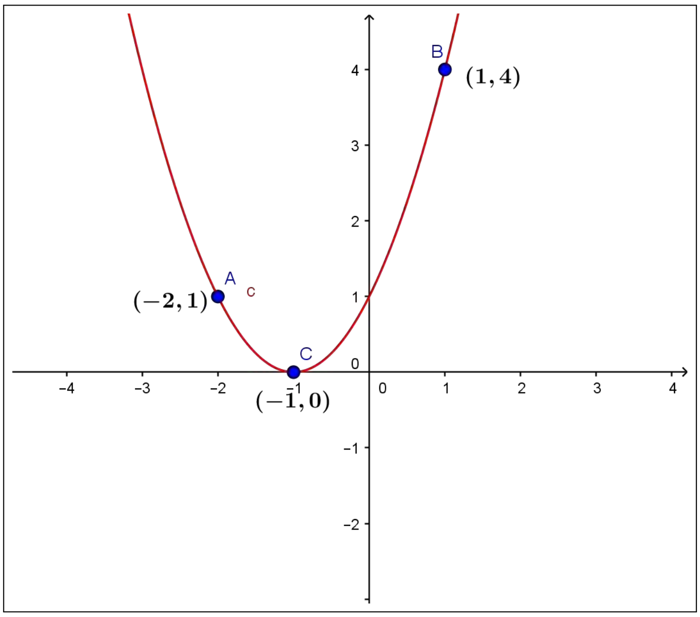


Figura 1.1: Função Quadrática

Os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata. Por este fato as representações semióticas de um objeto matemático tornam-se necessárias, assim dando uma representação aos objetos abstratos [6].

Segundo Duval existem três tipos de representações: as mentais, as computacionais e as semióticas, que podem ser classificadas como internas ou externas.

De acordo com Duval, as representações mentais são aquelas que permitem visualização mental e conceitualização que um indivíduo pode ter sobre um objeto, essas representações são internas pois elas pertencem apenas ao indivíduo e não são expostas a outro. Estas representações cumprem função de objetivação, como todas as representações conscientes [6].

As representações computacionais são classificadas como internas. São aquelas que o indivíduo realiza de forma inconsciente, uma vez que ele "acaba executando certas tarefas sem pensar em todos os passos necessários para sua realização (por exemplo, os algoritmos computacionais, ou mesmo os algoritmos das operações)" [4].

As representações semióticas são externas, ou seja,elas representam a compreensão manifestadas sobre um objeto, o qual pode ser representado de diversas formas [6].

Capítulo 2

ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

Neste capítulo descreveremos a metodologia utilizada na construção das etapas da nossa pesquisa.

2.1 ENGENHARIA DIDÁTICA

O termo Engenharia Didática surgiu na França nos anos 80, na área da didática da matemática, apresentando suas inspirações no trabalho realizado por um engenheiro, que necessita de um sólido conhecimento científico para buscar possíveis soluções para um problema que ainda não possui um modelo pronto de resolução, ou seja, sem apresentar uma solução prévia, sendo necessário criar resoluções para o problema [1].

Segundo Carneiro (2005) a Engenharia Didática foi criada para responder duas questões: a) as relações entre pesquisa e ação do sistema de ensino; b) e o lugar reservado para as realizações didáticas entre as diversas metodologias de pesquisa. Ela é vista como uma metodologia de investigação, que estuda as relações de pesquisa e ação no sistema de ensino, sendo uma metodologia baseada na experiência em sala.

Para realização e aplicação desta metodologia de pesquisa é necessário escolher um tema e definir um campo de ação, bem como justificar sua escolha, a qual será denominada como tema e campo de ação. O tema deve contemplar um conjunto de saberes escolares, definindo-se o problema e os meios para ação, sobre o sistema de ensino, construindo novas metodologias didáticas e articulando a pesquisa com a prática em sala de aula [3].

Carneiro (2005) afirma que a Engenharia Didática não é uma metodologia de ensino que procura encontrar uma verdade única sobre a possibilidade de como ensinar um determinado conteúdo. Ela objetiva procurar caminhos alternativos, pois esta metodologia possui uma ideologia de inovação, abrindo caminho para a criação de novas experiências no âmbito escolar.

A engenharia Didática contempla tanto a dimensão teórica quanto a dimensão experimental da pesquisa didática, relacionando o plano teórico da racionalidade com o território experimental da prática educativa. Sem uma articulação entre pesquisa e ação pedagógica, cada uma dessas dimensões tem seus significados reduzidos [10].

2.1.1 FASES DA ENGENHARIA DIDÁTICA

A metodologia de pesquisa e execução da Engenharia Didática é dividida em quatro grandes etapas [1]:

1. Análises prévias;
2. Concepção e Análise *a priori* das situações didático-pedagógicas a serem desenvolvidos em sala de aula;
3. Experimentação/Aplicação da proposta de ensino;
4. Analise *a posteriori* e validação da engenharia

2.1.1.1 ANÁLISES PRÉVIAS

As análises previas, de acordo com a engenharia didática, são realizadas através de considerações acerca do quadro teórico didático geral e sobre conhecimentos didáticos já adquiridos anteriormente e em outras análises preliminares. O objetivo consiste em propôr uma nova intervenção em sala de aula para que o professor possa aperfeiçoá-lo e/ou reorganizá-lo, tornando o estudo mais satisfatório. Nesta etapa é realizado um estudo que é subdividido em três dimensões:

1. Epistemológica: Está associada ao estudo da construção, ao longo dos anos, do conteúdo a ser pesquisado, ou seja, está associada às características do saber;
2. Didática: Analisa-se a forma de abordar o conteúdo em livros didáticos e os métodos pelos quais esse conhecimento vem sendo abordado;
3. Cognitiva: Nesta etapa são apresentados os principais problemas na aprendizagem dos alunos e as suas dificuldades cognitivas.

Após estas análises listamos nossos constrangimentos com relação ao que impede ou dificulta a aplicação da nossa sequência de ensino.

2.1.1.2 Concepção e análise *a priori*

É uma fase em que é necessário definir um certo número de variáveis de comando do sistema de ensino [10]. As variáveis de comando podem ser globais ou locais. As globais estão relacionadas à organização integral da engenharia didática e as locais dizem respeito à organização local da engenharia, ou seja, de uma fase. Essas variáveis são importantes, pois serão observadas minuciosamente no decorrer da sequência didática.

É nesta fase que o pesquisador elabora a sequência didática que será aplicada, além de decidir agir sobre um determinado número de variáveis relacionado ao problema estudado. São previstas as ações e comportamentos dos estudantes durante a experimentação.

2.1.1.3 Experimentação

Esta fase refere-se à experiência prática com os alunos, com a finalidade de observar a aprendizagem por meio de atividades planejadas.

Nesta fase, há de se escolher também os meios de registros dos dados colhidos na experimentação, que vai depender das variáveis priorizadas na análise *a priori*. Os dados podem ser obtidos mediante observações feitas pelas produções dos alunos e nas sessões de ensino. Também pode ser feito para completar a análise de dados aplicação de questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos realizados durante a experimentação ou no final dela.

2.1.1.4 Análise *a posteriori* e validação

Esta fase refere-se ao tratamento de informações obtidas pela aplicação da sequência didática, analisando os dados obtidos e comparando com as hipóteses iniciais para validar ou não a engenharia. Na Engenharia Didática a validação é essencialmente interna, embasada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* [1]. Ou seja, ela constituiu um estudo de caso, onde o professor-pesquisador, seleciona um conteúdo matemático e, partindo de uma análise prévia, elabora uma sequência de ensino. Após a experiência realizada, confronta os resultados obtidos com as hipóteses iniciais.

A seguir serão descritas as etapas citadas. Podemos observar na figura 2.1 o mapa da Engenharia Didática:

2.1.2 TEMA E CAMPO DE AÇÃO

O campo de pesquisa é uma turma de 25 alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, da rede pública de Manaus. A partir de experiências vivenciadas no ambiente escolar, seja como

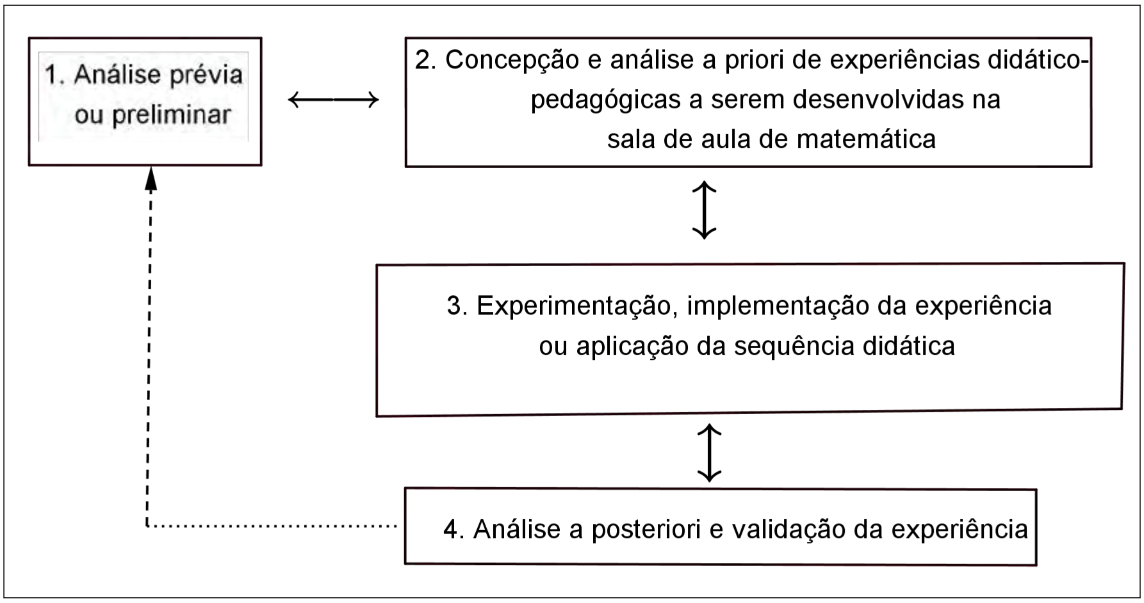


Figura 2.1: Mapa de Engenharia Didática [7]

aluno ou professor, surgiram dados que nos levaram à escolha do tema de pesquisa. Observou-se nas experiências que a maioria dos alunos do Ensino Fundamental apresentam dificuldades na transição entre as representações geométricas e linguagem natural. Na maioria dos casos os alunos tem apenas a representação geométrica. Em uma das atividades propostas em sala de aula foi dada uma atividade com a pergunta: "*O que é um quadrado?*". A maioria dos alunos apenas tentaram desenhar o quadrado pois essa era a única representação que para eles definia um quadrado.

Percebemos que os alunos do Ensino Fundamental muitas vezes não estudam geometria. Geralmente esse conteúdo consta no fim do ano letivo no conteúdo programático das escolas, o que faz com que se dê menos ênfase em geometria.

Na maioria dos casos a geometria é ensinada partindo da Definição do objeto matemático por meio da representação da linguagem natural, sendo logo em seguida apresentada a representação geométrica onde a maioria das atividades dão ênfase na mesma e não ocorre a transição entre essas duas representações de forma satisfatória, fazendo com que os alunos tenham apenas a representação geométrica para representar o objeto estudado.

É comum ver alunos chamando um quadrilátero qualquer de quadrado pelo simples fato desse ter 4 lados, desconsiderando todos os outros fatores que tornam um quadrilátero um quadrado ou mesmo considerando duas retas paralelas pelo fato de não se intersectarem em sua representação geométrica. Isso ocorre devido à falta de domínio da representação na linguagem natural desse objeto.

É importante que os alunos consigam articular as representações geométricas e linguagem natural dos objetos da geometria plana para não confundirem o objeto com sua representação, lembrando que para haver a compreensão integral e conceitual devemos articular pelo menos dois registros para não confundir o objeto com sua representação [6].

Devido à grande dificuldade dos alunos em associar o objeto à sua representação geométrica com a linguagem natural, e tirando proveito da simplicidade e facilidade do uso de instrumentos como régua, transferidor, esquadro e compasso, propôs-se o trabalho com alguns conceitos da geometria plana através de construção geométrica, observando as propriedades, assim criando uma representação na linguagem natural, afim de proporcionar ao aluno um ambiente dinâmico que o estimule à aprendizagem em sala de aula.

Todos os motivos e experiências contribuem para a escolha do tema e levaram ao desenvolvimento de uma proposta de ensino voltada à aprendizagem da geometrica plana, com o objetivo de fazer conversão entre registros de representação geométrica e linguagem natural.

Diante das justificativas explanadas, temos a seguinte questão:

O uso de objetos (régua, transferidor, compasso e esquadro), utilizados para construir um objeto matemático na sua representação geométrica, pode auxiliar na conversão de registros de representação geométrica e linguagem natural visando a aprendizagem em geometria plana?

Capítulo 3

DISCUSSÃO DOS DADOS

3.1 ANÁLISES PRÉVIAS

Dividiremos esta fase da Engenharia Didática em 3 etapas que são elas:

(a) Análise Epistemológicas, na qual realizamos um breve estudo sobre a evolução da Geometria Plana ao longo dos anos;

(b) Análise Didática, na qual analisamos o ensino atual da Geometria Plana.

(c) Análise Cognitiva, em que destacamos os principais obstáculos na aprendizagem dos alunos em Geometria Plana e suas dificuldades em reconhecer objetos matemáticos em seus registros geométricos e linguagem natural.

3.1.1 CONSIDERAÇÕES EPISTEMOLÓGICAS

Apresentamos aqui um breve estudo sobre a evolução da Geometria Plana, desde os seus primórdios até a época de Euclides de Alexandria.

A palavra geometria vem do grego antigo e constitui um ramo da matemática voltado para as questões de forma, tamanho e posição relativa de figuras e com as propriedades dos espaços [9].

De acordo com o autor em foco, a geometria surgiu independente em várias culturas antigas como um conjunto de conhecimentos práticos sobre comprimento, área e volume, sendo que o aparecimento de elementos de uma ciência formal é, no mínimo, tão antigo quanto Tales (século VI a.C.).

O autor ainda afirma que, por volta do século III a.C., a geometria foi posta em uma forma axiomática por Euclides, cujo tratamento, chamado de geometria euclidiana, firmou um padrão que durou por séculos.

Arquimedes desenvolveu técnicas engenhosas para calcular áreas e volumes, antecipando em várias maneiras o moderno cálculo integral. O campo da astronomia, especialmente o mapeamento das estrelas e planetas na esfera celestial e a descrição das relações entre os movimentos dos corpos celestiais, foi uma das mais importantes fontes de problemas geométricos durante os mil e quinhentos anos seguintes [9].

Segundo Boyer os primeiros passos da matemática surgiram antes mesmo da escrita. Afirmar um período exato de seu surgimento é um pouco ousado e arriscado, pois para tais informações contamos apenas com alguns artefatos já encontrados. Muitos artefatos com registros importantes podem ter se perdido no tempo e muitas informações nem mesmo foram registradas.

Heródoto e Aristóteles acreditavam que a geometria originou-se durante a civilização egípcia. Heródoto acreditava que a geometria se originava no Egito devido à necessidade prática de realizar novas medidas de terras após as inundações anuais no vale do rio, enquanto que Aristóteles acreditava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria. Não podemos afirmar qual deles está certo em relação ao motivo da criação da geometria, porém podemos afirmar que ambos se equivocaram em considerar o período de surgimento da geometria. Desenhos e figuras do período neolítico sugerem que a geometria deu seus primeiros passos em um período mais antigo que a civilização egípcia [2].

Segundo Boyer a cultura egípcia se desenvolveu no noroeste da África, no vale do rio Nilo, desde aproximadamente o ano 3200 a.C. até os primeiros séculos da era cristã. Ela manteve-se em isolamento, protegida naturalmente de invasões estrangeiras devido à sua geografia, governada pacíficamente e quase ininterruptamente por uma sucessão de dinastias.

Em 1799, durante a campanha de Napoleão no Egito, engenheiros franceses escavando o solo, perto do braço Roseta do delta do Nilo, encontraram um fragmento basáltico polido que iria propiciar a decifração da escrita egípcia. Essa pedra (conhecida como Pedra de Roseta) contém inscrições em três escritas: grega, demótica e hieroglífica, em caracteres demóticos e em grego. Tomando o grego como chave foi possível decifrar a escrita egípcia [2].

Boyer afirma que dois papiros são as fontes principais de informações referentes à matemática egípcia antiga. O papiro Golonishev ou de Moscoudatado aproximadamente no ano 1850 a.C. onde encontramos um texto matemático que contém 25 problemas e o papiro Rhind (ou Ahmes) datado aproximadamente no ano 1650 a.C. onde encontramos um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba

Ahmes de um trabalho mais antigo.

Na região da Mesopotâmia, fica a Babilônia. Seus habitantes da época foram, há cerca de 6.000 anos, os inventores da roda, descobriram as propriedades da circunferência e verificaram que a relação entre o comprimento da circunferência dividido pelo diâmetro era aproximadamente três unidades. Os babilônicos achavam que o comprimento da circunferência era um valor intermediário entre os perímetros dos quadrados inscritos e circunscritos em um círculo, também sabiam traçar o hexágono regular inscrito e conheciam uma fórmula para achar a área do trapézio retângulo; os babilônicos também cultivaram astronomia e, sabendo que o ano tem aproximadamente 360 dias, dividiram a circunferência em 360 partes iguais obtendo o grau sexagésimal [11].

Segundo Pinedo as civilizações da antiga Mesopotâmia distribuíam-se em sumeriana, ao sul; assíria, ao norte e acadiana, ao centro. Apesar da grande diversidade cultural, com a formação do Primeiro Império Babilônico, criou-se um grau de unidade através da unificação religiosa, e o termo Babilônia passou a designar toda a região da Mesopotâmia e não apenas a cidade da Babilônia.

Segundo Boyer os sumérios tinham construído casas e cerâmicas decorativas e mosaicos artísticos em desenhos geométricos, além de avançados sistemas de canais para irrigar as terras e controlar as inudações.

Durante o sexto século antes de Cristo apareceram dois homens, Tales e Pitágoras. Tales nasceu em Mileto, antiga colônia grega, por volta de 624 a.C. a 548 a.C.. Tales viajou adquirindo conhecimentos de astronomia e matemática. Acredita-se que tenha aprendido geometria no Egito e provavelmente entrou em contato com tabelas e instrumentos astronômicos na Babilônia. Tales teve a fama de primeiro matemático da organização dedutiva da geometria, devido a cinco teoremas onde um deles diz que um ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto, onde ele teria realizado demonstrações, sendo assim o primeiro a realizar demonstração na geometria, porém não há documento antigo que possa ser usado como prova desse feito [2].

Outro teorema famoso de Tales é o Teorema de Tales (sobre a intersecção de retas) que afirma que quando duas retas transversais cortam um feixe de retas paralelas, as medidas dos segmentos delimitados nas transversais são proporcionais. Diz-se que o teorema foi usado na construção da altura de uma pirâmide [12]

Pitágoras era um profeta e místico, nascido por volta de 580 a.C. a 500 a.C. em uma ilha grega chamada Samos. Foi praticante contemporâneo de Buda, Confúcio e Lao-tsé. Quando voltou ao mundo grego, criou uma sociedade secreta em Magna Grécia, com bases matemáticas e filosóficas, essa sociedade ficou conhecida como escola pitagórica, onde os conhecimentos e propriedades eram comuns, portanto as descobertas não eram atribuídas a uma única pessoa. O teorema mais conhecido é o Teorema de Pitágoras que provavelmente veio dos babilônios, ganhou esse nome devido aos pitagóricos serem os primeiros a demonstrá-lo, embora não se possa confirmar esse fato [2].

Segundo Boyer durante a segunda metade do quinto século antes de Cristo, as atividades matemáticas se espalharam ao longo do mediterrâneo onde homens com poucos recursos se dedicaram a problemas matemáticos que formou a base da maior parte dos desenvolvimentos posteriores da geometria Nessa época surgiram os três problemas clássicos da antiguidade: quadratura do círculo, duplicação do cubo e trissecção do ângulo, que deveriam ser solucionados apenas com régua e compasso. Mais tarde, um pouco mais de 2200 anos depois, verificou-se que é impossível solucioná-los apenas com régua e compasso. Tivemos também, nessa época, importantes resultados para a geometria como a quadratura de lunas, razão de grandezas incomensuráveis, paradoxos do movimento e validade dos métodos infinitesimais.

Platão nasceu em Atenas, provavelmente viveu entre 428 a.C. a 347 a.C. e foi fundador da academia platônica de Atena. Sobre as portas de sua escola tinha a frase: "Que ninguém que ignore a geometria entre aqui" [2].

Segundo Boyer Platão não teve muita contribuição direta para a matemática, porém foi responsável por inspirar e guiar outros homens que se tornaram importantes matemáticos. Platão defendia a causa da matemática pura contra a visão materialista do artesão ou técnico. É provável que ele tenha sido o responsável pela restrição que prevalecia nas construções geométricas gregas. A academia platônica de Atenas tornou-se o centro matemático do mundo de onde originou-se os principais mestres e pesquisadores durante os meados do quarto século a.C..

Derrotada a batalha de Queronéia pelas forças do rei Filipe, a Grécia torna-se parte do império macedônio no ano 338 a.C.. Dois anos depois, com a morte de Filipe, seu filho Alexandre assume o poder, então com 20 anos de idade. Ao morrer, cerca de 13 anos depois, Alexandre incorporara ao seu império grande parte do mundo civilizado de então. Dessa forma a cultura grega, adotada pelos macedônios (em cuja formação populacional predominava o elemento grego), foi estendida ao Oriente antigo. Em sua arrancada expansionista, Alexandre fundou muitas cidades. Uma delas, em especial, teria um papel extraordinário na história da Matemática: Alexandria, no Egito [5].

Segundo Dolce Com a morte de Alexandre, o domínio sobre o Egito passou às mãos de Ptolomeu, um de seus líderes militares. E uma das primeiras e talvez mais importante obra de Ptolomeu foi criar em Alexandria, junto ao museu (templo às musas), o primeiro modelo do que viriam a ser as universidades, séculos depois. Nesse centro, intelectuais do mundo inteiro, trabalhando ali em tempo integral, dedicavam-se às pesquisas e ao ensino às custas dos cofres do Estado. Ponto alto da instalação era uma biblioteca, que chegou a ter no auge de seu esplendor, perto de 700 mil rolos de papiro. Muitos grandes matemáticos trabalharam ou se formaram no Museu. Dentre eles, o primeiro talvez, e um dos mais notáveis, foi Euclides (300 a.C.).

Quase nada se sabe sobre a vida de Euclides, salvo algumas poucas informações esparsas. Mesmo sobre sua formação matemática não há nenhuma certeza: é possível que tenha sido feita em Atenas, na Academia de Platão. Papus de Alexandria (séc.IV) deixou registrados elogios à sua modéstia e consideração para com os outros. Mas sua presença de espírito talvez possa ser avaliada pela história segundo a qual, há uma indagação de Ptolomeu sobre se não haveria um caminho mais curto para a Geometria (que o proposto por Euclides). Teria respondido: "Não há nenhum caminho real na Geometria". Ou seja, perante a Geometria todos são iguais, até reis poderosos como Ptolomeu [5].

Não se sabe ao certo o local de nascimento de Euclides que ficou conhecido como Euclides de Alexandria porque foi chamado para lá ensinar matemática, a maioria de suas obras se perderam com o tempo, cinco obras sobreviveram até hoje: Os elementos, Os dados, Divisão de figuras, Os fenômenos e Óptica, dentre esses o mais famoso é Os elementos organizado em 13 capítulos dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar [2].

Boyer afirma que euclides foi responsável por organizar a geometria plana criando um modelo utilizado até nos dias atuais, tendo apenas umas modificações não utilizadas hoje em dia como algumas definições dadas por Euclides como, por exemplo, a definição de ponto e reta (um ponto é o que não tem partes, uma reta é um comprimento sem largura). Nos dias atuais são consideradas conceitos primitivos.

A geometria euclidiana é basedada em cinco postulados:

1. Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.

2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.

3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

4. Que todos os ângulos retos são iguais.

5. Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

Por muitos Euclides é considerado o pai da geometria, atualmente podemos dividir a geometria em Geometria Euclidiana e Não-Euclidiana onde, nessa segunda, não é válido o quinto postulado de Euclides.

3.1.2 CONSIDERAÇÕES DIDÁTICAS

O livro didático é considerado um apoio na formação dos alunos. Nesta etapa da Engenharia Didática, realizamos uma pesquisa em 3 livros recomendados pelo Guia de Livros Didáticos (Plano Nacional de Livros Didáticos 2017-2018-2019). Os livros didáticos foram escolhidos por eles fazerem parte dos livros didáticos das escolas públicas municipais de Manaus.

São eles:

(a) BIANCHINI, Edwaldo. Matemática Bianchini. Volume 3. 8ª ed. São Paulo: Moderna, 2015.

(b) MAZZIEIRO, Alceu dos Santos; Machado, Paulo Antônio Fonseca. Descobrindo e Aplicando a Matemática. Volume 3. 2ª ed. Belo Horizonte: Dimensão, 2015.

(c) SOUZA, Joamir Roberto de; Pataro, Patricia Rosana Moreno. Vontade de Saber. Volume 3. 3ª ed. São Paulo: FTD, 2015.

Quando analisamos o primeiro livro, observamos uma divisão do conteúdo de geometria plana em 5 capítulos que são: retas e ângulos, estudo dos polígonos, estudo dos triângulos, estudo dos quadriláteros e estudo das circunferências e círculo. O conteúdo da geometria plana começa com uma breve história que enfatiza que as retas são conceitos primitivos; em seguida aborda o conceito de posições de retas utilizando a figura de um dado, seguindo com uma atividade com o objetivo de identificar retas paralelas e concorrentes.

Continua o conteúdo mostrando a construção de retas paralelas através de régua e compasso e uma atividade para praticar as construções; a mesma coisa foi feita em seguida com retas perpendiculares. Na maioria das atividades o autor parte da definição na representação de linguagem natural e em seguida apresenta sua representação geométrica, não dando muita importância para a conversão do registro de representação geométrica para a linguagem natural.

Em todos os capítulos o autor inicia o conteúdo na linguagem natural para então expor na representação geométrica, tendo no fim de cada capítulo exercícios complementares, onde em sua grande maioria os discentes tem que utilizar álgebra para resolvê-los. Não encontramos muitas atividades que relacionam os conteúdos da geometria plana com o dia a dia dos alunos, sendo vistos com maior frequência no conteúdo de circunferências e círculos.

Entre cada capítulo tem o tópico *Para Saber Mais*, onde conta com algumas informações extras como História da Matemática e métodos de cálculos. No final de cada capítulo encontra-se o tópico *Diversificando*, onde conta com algumas atividade diversificadas tornando as atividades mais atrativas .

No segundo livro podemos observar que o conteúdo de Geometria Plana foi dividido em três capítulos que são: figuras e construções geométricas, desenhando figuras e descobrindo propriedades, semelhança e aplicações. Os autores iniciam o conteúdo revisando conceitos de retas e pontos, utilizando uma figura de uma reta e uma pirâmide e algumas questões que devem ser respondidas observando as figuras.

Observando os capítulos podemos perceber que os autores focam em aplicações matemáticas com a tentativa de deixar as atividades mais interessantes. O livro apresenta poucas explicações sobre conteúdos abordados e muitas atividades de forma que os conceitos vão sendo construídos nas atividades; a maioria destas fazem a conversão dos registros de representação da linguagem natural para a representação geométrica e em algumas atividades os discentes têm que realizar conversão da representação geométrica para a linguagem natural.

Os autores escrevem o livro de forma que os alunos possam ler em casa e aprender o conteúdo conforme forem realizando as atividades, pois essas atividades foram elaboradas para que os alunos aprendam os conceitos e propriedades da geometria plana gradativamente.

No fim de cada capítulo encontra-se o tópico Seção Olímpica, onde tem questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

No terceiro livro, o conteúdo da geometria plana foi dividido em 5 capítulos que são: ângulos, polígonos, triângulos, quadriláteros e formas circulares, medidas de superfície. No início de cada capítulo é passada uma curiosidade da vida real que envolva o conteúdo abordado e em seguida constam algumas questões em relação ao texto passado para ser respondidas pelos discentes. Os capítulos iniciam com uma breve explicação do conteúdo acompanhado de exemplos e figuras que lembram o objeto matemático abordado, como casas, pontes e torres.

Os autores não exploram as construções geométricas nas atividades, a maioria das questões os alunos têm que conhecer os conceitos da geometria plana para realizar as atividades. As atividades propostas são apenas para testar os conhecimentos adquiridos na explicação do conteúdo.

Verificou se que os autores não utilizam os exercícios para fazer conversões de registros de representação geométrica para a linguagem natural. A maioria das atividades fazem a conversão da representação em linguagem natural para a representação geométrica.

Através desta breve análise pode se concluir que o primeiro e o terceiro livro abordam os conteúdos de maneira similares no que se refere à sequência didática e a construção do conteúdo da geometria plana. O livro que mais se aproxima da nossa proposta é o segundo livro que, ao invés de explicitar os conteúdos no início dos capítulos, vai construindo os conceitos no decorrer das atividades.

Vale destacar que os três autores utilizam construções geométricas usando régua e compasso, porém essas construções são utilizadas na maioria das vezes para fixar os conhecimentos já adquiridos através de explicações verbais ou leituras. Em poucos casos, as construções geométricas foram utilizadas para os discentes construírem conceitos e perceberem propriedades.

A escolha bem, como a utilização do livro didático, são tarefas importantes. Cabe ao professor selecionar o livro didático mais adequado para preparar as aulas, porém ele não deve se basear apenas em um livro, pois todos os livros selecionados apresentam singularidades.

Os três livros selecionados fragmentam os conteúdos de forma diferente, cabendo ao professor buscar uma maneira de relacionar tais conteúdos da melhor forma possível e buscar outros recursos didáticos.

3.1.3 CONSIDERAÇÕES COGNITIVAS

Nesta fase da Engenharia Didática, procuramos identificar as principais dificuldades dos alunos na aprendizagem da Geometria Plana e na conversão entre os registros de representação geométrica e linguagem natural. Realizamos uma atividade inicial com o objetivo de situar-nos sobre o conhecimento prévio dos alunos, denominada *atividade prévia* (Ver Apêndice A).

Essa atividade foi aplicada antes da sequência de ensino com o objetivo de identificar as dificuldades dos alunos em relação às definições básicas da geometria plana e identificação do objeto matemático através de suas representações. Para esse fim foram propostas 10 questões: a primeira questão tem como objetivo verificar se os alunos conseguem identificar a posição relativa de duas retas através de sua representação geométrica. A segunda questão foi realizada com o objetivo de verificar o conhecimento dos alunos em relação aos elementos de uma circunferência e classificação dos triângulos quanto aos lados, assim articulando a representação geométrica e linguagem natural. A terceira questão tem como objetivo identificar se os alunos sabem o conceito de bissetriz. A quarta questão foi elaborada com o objetivo de identificar o conhecimento de um objeto matemático em sua representação em linguagem natural. As questões cinco e seis foram elaboradas articulando as representações geométricas e linguagem natural com o objetivo de que os alunos utilizassem as duas representações para chegar em uma solução para o problema. A sétima questão tem como objetivo constatar se os alunos conseguem identificar um objeto matemático em sua representação na linguagem natural. A oitava questão tem como objetivo identificar se os alunos sabem as condições entre três medidas dadas para formar um triângulo. A nona questão tem como objetivo verificar se os alunos conhecem mais de uma representação para um objeto matemático. A décima questão tem como objetivo verificar se o aluno consegue extrair informações em um objeto na sua representação geométrica e na sua representação na linguagem natural para resolver um problema.

Estas atividades serviram como parâmetros para averiguar o conhecimento prévio dos alunos, servindo como um dos pontos de apoio para a próxima etapa da engenharia didática.

Destaco que os conteúdos na atividade citada já foram trabalhados com os alunos nos anos anteriores do ensino fundamental (6° ano e 7° ano do ensino fundamental).

3.1.4 ANÁLISE DA ATIVIDADE PRÉVIA

Nesta etapa da Engenharia Didática, faremos uma análise sobre a atividade prévia que contém dez questões. Os alunos realizaram a atividade individualmente e dispuseram um tempo de 40 minutos para resolvê-las com seus conhecimentos prévios.

A atividade prévia foi realizada em sala de aula em uma escola da rede municipal de Manaus. A atividade teve a participação de 25 alunos do 8° ano do ensino fundamental.

A atividade tem como objetivo geral verificar o conhecimento das definições básicas da geometria plana. Por esse motivo as questões em sua grande maioria são objetivas. Os alunos demonstraram dificuldade em resolver a atividade. Alguns questionaram a razão de estar realizando uma atividade sem antes ter sido passado o conteúdo e foi explicado que os conteúdos da atividade já tinham sido estudados nos anos anteriores; no entanto, alguns alunos demonstraram nunca ter visto alguns conceitos matemáticos contidos na atividade, como o conceito de bissetriz e classificação do triângulo quanto ao seu ângulo e lado.

A tabela 4.1 está apresentando os resultados obtidos na atividade prévia, a letra 'X' marca as questões acertadas por determinado aluno.

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Aluno A	X			X						
Aluno B	X		X		X			X		
Aluno C	X		X				X		X	X
Aluno D	X		X	X					X	
Aluno E	X			X	X			X		
Aluno F	X				X			X	X	
Aluno G	X	X						X		
Aluno H		X	X	X		X		X		
Aluno I	X		X	X	X			X		
Aluno J	X		X		X	X			X	
Aluno K			X			X		X	X	
Aluno L	X		X	X	X	X	X	X	X	
Aluno M				X		X		X	X	
Aluno N			X	X	X	X	X	X		X
Aluno O		X			X					
Aluno P	X			X	X				X	
Aluno Q	X		X	X				X	X	
Aluno R	X		X	X	X	X		X	X	
Aluno S	X				X	X	X	X	X	X
Aluno T	X	X		X	X	X	X			
Aluno U	X			X	X	X			X	
Aluno V	X	X		X	X	X	X			
Aluno W	X	X		X	X	X		X	X	
Aluno X	X	X		X	X	X	X	X	X	X
Aluno Y	X	X		X	X	X	X	X	X	

Tabela 3.1: Atividade Prévia

A maioria das questões não exige cálculo para chegar a um resultado; necessitam apenas das definições básicas de alguns objetos matemáticos. Podemos observar na tabela 4.1 que a questão com maior número de acertos é a questão 1 e a com menor número de acertos é a questão 10, acreditamos que isso se deve ao fato da questão 1 possuir apenas um objeto matemático, onde o aluno precisava converter a representação geométrica em linguagem natural e da questão 10 possuir mais de um objeto matemático dificultando a conversão entre as representações geométricas e linguagem natural.

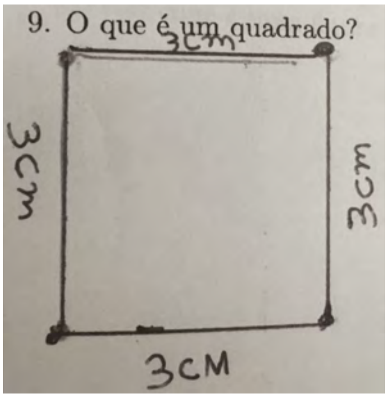
Na questão 2 os alunos deveriam ter o conhecimento prévio de centro e raio de uma circunferência, além disso saber como classificar um triângulo quanto a seu lado. Os dados mostram um nível de conhecimento insatisfatório com apenas oito acertos e acreditamos que pelo menos três desses alunos responderam a questão de forma aleatória, pois a questão 7 exigia que os alunos soubessem classificar os triângulos quanto ao seu lado, no entanto alguns alunos acertaram a questão 2 mas erraram a questão 7 que também mostrou um nível de conhecimento insatisfatório.

De acordo com os resultados podemos observar que alguns alunos não sabem o conceito de bissetriz, na questão 3 é suficiente saber a definição de bissetriz para acertar a questão. Na quarta questão, apesar de um bom resultado, alguns alunos mostraram não saber diferenciar objetos planos e tridimensional em suas representações na linguagem natural.

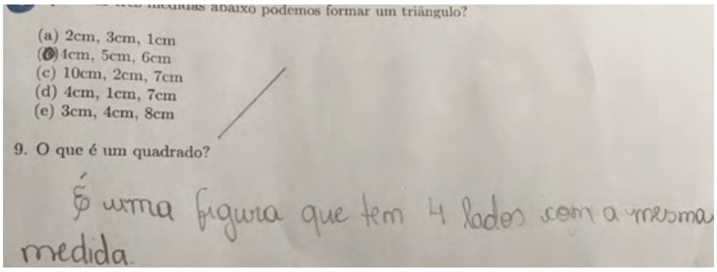
Na questão 5 é necessário conhecer o conceito de perímetro, uma questão bastante simples que não envolve muito conhecimento; no entanto houve um número considerável de erros. Apesar da questão 6 envolver cálculo de área, não precisa de uma fórmula matemática para resolvê-la. Alguns alunos, mesmo sem saber o conceito de área, tentaram contar quantos quadrados vermelhos tinham na figura, alguns não perceberam que juntando duas metades do quadrado vermelho iriam formar um quadrado vermelho. Acreditamos que isso se deve ao fato desses alunos não conseguirem fazer a conversão de duas representações, não associam a metade do quadrado vermelho com a metade de sua área.

A grande maioria dos alunos não sabem as condições para que três medidas formem um triângulo. A questão 8 é uma questão de nível de dificuldade baixa, no entanto houve uma quantidade considerável de alunos que erraram.

A questão 9 não é objetiva. Por esse motivo consideramos corretas as respostas que representassem o quadrado em alguma de sua representação, mesmo que parcialmente correta como foi o caso dos alunos P e R (Figura 3.1). Foi considerada errada a questão que ficou em branco ou que a resposta estivesse totalmente errada que foi o caso dos alunos H e O (Figura 3.2). Esperávamos que 95% dos alunos acertassem parcialmente a questão.

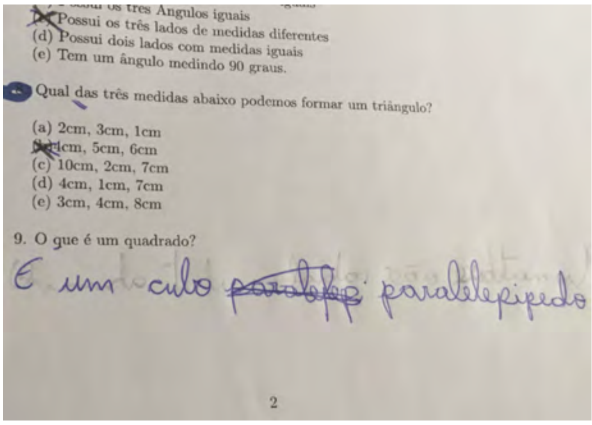


(a) Resposta do aluno P

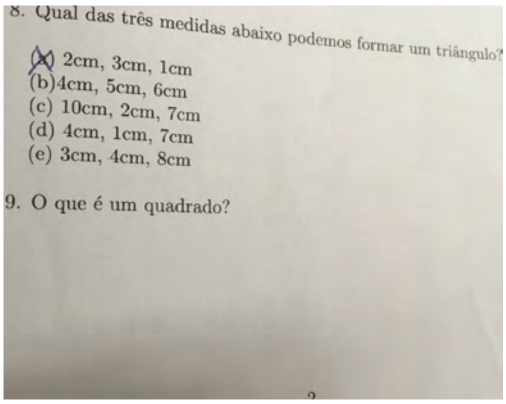


(b) Resposta do aluno R

Figura 3.1: Respostas dos alunos P e R



(a) Resposta do aluno H



(b) Resposta do aluno O

Figura 3.2: Respostas dos alunos H e O

3.1.5 CONSTRANGIMENTOS

Como observado na análise prévia, em experiências vivenciadas como docente, pudemos perceber que os alunos, em sua maioria, apresentam dificuldades em articular e converter registro de representação, ou seja, relacionar a definição de um objeto matemático com sua representação geométrica e vice-versa.

Um constrangimento que pode dificultar na aplicação da sequência de ensino é a dificuldade dos alunos na conversão dos registros.

Outro constrangimento que pode dificultar a implementação de nossa proposta foi a dificuldade apresentada na questão 9 da análise prévia, em que os alunos deveriam representar o quadrado em algum registros de representação do mesmo e não teve aluno que acertou 100% a questão. Alguns alunos nem mesmo sabiam o que é um quadrado; confundiram com outros objetos matemáticos. Por esse motivo estamos apresentando uma proposta para o ensino deste conteúdo através de construções geométricas com régua, esquadros, transferidor e compasso.

As atividades propostas visam conectar as representações geométricas e linguagem natural para que o aluno compreenda que cada objeto matemático pode apresentar diversas representações. Acreditamos que, com a utilização da construção geométrica, podemos auxiliar os alunos na visualização da representação geométrica e conversão na linguagem natural, melhorando qualitativamente o seu entendimento na conversão de registros.

3.2 CONCEPCÕES E ANÁLISE *A PRIORI*

Após estudos realizados sobre Geometria Plana, sobre a sua evolução ao longo dos anos e sobre como esse conteúdo é tratado nos livros didáticos e as dificuldades dos alunos, elaboramos uma sequência de ensino com algumas atividades.

A proposta tem como um dos objetivos, abordar o estudo da Geometria Plana de uma maneira diferente da tradicional (aula expositiva com quadro branco e pincel): durante sua aplicação, objetivamos fazer com que os alunos fiquem motivados na resolução das atividades propostas, procurando tornar a aprendizagem de Geometria Plana mais significativa.

Nossas primeiras escolhas para a construção da atividade que realizamos diz respeito às variáveis globais. Estas escolhas estão descritas a seguir:

a) **Buscar articular registros geométricos e linguagem natural**

Nossa escolha como referencial teórico foi a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval pra a construção da sequência de atividades dessa pesquisa. Nossas atividades contemplam a articulação de registros geométricos e linguagem natural, pois devemos articular pelo menos dois registros para que haja uma aprendizagem satisfatória e para não confundir o objeto com sua representação [6]. Como dito no capítulo um, as representações semióticas são indispensáveis para a comunicação, pois não existe conhecimento que possa ser mobilizado sem a utilização de um registro de representação.

b) **Trabalhar individualmente e em duplas**

O trabalho individual pode ser melhor avaliado em relação ao aprendizado do aluno e favorece na concentração para desenvolver ideias. Acreditamos que os alunos, trabalhando em grupos, podem sair da rotina da aula tradicional, na qual o aluno copia o conteúdo e resolve os exercícios; além disso podem trocar informações, discutir idéias, promovendo o debate e discussão sobre o conteúdo, aprendendo a respeitar opiniões. Por esses motivos vamos alternar entre atividades individuais e em duplas.

c) **Utilizar como recurso construções geométricas com régua, transferidor, esquadros e compasso**

Ao planejar nossas aulas, buscamos trabalhar com alguns conceitos da Geometria Plana. Para isso elaboramos uma proposta de ensino com o uso de construções geométricas.

Atualmente temos diversos softwares que realizam construções geométricas de forma rápida e precisa sem muito esforço mental. Escolhemos utilizar construções geométricas com régua, transferidor, esquadro e compasso pela sua simplicidade e facilidade de uso, podendo ser usados em qualquer espaço dentro da escola. Além disso, muitas escolas não permitem a instalação de novos softwares.

A construção Geométrica é uma poderosa ferramenta em que se pode trabalhar conceitos da Geometria Plana, antes mesmo de ter definido o objeto matemático trabalhado, permitindo que se trabalhe diversos conceitos da Geometria Plana em uma única atividade. Uma de suas vantagens é que o material utilizado é de fácil acesso.

Aulas em ambientes dinâmicos podem apresentar um potencial para articular registros de representação de diferentes objetos matemáticos, tornando-se significativo no processo de construção de conceitos. A construção geométrica apresenta grande potencial aos processos de aprendizagem, oferecendo algumas vantagens, entre elas a de desenvolver a criatividade.

Buscamos com isso construir uma sequência de ações para serem aplicadas nos encontros que possibilitem aos alunos compreender alguns conteúdos da Geometria Plana, sabendo fazer a conversão de pelo menos dois registros de representação geométrica e linguagem natural.

3.2.1 HIPÓTESES

Durante a construção da sequência de ensino, fizemos previsões a respeito do comportamento dos alunos diante das situações didáticas propostas. Essas hipóteses iniciais foram comparadas posteriormente com os resultados finais.

As atividades foram elaboradas para que os alunos conseguissem representar objetos matemáticos de forma geométrica e linguagem natural, ressaltando a importância de articular tais registros com o uso de construções geométricas.

Elaboramos as atividades para que os alunos percebessem gradativamente relações entre os objetos em sua representação geométrica e convertendo para a linguagem natural, a partir de conhecimentos prévios.

As atividades propostas foram realizadas individualmente e em duplas (permitindo um trio pela impossibilidade de formar a dupla devido ao número ímpar de alunos) para, em primeiro momento, desenvolver as suas próprias ideias e em segundo momento trocar conhecimentos, ampliando conceitos que possuíam anteriormente. Acredita-se que com a aplicação da sequência didática e suas resoluções pelos alunos, estes irão adquirir conhecimento sobre as representações geométricas e linguagem natural de triângulos, além de contribuir para o raciocínio ao criar figuras planas.

3.3 EXPERIMENTAÇÕES

Realizaram-se encontros duas vezes por semana com uma turma de 25 alunos do oitavo ano do ensino fundamental, com cerca de 1h de duração cada encontro. O trabalho foi dividido em duas etapas e seis encontros. Na primeira etapa vimos uma atividade e na segunda outras duas ações, as quais serão descritas a seguir.

No primeiro encontro com os alunos, exercitamos conceitos da geometria plana, pois os alunos demonstraram não dominar alguns conhecimentos prévios necessários como o estudo das retas e ângulos. No segundo encontro, aplicou-se a atividade prévia e a turma realizou a atividade em sua totalidade.

No terceiro encontro, exercitamos algumas construções geométricas, pois os alunos informaram que nunca haviam trabalhado com construções geométricas. Iniciamos com as construções de retas paralelas e perpendiculares utilizando régua e esquadro. Como nosso objetivo não é que os alunos aprendam a fazer construções apenas com régua e compasso, algumas construções foram simplificadas, como construir retas perpendiculares utilizando régua e esquadro e encontrar o ponto médio com as medidas da régua. Continuamos treinando a construção de ângulos, bissetriz de um ângulo e ângulos complementares e suplementares com o auxílio de um compasso e transferidor.

No quarto encontro, aplicou-se a atividade um da Etapa 1 (Ver Apêndice C), e no quinto encontro aplicou-se a atividade dois da Etapa 2 (Ver Apêndice D) nas quais os alunos deveriam realizar algumas construções geométricas e responder alguns itens. No sexto encontro aplicou-se a atividade 3 da Etapa 2 (Ver Apêndice E).

3.3.1 RELATÓRIO DA ETAPA 1

Nossa atividade foi realizada em sala de aula da respectiva escola. Para iniciar as atividades com a turma foi pedido que se organizassem em duplas. A atividade 1 contém atividades de construção de triângulos, envolvendo classificação de triângulos quanto ao seu lado, como podemos observar no Apêndice C.

Na aula anterior cada aluno teve uma breve explicação de como fazer construções com régua, esquadro, transferidor e compasso. Até o momento não surgiu maiores dificuldades sobre o uso dessas ferramentas para fazer construções geométricas.

Nesta atividade, propomos aos alunos que construíssem os triângulos equiláteros, isósceles e escalenos, sem que tenha sido explicado o conteúdo e dado nomes a esses triângulos. A atividade foi dividida em três questões com alguns itens para que os alunos percebessem algumas propriedade de tais triângulos. Não houve questionamento dos alunos sobre a atividade.

Observamos que no inicio da atividade os alunos não estavam preocupados com o conteúdo matemático relacionado às construções. Acreditamos que isso se deve ao fato de não ter ocorrido uma aula expositiva antes das atividades, deixando assim um ambiente mais dinâmico sem a responsabilidade de ter que aprender determinado conteúdo. Para eles, as construções eram como brincadeiras. As duplas não tiveram dificuldade em realizar as construções.

Observamos que algumas duplas discutiam para chegar a uma resposta nos itens (a) e (b) das questões um e dois.

Na figura 3.3 tem-se a construção da questão um da dupla A

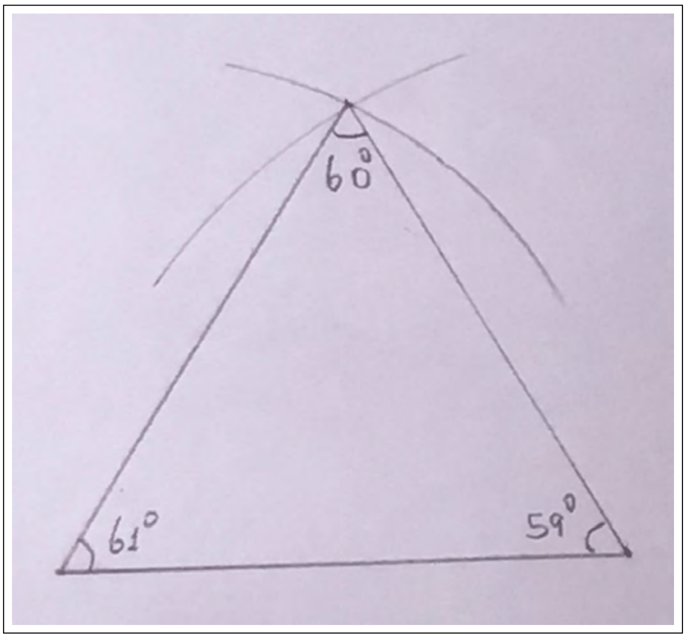


Figura 3.3: Resposta da questão 1 da Atividade 1 Dupla A

Algumas duplas cometeram pequenos erros de construção e de medição de ângulo como foi o caso da dupla A, o que já era um resultado esperado pois utilizamos métodos manuais, mas esse fato não interfere significativamente nos resultados esperados.

A dupla E escreveu como resposta da questão 1 item b da atividade 1: "Os ângulos têm os mesmos valores". E a dupla C na mesma questão respondeu: "Os ângulos têm quase os mesmos valores".

Em observação percebemos que nem todos os alunos conseguiram encontrar os três ângulos internos iguais a 60° mas os valores foram próximos dos 60°, a maioria das duplas perceberam que em um triângulo com os lados de mesmas medidas terão ângulos internos iguais a 60°.

A seguir temos algumas resoluções da questão dois (Figura 3.4 e 3.5):

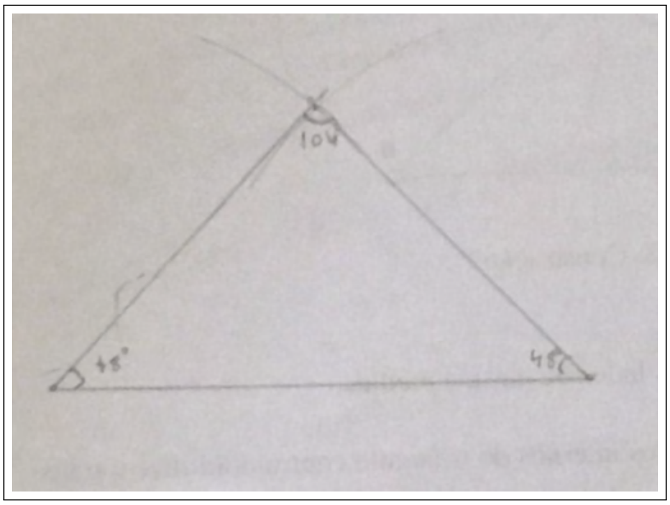


Figura 3.4: Resposta da questão 2 da Atividade 1 Dupla C

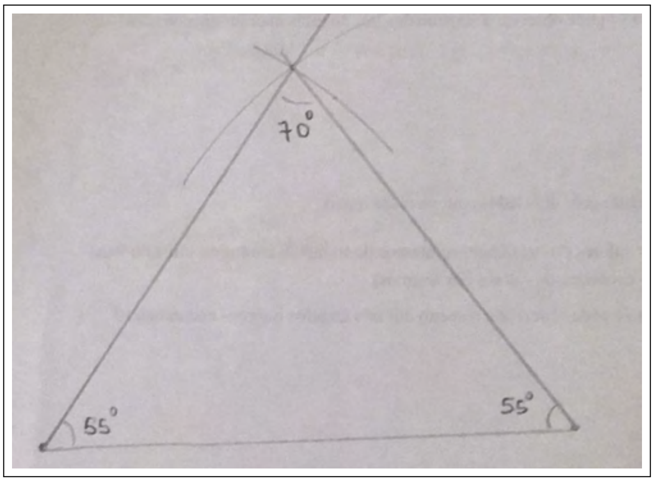


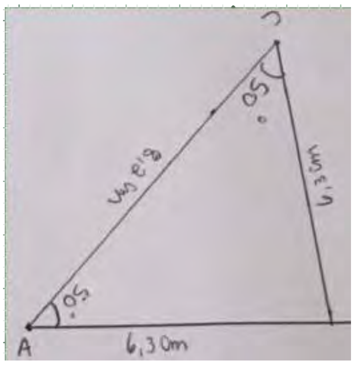
Figura 3.5: Resposta da questão 2 da Atividade 1 Dupla A

Não houve dificuldades das duplas ao realizarem as construções da questão dois.

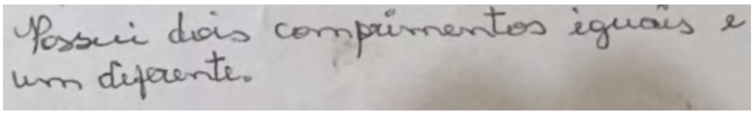
A dupla A chegou à conclusão esperada. Percebemos que as duplas tiveram mais facilidade em construir um triângulo isósceles; até o momento, nenhuma dupla mostrou saber o conteúdo abordado, mas já perceberam que existem diferentes tipos de triângulos em relação aos seus lados e isso influencia nos seus ângulos internos.

No item b da questão dois da atividade 1 a dupla D respondeu: "possui dois ângulos iguais e um diferente".

As duplas conseguiram compreender em sua grande maioria que se o triângulo tiver dois ângulos de valores iguais então também terá dois lados de mesma medida (Ver Figura 3.6)



(a) Resposta da dupla G



(b) Resposta da dupla G

Figura 3.6: Resposta da questão 2 item C da atividade 1 dupla G

A questão três da atividade um foi realizado por todas as duplas sem dificuldades (Ver figura 3.7)

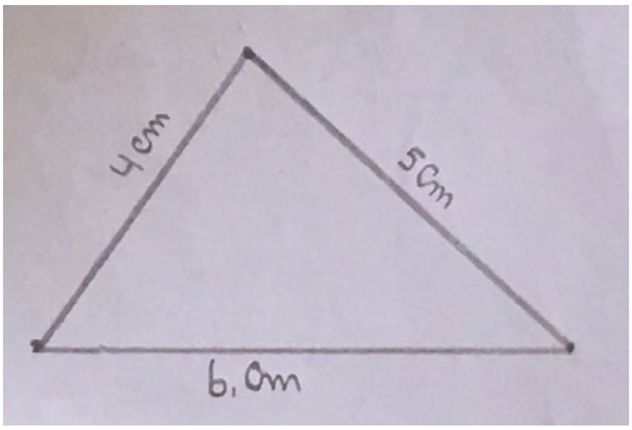


Figura 3.7: Resposta da questão 3 da atividade 1 dupla D

Ao final da Atividade foi dado uma breve explicação sobre classificação dos triângulos e junto com os alunos foi feita a conversão do registro de representação geométrica para a linguagem natural dos conceitos matemáticos trabalhados, usando como base a atividade aplicada, sendo necessário apenas um pouco mais de cinco minutos para fazer a conversão de toda atividade um. Os alunos demonstraram facilidade em fazer a conversão. Antes da aplicação da sequência didática, os alunos apresentavam dificuldades em relacionar o objeto matemático na sua representação da linguagem natural com a sua representação geométrica.

3.3.2 RELATÓRIO DA ETAPA 2

Na etapa dois realizamos duas atividade com questões relacionadas com o conteúdo da geometria plana (Estudo dos triângulos).

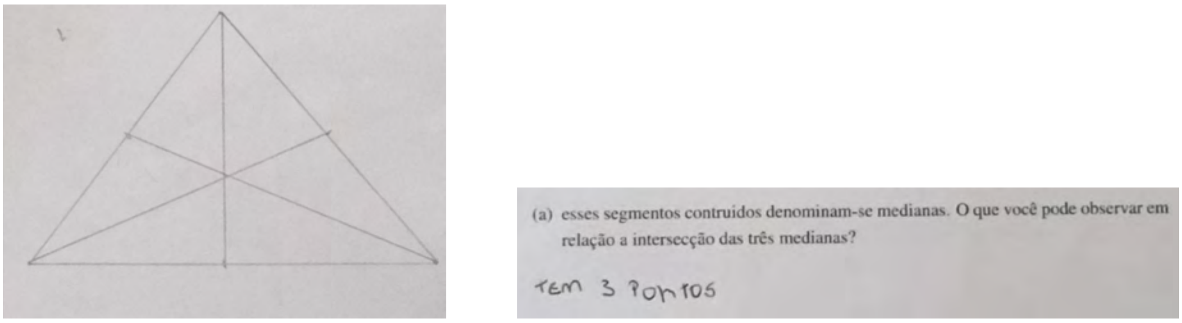
ATIVIDADE 2

A atividade 2 é similar à atividade 1, só que agora utilizamos como base as cevianas, onde as duplas deveriam realizar construções para identificar tais conceitos.

Nesta etapa, sentimos que os alunos estavam mais tranquilos em relação ao uso do material para as construções geométricas. Neste dia, uma aluna comentou que estava gostando das atividades pois ela não gostava de matemática mas gostava de desenhar. Em geral, a turma estava motivada para a realização da atividade.

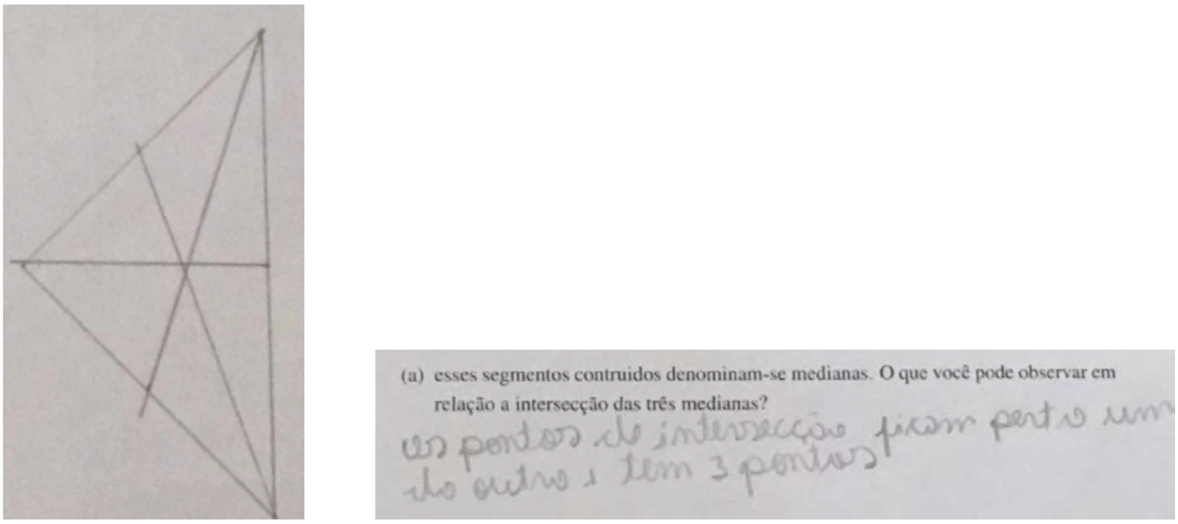
A atividade 2 foi realizada em duplas. Procuramos manter as mesmas duplas da atividade 1. A questão 1 da atividade 2 foi realizada sem dificuldades pelas duplas, porém apenas 6 duplas conseguiram construir as medianas de forma que se intersectassem no mesmo ponto. Entendemos que esse tipo de construção é difícil de manter a precisão devido aos materiais utilizados e à falta de experiência dos alunos. No entanto, isso não prejudica o andamento das atividades,pois nosso objetivo é que os alunos tenham um breve conceito do objeto matemático em sua representação geométrica de forma que facilite a conversão para a representação na linguagem natural.

Apresentamos algumas respostas dadas pelas duplas sobre a questão 1 da atividade 2 (Figuras 3.8 e 3.9).



(a) Resposta do dupla C (b) Resposta do dupla C

Figura 3.8: Resposta da questão 1 da atividade 2 dupla C



(a) Resposta do dupla G (b) Resposta do dupla G

Figura 3.9: Resposta da questão 1 da atividade 2 dupla G

Na segunda questão as duplas tinham que fazer a conversão para a representação geométrica. Em observação, notamos que os alunos tiveram mais facilidade para construir a figura em relação à questão 1. As duplas desenharam um triângulo utilizando uma régua e traçaram a altura utilizando régua e esquadro. Observamos que a maioria das duplas conseguiram construir as alturas de forma que se intersectassem no mesmo ponto.

A seguir temos algumas respostas da questão 2 da atividade 2 (ver figura 3.10 e 3.11):

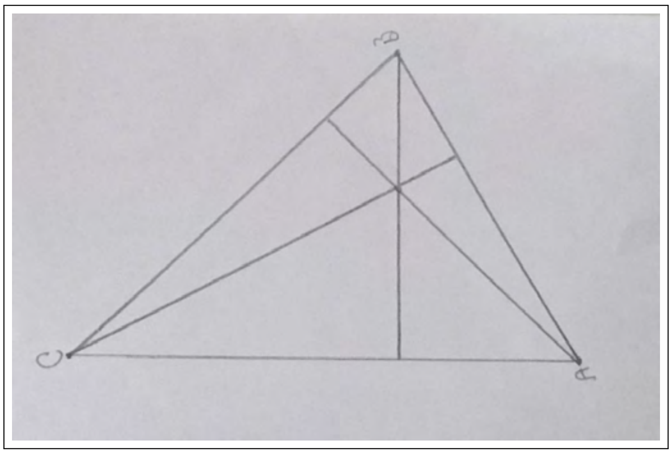


Figura 3.10: Resposta da questão 2 da Atividade 2 Dupla E

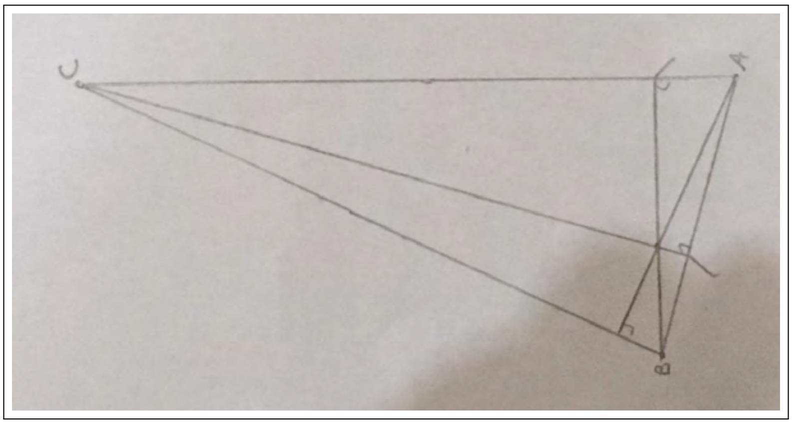


Figura 3.11: Resposta da questão 2 da Atividade 2 Dupla D

Na questão 3 da atividade 2 as duplas tinham que construir bissetrizes de um triângulo. Verificamos que as duplas utilizaram dois métodos de construção. O primeiro método não foi muito eficaz, onde as duplas primeiro desenhavam um triângulo qualquer e depois dividiam cada ângulo interno em dois ângulos com a ajuda de um transferidos. Essas duplas realizaram a atividade na mesma ordem que está pedindo na questão 3. Alguns alunos comentaram que não conseguiram dividir o ângulo em dois pois na hora de medir o ângulo tinham como resultado ângulos como 31°, 57°, assim dando uma pequena margem de erro na hora da construção.

A seguir temos algumas respostas da questão 3 da atividade 2 que utilizaram o primeiro método (ver figura 3.12 e 3.13):

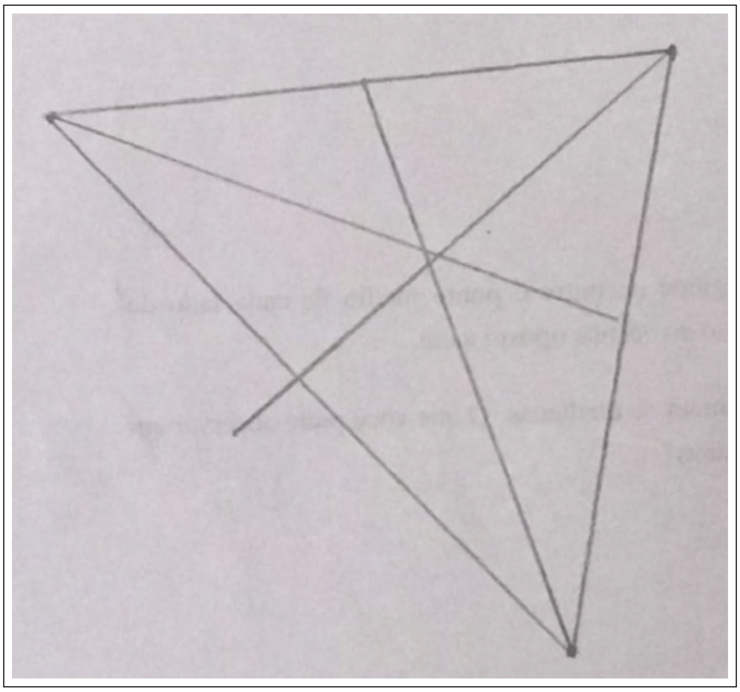


Figura 3.12: Resposta da questão 3 da Atividade 2 Dupla D

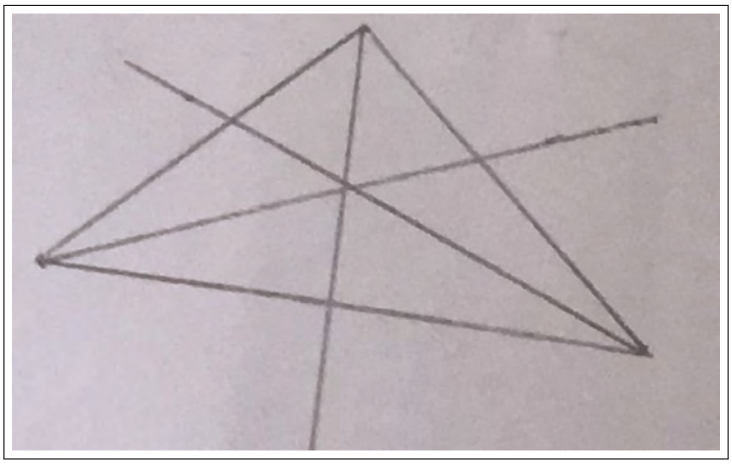


Figura 3.13: Resposta da questão 3 da Atividade 2 Dupla A

O segundo método utilizado pelos alunos foi construir triângulos com ângulos pré-definidos, o que foi uma boa tática, já que facilitou na divisão dos ângulos em duas medidas pois, quando feito essa divisão com um transferidor, pode ser que não seja tão fácil encontrar a metade do ângulo, dependendo do ângulo trabalhado.

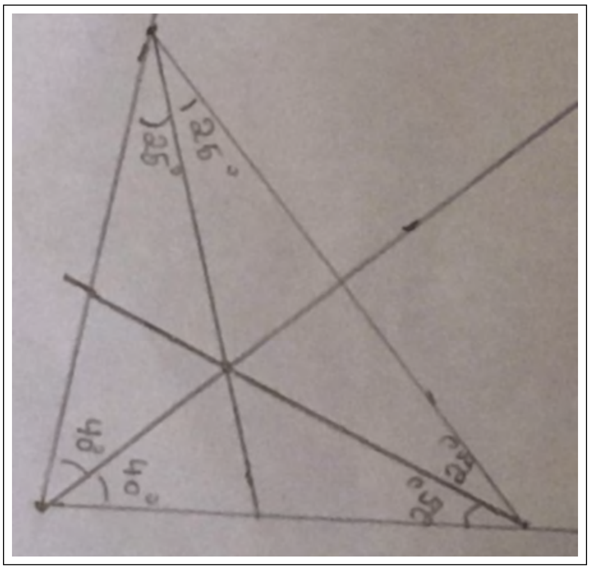


Figura 3.14: Resposta da questão 3 da Atividade 2 Dupla F

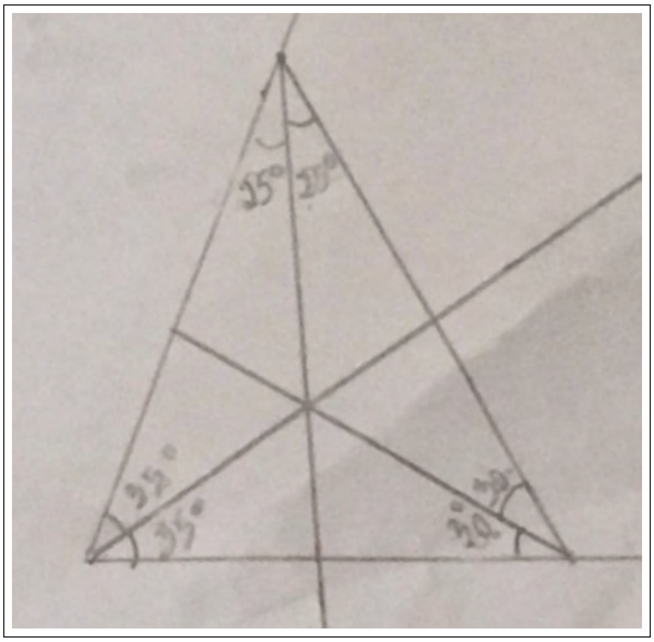


Figura 3.15: Resposta da questão 3 da Atividade 2 Dupla G

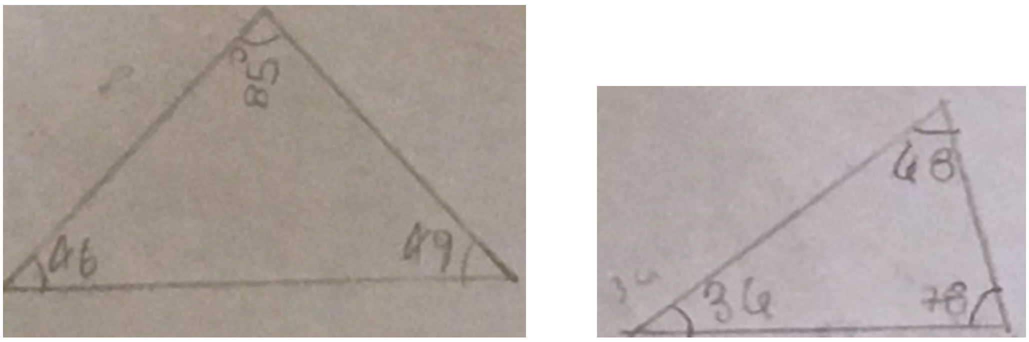
Ao final da atividade 2 fizemos a conversão para a representação da linguagem natural dos objetos matemáticos estudados através de uma breve aula expositiva, associando assim as definições dos objetos matemáticos às suas representações geométricas. Os alunos demonstraram estar assimilando com facilidade o conteúdo. A cada conceito exposto na linguagem natural eles associavam à construção que fizeram.

ATIVIDADE 3

Na atividade 3 vimos conceitos de ângulos internos de triângulos e um caso de congruência de triângulos (caso LLL). Os demais casos não foram abordados pois podem ser feitos de modo similar ao caso LLL.

Na questão 1 da atividade 3 pedimos que as duplas construíssem dois triângulos diferentes e fizessem a soma dos ângulos internos de cada triângulo e, como nas atividades anteriores observamos que haviam algumas duplas que estavam medindo os ângulos com uma margem de erro de 1° a 2°. Para minimizar os erros, sugerimos às duplas que construíssem os triângulos com ângulos escolhidos no momento da construção em vez de construir um triângulo e depois medir os ângulos. Com isso a margem de erros diminuiu significativamente.

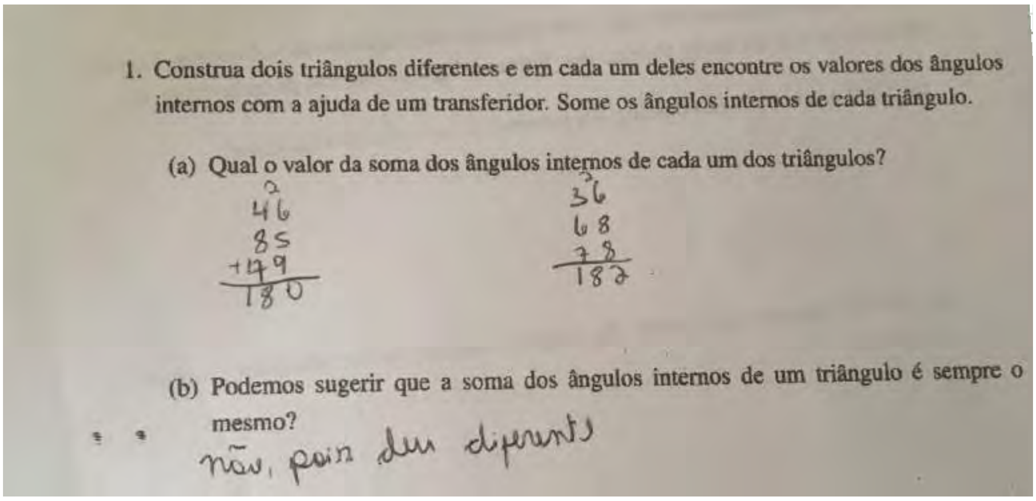
Apresentamos a seguir alguns resultados das duplas (Ver figura 3.16, 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22 e 3.23).



(a) Resposta da dupla G

(b) Resposta da dupla G

Figura 3.16: Construção da questão 1 da atividade 3 dupla G



1. Construa dois triângulos diferentes e em cada um deles encontre os valores dos ângulos internos com a ajuda de um transferidor. Some os ângulos internos de cada triângulo.

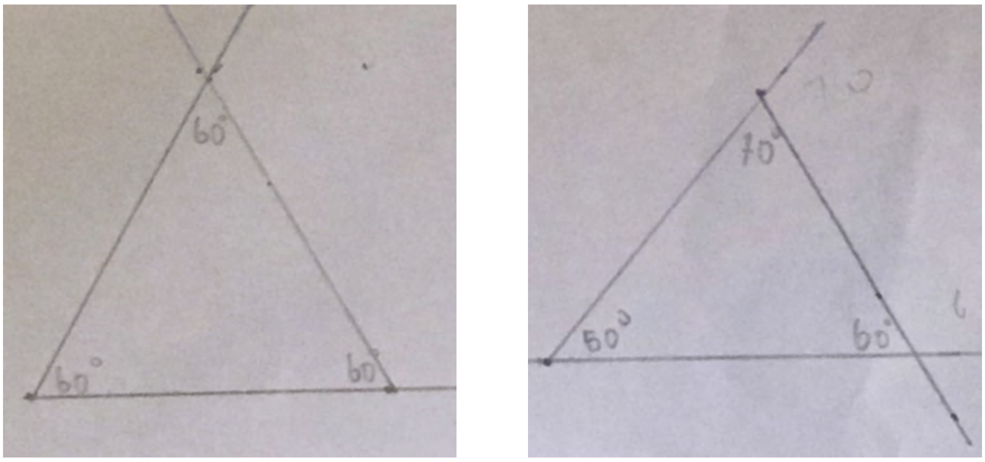
   (a) Qual o valor da soma dos ângulos internos de cada um dos triângulos?

   46 + 85 + 49 = 180   36 + 68 + 78 = 182

   (b) Podemos sugerir que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre o mesmo?

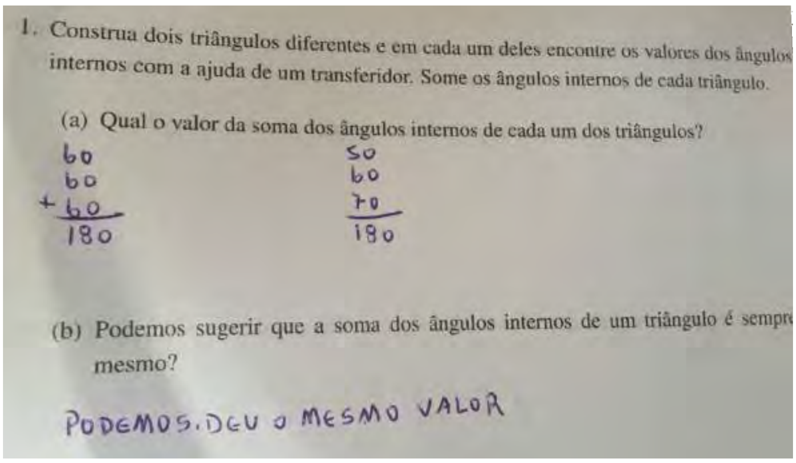
   não, pois deu diferente

Figura 3.17: Itens a e b da questão 1 da Atividade 3 Dupla G



(a) Resposta da dupla A   (b) Resposta da dupla A

Figura 3.18: Construção da questão 1 da atividade 3 dupla A



1. Construa dois triângulos diferentes e em cada um deles encontre os valores dos ângulos internos com a ajuda de um transferidor. Some os ângulos internos de cada triângulo.

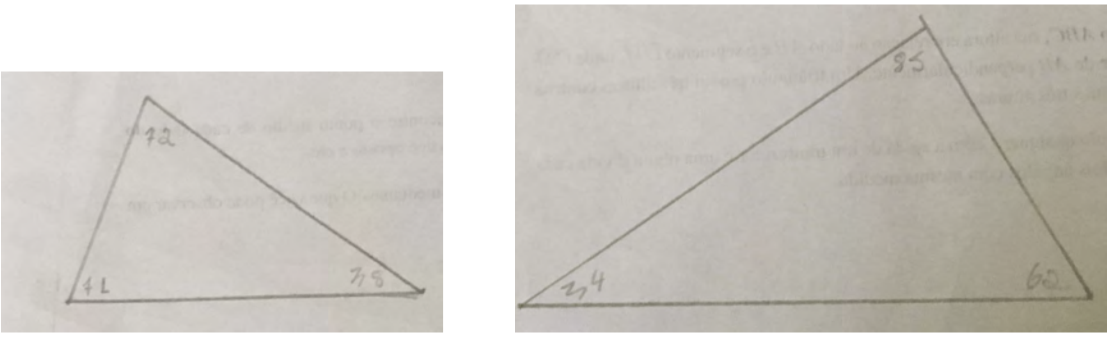
   (a) Qual o valor da soma dos ângulos internos de cada um dos triângulos?

   60 + 60 + 60 = 180   50 + 60 + 70 = 180

   (b) Podemos sugerir que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre o mesmo?

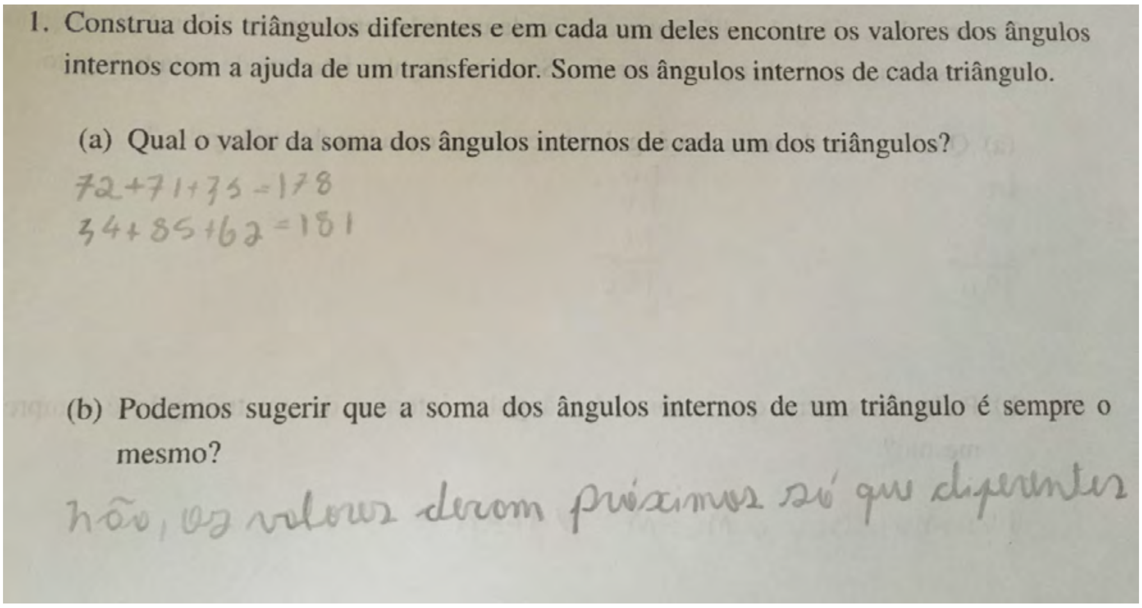
   PODEMOS. DEU O MESMO VALOR

Figura 3.19: Itens a e b da questão 1 da atividade 3 dupla A



(a) Resposta da dupla C (b) Resposta da dupla C

Figura 3.20: Resposta da questão 1 da atividade 3 dupla C



1. Construa dois triângulos diferentes e em cada um deles encontre os valores dos ângulos internos com a ajuda de um transferidor. Some os ângulos internos de cada triângulo.

   (a) Qual o valor da soma dos ângulos internos de cada um dos triângulos?

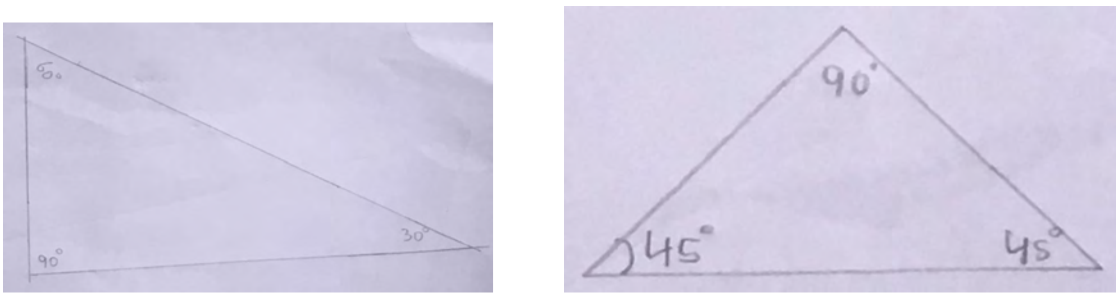
   72+71+35=178

   34+85+62=181

   (b) Podemos sugerir que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre o mesmo?

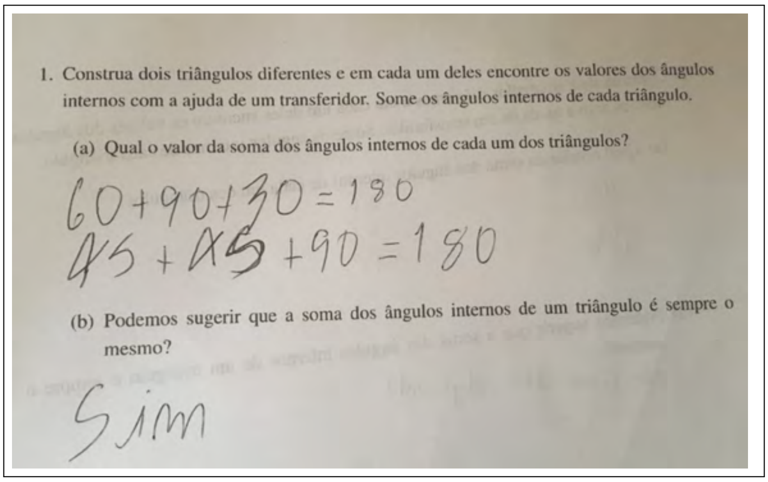
   não, os valores deram próximos só que diferentes

Figura 3.21: Item a e b da questão 1 atividade 3 dupla C



(a) Resposta da dupla E (b) Resposta da dupla E

Figura 3.22: Resposta da questão 1 da atividade 3 dupla E


1. Construa dois triângulos diferentes e em cada um deles encontre os valores dos ângulos internos com a ajuda de um transferidor. Some os ângulos internos de cada triângulo.

(a) Qual o valor da soma dos ângulos internos de cada um dos triângulos?

60+90+30=180
45+45+90=180

(b) Podemos sugerir que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre o mesmo?

Sim

Figura 3.23: Item a e b da questão 1 da atividade 3 dupla E

Podemos observar que as duplas C e G primeiro construiu os triângulos para depois encontrar as medidas dos ângulos. Isso fez com que tivesse uma pequena margem de erro nas medidas. Já as duplas A e E fizeram a construção com ângulos escolhidos o que fez que essa margem de erro diminuísse e assim fizesse a medição dos ângulos de forma correta.

A questão 2 da atividade 3 objetivou reforçar a questão 1 para que os alunos percebessem que em um triângulo basta ter os valores de dois ângulos internos. Observando-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° é possível encontrar o valor do terceiro ângulo.

Todas as duplas conseguiram encontrar o valor do ângulo de 80°. Algumas duplas não utilizaram o transferidor pois supuseram que a soma dos ângulos internos tinha que ser 180°.

A seguir temos alguns resultados das duplas (Ver figuras 3.24 e 3.25).

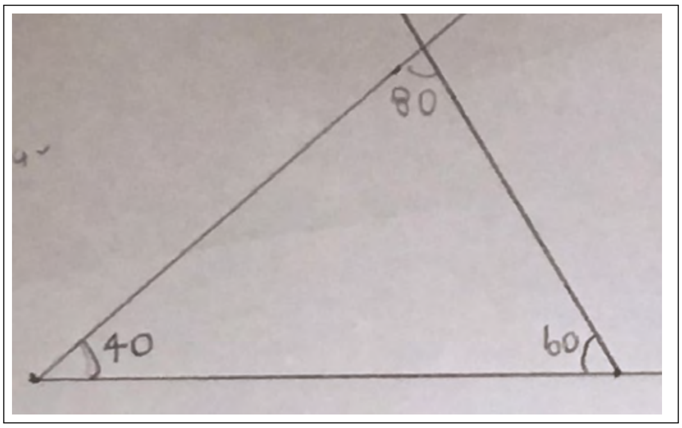


Figura 3.24: Questão 2 atividade 3 dupla E

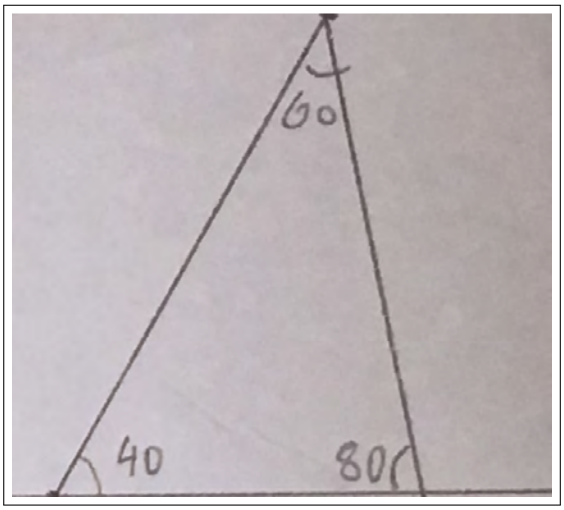


Figura 3.25: Questão 2 atividade 3 dupla B

Na questão 3 da atividade 3 aplicamos uma atividade para aplicar os conteúdos já vistos nas 3 atividades. A construção dada foi feita com as medidas exatas para os alunos poderem encontrar o resultado com o transferidor caso escolha essa opção. Imaginamos que a maioria das duplas iria encontrar o resultado através do transferidor, mas não foi o que conteceu, talvez por pensarem que não poderiam utilizar o transferidor.

Aqui temos alguns resultados feitos pelas duplas (ver figuras 3.26, 3.27, 3.28)

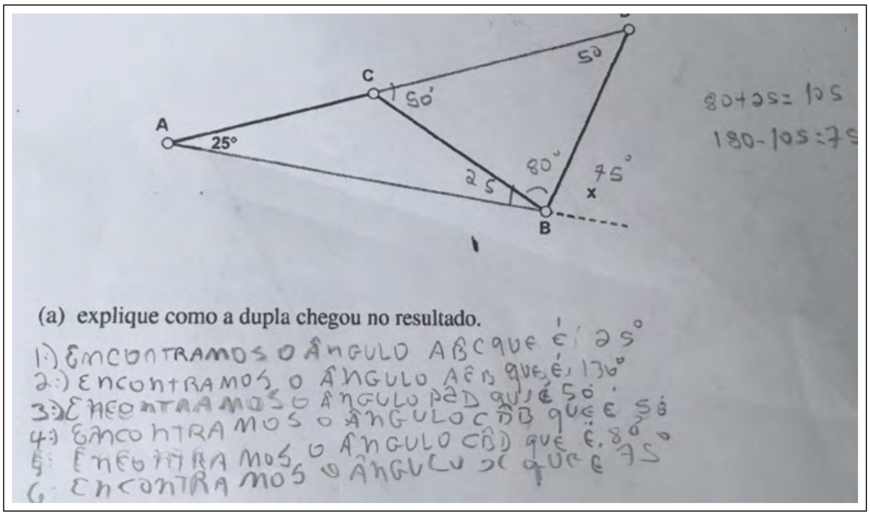


Figura 3.26: Questão 3 atividade 3 dupla B

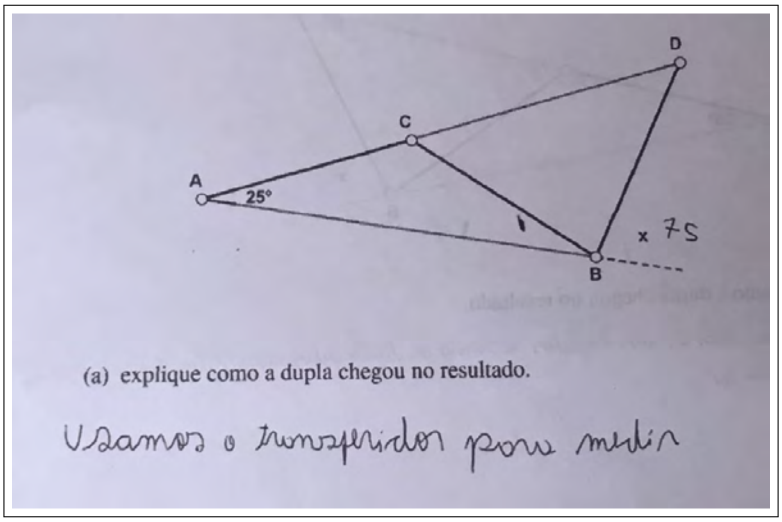


Figura 3.27: Questão 3 atividade 3 dupla G

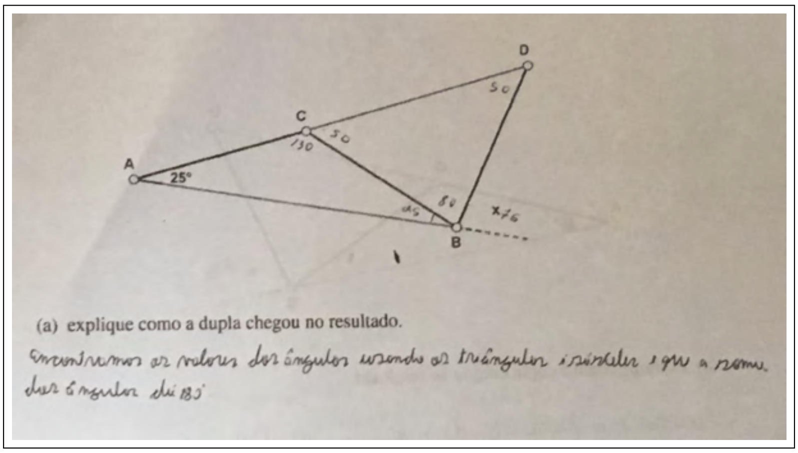
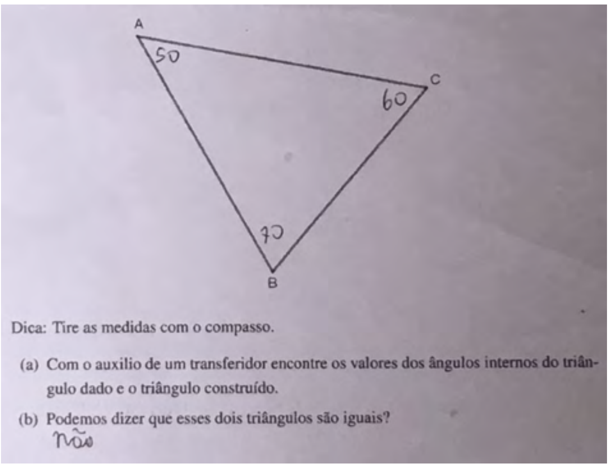


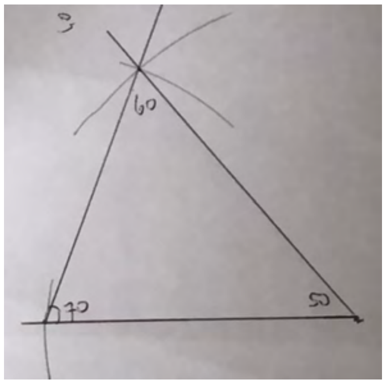
Figura 3.28: questão 3 atividade 3 dupla E

Na quarta questão da atividade 3 propomos aos alunos que construíssem um triângulo com as mesmas medidas do triângulo dado e depois comparasse para verificar se os triângulos são iguais (congruentes). Nessa atividade, temos o caso de congruência LLL, estamos utilizando o termo "igual"pois ainda não foi exposto o conteúdo nos termos formais, o que será feito no fim da atividade 3.

Solução dada pela dupla G (Figura 3.29).



(a) Resposta da dupla G

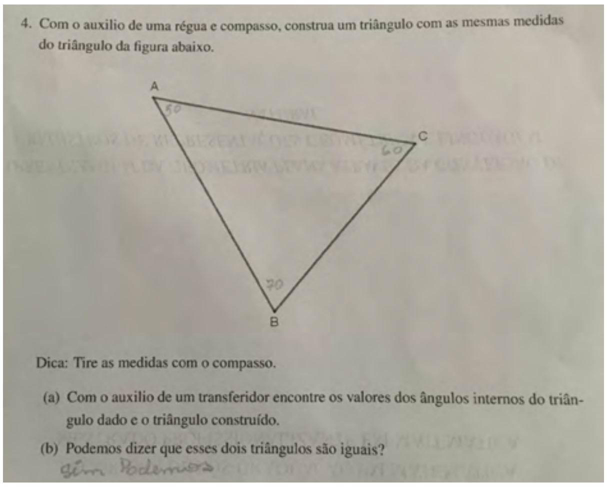


(b) Resposta da dupla G

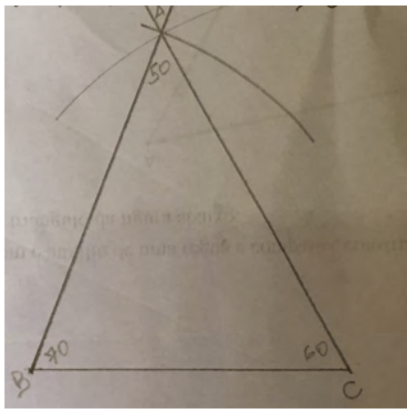
Figura 3.29: Resposta da questão 4 da atividade 3 dupla G

Podemos observar que a dupla G não considerou os triângulos iguais apesar dos triângulos terem as mesmas medidas e mesmos ângulos. Ao serem questionados, disseram que são diferentes porque não estão na mesma posição; o mesmo ocorreu com outras 5 duplas.

As duplas D e F mostraram compreender que os triângulos são iguais pois tinham as mesmas propriedades (Figura 3.30 e 3.31).

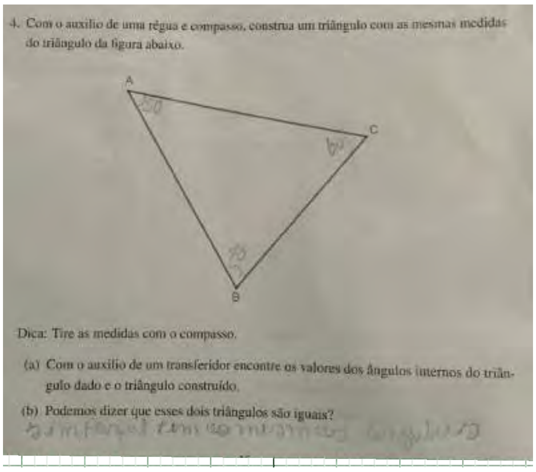


(a) Resposta da dupla D

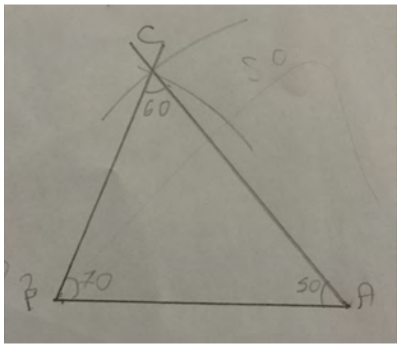


(b) Resposta da dupla D

Figura 3.30: Resposta da questão 4 da atividade 3 dupla D



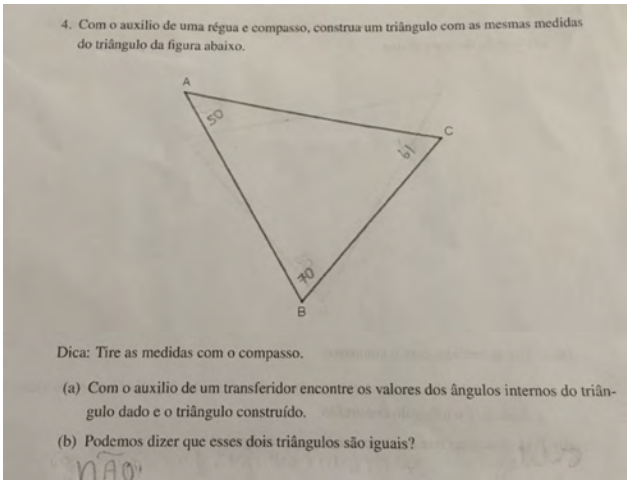
(a) Resposta da dupla F



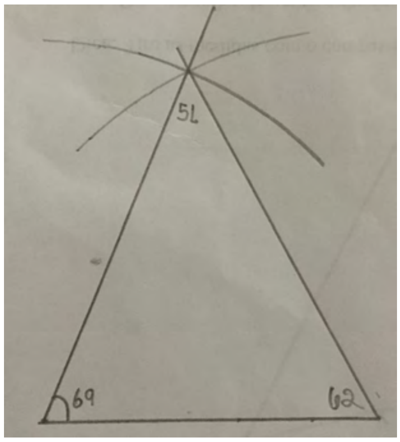
(b) Resposta da dupla F

Figura 3.31: Resposta da questão 4 da atividade 3 dupla F

Observamos na figura que a dupla H não chegou a uma conclusão correta pois fez medições erradas (Ver figura 3.32).



(a) Resposta da dupla F



(b) Resposta da dupla F

Figura 3.32: Resposta da questão 4 da atividade 3 dupla F

Assim como na atividade 1 e 2, finalizamos a atividade 3 com uma aula expositiva com a participação dos alunos para fazermos a conversão da representação geométrica para a linguagem natural, associando os conceitos formais dos objetos matemáticos as suas representações geométricas.

3.4 ANÁLISE *A PRIORE* E ANÁLISE *A POSTERIORI*

Nesta fase da Engenharia Didática, confrontam-se as análises *a priori* e *a posteriori*, ao analisar os dados obtidos na experimentação da sequência didática, para posteriormente validar ou não a pesquisa sobre a aprendizagem da geometria plana através de construções geométricas.

3.4.1 ETAPA 1 DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

3.4.1.1 ANÁLISE *A PRIORI* DA ETAPA 1

Nesta etapa, os alunos deveriam perceber as propriedades dos triângulos equilátero, isósceles e escaleno, percebendo que podemos classificar os triângulos quanto ao seu lado, observando as medidas de seus lados ou seus ângulos.

A hipótese desta atividade era que os alunos iriam conseguir classificar os triângulos quanto aos seus lados sem dificuldades e, gradativamente, iriam conseguir realizar conversões de registros. Acreditou-se que os alunos não teriam dificuldades em realizar as construções da atividade 1.

Outro fato que poderia contribuir para o desempenho dos alunos era o fato de ser uma aula realizada em um ambiente diferenciado, onde a princípio não precisariam se preocupar com a formalidade dos conteúdos, e que eles ainda não tinham realizado construções geométricas em sala de aula.

Após esta etapa, considerou-se que os alunos compreenderiam melhor as propriedades dos triângulos equiláteros, isósceles e escalenos, além de conseguirem realizar conversões de registros.

3.4.1.2 ANÁLISE *A POSTERIORI* DA ETAPA 1

No início dos trabalhos, algumas duplas estavam tendo dificuldades em realizar construções. Acreditamos que seja pela falta de coordenação motora na hora de manejar os objetos utilizados para construção. Após algumas tentativas essas duplas foram melhorando suas construções.

No início das atividades as duplas pediram várias folhas extras por terem errado as construções e, algumas dessas duplas pediram explicações por não entenderem o enunciado da questão, devido às suas dificuldades em interpretação.

Constatou-se que a maioria das duplas não tinha domínio sobre classificação de triângulos, apesar de ser um conteúdo simples. Duas duplas mostraram ter nenhum conhecimento do conteúdo. Perguntou-se para algumas duplas se sabiam qual conteúdo estávamos abordando nas construções. Apenas uma dupla respondeu corretamente.

No decorrer das atividades pode-se notar que as duplas já estavam familiarizadas com as construções geométricas utilizando régua, compasso, esquadro e transferidor. A maioria das duplas fixaram a ideia que um triângulo ou vai ter os três lados de medidas iguais, ou vai ter dois lados de mesma medida ou vai ter os três lados com medidas diferentes e que isso ocorre também com os ângulos, com exceção de quatro duplas que mediram errado os ângulos.

Apesar de algumas duplas não conseguirem realizar as construções e medições dos ângulos das questão de forma correta, elas apresentaram um resultado satisfatório.

3.4.2 ETAPA 2 DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

3.4.2.1 ANÁLISE *A PRIORI* DA ETAPA 2

Realizaram-se 2 atividades da etapa 2 e o conteúdo da Geometria Plana foi desenvolvido através de construções geométricas. Nessa etapa, o objetivo principal era de que os alunos percebessem a importância em articular registros geométricos e linguagem natural.

Acreditou-se inicialmente que os discentes não apresentariam dificuldades ao realizarem as atividades, pois já haviam realizado construções na etapa 1; porém, no decorrer das atividades observou-se que algumas duplas estavam tendo dificuldades nas construções e também na interpretação dos problemas, apesar das questões serem de fácil leitura e compreensão; em observação, percebemos que alguns alunos ainda não têm domínio da leitura.

Acreditou-se que após as realizações das atividades, os alunos conseguiriam converter e transitar entre pelo menos duas representações e reconhecer a correspondência semiótica entre os registros, assim como realizar tratamento dentro de um mesmo registro semiótico.

3.4.2.2 ANÁLISE *A POSTERIORI* DA ETAPA 2

Nesta etapa, pode-se observar debates entre as duplas para a realização das atividades, o que foi de grande importância para troca de informações e ideias, auxiliando na resolução do problema.

No decorrer das atividades, observou-se que algumas duplas estavam apresentando dificuldades em realizar as construções corretamente, principalmente em tirar medidas de ângulos, enquanto outras estavam construindo com facilidade e respondendo as questões corretamente.

Observamos que durante as atividades algumas duplas lembravam que em algum momento já haviam estudado o conteúdo aplicado, o que facilitou para realizarem a conversão entre registros. Todas as duplas completaram as atividades e sentiram-se motivados em sua grande maioria.

3.5 VALIDAÇÃO DA PESQUISA

Nesta última fase Didática, analisou-se o que deu certo e o que pode ser melhorado na proposta de ensino criada, fundamentando no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

A turma sempre se mostrou interessada e participava na realização das atividades, ajudando assim a atingir alguns objetivos propostos. Um fato que proporcionou o engajamento dos alunos foi o fato das atividades serem passaradas sem a obrigação de decorarem fórmulas ou conceitos. O conhecimento ia sendo construído de acordo com o desenvolvimento das atividades. Em diálogo com os discentes, descobriu-se que nunca haviam realizados construções geométricas e alguns deles tinham pouco conhecimento de Geometria Plana.

As atividades em duplas mostraram ter sido de grande importância para a atividade devido os debates formados pelos membros das duplas, pois os mesmos mostraram inicialmente ter grande dificuldade em organizar as ideias e as expôr verbalmente ou de forma escrita. No item "a"da questão 3 da atividade 3, algumas duplas não conseguiram explicar como chegou ao resultado, devido às suas dificuldades de exporem suas ideias.

Obteve-se êxito na utilização de construções geométricas com régua, transferidor, compasso e esquadro. Acredita-se que o ambiente de construção geométrica favoreceu a integração e o empenho dos alunos.

Com relação ao objetivo proposto da atividade 1, foi satisfatória, pois os alunos em sua grande maioria puderam identificar as propriedades dos triângulos isósceles, escaleno e equilátero, assim como realizar conversões entre registros de representações geométricas e linguagem natural. Inicialmente os alunos tinham dificuldades em relacionar as definições dos objetos matemáticos com suas representações geométricas.

Na atividade 2 os alunos deveriam construir triângulos com as medianas, bissetrizes e alturas. Tinha-se como objetivo observar que as medianas se intersectam no mesmo ponto, assim como as bissetrizes e as alturas, fazer também as conversões de registros de representação geométrica para a linguagem natural e vice-versa. Algumas duplas tiveram dificuldades nas construções, fazendo com que as cevianas não intersectassem no mesmo ponto. Ao final da atividade foi explicado que isso ocorreu devido ao erro de construção, mas que as medianas deveriam se intersectarem no mesmo ponto, assim como as bissetrizes e alturas.

Considera-se o objetivo parcialmente atingido nesta atividade, pois algumas duplas não conseguiram realizar as conversões entre registros. Para alguns alunos não ficou claro a diferença de altura, bissetrizes e medianas.

A atividade 3 foi satisfatória. A maioria das duplas conseguiu realizar conversões com êxito. Nessa atividade os alunos teriam que entender que em qualquer triângulo a soma dos seus ângulos internos é sempre 180° e identificar o caso de congruência Lado-Lado-Lado (LLL)

De modo geral, podemos validar a sequência didática, pois ela contribuiu para os alunos identificarem objetos matemáticos na forma geométrica e linguagem natural e realizarem tratamentos, além de aumentar o interesse pela matemática.

As limitações observadas durante a aplicação de nossa sequência didática não invalidam a sequência didática e sim contribuem de forma favorável, pois os erros cometidos abriam espaços para perguntas e argumentações que antes os alunos não faziam.

As atividades em duplas e as construções geométricas favoreceram para melhorar o interesse dos alunos pela matemática, além de proporcionar discurssões positivas entre as duplas e estimular o raciocínio lógico.

Afirma-se que a proposta de ensino de geometria plana através de construções geométricas com régua, compasso, transferidor e esquadro foi válida na conversão de registros geométricos e linguagem natural, contribuindo para a melhora no aprendizado dos alunos.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa pesquisa procurou-se desenvolver uma sequência de atividades no conteúdo de Geometria Plana no Ensino Fundamental, visando o aprendizado e que os estudantes conhecessem diferentes registros de representação e articulassem entre a representação geométrica e linguagem natural, assim melhorando a capacidade de raciocínio. Para isso, escolheu-se como referencial a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, a qual afirma que o aluno deve transitar entre pelo menos dois registros de representação, pois, "a compreensão integral (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de, ao menos, dois registros de representação e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão."(DUVAL, 2009, p. 51).

Utilizou-se como metodologia de ensino de pesquisa na construção da sequência de ensino a Engenharia Didática, o que possibilitou a organização do conteúdo e a sugerir mudanças no ensino tradicional que diminuam as dificuldades apresentadas neste conteúdo, procurando uma melhora qualitativa na aprendizagem dos alunos.

Tem-se conhecimento de que nem todos os alunos atingiram os objetivos em cada etapa, porém conseguiu-se fazer com que os alunos realizassem as atividades motivados em concluilas. A pesquisa foi realizada em uma escola pública e teve como foco principal os alunos de baixo rendimento e com baixo interesse pela disciplina de matemática, que foram identificados através da experiência como docente.

Considerando a análises feitas, podemos concluir que o uso de construções geométricas influenciou diretamente no interesse dos alunos, fazendo com que realizassem conversão entre registros de representação geométrica e linguagem natural durante as realizações das atividadesdes. A construção geométrica com régua, esquadro, compasso e transferidor pode auxiliar os alunos na conversão de registros de representação, atuando positivamente na aprendizagem da Geometria Plana.

O fato da matemática ser uma ciência capaz de encontrar resultados sem precisar realizar experiências práticas a torna fascinante como se realizasse mágicas, como fez Hiparco (cerca de 190 a.c.-120 a.c.) que calculou a distância da terra à lua sem ser preciso ir à lua, porém muitos alunos não gostam da matemática; alguns até consideram uma ciência inútil para as suas vidas. Ressaltamos a importância do professor de encontrar novos métodos e recursos disponíveis para melhorar a qualidade de ensino e fazer com que os alunos tenham mais interesse pela matemática. Ao procurar novos métodos e recursos, podem-se tornar as aulas mais atrativas e interessantes.

Ao término dessa pesquisa, pode-se verificar a importância de trazer novas atividades como novos recursos para os alunos, pois os mesmos estavam engajados nas atividades. O auxílio da Engenharia Didática nos permitiu organizar a pesquisa e ter uma reflexão sobre a própria prática docente.

Espera-se que, com esse trabalho, outros docentes possam planejar suas aulas utilizando recursos que tornem as aulas mais atraentes e que possibilitem os discentes conhecer vários registros de representação e realizem conversões entre esses registros.

Referências Bibliográficas

[1] ARTIGUE, M. Engenharia didática. *Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget* (1996), 193–217.

[2] BOYER, C. B. *História da Matemática*. Edgar Blucher, São Paulo, 1974. Tradução feita por Elza Gomide.

[3] CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. *Zetetike, Campinas-UNICAMP 13*, 23 (2005), 85–118.

[4] DAMM, R. F. Registros de representação. *MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Educação matemática: Uma (nova) introdução . Campinas SP: EDUC* (2008), 167–188.

[5] DOLCE, O., AND POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar*, vol. 9. 2013.

[6] DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. in: MACHADO, S.D.A (org). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus* (2003), 11–33.

[7] FIOREZE, L. A. *Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidades: uma análise a partir da teoria dos campos conceituais. 2010.244f.* PhD thesis, Tese (Doutorado em informática na educação)- Centro de Estudos Interdicisplinares em Novas Tecnologias da Educação, UFRGS, Porto Alegre (RS). Orientador: Dante Augusto Couto Barone e co-otientador: Marcus Vinicius de Azevedo Basso. Disponível em <http://hdl.handle.net/10183/19011, 2010.

[8] FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. *Boletim de Educação Matemática 19*, 26 (2006).

[9] HEMPEL. *Published in American Mathematical Monthly 52, 1945.* Reprinted in Readings in Philosophical Analysi. Transcribed into hypertext by Andrew Chrucky, Feb.7, 2001.

[10] PAIS, L. C. *Didática matemática: uma análise da influência francesa*, 2 ed. Autêntica, Belo Horizonte, 2002.

[11] PINEDO, C.Q. PINEDO, K. S. *Introdução à epistemologia da ciência*, vol. 1. 2009.

[12] PUTNOKI, J. C. *Elementos da Geometria e Desenhos Geométricos*, vol. 1. Scipione, São Paulo, 1989.

[13] SANTAELLA, L. *O que é semiótica.* Brasiliense, 2017.

Apêndice A

Atividade Prévia

Nome:____

Data:__________________________ Turma:______________

1. As retas r e s representadas pela figura a seguir são:

(a) Paralelas

(b) Concorrentes

(c) Perpendiculares

(d) Reversas

(e) N.D.A

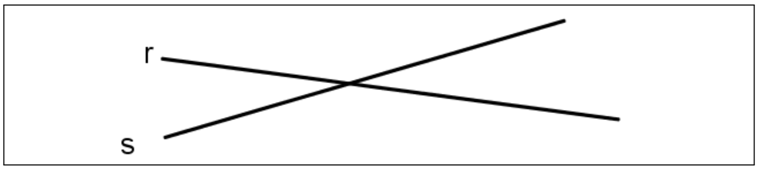


Figura A.1: Retas

2. As circunferências na figura abaixo de centros A, B e C possuem os raios de mesmo comprimento. Podemos afirmar que o triângulo formados pelos pontos A, B e C é:

(a) Obtuso

(b) Retângulo

(c) Equilátero

(d) Escaleno

(e) N.D.A

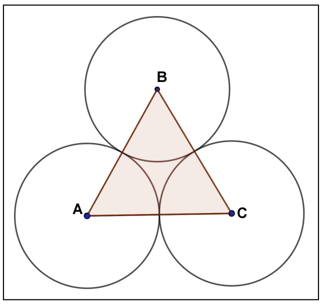


Figura A.2: Circunferências

3. Sabendo que $A\hat{O}B = 60°$ e $\overrightarrow{OC}$ é sua bissetriz. Qual o valor de x?

(a) $60°$

(b) $10°$

(c) $40°$

(d) $20°$

(e) $30°$

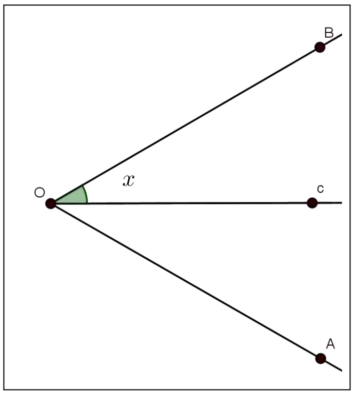


Figura A.3: Ângulo

4. Marque a afirmação abaixo que é verdadeira.

(a) Um quadrado é uma figura geométrica plana

(b) Um cubo é uma figura geométrica plana

(c) Um paralelepípedo é uma figura geométrica plana

(d) Uma esfera é uma figura geométrica plana

(e) um cone é uma figura geométrica plana

5. A figura a seguir é um hexágono regular, sabendo que a medida de um de seus lados é 5cm, qual é a medida do seu perímetro?

(a) $5cm$

(b) $10cm$

(c) $25cm$

(d) $30cm$

(e) $50cm$

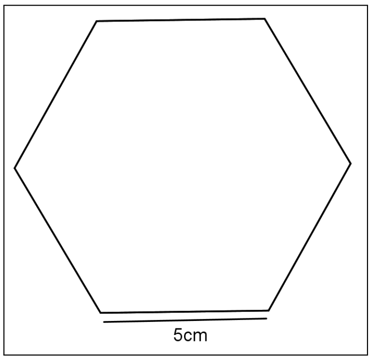


Figura A.4: Héxagono

6. Na figura abaixo o quadrado maior possui área de 25cm^2 e cada quadrado menor tem 1cm^2 de área. Qual a área da região vermelha?

(a) $10cm^2$

(b) $17cm^2$

(c) $13,5cm^2$

(d) $15,5cm^2$

(e) $7cm^2$

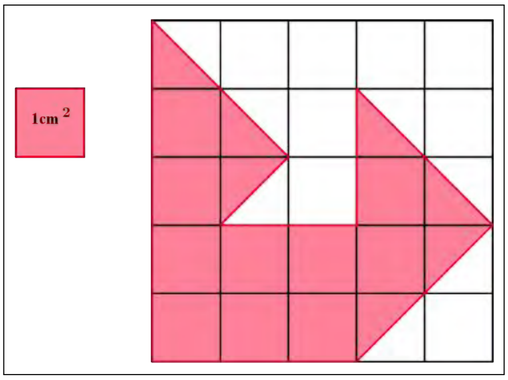


Figura A.5: Área

7. Um triângulo isósceles é um triângulo que:

(a) Possui os três lados com medidas iguais

(b) Possui os três ângulos iguais

(c) Possui os três lados de medidas diferentes

(d) Possui dois lados com medidas iguais

(e) Tem um ângulo medindo 90 graus.

8. Quais das três medidas abaixo podemos formar um triângulo?

(a) $2cm$, $3cm$, $1cm$

(b) $4cm$, $5cm$, $6cm$

(c) $10cm$, $2cm$, $7cm$

(d) $4cm$, $1cm$, $7cm$

(e) $3cm$, $4cm$, $8cm$

9. O que é um quadrado?

10. A figura a seguir tem as dimensões indicadas em metros, observe as regiões R_1 e R_2, ambas em formato de triângulo retângulo.

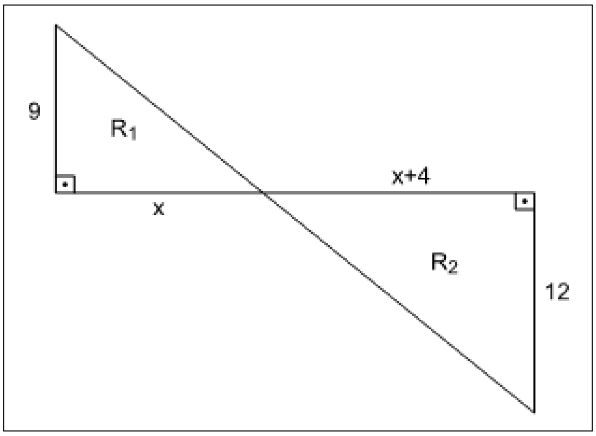


Figura A.6: Triângulos

Se a área de R_2 é o dobro de R_1, a área de R_1 é:

(a) 54

(b) 36

(c) 30

(d) 60

(e) 72

Apêndice B

Fotos da Experimentação

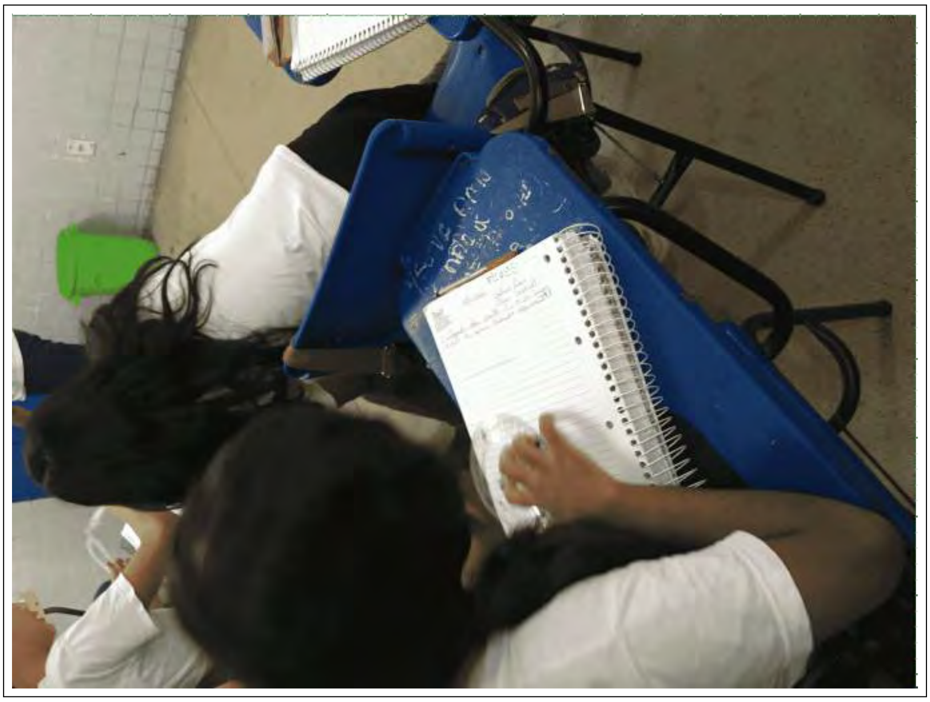


Figura B.1: Construção 1

Figura B.2: Construção 2

Figura B.3: Construção 3

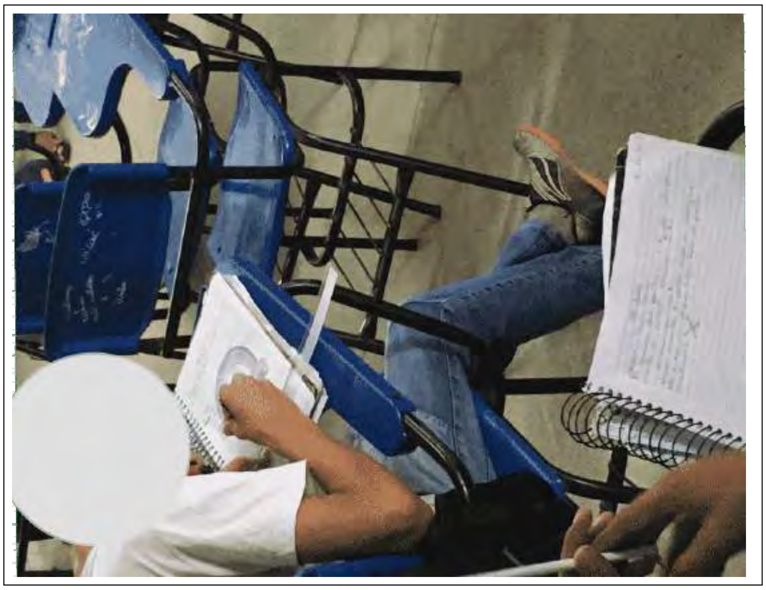


Figura B.4: Construção 4

Figura B.5: Construção 5

Figura B.6: Construção 6

Figura B.7: Construção 7

Figura B.8: Construção 8

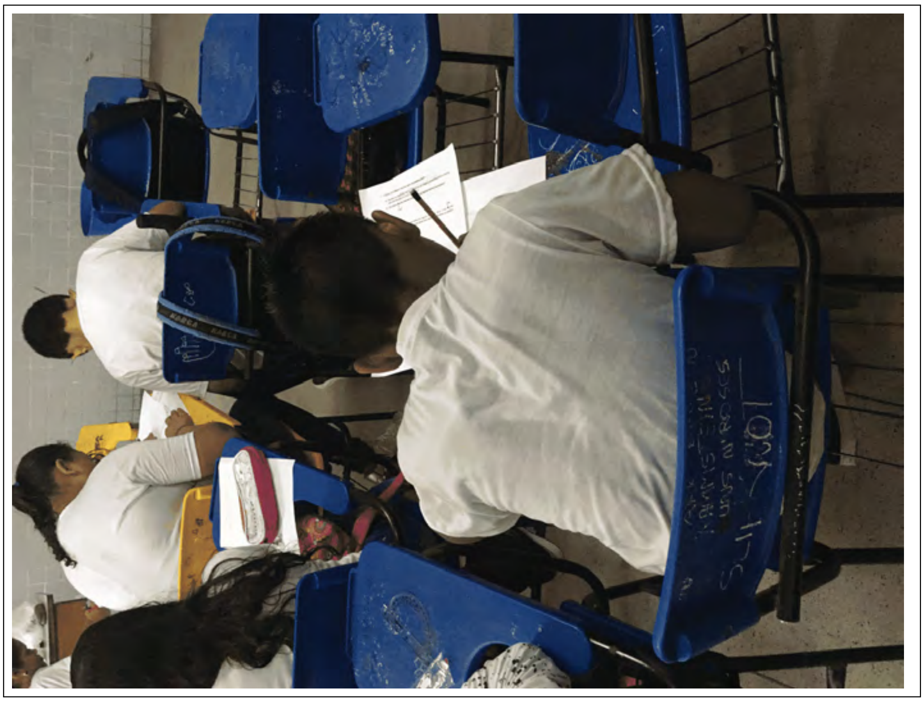


Figura B.9: Construção 9

Figura B.10: Construção 10

Figura B.11: Construção 11

Apêndice C

Atividade 1

Como construir um triângulo dado as suas três medidas

Exemplo Construa um triângulo com as medidas 7cm, 4cm e 5cm.

Passo1: Escolhemos uma das três medidas como base do triângulo, nesse exemplo usaremos 7cm como base. Com a régua construímos um comprimento de medida 7cm e marcamos os pontos A e B.

Passo2: Construímos com régua os seguimentos 4cm e 5cm, em seguida com o compasso tiramos a medida de 5cm e com a ponta seca no ponto A passos um arco mantendo a abertura do compasso em 5cm, a mesma coisa fazemos com a ponta seca no ponto B mas com a abertura do compasso com 4cm.

Passo3: Marque o ponto C na intesecção dos dois arcos.

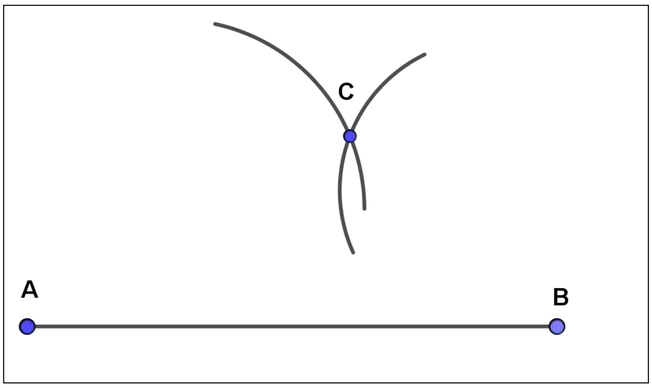


Figura C.1: Construção A

Passo4: Ligue os pontos A, B e C formando o triângulo.

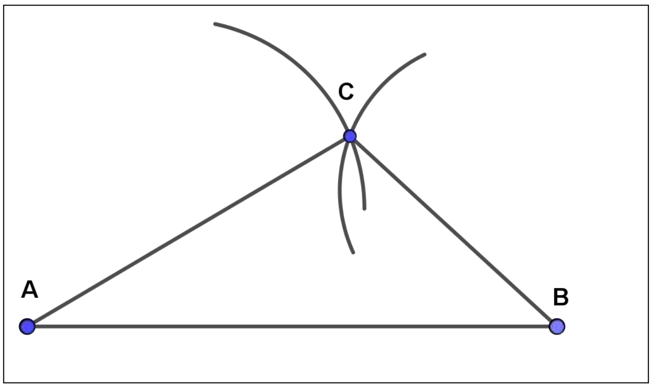


Figura C.2: Construção B

1. Construa um triângulo com os seus três lados de mesma medida.

   (a) Encontre os valores dos três ângulos internos do triângulo construído (utilize o transferidor para encontrar os valores dos ângulos).

   (b) Que relação você pode observar a respeito dos três ângulos internos encontrados?

2. Construa um triângulo com dois lados com medidas iguais.

   (a) Encontre os valores dos três ângulos internos do triângulo construído (utilize o transferidor para encontrar os valores dos ângulos).

   (b) Que relação você pode observar a respeito dos três ângulos internos encontrados?

   (c) Agora construa um triângulo que tenha dois ângulos de mesmo valor. O que você pode observar em relação as medidas dos seus lados (Use a régua para encontrar as medidas).

3. Construa um triângulo com as medidas dos lados todas diferentes.

Apêndice D

Atividade 2

1. Construa um triângulo qualquer, em seguida encontre o ponto médio de cada lado do triângulo e depois ligue cada ponto médio ao vértice oposto a ele.

   (a) Esses segmentos contruídos denominam-se medianas. O que você pode observar em relação a intersecção das três medianas?

2. Dado um triângulo ABC, sua altura em relação ao lado AB é o segmento $\overline{CM}$, onde $\overline{CM}$ corta perpendicularmente a reta que contém o lado AB . Um triângulo possui três alturas, construa um triângulo com suas três alturas (Alturas relativa aos lados AB, BC e AC).

3. Construa um triângulo qualquer e com a ajuda de um transferidor e uma régua divida cada ângulo interno em dois ângulos com mesma medida.

Apêndice E

Atividade 3

1. Construa dois triângulos diferentes e em cada um deles encontre os valores dos ângulos internos com a ajuda de um transferidor. Some os ângulos internos de cada triângulo.

   (a) Qual o valor da soma dos ângulos internos de cada um dos triângulos?

   (b) Podemos sugerir que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre o mesmo?

2. Construa um triângulo que tenha os ângulos de 60° e 40° e com um transferidor encontre a medida do terceiro ângulo.

3. (UFMG)Na figura, $AC = CB = BD$ e $m(\hat{A}) = 25°$. O valor de x é?

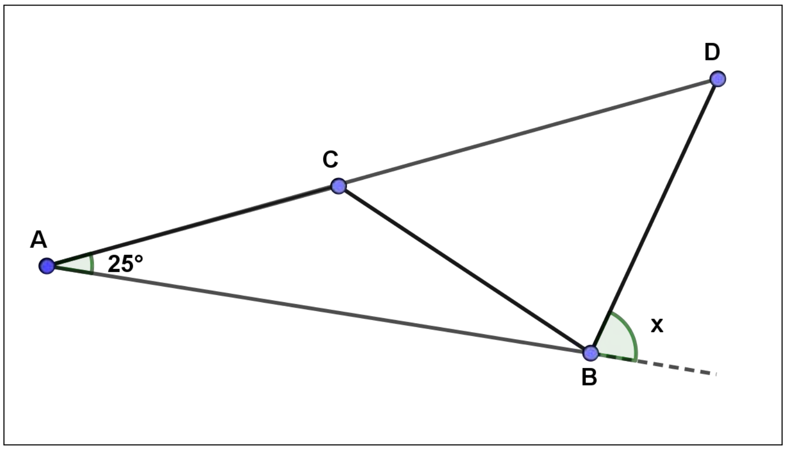


Figura E.1: Q3 A3

(a) 50°

(b) 60°

(c) 70°

(d) 75°

(e) 80°

(a) explique como a dupla chegou no resultado.

4. Com o auxilio de uma régua e compasso, construa um triângulo com as mesmas medidas do triângulo da figura abaixo.

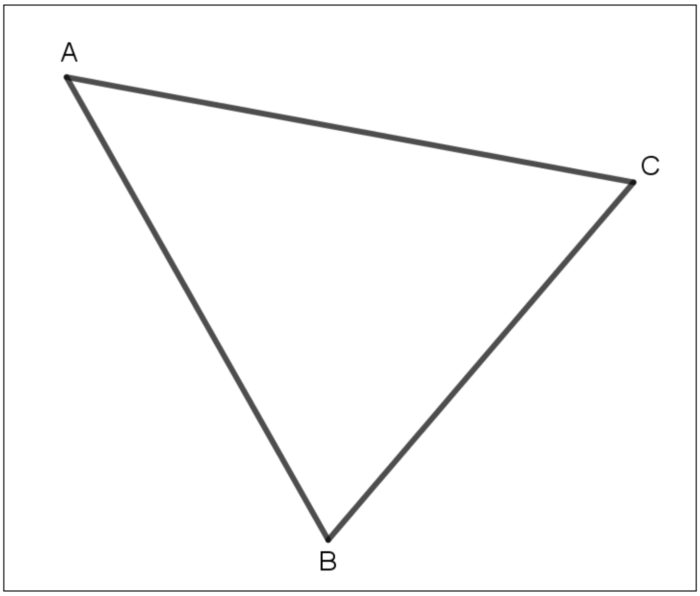


Figura E.2: Q4 A3

Dica: Tire as medidas com o compasso.

(a) Com o auxilio de um transferidor encontre os valores dos ângulos internos do triângulo dado e o triângulo construído.

(b) Podemos dizer que esses dois triângulos são iguais?