UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Sistema de numeração binário: dos computadores à sala de aula

Julis Leonan Salviato

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Julis Leonan Salviato

Sistema de numeração binário: dos computadores à sala de aula

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson

USP – São Carlos
Abril de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S184s

Salviato, Julis Leonan
Sistema de numeração binário: dos computadores à sala de aula. / Julis Leonan Salviato; orientador Miguel Vinícius Santini Frasson. -- São Carlos, 2018.
57 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Sistema binário. 2. Bases numéricas. 3. Operações básicas. 4. Operações na base 2. I. Frasson, Miguel Vinícius Santini, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Julis Leonan Salviato

Binary numbering system: from computers to classroom

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson

USP – São Carlos
April 2018

Com muito amor, dedico esse trabalho à
minha esposa Daniela, minha mãe Sueli e
em especial a meu pai Leone (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

Primeiramente a Deus que me abençoou e protegeu desde a aprovação no exame nacional de acesso do Profmat, como também em todas as viagens a São Carlos, em todas as provas, até a conclusão deste trabalho.

À minha esposa Daniela por me incentivar e me apoiar durante todo o curso.

À minha mãe Sueli pela educação e os princípios que me ensinou e sempre cobrou de mim.

A todos os professores que me acompanharam durante toda a minha vida escolar e acadêmica.

Ao meu orientador Prof. Dr. Miguel Frasson que sempre me atendeu com muita atenção e dedicação.

À coordenadora do programa Prof. Dra. Ires Dias.

À todas as pessoas acreditaram em meu potencial e me incentivaram durante todo este curso de mestrado, em especial todos os meus colegas de curso.

Também não poderia deixar de mencionar um agradecimento especial à CAPES pela bolsa concedida.

"A Matemática não mente.
Mente quem faz mau uso dela."
(Albert Einstein)

RESUMO

SALVIATO, J. L. **Sistema de numeração binário: dos computadores à sala de aula**. 2018. 57 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

O objetivo deste trabalho é mostrar que variados cálculos tornam-se mais fáceis de ser efetuados realizando operações com números escritos na base dois, com o pressuposto de que se esteja habituado a números nessa base, promovendo um aprofundamento na compreensão das bases e das propriedades utilizadas nas operações. Retomaremos alguns dos principais sistemas de numeração e apresentamos os cálculos de adições, subtrações, multiplicações e divisões com números escritos na base binária. Resgataremos também um antigo, porém eficiente, algoritmo para a extração de raízes quadradas.

Palavras-chave: Operações básicas, Bases numéricas, Sistema binário, Operações na base 2.

ABSTRACT

SALVIATO, J. L. **Binary numbering system: from computers to classroom**. 2018. 57 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

The purpose of this work is to show that various calculations become easier to perform by performing operations with numbers written in base two, with the assumption that one is accustomed to numbers in this base, promoting a deeper understanding of the bases and properties used for these operations. We will return to some of the major numbering systems and present the calculations of sums, subtractions, multiplications, and divisions with numbers written on the binary basis. We will also rescue an old but efficient algorithm for the extraction of square roots.

Keywords: Basic Operations, Numerical bases, Binary system, Operations on base 2.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Durante minha prática docente, que iniciou-se no ano de 2.009 quando ingressei no ensino público da rede estadual, observei que grande parte dos alunos do ensino fundamental anos finais apresenta muitas dificuldades em realizar as operações básicas com números racionais e principalmente com os números irracionais. O presente trabalho traz como proposta a utilização do sistema binário de numeração para dar um melhor entendimento das propriedades utilizadas nos cálculos desde os mais simples como adição e subtração até os mais complexos, tais como a obtenção de várias casas decimais de um número irracional, como por exemplo em raízes quadradas não exatas. Fazemos a observação de que a tabuada minimalista na base 2, isto é, $1 \times 1 = 1$, faz com que os contas fiquem realmente mais fáceis nesta base.

A ideia é fazer com que os alunos percebam que as operações tornam-se mais simples quando realizadas com um número escrito na base binária. Ao realizar cálculos com números escritos na base dois, os alunos terão a oportunidade de conhecer os algoritmos utilizados pelas calculadoras digitais, que também realizam cálculos nesta mesma base.

Inicialmente foi realizada uma pesquisa bibliográfica, para identificar os motivos pelos quais os alunos sentem tantas dificuldades em executar operações matemáticas, desde as mais simples até as mais complexas. Procurando respostas para essa questão, observamos que, não somente nas operações básicas mas também em toda a matemática, os alunos aprendem com mais facilidade se o conteúdo estiver mais próximo de sua realidade.

Para dar sentido à proposta e mostrar que o sistema de numeração binário pode ser muito prático para se realizar cálculos, tornou-se necessário recorrer à história da matemática para investigar sobre as origens dos sistemas de numeração utilizados pelas antigas e diversas civilizações, buscando saber quais eram suas regras na composição dos números, quais bases eram utilizadas, se era possível realizar cálculos com suas representações e quais eram suas potencialidades e incapacidades.

Uma ferramenta interessante para a execução da proposta é a conversão dos números escritos na base decimal para a base binária e vice-versa. Assim sendo, apresentaremos algumas formas de realizar essas conversões e também uma demonstração para provar que qualquer número natural pode servir de base numérica.

Dando sequência à proposta, foram apresentados alguns exemplos de como realizar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com os números escritos na base binária. Caberá ao professor realizar vários exemplos para que os próprios alunos cheguem à conclusão de sua eficácia.

A última parte deste trabalho resgatou um algoritmo antigo, porém muito prático do ponto de vista pedagógico, para o cálculo de raízes quadradas. O método das tentativas, que é o utilizado atualmente para se obter o resultado de uma raiz quadrada, é muito rudimentar e sem contar com o auxílio de uma calculadora torna-se muito difícil e pouco interessante aos alunos. Já o antigo algoritmo é simples de ser entendido e utilizado pois apresenta poucas regras.

CAPÍTULO

2

OPERAÇÕES BÁSICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS

O ensino de matemática é fundamental na educação em seus diversos níveis, visto que a aprendizagem de seus conteúdos pode proporcionar aos alunos entender o mundo à sua volta e comunicar-se com ele. Sendo assim, torna-se um grande desafio para o professor de matemática buscar um ensino voltado à produção de significados e que proporcione condições para que tal ensino seja consistente e autêntico.

Entendemos que a matemática nos proporciona conhecimentos fundamentais para dominarmos e sabermos resolver situações com números em nossas vidas. Ao estudarmos esta disciplina, desenvolvemos o nosso raciocínio. Acreditamos que o pensamento aritmético é importante para a aprendizagem matemática escola.

> Na verdade é difícil imaginar que alguma civilização de antepassados nossos, mesmo a mais primitiva, não tivesse entre seus valores culturais, não importa quão limitados fossem estes, pelo menos o embrião da idéia de número. Discernir entre um e dois, por exemplo, é algo que mesmo culturas muito atrasadas com certeza conseguiram atingir. Essa impressão, aliás, é confirmada pela antropologia, através do estudo de culturas primitivas que remanesceram até a nossa época. Como algumas tribos aborígenes da Austrália capazes apenas de contar até dois, quantificando qualquer coleção com mais de um par de elementos simplesmente por "muitos". (DOMINGUES, 1991).

A palavra aritmética deriva do termo grego *"arithmos"*, que significa número. A aritmética é a parte mais elementar da matemática, pois além de lidarmos com cálculos como adição, subtração, multiplicação e divisão, também aplicamos suas regras e propriedades em todas as outras partes da matemática.

Percebemos que os principais os problemas que envolvem a matemática aparecem quando os princípios básicos da aritmética não são devidamente consolidados, obsermavos tal fato em situações onde as pessoas não conseguem dar e receber trocos, comparar grandezas, medir distâncias, calcular áreas e volumes, entre outras situações vivenciadas no cotidiano.

Nos dias atuais muito se discute sobre a pergunta: porque o ensino de matemática apresenta tantas lacunas? Uma possível resposta para essa questão seria dada pela insuficiente fundamentação aritmética nas aulas de matemática. O fato que nos comprova isso é o baixo desempenho dos alunos, bem como as dificuldades que eles enfrentam no cotidiano.

> Se a matemática é uma disciplina base de todas as ciências e todas as artes; se o domínio dos números e das operações é decisivo para o sucesso numa sociedade competitiva; se o desenvolvimento tecnológico está fundamentado em cálculos e logaritmos; se o Brasil é a terra de Malba Tahan... por que 89% dos estudantes chegam ao final do Ensino Médio sem aprender matemática? (LORENZI; CHIES, 2008).

Percebemos que o desempenho dos alunos em matemática está cada vez mais decadente, com muitas lacunas e fragmentos. Resta-nos refletir sobre a questão: como iremos alcançar um nível relevante de desenvolvimento, enquanto o ensino de matemática não está sendo suficientemente significativo?

Segundo Moreira e Masini (2006)

> A aquisição de significados para signos ou símbolos de conceitos ocorre de maneira gradual e idiossincrática em cada indivíduo. Em crianças pequenas, conceitos são adquiridos, principalmente, pelo processo de formação de conceitos, o qual é um tipo de aprendizagem por descoberta, envolvendo geração e testagem de hipóteses bem como generalizações, a partir de instâncias especificas. Porém ao atingir a idade escolar, a maioria das crianças já possui um grupo adequado de conceitos que permite a ocorrência da aprendizagem significativa por recepção.

Realizar operações básicas com números escritos na base 2 possibilitará ao aluno melhor aquisição de significados para compreender as propriedades operatórias, pois além de simplificar a escrita dos números pelo uso de menos símbolos, os resultados das operações tornam-se bem mais previsíveis do que com os números escritos na base decimal. Isso não significa que realizar cálculos com números binários vai sanar as dificuldades nas operações, mas sim apresentar aos alunos uma forma versátil de se resolver operações, assim como fazem as calculadoras simples e os computadores.

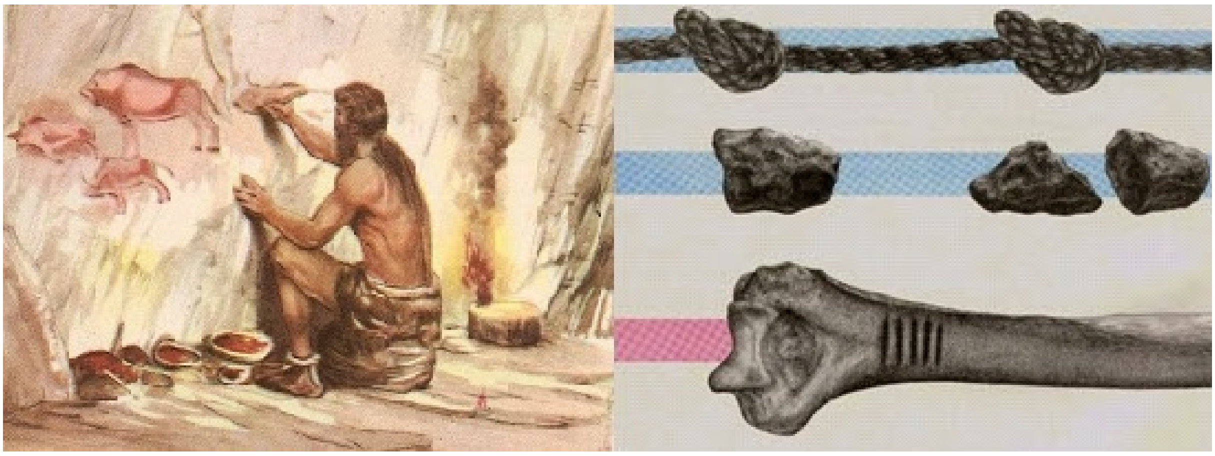
CAPÍTULO

3

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Com muita naturalidade ordenamos, contamos e codificamos as coisas usando os números e suas operações. Para Domingues (1991), há cerca de 30.000 anos o homem primitivo iniciou um processo de evolução quando sentiu a necessidade de contar seus pertences, demarcar o seu espaço e localizar-se no tempo. Daí então deu-se origem aos primeiros métodos de contagem: desenhos nas paredes das cavernas, marcações em ossos de animais, pedrinhas guardadas em um saco, nós em uma corda e até os próprios dedos das mãos.

Figura 1 – Primeiros métodos de contagem



Fonte – <http://vivercomartebomdemais.blogspot.com.br/2009/04/origem-das-artes-mitos-e-realidade.html> e <http://usuarios.upf.br/~pasqualotti/hiperdoc/concreto.htm>.

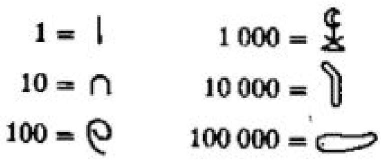
Mas suas necessidades foram aumentando e esses instrumentos de contagem começaram a ficar limitados. Surge então a ideia de formar grupos com mesmas quantidades de objetos, dando assim uma amplitude ao sistema de contagem e mais praticidade na leitura de suas representações.

Com o passar do tempo, as quantidades foram representadas por expressões, gestos, palavras e símbolos. Cada povo tinha sua forma de representação. Tais formas de contagem passaram a ser conhecidas como sistemas de numeração. Segundo Smith e Karpinski (1911), a finalidade de um sistema de numeração é registrar infromações quantitativas através de símbolos e regras. Esses símbolos, costumamos chamar de algarismos e a adequada composição desses algarismos é que dão origem aos números.

3.1 Sistema egípcio

Os egípcios foram um dos primeiros povos a criar um sistema de numeração, com base decimal e composto por símbolos. Esses símbolos poderiam ser utilizados para a representação de um número, no máximo, nove vezes e a partir da décima representação o símbolo era substituído por um outro mas com equivalência de valor. Verificamos em Domingues (1991) que os símbolos eram compostos pelo desenho de um bastão para representar as unidades simples, um calcanhar para representar as dezenas, um rolo de corda para representar as centenas, uma flor de lótus para representar as unidades de milhar, um dedo para representar as dezenas de milhar, um peixe para representar as centenas de milhar e um homem com os braços elevados para o céu para representar a unidade de milhão.

Figura 2 – Algarismos do Sistema de Numeração Egípcio



Fonte – Domingues (1991)

Uma característica desse sistema é que ele não é posicional, ou seja, podemos representar uma quantidade sem nos preocuparmos em colocar os símbolos que representam mesma quantidade próximos ou em ordem crescente. Vejamos como exemplo, na Figura 3, algumas possibilidades de representação do número 12 nesse sistema.

Figura 3 – Representações do número 12 no sistema egípcio

Fonte – Autor

3.2 Sistema romano

Os romanos não criaram símbolos específicos para representar os números, apenas aproveitaram as próprias letras do alfabeto.

Para Eves (2008), o sistema de numeração romana teve origem etrusca e com o passar do tempo, foi modificado pelos romanos, como por exemplo o modo de escrita, que, inicialmente era da esquerda para a direita, passou a ser da direita para a esquerda. Uma das regras usadas até hoje determina que, ao colocar o algarismo I à esquerda do algarismo V, efetua-se a subtração, ou seja, obtém-se o número quatro e, ao colocar o algarismo I à direitra do algarismo V, efetua-se a adição, sendo assim, obtém-se seis. Uma regra moderna, que não era seguida na numeração romana antiga, diz que não se pode repetir mais de três vezes um mesmo algarismo, por exemplo, o número nove não pode ser escrito assim VIIII, sua escrita correta é IX. Tal sistema de numeração era empregado principalmente para registrar valores. Hoje em dia ainda é utilizado para designar séculos, nomes de papas e reis e capítulos de livros, entre outros.

Tabela 1 – Símbolos, nomes e valores dos algarismos romanos.

Núm. romano	Nome em Latim	Valor
I	*unus*	1
V	*quinque*	5
X	*decem*	10
L	*quinquaginta*	50
C	*centum*	100
D	*quingenti*	500
M	*mille*	1.000

Fonte – Autor

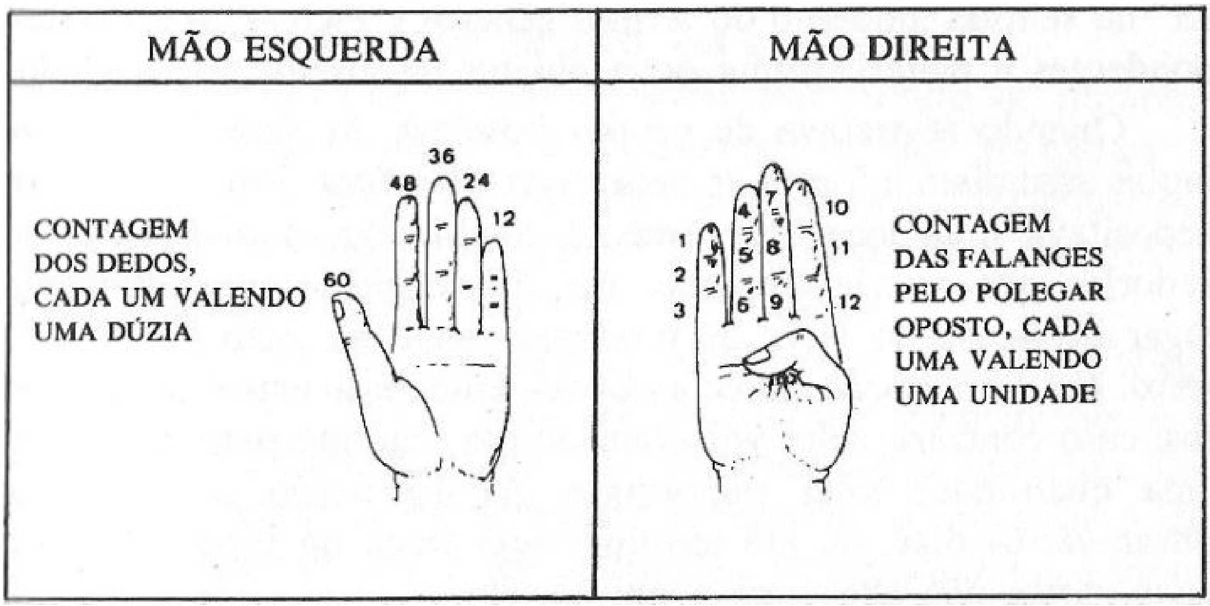
3.3 Sistema sexagesimal

Outro sistema de numeração antigo, desenvolvido pela civilização Suméria, é o sistema sexagesimal, de base 60. Para Ifrah (2002), a civilização suméria utilizava inicialmente dois sistemas distintos de contagem, um deles era de base 5 e o outro de base 12. O de base 5 fundamenta-se através da utilização dos dedos das mãos como processo de contagem, dispondo-se de uma delas para contar e a outra serviria como auxílio a contagens de maior dimensão, para "guardar" a quantidade dos "cincos" já utilizados. Veja a Figura 4. Já a base 12 resume-se na utilização das três falanges que compõe cada um dos dedos, excluindo o dedo polegar para deixá-lo como auxiliar de contagem, pois apoiando-o em cada uma das falanges, torna-se possível a contagem até 12.

Como consequência de uma fusão entre os dois sistemas manuais de contagem, surge a base 60. Este novo método de contagem era utilizado da seguinte forma: na mão direita, conta-se as falanges (como na base 12), "guardando" o número de utilizações na mão esquerda, assim como na base 5. Esta é uma das muitas hipóteses existentes em relação à origem do sistema sexagesimal, sistema este que fundamentou uma das maiores competências da cultura suméria.

Outra hipótese para sua criação poderá estar relacionada no elevado número de divisores de 60 ($D(60) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30$ e 60). Vale a pena ressaltar que hoje em dia utilizamos essa base em atividades relacionadas a contagem e representação do tempo nas horas (h), minutos (min) e nos segundos (s) e também em geometria para medir e expressar com exatidão ângulos em graus (º), minutos (') e segundos (").

Figura 4 – Contagem dos Sumérios com a utilização das mãos.

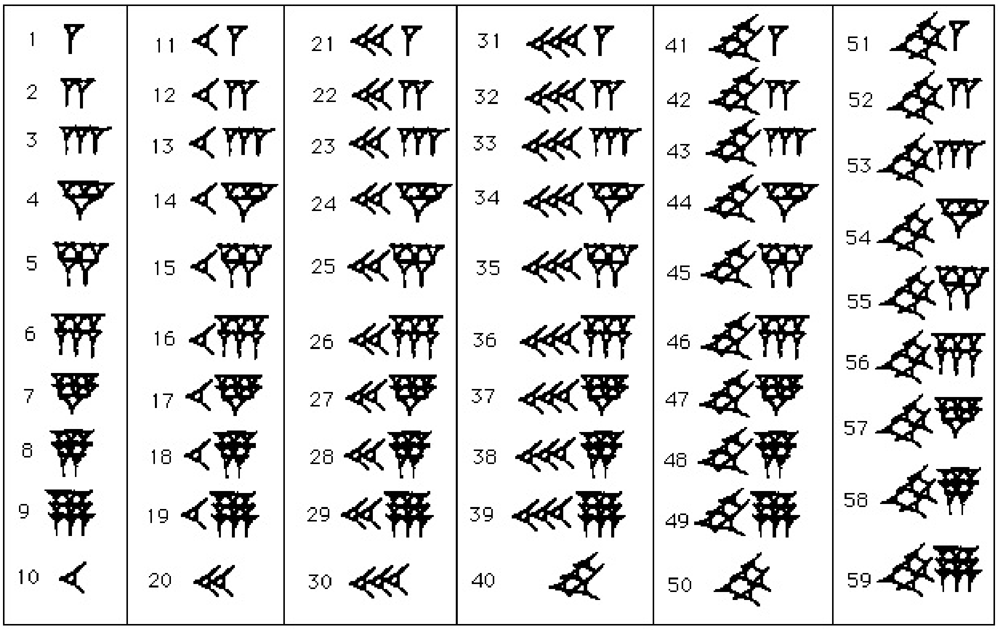


Fonte – Ifrah (1989)

O sistema sexagesimal é baseado em potências de 60. Os números são escritos através de diferentes símbolos para representar as unidades e para se representar as dezenas, algo semelhante a setas voltadas para baixo ou para os lados. Os números de 1 a 59 são representados agrupando-se esses símbolos e a partir daí, os números são decompostos em potências de 60 e os símbolos são desenhados na horizontal, tal que o símbolo que representa a maior potência fica à esquerda do menor, como mostrado na Figura 5.

Os sumérios escreviam na argila, e quando queriam que seus escritos fossem permanentes, as tabuletas cuneiformes eram dispostas num forno, ou poderiam ser utilizadas novamente quando os registros nelas contidos não fossem de muita importância ou que não necessitassem ser lembrados. Considerada uma das mais antigas do mundo, segundo Ifrah (2002), a escrita cuneiforme surgiu aproximadamente na mesma época dos hieróglifos, ou seja, por volta de 3.500 a.C. No início, essa escrita era meio enigmática, mas tornou-se mais simples com o passar

Figura 5 – Algarismos do Sistema de Numeração Sexagesimal.



Fonte – <http://www.matematicaefacil.com.br/2015/07/angulos-sistema-numeracao-sexagesimal.html>.

dos tempos. A escrita cuneiforme era utilizada com principal objetivo de se fazer registros de contabilidade e de administração, pois facilitava o registro de bens, demarcações de propriedades, cálculos e nas negociações comerciais.

Figura 6 – Escrita cuneiforme, de origem Suméria, encontrada no Iraque.

Fonte – <https://www.infoescola.com/civilizacoes-antigas/escrita-cuneiforme/>.

3.4 Sistema decimal indo-arábico

O sistema de numeração indo-arábico é posicional e possui base decimal. Dentre os sistemas de numeração citados acima, embora sejam bem distintos, observamos que existe uma semelhança entre eles: não possuem um símbolo para representar o número *zero*.

Segundo Hefez (2016), no Norte da Índia, por volta do século V da era cristã, nasceu o mais antigo sistema de notação próximo do atual, que é comprovado por vários documentos, além de ser citado por árabes (a quem esta descoberta foi atribuída por muitos anos). Antes de construir tal sistema, os habitantes da Índia setentrional usaram por muito tempo uma numeração rudimentar que aparece em muitas inscrições do século III antes de Cristo. Esta numeração tinha uma característica do sistema moderno. Seus nove primeiros algarismos eram sinais independentes:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \text{ } e \text{ } 9,$$

o que significava que um número como o 3 não era entendido como 3 unidades mas como um símbolo independente.

Figura 7 – Evolução dos algarismos indo-arábicos

Fonte – <http://www.programandoomundo.com/Sistema%20Indo-Arabico.htm.>.

Acreditamos que o início do pensamento matemático foi encontrado na necessidade de manter o controle da propriedade e do tempo, mas nenhuma dessas tarefas exigia o *zero*. Por milênios, civilizações funcionaram perfeitamente bem antes dessa descoberta, ninguém precisava de um número para expressar a falta de alguma coisa, não ocorreu a ninguém atribuir um símbolo para a ausência de objetos. Historicamente, o algarismo *zero* só foi reconhecido pelos hindus e incluido em seu sistema de numeração 500 anos depois de Cristo, como podemos observar na figura 7.

Segundo Hefez (2016), foi o matemático Leonardo Fibonacci que introduziu os números indo-arábicos na Europa com sua obra *Liber Abaci*, no século XIII. A partir da Europa, difundiu-se ao resto do mundo pelo comércio e colonialismo europeu.

3.5 Sistema binário

Séculos após a consolidação do sistema de numeração decimal indo-arábico, um novo sistema de numeração, que muito contribuiu atualmente para o avanço tecnológico e da informática, era criado pelos nativos de Mangareva, uma pequena ilha situada na Polinésia. Como podemos ver em Sampedro (2013), os mangarevenses desenvolveram um sistema binário que facilitava muito as operações aritméticas mais comuns como em atividades de contar peixes, frutas, cocos, polvos e outros bens de diferente valor, pois achavam que o o sistema decimal herdado de seus ancestrais era muito inconveniente para se fazer cálculos.

No sistema binário, só há dois símbolos (formalmente 0 e 1, mas também podem ser representados por dois estados de magnetização, como nos computadores), e as bases das potências implícitas pela posição não são de 10, e sim de base 2. Tomemos como exemplo, o número binário $(1111)_2$, entende-se que, da direita para a esquerda, o primeiro algarismo deve ser multiplicado por 1 (2^0), o segundo algarismo por 2 (2^1), o terceiro algarismo por 4 (2^2) e o quarto algarismo por 8 (2^3), agora basta somar os produtos obtidos e encontramos o valor do número na base decimal, isto é, $1+2+4+8=15$.

A vantagem de utilizar o sistema binário é que ele facilita muito as operações fundamentais aritméticas. Enquanto que para multiplicar no sistema decimal é necessário decorar mais de 50 combinações de tabuada, no sistema de Mangareva basta saber que o valor de cada algarismo utilizado é o dobro daquele que se encontra à sua direita. O resto emerge de um modo muito natural e fácil de utilizar. Somente no século XVII, o sistema binário foi proposto pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) momento no qual se discutia qual base de numeração era mais eficiente.

CAPÍTULO

4

BASES NUMÉRICAS

A base numérica é a essência de todo sistema de numeração posicional. O conceito de um sistema de numeração posicional é a transmutação do valor numérico dos algarismos do número de acordo com a sua posição na composição do numeral.

Para Domingues (1991):

> Esquematicamente, a idéia de base pode assim ser explicada: um certo número natural $b > 1$ é escolhido como base; isso significa que um agrupamento de b unidades (de primeira ordem) forma uma unidade de segunda ordem, um agrupamento de b unidades de segunda ordem forma uma unidade de terceira oedem, e assim por diante (no nosso sistema, por exemplo, dez unidades formam uma *dezena*, dez dezenas uma *centena*, dez centenas um *milhar*, etc.); são atribuídos nomes e símbolos especiais para $1, 2, \cdots, b$ (ou $0, 1, 2, \cdots, b-1$, se o zero é conhecido) e, ás vezes, para $b^2, b^3, \cdots$; os nomes e símbolos para os demais números são construídos a partir daqueles já introduzidos, mediante regras convenientes.

Atualmente, usamos a base de numeração decimal, ou seja, a base 10. Ao escrever o número 231, por exemplo, nos referimos ao número que contém uma unidade, três dezenas e duas centenas. Sendo assim, o número 231 nada mais é que a redução da expressão

$$231 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1.$$

Podemos dizer, genericamente, que um número da forma $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0$, no sistema de numeração decimal, representa o número: $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + ... + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$. Mas será que qualquer número pode servir de base numérica? A resposta para esta questão é *sim*. Podemos provar que qualquer número inteiro positivo p pode ser representado de modo único numa base numérica b. Com efeito, admita um número inteiro positivo p qualquer.

Temos que p pode ser escrito numa base numérica b se puder ser escrito na forma

$$p = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \cdots + a_1 b + a_0,$$

com $n \geqslant 0$, $a_n \neq 0$, e para cada índice i, $0 \leqslant i \leqslant n$, tem-se que $0 \leqslant a_i < b$.

Pelo algoritmo da vivisão Euclidiana, dividindo p por b, temos que $p = bq_0 + a_0$ onde o resto a_0 da divisão satisfaz $0 \leqslant a_0 < b$ e $q_0 < p$. Agora, dividindo q_0 por b, da mesma forma como foi feito acima, obtemos a_1 e q_1 de forma que $q_0 = bq_1 + a_1$, com $0 \leqslant a_1 < b$ e $q_1 < q_0$.

Nota-se que se reproduzirmos esse processo indefinidamente, obteremos quocientes cada vez menores. Pelo Princípio da Boa Ordenação, que segundo Hefez (2016) todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento, como o quociente não pode ser negativo, chegará um dado momento que ele será nulo. Supondo que quando tivermos tal quociente nulo o resto será a_n, teremos

$$\begin{aligned}
p &= bq_0 + a_0, \text{ com } 0 \leqslant a_0 \leqslant b \\
q_0 &= bq_1 + a_1, \text{ com } 0 \leqslant a_1 \leqslant b \\
q_1 &= bq_2 + a_2, \text{ com } 0 \leqslant a_2 \leqslant b \\
&\vdots \\
q_{n-2} &= bq_{n-1} + a_{n-1}, \text{ com } 0 \leqslant a_{n-1} \leqslant b \\
q_{n-1} &= b.0 + a_n, \text{ com } 0 \leqslant a_n \leqslant b.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Substituindo o valor de q_0 na primeira expressão e depois o valor de q_1 na segunda e assim sucessivamente, teremos

$$\begin{aligned}
p &= bq_0 + a_0 \\
&= b(bq_1 + a_1) + a_0 \\
&= b^2 q_1 + ba_1 + a_0 \\
&= b^2(bq_2 + a_2) + ba_1 + a_0 \\
&= b^3 q_2 + b^2 a_2 + ba_1 + a_0 \\
&\ \ \vdots \\
&= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \cdots + a_1 b + a_0.
\end{aligned}$$

A última expressão nos mostra que p pode ser escrito com uma base b qualquer, pois chegamos à expressão que, como vimos, condicionava essa hipótese.

Agora precisamos provar que existe uma única forma de se representar um número numa base b, caso o contrário teríamos duas representações distintas expressando uma mesma quantidade. Provamos isso, supondo duas expressões para o número p, numa mesma base b. Uma delas será $p = a_m a_{m-1} a_{m-2} \ldots a_2 a_1 a_0$ e a outra será $p = r_n r_{n-1} r_{n-2} \ldots r_2 r_1 r_0$, sendo $m \leqslant n$, $a_m \neq 0$ e $r_n \neq 0$. Assim

$$p = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_1 b + r_0.$$

Veja que a_0 e r_0 são os restos da divisão de p por b e $a_m b^{m-1} + a_{m-1} b^{m-2} + \cdots + a_1$ e $r_n b^{n-1} + r_{n-1} b^{n-2} + \cdots + r_1$ são os respectivos quocientes. Pela unicidade do resto e do quociente temos que

$$a_0 = r_0 \quad \text{e} \quad a_m b^{m-1} + a_{m-1} b^{m-2} + \cdots + a_1 = r_n b^{n-1} + r_{n-1} b^{n-2} + \cdots + r_1.$$

Repetindo o processo teremos $a_1 = r_1, a_2 = r_2, \ldots, a_m = r_n$ e $m = n$. Dessa forma, fica provado que a expressão de um número numa determinada base numérica b é única.

Garantida a possibilidade de que qualquer número possa ser usado como base numérica, destacamos algumas vantagens desse sistema de numeração posicional. Uma delas é a facilidade da expressão dos números e a economia de notação, pois somente com os dez algarismos do sistema decimal podemos representar qualquer número que quisermos e outra delas é a agilidade de se realizar cálculos, pois este sistema nos permite designar regras de cálculo bem simples.

4.1 Conversão de um inteiro decimal para binário

Tendo em vista que o público alvo para se aplicar a proposta deste trabalho são alunos do ensino fundamental anos finais, torna-se necessário buscar um método prático e de fácil compreensão para converter os números escritos na base decimal para a base binária e vice-versa.

4.1.1 *Método das divisões sucessivas*

Uma forma bastante comum para converter números inteiros escritos na base 10 para a base 2 é a técnica de divisões sucessivas. Tal técnica consiste em dividir o número escrito na base decimal por 2, de forma que o resto dessa divisão será 0 ou 1 e o quociente obtido deverá ser novamente dividido por 2. Esta última etapa deverá ser repetida até se obter o quociente 1. Por fim, para se obter a representação do número na base binária, basta escrevermos o dígito 1, que foi obtido no último quociente, acompanhado pelos restos das divisões lidos de trás para a frente, isto é, da direita para a esquerda. Façamos um exemplo. Deseja-se escrever o número 41 na base 2. Então teremos:

$$\begin{array}{cccccc}
41 & \multicolumn{1}{|c}{2} & & & & \\ \cline{2-2}
\mathbf{1} & 20 & \multicolumn{1}{|c}{2} & & & \\ \cline{3-3}
 & \mathbf{0} & 10 & \multicolumn{1}{|c}{2} & & \\ \cline{4-4}
 & & \mathbf{0} & 5 & \multicolumn{1}{|c}{2} & \\ \cline{5-5}
 & & & \mathbf{1} & 2 & \multicolumn{1}{|c}{2} \\ \cline{6-6}
 & & & & \mathbf{0} & \mathbf{1}
\end{array} \qquad \text{e portanto } 41 = (101001)_2.$$

O método justifica-se inteiramente pelas divisões sucessivas que efetuamos em (4.1). As próximas divisões foram feitas nos quocientes das anteriores, sendo os dígitos a_k obtidos pelos restos da divisão, do menos significativo, a_0, aos mais significativos, o que justifica a leitura “de trás para frente”.

4.1.2 Método com uma tabela

Uma forma alternativa de executar essa decomposição em binário seria construir uma tabela contendo na linha superior as potências de dois, na linha central seus respectivos resultados e na linha inferior, espaços vazios para que sejam preenchidos com o algarismo 1, caso aquele valor tenha sido utilizado na composição do número desejado, ou com o algarismo 0, como na Tabela 2.

Tabela 2 – Tabela para conversão.

2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1.024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Fonte – Autor

Façamos um exemplo para mostrar a utilização da tabela. Suponhamos que o número a ser convertido para a base binária seja 41. Primeiramente devemos procurar na linha central da tabela o número que mais se aproxima de 41 sem ultrapassá-lo. Observamos que o número 32 atende esse critério. Então, devemos preencher na tabela a lacuna abaixo do número 32 com o dígito 1. O próximo passo é realizar a subtração entre esses dois números, isto é, $41-32=9$ e repetir o mesmo processo. Sabendo que o resultado da subtração é 9, o próximo passo é procurar na tabela o número que mais se aproxima dele sem ultrapassá-lo, sendo este número procurado o 8. Logo, devemos preencher a lacuna abaixo do número 8 com o dígito 1. Realizando o próximo passo, que é a subtração $9-8=1$. Na tabela, o próximo número a ser utilizado é o próprio 1, então devemos preencher a lacuna abaixo dele com o dígito 1. Realizando a subtração $1-1=0$, percebemos que a decomposição chegou ao fim, pois o resultado obtido foi 0. Agora já sabemos que na decomposição do número 41 encontramos as potências 2^5, 2^3 e 2^0. Para finalizar o processo, basta preencher com o dígito 0 as lacunas localizadas entre as que já foram preenchidas, como na Tabela 3. Sendo assim, a representação do número 41 na base binária será $(101001)_2$.

Agora vamos supor que se deseja fazer o contrário, isto é, converter um número escrito na base binária para a base decimal. Essa tarefa é ainda mais fácil, pois basta escrever o número nos espaços vazios da tabela, seguindo a ordem da direita para a esquerda e somarmos os resultados das potências que foram preenchidas com o algarismo 1. Digamos que o número a ser convertido seja $(111011)_2$. Veja esse preenchimento na Tabela 4. Basta agora realizarmos a soma $32+16+8+2+1=59$. Logo, a representação de $(111011)_2$ em decimal é 59.

Tabela 3 – Conversão do número 41 para a base binária

2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1.024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
					1	0	1	0	0	1

Fonte – Autor

Tabela 4 – Conversão do número $(111011)_2$ para a base decimal

2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1.024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
					1	1	1	0	1	1

Fonte – Autor

Para tornar a atividade proposta mais atraente aos alunos, caso a escola possua um laboratório de informática, o professor poderá optar pela construção da tabela citada acima em uma planilha eletrônica. Servindo como tradutora dos números entre as bases, a planilha tornará a prática dos cálculos a serem realizados pelos alunos ainda mais eficiente e prazerosa. Ainda, se for oportuno e de domínio do professor, a ideia da proposta poderá ser aplicada na íntegra no laboratório de informática, pois com o auxílio das planilhas eletrônicas para realizar cálculos com os números escritos na base binária, os alunos poderão descobrir por que as calculadoras digitais realizam cálculos tão rápido. Também poderão acessar Hentz (2013) que possui calculadoras que realizam cálculos com números escritos na base 2.

Utilizar o computador como recurso tecnológico possibilita um melhor atendimento às necessidades de aprendizagem dos alunos.

> Cada vez mais poderoso em recursos, velocidade, programas e comunicação, o computador nos permite pesquisar, simular situações, testar conhecimentos específicos, descobrir novos conceitos, lugares, ideias. Produzir novos textos, avaliações, experiências. As possibilidades vão desde seguir algo pronto (tutorial), apoiar-se em algo semidesenhado para complementá-lo até criar algo diferente, sozinho ou com outros. (MORAN, 2000).

4.1.3 Método "mágico"

Outra forma, bastante lúdica e visual, é pelo uso de tabelas em que todos os números que o dígito 1 aparece na n-ésima casa, como na Tabela 5, encontrada em Sampaio e Malagutti (2008).

Para decompor um número n em binário usando as tabelas da Tabela 5, combine os

Tabela 5 – Tabelas do método "mágico" para números de 0 a 63.

0	**1**	2	**3**	4	**5**	6	**7**
8	**9**	10	**11**	12	**13**	14	**15**
16	**17**	18	**19**	20	**21**	22	**23**
24	**25**	26	**27**	28	**29**	30	**31**
32	**33**	34	**35**	36	**37**	38	**39**
40	**41**	42	**43**	44	**45**	46	**47**
48	**49**	50	**51**	52	**53**	54	**55**
56	**57**	58	**59**	60	**61**	62	**63**

a) _ _ _ _ _ 1

0	1	**2**	**3**	4	5	**6**	**7**
8	9	**10**	**11**	12	13	**14**	**15**
16	17	**18**	**19**	20	21	**22**	**23**
24	25	**26**	**27**	28	29	**30**	**31**
32	33	**34**	**35**	36	37	**38**	**39**
40	41	**42**	**43**	44	45	**46**	**47**
48	49	**50**	**51**	52	53	**54**	**55**
56	57	**58**	**59**	60	61	**62**	**63**

b) _ _ _ _ 1 _

0	1	2	3	**4**	**5**	**6**	**7**
8	9	10	11	**12**	**13**	**14**	**15**
16	17	18	19	**20**	**21**	**22**	**23**
24	25	26	27	**28**	**29**	**30**	**31**
32	33	34	35	**36**	**37**	**38**	**39**
40	41	42	43	**44**	**45**	**46**	**47**
48	49	50	51	**52**	**53**	**54**	**55**
56	57	58	59	**60**	**61**	**62**	**63**

c) _ _ _ 1 _ _

0	1	2	3	4	5	6	7
8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
16	17	18	19	20	21	22	23
24	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**
32	33	34	35	36	37	38	39
40	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**
48	49	50	51	52	53	54	55
56	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**

d) _ _ 1 _ _ _

0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15
16	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
24	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**
32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**
56	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**

e) _ 1 _ _ _ _

0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
32	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**
40	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**
48	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**
56	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**

f) 1 _ _ _ _ _

rótulos nas tabelas em que n aparece destacado. Como um exemplo, deseja-se escrever o número 50 na base 2. Primeiramente vamos procurar em quais tabelas este número está circulado. Verificamos que isso acontece nas tabelas *b*, *e* e *f*. Agora basta completar com o dígito 0 nas posições das tabelas que não possuem o número 50 circulado e compor o número. Então, como num passe de mágica, a representação do número 50 na base 2 será $(110010)_2$.

Para transpor um número binário para decimal, some os primeiros números destacados nas tabelas em que o dígito 1 correspondente aparecer. Por exemplo, suponhamos que agora se deseja fazer o contrário, isto é, transformar um número binário em decimal. Digamos que o número seja $(100111)_2$. Verificamos que as tabelas utilizadas foram *a, b, c* e *f*. Agora basta somar o primeiro dígito circulado de cada uma dessas tabelas para obter o número, isto é, realizar a soma $1+2+4+32$. Portanto, o número $(100111)_2$ corresponde a 39 na base decimal.

Já para "adivinhar" um número, numa brincadeira lúdica, peça para alguém pensar num número e que diga em quais tabelas o número está circulado. O "adivinho" soma os primeiros números dessas tabelas, obtendo o número que a pessoa pensou. Note que a pessoa dizer as tabelas equivale em passar para binário e adivinhar equivale a transpor o número binário de volta para decimal. A explicação matemática para esse método "mágico" é simples, os números circulados na primeira tabela são aqueles que possuem 2^0 em sua decomposição, os números circulados na segunda tabela são aqueles que possuem 2^1; tendo em vista que podemos compor n tabelas, os números circulados na *n-ésima* tabela são aqueles que possuem 2^{n-1} em sua decomposição. Então, como o primeiro número de cada tabela é 2^{n-1}, sendo n a quantidade de tabelas, para "adivinhar" um número basta somar o primeiro número das tabelas onde o número procurado encontra-se circulado.

4.2 Números racionais não inteiros

As mesmas ideias de representação de números racionais não inteiros na base decimal podem ser estendidas para a base binária. Os números racionais não inteiros seguem exatamente o mesmo raciocínio dos inteiros, sendo a única diferença o expoente negativo nas potências de dez. Tomando como exemplo o número $\frac{11}{16}$, temos

$$\frac{11}{16} = 0{,}6875 = 0\cdot 10^0 + 6\cdot 10^{-1} + 8\cdot 10^{-2} + 7\cdot 10^{-3} + 5\cdot 10^{-4}$$

e na base binária teremos $(0,1011)_2$

$$(0{,}1011)_2 = 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-4}$$

Isto se vê particularmente por

$$0{,}6875 = \frac{6875}{10000} = \frac{11}{16} = \frac{(1011)_2}{(10000)_2} = (0{,}1011)_2$$

notando que dividir por números da forma 2^k na base binária equivale a deslocar a vírgula k casas para a esquerda.

4.2.1 Divisão não exata

A maneira mais usual de realizar tal conversão é efetuar a divisão do númerador pelo denominador da fração que representa o número. Essa divisão será vista no capítulo 6, que apenas apresentamos aqui, com o exemplo da expansão fracionária de $\frac{1}{3} = \frac{(1)_2}{(11)_2}$

$$
\begin{array}{rcccccl}
 & 1, & 0 & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{|l}{1\ \ 1\qquad\qquad} \\ \cline{7-7}
- & & 1 & 1 & & & 0,\ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1 \\ \cline{2-4}
 & & & 1 & 0 & 0 & \\
 & - & & & 1 & 1 & \\ \cline{3-6}
 & & & & & 1 &
\end{array}
$$

Dessa forma, $\frac{1}{3}$ em binário é a dízima periódica 0,010101....

4.2.2 Método das multiplicações sucessivas

Uma outra forma de converter um número racional não inteiro decimal para a base binária é utilizar o método das multiplicações sucessivas. A vantagem desse método é que não há necessidade de se saber a fração que representa o número, caso seja racional, ou que o aproxime, caso seja irracional.

Neste método, multiplica-se o racional não inteiro

$$x = (0,a_1a_2a_3a_4\ldots)_2 = a_1 \cdot 2^{-1} + a_2 \cdot 2^{-2} + a_3 \cdot 2^{-3} + a_4 \cdot 2^{-4} + \ldots$$

por 2 e a parte inteira do número resultante,

$$2x = a_1 + \left(a_2 \cdot 2^{-1} + a_3 \cdot 2^{-2} + a_4 \cdot 2^{-3} + \ldots\right),$$

é a_1, o primeiro dígito fracionário do binário. A parte fracionária restante,

$$x_1 = (0,a_2a_3a_4\ldots)_2 = a_2 \cdot 2^{-1} + a_3 \cdot 2^{-2} + a_4 \cdot 2^{-3} + \ldots,$$

é novamente multiplicada por 2 e a parte inteira do número resultante é a_2, o segundo dígito fracionário do binário. Esses passos são repetidos até que o resultado da multiplicação seja um número inteiro ou até a precisão desejada.

Para melhor visualizar façamos um exemplo. Deseja-se converter o número racional não inteiro 0,2 para a base binária. Acompanhe os passos a seguir:

$$
\begin{array}{ll}
0{,}2 \cdot 2 = \mathbf{0}{,}4 & \\
0{,}4 \cdot 2 = \mathbf{0}{,}8 & \\
0{,}8 \cdot 2 = \mathbf{1}{,}6 & \quad \text{(parte fracionária} = 0{,}6) \\
0{,}6 \cdot 2 = \mathbf{1}{,}2 & \quad \text{(parte fracionária} = 0{,}2) \\
0{,}2 \cdot 2 = \mathbf{0}{,}4 & \quad \text{(repetição)}
\end{array}
$$

Logo, $(0,2)_{10} = (0,001100110011\ldots)_2$.

CAPÍTULO

5

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO NO SISTEMA BINÁRIO

Entendemos que as operações de adição e subtração andam lado a lado e a aprendizagem de uma depende da outra. Mesmo dispondo de vários recursos no cotidiano escolar, que vão desde o livro didático que possui atividades e exemplos, passando por recursos audiovisuais e por materiais manipuláveis como o material dourado, o ábaco, jogos, entre outros, muitos alunos saem da escola com dúvidas em relação ao algoritmo dessas operações. Algumas dessas dúvidas são:

- *"por que na subtração, quando fazemos* $0-9$ *dá* 1 *e 'empresta' uma unidade da ordem imediatamente superior do minuendo?"*
- *"por que não podemos subtrair vários números numa mesma conta se na adição isso é possível?"*
- *(quando o aluno conhece apenas números naturais) "por que em uma expressão numérica, adição e subtração, mesmo possuindo mesma preferência entre as operações, devem ser realizadas na ordem em que aparecem?"*

Essas e muitas outras dúvidas surgem devido à falta de compreensão dos algoritmos das operações, pois são regras impostas para serem cumpridas e memorizadas.

5.1 Adição

Apesar de ser considerada pelos alunos a mais fácil das operações matemáticas, a adição pode ficar mais interessante se realizada com os números na base binária. A grande vantagem é que o resultado obtido em cada passo da operação será *zero* ou *um*, pois $0+0=0$; $0+1=1$;

$1+0=1$; $1+1=0$ e “vai um” para o algarismo de ordem superior, $1+1+1=1$ e “vai um” para o algarismo de ordem superior.

Façamos um exemplo de adição com os números escritos na base 2 para mostrar o quanto é rápido e prático, uma vez que temos as representações binárias dos números. Deseja-se somar os números 85 e 39. Primeiramente precisamos converter os números para a base binária.

$$85 = (1010101)_2$$
$$39 = (100111)_2$$

Feito isso podemos montar o algoritmo da adição e realizar a soma.

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 1 & 0^1 & 1^1 & 0^1 & 1 \\ + & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Agora basta converter o resultado obtido para a base decimal.

$$(1111100)_2 = 124$$

Logo, o resultado da soma $85+39$ é igual a 124.

$$\begin{array}{cccc} & & 8^1 & 5 \\ + & & 3 & 9 \\ \hline & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

Para realizar uma adição com os números escritos na base dois de forma eficiente, é necessário que os alunos já saibam converter os números para esta base.

5.2 Subtração

A subtração é uma operação matemática que indica quanto é um valor numérico (minuendo) se dele for retirado outro valor numérico (subtraendo) assim, obtemos um novo valor numérico (diferença). Vejamos como exemplo a subtração $25-12=13$, onde 25 é o minuendo, 12 é o subtraendo e 13 é a diferença.

A subtração é uma das operações que grande parte dos alunos da educação básica tem muita dificuldade em realizar. Muitas vezes acabam “emprestando” de forma errada ou até se esquecem de “emprestar”. Ao resolverem subtrações com os números na base dois, os alunos poderão melhor compreender essas propriedades pois $0-0=0$; $1-0=1$; $1-1=0$ e $0-1=1$ e “empresta um” do algarismo de ordem superior, pois após o empréstimo, o 0 torna-se $(10)_2=2$ e a subtração fica $2-1=1$. Se compararmos o tempo gasto para se realizar uma subtração com os números escritos na base binária, com uma subtração realizada com os números na base decimal, consideramos que no primeiro caso é menor.

Façamos um exemplo para comprovar a eficácia do método. Digamos que se deseja subtrair 28 de 45. O primeiro passo é escrever os números na base binária:

$$45 = (101101)_2$$
$$28 = (11100)_2$$

Agora podemos montar o algoritmo da subtração e realizar a operação.

$$\begin{array}{rcccccc} & \overset{0}{\cancel{1}} & {}^{1}0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ - & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \tag{5.1}$$

Realizada a operação, basta converter o resultado obtido para a base decimal.

$$(10001)_2 = 17$$

Então, a diferença $45 - 28$ é igual a 17.

$$\begin{array}{rcc} & {}^{3}\cancel{4} & {}^{1}5 \\ - & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 7 \end{array}$$

5.3 Subtração pelo método do complemento

Uma forma alternativa para resolver subtrações é pelo método do complemento. Neste método, resolvemos a subtração através da adição do minuendo com o complemento do subtraendo. O complemento de um número é obtido através da substituição de cada algarismo do numeral, por nove menos o próprio algarismo de cada ordem, por exemplo, o complemento de 3 é igual a $9 - 3$, isto é, 6, o complemento de 12 é igual a $9 - 1$ (na ordem das dezenas) e $9 - 2$ (na ordem das unidades), isto é, 87. Caso o subtraendo não possua a mesma quantidade de algarismos do minuendo, devemos acrescentar *zeros* para igualar seus algarismos. Depois de realizarmos tal soma, devemos eliminar o número que ocupa a ordem de maior valor, que sempre será o algarismo 1, e por fim acrescentar 1 na ordem das unidades.

Vejamos um exemplo para ilustrar o funcionamento desse método. Suponhamos que se deseja realizar a subtração $235 - 45$. O primeiro passo é escrever o complemento de 45. Como 235 possui três algarismos, devemos acrescentar o algarismo 0 na ordem das centenas do número 45. Então o complemento de 045 é 954 ($9 - 0 = 9$, $9 - 4 = 5$ e $9 - 5 = 4$). Agora basta realizar a soma $235 + 954$ e ao resultado obtido, que é 1.189, excluir o algarismo da maior ordem e acrescentar 1 nas unidades, chegando assim ao resultado final que é 190. Veja os passos desse cálculo no esquema abaixo.

$$\begin{array}{rccc} & 2 & 3 & 5 \\ - & 0 & 4 & 5 \\ \hline & & & ? \end{array} \xrightarrow{\text{complemento}} \begin{array}{rcccc} & & 2 & 3 & 5 \\ + & & 9 & 5 & 4 \\ \hline & \cancel{1} & 1 & 8 & 9 \\ + & & & & 1 \\ \hline & & 1 & 9 & 0 \end{array}$$

Para justificar esse cálculo, somamos e subtraímos 999 na expressão e operamos, evidenciando o corte do 1 inicial e o acréscimo de 1 na unidade:

$$\begin{aligned} 235-45 &= 235+\overbrace{999-045}^{\text{complemento}}-\overbrace{999}^{1000-1} \\ &= 235+954-1000+1 \\ &= 1189 - \underbrace{1000}_{\text{corta 1 inicial}} + 1 = 190 \end{aligned}$$

Realizar uma subtração com o método do complemento pode ficar ainda mais interessante se os números estiverem escritos na base 2, pois o complemento de 0 é 1 e o complemento de 1 é 0. Vejamos a operação (5.1) com esse método, isto é, $(101101)_2-(011100)_2$. Primeiramente escrevemos o complementar do subtraendo que é $(100011)_2$. Agora basta somar o minuendo com o complemento do subtraendo e ao resultado excluir o dígito da maior ordem e acrescentar 1 na menor ordem. Veja o esquema abaixo.

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ - & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & ? \end{array} \xrightarrow{\text{complemento}} \begin{array}{rccccccc} & ^1 & 1 & 0^1 & 1^1 & 1^1 & 0^1 & 1 \\ + & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & \cancel{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & & & & & & & 1 \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Então, a diferença $(101101)_2-(011100)_2$, como em (5.1), é $(10001)_2 = 17$.

CAPÍTULO

6

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NO SISTEMA BINÁRIO

Além de dominar as operações de somar e subtrair, outra dificuldade encontrada pelos alunos, ao operar multiplicações ou divisões na base decimal, é não saber a tabuada. Também, na divisão, o aluno deve dominar a habilidade de estimar, pois ao propormos um algarismo ao quociente, seu produto pelo divisor deve ser o maior possível sem ultrapassar o agrupamento feito no dividendo. Veremos que estas duas últimas dificuldades não existem no sistema binário.

6.1 Multiplicação

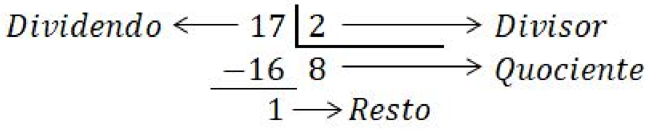
Ao realizarmos multiplicações com os números na base 2, teremos que saber apenas uma tabuada, $1 \times 1 = 1$. A multiplicação em binário segue o mesmo algoritmo conhecido que estamos habituados na base decimal, apenas nos adaptando à nova tabuada. Na prática, para cada dígito 1 do segundo fator, colocamos uma cópia do primeiro fator, com as casas deslocadas convenientemente pela posição deste dígito 1. Isto nos permite concluir como é prático para um computador efetuar essa multiplicação. Outra praticidade da multiplicação com binários é dobrar um número, pois basta acrescentar um *zero* ao final do número ou deslocar a vírgula uma casa à direita. Façamos um exemplo para ilustrar o quanto é simples multiplicar em binário. Vamos realizar o produto $22 \times 13 = (101100)_2 \times (1101)_2$.

$$
\begin{array}{ccccccccc c}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\
 & & & \times & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
\cline{5-9}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\
 & {}^{1} & 1^{1} & 0^{1} & 1 & 1 & 0 & & & + \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & & & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Agora basta converter o resultado do produto para a base decimal: $(100011110)_2 = 286$.

6.2 Divisão

Os elementos de uma divisão são: dividendo, divisor, quociente e resto. Vejamos como exemplo a divisão de 17 por 2.



No processo da divisão em binário, como o único algarismo não nulo que podemos propor ao quociente é 1, o único subtraendo possível nas operações é o próprio divisor. Assim, quando efetuamos a divisão de números na base binária, não há a necessidade de estimativas. Resta-nos apenas comparar quantidades e subtrair.

Nas divisões entre inteiros, pelo algoritmo da divisão de Euclides, podemos obter restos não nulos. Vejamos primeiramente um exemplo de divisão exata com número na base 2, encontrando o quociente de $156 \div 12$, ou seja, $(10011100)_2 \div (1100)_2$.

O primeiro passo é fazer o agrupamento conveniente dos algarismos do dividendo, isto é, compor um número maior ou igual ao divisor, para iniciar a divisão.

$$\begin{array}{cccccccccc|cccc}
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \cline{11-14}
- & & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & & \mathbf{1} & & & \\ \cline{2-6}
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & &
\end{array}$$

Após termos realizado a subtração para obtermos o primeiro resto, abaixamos o próximo dígito junto ao resto, obtendo um número maior que o divisor, e prosseguimos com a divisão.

$$\begin{array}{cccccccccc|cccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \cline{11-14}
- & & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & & 1 & \mathbf{1} & & \\ \cline{2-6}
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} & & & & & & & \\
 & - & & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ \cline{3-7}
 & & & 0 & 0 & 1 & 1 & & & & & & &
\end{array}$$

Ao abaixarmos o próximo dígito junto ao último resto, o número obtido é menor que o divisor. Sendo assim, acrescentamos 0 ao quociente.

$$\begin{array}{cccccccccc|cccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 0 & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \cline{11-14}
- & & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & & 1 & 1 & \mathbf{0} & \\ \cline{2-6}
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\
 & - & & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ \cline{3-7}
 & & & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} & & & & & &
\end{array}$$

Abaixando o último dígito, teremos:

$$
\begin{array}{cccccccccc|cccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{0} & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \cline{11-14}
- & & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ \cline{2-6}
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\
 & - & & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ \cline{3-7}
 & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{0} & & & & & \\
 & & - & & & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & & \\ \cline{5-9}
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & &
\end{array}
$$

Então, verificamos que a divisão é exata e que o quociente é $(1101)_2$. Convertendo para a base decimal temos que o quociente $156 \div 12 = 13$.

6.2.1 Expansão fracionária de um número em binário

Caso a divisão não seja exata, se prosseguirmos com o cálculo além do resto final, obteremos a expansão fracionária de $\frac{a}{b}$ na base utilizada. Para ilustrarmos, vamos determinar a expansão fracionária de

$$\frac{1}{3} = \frac{(1)_2}{(11)_2}$$

Desta vez faremos a divisão sem passos intermediários.

$$
\begin{array}{cccccc|ccccc}
 & 1, & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & \\ \cline{7-11}
- & & 1 & 1 & & & 0, & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{2-4}
 & & & 1 & 0 & 0 & & & & & \\
 & & - & & 1 & 1 & & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 1 & & & & &
\end{array}
$$

Facilmente percebemos que a divisão não será exata e que os restos obedecem uma sequência fixa, isto é, o resultado é uma dízima periódica de período 01, de modo que $\frac{1}{3}$ corresponde a $(0,0101\ldots)_2$. Verifica-se também o resultado obtido ao observarmos que

$$(0,0101\ldots)_2 = 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + \cdots \overset{(*)}{=} \frac{2^{-2}}{1-2^{-2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

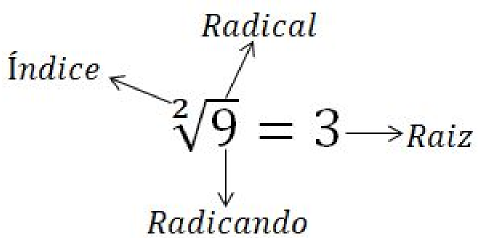
onde a igualdade $(*)$ corresponde à soma dos termos de uma P.G. infinita de primeiro termo e razão iguais a 2^{-2}.

CAPÍTULO

7

RAIZ QUADRADA

A operação de radiciação consiste em obter a raiz de um número. Deste modo, a radiciação é o processo que, conhecendo o índice e o radicando, permite encontrar a raiz de um número. Veja como exemplo o radical a seguir.



Calcular raízes quadradas é um problema não só para alunos, mas também para parte dos professores, que, ao ensinarem o cálculo de raízes, contam com um método não muito eficiente, tanto para raízes não exatas, quanto para aquelas onde o radicando é um número grande. “Há, em geral, duas preocupações em relação ao algoritmo para o cálculo de raízes quadradas: 1º o aluno aprende os passos sem entendê-los, 2º o aluno facilmente se esquece desses passos” (BARONE JR., 1983).

Ao compararmos o cálculo de uma raiz quadrada com qualquer uma das quatro operações aritméticas, percebemos que seu grau de dificuldade é maior. Segundo Descartes, apud Carvalho (2010), “toda a aritmética se compõe somente de quatro ou cinco operações, que são: adição, subtração, multiplicação, divisão e a extração de raízes, que podemos considerar com uma espécie de divisão.”

Há inúmeros métodos para se extrair raízes quadradas. Veja Barone Jr. (1983).

O algoritmo mais utilizado para o cálculo de raízes quadradas no ensino básico é o chamado *método das tentativas*, em que fazemos aproximações sucessivas dos números, acrescentando casas. Por exemplo, para calcular $\sqrt{10}$, notamos que $3^2 < 10 < 4^2$, então a

$\sqrt{10} = 3,\ldots$. Além disso, $(3{,}1)^2 < 10 < (3{,}2)^2$, logo $\sqrt{10} = 3{,}1\ldots$. Por diversas tentativas, verifica-se que $(3{,}16)^2 < 10 < (3{,}17)^2$, logo $\sqrt{10} = 3{,}16\ldots$ e assim por diante. Sua vantagem é ser de fácil entendimento. No entanto, exige inúmeros cálculos com números fracionários, um pouco tediosos de serem feitos manualmente mas que são feitos eficientemente com uma calculadora simples, mas esta já conta com uma operação que lhe dá a raiz quadrada! Esse método pode ser aplicado para raízes de outros índices.

Outro método é proposto por Barone Jr., o chamado *método das aproximações sucessivas*, atribuído ao matemático inglês Isaac Newton (1642-1727). É um tanto elaborado. Consiste em saber que:

1. se a_n é uma aproximação para $\sqrt{x}$, então $\sqrt{x}$ está entre a_n e $b_n = \frac{x}{a_n}$;
2. a média aritmética de a_n e b_n, $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, é uma melhor aproximação de $\sqrt{x}$ que a_n.

Assim, partindo de um chute a_0 para $\sqrt{x}$, após alguns passos, teremos aproximações tão boas quanto queiramos. A vantagem é que exige efetuarmos apenas operações simples — somas e divisões — mas há alguns pontos fracos para sua utilização quando feitos manualmente, como as divisões com números fracionários com diversas casas e sua difícil compreensão por parte dos alunos. Para ilustrarmos com um exemplo, tomemos como chute inicial $a_0 = 3{,}16$ para $\sqrt{10}$, já um tanto próximo. Temos que $b_0 = \frac{10}{3{,}16} \approx 3{,}16455696$. A próxima iterada então é $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2} \approx 3{,}162278481$, que notamos estar já bem próxima de $\sqrt{10} = 3{,}16227766$. Para alunos mais avançados, este método permite uma extensão para calcularmos aproximações a_i para $\sqrt[n]{x}$, tomando $b_i = \frac{x}{a_i^{n-1}}$ e a aproximação seguinte como a média ponderada

$$a_{i+1} = \frac{(n-1)a_i + b_i}{n}.$$

Apresentaremos a seguir o chamado *algoritmo clássico de extração de raiz quadrada* que pode ser utilizado com números escritos em qualquer base. Caso o número esteja escrito na base 10, as tentativas serão maiores, isto é, temos 10 possibilidades de dígitos que podem exigir alguns cálculos até encontrar o resultado conveniente. No entanto, se o número estiver escrito na base 2, teremos apenas duas opções, uma delas a óbvia, sem exigência de multiplicações (são todas “vezes 1”), tornando o algoritmo muito prático.

7.1 Algoritmo clássico para extração de raiz quadrada

Este algoritmo nos dá, a cada passo, um dígito exato a mais da raiz quadrada de um número, seja esta uma raiz exata ou não. Somente contas com números naturais são realizadas, ao contrário dos outros métodos.

Podemos detalhar a explicação em um caso particular, ficando claro que a justificativa é análoga para o caso geral. Considere P um número inteiro positivo com cinco ou seis algarismos, que, só para facilitar o raciocínio, vamor supor que seja um quadrado perfeito. Uma primeira avaliação mostra que $\sqrt{P}$ não terá mais do que três algarismos[1]. Então queremos determinar os algarismos x, y e z, que são inteiros com $0 \leqslant x, y, z \leqslant 9$, verificando

$$P = (x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + z)^2.$$

O algoritmo baseia-se essencialmente na seguinte igualdade:

$$P = (x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + z)^2 = \underbrace{x^2 \cdot 10^4}_{\text{1) só } x} + \underbrace{(2x \cdot 10 + y)y \cdot 10^2}_{\text{2) } x \text{ e } y} + \underbrace{[2 \cdot (x \cdot 10 + y) \cdot 10 + z]z}_{\text{3) } x,\, y,\, z}. \tag{7.1}$$

Note que a primeira parcela em (7.1), $x^2 \cdot 10^4$, tem apenas x, e podemos determiná-la tomando o maior dígito x para que esta não passe de P.

Uma vez determinado x, notemos que da segunda parcela em (7.1), $(2x \cdot 10 + y)y \cdot 10^2$, é a quantidade mais significativa de $P - x^2 \cdot 10^4$. Assim, podemos encontrar o maior y tal que ela não ultrapasse $P - x^2 \cdot 10^4$.

Para o algarismo z, procedemos da mesma maneira, sendo o valor de z tal que a terceira parcela $[2 \cdot (x \cdot 10 + y) \cdot 10 + z]z$ é igual a P menos as duas anteriores.

Para uma prova de fato, veja Barone Jr. (1983). O exposto acima nos justifica os passos do algoritmo:

I. Dividir o número em classes de dois algarismos, a começar pela direita; a última classe à esquerda pode ter um só algarismo;

II. Procurar a raiz do maior quadrado contido na última classe à esquerda, escrever esta raiz à direita do número proposto; isto nos dá o primeiro algarismo da raiz buscada.

III. Subtrair o seu quadrado da primeira classe e, ao lado do resto, baixar a classe seguinte;

IV. Separar por um ponto o primeiro algarismo à direita do número assim formado, e dividir a parte que resta à esquerda pelo dobro da raiz encontrada, escrever o quociente ao lado do dobro da raiz, multiplicar o número assim obtido por este mesmo quociente e subtrair o produto do número em que se opera. Se a subtração for possível, o quociente é o segundo algarismo da raiz, escreve-se a direita do precedente, no caso contrário, o quociente deve ser diminuído de uma ou várias unidades;

V. Baixar a classe seguinte ao lado do resto da última subtração, e operar sobre o número resultante como sobre o precedente;

VI. Continuar assim até se esgotarem as classes a baixar.

Duas observações devem ser consideradas:

[1] $P < 10^6 \implies \sqrt{P} < 10^3 = 1000.$

a) Depois de baixar uma classe e separar um algarismo à direita, pode acontecer que o número restante à esquerda seja inferior ao dobro da raiz obtida, neste caso, é preciso escrever um zero na raiz, baixar a classe seguinte e continuar a operação.

b) O número de algarismos da raiz é evidentemente igual ao das classes do número proposto.

7.2 Cálculo de raiz quadrada na base decimal

Vejamos como exemplo de aplicação deste algoritmo, o cálculo da $\sqrt{10}$ com precisão de duas casas decimais.

Primeiramente, como desejamos uma aproximação de duas casas decimais, vamos acrescentar quatro zeros decimais no radicando. Temos $\sqrt{10,00\ 00}$. Agora vamos dividir o radicando em classes de dois algarismos da direira para à esquerda para encontrarmos o primeiro algarismo.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\ 10,00\ \ 00} & \downarrow,?\,? \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

O próximo passo é encontrar o maior número natural cujo quadrado seja menor ou igual a 10. Sabendo que o número é 3, subtraindo seu quadrado de 10, obtemos 1.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\ \mathbf{10,}00\ \ 00} & \mathbf{3},?\,? \\ \cline{2-2} \underline{-\,\mathbf{9}}\qquad\quad & \underline{3}^2=\mathbf{9} \\ 1\qquad\quad & \end{array}$$

Baixando a próxima dupla de zeros obtemos 100.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\ 10,\mathbf{00}\ \ 00} & 3,?\,? \\ \cline{2-2} \underline{-\,9}\qquad\quad & \underline{3}^2=9 \\ 1\ \ \mathbf{00}\quad & \end{array}$$

Na sequência, devemos dobrar o número 3 e considerar a reposta como algarismo da dezena do próximo passo que é para encontrarmos o primeiro algarismo após a vírgula.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\ 10,00\ \ 00} & 3,\downarrow ? \\ \cline{2-2} \underline{-\,9}\qquad\quad & \underline{3}^2=9 \\ 1\ \ 00\quad & 2\times 3=6 \implies 6\downarrow\times\downarrow\ \leqslant 100 \end{array}$$

Verificamos que 1 satisfaz a condição para ser o primeiro algarismo após a vírgula, pois fazendo a composição do algarismo 6, que representa a dezena, com o algarismo 1, que representa a unidade, encontramos como resultado o número 61 que deve ser multiplicado pelo mesmo algarismo da unidade, isto é, multiplicado por 1 e depois subtraído de 100.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{\ 10,00\ \ 00} & 3,\ \mathbf{1}\ ? \\ \cline{2-2}
\underline{-\,9}\quad\ \ \, & \underline{3}^2 = 9 \\
1\ \ 00\quad & 2\times 3 = 6 \implies 6\underline{\mathbf{1}}\times\underline{\mathbf{1}} = \mathbf{61} \\
\underline{-\,\mathbf{61}}\quad & \\
\mathbf{39}\quad &
\end{array}
$$

Obtendo 39 como resto, baixamos a última dupla de zeros e assim teremos 3.900.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{\ 10,00\ \ \mathbf{00}} & 3,\ 1\ ? \\ \cline{2-2}
\underline{-\,9}\quad\ \ \, & \underline{3}^2 = 9 \\
1\ \ 00\quad & 2\times 3 = 6 \implies 6\underline{1}\times\underline{1} = 61 \\
\underline{-\,61}\quad & \\
39\ \ \mathbf{00} &
\end{array}
$$

O próximo passo agora é dobrar os algarismos já encontrados, ou seja, 3 e 1 para investigarmos qual será o próximo algarismo.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{\ 10,00\ \ 00} & 3,\ 1\downarrow \\ \cline{2-2}
\underline{-\,9}\quad\ \ \, & \underline{3}^2 = 9 \\
1\ \ 00\quad & 2\times 3 = 6 \implies 6\underline{1}\times\underline{1} = 61 \\
\underline{-\,61}\quad & \\
\mathbf{39\ \ 00} & 2\times 31 = 62 \implies 62\downarrow\times\downarrow\ \leqslant \mathbf{3900}
\end{array}
$$

Observamos que o algarimo 6 satisfaz as condições exigidas para o próximo algarismo e repetimos o processo realizado no passo anterior.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{\ 10,00\ \ 00} & 3,\ 1\ \mathbf{6} \\ \cline{2-2}
\underline{-\,9}\quad\ \ \, & \underline{3}^2 = 9 \\
1\ \ 00\quad & 2\times 3 = 6 \implies 6\underline{1}\times\underline{1} = 61 \\
\underline{-\,61}\quad & \\
\mathbf{39\ \ 00} & 2\times 31 = 62 \implies 62\underline{\mathbf{6}}\times\underline{\mathbf{6}} = \mathbf{3756} \\
\underline{-\,\mathbf{37\ \ 56}} & \\
\mathbf{144} &
\end{array}
$$

Assim, com aproximação de duas casas, $\sqrt{10}\approx 3,16$. Caso seja necessário encontrar mais uma casa decimal, basta acrescentar mais uma dupla de zeros à direita do resto obtido e repetir o processo.

7.3 Cálculo de raiz quadrada na base binária

Podemos utilizar o algoritmo clássico para extrair raízes quadradas de números escritos em qualquer base. Faremos agora uma adaptação em (7.1) para que x, y e z sejam calculados com P escrito na base 2. Ao fazermos essa adaptação tornamos o algoritmo ainda mais prático, pois nos resta apenas duas opções para x, y e z, isto é, 0 ou 1, e a multiplicação por 2 presente nos passos é muito simples, basta acrescentar um algarismo 0 à direita do número.

Suponha que $\sqrt{P}$ seja escrito na base 2 com três dígitos, isto é, $\sqrt{P} = (xyz)_2$ (as ideias adaptam-se para números com mais dígitos). Então,

$$\begin{aligned} P &= (x\cdot 2^2 + y\cdot 2 + z)^2 \\ &= \underbrace{x^2\cdot 2^4}_{\text{1) só } x} + \underbrace{(2x\cdot 2+y)y\cdot 2^2}_{\text{2) } x \text{ e } y} + \underbrace{[2\cdot(x\cdot 2+y)\cdot 2+z]z}_{\text{3) } x,\, y,\, z} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Dessa forma, os valores de x, y e z podem ser obtidos pelas diversas parcelas com ordens de grandeza dos dígitos agrupados de dois em dois, exatamente como vimos apresentado no algoritmo da raiz para números em base decimal, em Seção 7.2.

Efetuaremos uma aplicação desse algoritmo com os números escritos na base dois através de um exemplo, o do cálculo da raiz quadrada de $25 = (11001)_2$. Vamos dividir o radicando em classes de dois algarismos da direira para a esquerda para encontrarmos o primeiro algarismo.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\;1\;\;10\;\;01} & \downarrow ?\,? \\ \hline & \end{array}$$

Como obtivemos três classes, já sabemos que o resultado será um número de três dígitos. Ora, o primeiro dígito só pode ser 1, sempre! No algoritmo usual, procura-se o maior dígito não nulo cujo quadrado seja menor ou igual ao primeiro grupo. Como estamos operando no sistema binário, eis a única opção: 1. Seguindo o algoritmo, subtraímos seu quadrado do primeiro grupo, no caso 1, obtendo 0.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\;\mathbf{1}\;\;10\;\;01} & \mathbf{1}\,?\,? \\ \cline{2-2} \underline{-\,\mathbf{1}}\qquad\quad & \underline{1}^2 = \mathbf{1} \\ 0\qquad\quad & \end{array}$$

Abaixando os dois números da próxima classe obtemos 10.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\;1\;\;\mathbf{10}\;\;01} & 1\,?\,? \\ \cline{2-2} \underline{-\,1}\qquad\quad & \underline{1}^2 = 1 \\ 0\;\;\mathbf{10}\qquad & \end{array}$$

Na sequência, vamos dobrar o algarismo já encontrado, acrescentar 1 ao final e multiplicar por 1, ou seja, em cada novo passo a partir daqui, basta acrescentar “01” aos dígitos já obtidos e apenas comparar com o resto do passo atual, evidenciando a praticidade do algoritmo na base binária. Como a comparação $1\underline{01} \leqslant 10$ falha, o segundo dígito é 0 e a subtração por 0 torna-se desnecessária.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{\ 1\ \ 10\ \ 01} & 1\ \mathbf{0}\ ? \\ \cline{2-2}
\underline{-\,1} & \underline{1}^2 = 1 \\
0\ \ 10 & 1\underline{01} \leqslant 10?\ (\text{falhou} \implies \mathbf{0})
\end{array}
$$

Continuamos, abaixando os dois dígitos da última classe e assim teremos 1001.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{\ 1\ \ 10\ \ \mathbf{01}} & 1\ 0\ ? \\ \cline{2-2}
\underline{-\,1} & \underline{1}^2 = 1 \\
0\ \ 10 & 1\underline{01} \leqslant 10?\ (\text{falhou} \implies 0) \\
10\ \ \mathbf{01} &
\end{array}
$$

O próximo passo é acrescentar “01” aos dígitos já obtidos (10) e comparar $10\underline{01} \leqslant 1001$, o que se verifica. Portanto o terceiro dígito é 1. Efetuamos a subtração pelo número obtido pelo acréscimo de 01.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{\ 1\ \ 10\ \ 01} & 1\ 0\ \mathbf{1} \\ \cline{2-2}
\underline{-\,1} & \underline{1}^2 = 1 \\
0\ \ 10 & 1\underline{01} \leqslant 10?\ (\text{falhou} \implies 0) \\
10\ \ 01 & \mathbf{10\underline{01}} \leqslant 1001?\ (\text{atendeu} \implies \mathbf{1}) \\
\underline{-\ \ \mathbf{10\ \ 01}} & \\
0 &
\end{array}
$$

Como o resto foi 0, significa que $(11001)_2$ é um quadrado perfeito, logo sua raiz quadrada é igual a $(101)_2 = 5$. No caso em que último resto não seja nulo, poderíamos continuar o algoritmo para obtermos os dígitos desejados da parte fracionária.

REFERÊNCIAS

BARONE JR., M. O algoritmo da raiz quadrada. **Revista do Professor de Matemática**, v. 2, 1983.

CARVALHO, J. B. P. d. A raiz quadrada ao longo dos séculos. **V Bienal da SBM**, 2010.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. 1. ed. [S.l.]: Atual, 1991.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 3. ed. Campinas: UNICAMP, 2008.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 2. ed. [S.l.]: SBM, 2016.

HENTZ, S. R. **Multi Calculadora on-line**. 2013. Disponível em: <http://www.multicalculadora.com.br>.

IFRAH, G. **Os números: a história de uma grande invenção**. 3. ed. São Paulo: Globo, 1989.

____. **História universal dos algarismos**. 1. ed. [S.l.]: Nova Fronteira, 2002. v. 1 e 2.

LORENZI, R. P. L. L.; CHIES, R. P. Sistema de numeração: atividades para compreensão da base dez e introdução de operações. **Revista do professor.**, v. 94, 2008.

MORAN, J. M. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 6. ed. Campinas: Papirus, 2000.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. A. F. S. **Aprendizagem Significativa: A teoria de David Ausubel**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2006.

SAMPAIO, J. C. V.; MALAGUTTI, P. L. A. **Mágicas, Matemática e outros mistérios**. 1. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2008.

SAMPEDRO, J. **Um sistema binário inventado na Polinésia séculos antes de Leibniz**. 2013. Disponível em: <https://brasil.elpais.com/brasil/2013/12/16/sociedad/1387215405_275511.html>.

SMITH, D. E.; KARPINSKI, L. C. **The Hindu-Arabic Numerals**. [S.l.]: Ginn, 1911.

ICMC USP
SÃO CARLOS