Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

O Algoritmo de Euclides e Uma Generalização da Sequencia de Fibonacci

Raimundo Jorge Pereira de Matos

Salvador - Bahia
Março de 2018

O Algoritmo de Euclides e Uma Generalização da Sequencia de Fibonacci

Raimundo Jorge Pereira de Matos

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. **Orientador**:

(Joseph Nee Anyah Yartey)

Salvador - Bahia
Março de 2018

Dedico este trabalho, em especial à minha mãe Noêmia, à minha esposa Claudia e aos meus filhos Felipe e Adélia.

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA), com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Matos, Raimundo Jorge Pereira de
O Algoritmo de Euclides e uma generalização da sequencia de Fibonacci / Raimundo Jorge Pereira de Matos. -- Salvador, 2018.
39 f.

Orientador: Joseph Nee Anyah Yartey.
Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat) -- Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, 2018.

1. Algoritmo de Euclides. 2. Sequencia de Fibonacci. 3. Máximo Divisor Comum. 4. Ordem de pares ou ternos de números. I. Yartey, Joseph Nee Anyah. II. Título.

O Algoritmo de Euclides e uma generalização da sequência de Fibonacci

Raimundo Jorge Pereira de Matos

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 16/04/2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey (orientador)
UFBA

Vinicius Moreira Mello

Prof. Dr. Vinicius Moreira Mello
UFBA

Darllan Conceição Pinto

Prof. Dr. Darllan Conceição Pinto
UFBA

Agradecimentos

Agradeço a Deus, o grande criador.

À minha esposa Claudia pelo companheirismo, incentivo e principalmente por nos momentos difíceis nunca deixar de apoiar.

À minha mãe Noêmia por sempre ter mostrado aos filhos a necessidade de estudar para a busca de um futuro melhor.

Aos meus colegas do Profmat 2015. Agradeço de forma muito especial, a Felipe, Evandro e Carol que estiveram sempre à disposição para estudarmos em grupo ou tirar dúvidas sempre que necessário. O meu carinho, respeito e amizade.

Ao professor Joseph Nee, meu orientador, pela paciência, pela cobrança, mas acima de tudo, pela atenção dedicada ao trabalho.

Ao coordenador do Curso, Prof. Marco Antonio.

A todos os Professores do Profmat que tive o privilégio de ser Aluno.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão desse trabalho.

Por último aos meus filhos, Felipe e Adélia, fontes de luz e força, que me impulsionam a continuar sonhando e lutando.

"A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela".

Albert Einstein

Resumo

Neste dissertação baseada no artigo [1], vamos mostrar que os pares de números de Fibonacci adjacentes, f_{n-1} e f_{n-2} (sendo que $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$), são os menores pares de suas ordens e que são os menores pares quando aplicamos o algoritmo de Euclides para eles.

Definimos também os ternos de números de Fibonacci adjacentes, $g_{n-1},\ g_{n-2},\ g_{n-3}$ (sendo que $g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + g_{n-3}$) e vamos mostrar que os menores ternos de suas ordens são de fato, os menores ternos.

Sabemos que a razão entre dois números de Fibonacci adjacentes f_n/f_{n-1} converge para um número chamado de "razão aurea". Vamos provar neste trabalho que a razão entre ternos de números de Fibonacci adjacentes g_n/g_{n-1} também converge para um número. Este número no caso de ternos de números de Fibonacci é um pouco maior do que a razão aurea.

Daremos uma aplicação usando GeoGebra para ilustrar os pares de números e os pares de números adjacentes de Fibonacci.

Palavras-chave: Números de Fibonacci, Ordem de pares (ternos), MDC, Algoritmo de Euclides.

Abstract

In this dissertação, based no the paper [1], we proved that adjacent pairs of Fibonacci numbers $f_n - 1$ and f_{n-2} (where $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$) are the slowest pairs to which one can apply the Euclidean Algorithm.

We define adjacent triples Fibonacci numbers $g_{n-1},\ g_{n-2},\ g_{n-3}$ (where $g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + g_{n-3}$) e proved also that they are slowest triples of their order.

We know that the ratio os two adjacent Fibonacci números f_n/f_{n-1} converge to a certo number called the “Golden Ratio”. We will proved here that adjacent triples Fibonacci numbers g_n/g_{n-1} also converge to some number. This number is larger that the golden ratio.

We will give an application using GeoGebra to show the relationship between pairs os numbers and pairs os adjacent Fibonacci numbers.

Key-words: Fibonacci numbers, Order of pair (triples) , MDC, Euclidean Algorithm.

Conteúdo

1 Sequência de Fibonacci **13**

1.1 Definição do Problema 13

1.2 Propriedades Simples dos Números de Fibonacci 14

2 Algoritmo de Euclides e Máximo Divisor Comum **15**

2.1 Divisibilidade 15

2.2 Máximo Divisor Comum 16

3 Relação entre o algoritmo de Euclides e números de Fibonacci **19**

3.1 Pares de Números e Pares de Números de Fibonacci 19

3.2 Estimativa das ordens de $\mathbb{F}_n$ 24

3.3 Aplicação usando GeoGebra 26

3.4 Ternos de Números e Ternos de Números de Fibonacci 27

3.4.1 Determinando o menor ternos de ordem 0, 1, 2 ,3, etc 29

3.4.2 Convergência de $\dfrac{g_{n+1}}{g_n}$ 33

4 Uma Proposta para Ensino Médio **35**

4.1 O Objetivo da Atividade 35

4.2 Sequência Didática da Atividade 35

Introdução

O objetivo desse é relacionar o estudo de sequências no Ensino Médio com atenção especial à sequência de Fibonacci e a relação existente com o algoritmo euclidiano.

No Ensino Médio é dada pouca ou quase nenhuma importância ao estudo de sequências, a não ser como parte introdutória do estudo de Progressão Aritmética e Progressão Geométrica. Nos atentamos a uma sequência especial, a chamada sequência de Fibonacci e a partir dela estabelecemos relação direta com o MDC de dois números e o algoritmo da divisão. A partir desse estabelecimento ampliamos o algoritmo de Euclides para o terno (a, b, c) e sua relação com a sequência de Fibonacci para com esse terno (a, b, c), lembrando a necessidade dos números de Fibonacci serem adjacentes.

No primeiro capítulo apresentamos uma pequena biografia de Leonardo de Pisa (1170 - 1250), também conhecido como Fibonacci. Abordamos o problema dos coelhos conhecido como Sequência de Fibonacci e estabelecemos as suas principais propriedades bem como sua lei de recorrência. Como já havia no Profmat uma série de trabalhos envolvendo a Sequência de Fibonacci relacionada ao Algoritmo de Euclides, utilizamos esses trabalhos em que já foram feitas as provas necessárias a continuidade do nosso trabalho, resolvemos não repetir tais provas.

No segundo capítulo estabelecemos os conceitos de divisibilidade entre dois números inteiros e através da divisão euclidiana o conceito de MDC de um par (a, b) utilizando o algoritmo de Euclides, também estendemos os conceitos de MDC para o terno (a, b, c). No terceiro capítulo procuramos estabelecer a relação entre o algoritmo de Euclides e os números de Fibonacci. No primeiro momento verificamos o MDC de pares (a, b) e a quantidade de passos que são dados no algoritmo da divisão. A esses pares chamamos de ordem. Ao efetuar esse processo do algoritmo de Euclides utilizando pares mostramos que em qualquer ordem (quantidade de passos dados) o menor par (a, b) é sempre formado por pares adjacentes de números de Fibonacci. Além disso, verificamos a chamada razão áurea. O passo seguinte será ampliar o MDC de pares para ternos, e estabelecer uma sequência para ternos adjacentes de Fibonacci e mostrar a convergência para Ψ (aprox. 1,83...), um pouco maior que Φ.

No quarto capítulo apresentamos uma sequência de atividades com o objetivo de fixar cada um dos conceitos e relações estabelecidas, bem como verificar graficamente através do GeoGebra como se comportam graficamente esses pares adjacentes de números de Fibonacci.

Capítulo 1

Sequência de Fibonacci

Neste capítulo, um resumo sobre a sequência de Fibonacci e suas propriedades. As demonstrações podem ser encontradas nos seguintes trabalhos feitos [3], [4], [5].

1.1 Definição do Problema

Em 1202 Leonardo de Pisa (1170-1250), também conhecido como Fibonacci apresentou um modelo de crescimento de coelhos para seus alunos. É importante ressaltar que segundo Mol (2013) [6] Fibonacci é considerado o mais importante matemático da Europa medieval, também Eves (2011) [6] afirma que nos nove séculos da Idade Média nenhum matemático se compara à capacidade dele.

Vejamos o problema proposto por Fibonacci. Quantos casais de coelhos teriam ao final de 1 ano se:

No Primeiro mês temos um coelho macho e um coelho fêmea. Estes dois coelhos acabaram de nascer;

Um coelho só atinge a maturidade sexual ao final de um mês;

O período de gestação de um coelho dura um mês;

Ao atingirem a maturidade sexual, a fêmea irá dar à luz todos os meses;

A mãe irá dar à luz todos os meses um coelho macho e um coelho fêmea;

Os coelhos nunca morrem.

Inicialmente temos um par de coelhos, após o primeiro mês teremos dois pares de coelhos, no segundo mês termos três pares, no terceiro mês cinco pares, o quarto mês oito pares, no quinto mês treze pares e assim por diante. A sequência de números é dado por

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144, \cdots,$$

sendo que cada termo é dado pela soma dos dois primeiros termos é chamado de sequência de Fibonacci. Em outras palavras, eles são gerados pela formula de recorrência:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 0, \quad f_1 = 0, \ f_1 = 1. \tag{1.1}$$

1.2 Propriedades Simples dos Números de Fibonacci

Vamos enunciar algumas propriedades dos números de Fibonacci. As demonstrações destes propriedades podem ser encontrados em [6]:

Lema 1.2.1 (Soma da sequência de Fibonacci). *A soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é dado por*

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} + f_n = f_{n+2} - 1.$$

Lema 1.2.2 (Soma dos termos impares da sequência de Fibonacci). *A soma dos n primeiros termos impares da sequência de Fibonacci é dada por*

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}.$$

Lema 1.2.3 (Soma dos termos pares da sequência de Fibonacci). *A soma dos n primeiros termos pares da sequência de Fibonacci é dada por*

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

Lema 1.2.4 (Soma dos termos da sequência de Fibonacci com termos alternados). *A soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci com termos alternados é dada por*

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \cdots + (-1)^{n+1} f_n = (-1)^{n-1} f_{n-1} + 1.$$

Lema 1.2.5 (Soma dos termos quadrados da sequência de Fibonacci). *A soma dos n primeiros termos quadrados da sequência de Fibonacci é dada por*

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}.$$

Lema 1.2.6 (Formula Importante sobre a sequência de Fibonacci).

$$f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}.$$

Lema 1.2.7 (Diferença de quadrados dos números de Fibonacci).

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2.$$

Teorema 1.2.1 (Razão Áurea).

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Isto é a razão dos números de Fibonacci adjacentes converge para Φ. Além disto Φ é solução da equação $x^2 - x - 1 = 0$.

Capítulo 2

Algoritmo de Euclides e Máximo Divisor Comum

2.1 Divisibilidade

Definição 2.1.1. *Sejam a, b números inteiros. Dizemos que a divide b, denotado por $a|b$, se existe um número inteiro c tal que $b = ac$. A notação $a \nmid b$ significa que a não divide b.*

O número inteiro c é único se $a \neq 0$, pois, se c' é um número tal que $b = ac'$, então $ac - ac' = 0 \Rightarrow a(c - c') = 0 \Rightarrow c = c'$.

Proposição 2.1.1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Então,*

1. $1|c, a|a$ *e* $a|0$*;*
2. $0|a \iff a = 0$*;*
3. $a|b, b \neq 0,$ *se, e somente se,* $|a| \leq |b|$*;*
4. *se* $a|b$ *e* $b|c$*, então* $a|c$*.*

Demonstração.

1. $1|c$ pois $c = 1.c$, $a|a$ pois $a = a.1$ e $a|0$ pois $0 = a.0$.
2. Suponhamos que $0|a$. Logo, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = c.0$. Isto é, $a = 0$. Reciprocamente, se $a = 0$, então $0 = c.0$, para algum $c \in \mathbb{Z}$.
3. Se $a|b$, então, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a.q$. Assim, $|b| = |a|.|q|$. Como $b \neq 0, q \geq 1$, tem-se $|a| \leq |b|$.
4. Se $a|b$ e $b|c$, então, por definição, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $b = am$ e $c = bn$. Assim, $c = (am)n = a(mn)$. Logo, $a|c$.

$\square$

Proposição 2.1.2. *Se $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, então*

$$a|b \quad e \quad c|d \Rightarrow a.c|b.d$$

Demonstração. Se $a|b$ e $c|d$, então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $b = am$ e $d = cn$. Então, $bd = (am).(cn) = (ac).(mn)$. Portanto, $ac|bd$. $\square$

Proposição 2.1.3. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tais que $a|(b \pm c)$. Então, $a|b \Leftrightarrow a|c$.*

Demonstração. Como $a|(b + c)$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $b + c = am$. Se $a|b$, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $b = an$. Então, $an + c = am \Rightarrow c = a(m - n)$. Logo, $a|c$. Agora, se $a|(b - c)$ e $a|b$, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $b - c = am$ e $b = a.n$. Assim, $c = a.(n - m)$. Analogamente, mostra-se que $a|c \Rightarrow a|b$. $\square$

Proposição 2.1.4. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $a|b$ e $a|c$, então para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, $a|(xb + yc)$*

Demonstração. Se $a|b$ e $a|c$, então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $b = a.m$ e $c = a.n$. Então, $xb + yc = xam + yan = a.(xm + yn)$. Logo, $a|(xb + yc)$. $\square$

Teorema 2.1.1 (Divisão Euclidiana)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Existem dois únicos inteiros q e r tais que $a = bq + r, 0 \leq r < |b|$.*

2.2 Máximo Divisor Comum

Definição 2.2.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, não simultaneamente nulos. O número inteiro $d, d \neq 0$ é um divisor comum de a e b se $d \mid a$ e $d \mid b$.*

Definição 2.2.2. *O número inteiro $d, d \geq 0$, é um máximo divisor comum (mdc) de a e b se:*

1. *$d \mid a$ e $d \mid b$;*
2. *Se $d' \mid a$ e $d' \mid b$, então $d' \mid d$.*

O mdc de a e b, quando existir, será denotado por $\text{mdc}(a, b)$.

Para calcularmos o mdc de maneira eficiente, vamos descrever o chamado algoritmo de Euclides ou algoritmo das divisões sucessivas, que se baseia na seguinte simples observação:

Lema 2.2.1 (Euclides)**.** *Se $a = bq + r$, então $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.*

Demonstração. Seja $d = \text{mdc}(b, r)$. Como $d \mid b$ e $d \mid r$ temos que $d \mid a$, já que $a = bq + r$. Assim, $d \mid a$ e $d \mid b$. Suponha que $d' \mid a$ e $d' \mid b$. Pois $a = bq - r$. Logo, $d' \mid a$ e $d' \mid r$. Portanto, $d' \mid d$ e assim, $d = \text{mdc}(a, b)$. □

O algoritmo de Euclides consiste na aplicação reiterada do lema acima onde q e r são o quociente e o resto na divisão de a por b (note que o lema vale mesmo sem a condição $0 \leq r < |b|$). Como os restos formam uma sequência estritamente decrescente, o algoritmo eventualmente para quando atingimos o resto 0.

Exemplo 2.2.1. *Calcule mdc*$(306, 657)$.
Realizando as divisões sucessivas, temos

	2	*6*	*1*	*4*
657	*306*	*45*	*36*	*9*
45	*36*	*9*	*0*	

ou

$$\begin{aligned} 657 &= 2(306) + 45 \\ 306 &= 6(45) + 36 \\ 45 &= 1(36) + 9 \\ 36 &= 4(9) + 0 \end{aligned}$$

Assim, temos

$$mdc(657, 306) = mdc(306, 45) = mdc(45, 36) = mdc(36, 9) = mdc(9, 0) = 9.$$

O algoritmo de Euclides pode ser usado para calcular o mdc de três números a, b e c tal que $a \leq b \leq c$ da seguinte forma. Vamos aplicar as divisões sucessivas em 2 instantes usando o menor dos três inteiros como o divisor. Isto é

$$\begin{aligned} c &= q_c(a) + r_c \\ b &= q_b(a) + r_b \end{aligned}$$

Repetimos o processo para o terno $\Big(\min(r, b, r_c),\ \max(r_b, r_c),\ a\Big)$, sendo a o maior número. Continuamos até ambos os restos são zeros. Portanto o mdc é o ultimo menor resto.

Exemplo 2.2.2. *Determine o mdc*$(203, 91, 77)$.
Temos que

$$\begin{aligned} 203 &= 2(77) + 49 \\ 91 &= 1(77) + 14 \end{aligned}$$

Aplicamos o algoritmo da divisão de novo para o terno $(77, 49, 14)$;

$$\begin{aligned} 77 &= 5(14) + 7 \\ 49 &= 3(14) + 7 \end{aligned}$$

Aplicamos o algoritmo da divisão de novo para o terno $(14, 7, 7)$;

$$\begin{aligned} 14 &= 2(7) + 0 \\ 7 &= 1(7) + 0 \end{aligned}$$

Como ambos os restos são zeros temos que $mdc(203, 91, 77) = 7$

Capítulo 3

Relação entre o algoritmo de Euclides e números de Fibonacci

Neste capítulo vamos explorar relação entre o algoritmo de Euclides e os números de Fibonacci.

Vamos definir as notações que usaremos neste seção.

- $\mathbb{P} := \{(a, b) : \quad a, b \in \mathbb{N}, \quad a \leq b, \quad b \neq 0\}$
- $\mathbb{P}^* := \{(a, b) \in \mathbb{P} : \quad a \neq 0\}$
- $\mathbb{F}_n = \{(f_n,\ f_{n+1}) : \quad f_n,\ f_{n+1}$ são números de Fibonacci$\}$

3.1 Pares de Números e Pares de Números de Fibonacci

Definição 3.1.1. *Sejam $X = (a_1, b_1)$ e $Y = (a_2, b_2) \in \mathbb{P}$. Então dizemos que*

$$X \leq Y \ \Leftrightarrow\ a_1 \leq a_2 \ \ e \ \ b_1 \leq b_2.$$

Proposição 3.1.1. *A relação binaria $\leq$ é uma ordenação parcial de $\mathbb{P}$, mas não uma ordenação total.*

Demonstração. Vamos mostrar que para todo $X, Y, Z \in \mathbb{P}$:

- $X \leq X$.
- Se $X \leq Y$ e $Y \leq Z$, então $X \leq Z$.
- Se $X \leq Y$ e $Y \leq X$, então $X = Y$.

Sejam $X = (a_1, b_1),\ Y = (a_2, b_2)$ e $Z = (a_3, b_3)$.
A primeira condição é trivial.
Para provar a segunda condição, temos que

$$X \leq Y \ \Rightarrow \ a_1 \leq a_2 \ \text{ e } \ b_1 \leq b_2.$$

$$Y \leq Z \ \Rightarrow \ a_2 \leq a_3 \ \text{ e } \ b_2 \leq b_3.$$

Logo, $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ e $b_1 \leq b_2 \leq b_3$. Portanto $a_1 \leq a_3$ e $b_1 \leq b_3$, que por definição implica $X \leq Z$.
A terceira condição é provado de maneira analogo.

$$X \leq Y \ \Rightarrow \ a_1 \leq a_2 \ \text{ e } \ b_1 \leq b_2.$$

$$Y \leq X \ \Rightarrow \ a_2 \leq a_1 \ \text{ e } \ b_2 \leq b_1.$$

Logo, $a_1 \leq a_2 \leq a_1$ e $b_1 \leq b_2 \leq b_1$. Portanto $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$, que implica $X = Y$.
Finalmente vamos provar que $\leq$ não é uma ordenação total em $\mathbb{P}$. Para isto precismos provar que existe $X, Y \in \mathbb{P}$ tal que nem $X \leq Y$ nem $Y \leq X$ é valido.
Se tomamos $X = (2, 4)$ e $Y = (1, 5)$ então $X \nleq Y$ pois $2 > 1$, e $Y \nleq X$ pois $5 > 4$. □

Definição 3.1.2.

- *Se $S = (a, b) \in \mathbb{P}^*$, definimos $E(S) = (r, a) \in \mathbb{P}$, onde $b = qa + r$ pelo divisão euclidiana.*
- *Se $S = (a, b) \in \mathbb{P}$, definimos $D(S) = (b, a + b) \in \mathbb{P}^*$,*

Proposição 3.1.2. *Se $S = (a, b) \in \mathbb{P}$ e $a < b$ por definição de $\mathbb{P}$, então $E(D(S)) = S$.*

Demonstração. Se $S = (a, b)$ então $D(S) = (b,\ a + b)$. Pelo divisão euclidiana temos que $b + a = 1 \cdot b + a$ pois $a < b$. Portanto

$$E(D(S)) = E((b,\ a + b)) = (a, b) = S.$$

□

Observação 3.1.1. *Note que se $a = b$, a proposição acima não é verdadeira:*

$$E(D(1,\ 1)) = E(1,\ 2) = (0,\ 1) \neq (1, 1).$$

Proposição 3.1.3. *A função $D : \mathbb{P} \to \mathbb{P}^*$ é injetora e preserva a ordem.*

Demonstração. Sejam $S = (a, b)$ e $S' = (a', b')$. Suponha que $D(S) = D(S')$. Então

$$(b, a + b) = (b', a' + b') \Rightarrow b = b' \text{ e } a + b = a' + b'.$$

Portanto temos que $a = a'$ e $b = b'$. Logo $S = S'$. Portanto D é injetora.
Agora se $S \leq S'$, então $a \leq a'$ e $b \leq b'$, portanto

$$D(S) = (b, a + b) \leq (b', a' + b') = D(S').$$

□

Definição 3.1.3. *Seja $S = (a, b) \in P$. Definimos a **ordem** de S, denotado por $ord(S)$, como*

- $ord(S) = 0$ *se* $a = 0$
- *Para $a > 0$, e assumindo que sejam definidos as ordens de todos os elementos $(a', b') \in S$ com $a' < a$. Neste caso, temos que, $ord(S) = ord((E(S))) + 1$.*

Podemos reformular a definição na seguinte forma:

Definição 3.1.4. *Seja $S = (a, b) \in P$. Definimos a **ordem** de S, denotado por $ord(S)$, como*

- $ord(S) = 0$ *se, e somente se,* $S \notin \mathbb{P}^*$
- *em geral, $ord(S) = k$ se, e somente se k é o menor inteiro positivo tal que $E^k(S) \notin \mathbb{P}^*$.*

Exemplo 3.1.1. *Vamos determinar a ordem de $S = (1260, 3010)$.*
Realizando as divisões sucessivas, temos

$$\begin{aligned}
3010 &= 2. \cdot 1260 + 490 \\
1260 &= 2 \cdot 490 + 280 \\
490 &= 1 \cdot 280 + 210 \\
280 &= 1 \cdot 210 + 70 \\
210 &= 3 \cdot 70 + 0
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
E(1260, 3010) &= (490, 1260) \\
E^2(1260, 3010) &= E(490, 1260) = (280, 490) \\
E^3(1260, 3010) &= E(280, 490) = (210, 280) \\
E^4(1260, 3010) &= E(210, 280) = (70, 210) \\
E^5(1260, 3010) &= E(70, 210) = (0, 70) \notin \mathbb{P}^*
\end{aligned}$$

Portanto $ord(S) = 5$.

Proposição 3.1.4. *Se $S = (a, b) \in P$, então ord$(S) \leq a$.*

Demonstração. Suponha que $E^k(S) = (a_k,\ b_k)$, sendo que $a_0 = a,\ b_0 = b$. Como a_k é o resto na divisão de b_{k-1} por a_{k-1}, temos que $a = a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$. Este processo termina no primeiro inteiro positivo $k = \mathrm{ord}(S)$ tal que $a_k = 0$, mostrando que $a \geq k$. □

Proposição 3.1.5. *Para qualquer $S = (a, b) \in \mathbb{P}$, ord$(S) = 1$ se, e somente se $a \mid b$.*

Demonstração. Observe que $\mathrm{ord}(S) > 0 \Leftrightarrow\ a \neq 0$. Neste caso seja $b = q \cdot a + r$. Portanto

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}(S) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad E(S) = (r, b) \ \text{ tem ordem } \ 0 \\ &\Leftrightarrow \quad r = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a \mid b. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.1.6. *Seja $F_n = (f_n,\ f_{n+1})$ onde f_n é o $n-$enésimo número de Fibonacci.*

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 0, \quad f_1 = 0, \ f_1 = 1.$$

F_0	0	1
F_1	1	1
F_2	1	2
F_3	2	3
F_4	3	5
F_5	5	8
F_6	8	13

Se $n \geq 0$, então vale os seguintes afirmações:

(i) $D(F_n) = F_{n+1}$

(ii) Se $n \neq 1$, então $E(F_{n+1}) = F_n$.

Demonstração.

(i) $D(F_n) = D((f_n, f_{n+1})) = (f_{n+1},\ f_n + f_{n+1}) = \mathbb{F}_{n+1}$.

(ii) De (i) temos que

$$\mathbb{F}_{n+1} = D(\mathbb{F}_n).$$

Portanto pelo Proposição 3.1.2

$$E(\mathbb{F}_{n+1}) = E(D(\mathbb{F}_n)) = \mathbb{F}_n.$$

□

Vamos calcular as ordens dos $\mathbb{F}_n's$. Antes calculamos as ordens do 5 primeiros $\mathbb{F}_n's$.

Exemplo 3.1.2.

1. *ord*$(\mathbb{F}_0) =$ *ord*$((f_0, f_1)) =$ *ord*$((0,1)) = 0$ *por definição*

2. *ord*$(\mathbb{F}_1) =$ *ord*$((f_1, f_2)) =$ *ord*$((1,1)) = 1$ *pelo Proposição 3.1.5*

3. *ord*$(\mathbb{F}_2) =$ *ord*$((f_2, f_3)) =$ *ord*$((1,2)) = 1$ *pelo Proposição 3.1.5*

4. *ord*$(\mathbb{F}_3) =$ *ord*$((f_3, f_4)) =$ *ord*$((2,3)) =$ *ord*$(1,2) + 1 = 2$, *pois* $3 = 1 \cdot 2 + 1$

Teorema 3.1.1. *Se* $n \geq 2$, *então* *ord*$(\mathbb{F}_{n+1}) = n$.

Demonstração. Vamos provar por indução.
Para $n = 2$, temos que $\mathbb{F}_3 = (f_3, f_4) = (2,3)$. Pelo algoritmo da divisão temos que

$$\begin{aligned} 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Logo $E^2(\mathbb{F}_3) = E^2(2,3) = E(1,2) = (0,1) \notin \mathbb{P}^*$. Portanto $\mathrm{ord}(\mathbb{F}_3) = 2$. É resultado é valido para $n = 2$.
Suponha, agora, que, para algum $n \geq 2$, saibamos que

$$\mathrm{ord}(\mathbb{F}_{n+1}) = n.$$

Provemos que o resultado é valido para $n+1$. Isto vamos provar que $\mathrm{ord}(\mathbb{F}_{n+2}) = n+1$.
Para isto, note que $E(\mathbb{F}_{n+2}) = \mathbb{F}_{n+1}$. Portanto

$$\mathrm{ord}(\mathbb{F}_{n+2}) = \mathrm{ord}((E(\mathbb{F}_{n+2}))) + 1 = \mathrm{ord}(\mathbb{F}_{n+1}) + 1 = n + 1$$

que mostra o resultado desejado.
Portanto, pelo principio de indução $\mathrm{ord}(\mathbb{F}_{n+1}) = n$ para $n \geq 2$.

□

Vamos enunciar o principal resultado neste trabalho.

Teorema 3.1.2. *Seja* $n \geq 2$. *Para qualquer par* $S = (a,b)$ *de ordem* n, *temos que*

$$S \geq \mathbb{F}_{n+1}, \quad \textit{isto é} \quad a \geq f_{n+1} \text{ e } b \geq f_{n+2}.$$

Portanto F_{n+1} *é o menor elemento de* $\mathbb{P}$ *de ordem* n.

Demonstração. Observe que os casos quando $n = 0$ e $n = 1$ são triviais:

- Suponha que $S = (a, b)$ tem ordem 0. Como $\mathbb{F}_0 = (f_0, f_1) = (0, 1)$ e que $\text{ord}(S) = 0$ devemos ter que $a = 0$. Mas como $b > a$, temos que $b \geq 1$. Portanto $S \geq \mathbb{F}_0$.

- Suponha que $S = (a, b)$ tem ordem 1. Como $\mathbb{F}_1 = (f_1, f_2) = (1, 1)$ e que $\text{ord}(S) = 1$ devemos ter que $a \geq 1$. Mas como $b > a$, temos que $b \geq 1$. Portanto $S \geq (1, 1) = \mathbb{F}_1$.

Vamos provar o teorema por indução.
Para $n = 2$. Suponha que $S = (a, b)$ possui ordem 2. Se $a = 0$, então $\text{ord}(S) = 0$ e se $a = 1$, então pelo Proposição 3.1.5 temos que $\text{ord}(S) = 1$. Portanto, podemos concluir que $a \geq 2$. Se $a = b$, então de novo pelo Proposição 3.1.5, temos que $\text{ord}(S) = 1$. Logo $2 \leq a < b$. Mas isto implica,

$$S = (a, b) \geq (2, 3) = \mathbb{F}_3.$$

Portanto o resultado é valido para $n = 2$.
Suponha, agora, que, o resultado é valido até n. Isto é $S = (a, b)$ possui ordem n e

$$S \geq \mathbb{F}_{k+1} \quad \text{para } k = 2, 3, \cdots, n.$$

Provemos que o resultado é valido para $(n + 1)$. Isto vamos provar que se $S = (a, b)$ tem ordem $(n + 1)$, então $S \geq F_{n+2}$.

Para isto, note que $\text{ord}(E(S)) = n$, logo pelo processo de indução temos que $E(S) \geq F_{n+1}$. Usando as Proposições 3.1.2 e 3.1.3, temos que

$$S = D(E(S)) \geq D(\mathbb{F}_{n+1}) = \mathbb{F}_{n+2}$$

que mostra o resultado desejado.
Portanto, pelo principio de indução qualquer S de ordem $(n + 1)$ satisfaz $S \geq \mathbb{F}_{n+2}$. □

Observação 3.1.2. *O reciproca do Teorema 3.1.2 não é verdadeiro. Por exemplo,* $\mathbb{F}_4 = (3, 5)$ *tem ordem 3 e* $(3, 5) \leq (3, 6)$ *mas como 3 divide 6, sabemos que a ordem de* $(3, 6)$ *é 1.*

3.2 Estimativa das ordens de $\mathbb{F}_n$

Vamos provar nesta seção o seguinte resultado:

Teorema 3.2.1. *Se* $X = (a, b) \in \mathbb{P}$, *então* $\text{ord}(X) \leq 5 \log_{10}(a) + 1$.

Demonstração. Primeiramente, observe do Teorema 3.1.2, que para qualquer par $X = (a, b)$ de ordem n,

$$X \geq F_{n+1}, \quad \text{logo } a \geq f_{n+1}. \tag{3.1}$$

Afirmação 1: $f_{n+1} > \Phi^{n-1}$ para $n \geq 2$, onde $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, o razão áurea.
Vamos provar esta afirmação por indução:

- Para $n = 2$, $\quad \Phi < 2 = f_3$
- Para $n = 3$, $\quad \Phi^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} < 3 = f_4$
- Agora suponha que para algum $k \in \mathbb{N}$, $\quad 3 \leq k < n$ temos que $\Phi^{k-1} < f_{k+1}$.
  Como Φ é uma solução de $x^2 - x - 1 = 0$ temos que $\Phi^2 = \Phi + 1$. Portanto

  $$\Phi^{n-1} = \Phi^2 \cdot \Phi^{n-3} = (\Phi + 1) \cdot \Phi^{n-3} = \Phi^{n-2} + \Phi^{n-3}.$$

  Pelo hipótese de indução temos que $\Phi^{n-2} < f_n$ e $\Phi^{n-3} < f_{n-1}$. Somando este dois inequações temos que

  $$\Phi^{n-1} = \Phi^{n-2} + \Phi^{n-3} < f_n + f_{n-1} = f_{n+1}.$$

  Logo a afirmação também é valido para $k = n$. Portanto

  $$f_{n+1} > \Phi^{n-1} \quad \text{para} \quad n \geq 2 \tag{3.2}$$

Usando as Equações (3.1) e (3.2) temos que

$$a \geq f_{n+1} > \Phi^{n-1} \text{ para } \ n \geq 2.$$

Como $\log_{10} \Phi > \dfrac{1}{5}$ temos que

$$\log_{10} a > (n-1) \log_{10} \Phi > \frac{(n-1)}{5}.$$

Portanto,

$$n - 1 < 5 \cdot \log_{10} a$$

□

Corolário 3.2.1. *Suponha $X = (a, b) \in \mathbb{P}$ e existe k dígitos na representação decimal de a. Então ord$(X) \leq 5k$.*

Demonstração. Como na representação decimal a possui k dígitos temos que

$$a < 10^k, \quad \text{logo} \quad \log_{10} a < k.$$

Então pelo Teorema 3.2.1 temos

$$\text{ord}(X) < 5k + 1.$$

Como ord(X) é um inteiro, concluímos que ord$(X) \leq 5k$. □

3.3 Aplicação usando GeoGebra

Neste seção fizemos essa aplicação no GeoGebra para ilustrar a geometria do problema do ordem. A função E, em Definição 3.1.2 mapeia o conjunto $\mathbb{P}$ dos pares em si mesmo. Aplicando E sucessivamente a um par $P = (a, b)$, obtemos uma sequencia de pontos até o algoritmo parar. A ordem de P, ord(P) é simplesmente o número de lados da poligonal obtida.

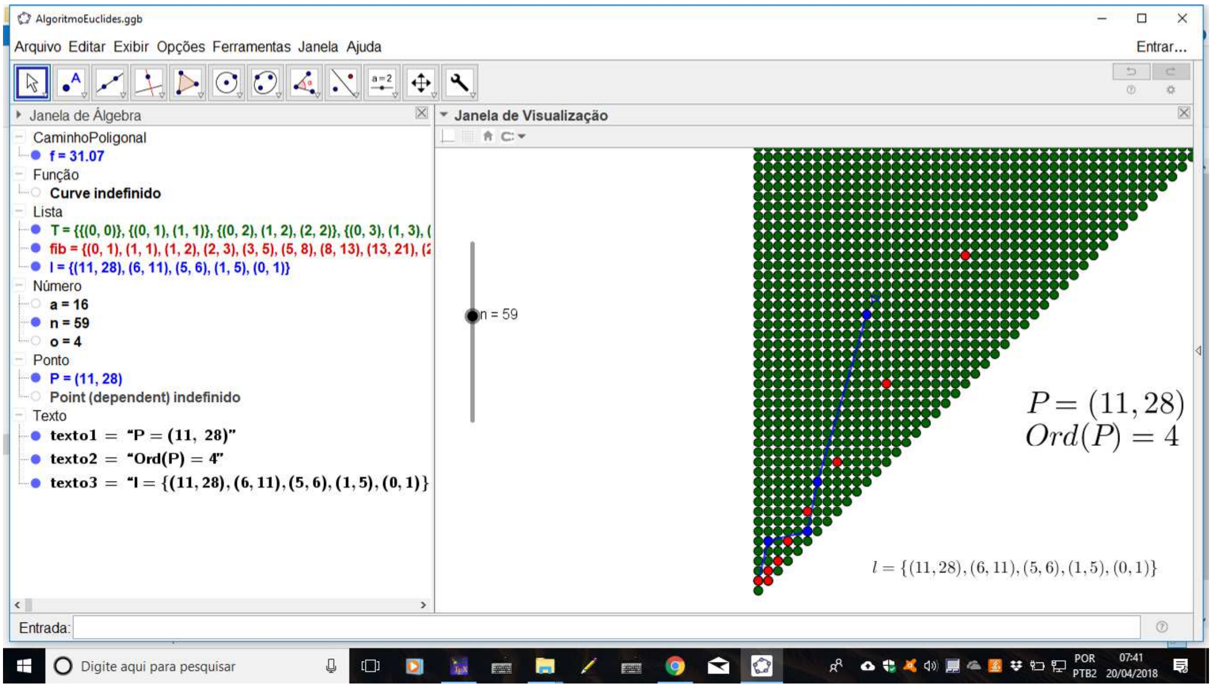

Figura 3.1: Aplicação usando GeoGebra

Chamamos de T o conjunto $\mathbb{P}$ do , os pares (i, j) com $i \leq j$.
A lista I são os pares gerados no algoritmo de Euclides, ou seja,

$$P,\ E(P),\ E^2(P), \cdots$$

onde E é a aplicação definida no 3.1.2.

Este aplicativo simplesmente permite que o usuário escolha o par P e aplica o algoritmo de Euclides, exibindo os passos intermediários como uma linha poligonal que começa no par $P = (i, j)$ e termina no par $(0, \mathrm{mdc}(i, j))$. Também é exibido os pares de Fibonacci, e aí fica claro que quando o par P é um par de números de Fibonacci adjacentes, a poligonal tem mais vértices, ou seja, o algoritmo tem mais etapas.

Escolhemos o ponto $P(11, 28)$ e aplicamos a função E. Assim temos os $(6, 11)$, $(5, 6)$, $(1, 5)$ e $(0, 1)$. Este conjunto de números estão em azul.

Os pares de Fibonacci estão em vermelho. Podemos verificar que o menor par de números de ordem 4 é os pares adjacentes de Fibonacci $(5, 8)$.

3.4 Ternos de Números e Ternos de Números de Fibonacci

Neste seção vamos provar resultados análogos a seção anterior excepto que vamos aplicar a divisão euclidiana para ternos de números. Vamos definir as notações que usaremos neste seção.

- $\mathbb{T} := \{(a, b, c) : \quad a, b, c \in \mathbb{N}, \quad a \leq b \leq c, \quad c \neq 0\}$.
- $\mathbb{T}^* := \{(a, b, c) \in \mathbb{T} : \quad a \neq 0\}$
- $\mathbb{G}_n = \{(g_n, \ g_{n+1}, \ g_{n+2}) : \quad g_n, \ g_{n+1}, \ g_{n+2}$ são números de Fibonacci$\}$

Definição 3.4.1. *Sejam $X = (a_1, b_1, c_1)$ e $Y = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{T}$. Dizemos que*

$$X \leq Y \Leftrightarrow a_1 \leq a_2, \quad b \leq b_2 \quad e \quad c_1 \leq c_2.$$

Análogo ao caso de pares temos

Proposição 3.4.1. *A relação binaria $\leq$ é uma ordenação parcial de $\mathbb{T}$, mas não uma ordenação total.*

Definição 3.4.2.

- *Se $S = (a, b, c) \in \mathbb{T}^*$, definimos $E(S) = (\min(r_b, r_c), \ \max(r_b, r_c), \ a) \in \mathbb{T}$, onde*

$$\begin{aligned} c &= q_c(a) + r_c \\ b &= q_b(a) + r_b \end{aligned}$$

- *Se $S = (a, b, c) \in \mathbb{T}$, definimos $D(S) = (c, a + c, b + c) \in \mathbb{T}^*$,*

Temos os análogos da Proposições 3.1.2 e 3.1.3 neste caso:

Proposição 3.4.2. *Se $S = (a, b, c) \in \mathbb{T}$ e $a < b < c$, então $E(D(S)) = S$.*

Proposição 3.4.3. *A função $D : \mathbb{T} \to \mathbb{T}^*$ é injetora e preserva a ordem.*

Definição 3.4.3. *Seja $S = (a, b, c) \in T$. Definimos a* **ordem** *de S, denotado por $ord(S)$, como*

- *$ord(S) = 0$ se $a = 0$*

- *Para $a > 0$, e assumindo do que sejam definidos as ordens de todos os elementos $(a', b', c') \in \mathbb{T}$ com $a' < a$. Neste caso, temos que, $ord(S) = ord((E(S))) + 1$.*

Em outras palavras, a ordem de um terno de números é quantidade de divisões sucessivas no algoritmo da divisão para reduzir o caso de terno de números para o caso de pares de números (um dos termos com zero). De novo como no caso de pares de números ordenados podemos reformular a definição na seguinte forma:

Definição 3.4.4. *Seja $S = (a, b, c) \in T$. Definimos a* **ordem** *de S, denotado por $ord(S)$, como*

- *$ord(S) = 0$ se, e somente se, $S \notin \mathbb{T}^*$*
- *em geral, $ord(S) = k$ se, e somente se k é o menor inteiro positivo tal que $E^k(S) \notin \mathbb{T}^*$.*

Exemplo 3.4.1. *Vamos determinar a ordem de $S = (77,\ 91,\ 203)$.*
Realizando as divisões sucessivas, temos

$$\begin{aligned} 203 &= 2(77) + 49 \\ 91 &= 1(77) + 14 \end{aligned}$$

Aplicamos o algoritmo da divisão de novo para o terno $(14, 49, 77)$;

$$\begin{aligned} 77 &= 5(14) + 7 \\ 49 &= 3(14) + 7 \end{aligned}$$

Aplicamos o algoritmo da divisão de novo para o terno $(7, 7, 14)$;

$$\begin{aligned} 14 &= 2(7) + 0 \\ 7 &= 1(7) + 0 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} E(77,\ 91,\ 203) &= (14,\ 49,\ 77) \\ E^2(77,\ 91,\ 203) &= E(14,\ 49,\ 77) = (7,\ 7,\ 14) \\ E^3(77,\ 91,\ 203) &= E(7,\ 7,\ 14) = (0,\ 0,\ 7) \notin \mathbb{P}^* \end{aligned}$$

Portanto $ord(S) = 3$.

Temos os análogos da Proposições 3.1.4 e 3.1.5 neste caso:

Proposição 3.4.4. *Se $S = (a, b, c) \in \mathbb{T}$, então $ord(S) \leq a$.*

Proposição 3.4.5. *Para qualquer $S = (a, b, c) \in \mathbb{T}$, $\quad ord(S) = 1$ se, e somente se $a \mid b$ ou $a \mid c$.*

3.4.1 Determinando o menor ternos de ordem 0, 1, 2 ,3, etc

(1) Afirmação: $G_0 = (0, 0, 1)$ é o menor terno de ordem 0.

Demonstração. Primeiramente observamos que G_0 tem ordem zero pois a primeira coordenada a é zero. Falta provar que as segunda e terceira coordenadas as os menores possíveis. Mas este é o caso pois a coordenada b é zero e a coordenada c não poderia ser zero. Portanto $G_0 = (0, 0, 1)$ é o menor elemento de $\mathbb{T}$ de ordem 0. $\square$

(2) Afirmação: $G_1 = (1, 1, 1)$ é o menor terno de ordem 1.

Demonstração. Primeiramente observamos que G_1 tem ordem 1, pois

$$\begin{aligned} 1 &= 1(1) + 0 \\ 1 &= 1(1) + 0. \end{aligned}$$

Logo $E(G_1) = (0, 0, 1)$ que tem ordem 0 e $\text{ord}(G_1) = \text{ord}(E(G_1)) + 1 = 0 + 1 = 1$. Agora suponha que $S = (a, b, c)$ tem ordem 1. Então da Proposição 3.4.4 temos que $a > 0$; logo 1 é o menor próximo natural que pode ficar na primeira coordenada. Como $a \leq b \leq c$, o menor número natural para as segunda e terceira coordenadas é 1. Portanto $S = G_1$. $\square$

(3) Afirmação: $G_2 = (2, 3, 3)$ é o menor terno de ordem 2.

Demonstração. Primeiramente observamos que G_2 tem ordem 2, pois

$$\begin{aligned} 3 &= 1(2) + 1 \\ 3 &= 1(2) + 1. \end{aligned}$$

Logo $E(G_2) = (1, 1, 2)$. E

$$\begin{aligned} 2 &= 2(1) + 0 \\ 1 &= 1(1) + 0. \end{aligned}$$

Portanto $E^2(G_2) = E(1, 1, 2) = (0, 0, 1)$. que tem ordem 0 e

$$\text{ord}(G_2) = \text{ord}(E^2(G_2)) + 2 = 0 + 2 = 2.$$

Agora suponha que $S = (a, b, c)$ tem ordem 2. Vamos analisar a primeira coordenada a. Da Proposição 3.4.4 temos que $2 = \text{ord}(S) \leq a$. Sabemos que $a \leq b \leq c$, logo os menores valores de b e c pode ser 2. Mas se a divide b ou c, então a ordem vai ser 1. Portanto os menores possíveis valores de b e c é 3. Portanto $S = G_2$. $\square$

(4) Afirmação: $G_3 = (5,7,8)$ é o menor terno de ordem 3.

Demonstração. Primeiramente observamos que G_5 tem ordem 3, pois

$$\begin{aligned} 8 &= 1(5)+3 \\ 7 &= 1(5)+2. \end{aligned}$$

Logo $E(G_3) = (2,3,5)$,

$$\begin{aligned} 5 &= 2(2)+1 \\ 3 &= 1(2)+1. \end{aligned}$$

Logo $E^2(G_3) = E(2,3,5) = (1,1,2)$. E

$$\begin{aligned} 2 &= 2(1)+0 \\ 1 &= 1(1)+0. \end{aligned}$$

Portanto $E^3(G_3) = E(1,1,2) = (0,0,1)$ que tem ordem 0 e

$$\operatorname{ord}(G_3) = \operatorname{ord}(E^3(G_3)) + 3 = 0 + 3 = 3.$$

Agora suponha que $S = (a,b,c)$ tem ordem 3. Seja

$$\begin{aligned} b &= q_b(a) + r_b \\ c &= q_c(a) + r_c. \end{aligned}$$

As seguintes condições devem vale:

(i) $r_b \neq 0,\ 1$ e $r_c \neq 0,\ 1$: Se $r_b = 0$ ou $r_c = 0$ então $\operatorname{ord}(E(s)) = 0$ logo $\operatorname{ord}(S) = 1$; e se $r_b = 1$ ou $r_c = 1$ então $\operatorname{ord}(E(S)) \leq 1$, logo $\operatorname{ord}(S) \leq 2$, contradição em ambos os casos. Portanto $r_b \neq 0,\ 1$ e $r_c \neq 0,\ 1$.

(ii) $r_b \neq r_c$: Se $r_b = r_c$, então $\operatorname{ord}(E(S)) \leq 1$, logo $\operatorname{ord}(S) \leq 2$ contradição. Portanto $r_b \neq r_c$.

- Agora , se $a = 2$, então temos que $r_b,\ r_c \leq 1$, contradizendo (i). Portanto $a \geq 3$.
- Se $a = 3$ então pelo (i) temos que $r_b = r_c = 2$, que vai contradizer (ii). Portanto $a \geq 4$.
- Se $a = 4$, então por (i), r_b nem r_c pode ser 0, 1. E por (ii), não podemos ter $r_b = r_c$. Portanto $E(S) = (2,3,4)$. Entretanto isto implicaria que $E^2(S) = (0,1,2)$ logo $\operatorname{ord}(S) = 2 < 3$ contradição.

Portanto $a \geq 5$. Como devemos ter que $r_b, r_c \geq 2$ e $b < c$, concluímos que

$$b = q_b(a) + r_b \geq 5 + 2 = 7 \quad \text{e} \quad c \geq b + 1 \geq 8.$$

Portanto $S \geq G_3$. $\square$

Definição 3.4.5. *Para $k \geq 4$, considere $G_{k-1} = (a_{k-1},\ b_{k-1},\ c_{k-1})$ e seja*

$$\textit{Definimos } G_k = D(G_{k-1}) = (a_k,\ b_k,\ c_k), \quad \textit{onde}$$

$$\begin{aligned} a_k &= c_{k-1} \\ b_k &= c_{k-1} + a_{k-1} \\ c_k &= c_{k-1} + b_{k-1} \end{aligned}$$

isto é, G_k é a $k-$ linha na tabela abaixo:

	0	0	1
	1	1	2
	2	3	5
G_3	5	7	8
G_4	8	13	15
G_5	15	23	28

Teorema 3.4.1. *Para todo $n \geq 0$, G_n é o menor terno de $\mathbb{T}$ de ordem n.*

Demonstração. Já verificamos para $n = 0, 1, 2$ e 3. Logo vamos assumir que $n \geq 4$ e que o resultado é valido para $(n-1)$; vamos provar que o resultado é valido para n.

Como $E(G_n) = E(D(G_{n-1})) = G_{n-1}$ tem ordem $(n-1)$, concluímos que

$$\operatorname{ord}(G_n) = (n-1) + 1 = n.$$

Agora suponha que $S = (a, b, c)$ é qualquer elemento de $\mathbb{T}$ de ordem n. Precisamos mostrar que $S \geq G_n$. Seja $E(S) = (r, s, a)$ (logo $r \leq s < a$) e $Y = D(E(S)) = (a, a + r, a + s)$.

Afirmação: $Y \leq S$. Para verificar esta afirmação devemos provar que $a + r \leq b$ e $a + s \leq c$ (pois ambos os ternos tem a em suas primeiras coordenadas.) De $Y = E(S)$ temos que ou

$$(1)\ b = q_1 a + r \ \text{ e } \ c = q_2 a + s; \qquad \text{ou} \qquad (2)\ b = q_1 a + s \ \text{ e } \ c = q_2 a + r$$

onde $q_1, q_2 \geq 1$.

No caso (1). Observe que

$$b \geq q_1 a + r \geq a + r \quad \text{e} \quad c \geq q_2 a + s \geq a + s \ \text{ como queiramos.}$$

No caso (2). Como $s \geq r$, temos que $b = q_1 a + s \geq a + r$. E como $c \geq b$, temos que $c \geq q_1 a + s \geq a + s$.

Como $\mathrm{ord}(Y) = \mathrm{ord}(E(S)) = n - 1$, temos que $G_{n-1} \leq Y$. Segue que

$$G_n = D(G_{n-1}) \leq D(Y) = D(E(S)) = S, \text{ que completa o processo de indução.}$$

□

Definição 3.4.6. *Chamamos* $\boldsymbol{a_n}$ *o* $n-$*ésimo terno Fibonacci número.*

A definição acima é devido a semelhança da recorrência dos a_n's com a recorrência dos números de Fibonacci f_n's.

Proposição 3.4.6. *Se* $G_k = (a_k,\ b_k,\ c_k)$ *como definido acima, para* $k \geq 4$ *temos que*

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3}.$$

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{aligned} a_k &= c_{k-1} \\ b_k &= c_{k-1} + a_{k-1} \\ c_k &= c_{k-1} + b_{k-1} \end{aligned}$$

Logo

$$a_k = c_{k-2} + b_{k-2} = a_{k-1} + (c_{k-3} + a_{k-3}) = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3}.$$

□

Em outras palavras, se os G são colocadas em colunas na Definição 3.4.5 cada entrada em G_k para $k > 3$ é a soma dos 3 primeiros termos na sua coluna. Este é similar a definição dos números de Fibonacci.

Mostramos em Teorema 3.4.1 que para cada $n \in \mathbb{N}$, G_n é o menor elemento de $\mathbb{T}$ de ordem $\boldsymbol{n}$.

Mais geral podemos fazer a seguinte definição:

Definição 3.4.7. *Se* g_n *é uma sequência não decrescentes de inteiros positivos, definimos os ternos números de Fibonacci pela formula*

$$g_k = g_{k-1} + g_{k-2} + g_{k-3}.$$

Estamos interessados em provar um resultado similar ao "Razão Aurea" dos números de Fibonacci, isto queremos saber como é

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g_{n+1}}{g_n}.$$

3.4.2 Convergência de $\dfrac{g_{n+1}}{g_n}$

Neste seção vamos provar que a razão entre os ternos números de Fibonacci adjacentes g_n e g_{n+1} converge para um número $\Psi \approx 1,83$ quando $n \to \infty$.

As sequências estão dado por :

$$\begin{array}{ccccccc} g_4 & g_5 & g_6 & g_7 & g_8 & g_9 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 3 & 5 & 9 & 17 & 31 & 57 & \cdots \end{array}$$

Definição 3.4.8. *Para $n \geq 4$ seja*

$$\rho_n = \frac{g_{n+1}}{g_n}$$

onde $g_4, g_5, g_6, \cdots$ são os ternos números de Fibonacci $3, 5, 9, \cdots$

Podemos observar que

$$\begin{aligned} \rho_4 = \frac{g_5}{g_4} &= \frac{5}{3} &= 1,666... \\ \rho_5 = \frac{g_6}{g_5} &= \frac{9}{5} &= 1,8 \\ \rho_6 = \frac{g_7}{g_6} &= \frac{17}{9} &= 1.8888... \\ \rho_7 = \frac{g_8}{g_7} &= \frac{31}{17} &= 1,823... \\ \rho_8 = \frac{g_9}{g_8} &= \frac{57}{31} &= 1,823... \\ \vdots \qquad & \quad \vdots & \end{aligned}$$

Lema 3.4.1. *Para $k \geq 2$, temos que*

$$\rho_{k+1} = 1 + \frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{\rho_k \rho_{k-1}}$$

Demonstração. Temos que

$$g_{k+2} = g_{k+1} + g_k + g_{k_1}.$$

Logo dividindo por g_{k+1} temos que

$$\begin{aligned} \frac{g_{k+2}}{g_{k+1}} &= 1 + \frac{g_k}{g_{k+1}} + \frac{g_{k-1}}{g_{k+1}} \\ &= 1 + \frac{g_k}{g_{k+1}} + \frac{g_{k-1}}{g_k} \cdot \frac{g_k}{g_{k+1}} \\ &= 1 + \frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{\rho_k \rho_{k-1}} \end{aligned}$$

□

Lema 3.4.2. *A sequência ρ_n é decrescente e limitada. Portanto converge para um certo número que chamamos de Ψ, isto é*

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \Psi.$$

O número Ψ é a solução única $x > 1$ da equação

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0.$$

Demonstração. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \Psi$ então pela relação em Lema 3.4.1 temos

$$\Psi = 1 + \frac{1}{\Psi} + \frac{1}{\Psi \cdot \Psi}.$$

Isto implica que

$$\Psi^3 - \Psi^2 - \Psi - 1 = 0.$$

□

Observação 3.4.1. *Resolvendo a equação $x^3 - x^2 - x - 1$ por Maple temos que*

$$\Psi = 1,839286755\cdots,$$

e uma solução exata usando Maxima é

$$\Psi = \frac{(19 + 3\sqrt{33})^{1/3}}{3} + \frac{4}{3(19 + 3\sqrt{33})^{1/3}} + \frac{1}{3}.$$

Ψ é maior do que o razão aurea $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\right)$.

Capítulo 4

Uma Proposta para Ensino Médio

4.1 O Objetivo da Atividade

A matemática sem sombra de dúvidas é uma das disciplinas que apresentam-se para o aluno com um enorme grau de dificuldade. É aí que entra o papel do professor como agente facilitador do conhecimento. O ato de motivar o aluno é essencial para que os alunos despertem o prazer e o desejo de aprender novos conteúdos. A ideia da investigação matemática proporciona aos alunos conhecimentos a partir das inferências feitas pelos mesmos.

Segundo o PCN, "A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas". Partindo desse princípio é que propomos a elaboração de uma atividade utilizando a Sequência de Fibonacci se relacionando com o Algoritmo de Euclides com o objetivo de estimular o raciocínio indutivo dos alunos levando a perceber que esses temas estão ligados entre si e que fazem parte do nosso cotidiano.

4.2 Sequência Didática da Atividade

A atividade deverá ser proposta numa turma de 2º Ano do Ensino Médio pois é nessa série que são introduzidas as sequências como parte introdutória do ensino de Progressão Aritmética e Progressão Geométrica.

Iniciaremos com a introdução do estudo de sequências quaisquer e em seguida apresentaremos o problema dos coelhos (Sequência de Fibonacci). Logo após definirmos a sequência de Fibonacci mostraremos a Razão Áurea existente entre pares adjacentes de Números de Fibonacci a partir do terceiro e quarto termos, quarto e quinto, e assim sucessivamente. (Nesse momento será permitido o uso de calculadora facilitando o entendimento da convergência áurea).

Retomando conceito de cálculo do MDC através do algoritmo de Euclides faremos para um par (a, b) e depois para o terno (a, b, c) lembrando que possivelmente o terno não deve ter sido estudado em séries anteriores. Mostraremos a quantidade de divisões sucessivas feiras (passos) que chamaremos de ordem. Agora já com o conceito do MDC(a, b, c) voltaremos para Sequência de Fibonacci e iremos relacionar os pares e os ternos adjacentes, mostrando que $(0, 1)$ é o menor de ordem 0 para os pares, (1,1) e o menos de ordem 1, $(2, 3)$ é o menor de ordem 2. Além disso, mostraremos os ternos de menor ordem além de estabelecer uma razão convergente para os ternos.

Atividade 1: Qual o número de pares de coelho que serão gerados em um ano, a partir de um casal de coelhos jovens, considerando que nenhum coelho morre durante o ano, cada casal de coelhos gera outro casal de coelhos mensalmente e cada coelho fêmea fica fértil após dois meses?

O objetivo desta atividade é a introdução das propriedades dos números de Fibonacci. A duração prevista é 2h/ aula.

O desenvolvimento da atividade ocorrerá da seguinte maneira: Primeiro será feita a introdução dos números de Fibonacci, em seguida o professor pedirá aos alunos para verificar se há um padrão estabelecido para esses números bem como para a própria sequência. Após feitas as conclusões por parte dos alunos, caberá ao professor fazer a exposição e explicação das propriedades de Fibonacci, sempre tornando a linguagem de forma mais acessível.

Atividade:
Escrita dos dez primeiros números de Fibonacci;

Cálculo da soma dos termos pares

$$f_2 + f_4; \quad f_2 + f_4 + f_6; \quad f_2 + f_4 + f_6 + f_8; \quad f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + f_{10}$$

Cálculo da soma dos termos ímpares

$$f_1 + f_3; \quad f_1 + f_3 + f_5; \quad f_1 + f_3 + f_5 + f_7; \quad f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9$$

Atividade 2: Razão de Ouro - Nessa Atividade o objetivo é determinar a convergência entre pares de números adjacentes de Fibonacci para uma razão conhecida como número de Ouro ou Razão Áurea.

Duração: 2h/ aula. Recursos: lápis, borracha, régua, quadro negro, atividade impressa, pincel e calculadora.

Atividade: Já conhecendo a sequência de Fibonacci

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144, \cdots,$$

Montar pares adjacentes de Fibonacci a partir do terceiro e quarto termo e estabelecer a razão entre $f_{n+1}\ /\ f_n$.

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{f_4}{f_3} & = & \dfrac{3}{2} & = & 1,5 \\[2ex]
\dfrac{f_5}{f_4} & = & \dfrac{5}{3} & = & \\[2ex]
\dfrac{f_6}{f_5} & = & \dfrac{8}{5} & = & 1,6 \\[2ex]
\dfrac{f_7}{f_6} & = & \dfrac{13}{8} & = & \\
\vdots & & \vdots & & \\
\dfrac{f_{n+1}}{f_n} & = & & = & \Phi = (\text{aprox.}1,618)
\end{array}$$

À medida que prosseguimos nas divisões de pares adjacentes de Fibonacci vamos convergindo para o número Φ que denominamos Número de Ouro, além de mostrar a irracionalidade desse número bem como o valor para o qual ele converge.

Atividade 3: Ampliando o conceito de MDC de pares (a, b) ou MDC(a, b) para o MDC de ternos (a, b, c) ou MDC(a, b, c) usando o algoritmo Euclidiano.

Duração: 1h/ aula. Recursos: Os mesmos da atividade anterior, porém sem calculadora.

Atividade:

Calcular o MDC de (306, 657).

Utilizando o algoritmo de Euclides, temos:

	2	6	1	4
657	306	45	36	9
45	36	9	0	

ou

$$\begin{aligned} 657 &= 2(306) + 45 \\ 306 &= 6(45) + 36 \\ 45 &= 1(36) + 9 \\ 36 &= 4(9) + 0 \end{aligned}$$

Podemos já estabelecer a quantidade de passos dados. Lembrando que esse conteúdo já foi visto pelo aluno nas séries iniciais.

Ampliando para o terno (203, 91, 97)
Calcule o MDC (203, 91, 77)

$$\begin{aligned} 203 &= 2(77) + 49 \\ 91 &= 1(77) + 14 \end{aligned}$$

A partir da primeira divisão teremos agora o terno (77, 49, 14)

$$\begin{aligned} 77 &= 5(14) + 7 \\ 49 &= 3(14) + 7 \end{aligned}$$

O novo terno, (14, 7, 7)

$$\begin{aligned} 14 &= 2(7) + 0 \\ 7 &= 1(7) + 0 \end{aligned}$$

Como ambos os restos são zeros, o MDC (203, 91, 77) $=$ 7.

Atividade 4: Com essa atividade pretendemos mostrar que o algoritmo de Euclides se relaciona com os pares de Fibonacci.

Duração: 2h/ aula. Recursos: Os mesmos da atividade anterior, com uso da calculadora.

Atividade: Calcule o MDC dos seguintes pares:

$$(1, 2),\ (2, 3),\ (3, 5),\ (5, 8),\ (8, 13)$$

Objetivo: após o cálculo o aluno deverá perceber que todos os pares utilizados são números adjacentes de Fibonacci e o MDC é igual a 1. E que a quantidade de passos (ordem) dados para se chegar ao fim do processo é diferente em cada um dos caso. À medida que os pares de Fibonacci crescem, também cresce o número de passos.

Atividade: Calcule o MDC dos seguintes pares:

$$(2,4)$$

Perceba que esse par não é número de Fibonacci, mas a quantidade de passos dados é a mesma do MDC (1,2). E seguindo utilizando outros pares de números não adjacentes de Fibonacci, encontraremos por exemplo (6,7). A quantidade de passos dados é igual ao MDC (2,3). Se seguirmos pegando por quaisquer de números (a,b) chegaremos à conclusão de que para cada uma das ordens, o par adjacente de Fibonacci será sempre o menor par na respectiva ordem.

Atividade 5: Nessa atividade iremos ampliar a ideia de pares adjacentes de Fibonacci para ternos saindo da recorrência $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para a recorrência $g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + g_{n-3}$. E provar que existe um outro valor de convergência.
Duração 2h/ aula. Recursos: os mesmos da atividade anterior, com uso da calculadora.
Atividade: Primeiro iremos definir quem é essa nova sequência, que será:

$$1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 9,\ 17,\ 31,\ 57,\ 105, \cdots,$$

Obs.: o aluno deverá notar que ampliamos a ideia de soma dos dois termos anteriores para a ideia dos três termos anteriores. Agora pedimos para os alunos estabelecerem a razão entre g_{n+1}/g_n a partir do quarto e quinto termo.

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{g_5}{g_4} & = & \dfrac{5}{3} & = & 1,666... \\[2ex]
\dfrac{g_6}{g_5} & = & \dfrac{9}{5} & = & 1,8 \\[2ex]
\dfrac{g_7}{g_6} & = & \dfrac{17}{9} & = & 1.8888... \\[2ex]
\dfrac{g_8}{g_7} & = & \dfrac{31}{17} & = & 1,823... \\[2ex]
\dfrac{g_9}{g_8} & = & \dfrac{57}{31} & = & 1,823... \\
\vdots & & \vdots & & \\
\dfrac{g_{n+1}}{g_n} & = & & = & \Psi = (\text{aprox.}1,83)
\end{array}$$

Bibliografia

[1] COOPER, IAN. **The Euclidean Algoritm and a generalization of the Fibonacci Sequence**. Disponível em https://www.whitman.edu/Documents/Academics /Mathematics/SeniorProject_IanCooper.pdf

[2] EPASINGHE, P.W. **Euclid´s Algorithm and the Fibonacci Numbers**. Disponível em https://www.fq.math.ca/Scanned/23-2/epasinghe.pdf

[3] Santos N. L. P. ., **O misterioso e enigmático mundo de Pascal e Fibonacci**. Dissertação Profmat, 2017. Disponível em https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160570144.

[4] Azevedo, T. do Carmo., **Sequências de Fibonacci e Tribonacci: uma apresentação geométrica**. Dissertação Profmat, 2018. Disponível em https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150400041.

[5] Silva P. Estefano Araújo da., **Sequências de Fibonacci e Ensino Médio**. Dissertação Profmat, 2017. Disponível em https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150251331.

[6] Borges F. Pereira., **A Sequência de Fibonacci e algumas de suas aplicações**. Dissertação Profmat, 2015. Disponível em https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=78366.

[7] BRASIL., **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza e Matemática e Suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2010.