UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

Carine Fernandes Botelho Custódio

Conjuntos Numéricos

CAMPO GRANDE - MS
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

Carine Fernandes Botelho Custódio

Conjuntos Numéricos

Orientador: Prof. Dr. Elen Viviani Pereira Spreafico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS
2017

Conjuntos Numéricos

Carine Fernandes Botelho Custódio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Profa. Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico -UFMS
Prof. Dr. Luciano Vianna Félix - UFRRJ
Profa. Dra. Lilian Milena Ramos Carvalho - UFMS
Profa. Dra. Edilene Simões Costa dos Santos

Campo Grande – MS, Dezembro de 2017.

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer a Deus, pois Ele sempre manteve aberta as portas do crescimento intelectual e profissional para mim, me acompanhando e ensinando grandes lições de sabedoria.

Ao meu marido Almir Régis Garcia Custódio, fiel companheiro de todas as horas, de lutas e alegrias, que me apoiou desde sempre em todas as minhas decisões e principalmente sendo um pai atencioso e presente com nossa pequena filha.

Agradeço a minha filha Lorena, presente maravilhoso que Deus me deu, pelo amor incondicional a mamãe, que tantas vezes precisou deixá-la sem os meus cuidados.

Agradeço ao meu Pai Eduardo Assis Fonseca Botelho, excelente professor de matemática que sempre me motivou e me apoiou na busca dos meus ideais, sem medir esforços financeiros possibilitando uma vida com menos dificuldades.

Agradeço a minha mãe, Lílian Mara Fernandes Marques Botelho, que com seu jeito atencioso, prestativo e alegre se mantém sempre disposta a ajudar, me escutando e me incentivando.

As minhas irmãs Liliane e Fabiane, que não são somente irmãs, mas grandes amigas, companheiras que me ajudaram nos cuidados com a Lorena e sempre festejam comigo minhas conquistas.

Também quero agradecer as minhas amigas Ana Cláudia, Fabiana, Patrícia, Solange, Adriana e Laura que me incentivaram a nunca desistir e sempre entenderam quando eu só falava de matemática nos intervalos da escola.

Aos meus colegas de mestrado, Luiz Henrique, Thiago, Pedro e Francisco que até nos últimos instantes de escrita deste trabalho puderam me dar uma palavra amiga.

A Prof.ª Dr.ª Rubia Mara de Oliveira Santos que desde o início deste mestrado me atendeu de maneira especial, orientando meus estudos e principalmente me motivando a nunca desistir.

Quero agradecer imensamente a minha Orientadora e Prof.ª Dr.ª Elen Viviani Pereira Spreafico por ter aceitado me orientar, não medindo esforços nas correções deste trabalho e sempre com muita paciência.

Por fim agradeço a Capes pelo incentivo financeiro.

Resumo

Neste trabalho será apresentada a Construção dos Números Naturais, dos Número Inteiros, dos Números Racionais e algumas demonstrações e definições sobre os Número Irracionais, sempre relacionando com o momento de aprendizagem conforme as diretrizes da educação básica. Para terminar são apresentadas sugestões de atividades que podem ser aplicadas sem dificuldades em sala de aula, ajudando assim o professor de a matemática do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Construção dos Números, Atividades de Ensino, Ensino Fundamental.

Abstract

In this work will be presented the Construction of Natural Numbers, Integer Numbers, Rational Numbers and some demonstrations and definitions about Irrational Numbers, always relating to the learning moment according to the guidelines basic education. Finally, suggestions are presented for activities that can be applied without difficulty in the classroom, thus helping the Mathematics teacher of Elementary School.
Keywords: Construction of the Numbers- Teaching Activities - Elementary School.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A necessidade de contar surgiu tão cedo quanto o uso do fogo. Com a grande dificuldade de se criar uma linguagem para os números, seria então mais fácil se criar os símbolos, a princípio feitos apenas com traços em rochas. Assim o processo para a criação do número foi longo e gradual e isto pode ser observado, por exemplo no uso da maioria das linguagens usadas até hoje, que muitas vezes distingue quantidades apenas entre singular ou plural, ou o mesmo que faziam tribos antigas quando quantificavam um e muitos. Dessa forma tem-se o início da Criação do Número, originando assim a raiz do conhecimento matemático.

Motivada pela prática do ensino sobre a Construção dos Números que ocorre desde o primeiro ano escolar da criança, a pesquisa deste trabalho foi realizada com o objetivo de tratar deste assunto de maneira teórica e prática, analisando que o conceito de Número em suas diferentes representações e uso no cotidiano, ainda podem trazer inexatidão nas suas definições para o professor que leciona matemática. Dessa forma, pensando em solucionar essa dificuldade, o primeiro capítulo revela fatos importantes sobre conceitos e definições da Construção dos Números, dos Naturais aos Irracionais, por parte destes professores.

No contexto da história da matemática, no século XIX com advento da matemática moderna, surge a necessidade de uma linguagem formalizada compatível com a lógica matemática, grande busca de Giussepe Peano (1858-1932), que em 1889 formula pela primeira vez os mais conhecidos Axiomas de Peano, possibilitando assim a formalização dos Números Naturais.

No capítulo 2, a Construção do Conjunto dos Números Naturais será feita com o auxílio dos Axiomas de Peano, onde Peano fixa que o número 1 é natural, define a função sucessor e principalmente o Axioma de Indução que é uma ferramenta fundamental usada para demonstrar propriedades entre números naturais. Dessa maneira vamos construir estes números e demonstraremos as propriedades da adição e da multiplicação, fazendo relações com possíveis práticas de sala de aula. A relação de ordem também fará parte deste capítulo, pois sem ela não poderíamos comparar os números naturais. Para finalizar definiremos o que é um Conjunto Infinito, mostrando que os números Naturais são infinitos, sendo que este conhecimento será estendido aos outros conjuntos numéricos.

Antes de Peano, no século XVIII, Newton reconheceu os números em três formas: inteiros, frações e irracionais.

No capítulo 3 será construído de maneira algébrica o Conjunto do Números Inteiros, por meio do conjunto quociente $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$, onde a relação $\sim$ é de equivalência. Assim, tendo bem definidas as operações de adição e multiplicação, demonstraremos suas propriedades e que este conjunto é um Domínio de Integridade. Para complementar esta construção, mostraremos que a operação de subtração esta bem definida e que para resolver uma operação de divisão entre números Inteiros usamos o mais conhecido Algoritmo da Divisão. Fechando este capítulo, conforme as necessidades de ordem na reta numerada, apresentamos a Relação de Ordem no conjunto $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$, e como ficam os sinais de cada elemento.

No capítulo quatro, assim como será feito no capítulo três, faremos a Construção dos Números Racionais com o auxílio do conjunto quociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$, onde novamente a relação $\sim$ é uma outra relação de equivalência, muito próxima ao que conhecemos sobre frações equivalentes no ensino básico. Além disso também apresentamos para este conjunto a Relação de Ordem, possibilitando a comparação entre números escritos na forma fracionária e sua compatibilidade com a adição e a multiplicação, terminando com a observação de que $\mathbb{Q}$ admite a relação de ordem, mas não é bem ordenado.

No quinto capítulo deste trabalho será definido o Conjunto dos Números Irracionais como um complemento dos números Racionais. Apresentaremos exemplos de números Irracionais como $\sqrt{2}$ e o número π que, dentre outros exemplos, podem ser considerados os mais importantes para a compreensão do aluno do Ensino Fundamental. Sobre as operações com números irracionais, demonstraremos uma proposição e um teorema que nos auxilia na melhor classificação dos seus resultados, considerando que podemos operar números Racionais com Irracionais.

Para terminar este trabalho iremos apresentar sugestões de atividades e materiais que auxiliarão no ensino sobre os Conjuntos Numéricos abordados aqui, bem como as suas estruturas e propriedades, com o objetivo de ajudar o professor de Matemática do Ensino Fundamental, visando uma dinâmica onde o aluno é o protagonista do processo de aprendizagem.

Capítulo 1

Pesquisa sobre o conceito dos Números e sua construção para professores que lecionam Matemática em uma escola do ensino básico de Campo Grande

1.1 A motivação da Pesquisa

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e experiência do Laboratório de Matemática da Rede Municipal de Campo Grande, o primeiro desafio do professor na escola básica, além de fazer a criança reconhecer os símbolos numéricos, é fazê-la corresponder cada número com a sua quantidade, ou seja, ensinar a criança a contar.

Após ensinar sobre os números, o próximo desafio do professor do Ensino Fundamental I, além de ensinar sobre o Sistema de Numeração Decimal, é ensinar as operações de adição, subtração, multiplicação e tão logo a operação de divisão, sendo que cada uma destas operações têm total participação na construção dos Números Inteiros, Racionais e Irracionais. Assim, o currículo para o ensino básico estabelece que grande parte dos princípios matemáticos necessários para a Construção dos Números seja apresentado ao aluno no Ensino Fundamental I. Na sequência, compete ao professor de Matemática do Ensino Fundamental II fundamentar e apresentar o Conjunto dos Números Inteiros, finalizar a estrutura do conjunto dos Números Racionais e apresentar e definir o Conjunto dos Números Irracionais.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais [8] que regem os conteúdos na Educação Brasileira, a construção dos Números Inteiros negativos e a apresentação da sua existência é feita no sétimo ano do Ensino Fundamental. Nesta fase o aluno passa a compreender que a subtração entre números positivos pode resultar em números negativos, formando assim os Números Inteiros.

A finalização da estrutura do Conjunto dos Números Racionais, ocorre no oitavo ano do Ensino Fundamental, quando os alunos devem utilizar determinados procedimentos para obter a fração que represente qualquer número racional, inclusive os números de representação decimal infinita periódica.

Por último, para a Construção dos Números no Ensino Fundamental II, o aluno irá aprender a identificar entre todas as representação numéricas vistas, aquelas que não podemos representar por meio de frações nos termos dos Números Racionais, estes são os Números Irracionais.

Motivada pelos fatos supracitados, contando com toda a estrutura de Ensino em torno da Construção dos Conjuntos Numéricos, e suas diferentes formas de representação e uso no cotidiano, foi realizada a pesquisa que se segue.

1.2 A pesquisa e seus objetivos

Esta pesquisa foi realizada para analisar e constatar fatos dentro do ensino básico referentes ao ensino e prática do professor de Matemática, sobre a Construção dos Números. A quantidade de pesquisados foi pequena, no entanto, isso possibilitou uma análise profunda das respostas.

Para realizar a pesquisa, foi desenvolvido um questionário com 7 perguntas, todas dissertativas, acerca do conhecimento teórico sobre a construção dos números e sua classificação em Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais, bem como o modo que podem ser utilizados no cotidiano. O questionário foi impresso e entregue a cada professor colaborador, podendo este responder a pesquisa no local desejado. A figura 1.1 representa as perguntas do questionário.

Esta pesquisa teve como objetivo analisar o modo de como professores de Matemática apresentam e conceituam os números Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais bem como o vocabulário utilizado na prática de ensino destes conteúdos, sua aplicação e formas de ensino.

A pesquisa foi realizada com 6 professores que lecionam matemática em uma determinada Escola Municipal de Campo Grande. Dois professores que foram convidados a participar da pesquisa não fizeram a devolução das respostas e apenas um professor respondeu o questionário de maneira incompleta. O restante dos professores entregaram o questionário totalmente respondido, isso é juízo.

Os parágrafos a seguir apresentam a descrição de cada item do questionário juntamente com o seus objetivos e possíveis resposta.

A primeira pergunta foi: *O que é um número racional e o que é um número irracional* e teve por objetivo identificar estas duas definições como são conhecidas pelo professor, bem como o uso do seu vocabulário para tratar do assunto.

O objetivo da segunda pergunta, sobre se *os números Naturais podem ser construídos e a justificativa* da resposta, tem por objetivo saber se o professor já teve contato com a Construção dos Números Naturais bem como a função sucessor, construída pelos Axiomas de Peano.

A terceira e a quarta pergunta teve como objetivo identificar como o professor classifica o ensino do Conjunto dos Números Naturais e o Ensino do Conjunto dos Números Racionais em fundamental, relevante, pouco importante ou irrelevante e ainda analisar a sua justificativa para a possível resposta.

O objetivo da quinta pergunta foi de identificar se o professor relaciona os números racionais com situações do cotidiano e de qual forma isto pode ser feito na sua prática de sala de aula.

1. O que é?
   a) Um número racional?

   ____

   b) Um número irracional?

   ____

2. Os números naturais podem ser construídos? Justifique.

   ____

3. Como você classifica o ensino do conjunto dos números naturais para os alunos da Educação Básica?

( ) Fundamental ( ) Relevante ( ) Pouco importante ( ) Irrelevante
Justifique.

____

4. Como você classifica o ensino do conjunto dos números racionais para os alunos da Educação Básica?

( ) Fundamental ( ) Relevante ( ) Pouco importante ( ) Irrelevante
Justifique.

____

5. Você relaciona os números racionais com aplicações cotidianas na sua prática em sala de aula? Se sim, determine uma forma?

   ____

6. A razão entre o comprimento (C) da circunferência e o seu diâmetro (D) é C/D.

a) A razão C/D é um número constante independente do comprimento do raio?

____

b) A razão C/D obtida é um número irracional? Por quê?

____

7. Responda e depois descreva seu raciocínio para a resposta dada:

a) $\sqrt{5}$ é um número racional? ______________________________

b) $1+\sqrt{5}$ é um número irracional? ______________________________

c) $\frac{1}{3}$ é um número racional? ______________________________

d) 0,00999999 é um número irracional? ______________________________

e) 0,123456789101112... é um número racional? ______________________________

Figura 1.1: Questionário da Pesquisa

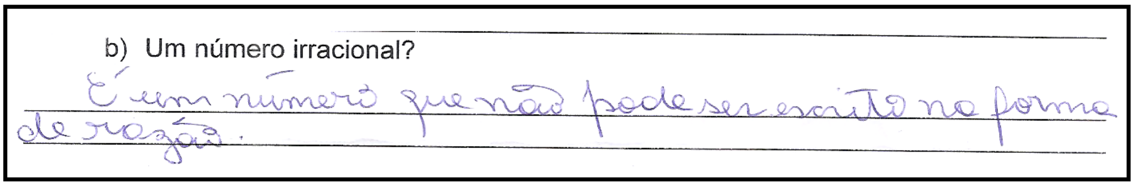
O conhecimento sobre o número Irracional π foi abordado na sexta pergunta, com o objetivo de identificar se o professor reconhece que π é uma constante, a maneira como pode ser obtido e se desta forma pode ser chamado de número irracional justificando o porquê.

Por último, na sétima pergunta o professor deveria identificar quais números eram racionais e irracionais descrevendo o seu raciocínio. Desta maneira queríamos identificar se o professor reconhece que os números racionais podem ser escritos como na Definição 4.2 do Capítulo 4, que os irracionais tem uma representação numérica com infinitas casas decimais não periódica e sua linguagem para tratar disto.

1.3 Os resultados da Pesquisa

Sobre o que é um número racional, foram observadas que 50% das respostas foram escritas conforme a Definição 4.2 , no entanto os outros 50% dos professores definiram número racional como um número que pode ser escrito na forma de fração ou quociente. Este fato evidencia, para o nosso espaço amostral, que o professor pode não conhecer a Definição de Números Racionais completamente ou não tem o cuidado de usá-la como deve ser, e ao ensiná-la desta maneira, propaga um conhecimento incompleto e até mesmo errado ao aluno, que ao longo de sua vida escolar pode fazer confusão ao identificar os números.

Temos que 50% das respostas sobre o que é um número irracional afirmaram que Número Irracional é aquele número que não pode ser escrito em forma de fração com denominador e numerador inteiros, sendo que o denominador deve ser diferente de zero, como esperado. Porém, o restante apresentaram algum tipo de problema no uso do vocabulário. Aqueles que responderam que um número racional é aquele que pode ser escrito em forma de fração, também disseram que número irracional é aquele número que não pode ser escrito em forma de fração e em outra resposta usou-se a palavra razão como apresentada na figura 1.2. Isto evidencia a falta de exatidão destes professores. Em apenas uma das respostas foi considerado que número irracional tem representação decimal infinita e não periódica.


b) Um número irracional?

É um número que não pode ser escrito na forma de razão.

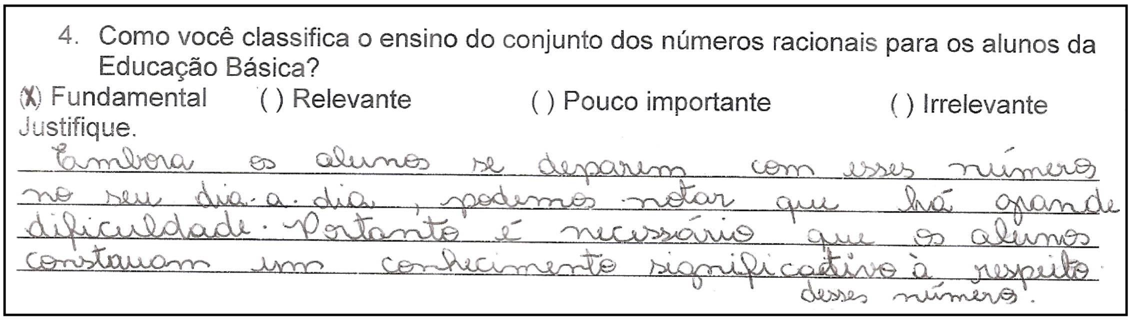
Figura 1.2: Resultado da Pesquisa

Na questão sobre a construção dos Números Naturais, em apenas uma das resposta apresentou-se a ideia de que os números naturais são construídos a partir do sucessor de cada número e que são representados por algarismo. As outras respostas demonstraram que essa construção foi feita a partir da história, com a criação dos algarismos Indo-arábicos e o uso do sistema de numeração decimal. Estas respostas demonstram que o professor não tem conhecimento ou se esqueceu dos Axiomas de Peano, assim como a ideia de contagem para a Construção dos Naturais.

Somente 3 professores responderam à pergunta 3 e classificaram em fundamental o ensino do Conjunto dos Números Naturais para os alunos. Em suas justificativas consideraram que os Números Naturais são a base para a compreensão e construção dos demais números e ainda são muito usados no cotidiano. As respostas obtidas nesta pergunta demonstra que o professor compreende a real necessidade e importância do ensino sobre os números Naturais, principalmente pelo fato de que o conhecimento dos Números Naturais é requisito básico para a construção dos outros conjuntos numéricos.

Sobre a classificação do ensino do Conjunto dos Números Racionais, na pergunta 4, todos o consideraram fundamental, no entanto as justificativas foram diversas. Um dos pesquisados justificou que o motivo para ensinar os Números Racionais é fato de que o sistema monetário do Brasil é representado com números decimais, ou ainda que a representação dos múltiplos e submúltiplos das medidas de comprimento são números racionais. Outra resposta apresentada justifica que o ensino do Conjunto dos Números Racionais é importante para a construção de outros universos numéricos.

Uma justificativa que se destaca nesta questão está apresentada na figura 1.3, onde o professor considera que embora o uso dos Números Racionais seja cotidiano, pode-se notar grande dificuldade por parte dos alunos em sua aprendizagem e portanto significativo o seu conhecimento acerca destes números.


4. Como você classifica o ensino do conjunto dos números racionais para os alunos da Educação Básica?

(X) Fundamental ( ) Relevante ( ) Pouco importante ( ) Irrelevante

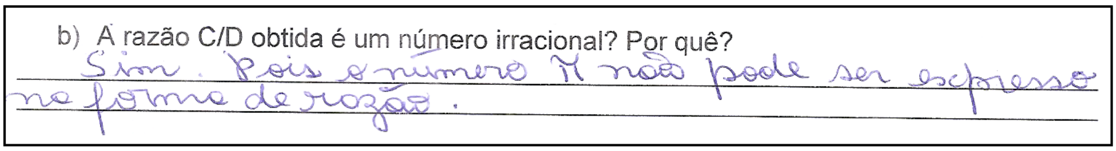
Justifique.

Embora os alunos se deparem com esses número no seu dia-a-dia, podemos notar que há grande dificuldade. Portanto é necessário que os alunos construam um conhecimento significativo à respeito desses números.

Figura 1.3: Resultado da Pesquisa

As respostas dadas por 2 pesquisados no item 5 do questionário, relacionam o uso de números racionais com a obtenção de medidas e resolução de problemas com dinheiro. Um outro pesquisado afirmou que há uma grande diversidade de problemas em que se usa o conhecimento sobre os Números Racionais sobretudo os problemas com frações. Assim, observa-se que nenhuma das respostas apresentadas detalhou a forma como estes professores relacionam os números Racionais com o cotidiano, nas suas aulas.

A questão 6, sobre o número π foi respondida por apenas 3 dos pesquisados. No primeiro item as respostas apresentaram considerações favoráveis ao fato do π ser uma constante, não importando a medida do raio da circunferência. No entanto, no item b, a figura 1.4 apresenta a resposta de um professor que para justificar o fato do número π ser irracional respondeu que π não pode ser escrito em forma de razão, sendo que na própria pergunta o π foi apresentado como a razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência. Isto mostra que o professor não soube interpretar a pergunta ou ainda desconhece a forma como pode ser obtido o número π. As outras explicações apresentaram argumentos de justificativa da maneira esperada, afirmando que π é um número decimal com infinitas casas decimais não periódicas ou que π não pode ser representado por uma fração com numerador e denominador inteiros, sendo o denominador diferente de zero. A ausência de respostas nesta questão também evidência o fato de que o número π é ainda um *'tabu'* entre os professores da rede básica neste espaço amostral.


b) A razão C/D obtida é um número irracional? Por quê?

Sim. Pois o número π não pode ser expresso na forma de razão.

Figura 1.4: Resultado da Pesquisa

Por último, o professor pesquisado deveria determinar se o número dado em cada item é irracional ou racional, descrevendo o seu racioncínio. Todos os professores classificaram corretamente os números, todavia cada descrição de como foi o seu raciocínio, para determinar as respostas dadas, tinha o mesmo significado das definições expostas na primeira questão. Por exemplo, aquele professor que admitiu que um número racional é um número que pode ser escrito em forma uma fração entre números inteiros com o denominador diferente de zero, usou este mesmo argumento para justificar as suas classificação quanto aos números racionais ou irracionais Veja a figura 1.5.

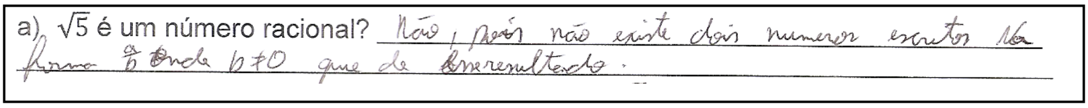

a) $\sqrt{5}$ é um número racional? Não, pois não existe dois numeros escritos na forma $\frac{a}{b}$ onde $b \neq 0$ que de como resultado.

Figura 1.5: Resultado da Pesquisa

Sobre o fato de $1+\sqrt{5}$ ser irracional os argumentos apresentados estão de acordo com Teorema 17 que será apresentado no Capítulo 5 deste trabalho, sobre o fato de que a soma entre um número racional e um irracional é um número irracional. A figura 1.6 abaixo apresenta uma das respostas dadas.

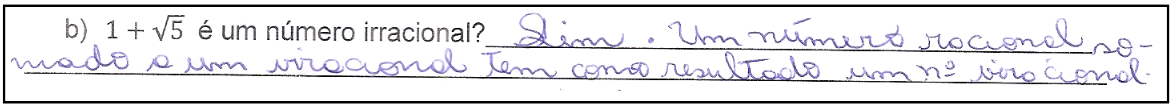

b) $1+\sqrt{5}$ é um número irracional? Sim. Um número racional somado a um irracional tem como resultado um nº irracional.

Figura 1.6: Resultado da Pesquisa

Outra observação importante nas respostas da questão 7, foi a falta de cuidado com o vocabulário que o professor usou para argumentar as suas classificações, dizendo que 0,00999999 não é um número irracional pois é um número finito ao invés de responder que este número não é irracional pois tem uma representação decimal finita. Veja a figura 1.7.

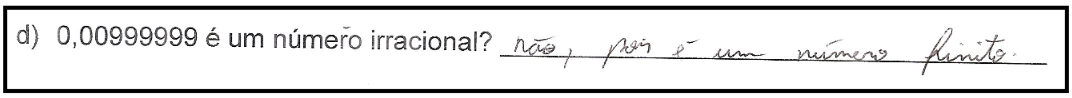

d) 0,00999999 é um número irracional? não, pois é um número finito.

Figura 1.7: Resultado da Pesquisa

As resposta obtidas em cada questionário, sobre os números racionais e irracionais não apresentaram grandes divergências. Isto é, cada um dos professores pesquisados preferiram usar respostas e justificativas com argumentos análogos em seu questionário. Demonstrando assim que esta é a forma que os mesmos explicam estes conteúdos aos seus alunos.

Ainda, o que mais chama a atenção, em todas as respostas observadas, é o fato de que apenas um dos professores pesquisados conhecem a ideia da Construção dos Números Naturais e usa deste conhecimento para responder as referidas questões onde buscam tal definição.

Capítulo 2

A Construção dos Números Naturais

A construção dos Números Naturais dá-se a partir dos Axiomas de Peano apresentados em seu livro *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* sob a forma de 9 axiomas. Neste trabalho os nove axiomas de Peano serão resumidos em cinco axiomas. Para tanto será considerado que o leitor é conhecedor da axiomática de conjuntos e funções.

Para saber mais da axiomática de conjuntos consulte [1].

2.1 Os axiomas de Peano

Para compreender os axiomas de Peano e a sua construção dos números naturais vamos considerar a priori que os elementos de um certo conjunto, denominado Naturais, representado pelo símbolo $\mathbb{N}$, não são conhecidos, e vamos considerar a função s: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que associa cada elemento do conjunto $\mathbb{N}$ ao seu sucessor s(n).

Seguem os axiomas de Peano:

Axioma 1. $1 \in \mathbb{N}$.

Axioma 2. *Todo número natural n tem um único sucessor, que será representado por s(n).*

Axioma 3. *Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.*

Axioma 4. *Existe um único número natural chamado um e representado pelo símbolo* 1*, que não é sucessor de nenhum outro número natural.*

Axioma 5. *(Axioma da Indução) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertencer a X, então $X=\mathbb{N}$.*

Observações sobre os Axiomas:

1. O Axioma 1 diz que o conjunto dos números naturais não é vazio, pois 1 é um número natural, e assim ele será o nosso ponto de partida;

2. Pelo Axioma 4 sabemos que, com exceção do número 1, todos os outros números em $\mathbb{N}$ são um sucessor de outro número natural.

3. O Axioma 3 determina que a função s é injetiva já que se dois números têm o mesmo sucessor então estes números são iguais.

4. Giusepe Peano (1858 - 1932), quando apresentou os seus axiomas usou a palavra sucessor e só depois, assim o definiu simbolicamente: 2= 1+1; 3= 2+1; 4=3+1; etc. Esta última definição apresentada por Peano, começa a nos dar uma melhor compreensão do significado de sucessor de n, que consiste em adicionar 1 ao número n, mesmo que a definição de adição ainda não nos tenha sido apresentada.

2.1.1 Princípio de Indução Matemática

O Axioma 5 nos auxiliará na demonstração do Princípio de Indução Matemática, um método muito eficiente para demonstrar propriedades e teoremas relacionados aos números naturais. Abaixo temos uma das maneiras de como ele pode ser enunciado:

Princípio de Indução Matemática: Seja $P(n)$ uma propriedade relacionada ao número natural n. Suponha que

i)$P(1)$ é válida

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ a validez de $P(n)$ implica que $P(s(n))$ seja verdadeiro, onde $s(n)$ é o sucessor de n.

Então $P(n)$ é válida para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. De fato, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais n para os quais $P(n)$ é válida, veremos que:
$1 \in X$ em virtude de i) e que
$n \in X \Longrightarrow s(n) \in X$ em virtude de ii)
Logo, pelo axioma da Indução, conclui-se que $X = \mathbb{N}$.

□

Existe uma versão geral do Principio de Indução Finita onde considera-se o menor elemento (com existência garantida pelo Princípio de Boa Ordem, que será apresentado no Teorema 3) como elemento de partida, podendo este elemento ser o zero. Do ponto de vista pedagógico, o elemento zero precisa ser trabalhado com os alunos em um momento posterior a estruturação dos números naturais, já que não há a sua necessidade na quantificação de objetos.

A seguir temos o Teorema que determina quais são os elementos do conjunto dos Números Naturais.

Teorema 1. *Se $n \in \mathbb{N}$ então $n = 1$ ou $\exists\ m \in \mathbb{N}$ tal que n é o sucessor de m, ou seja $n = s(m)$.*

Demonstração. Seja o conjunto A $= \{n \in \mathbb{N};\ n = 1$ ou $\exists m \in \mathbb{N},\ n = s(m)\}$. Queremos mostrar que $A = \mathbb{N}$. Por definição de A, $1 \in A$. Suponha que n é um sucessor, isto é $n = s(m)$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Como $s(n) = s(s(m))$ segue que $s(n)$ é um sucessor de $s(m)$. Isto é, se $n \in A$ então $s(n) \in A$. Portanto, pelo Princípio de Indução, $A = \mathbb{N}$. □

O Teorema 1 diz que o conjunto dos Números Naturais é formado pelo número 1 e pelo sucessor de outro número natural que também é sucessor de outro número. Assim, podemos dizer que o conjunto dos Números Naturais é um Conjunto de Sucessores.

A seguir apresentamos as definições para as operações de adição e multiplicação, para isto usaremos o recurso da indução, necessária nas demonstrações das propriedades.

2.2 As operações em $\mathbb{N}$: Adição e Multiplicação

A definição de adição nos números naturais dá-se a partir da enésima iterada da função sucessor, definida inicialmente nos axiomas de Peano.

Para compreender melhor considere uma função f, $f : X \longrightarrow X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos associar de modo único a f sua enésima iterada $f^n : X \to X$ de forma que $f^1 = f$ e $f^{s(n)} = f \circ f^n$. Para a função sucessor fica assim definida a sua enésima iterada: $s^1 = s$ e $s^{s(n)} = s \circ s^n$. (1)

Definição 2.1. *Seja $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ a função sucessor. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ sua soma $m + n$ fica definida por*

$$m + n : s^n(m).$$

isto significa que somar m com n é o mesmo que tomar o número natural m e iterar a função sucessor n vezes.

Da Definição 2.1 e (1) obtemos:

$$m + 1 = s^1(m) = s(m),$$
$$m + s(n) = s^{s(n)}(m) = (s \circ s^n)(m) = (s(s^n(m)) = s(m + n).$$

Deste modo, duas importantes igualdades ficam definidas

$$m + 1 = s(m), \qquad (2)$$
$$m + s(n) = s(n + m). \qquad (3)$$

A partir daqui, será dispensada a notação $s(n)$ para identificar o sucessor de n e usaremos $n + 1$ como notação definitiva. Como $s(n) = n + 1$, concluímos de (3) que

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1 \qquad (4)$$

Esta última equação nos dá a indicação de que a adição pode ser associativa e logo será usada para demonstrar tal propriedade.

Portanto, ao iterar a função sucessor, tendo como definição que $s(n) = n + 1$ temos a ideia definida de que somar n com m significa acrescentar n vezes uma unidade ao número m. Este mesmo mecanismo é usado para ensinar a operação de adição nos anos iniciais do Ensino Fundamental I.

Proposição 1. *Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$ temos as seguintes propriedades da adição:*

i) *Associatividade: $m + (n + p) = (m + n) + p$;*

ii) *Comutatividade: $m + n = n + m$;*

iii) *Lei do corte: $m + n = m + p \Rightarrow n = p$.*

Demonstração. **i)**Fixados $m, n \in \mathbb{N}$, para $p = 1$, a igualdade $m + (n+1) = (m+n) + 1$ é dada pela definição de adição em (4). Supondo, por hipótese de indução que o resultado $m + (n + p) = (m + n) + p$ é válido para algum $p \in \mathbb{N}$, temos que

$$m + [n + (p+1)] =^{(1)} m + [(n+p) + 1] =^{(2)} [m + (n+p)] + 1 =^{(3)} [(m+n) + p] + 1 =^{(4)} (m+n) + (p+1).$$

Nas igualdades 1, 2 e 4 usamos a definição de adição e a igualdade 3 é devido a hipótese de indução. Portanto $m + [n + (p+1)] = m + n + (p+1)$.

ii) Para mostrar que $m+n = n+m$, precisamos mostrar inicialmente que $m+1 = 1+m$, assim observe que para $m = 1$ a igualdade é obviamente verificada. Agora, tome m arbitrário, temos que

$$(m+1) + 1 =^{(1)} (1+m) + 1 =^{(2)} 1 + (m+1),$$

onde a primeira igualdade deve-se a hipótese de indução e a segunda, é válida pelo fato da adição ser associativa, que foi demonstrado no item anterior. Portanto $1 + m = m + 1$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Agora suponha que $m + n = n + m$, fixado m, para algum $n \in \mathbb{N}$, temos

$$m+(n+1) =^{(1)} (m+n)+1 =^{(2)} (n+m)+1 =^{(3)} 1+(n+m) =^{(4)} (1+n)+m =^{(5)} (n+1)+m,$$

a igualdade 1 deve-se a definição de adição, a igualdade 2 vem da hipótese de indução, 3 e 5 vem do fato de que $n + 1 = 1 + n$, e em 4 foi usada a associatividade da adição. Logo concluímos que $m + n = n + m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

iii) Fixemos $n, p \in \mathbb{N}$. Caso $m = 1$, temos que $1+n = 1+p \Rightarrow^1 n+1 = p+1 \Rightarrow^2 n = p$, a primeira implicação é devido a propriedade comutativa da adição e a segunda implicação vem do fato de que números com o mesmo sucessor são iguais. Logo a propriedade é válida para $m = 1$. Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para um m arbitrário. Usando a comutatividade, o caso de $m = 1$ e a hipótese de indução, nesta ordem, temos que $(m+1)+n = (m+1)+p \Rightarrow m+(1+n) = m+(1+p) \Rightarrow m+(n+1) = m+(p+1) \Rightarrow (m+n)+1 = (m+p)+1 \Rightarrow m+n = m+p \Rightarrow n+m = p+m \Rightarrow n = p$. Portanto, pelo princípio de indução, $m + n = m + p \Rightarrow n = p$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

□

Intuitivamente, sabemos que multiplicar m por n é o mesmo que somar m parcelas de n. Exemplificando simbolicamente multiplicar 3 por 2 é o mesmo que $2 + 2 + 2 = 6$. Com este pensamento seguem abaixo as definições e propriedades da operação de multiplicação, que advém da soma.

Definição 2.2. *(Multiplicação em $\mathbb{N}$). O produto de dois números fica definido por*

$$n \cdot 1 = n, \qquad (1)$$
$$n \cdot (m+1) = n \cdot m + n. \qquad (2)$$

Isto significa que multiplicar um número por 1 não o altera e que se sabemos multiplicar n por m, também sabemos multiplicar n por $m + 1$.

Proposição 2. *Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. Temos as seguintes propriedades da multiplicação:*

i) *Distributividade: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m.p$;*

ii)*Comutatividade: $m \cdot n = n \cdot m$;*

iii) *Associatividade: $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$;*

iv)*Lei de corte do produto: $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$.*

Demonstração. **i)** Fixados $m, n \in \mathbb{N}$, por indução em p, temos que, para $p = 1$, $m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$ é válida pela definição de multiplicação. Agora suponhamos que $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Dessa maneira $m \cdot [n + (p + 1)] =^1 m \cdot [(n + p) + 1] =^2 m \cdot (n + p) + m =^3 (m \cdot n + m \cdot p) + m =^4 m \cdot n + (m \cdot p + m) =^5 m \cdot n + m \cdot (p + 1)$. Justificando as igualdades, em 1 usamos a definição de adição, em 2 e 5 a definição de multiplicação, 3 a hipótese de indução e em 4 a associatividade da adição.

ii) Considere $m \in \mathbb{N}$ fixo, por indução em n, inicialmente vamos mostrar que para $n = 1$ a comutatividade da multiplicação é válida, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, fixado. Por definição $m \cdot 1 = m$. Por outro lado é claro que $1 \cdot 1 = 1$ e se $1 \cdot m = m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, teremos que $1 \cdot (m+1) = 1 \cdot m+1 = m+1$. Agora, suponha por indução que $m \cdot n = n \cdot m$, assim $m \cdot (n + 1) =^1 m \cdot n + m =^2 n \cdot m + m =^3 (n + 1) \cdot m$ onde 1 deve-se a definição de multiplicação, em 2, a hipótese de indução e 3 a distributividade.

iii) Considere $m, n \in \mathbb{N}$ fixo, por indução em p, quando $p = 1$, $m \cdot (n \cdot 1) = m \cdot n = (m \cdot n) \cdot 1$. Para a hipótese de indução vamos considerar válida a igualdade $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$ para algum $p \in \mathbb{N}$, dessa forma $m \cdot (n \cdot (p+1)) =^{(2)} m \cdot (n \cdot p + n) = m \cdot (n \cdot p) + m \cdot n =^{(3)} (m \cdot n) \cdot p + m \cdot n =^{(4)} (m \cdot n) \cdot (p + 1)$, onde 2 e 4 é devido a distributividade e 3 a hipótese de indução. Portanto vale a propriedade associativa da multiplicação para todo $p \in \mathbb{N}$.

iv) Fixados $m, n \in \mathbb{N}$, por indução em p sabemos que quando $p = 1$, $m \cdot 1 = n \cdot 1 \Rightarrow m = n$ pela definição de multiplicação. Suponhamos que $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$ para algum $p \in \mathbb{N}$, daí $m \cdot (p+1) = n \cdot (p+1) \Rightarrow^{(1)} m \cdot p + m \cdot 1 = n \cdot p + n \cdot 1 \Rightarrow^{(2)} m \cdot p + m = n \cdot p + m \Rightarrow^{(3)} m \cdot p + m = n \cdot p + m \Rightarrow^{(4)} m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$,na implicação 1 foi usada a distributividade, em 2 a definição de multiplicação, em 3 a hipótese de indução e em 4 foi usada a propriedade da lei do corte da adição. Dessa maneira temos válida a propriedade da lei do corte da multiplicação. □

É importante ressaltar que o ensino das propriedades da adição e da multiplicação para o aluno, tornará o exercício de efetuar cálculos mais prático e rápido, principalmente quando este cálculo for mental. Observe nos exemplos, como isso pode ser feito:

Exemplo 1. *Resolvendo a expressão $230 + 115 + 70$ com o auxílio de propriedades da adição temos que:*

$$230 + 115 + 70 =^1 230 + 70 + 105 =^2 (230 + 70) + 105 = 300 + 115 = 415.$$

Em 1 foi usada a propriedade comutativa da adição e em 2 a propriedade associativa.

Exemplo 2. *Para efetuar a multiplicação entre* 5 *e* 23*, por meio de cálculo mental podemos usar a propriedade distributiva de maneira que* $5 \cdot 23 = 5 \cdot (20+3) = 5 \cdot 20 + 5 \cdot 3 = 100 + 15 = 115$.

2.3 Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

No Ensino Fundamental usamos a relação de ordem para comparar os números usando os sinais de $>$(maior do que) ou $<$(menor do que). Em geral há uma grande necessidade do uso de *"macetes"* para facilitar a compreensão do aluno com relação ao uso dos sinais. Alguns deles parecem absurdo, mas são de fato utilizados, como por exemplo: cortar os sinais para parecer com um número 4 ou o número 7 respectivamente e como 4 é menor do que 7, então o sinal que ficou parecido com 4 é o menor do que, e o que ficou parecido com o 7 é o maior do que, ou ainda, basta observar que o sinal sempre aponta para o número de menor valor.

Definição 2.3. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$ *dizemos que* m *é menor do que* n *e denotamos por* $m < n$ *se, e somente se existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $n = m + p$.

Proposição 3. *Sejam* $m, n, p \in \mathbb{N}$. *A relação* $<$ *(menor do que) tem as seguintes propriedades:*
i) *Transitividade:* $m < n$ *e* $n < p \Rightarrow m < p$
ii) *Tricotomia: Uma e somente uma das alternativas é válida*

$$\text{ou } m = n, \text{ ou } m < n \text{ ou } n < m$$

iii)*Monotonicidade da adição:* $m < n \Rightarrow m + p < n + p \ \forall p \in \mathbb{N}$.
iv)*Monotonicidade da multiplicação:* $m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p \ \forall p \in \mathbb{N}$.

Demonstração. **i)**Se $m < n$ e $n < p$, então existem t_1 e t_2 tais que $m + t_1 = n$ e $n + t_2 = p$. Substituindo o n na segunda igualdade pelo resultado obtido na primeira igualdade obtemos $m + t_1 + t_2 = p$ e como $t_1 + t_2 \in \mathbb{N}$ concluímos que $m < p$.
ii) Fazendo uma prova por absurdo, suponha que $m < n$ e $m = n$, assim existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m + p = n$, daí $m + p + 1 = n + 1$ e como $m = n$ temos $m + p + 1 = m + 1$, aplicando a lei do cancelamento em m, obtemos $p + 1 = 1$, absurdo, pois 1 não é sucessor de p, portanto $m = n$ exclui $m < n$. O caso $m > n$ e $m = n$ é análogo. Agora suponha por absurdo que o caso $m < n$ e $m > n$ ocorre. Dessa forma $\exists\ t_1,\ t_2 \in \mathbb{N}$ tais que $m + t_1 = n$ e $n + t_2 = m$, substituindo n na segunda igualdade pelo resultado obtido na primeira igualdade obtemos $m + t_1 + t_2 = m$ o que é um absurdo. Portanto $m < n$ exclui $m > n$.
iii) Como $m < n$, temos que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m + q = n$, daí $(m+p)+q = m+q+p = n + p$. Isto é $m + p < n + p$.
iv) Novamente temos que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m+q = n$ daí $m \cdot p + q \cdot p = (m+q) \cdot p = n \cdot p$. Portanto $m \cdot p < n \cdot p$.

□

Diz-se que um conjunto $X \in \mathbb{N}$ é bem ordenado quando possui um menor elemento, isto significa que se $p \in X$ é o seu menor elemento, então $p \leqslant n$ para todo $n \in X$. Dessa forma dizemos que o conjunto dos números naturais é bem ordenado, onde o seu menor elemento é o 1, pelos axiomas de Peano. Veremos no Capítulo 3 um exemplo de conjunto que não é bem ordenado, os Números Racionais.

Teorema 2. *Não existe um número natural p tal que $n < p < n+1$ com $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Suponha que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n < p < n+1$, teríamos $p = n+q$ e $n+1 = p+r$, com q, $r \in \mathbb{N}$. Então $n+1 = n+q+r$ e, cortando n obtemos $1 = q+r$, um absurdo. $\square$

Mediante a Definição 2.3 e a Proposição 3, agora podemos falar sobre a ordenação de elementos em $\mathbb{N}$.

Definição 2.4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ fica definido o conjunto I_n como $I_n = \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ e $I_{n+1} = \{1, 2, 3, ..., n, n+1\}$.*

Teorema 3. *(Princípio da Boa Ordenação) Todo conjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ contém um elemento mínimo.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $1 \notin A$ pois 1 é o menor número natural, se pertencesse a A seria o elemento mínimo desse conjunto. Considere o conjunto $X \subset \mathbb{N}$, formado pelos números naturais, tais que $I_n \subset \mathbb{N} - A$. Assim os elementos de A são maiores do que n. Temos $1 \in X$ pois $1 \notin A$. Por outro lado, não se tem $X = \mathbb{N}$ porque A não é vazio: se $p \in A$ então $p \notin X$. Pelo Axioma de Indução, concluímos que existe algum $n \in X$ tal que $n+1 \notin X$. Isto significa que todos os elementos de A são maiores do que $n+1$. Portanto existe $p \in A$ tal que $p \leqslant n+1$. Deve ser $p = n+1$, pois se fosse $p < n+1$ teríamos $n < p < n+1$, um absurdo. Assim o numero natural $p = n+1$ pertence a A. Mais ainda: p é o menor elemento de A. De fato, se existisse $q \in A$, com $q < p$, teríamos outra vez $n < q < n+1$. $\square$

2.4 Conjuntos finitos e infinitos

Os números Naturais são uma ferramenta para o estudo da enumerabilidade de conjuntos, sabendo disto podemos definir conjuntos finitos e infinitos.

Definição 2.5. *Um conjunto X será considerado finito quando houver uma bijeção $f : I_n \to X$, onde $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Dessa maneira dizemos que há uma correspondência biunívoca entre I_n e X tal que n é o número cardinal de X, ou seja, o número de elementos do conjunto X. Intuitivamente, isto significa que podemos fazer uma contagem dos elementos deste conjunto.

O conjunto vazio, representado pelo símbolo $\emptyset$ tem zero elementos, isto significa que seu número cardinal é o zero e portanto ele é um conjunto finito.

Definição 2.6. *Dizemos que um conjunto é infinito quando ele não é vazio e para $\forall n \in \mathbb{N}$, não existe uma correspondência biunívoca $f : I_n \to X$.*

Exemplo 3. *O conjunto dos números naturais é infinito.*
De fato, dada qualquer função $f : I_n \to \mathbb{N}$, não importando qual n se fixou, não existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = k$ para $k = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n)$. Portanto f não pode ser sobrejetiva, descumprindo a condição da correspondência biunívoca.

Proposição 4. *Seja $n(x)$ e o número cardinal do conjunto X. Temos que:*
i) *O número de elementos de um conjunto finito X é único, seja qual for a contagem que se adote.*
ii) *Todo subconjunto Y de um conjunto finito X é finito e $n(Y) \leq n(X)$. Tem-se $m(Y) = n(X)$ quando $Y = X$.*
iii) *Se X e Y são finitos então $X \cup Y$ é finito e tem-se $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(x \cap Y)$.*
iv) *Sejam X, Y conjuntos finitos. Se $n(X) > n(Y)$, nenhuma função $f : X \rightarrow Y$ é injetiva e nenhuma função $g : Y \rightarrow X$ é sobrejetiva.*

As demonstrações das propriedades acima podem ser feitas por Indução e/ou Boa Ordenação, para consulta, veja [1].

Além disso, a primeira parte do item iv), na Proposição 4, é conhecida como Princípio das Gavetas de Dirichlet, onde ele afirma o seguinte: Se $n+1$ ou mais objetos são colocados em n gavetas, então, pelos menos uma gaveta recebe mais de um objeto. Esse princípio é uma bela ferramenta para resolver exercícios de existência.

Exemplo 4. *Quantas pessoas é preciso ter para que possamos afirmar verdadeiramente que pelo menos duas delas faz aniversário no mesmo mês? Considerando que o número de pessoas são os objetos, e os meses do ano são as gavetas, devemos ter no mínimo 13 pessoas, já que o número de meses no ano é igual a 12.*

Para saber mais consulte [5].

Capítulo 3

A Construção dos Números Inteiros

O estudo dos números Naturais envolve basicamente os números inteiros positivos e o *'nosso caçula'* número zero. No Conjunto dos Números Inteiros temos todo o Conjunto dos Números Naturais juntamente com os números inteiros negativos. Para o aluno do Ensino fundamental os Números Inteiros fazem parte do conteúdo oficialmente a partir do 7º ano. Como o aluno não conhece os números negativos ainda, podemos construí-los, mostrando a sua existência em sala de aula à partir de uma relação entre os números naturais.

Neste capítulo vamos fazer a construção algébrica dos números inteiros por meio de classes de equivalências no cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dos números naturais e para tanto, abaixo segue algumas definições para melhor compreensão do leitor.

3.1 Conceitos e Definições

Suponhamos que em um conjunto A esteja definida uma relação entre os pares de elementos de A. Se a, $b \in A$ escrevemos $a\mathcal{R}b$ se a está relacionado com b.

Definição 3.1. *Sejam a, b e $c \in A$, tais que $a\mathcal{R}b$ significa que a está relacionado com b, a relação $\mathcal{R}$ é de equivalência se as seguintes propriedades são satisfeitas:*
i)*Reflexividade: $a\mathcal{R}b$;*
ii)*Simetria: $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$;*
iii)*Transitividade: $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$;*

A relação $\mathcal{R}$, quando atende as três propriedades descritas acima é uma relação de equivalência, sendo denotada a partir de agora por $\sim$.

Definição 3.2. *Se A é um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência em A, então a classe de equivalência de $a \in A$ é o conjunto*

$$[a] = \{x \in A; x \sim a\}.$$

Definição 3.3. *O conjunto da classes de equivalência de uma relação de equivalência $\sim$ em A é chamado conjunto quociente de A respeito a $\sim$ e denotado por $A/\sim$.*

Exemplo 5. *Considere um conjunto $A = \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros e a relação $\sim$ de $A \times A$, definida por:*

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ é múltiplo de 3.}$$

A relação $\sim$ é de equivalência e o conjunto das classes de equivalência $A/\sim = \{[0],[1],[2]\}$ é um conjunto quociente. De fato, $a - a = 0$ é múltiplo de 3, logo $a \sim a$. Se $a \sim b$ então $a - b$ é múltiplo de 3, isto é $a - b = 3x$, para $x \in \mathbb{A}$, daí $-(a-b) = b - a = -(3x)$, temos que $b \sim a$. Por último temos que vale a propriedade transitiva pois se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a - b$ e $b - c$ são múltiplos de 3 e como $a - c = a - b + b - c = (a-b) + (b-c)$ é soma de múltiplos de 3, então $a - c$ é múltiplo de 3.

O conjunto quociente $A/\sim$ munido das operações de adição e multiplicação, representadas por

$$+ : A \times A \to A \quad e \quad \cdot : A \times A \to A$$

é um anel. Para saber mais consulte [2].

3.2 Construção algébrica dos Números Inteiros

Para construir o conjunto dos números Inteiros considere os elementos (a,b), $(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

Proposição 5. *A relação $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Para a reflexividade temos que $(a,b) \sim (a,b) \Leftrightarrow a + b = b + a$, é válida pois em $\mathbb{N}$ a adição é comutativa. A relação é simétrica, pois $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow d + a = c + b \Leftrightarrow c + b = d + a \Leftrightarrow (c,d) \sim (a,b)$. Finalmente para a transitividade, sejam (a,b), (c,d) e $(e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tais que

$$(a,b) \sim (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a + d = b + c, \tag{3.1}$$
$$(c,d) \sim (e,f) \quad \Leftrightarrow \quad c + f = d + e \tag{3.2}$$

Na igualdade $c + f = d + e$ obtida em 3.2, podemos acrescentar $a + b$ em ambos os lados da igualdade e teremos $c + f + (a+b) = d + e + (a+b) \Leftrightarrow b + c + a + f = a + d + b + e \Leftrightarrow^{(1)} b + c + a + f = b + c + b + e \Leftrightarrow^{(2)} a + f = b + e \Leftrightarrow (a,b) \sim (e,f)$. Note que em (1) usamos a igualdade obtida em 3.1 e em (2) usamos a lei do cancelamento para b+c, válida em $\mathbb{N}$. □

Dessa forma $[(a,b)] = \{(x,y) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}); (x,y) \sim (a,b)\}$ é o conjunto das classes de equivalência de (a,b). Este conjunto das classes de equivalência $[(a,b)]$ referente a relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é o conjunto quociente denotado por $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$.

Agora vamos definir duas operações binárias em $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$, a adição $+$ e a multiplicação $\cdot$.

Proposição 6. *A operação de adição $+$, em $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$, definida por $[(a,b)] + [(c,d)] := [(a+c, b+d)]$ é bem definida.*

Demonstração. Sejam $[(a,b)] = [(a',b')]$ e $[(c,d)] = [(c',d')]$. As relações $(a,b) \sim (a',b')$ e $(c,d) \sim (c',d')$ implicam respectivamente em $a + b' = b + a'$ e $c + d' = d + c'$. Somando e associando essas duas igualdades obtemos $(a+c) + (b'+d') = (b+d) + (a'+c') \Rightarrow (a+c, b+d) \sim (a'+c', b'+d')$. Portanto $[(a+c, b+d)] = [(a'+c', b'+d')]$. □

Proposição 7. *A operação de multiplicação* $\cdot$, *em* $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$, *definida por* $[(a,b)]\cdot[(c,d)] := [(ac+bd, ad+bc)]$ *é bem definida.*

Demonstração. Considere $[(a,b)] = [(a',b')]$ e $[(c,d)] = [(c',d')]$. Assim $(a,b)\sim(a',b')$ e $(c,d)\sim(c',d')$ implicam

$$a+b' = b+a' \quad \text{e} \quad c+d' = d+c'. \tag{3.3}$$

que é equivalente a mostrar

$$ac+bd+a'd'+b'c' = ad+bc+a'c'+b'd'. \tag{3.4}$$

A verificação de 3.4, usando as identidades obtidas em 3.3, segue de

$$\begin{aligned}
ac+bd+a'd'+b'c'+b'c &= (a+b')c+bd+a'd'+b'c' \\
&= (a'+b)c+bd+a'd'+b'c' \\
&= a'c+bc+bd+b'c'+a'd' \\
&= a'(c+d')+c+bd+b'c' \\
&= a'(c'+d)+bc+bd+b'c' \\
&= a'c'+a'd+bc+bd+b'c' \\
&= a'c'+(a'+b)d+bc+b'c' \\
&= a'c'+(a+b')d+bc+b'c' \\
&= a'c'+ad+b'd+bc+b'c' \\
&= a'c'+ad+b'(d+c')+bc \\
&= a'c'+ad+b'(d'+c)+bc \\
&= a'c'+ad+b'd'+b'c+bc \\
&= a'c'+b'd'+ad+bc+b'c.
\end{aligned}$$

isto significa que

$$ac+bd+a'd'+b'c'+b'c = a'c'+b'd'+ad+bc+b'c.$$

Assim, aplicando a lei do cancelamento para $b'c$ em ambos os lados da igualdade, obtemos a igualdade 3.4 como esperado. □

Definição 3.4. *O Conjunto dos números inteiros, denotado por* $\mathbb{Z}$, *é definido como sendo o conjunto das classes de equivalência* $[(a,b)]$ *dos elementos* (a,b) *de* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, *com a relação de equivalência, isto é* $\mathbb{Z} = (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$

A grosso modo, cada classe $[(a,b)] \in (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$ é identificada pela diferença $a-b\in\mathbb{Z}$.

Exemplo 6. *As classes de equivalência* $[(2,1)]$, $[(3,2)]$,$[(4,3)]$ *e* $[(5,4)]$ *representam o mesmo elemento em* $\mathbb{Z}$ *pois* $2-1 = 3-2 = 4-3 = 5-4 = 1$.

Exemplo 7. *As classes de equivalência* $[(1,1)]$, $[(2,2)]$ *e* $[(3,3)]$ *podem ser identificadas por* $0 := [(1,1)]$.

A adição $+$ e a multiplicação $\cdot$ são definidas em $\mathbb{Z} = (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$ respectivamente por

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)] \text{ e } [(a,b)] \cdot [(c,d)] = [ac+bd, ad+bc)].$$

Exemplo 8. *A operação de adição entre* $[(1,2)]$ *e* $[(3,4)]$ *conforme a definição acima fica assim*

$$[(1,2)] + [(3,4)] = [(1+3, 2+4)] = [(4,6)].$$

Observe que pela notação usual dos números Inteiros, $[(1,2)]$ *e* $[(3,4)]$ *representa o elemento* -1 *e* $-1+(-1) = -2$*, ou o mesmo que* $[(4,6)]$*.*

Exemplo 9. *A multiplicação entre* $[(1,2)]$ *e* $[(3,4)]$ *resulta em* $[(1,2)] \cdot [(3,4)] = [(1 \cdot 3 + 2 \cdot 4, 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3)] = [(3+8, 4+6)] = [(11,10)]$ *e* $[(11,10)]$ *representa o elemento* $-1 \in \mathbb{Z}$*.*

Munidos dessas operações, que estão bem definidas, vejamos algumas propriedades do conjunto $\mathbb{Z}$

Teorema 4. *(Propriedades da Adição +)Sejam* $[(a,b)], [(c,d)], [(e,f)] \in \mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$*. A seguir temos as propriedades da adição em* $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$*:*
(1) *Associatividade:* $([(a,b)] + [(c,d)]) + [(e,f)] = [(a,b)] + ([(c,d)] + [(e,f)])$
(2) *Comutatividade:* $[(a,b)] + [(c,d)] = [(c,d)] + [(a,b)]$
(3) $0 := [(1,1)]$ *é o elemento neutro e*
(4) *A existência do simétrico aditivo. Para cada* $x = [(a,b)] \in \mathbb{Z}$ *existe* $-x := [(b,a)]$ *tal que* $x + (-x) = 0$*.*

Demonstração. **(1)** Sejam $x = [(a,b)]$, $y = [(c,d)]$ e $z = [(e,f)]$

$$\begin{aligned}
(x+y)+z &= ([(a,b)] + [(c,d)]) + [(e,f)] \\
&= [(a+c, b+d)] + [(e,f)] \\
&= [(a+c)+e, (b+d)+f)] \\
&= [(a+(c+e), b+(d+f))] \\
&= [(a,b)] + [(c+e, d+f)] \\
&= [(a,b)] + ([(c,d)] + [(e,f)]) \\
&= x + (y+z).
\end{aligned}$$

(2) Sejam $x = [(a,b)]$ e $y = [(c,d)]$

$$\begin{aligned}
x+y &= [(a,b)] + [(c,d)] \\
&= [(a+c, b+d)] \\
&= [(c+a, d+b)] \\
&= [(c,d)] + [(a,b)] \\
&= y + x
\end{aligned}$$

(3) Seja $x = [(a,b)] \in \mathbb{Z}$, e $0 = [(1,1)]$. Como $(a+1, b+1) \sim (a,b)$,

$$\begin{aligned}
x+0 &= [(a,b) + [(1,1)] \\
&= [(a+1, b+1)] \\
&\sim [(a,b)] \\
&= x.
\end{aligned}$$

(4) Dado $x = [(a,b)] \in \mathbb{Z}$ seja $-x = [(b,a)]$.
Observando que para todo $n \in \mathbb{N}, (n,n) \sim (1,1)$, temos

$$\begin{aligned} x + (-x) &= [(a,b)] + [(b,a)] \\ &= [(a+b, b+a)] \\ &= [(a+b, a+b)] \\ &= [(1,1)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Teorema 5. *(Canlamento da Adição) Dados x, y e $z \in \mathbb{Z}$ e $x + y = z + y$, então $x = z$.*

Demonstração. Seja $x = [(a,b)]$, $y = [(c,d)]$ e $z = [(e,f)]$. Assim

$$\begin{aligned} [(a,b)] + [(c,d)] = [(e,f)] + [(c,d)] &\Rightarrow [(a+c, b+d)] = [(e+c, f+d)] \\ &\Rightarrow (a+c) + (f+d) = (b+d) + (e+c) \\ &\Rightarrow (a+f) + (c+d) = (b+e) + (c+d) \quad (3.5) \end{aligned}$$

logo pela lei do corte da adição com números Naturais, obtemos de 3.5 que $a + f = b + e$ o que implica em $[(a,b)] = [(e,f)]$, isto é $x = z$. □

Teorema 6. *(Propriedades da Multiplicação).Sejam $[(a,b)]$, $[(c,d)]$, $[(e,f)] \in \mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$. Temos as propriedades da multiplicação.*
(1) *Associatividade:* $([(a,b)] \cdot [(c,d)]) \cdot [(e,f)] = [(a,b)] \cdot ([(c,d)] \cdot [(e,f)])$
(2) *Comutatividade:* $[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(c,d)] \cdot [(a,b)]$
(3) $1 := [(2,1)]$ *é o elemento neutro multiplivativo e*
(4) *Distributividade sobre a adição:*$[(a,b)] \cdot ([(c,d)] + [(e,f)]) = [(a,b)] \cdot [(c,d)] + [(a,b)] \cdot [(e,f)]$

Demonstração. **(1)**Sejam $x = [(a,b)]$, $y = [(c,d)]$ e $z = [(e,f)]$, temos:

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot z &= ([(a,b)] \cdot [(c,d)]) \cdot [(e,f)] \\ &= [(ac+bd, ad+bc)] \cdot [(e,f)] \\ &= [((ac+bd)e + (ad+bc)f, (ac+bd)f + (ad+bc)e)] \\ &= [(ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce)] \\ &= [(a(ce+df) + b(cf+de), a(cf+de) + b(ce+df))] \\ &= [(a,b)] \cdot [(ce+df, cf+de)] \\ &= [(a,b)] \cdot ([(c,d)] \cdot [(e,f)]) \\ &= x \cdot (y \cdot z). \end{aligned}$$

(2) Sejam $x = [(a,b)]$ e $y = [(c,d)]$

$$\begin{aligned} x \cdot y &= [(a,b)] \cdot [(c,d)] \\ &= [(ac+bd, ad+bc)] \\ &= [(ac+bd, bc+ad)] \\ &= [(ca+db, cb+da)] \\ &= [(c,d)] \cdot [(a,b)]. \\ &= y \cdot x. \end{aligned}$$

(3) Se $x = [(a,b)] \in \mathbb{Z}$ e $1 = [(2,1)]$, sabendo que $(a+(a+b), b+(a+b)) \sim (a,b)$ teremos que

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &= [(a,b)] \cdot [(2,1)] \\ &= [(a \cdot 2 + b \cdot 1, a \cdot 1 + b \cdot 2)] \\ &= [(2a+b, a+2b)] \\ &= [(a+(a+b), b+(a+b))] \\ &= [(a,b)] \\ &= x. \end{aligned}$$

(4) Considere $x = [(a,b)]$, $y = [(c,d)]$, e $z = [(e,f)]$:

$$\begin{aligned} x \cdot (y+z) &= [(a,b)] \cdot ([(c,d)] + [(e,f)]) \\ &= [(a,b)] \cdot [(c+e, d+f)] \\ &= [(a(c+e) + b(d+f), a(d+f) + b(c+e))] \\ &= [(ac+ae+bd+bf, ad+af+bc+be)] \\ &= [((ac+bd)+(ae+bf), (ad+bc)+(af+be))] \\ &= [(ac+bd, ad+bc)] + [(ae+bf, af+be)] \\ &= [(a,b)] \cdot [(c,d)] + [(a,b)] \cdot [(e,f)] \\ &= x \cdot y + x \cdot z. \end{aligned}$$

□

Teorema 7. *(Cancelamento da Multiplicação) Dados x, y e $z \in \mathbb{Z}$ e $x \cdot y = z \cdot y$, então $x = z$.*

Demonstração. Seja $x = [(a,b)]$, $y = [(c,d)]$ e $z = [(e,f)]$. Assim

$$\begin{aligned} [(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(e,f)] \cdot [(c,d)] &\Rightarrow [(ac+bd, ad+bc)] = [(ec+fd, ed+fc)] \\ &\Rightarrow ac+bd+ed+fc = ad+bc+ec+fc \\ &\Rightarrow c(a+f)+d(b+e) = c(b+e)+d(a+f). (3.6) \end{aligned}$$

Como $[(c,d)] \neq [(0,0)]$, temos que $c+0 \neq d+0$ logo $c \neq d$. Suponhamos $c < d$, isto é, $c = d+p$ com $p \in \mathbb{N}^*$. Assim, desenvolvendo a igualdade 3.6 teremos

$$\begin{aligned} (d+p)(a+f)+d(b+e) &= (d+p)(b+e)+d(a+f) \\ \Rightarrow da+df+pa+pf+db+de &= db+de+pe+da+df \\ \Rightarrow pa+pf &= pb+pe \\ \Rightarrow p(a+f) &= p(b+e) \\ \Rightarrow a+f &= b+e \\ \Rightarrow [(a,b)] &= [(e,f)] \\ \Rightarrow x &= z. \end{aligned}$$

□

Agora mostraremos que $\mathbb{Z}$ não possui divisores de zero.

Teorema 8. *Considere* $x = [(a,b)]$ *e* $y = [(c,d)]$. *Se* $[(a,b)] \cdot [(c,d)] = 0$ *então* $[(a,b)] = 0$ *ou* $[(c,d)] = 0$.

Demonstração. Como $[(1,1)] = 0$, vamos supor que $[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(1,1)]$ e $[(c,d)] \neq [(1,1)]$.
Por um lado temos que,

$$\begin{aligned} [(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(1,1)] &\Leftrightarrow [(ac+bd, ad+bc)] = [(1,1)] \\ &\Leftrightarrow ac+bd+1 = ad+bc+1 \\ &\Leftrightarrow ac+bd = ad+bc \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por outro lado $[(c,d)] \neq 0$ implica que $c \neq d$. Pela tricotomia em $\mathbb{N}$ há duas possibilidades: $c > d$ ou $c < d$.
Suponha $c > d$, assim existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $c = d+p$. A substituição de $c = d+p$ em 3.7 fica

$$\begin{aligned} ac+bd = ad+bc &\Rightarrow a(d+p)+bd = ad+b(d+p) \\ &\Rightarrow ad+ap+bd = ad+bd+bp \\ &\Rightarrow ap = bp \\ &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

Portanto $[(a,b)] = 0$.
O caso $c < d$ segue de modo análogo. □

As propriedades demonstradas nos teoremas 4, 6 e 8 caracterizam o conjunto dos números $\mathbb{Z}$, isto nos garante que $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ é um domínio de integridade. Veja mais em [2].

3.3 A subtração em $\mathbb{Z}$

No Teorema 4 vimos que a adição admite a existência do simétrico, de forma que dado $x = [(a,b)] \in \mathbb{Z}$, o seu simétrico será $-x = [(b,a)]$. Sabendo disto vamos definir a operação de subtração em $\mathbb{Z}$.

Definição 3.5. *Sejam* $x = [(a,b)]$ *e* $y = [(c,d)]$, *elementos de* $\mathbb{Z}$. *A operação de subtração é definida por* $x - y := x + (-y)$.

Observe que $x - y = x + (-y) = [(a,b)] + [(d,c)] = [(a+d, b+c)]$ o que representa a diferença entre x e y no conjunto dos números Inteiros.
Em $\mathbb{Z}$, a subtração está bem definida pois é a composição de operações bem definidas e é uma operação binária, o mesmo não ocorre em $\mathbb{N}$.

Exemplo 10. *Sejam os elementos* 2 *e* 1, *ambos números naturais, note que* $1-2 = -1$, *como* $-1 \notin \mathbb{N}$, *temos que a operação de subtração não está bem definida em* $\mathbb{N}$.

3.4 A divisão em $\mathbb{Z}$

Para a divisão no Conjunto dos Números Inteiros usamos o Algoritmo da Divisão, apresentado abaixo com o Teorema.

Teorema 9. *Sejam n, $d \in \mathbb{Z}$ e $d > 0$. Então existem únicos q e $r \in \mathbb{Z}$, tais que $n = qd + r$ e $0 \leq r < d$.*

Demonstração. Para provar a unicidade de q e r, suponha que existam q', r', q'', e $r'' \in \mathbb{N}$ tais que $n = q'd + r'$, $0 \leqslant r' < d$ e $n = q''d + r''$, $0 \leqslant r'' < d$. Segue que $q'd + r' = q''d + r''$. Como $d > 0$, basta provar que $r' = r''$, pois assim teremos $q'd = q''d$, ou seja $q' = q''$. Dessa maneira, suponha $r' \neq r''$. Caso $r' > r''$, teremos $0 < r' - r'' = (q'' - q')d$. Mas também $r' - r'' < d$ pois $r' < d$ e $r'' < d$, daí $0 < r' - r'' < d$, um absurdo. Portanto $r' = r''$. □

Para consultar a demonstração da existência de q e r consulte [2].

Exemplo 11. *Observe que $13 \div 3 = 4 \cdot 3 + 1$ onde $q = 4$ é o quociente, $d = 3$ é o divisor e o resto r da divisão é igual a 1.*

3.5 A relação de ordem em $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$

A relação menor do que ou igual, representada pelo símbolo $\leqslant$ é definida em $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ da seguinte maneira.

Definição 3.6. *Sejam $x = [(a, b)]$ e $y = [(c, d)]$, elementos em $\mathbb{Z}$. Dizemos que x é menor do que ou igual a y se, e somente se $a + d \leqslant b + c$. Isto é,*

$$x \leqslant y \Rightarrow a + d \leqslant b + c.$$

Teorema 10. *A relação de ordem nos números inteiros está bem definida, e isto não depende da escolha dos representantes das classes de equivalência.*

Demonstração. Sejam $[(a, b)] = [(a', b')]$ e $[(c, d)] = [(c', d')]$, isto equivale a $a + b' = b + a'$ e $c + d' = d + c'$ (1). Considerando que $[(a, b)] \leqslant [(c, d)] \Leftrightarrow a + d \leqslant b + c$ temos que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $(a + d) + m = b + c$. Somando $a' + b' + c' + d'$ nos dois membros da igualdade obtemos $(a' + b' + c' + d') + a + d + m = (a' + b' + c' + d') + b + c$. Associando convenientemente e usando (1) obtemos $(a' + d') + m = b' + c'$. Portanto $[(a', b')] \leqslant [(c', d')]$.
□

Teorema 11. *A relação $\leqslant$ é uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$, ou seja, a relação $\leqslant$ admite as seguintes propriedades:*
i)*Reflexividade*
ii)*Antissimétrica*
iii)*Transitividade*

Demonstração. **i)** Se $[(a, b)] \in \mathbb{Z}$ então $[(a, b)] \leqslant [(a, b)]$, pois $a + b \leqslant a + b$;
ii) Se $[(a, b)] \leqslant [(c, d)]$ então $a + d \leqslant b + c$. Por outro lado, se $[(c, d)] \leqslant [(a, b)]$ temos $b + c \leqslant a + d$, logo, pela tricotomia em $\mathbb{N}$, conclui-se que $a + d = b + c$ que equivale a $[(a, b)] = [(c, d)]$;

iii) Considere $[(a,b)]$, $[(c,d)]$ e $[(e,f)] \in \mathbb{Z}$, tais que $[(a,b)] \leqslant [(c,d)]$ e $[(c,d)] \leqslant [(e,f)]$. Temos que $a+d \leq b+c$ e $c+f \leq d+e$. Somando membro a membro essas duas desigualdades e pela monotonicidade da adição obtemos $a+d+c+f \leqslant b+c+d+e$, o que implica em $a+f \leqslant b+e$, isto é $[(a,b)] \leqslant [(e,f)]$. $\square$

Proposição 8. *A relação de ordem $\leqslant$ em $\mathbb{Z}$ é compatível com as operações de adição e a multiplicação, ou seja*
i) *Sejam x, y e $z \in \mathbb{Z}$. Se $x \leqslant y$ então $x+z \leqslant y+z$.*
ii) *Sejam x, y e $z \in \mathbb{Z}$. Se $x \leqslant y$ e $z > 0$ então $xz \leqslant yz$.*
iii) *Caso $z \leqslant 0$ teremos $yz \leqslant xz$.*

Demonstração. **i)** Sejam $x = [(a,b)]$, $y = [(c,d)]$ e $z = [(e,f)] \in \mathbb{Z}$. Se $[(a,b)] \leqslant [(c,d)]$ então $a+d \leq b+c$. Somando $e+f$ nos dois membros da desigualdade obtemos $a+e+d+f \leqslant b+f+c+e$ o que implica em $[(a+e, b+f)] \leqslant [(c+e, d+f)] \Rightarrow [(a,b)] + [(e,f)] \leqslant [(c,d)] + [(e,f)]$ isto é $x+z \leqslant y+z$.
ii) Para a compatibilidade com a multiplicação, considere $x = [(a,b)]$, $y = [(c,d)]$ e $z = [(e,f)] \in \mathbb{Z}$, tais que $x \leqslant y$ e $z > 0$. Assim $a+d \leqslant b+c$ e $e > f$. Logo $\exists\ m, n \in \mathbb{N}$, com $n \neq 0$ tais que $b+c = a+d+m$ e $e = f+n$. Temos que

$$b+c = a+d+m \quad \Rightarrow \quad be+ce = ae+de+me, \tag{3.8}$$
$$b+c = a+d+m \quad \Rightarrow \quad bf+cf = af+df+mf \tag{3.9}$$
$$e$$
$$e = f+n \quad \Rightarrow \quad em = fm+nm. \tag{3.10}$$

Somando o segundo membro da igualdade 3.8 com o primeiro da igualdade 3.9 e o primeiro membro de 3.8 com o segundo membro de 3.9, obtemos,

$$ae+de+me+bf+cf = be+ce+af+df+mf.$$

Substituindo 3.10 nesta última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} ae+de+fm+nm+bf+cf &= af+df+mf+be+ce \\ ae+de+bf+cf+mn &= be+ce+af+df \\ ae+de+bf+cf &\leqslant be+ce+af+df \end{aligned} \tag{3.11}$$

e de acordo com a Definição 3.6 a desigualdade 3.11 equivale a

$$[(ae+bf, af+be)] \leqslant [(ce+df, cf+de)]$$
$$[(a,b)] \cdot [(e,f)] \leqslant [(c,d)] \cdot [(e,f)]$$

ou seja

$$xz \leqslant yz.$$

iii) Para o caso em que $z < 0$ temos que,

$$[(e,f)] < [(0,0)] \Rightarrow e < f \Rightarrow [(0,0)] < [(f,e)].$$

Como $x \leqslant y$ e pelo item ii) desta proposição, temos

$$\begin{aligned}
[(a,b)]\cdot[(f,e)] \leqslant [(c,d)]\cdot[(f,e)] &\Rightarrow [(af+be, ae+bf) \leqslant [(cf+de, ce+df)] \\
&\Rightarrow af+be+ce+df \leqslant ae+bf+cf+de \\
&\Rightarrow [(ce+df, cf+de)] \leqslant [(ae+bf, af+be)] \\
&\Rightarrow [(c,d)]\cdot[(e,f)] \leqslant [(a,b)]\cdot[(c,d)] \\
&\Rightarrow yz \leqslant xz.
\end{aligned}$$

□

Teorema 12. *(Tricotomia dos Inteiros) Sejam $x=[(a,b)]$, $y=[(c,d)]$, $z=[(e,f)] \in \mathbb{Z}$, uma e apenas uma das situações ocorre:*

$$x = y \text{ ou } x < y \text{ ou } x > y.$$

Demonstração. Suponhamos $x < y$ e $y < x$ simultaneamente, assim

$$\begin{aligned}
x < y &\Rightarrow [(a,b)] < [(c,d)] \Rightarrow a+d < b+c, \\
y < x &\Rightarrow [(c,d)] < [(a,b)] \Rightarrow c+b < d+a,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo pela tricotomia nos Naturais. Os outros casos seguem de modo análogo. □

Corolário 1. *Apenas umas das situações seguintes ocorre:*

$$x = [(0,0)] \text{ ou } x < [(0,0)] \text{ ou } x > [(0,0)].$$

Demonstração. A demonstração deste Corolário é consequência da Tricotomia nos inteiros. □

A definição abaixo identifica como ficam os sinais dos elementos em $\mathbb{Z} = (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$.

Definição 3.7. *Dado $[(a,b)] \in \mathbb{Z}$, dizemos que:*
i)$[(a,b)]$ *é positivo quando* $[(a,b)] > [(0,0)]$;
ii)$[(a,b)]$ *é não negativo quando* $[(a,b)] \geqslant [(0,0)]$;
iii)$[(a,b)]$ *é negativo quando* $[(a,b)] < [(0,0)]$;
iv)$[(a,b)]$ *é não positivo quando* $[(a,b)] \leqslant [(0,0)]$.

Exemplo 12. *Observe os exemplos de classes de equivalência em* $\mathbb{Z}$
i)*A classe de equivalência* $[(2,1)]$ *é positiva pois* $[(2,1)] > [(0,0)]$ *e como* $2-1=1$ *então a grosso modo esta classe de equivalência pode ser representada em* $\mathbb{Z}$ *pelo número* 1.
ii) *Do mesmo modo a classe de equivalência* $[(1,2])$ *é negativa pois* $[(1,2)] < [(0,0)]$ *e pode ser representada pelo número* -1 *no conjunto dos Números Inteiros, já que* $1-2=-1$.

Notação: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus 0$.

Observe no item **i)** da Definição 3.7 que $[(a,b)] > [(0,0)]$ implica a existência de $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $a = b+n$, já que $a > b$. Daí $[(a,b)]$ e $[(n,0)]$ são da mesma classe de equivalência. Para o caso em que $[(a,b)] < [(0,0)]$, teremos $a < b$ e portanto $\exists\ n \in \mathbb{N}^*$ tal que $b = a+n$

que equivale a $[(a,b)] = [(0,n)]$. Assim as classes de equivalência descritas na definição 3.7 são representadas pelos conjuntos:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Z}_-^* = \{[(0,n)] | n \in \mathbb{N}^*\}, & \mathbb{Z}_- = \{[(0,n)] | n \in \mathbb{N}_*\} \cup \{[(0,0)]\} \\ \mathbb{Z}_+^* = \{[(n,0)] | n \in \mathbb{N}^*\}, & \mathbb{Z}_+ = \{[(n,0)] | n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{[(0,0)]\}. \end{array}$$

Dessa maneira concluímos que o conjunto dos Números Inteiros é formado pelos números inteiros positivos, inteiros negativos e o zero, que escrito em linguagem matemática fica assim: $\mathbb{Z} = \{[(0,n)] | n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{[(0,0)]\} \cup \{[(n,0)] | n \in \mathbb{N}^*$, onde esta união é disjunta.

Quando $[(a,b)]$ é não positivo, dado no item **iv)** da definição 3.7, temos o conjunto $\mathbb{Z}_+ = \{[(n,0)] | n \in \mathbb{N}\}$. Este conjunto está em bijeção com $\mathbb{N}$, e logo é uma cópia algébrica de $\mathbb{N}$. Com isso podemos concluir previamente que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e que $\mathbb{Z}$ é infinito.

Definição 3.8. *O Conjunto dos Números inteiros é definido como*

$$\mathbb{Z} = \{-n | n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \{..., -n, ... - 2, -1, 0, 1, 2, ...n, ...\}.$$

Capítulo 4

A Construção dos Números Racionais

A necessidade de usar os números Racionais, não inteiros, surge para a criança desde o momento em que ela necessita repartir um objeto ou alimento inteiro. Assim uma breve noção dos números fracionários, por exemplo, pode fazer parte do cotidiano escolar desde os primeiros anos. Entretanto a formalização do Conjunto dos Números Racionais é feita somente no oitavo ano do Ensino Fundamental II, de acordo com a atual legislação curricular[8].

Neste capítulo vamos fazer a Construção dos Números Racionais algebricamente, de forma análoga a construção dos Números Inteiros e suas propriedades.

4.1 A Construção Algébrica dos Números Racionais

A formalização da construção dos números Racionais é feita à partir do o Domínio de Integridade dos Inteiros, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, e para isto precisamos nos lembrar das definições 3.1, 3.2 e 3.3, sobre classes de equivalência apresentadas no capítulo 3.

Notação: $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus 0$

Proposição 9. *A relação $\sim$ em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definida por $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração. A relação $\sim$ será de equivalência se satisfazer as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Para isto, note que para $\forall\ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ temos $(a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow ab = ba$, e em $\mathbb{Z}$ vale a propriedade comutativa para o produto logo $\sim$ é reflexiva. Para mostrar que $\sim$ é simétrica, considere (a, b), $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$. Para a transitividade, sejam (a, b), (c, d) e $(e, f) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ tal que $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$ o que ocorre se, e só se $ad = bc$ e $cf = de$. Logo $ad = bc \Rightarrow adf = bcf \Rightarrow (af)d = b(cf) \Rightarrow (af)d = b(de) \Rightarrow (af)d = (be)d$. Como $d \in \mathbb{Z}^*$ podemos aplicar a lei do cancelamento válida em $\mathbb{Z}$ e de $(af)d = (be)d$ obtemos $af = be \Leftrightarrow (a, b) \sim (e, f)$ e portanto $\sim$ é transitiva. $\square$

Assim $[(a, b)]$ é o conjunto das classes de equivalência de (a,b) em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$. Este conjunto com a relação de equivalência $\sim$ é um conjunto quociente e fica denotado por $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/\sim$. Vide em [2].

Definição 4.1. *O conjunto quociente* $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$ *é o conjunto dos números racionais e o representamos com o símbolo* $\mathbb{Q}$.

A grosso modo cada elemento $[(a, b)]$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pode ser identificado no conjunto $\mathbb{Q}$, como sendo o quociente $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Daí a classe de equivalência $[(a, b)]$ é o conjunto solução da equação

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \text{ onde } (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*.$$

Exemplo 13. *Os elementos* $[(1, 2)]$, $[(2, 4)]$, $[(3, 6)]$ *e* $[(4, 8)]$ *são da mesma classe de equivalência, pois satisfazem a equação* $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$. *Note que* $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{4}{8}$.

A partir de agora podemos definir os Números Racionais da maneira como estamos mais acostumados.

Definição 4.2. *Um número é racional quando pode ser representado por meio de uma fração do tipo* $\dfrac{a}{b}$ *onde* $a, b \in \mathbb{Z}$ *e* $b \neq 0$. *Dessa maneira o conjunto dos Números Racionais pode ser denotado por:*

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

A fração do tipo $\dfrac{a}{b}$ representa o quociente entre os inteiros a e b, daí advém o fato do conjuntos dos Números Racionais ser denotado pelo símbolo $\mathbb{Q}$. Segue, assim, a definição que identifica a igualdade entre dois racionais.

Definição 4.3. *A igualdade entre dois números racionais ou equivalência entre frações, fica definida como:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

As representações das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$, ficam respectivamente definidas como:

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)] \text{ e } [(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac, bd)].$$

Representando estas duas operações em termos de razões temos as seguintes definições:

Definição 4.4. *Sejam* $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ *as operações de adição e multiplicação ficam assim definidas em* $\mathbb{Q}$*:*

i) *Adição:* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd} \in \mathbb{Q}$;

ii)*Multiplicação:* $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$.

Exemplo 14. *Os exemplos a seguir se referem as operações de adição e multiplicação entre Números Racionais.*

i) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \dfrac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \dfrac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \dfrac{10 + 12}{15} = \dfrac{22}{15}$

ii) $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}$

As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$ estão bem definidas, a demonstração pode ser feita do mesmo modo que foi feito nas proposições 6 e 7.

Munidos dessas operações em $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$ vamos apresentar e demonstrar suas propriedades:

Teorema 13. *(Propriedades da adição) A seguir temos as propriedades da adição + em* $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$.

i) *Associatividade;*

ii) *Comutatividade;*

iii) *Existência do elemento neutro aditivo* $0 := [(0,t)]$ *onde* $t \in \mathbb{Z}*$;

iv)*Existência do inverso aditivo. Para cada* $x = [(a,b)] \in \mathbb{Q}$ *existe* $-x := [(-a,b)]$ *tal que* $x + (-x) = 0$. *O inverso aditivo de* x *é o* $-x$.

Demonstração. **i)** Sejam $x = [(a,b)]$, $y = [(c,d)]$ e $z = [(e,f)]$, temos

$$\begin{aligned}
(x+y)+z &= ([(a,b)] + [(c,d)]) + [(e,f)] \\
&= [(ad+bc, bd)] + [(e,f)] \\
&= [((ad+bc)f + (bd)e, (bd)f)] \\
&= [(adf + bcf + bde, bdf)] \\
&= [(a(df) + b(cf+de), b(df)] \\
&= [(a,b)] + [(cf+de, df)] \\
&= [(a,b)] + ([(c,d)] + [(e,f)]) \\
&= x + (y+z).
\end{aligned}$$

ii) Sejam $x = [(a,b)$ e $y = [(c,d)]$, temos

$$\begin{aligned}
x+y &= [(a,b)] + [(c,d)] \\
&= [(ad+bc, bd)] \\
&= [(cb+da, db)] \\
&= [(c,d)] + [(a,b)] \\
&= y + x.
\end{aligned}$$

iii) O neutro aditivo em $\mathbb{Q}$ é o $0 := [(0,1)]$ pois para $\forall x = [(a,b)] \in \mathbb{Q}$ temos que $x + 0 = [(a,b)] + [(0,1)] = [(a \cdot 1 + b \cdot 0, b \cdot 1)] = [(a,b)] = x$.

iv) Dado $x = [(a,b)] \in \mathbb{Q}$ seja $-x := [(-a,b)]$ Como $0 := [(0,n)]$, para $\forall n \in \mathbb{Z}^*$ temos que $x + (-x) = [(a,b)] + [(-a,b)] = [(ab + (b(-a), bb)] = [(0,bb)] = 0$. □

Teorema 14. *(Propriedades da multiplicação) A seguir temos as propriedades da multiplicaçao* $\cdot$ *em* $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$.

i)*Associatividade;*

ii)*Comutatividade;*

iii)*Existência do elemento neutro multiplicativo* $1 : [(1,1)]$;

iv)*A existência do inverso multiplicativo significa que para cada* $x = [(a,b)] \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, *existe o seu inverso* $x^{-1} = [(b,a)] \in \mathbb{Q}$ *tal que* $x \cdot x^{-1} = 1$.

v)*A multiplicação é distributiva sobre a adição.*

Demonstração. **i)** Sejam $x = [(a, b)]$, $y = [(c, d)]$ e $z = [(e, f)]$, temos

$$\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot z &= ([(a, b)] \cdot [(c, d)]) \cdot [(e, f)] \\
&= [(ac, bd)] \cdot [(e, f)] \\
&= [((ac)e, (bd)f)] \\
&= [(a(ce), b(df))] \\
&= [(a, b)] \cdot [(ce, df)] \\
&= [(a, b)] \cdot ([c, d)] \cdot [(e, f)]) \\
&= x \cdot (y \cdot z).
\end{aligned}$$

ii) Sejam $x = [(a, b)$ e $y = [(c, d)]$, temos

$$\begin{aligned}
x \cdot y &= [(a, b)] \cdot [(c, d)] \\
&= [(ac, bd)] \\
&= [(ca, db)] \\
&= [(c, d)] \cdot [(a, b)] \\
&= y \cdot x.
\end{aligned}$$

iii) O elemento neutro da multiplicação é o $1 := [(1, 1)]$ pois para $\forall\ x = [(a, b)] \in \mathbb{Q}$ temos

$$\begin{aligned}
x \cdot 1 &= [(a, b)] \cdot [(1, 1)] \\
&= [a \cdot 1, b \cdot 1)] \\
&= [(a, b)] \\
&= x.
\end{aligned}$$

iv) Para cada $x = [(a, b)] \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, existe o seu inverso multiplicativo denotado por $x^{-1} = [(b, a)]$. De fato, $x \cdot x^{-1} = [(a, b)] \cdot [(b, a)] = [(ab, ba)] = [(ab, ab)] = [(1, 1)]$. Note que $ab \neq 0$ e $x^{-1} \in \mathbb{Q}$, pois $a \neq 0$.

v)Sejam $x = [(a, b)]$, $y = [(c, d)]$ e $z = [(e, f)]$. Como $b \neq 0$ e $1 = [(b, b)]$ segue que

$$\begin{aligned}
x \cdot (y + z) &= [(a, b)] \cdot ([(c, d)] + [(e, f)]) \\
&= [(a, b)] \cdot [(cf + de, df)] \\
&= [(a(cf + de), b(df)] \\
&= [(acf + ade, bdf)] \\
&= [(acf + ade, bdf)] \cdot 1 \\
&= [(acf + ade, bdf)] \cdot [(b, b)] \\
&= [((acf + ade)b, (bdf)b)] \\
&= [(acfb + adeb, bdfb)] \\
&= [((ac)(fb) + (bd)(ae), (bd)(bf))] \\
&= [(ac, bd)] + [(ae, fb)] \\
&= [(a, b)] \cdot [(c, d)] + [(a, b)] \cdot [(e, f)] \\
&= x \cdot y + x \cdot z.
\end{aligned}$$

□

Assim, demonstramos as propriedades da adição, da multiplicação e a propriedade distributiva em $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$, o que nos leva a enunciar a seguinte proposição:

Observação. O conjunto $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$ junto às duas operações de adição $+$ e multiplicação $\cdot$ é um corpo.

Demonstração. Segue dos Teoremas 13 e 14. □

4.2 A subtração em $\mathbb{Q}$

No Teorema 13 vimos que a adição admite a propriedade da existência do inverso aditivo. Sabendo disto vamos definir a operação de subtração em $\mathbb{Q}$.

Definição 4.5. *Sejam $x = [(a, b)]$ e $y = [(c, d)] \in \mathbb{Q}$. A operação de subtração entre x e y, em $\mathbb{Q}$ fica definida como*

$$x - y := x + (-y) = [(a, b)] + [(-c, d)] = [(ad + (-c) \cdot b, bd)] = [(ad - bc, bd)]$$

Observação: A operação de subtração não é comutativa.

4.3 A divisão em $\mathbb{Q}$

Vimos no Teorema 14 que a multiplicação em $\mathbb{Q}$ admite a propriedade do inverso multiplicativo. Sabendo disto podemos definir a operação de divisão em $\mathbb{Q}$.

Definição 4.6. *Considere os elementos $x = [(a, b)]$ e $y = [(c, d)]$ ambos pertencentes a $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. A divisão de x por y em $\mathbb{Q}$ é definida por*

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$$

Observe que $\dfrac{x}{y} = x \cdot y^{-1} = [(a, b)] \cdot [(d, c)] = [(ad, bc)]$.

O resultado da divisão entre x e y, representado por $\dfrac{x}{y}$ é chamado de quociente de x por y que pode ser um número com representação decimal finita ou uma representação decimal infinita periódica, que no caso chamamos de dízima periódica.

A divisão é uma operação binária em $\mathbb{Q}$ e está bem definida.

Observando que cada inteiro n pode ser identificado com o racional $\dfrac{n}{1}$, onde pelo algoritmo da divisão $n : 1 = n$, temos, de modo natural que os elementos de $\mathbb{Z}$ também estão em $\mathbb{Q}$. Dessa forma dizemos que $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$.

4.4 A relação de Ordem em $\mathbb{Q}$

Assim como foi feito nos Conjuntos dos Números Naturais e Inteiros usamos os símbolos $\leqslant$ e $<$ para comparar números Racionais. Segue a definição.

Definição 4.7. *Sejam* $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$ *elementos de* $\mathbb{Q}$*. Escrevemos* $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ *quando* $ad \leqslant bc$ *e dizemos que* $\frac{a}{b}$ *é menor do que ou igual a* $\frac{c}{d}$*.*

Teorema 15. *A relação* $\leqslant$ *está bem definida em* $\mathbb{Q}$ *e é uma relação de ordem.*

Demonstração. Para mostrar que a relação $\leqslant$ está bem definida em $\mathbb{Q}$ sejam $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{c}{d}$ e $\frac{c'}{d'}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Considere $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ tais que $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$, temos que

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \Rightarrow \quad ab' = ba', \tag{4.1}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \quad \Rightarrow \quad cd' = dc', \text{ e} \tag{4.2}$$

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad ad \leqslant bc. \tag{4.3}$$

Como $b' > 0$, podemos multiplicar 4.3 por b' e obtemos $adb' \leqslant bcb'$ ou o mesmo que $ab'd \leqslant bcb'$. Substituindo ab' pelo resultado obtido em 4.1 obtemos $ba'd \leqslant bcb'$ e usando a lei do cancelamento da multiplicação com os números Inteiros resulta em

$$a'd \leqslant cb' \tag{4.4}$$

ou seja, $\frac{a'}{b'} \leqslant \frac{c}{d}$. De modo análogo, como $d' > 0$ podemos multiplicar a desilguldade obtida em 4.4 por d', obtendo $a'dd' \leqslant cb'd'$ e pela igualdade obtida em 4.3 podemos substituir cd' por dc' assim temos $a'dd' \leqslant b'dc' \Rightarrow a'd' \leqslant b'c' \Rightarrow \frac{a'}{b'} \leqslant \frac{c'}{d'}$. Agora, resta mostrar que a relação é de ordem. Temos

i) Reflexiva: Se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, é óbvio de $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ e logo $\frac{a}{b} \leqslant \frac{a}{b}$;

ii)Antissimétrica: Se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, tais que $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leqslant \frac{a}{b}$, então $ad \leqslant bc$ e $cb \leqslant ad$, assim, pela tricotomia dos números inteiros, obtemos $ad = bc$, ou seja $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;

iii)Transitiva: Se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ tais que $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leqslant \frac{e}{f}$ então $ad \leqslant bc$ e $cf \leqslant ed$. Multiplicando por f a primeira desigualdade e por b a segunda, já que b, $d > 0$, obtemos $adf \leqslant bcf$ e $bcf \leqslant bed$, e pela transitividade dos inteiros, $adf \leqslant bed$ que pela lei do cancelamento nos Inteiros obtém-se $af \leqslant be$ ou seja $\frac{a}{b} \leqslant \frac{e}{f}$. □

A compatibilidade da relação de Ordem com as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$ ocorre do mesmo modo que ocorre em $\mathbb{Z}$.

Proposição 10. *A relação de ordem* $\leqslant$ *em* $\mathbb{Q}$ *é compatível com as operações de adição e a multiplicação, ou seja*

i) *Sejam* x, y *e* $z \in \mathbb{Q}$*. Se* $x \leqslant y$ *então* $x + z \leqslant y + z$*;*

ii)*Sejam* x, y *e* $z \in \mathbb{Q}$*. Se* $x \leqslant y$ *e* $z > 0$ *então* $xz \leqslant yz$*.*

iii) *Caso* $z \leqslant 0$ *teremos* $yz \leqslant xz$*.*

Demonstração. Considere $x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{c}{d}$ e $z = \dfrac{e}{f}$ todos elementos de $\mathbb{Q}$. Sabendo que $b > 0$, $d > 0$ e $f > 0$, usando as propriedades dos números Inteiros, temos o seguinte:
i)Temos

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} &\Leftrightarrow da \leqslant bc \Leftrightarrow daf \leqslant bcf \\
&\Leftrightarrow daf + dbe \leqslant bcf + dbe \\
&\Leftrightarrow d(af + be) \leqslant b(cf + de) \Leftrightarrow df(af + be) \leqslant bf(cf + de) \\
&\Leftrightarrow \frac{af + be}{bf} \leqslant \frac{cf + de}{df} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{e}{f} \leqslant \frac{c}{d} + \frac{e}{f}.
\end{aligned}$$

ii) Como $z = \dfrac{e}{f}$ e $z > \dfrac{0}{1}$ temos $\dfrac{e}{f} \geqslant \dfrac{0}{1} \Rightarrow e \geqslant 0$. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} &\Rightarrow ad \leqslant cb \\
&\Rightarrow aedf \leqslant cebf \\
&\Rightarrow \frac{ae}{bf} \leqslant \frac{ce}{df} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \leqslant \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.
\end{aligned}$$

iii) Do mesmo modo como feito no item ii), como $z = \dfrac{e}{f}$ e $z < \dfrac{0}{1}$ temos $\dfrac{e}{f} \leqslant \dfrac{0}{1} \Rightarrow e \leqslant 0$. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} &\Rightarrow ad \leqslant cb \Rightarrow adf \leqslant cbf \\
&\Rightarrow aedf \geqslant cebf \\
&\Rightarrow \frac{ae}{bf} \geqslant \frac{ce}{df} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \geqslant \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 16. *(Tricotomia em $\mathbb{Q}$) Dados x e $y \in \mathbb{Q}$, uma e somente uma das situações seguintes ocorre*

$$ou\ x = y,\ ou\ x < y,\ ou\ y > x.$$

Demonstração. Seja $x = \dfrac{a}{b}$ e $y = \dfrac{c}{d}$, com x, $y > 0$. Pela tricotomia em $\mathbb{Z}$, ou $ad = bc$, caso em que $x = y$, ou $ad < bc$, caso em $x < y$, ou ainda $bc < ad$, caso em que $y < x$. Portanto, só uma dessas situações pode ocorrer. □

Os conjuntos definidos abaixo determinam como ficam os sinais dos elementos em $\mathbb{Q}$, assim como foi feito em $\mathbb{Z}$..

$$\mathbb{Q}^*_- = \{\frac{a}{b} | [(a,b)] \in \mathbb{Z}^*_- \times \mathbb{Z}^*_+\}, \quad \mathbb{Q}_- = \{\frac{a}{b} | [(a,b)] \in \mathbb{Z}^*_- \times \mathbb{Z}^*_+\} \cup \{[(0,0)]\}$$
$$\mathbb{Q}^*_+ = \{\frac{a}{b} | [(a,b)] \in \mathbb{Z}^*_+ \times \mathbb{Z}^*_+\}, \quad \mathbb{Q}_+ = \{\frac{a}{b} | [(a,b)] \in \mathbb{Z}^*_+ \times \mathbb{Z}^*_+\} \cup \{[(0,0)]\}$$

Vimos no Capítulo 1 que o Conjunto dos Números Naturais é bem ordenado, o mesmo não ocorre no Conjunto dos Números Racionais, ou seja, não podemos determinar um elemento mínimo de um subconjunto de $\mathbb{Q}$. Para justificar melhor este fato podemos considerar um conjunto $X = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{2} < \frac{a}{b}\}$ tal que $\frac{c}{d}$ é o menor elemento de X, ou seja $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ para $\forall\ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Observe que $\frac{1}{2} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{1}{2} < (\frac{1}{2} + \frac{c}{d})\frac{1}{2} < \frac{c}{d}$ e como $(\frac{1}{2} + \frac{c}{d})\frac{1}{2} \in X$ temos que $\frac{c}{d}$ não é o elemento mínimo de X. Assim temos que $\mathbb{Q}$ não é bem ordenado.

Capítulo 5

Os Números Irracionais

Neste capítulo vamos tratar dos números irracionais como um complemento dos números racionais. Para identificar um número irracional, precisamos ter muito bem fixado o que é um número racional e lembrar que a sua representação decimal pode ser finita ou infinita periódica, como dito na seção 4.3. Para determinar se um número é irracional, a priori temos a seguinte definição.

Definição 5.1. *Um número que não é racional é chamado irracional.*

Desta forma podemos dizer que um número é irracional quando não puder ser escrito na forma de uma fração irredutível do tipo $\frac{a}{b}$, tais que a, $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$.

Observação: Neste trabalho não vamos construir os números Reais mesmo assim é importante ressaltar que esta definição aplica-se somente dentro do conjunto dos Números Reais, já que os números Complexos não são racionais.

A história relata que para os antigos gregos foi uma surpresa descobrir que existiam comprimentos que não podiam ser representados por nenhum número, já que todos os números podiam ser representados por comprimentos. Estes comprimentos representavam os números Irracionais e os gregos não tinham símbolos para estes números já que a crença nos números inteiros os impeliu a ocultar os números Irracionais. Com este pensamento, na sequência são apresentados alguns dos exemplos mais utilizados no Ensino Fundamental para tratar dos números Irracionais.

O exemplo mais comum, usado para tratar da existência desses números é o fato de que não existe um racional d tal que $d^2 = 2$, ou seja $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Notação:O número d tal que $d^2 = 2$, é chamado *raiz quadrada de 2* e é denotado por $\sqrt{2}$.

Lema 1. *Não existe* $d \in \mathbb{Q}$ *tal que* $d^2 = 2$

Demonstração. Suponha que $\exists\ d \in \mathbb{Q}$ tal que $d^2 = 2$. Assim $d = \frac{m}{n}$ onde m e n não tem fatores em comum. Logo,

$$(\frac{m}{n})^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 = 2n\ 2.$$

Significa que m^2 é par. Logo, necessariamente m é par, ou seja $m = 2k$ e daí $m^2 = 4k^2$ e portanto $n^2 = 4k^2$, isto implica em n^2 ser par, e logo deve ser n par também, o que é um absurdo, já que daí m e n teriam o 2 como fator comum $\square$

Usando o mesmo argumento dado no Lema 1, podemos enunciar e demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 11. *Para todo primo p, não existe $d \in \mathbb{Q}$ tal que $d^2 = p$.*

Demonstração. Suponha que $\exists\, d \in \mathbb{Q}$ tal que $d^2 = p$. Assim $d = \dfrac{m}{n}$ onde m e n não tem fatores em comum. Logo,

$$(\frac{m}{n})^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 = pn^2.$$

Isto mostra que m^2 é divisível por p, logo m também é divisível por p, isto é $m = pk$ com $k \in \mathbb{Z}$. Daí $p^2k^2 = pn^2 \Leftrightarrow n^2 = pk^2$, isto significa que n é divisível por p, o que é um absurdo, já que m e n não tem fatores em comum. $\square$

Exemplo 15. $\sqrt{5}$ *é um número Irracional.*

Proposição 12. *Se α é um número Irracional, então seu oposto aditivo, $-\alpha$ e o seu inverso multiplicativo α^{-1} também são números irracionais.*

Demonstração. Considere que $-\alpha$ é um número Racional, isto é, $-\alpha = s$, onde s é um número racional. Daí $\alpha = -s$ e como em $\mathbb{Q}$ o oposto de um número racional é racional então α também é um número racional, absurdo. Portanto $-\alpha$ é irracional.

Da mesma maneira mostramos que α^{-1} é um número irracional, pela prova por absurdo. Isto é fácil de fazer pois o inverso multiplicativo de um número racional, também é racional e logo se α^{-1} é racional, teríamos α um número racional, o que é um absurdo. Assim concluímos que α^{-1} é irracional.

$\square$

Sabemos que no Conjunto dos Números Racionais, as operações básicas estão bem definidas, de forma que a soma e o produto obtidos continuam sendo números Racionais. Já com os números Irracionais nem sempre a adição e a multiplicação resulta em números Irracionais. Assim, para compreender melhor as operações com Irracionais temos o seguinte Teorema.

Teorema 17. *Sejam α um número Irracional e r um número Racional diferente de zero. A adição, a subtração, a multiplicação e a divisão entre α e r resulta em números irracionais.*

Demonstração. Considere que $\alpha + r$ seja Racional. Isto é $\alpha + r = \dfrac{a}{b}$ com a, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, e como $r = \dfrac{c}{d}$, com c, $d \in \mathbb{Z}$ e $d \neq 0$. Daí

$$\begin{aligned} \alpha + r = \frac{a}{b} \quad &\Rightarrow \quad \alpha = \frac{a}{b} - r \\ &\Rightarrow \quad \alpha = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \\ &\Rightarrow \quad \alpha = \frac{ad - cb}{bd}. \end{aligned}$$

como b e d são diferentes de zero, temos assim que α é um número racional, o que é um absurdo. Portanto $\alpha + r$ é Irracional. Do mesmo modo mostramos que $\alpha - r$ é Irracional. Sem perda de generalidade, mostremos que αr é Irracional. Para isto, considere αr um número Racional, ou seja $\alpha r = \frac{a}{b}$ com a, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Como r é um Racional diferente de zero, temos $r = \frac{c}{d}$ com c, $d \in \mathbb{Z}$ e $c\ d \neq 0$. Assim

$$\begin{aligned} \alpha r = \frac{a}{b} \quad &\Rightarrow \quad \alpha \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \\ &\Rightarrow \quad \alpha = \frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d})^{-1} \\ &\Rightarrow \quad \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \\ &\Rightarrow \quad \alpha = \frac{ad}{bc} \end{aligned}$$

Como b e c são números diferentes de zero temos $bc \neq 0$, e portanto α é racional, o que é um absurdo. Logo αr é irracional. □

Exemplo 16. *Observe que* $1 - \sqrt{2}$ *e* $1 + \sqrt{2}$ *são números Irracionais no entanto a adição entre eles, resulta em um número Racional.*

$$1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 2$$

Exemplo 17. *Os números* $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ *e* $4\sqrt{2}$ *são números Irracionais.*

Exemplo 18. *Um exemplo de número irracional muito utilizado em Geometria é o número* π. *O número* π *é uma constante que pode ser determinada pela razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência. O que significa, a grosso modo, que não importa se uma circunferência é grande ou pequena, o valor de* π *continua o mesmo. Povos antigos como Egípcios, Babilônicos e Chineses já desenvolviam aproximações para o* π. *Os Egípcios afirmavam que esta constante era igual a* $4(\frac{8}{9})^2 = 3,16$ *e os babilônicos afirmavam que era igual a* $3\frac{1}{8} = 3,125$. *Dessa maneira, a primeira impressão que se teve sobre a constante* π, *é de que ela seria um número racional. Foi somente no século XVIII que o matemático francês Johann Heinrich Lambert, provou que* π *não é um número racional, ou seja, que sua parte decimal é infinita e não periódica. Sendo assim o valor de* π *que usamos na prática de resolução de problemas é sempre uma aproximação. A aproximação mais usada na escola básica para a constante pi é o 3,14 e o primeiro contato do aluno com o número* π, *ocorre no oitavo ano do Ensino Fundamental, principalmente com a necessidade do cálculo do comprimento e da área da circunferência.*

Ainda sobre o exemplo 18, uma observação importante é o fato de que a abordagem escolhida para tratá-lo neste trabalho pode ser apresentada aos alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental II sem dificuldades. Isto por que pesquisas feitas pelo historiador matemático Abraham Seidenberg, revelaram em seus artigos *The ritual origin of the circle and square*, Archiv. Hist. Exact Sc. 25, (1981), que muito antes dos Babilônicos, Egípcios e chineses, outros povos antigos já calculavam o volume da esfera em função do seu diâmetro, utilizando indícios indiretos sobre o que futuramente seria considerada a constante π.

Uma propriedade, advinda dos Números Naturais, que pode ser estendida para os Números Irracionais, é a sua infinitude. Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, temos uma correspondência com um número do tipo $n\sqrt{2}$ que é irracional pelo teorema 17. Como o Conjunto do Números Naturais é infinito,então $n\sqrt{2}$ gera uma infinitude de números irracionais, ou seja, os Números irracionais são infinitos.

Para saber mais sobre os números Irracionais o leitor pode consultar [6] e [7].

Capítulo 6

Proposta de Atividades

As atividades apresentadas neste trabalho foram feitas conforme indica os Parâmetros Curriculares Nacionais, documento orientador dos objetivos, metodologia e conteúdos dados em sala de aula no nosso país.

O ensino dos números Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais, bem como a sua estrutura de operações e ordem, é fundamental para a formação de variados conceitos na matemática e, como já dito anteriormente, a construção dos números no ensino básico tem início nos primeiros anos escolares.

De uma maneira muito próxima a descrição dos Axiomas de Peano, para aprender sobre os Números Naturais, o aluno identificando a representação do símbolo numérico faz corresponder cada número com a sua quantidade de objetos, um a um.

Mesmo que pareça fácil lecionar sobre os números, para uma criança de 5 anos este conhecimento já é bem abstrato. Por isso, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a proposta de metodologia deste trabalho contempla diferentes práticas de sala de aula, dentre elas o recurso dos jogos, o uso da calculadora como ferramenta facilitadora e a história da matemática.

As atividades aqui apresentadas serão expostas no modelo de planejamento usual e os materiais usados como recursos didáticos estarão expostos como figuras.

6.1 Números Naturais

As atividades desenvolvidas sobre os Número Naturais tem como principais objetivos fazer com que os alunos percebam a existência de uma estrutura bem fundamentada do Conjunto dos Números Naturais, seus elementos e propriedades. O ensino das propriedades será importante para o desenvolvimento do conhecimento no campo algébrico.

ATIVIDADE 1

Público Alvo: Alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, entretanto alunos a partir do quarto ano do Ensino Fundamental já podem realizar esta atividade.

Conteúdo: Construção dos Números Naturais.

Objetivos:

1. Identificar a necessidade do uso dos números Naturais. Nos tempos antigos até hoje.
2. Determinar o sucessor e o antecessor de cada número natural.
3. Verificar o fato que todo número natural tem sucessor e ele é único.
4. Escrever os números em ordem crescente.
5. Verificar o resultado da adição e da multiplicação entre números naturais é um números natural.

Observe que os itens 2 e 3 são objetivos que se apresentam conforme os Axiomas de Peano descritos na seção 1.1 deste trabalho e ademais, o item 4 ocorre conforme a Relação de Ordem apresentada na seção 2.3.

Recursos Metodológicos: Texto sobre a história da matemática, fichas com os números de 1 a 10 e números com 3 ou mais algarismos, como se segue no modelo para impressão nas figuras 6.1 e 6.2, o material dourado, e questionário impresso.

Procedimentos Metodológicos: O docente deve organizar a turma em grupos de até 4 alunos, expondo em cada grupo as fichas numeradas juntamente com o material dourado. Espera-se que a escola tenha este material disponível para o uso dos professores e alunos. A atividade pode ser iniciada com comentários concisos sobre a história da matemática, como na figura 6.1 e ainda o professor pode fazer perguntas sobre o uso dos Números Naturais no cotidiano dos alunos, na expectativa de respostas como: 'Os números naturais são usados para efetuar a contagem de objetos que não podem ser partidos, bem como a contagem de qualquer tipo de ser vivo'. Após, cada grupo de alunos deve responder o questionário apresentado, com o auxílio dos materiais expostos na mesa. As respostas deverão ser representadas com o material dourado, sempre que possível, e em forma de registro escrito.

Questionário sobre o Conjunto dos Números Naturais

1. Qual é o menor número natural que você conhece?
2. Todo o número exposto na mesa tem sucessor? Determine o sucessor de cada um.
3. É sempre possível determinar o sucessor de um número Natural? O que podemos concluir com isso?

4. Algum número Natural pode ter mais de um sucessor?
5. Qual é o antecessor de cada número exposto na mesa? Todos os números naturais tem antecessor?
6. Coloque os números expostos nas fichas em ordem crescente.
7. Escolha dois números de 3 algarismos ou dígitos e efetue a adição entre eles. O resultado é um Número Natural?
8. Escolha dois números entre as fichas e calcule o produto entre eles. O resultado é um Número Natural?

No início da humanidade o homem só comia o que conseguia caçar e colher nas plantas. Depois houve uma fase de transição e o homem começou a plantar e criar rebanhos. Para não perder o que possuía, o homem sentiu a necessidade de contar o seu rebanho. O seu método de contagem era feito da seguinte maneira: A cada animal que saía para o pasto de manhã correspondia a uma pedra que era guardada em um saco de couro. No final do dia, quando os animais voltavam do pasto, era feita a correspondência inversa. A princípio a correspondência de objetos a serem contados era feita com os dedos das mãos e dos pés, mas com o aumento do rebanho, o homem precisou usar as pedrinhas, que em latim significa calculus, de onde deriva a palavra cálculo, usada até hoje na Matemática.

(Boyer, 1981, p.01)

Figura 6.1: Primeira História dos Números

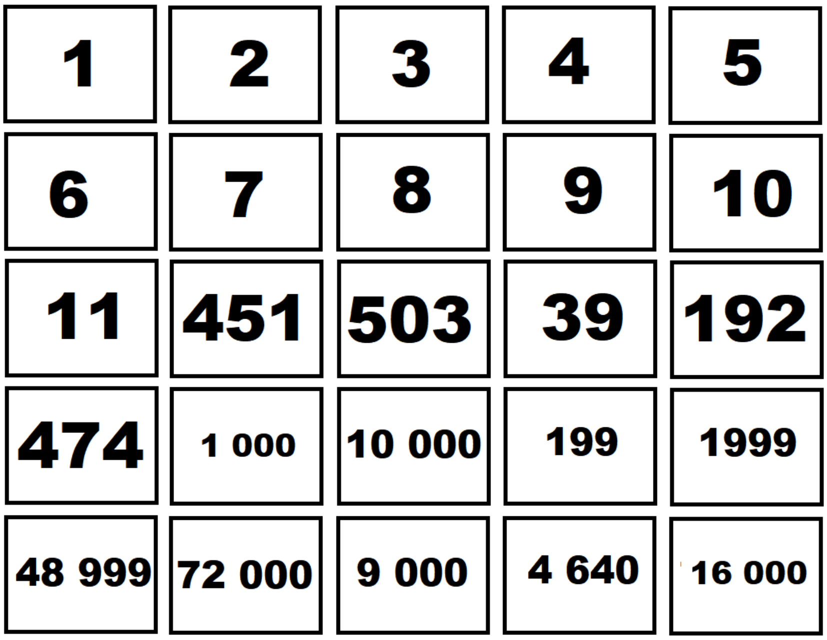


Figura 6.2: Fichas Numeradas

ATIVIDADE 2

Público Alvo: Alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, entretanto alunos à partir do quarto ano do Ensino Fundamental já podem realizar esta atividade.

Conteúdo: Propriedades associativa e comutativas da adição e multiplicação

Objetivos: Identificar que a ordem das parcelas na adição de números naturais não altera a soma. Identificar que a ordem dos fatores na mulplicação de números naturais não altera o produto. Identificar que a forma de associar três ou mais parcelas em uma adição não altera a soma e também a forma de associar três fatores na multiplicação não altera o produto.

Recursos Metodológicos: Fichas com adições e multiplicações como na figura 6.3.

Procedimentos Metodológicos:
1. Entregar para cada grupo de alunos as fichas da figura 6.3 com operações de adição e multiplicação.
2. O grupo deve efetuar as operações das fichas em seu caderno, observando os resultados obtidos e selecionar as fichas que deram o mesmo resultado.
3. Agora os alunos devem registrar e responder as seguintes perguntas:
a) O que podemos concluir com a igualdade entre as fichas onde só trocamos a ordem dos números?
Resposta esperada: Concluímos que a ordem das parcelas na adição não altera a soma e a ordem dos fatores na multiplicação não altera o produto. Isto significa que a adição e a multiplicação de números naturais admitem a propriedade comutativa.

b) O que podemos concluir com a igualdade entre as fichas em que usamos parênteses para associar os números?
Resposta esperada: nas expressões que apresentam apenas adição não importa a ordem em que associamos os números, o resultado não se altera. O mesmo ocorre na multiplicação. Assim, observamos que a adição e a multiplicação são associativas.

$23+16$	$235+459$	$1268+978$
$16+23$	$459+235$	$978+1268$
$5+(3+9)$	$12+(25+48)$	$8+(31+6)$
$(5+3)+9$	$(12+25)+48$	$8+31+6$
$7\cdot 69$	$15\cdot 93$	$171\cdot 69$
$69\cdot 7$	$93\cdot 15$	$69\cdot 171$
$4\cdot(7\cdot 8)$	$9\cdot(10\cdot 13)$	$9\cdot(10\cdot 12)$
$(4\cdot 7)\cdot 8$	$(9\cdot 10)\cdot 13$	$(9\cdot 10)\cdot 12$

Figura 6.3: Fichas para as Propriedades Associativa e Comutativa

ATIVIDADE 3

Público Alvo: Alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, entretanto alunos do quarto ano do Ensino Fundamental já podem realizar esta atividade.

Conteúdo: Propriedade Distributiva

Objetivos: Compreender que a multplicação admite a propriedade distributiva com relação a operação de adição.

Recursos Metodológicos: Fichas com operações que mostram a propriedade distributiva, como na figura 6.4, que pode ser reproduzida no dobro do seu tamanho.

Procedimentos Metodológicos:

1. Cada aluno recebe uma das fichas apresentadas na figura 6.4 e deverá resolve-la como achar melhor, sendo acompanhado pela supervisão do professor.
2. Após todos terem resolvido, os alunos devem encontrar o colega que alcançou o mesmo resultado, observando a igualdade entre suas fichas e o método de resolução.
3. Para finalizar esta atividade, o professor pode apresentar de maneira geral a propriedade distributiva, indicando ao aluno que ele faça o registro em seu material de estudo.

Avaliação: A avaliação das atividades podem ser baseadas nas discussões levantadas pelo grupo de alunos, seus registros e reflexões sobre o assunto.

$2\cdot(10+3)$	$2\cdot(10+5)$	$3\cdot(20+4)$
$2\cdot 10+2\cdot 3$	$2\cdot 10+2\cdot 5$	$3\cdot 20+3\cdot 4$
$4\cdot(7+3)$	$5\cdot(10+9)$	$6\cdot(8+9)$
$4\cdot 7+4\cdot 3$	$5\cdot 10+5\cdot 9$	$6\cdot 8+6\cdot 9$
$7\cdot(20+3)$	$8\cdot(30+9)$	$8\cdot(9+8)$
$7\cdot 20+7\cdot 3$	$8\cdot 30+8\cdot 9$	$8\cdot 9+8\cdot 8$
$9\cdot(20+8)$	$15\cdot(10+5)$	$9\cdot(20+5)$
$9\cdot 20+9\cdot 8$	$15\cdot 10+15\cdot 5$	$9\cdot 20+9\cdot 5$
$6\cdot(10+7)$	$5\cdot(6+7)$	$12\cdot(10+3)$
$6\cdot 10+6\cdot 7$	$5\cdot 6+5\cdot 7$	$12\cdot 10+12\cdot 3$
$11\cdot(7+5)$	$12\cdot(8+6)$	$13\cdot(7+9)$
$11\cdot 7+11\cdot 5$	$12\cdot 8+12\cdot 6$	$13\cdot 7+13\cdot 9$

Figura 6.4: Fichas para a Propriedade Distributiva

6.2 Números Inteiros

A proposta de atividade sobre os números inteiros contempla o uso de jogos como recurso didático, sendo seu principal objetivo a descoberta da existência de números negativos e uma das maneiras que é usado no cotidiano.

Jogo Ice Man

Público Alvo: Alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental

Conteúdo: Números Inteiros

Objetivos: Reconhecer a necessidade do uso de números negativos e positivos. Efetuar a adição e a subtração entre números positivos observando os resultados negativos. Reconhecer a sequência de números inteiros observando a posição do número zero e a ordem dos números negativos.

Recursos Metodológicos: Tabuleiro do Jogo representando um termômetro numerado de -10ºC a 10ºC, como na figura 6.6, 4 peões coloridos e dois dados de cores diferentes, no caso sugerimos as cores verde e vermelho, lápis e papel para o registro.

Figura 6.5: Peões e dados para o Jogo

Procedimentos Metodológicos: Com a turma dividida em grupos de até 4 alunos e o kit do jogo exposto em cada grupo, os alunos deverão ser orientados de acordo com as regras do jogo, principalmente no método do registro. A tabela abaixo é um exemplo de como registrar cada jogada.

Regras do Jogo

- O jogo deve começar com os peões no número zero e os alunos escolhem entre si a ordem dos jogadores.

- O primeiro jogador lança os dois dados simultaneamente e faz o registro na tabela, observando que o valor do dado verde é positivo e o valor do dado vermelho é negativo.

- Após o registro ele movimenta o seu peão conforme resultado obtido por meio da tabela ou até mesmo por observação dos números no termômetro.

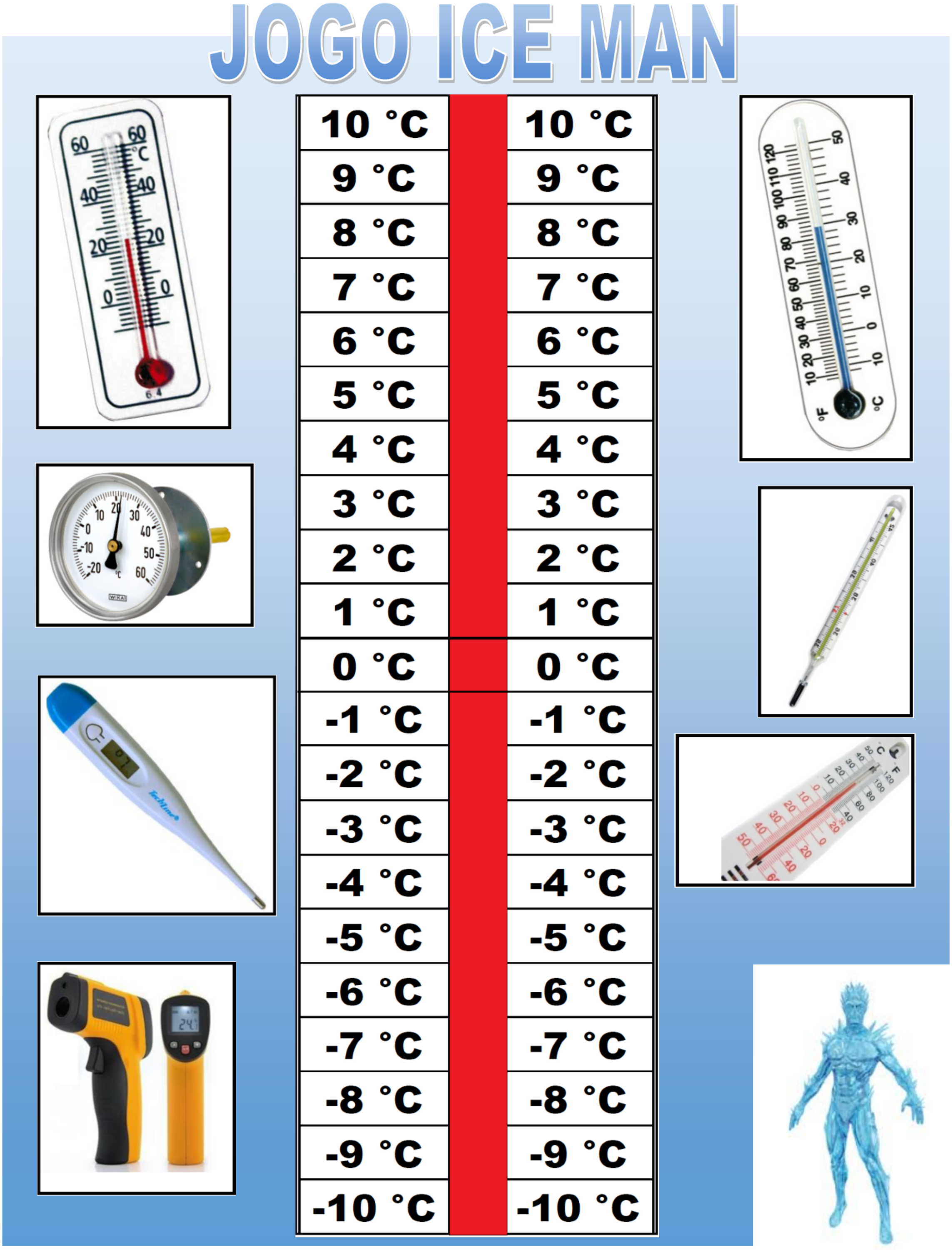


Figura 6.6: Tabuleiro do Jogo Ice Man

- Cada jogador, na sua vez executa a jogada seguindo as mesmas regras.

- Caso o peão de um dos jogadores chegar ou passar do -10º C, este jogador congela e está fora do jogo, até que comece outra partida.

- Vence o jogador que alcançar a temperatura positiva de 10 °C.

Para facilitar o entendimento do leitor abaixo apresentamos um exemplo de uma jogada e de como pode ser feito seu registro na tabela.

Exemplo 19. *Suponhamos que um jogador ao lançar os dois dados, tenha obtido o número 5 no dado vermelho e o número 3 no dado verde, sendo que a jogada foi iniciada com o seu peão na casa do número zero. Com estes valores o registro da tabela fica da seguinte maneira:*

Começo	*Dado Verde* (D_1)	*Dado Vermelho* (D_2)	$D_1 - D_2$	*Fim*
0	*3*	*5*	$3 - 5 = -2$	*0-2=-2*
-2				

A primeira coluna da tabela identifica a casa em que o peão inicia a rodada. Na segunda e na terceira coluna registra-se os valores obtidos nos dados indicados. Na quarta coluna, a operação de subtração entre os dados verde e vermelho identifica o movimento que o peão fará, observando que se o resultado for negativo o peão desce e se for positivo o peão sobe. Na última coluna da tabela, o aluno efetua a adição entre a primeira coluna e a penúltima para obter o resultado que determina a casa onde o peão deve parar, ou seja o fim da jogada. O aluno poderá observar que o resultado da operação de subtração entre os valores dos dados pode ser verificado através dos movimentos do peão no tabuleiro.

6.3 Números Racionais

ATIVIDADE

Público Alvo: Alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental.

Conteúdo: Os Números Racionais e suas representações.

Objetivos: Representar os números racionais por meio de frações decimais e/ou não decimais. Compreender que um número com infinitas casas decimais periódicas é um número racional. Compreender a representação dos números racionais na reta numérica. Escrever os números Racionais em ordem Crescente. Obter a fração irredutível e frações equivalentes.

Recursos Metodológicos: Listas de Atividades expostas nas figuras 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10. Questionário para finalização da atividade.

Procedimentos Metodológicos:

- A turma de alunos deve estar organizada em 4 grupos de até 5 alunos. Havendo mais grupos, os temas podem ficar repetidos.
- A orientação do professor será necessária em todos os momentos da atividade, com explicações e exemplos.
- As dúvidas que irão permear as atividades, não devem ser diretamente respondidas, mas sim discutidas e analisadas com o grupo, conforme a situação, e assim chegar na melhor maneira de resolvê-la.
- O registro das atividades, a princípio, será feito no caderno em forma de rascunho, pois ao final os alunos irão fazer um cartaz para apresentar a todos os colegas da sala.
- É importante que as ações do professor durante as atividades tenham aspecto de orientação aos alunos, observando os acertos e discutindo sobre os erros até que sejam corrigidos.

1º Momento: Representações Fracionárias.

Cada grupo de alunos receberá uma atividade diferenciada e deverá representar as situações específicas com frações decimais e/ou não decimais como descrito abaixo.

O grupo um recebe a lista de figuras 6.7, com algumas situações em que usamos números escritos na forma decimal. O professor pode também sugerir a pesquisem destas figuras em revistas ou internet e depois elas devem ser recortadas ou impressas. Os alunos deverão determinar quais números cada situação representa e depois escrevê-los na forma de fração decimal e/ou fração irredutível.

O grupo dois recebe a lista representada pela figura 6.8 que expõe figuras repartidas em partes iguais para fazer a representação com frações decimais e/ou frações não decimais. Os alunos podem ser orientados a representar tanto a parte pintada quanto a parte não

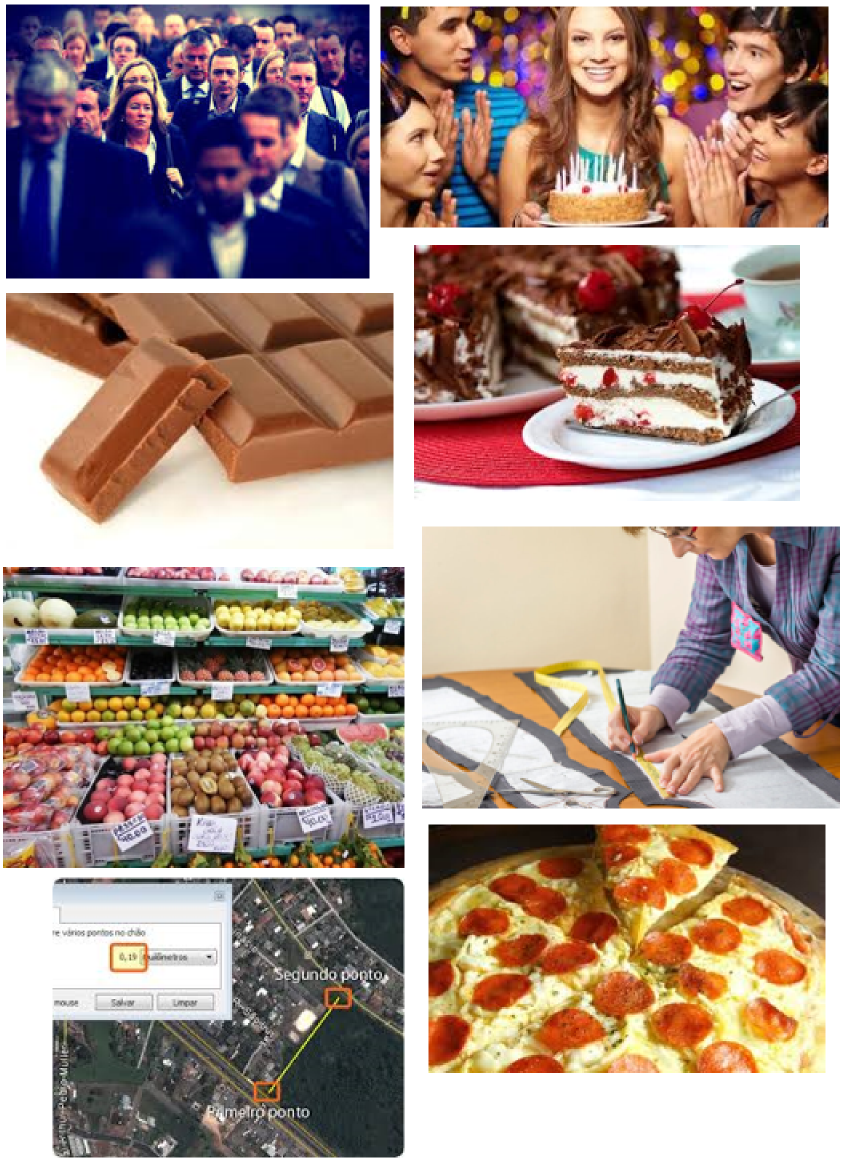


Figura 6.7: Lista de Atividades - Grupo 1

pintada, observando que a soma das duas frações obtidas é igual a 1.

O grupo três recebe a lista apresentada na figura 6.9 com números escritos na forma de representação decimal infinita e periódica. Os alunos devem representar estes números com frações conforme a orientação do professor. Para o auxílio ao professor, são apresentados a seguir, alguns métodos para obteção da fração geratriz de uma dizima periódica.

Exemplo 20. *A dízima periódica* $0,444... = \dfrac{4}{9}$*. Para obter este resultado primeiro identificamos que o período desta dízima é igual a 4, formado por apenas 1 algarismo. Depois considere que* $x = 0,444...$*. Multiplicando os dois membros da igualdade por 10 e*

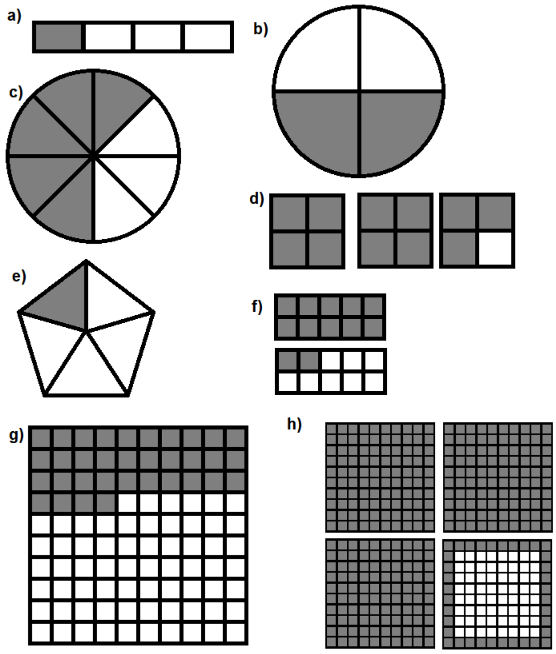


Figura 6.8: Lista de Atividades - Grupo 2

resolvendo a equação obtemos

$$\begin{aligned} x = 0,444... \;&\Rightarrow\; 10x = 10 \cdot 0,444... \\ &\Rightarrow\; 10x = 4,444... \\ &\Rightarrow\; 10x = 4 + 0,444... \\ &\Rightarrow\; 10x = 4 + x \\ &\Rightarrow\; 10x - x = 4 \\ &\Rightarrow\; 9x = 4 \\ &\Rightarrow\; x = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Após mostrar o método acima o professor pode sugerir ao alunos que use um método mais prático para obter a fração geratriz da dízima periódica, conforme os dois próximos exemplos.

Exemplo 21. *Na igualdade* $0,555... = \dfrac{5}{9}$ *observe que o numerador da fração é igual ao período da dízima periódica e o denominador apresenta somente um algarismo 9 de acordo com o período que também tem somente um algarismo.*

Exemplo 22. *A dizima periódica* $0,8989... = \dfrac{89}{99}$*, sendo o numerador da fração igual ao período da dízima que contém dois algarismos e portanto o denominador tem dois algarismos iguais a 9.*

Para os casos em que a dízima periódica tem a parte decimal composta pela parte que repete e ao menos um algarismo que não se repete a esquerda do período, a justificativa para a obtenção da fração geratriz, usando equação como ferramenta fica como se segue.

a) 0,111... =	g) 1,121212...=
b) 0,333...=	h) 4,1232323...=
c) 0,999...=	i)12,12342342...=
d) 0,191919...=	j) 100,0333...=
e) 0,234234234...=	k) 0,12444...=
f) 0,5191919...=	

Figura 6.9: Lista de Atividades - Grupo 3

Exemplo 23. *Vamos escrever* $0,3454545...$ *em forma de fração. O período é formado por dois algarismo e o número 3 esta na parte decimal e não se repete. Assim considere* $x = 0,34545....$ *Multiplicando por 10 esta igualdade e desenvolvendo a equação obtemos*

$$
\begin{aligned}
x = 0,34545... \quad &\Rightarrow \quad 10x = 10 \cdot 0,34545... \\
&\Rightarrow \quad 10x = 3,454545... \\
&\Rightarrow \quad 10x = 3 + 0,454545... \\
&\Rightarrow \quad 10x = 3 + \frac{45}{99} \\
&\Rightarrow \quad 990x = 297 + 45 \\
&\Rightarrow \quad x = \frac{342}{990}.
\end{aligned}
$$

Caso o professor opte por um método mais prático para escrever a fração geratriz de $0,3454545...$ *basta observar que o numerador da fração é igual a* $345 - 3 = 342$ *onde o número* 345 *é a parte decimal sem repetição e* 3 *é a parte decimal que não se repete na dízima. Para o denominador a regra é que usamos dois algarismos 9, pois o período é composto de dois algarismos, e um algarismo zero, pois há um algarismo na parte decimal que não se repete.*

O grupo quatro deve representar com uma fração cada letra apontada nas retas numéricas da figura 6.10.

2º Momento: Rodízio do conhecimento

Cada grupo escolhe um líder. A função do líder será explicar para outros colegas o que foi feito na sua atividade. No formato de rodízio, cada grupo deve percorrer os outros grupos e conhecer as outras representações de números racionais.

3º Momento: Caminho Inverso

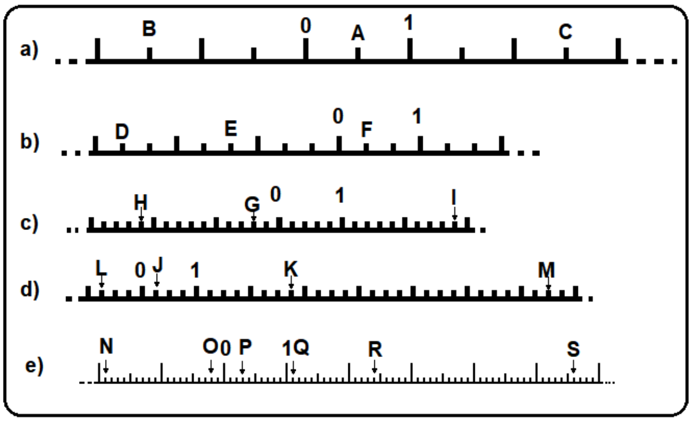


Figura 6.10: Lista de Atividades - Grupo 4

Neste momento cada grupo recebe a lista de frações apresentada na figura 6.11.

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{10}$

c) $\frac{14}{7}$

d) $\frac{335}{100}$

e) $\frac{7}{9}$

f) $\frac{14}{99}$

g) $3\frac{1}{3}$

h) $2\frac{15}{100}$

i) $\frac{452}{99}$

j) $\frac{19}{6}$

Figura 6.11: Lista de Frações para todos os grupos

O grupo um deve representar as frações com números decimais e possíveis situações problema onde podem ser utilizadas.

O grupo dois deve representar as frações com figuras repartidas igualmente ou conjunto de objetos.

O grupo três deve representar as frações com números decimais, salientando aquelas frações que resultam em dízimas periódicas.

O grupo quatro deve representar as frações com pontos na reta numérica.

4º Momento: Rodízio do conhecimento

Cada grupo escolhe um outro líder. A função do líder será explicar para outros colegas o que foi feito na sua atividade. No formato de rodízio, cada grupo deve percorrer os outros grupos e conhecer as representações de números racionais que foram trabalhadas.

5º Momento: Montagem de cartazes.

Como tarefa para casa, cada grupo deve montar um cartaz e sua apresentação sobre as atividades que foram realizadas, de acordo com a sua parte nas representações dos números racionais. O cartaz pode seguir um modelo descrito pelo professor e ter alterações conforme os alunos julgam necessário. Para os casos de possíveis erros, os alunos devem ser orientados a organizar e montar o cartaz, escrevendo a lápis, para que depois de uma supervisão do professor, sejam feitas as correções e depois completar o que foi escrito com a caneta esferográfica.

6º Momento: A apresentação

Os grupos 1, 2, 3, e 4, nesta ordem farão a sua apresentação de forma oral, apresentando as atividades realizadas com o auxílio do cartaz e outros materiais que julgarem necessários. Ao final de cada apresentação os alunos ouvintes poderão fazer perguntas e o grupo que estiver apresentando deve responder.

7º Momento: Lista de Exercícios e Reflexões

Para finalizar esta proposta de atividade, neste momento os alunos devem responder o questionário apresentado abaixo que tem como objetivo principal fazer o aluno refletir e sintetizar o seu conhecimento sobre a estrutura do Conjunto dos Números Racionais.

Questionário

1. 0,3 é um número racional que está entre 0 e 1. Cite outros números racionais que estão entre 0 e 1.
2. Agora cite um número racional que está entre 0,3 e 0,4.
3. Entre dois números racionais sempre há outro número racional? Explique com exemplos.
4. Qual é o maior número racional? E o menor?
5. O conjunto dos números racionais é infinito?
6. O número 3,7 possui sucessor? Podemos falar em sucessor e antecessor de números racionais?
7. As dízimas periódicas podem ser escritas na forma de fração? Elas são números racionais?
8. Você conhece algum número que não pode ser representado por uma fração com numerador e denominador inteiros, e o denominador diferente de zero?

6.4 Irracionais

ATIVIDADE 1

Público Alvo: Alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental II

Conteúdos: O comprimento da circunferência e a constante π
Objetivos: Identificar que a razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência resulta em um número constante. Reconhecer que π é um número irracional

Recursos Metodológicos: Objetos circulares, barbante fino, tesoura, caderno e lápis para registro.

Procedimentos Metodológicos:

1. Anterior ao momento de início da atividade, é muito importante que o professor peça aos seus alunos que tragam de casa um objeto de formato circular para a realização desta atividade. O professor até poderia usar um objeto com a mesma medida para todos os alunos, mas daí não poderíamos verificar a existência de uma constante.

2. Com os recursos citados acima em mãos, os alunos devem identificar o comprimento da circunferência, usando o barbante para contornar o objeto circular e cortar o barbante na medida obtida.

3. Depois os alunos devem identificar o diâmetro dessa circunferência, novamente cortando o barbante no tamanho correspondente a este diâmetro.

4. Agora os alunos podem observar que os pedaços de barbante obtidos pelo outros colegas são de medidas diferentes. Eles devem cuidar destes pedaços e não trocar entre si, caso contrário a sua experiência não dará certo.

5. Agora, cada aluno com seus dois pedaços de barbante na mão, onde o maior representa a medida do comprimento da circunferência e o menor reproduz o seu diâmetro, deverá primeiro observar quantas vezes o cordão do diâmetro cabe no comprimento, e então cortar os pedaços de barbante do comprimento do mesmo tamanho do diâmetro, quantas vezes forem possíveis, tomando o cuidado para não esticar muito o fio.

6. Agora cada aluno deve observar que todos os seus colegas obtiveram o mesmo resultado. O comprimento da circunferência representado pelo barbante pôde ser cortado em 3 pedaços de mesma medida do diâmetro e ainda sobrou um pedacinho do barbante que era o comprimento da circunferência.

7. Agora a próxima parte envolve o registro do que foi feito. O título da atividade no caderno do aluno pode ser: A razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro.

8. Para identificar o que foi feito, primeiro o aluno pode colar no caderno os pedaços de barbante que formam o comprimento da circunferência, formando uma circun-

ferência. Em seguida, colar no caderno o pedaço de barbante que representa o diâmetro da circunferência, fazendo a devida identificação.

9. E ainda, registrar que com esta atividade descobrimos que a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro é um número constante pouco maior que três.

10. Para finalizar a atividade o professor pode mediar o conhecimento apresentando aos alunos o número π conforme foi apresentado neste trabalho no exemplo 18 e ainda promover uma pesquisa na internet sobre os valores já calculados do número π, curiosidades e principais utilidades.

ATIVIDADE 2

Público Alvo: Alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental II

Conteúdos: Quadrados perfeitos, raiz quadrada exata e raiz quadrada aproximada.

Objetivos: Iniciar a compreensão de como pode ser obtido um número Irracional por meio do cálculo de raiz quadrada.

Recursos Metodológicos: Calculadora, lápis e papel.

Observação: A sugestão de atividade apresentada aqui, consiste em um método simples que funciona, principalmente com alunos que tem muitas dificuldades com os conteúdos de matemática. Como sugestão de continuação desta atividade o professor pode fazer menção ao Teorema 17 conforme a linguagem dos alunos.

Procedimentos Metodológicos:

- De maneira rápida os alunos devem fazer uma lista com os resultados dos números de 1 a 30 elevado a 2. Assim como na figura 6.12.

$1^2 =$	$11^2 =$	$21^2 =$
$2^2 =$	$12^2 =$	$22^2 =$
$3^2 =$	$13^2 =$	$23^2 =$
$4^2 =$	$14^2 =$	$24^2 =$
$5^2 =$	$15^2 =$	$25^2 =$
$6^2 =$	$16^2 =$	$26^2 =$
$7^2 =$	$17^2 =$	$27^2 =$
$8^2 =$	$18^2 =$	$28^2 =$
$9^2 =$	$19^2 =$	$29^2 =$
$10^2 =$	$20^2 =$	$30^2 =$

Figura 6.12: Lista 1 - Números quadrados perfeitos

- Depois eles devem fazer uma outra lista representando o cálculo da raiz quadrada dos números 1 ao 50, como na figura 6.13.

- Para responder os cálculos da segunda lista, os alunos devem ser orientados a preencher primeiro aqueles resultados que são exatos, de acordo com a Lista 1. Os outros resultados podem ser obtidos com o uso da calculadora do celular. Lembrando que os aplicativos de calculadora oferecidos neste caso nos dão um resultado com 11 dígitos e ainda é uma ferramenta de fácil acesso.

- Após o registro de resultados na Lista 2 os alunos devem verificar que os números dados na calculadora são aproximações das raizes procuradas e ainda que as casas decimais deste resultados não são periódicos. Dessa maneira estes números são

Irracionais, ou seja números decimais com infinitas casas decimais e que não podemos representar com uma fração de números inteiros, com denominador diferente de zero.

$\sqrt{1} =$	$\sqrt{11} =$	$\sqrt{21} =$	$\sqrt{31} =$	$\sqrt{41} =$
$\sqrt{2} =$	$\sqrt{12} =$	$\sqrt{22} =$	$\sqrt{32} =$	$\sqrt{42} =$
$\sqrt{3} =$	$\sqrt{13} =$	$\sqrt{23} =$	$\sqrt{33} =$	$\sqrt{43} =$
$\sqrt{4} =$	$\sqrt{14} =$	$\sqrt{24} =$	$\sqrt{34} =$	$\sqrt{44} =$
$\sqrt{5} =$	$\sqrt{15} =$	$\sqrt{25} =$	$\sqrt{35} =$	$\sqrt{45} =$
$\sqrt{6} =$	$\sqrt{16} =$	$\sqrt{26} =$	$\sqrt{36} =$	$\sqrt{46} =$
$\sqrt{7} =$	$\sqrt{17} =$	$\sqrt{27} =$	$\sqrt{37} =$	$\sqrt{47} =$
$\sqrt{8} =$	$\sqrt{18} =$	$\sqrt{28} =$	$\sqrt{38} =$	$\sqrt{48} =$
$\sqrt{9} =$	$\sqrt{19} =$	$\sqrt{29} =$	$\sqrt{39} =$	$\sqrt{49} =$
$\sqrt{10} =$	$\sqrt{20} =$	$\sqrt{30} =$	$\sqrt{40} =$	$\sqrt{50} =$

Figura 6.13: Lista 2 - Raiz Quadrada

Conclusão e Considerações Finais

Apresentamos neste trabalho uma pesquisa feita com professores que lecionam matemática em uma escola da Rede Básica de Ensino, que nos mostrou como resultado a falta de exatidão na definição dos números por parte destes professores.

Motivada por estes fatos, como já dito anteriormente, expomos aqui a Construção dos Conjuntos Numéricos desde os Naturais aos Irracionais. Concluímos aqui, que para construir os Números Naturais precisamos dos Axiomas de Peano, para construir os Números Inteiros e os números Racionais precisamos conhecer a estrutura algébrica de um conjunto quociente que munidos das operações binárias de adição e multiplicação constitui-se estes conjuntos. Para os Números Irracionais, apenas apresentamos exemplos e definições que são pré-requisitos para o ensino deste números no Ensino Fundamental.

Assim, com o objetivo de ajudar o professor que tem uma dura rotina de sala de aula, sugerimos aqui atividades práticas que norteiam a construção dos números, o mais próxima possível do ponto de vista da matemática moderna e ainda em consonância com as diretrizes da educação.

No ano de 2012 tive a oportunidade de participar como coordenadora do Programa Além das Palavras em uma escola estadual, este projeto do Estado do Mato Grosso do Sul tinha como objetivo melhorar o processo de ensino e aprendizagem da alfabetização da língua portuguesa e matemática no ensino básico. Neste período foram longos os estudos para compreender como se desenvolvia a obtenção do significado de número e o processo de contagem na criança, observando também o seu desempenho na escola e a metodologia de ensino dos professores do Ensino Fundamental I. A partir daí a minha curiosidade sobre a Construção do Números só cresceu, pois pude perceber que de fato este processo para o indivíduo não acontece de maneira tão simples quanto eu poderia compreender até aquele momento.

Já em 2014, novamente em contato com outros professores que lecionam matemática no Ensino Fundamental I e II, através do trabalho desenvolvido no Laboratório de Matemática da Rede Municipal de Ensino pude dar continuidade as observações iniciadas em 2012, verificando que muitos conhecimentos admitidos pelos docentes não estavam bem colocados a si mesmos. Com isto, busquei fazer a pesquisa exposta no capítulo 1 deste trabalho, apontando que de fato isto realmente acontecia. Mesmo depois de passar pela formação universitária, nós professores precisamos continuar a buscar o conhecimento teórico sobre aquilo que ensinamos, para não ensinar algo errado, principalmente com o mau uso do vocabulário, isso acarreta dificuldade na aprendizagem

Nas Construções dos Conjuntos Numéricos pude perceber o quão importante é o rigor com a lógica matemática no campo algébrico verificando que as ferramentas necessárias para as demonstrações aqui feitas dependem de definições e proposições apresentadas antes da determinada demonstração.

Dessa maneira, respeitando sistematicamente a estrutura da lógica matemática espera-se fazer com o que o professor leitor se aproprie deste raciocínio, obtendo a teoria necessária para si, como provedor do conhecimento. Salientando que o mesmo cuidado deve ser tido quando ensinamos estes conteúdos aos alunos, sem pular nenhuma parte importante, pois caso contrário ficarão lacunas no conhecimento e a partir daí os alunos passarão a ser forçados a compreender os próximos conhecimentos desconsiderando a lógica do raciocínio matemático, embutido nestes conteúdos.

Para trabalhos futuros fica a legítima necessidade de pesquisa e apresentação de estudos sobre formações de professores que já estão em sala de aula, bem como a apresentação de um trabalho que traga dentro das propostas de atividades um material com observações e características mais profundas sobre como o professor pode expor as suas explicações e quais seriam as possíveis perguntas e respostas do aluno frente ao problema.

Referências Bibliográficas

[1] *LIMA, Elon L.* Curso de Análise, Vol.1. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[2] *GONÇALVES, Adilson.* Introdução a Álgebra, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[3] *AGUILAR, Ivan; DIAS, Marina S.* A construção dos Números Reais e suas Extensões, 4 Colóquio da Região Centro Oeste, UFF, 2015.

[4] *LIMA, Elon L.* Números e Funções Reais, Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[5] *LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C.* A Matemática do Ensino Médio, vol. 2, 6ª ed., Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[6] *NIVEN, Ivan.* Números Racionais e Irracionais, 1ªEd., SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[7] *FIGUEIREDO, Djairo G.* Números Irracionais e Transcendentes, 3ªEd., SBM, Rio de Janeiro, 2011.

[8] *BRASIL.* Parâmetros Curriculares Nacionais, Matemática, terceiro e quarto ciclos, Secretaria de Educação Fundamental, Brasília, 1998.

[9] *PRADO, Esther P. de Almeida.* Os textos impressos para o ensino dos números inteiros na visão de licenciados em matemática, Tese (doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, 2008.

[10] *BRASIL.* Base Nacional Comum Curricular, Matemática, Ensino Fundamental I e II, Ministério da Educação, Brasília, 2017.

[11] *SILVEIRA, J. F. Porto.* Cáculo das constantes Elementares: O CASO DO PI. Disponível em www.mat.ufrgs.br/ portosil/aplcom1a.html. Acesso em 13 de Outubro de 2017.

[12] *BOYER, Carl B.* História da Matemática, 3ª Reimpressão, Tradução: Elza F. Gomide, Ed. Edgard Blucher LTDA, São Paulo, 1981.