UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

GERALDO LOPES JÚNIOR

GEOMETRIA DINÂMICA COM O GEOGEBRA NO ENSINO DE ALGUMAS FUNÇÕES

VIÇOSA−MINAS GERAIS
2013

GERALDO LOPES JÚNIOR

GEOMETRIA DINÂMICA COM O GEOGEBRA NO ENSINO DE ALGUMAS FUNÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA−MINAS GERAIS
2013

GERALDO LOPES JÚNIOR

GEOMETRIA DINÂMICA COM O GEOGEBRA NO ENSINO DE ALGUMAS FUNÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 18 de março de 2013.

Lucy Tiemi Takahashi

Kennedy Martins Pedroso

MehranSabeti
(Orientador)

Primeiramente a Deus, Senhor de tudo e de todos...

Aos familiares e amigos que não mediram esforços para dar-me suporte nos momentos de angústia...

AGRADECIMENTOS

À Deus por minha vida, família e amigos.

À CAPES pela ajuda financeira, sem a qual não poderia fazer o curso.

À Sociedade Brasileira de Matemática e a Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade.

Ao professor MehranSabeti, pela orientação, apoio e confiança.

RESUMO

O ensino de funções, por ser um dos alicerces da matemática, ocupa boa parte da grade curricular, principalmente do ensino médio.Umaestratégia que permite agilizar a construção do conhecimento relacionado a este tema é o uso de *softwares* educativos queoferecem ambientes de geometria dinâmica para visualização gráfica. O GeoGebra é umdestes *softwares* que permite uma abordagem para o ensino de funções propiciando a transição entre as linguagens gráfica e simbólico-algébrica, contribuindo para uma compreensão mais significativa destes conceitos por parte dos estudantes.Ambientes favoráveis para o ensino de funçõessupre o objetivo principal destetrabalho. Pretende-se aqui, apresentaruma sugestão de estratégia didática sequencial, que facilite o processo de ensino e aprendizagem das funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométrica,de forma interativa e dinâmica, com a explanaçãode alguns de seus conceitos e como estes podem ser apresentados para os alunos, afimde que façam conjecturas sobre estas funções, a partir de suas observações feitas com oprograma. É importante reposicionar os mecanismos de ensino damatemática dentro do ambiente tecnológico moderno, usando essas ferramentas didáticas.No desenvolvimento deste trabalho, verificou-se que o uso do GeoGebra nas aulas de matemática permite umgrande avanço no ensino de funções por meio da manipulação de seus respectivos gráficos.Todo o exposto neste trabalho se baseia em pesquisa bibliográfica e, principalmente,na experiência do autor com seus alunos do ensino médio nos dois setores, público e privado, desde 2006.

ABSTRACT

The teaching function, being one of the foundations of mathematics, occupies much of the curriculum, especially high school. A strategy that allows expedite the construction of knowledge related to this topic is the use of educational software environments that offer dynamic geometry for graphical visualization. GeoGebra is one such software that allows an approach to the teaching of functions enabling the transition between languages graphical and symbolic-algebraic, contributing to a more meaningful understanding of these concepts by students. Favorable environments for teaching functions supplies the main objective of this work. The intention here is to present a suggestion of sequential teaching strategy that facilitates the process of teaching and learning related functions, quadratic, exponential, logarithmic and trigonometric, interactively and dynamically, with the explanation of some of its concepts and how these can be presented to students in order to make conjectures about what these functions, from observations made with the program. It is important to reposition the mechanisms of teaching mathematics in the modern technological environment, using these teaching tools. In this development work, it was found that the use of GeoGebra for teaching mathematics allows a great improvement in learning function by manipulating their respective graphs. All exposed in this paper is based on literature and especially the author's experience with his high school students in both sectors, public and private sectors since 2004.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo Elon Lages Lima (1999), o ensino de matemática se alicerça em dois conceitos primordiais, “Teoria de Conjuntos” e “Funções”. Compreendê-los é de grande importância para outras áreas da matemática e contribuem para o avanço em conceitos mais profundos e abstratos dessa ciência.

No primeiro ano do Ensino Médio das escolas brasileiras, públicas e privadas, o ensino de funções ocupa a maior parte da grade curricular e, assim, é necessário que os alunos entendam bem suas particularidades e aprendam a explorar situações do cotidiano em que o conceito e as propriedades da função são empregados.

Uma estratégia que visa sanar algumas dificuldades, despertar o interesse e facilitar o processo de ensino e aprendizagem é o uso de *softwares* educativos no ensino de matemática para visualização gráfica e interpretação de propriedades e definições de funções.

Há alguns anos falava-se muito sobre a necessidade do uso das novas tecnologias no ensino de matemática. Segundo Borba e Penteado (2001):

> O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma “alfabetização tecnológica”. Tal alfabetização deve ser vista não como um Curso de Informática, mas, sim, como um aprender a ler essa nova mídia. Assim o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc.(p.17).

Hoje isso é uma realidade em diversas escolas, e muito já foi feito para auxiliar professores e alunos a terem acesso à tecnologia digital de informação e tratamento de dados que efetive a incorporação de recursos tecnológicos no ensino.

Uma dessas tecnologias digitais são os *softwares* que oferecem ambientes de geometria dinâmica. Segundo Giraldoet al. (2012) há um ditado que diz que *uma imagem vale mais do que mil palavras* e, em ambientes de geometria dinâmica, são centenas de imagens, que se sucedem ordenadamente e que podem ser manipuladas de forma interativa, abrindo uma gama de possibilidades de construção de ideias, com ajuda de imagens geométricas manipuláveis.

São muitas as vantagens em se trabalhar com geometria dinâmica; entre elas, perceber propriedades e defini-las antes de visualizar a figura em si mesma. Giraldoet al. (2012) acrescentam:

> Em geometria dinâmica, as construções não apenas podem ser manipuladas, como também as condições que a determinaram inicialmente são preservadas pela manipulação. O aspecto dinâmico dos ambientes pode indicar a validade matemática das construções, e especialmente sua não validade (p.68).

Dentro de uma variedade de *softwares* que oferecem essas funcionalidades, para este trabalho, foi escolhido o GeoGebra, um excelente programa que teve seu desenvolvimento no intuito de aprimorar a interatividade do usuário com as figuras que constrói, sendo uma ótima ferramenta que carrega no próprio nome suas características principais - construção geométrica a partir de fórmulas algébricas. Além do mais, é um *software* livre, disponível nos principais sistemas operacionais, de fácil aquisição pela internet e presente na maioria das escolas.

De acordo com Borba (1999), fazendo-se uma análise dentro dos parâmetros da Educação Matemática, os ambientes de aprendizagem propiciados por *softwares* educativos podem aprimorar a didática em sala de aula dos conteúdos curriculares e potencializar o processo de ensino e da aprendizagem, enfatizados pela “Experimentação Matemática”, o que acarreta novas possibilidades de conceituação, dentro de uma visão construtivista, onde o aluno não é mais ensinado, mas é o artífice do seu próprio conhecimento. Para D’Ambrósio (2003), é preciso substituir os processos de ensino que priorizam a exibição, que levam a um receber passivo do conteúdo, por processos que estimulem os alunos a participação e que podem vir a estimular os alunos na construção do pensamento lógico-matemático de forma significativa e na convivência social.

Assim, o embasamento teórico se fundamenta na teoria construtivista que Valente (1991) usa para denominar a construção do conhecimento por intermédio do computador quando diz que “o computador pode enriquecer ambientes de aprendizagem onde o aluno, interagindo com os objetos desse ambiente, tem a chance de construir o seu conhecimento.”

O GeoGebra propicia, por meio de magníficos instrumentos de construção e manipulação gráfica, ambientes favoráveis para o ensino de funções dentro dessa visão construtivista, e supre perfeitamente o objetivo principal deste trabalho que é apresentar uma sugestão de estratégia didática sequencial que facilite o processo de ensino e aprendizagem das Funções Afim, Quadrática, Exponencial, Logarítmica e das Funções Trigonométricas, de forma interativa e dinâmica com a explanação de alguns de seus conceitos e como estes podem ser apresentados para os alunos a fim de que façam conjecturas sobre seus conceitos a partir das observações feitas com o programa.

Borba e Penteado (2005) consideram que recursos tecnológicos, como o GeoGebra, são interfaces importantes no desenvolvimento de ações em Educação Matemática e que o uso desses recursos demonstra um aspecto fundamental da matemática, que é a experimentação e as inferências imediatas por meio desta.

Neste texto são apresentados os passos para a construção de arquivos no GeoGebra, que servirão de ferramenta auxiliar no processo de ensino aprendizagem para o ensino das Funções Polinomiais do 1º e 2º graus, das Funções Algébricas Exponencial e Logarítmica e das Funções Trigonométricas Seno Cosseno e Tangente. Há, inclusive, os passos para a construção de um arquivo que permite um estudo dinâmico sobre o Ciclo Trigonométrico

No capítulo 1 são apresentadas opções de *softwares* para o ensino de funções; é feito um rápido histórico do *software* GeoGebra e é dada a explicação dos comandos que serão utilizados no decorrer do texto.

O capítulo 2 trata das Funções Polinomiais do 1º e 2º graus, onde é dado o passo a passo para a construção dos arquivos no GeoGebra e são dadas sugestões de como conduzir as aulas com a utilização do programa. Este aplicativo deve ser utilizado já no 9º ano do Ensino Fundamental e totalmente explorado no 1º ano do Ensino Médio.

O mesmo é feito nos dois próximos capítulos, Estudo das Funções Exponencial e Logarítmica no capítulo 3 e Estudo do Ciclo Trigonométrico e das Funções Trigonométricas no capítulo 4. O aplicativo deve ser explorado no Ensino Médio[1].

Já nas considerações finais, é apresentada uma opção que o *software* possui que se trata da possibilidade de publicação do arquivo criado na rede mundial de computadores, o que viabiliza o ensino a distância.

O objetivo é divulgar e viabilizar a utilização do *software*GeoGebra, para que esta importante ferramenta seja explorada por professores e alunos na construção do saber matemático.

[1] Quando serão utilizados os aplicativos fica a critério de cada professor, de acordo com a sequência didática de seu trabalho. Aqui foram dadas sugestões.

CAPÍTULO 1

1 Uso de *Softwares* Matemáticos Para Ensino de Funções

A experiência de colegas professores tem mostrado que tanto no Ensino Médio como no Superior os alunos têm apresentado dificuldades em assimilar o conceito de função, suas propriedades e associar sua aplicabilidade com diversas áreas do conhecimento, como Agronomia, Engenharias, Física, Farmacologia, entre outros. Hoje, quando se fala de modelagem matemática, é impossível esquecer funções. Mas muitos alunos não conseguem compreender muitos dos conceitos relacionados às funções, como a interdependência das variáveis, chegando ao ponto de confundirem o que são variáveis, domínio e contradomínio. Outros têm péssima interpretação gráfica, até mesmo de funções mais simples como a função afim.

O problema pode estar na forma como muitos livros didáticos apresentam as informações, sem uma contextualização e uso da interdisciplinaridade. Os alunos acabam por não saber associar as regras e fórmulas memorizadas com as situações reais que lhes cercam. Outro fator pode estar na forma estática e monótona como o conteúdo é transmitido. A juventude de hoje está acostumada com dinamismo e interatividade relacionados com uma infinidade de aparelhos eletrônicos que caracteriza o mundo tecnológico e informatizado de hoje. Assim, aulas na lousa e no livro são desestimulantes para muitos desses jovens e até para alguns adultos. Quando se fala para o aluno das variações na posição de uma reta relacionadas com os coeficientes a e b da função real $f(x) = ax + b$ e não é possível para ele manipular esse ente geométrico, muitos não conseguem imaginar as diversas posições relativas da reta no plano cartesiano.

Um artifício que pode ser usado para auxiliar a sanar as dificuldades conceituais dos alunos é fazer uso dos recursos tecnológicos digitais de tratamento de dados disponíveis, com os quais o aluno altera seu estado de mero receptor e passa a ser construtor do próprio conhecimento. Por meio da exploração que lhe é oferecida, ele pode perceber melhor as regras, conceitos e fazer conjecturas acerca do conteúdo ministrado.

Quando se faz uso de *softwares* no ensino de matemática, há um avanço nas possibilidades de experimentação, observação, investigação e dedução, etapas do desenvolvimento de teorias matemáticas que são muito importantes para o desenvolvimento dos alunos nessa ciência.

O importante é planejar bem a abordagem que será utilizada, pois o computador e o *software* não podem ser usados apenas para encontrar respostas de forma rápida, mas sim como estimulador de ideias e raciocínios. Não adiante usar vários recursos se a metodologia de ensino é a mesma em que a ênfase é dada na memorização de processos, de confecção de gráficos, por exemplo, ao invés de entender as propriedades passíveis de serem observadas.

É interessante que o ato de levar uma turma para um laboratório de informática por si só já tem um impacto positivo, pois serve para melhorar os ânimos dos educandos. O que comprova que o uso da tecnologia a favor do ensino de funções alcança o objetivo de motivar o docente para a sua aprendizagem.

1.1 Os *Softwares* Disponíveis

A Matemática é uma das disciplinas mais privilegiadas, pois possui um número significativo de *softwares* educativos. Um motivo pode ser a tentativa de encontrar estratégias que tornem a matéria mais atraente e de melhor compreensão.

Muitos desses *softwares* são gratuitos, há versões para vários sistemas operacionais e podem ser adquiridos na internet de forma rápida. Alguns são leves e podem ser levados em dispositivos de armazenamento de dados portáteis. Entre os que oferecem possibilidade de trabalhar com gráficos de funções destacam-se*Cabri-Géomètre, Graphequation*, *Graphmática*, *Winplot*, *Aplusix*, *Winfun*, *Modelus*, *Régua e Compasso, Poly*, *Thales*, *WinMat*, *GeoGebra*, e muitos outros. Alguns têm versão em português, outros em espanhol.

1.2 O GeoGebra

O GeoGebra é um dos programas mais completos para o ensino de matemática, pois reúne geometria, álgebra, aritmética e cálculo, podendo ser utilizado em diversos níveis de ensino. É livre e possui uma plataforma de visualização atraente com uma área de trabalho de fácil manuseio.

A versão inicial do programa foi criada em 2001, por MarkusHohenwarter, como tese de doutorado da Universidade de Salzburg, Áustria, e traduzido para o português por J. Geraldes.

O objetivo do Dr. Hohenwarter ao desenvolver o *software* foi encontrar uma ferramenta que auxiliasse no ensino da matemática, por meio de uma combinação entre entes geométricos e algébricos. Nesse sentido, o GeoGebra tem uma janela gráfica que permite visualizar e fazer uma conexão entre a fórmula algébrica e sua respectiva representação geométrica, simultaneamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.

Entre suas funcionalidades, fáceis de aplicar, mesmo para os iniciantes, está a alternativa de mudar as cores, as formas e espessuras de linhas, escolhendo exibi-las ou não, trabalhar com geometria dinâmica e fazer animação. Além de possuir todas as características que outros *softwares* de geometria têm. Outra grande vantagem é que, além de agilizar os processos de construção gráfica, há precisão em sua construção, algo difícil de conseguir com apenas régua e compasso.

Para baixar a última versão do *software* GeoGebra, basta acessar a página oficial do programa: www.GeoGebra.org e fazer o *Download*. Uma vez baixado o arquivo, basta seguir as instruções de instalação. Caso não consiga executar o programa, será necessário baixar a máquina virtual Java, a partir do sítiowww.java.com/getjava.

No próprio site www.GeoGebra.org é possível, clicando em *HELP*,baixar manuais que ajudarão a conhecer as funcionalidades do *software*, bem como dicas e truques que irão familiarizar o programa com o usuário.

Especificamente para este trabalho, será necessário o conhecimento de uma pequena parte das funcionalidades do GeoGebra.

1.2.1 Conhecendo Algumas Funções do GeoGebra

Ao abrir o programa será apresentada uma janela com duas telas, uma algébrica e outra geométrica denominada “Janela de Visualização” (ver figura 1.1). Daí o nome do programa.

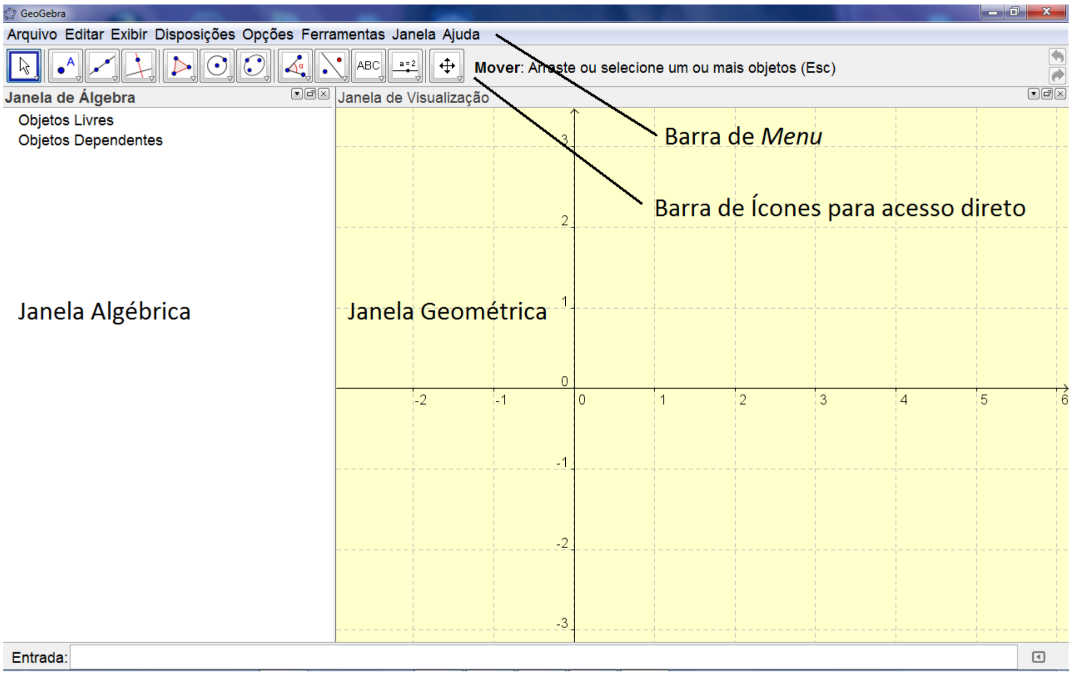


Figura 1.1: Janela inicial do GeoGebra. Na parte de cima, as barras de *menu* e de ícones. À esquerda a Janela Algébrica e à direita a Janela Geométrica onde são plotados os entes geométricos.

Na parte inferior tem o campo “Entrada” onde são digitados os comandos algébricos. Ao confirmar o comando, este aparecerá na “Janela Algébrica” e, caso haja um objeto geométrico correspondente, será apresentado na “Janela de Visualização”. Por exemplo, se for digitado $f(x) = 2x + 4$, ao teclar “Enter” aparecerá a representação dessa função na “Janela de Visualização” como ilustrado na figura 1.2.

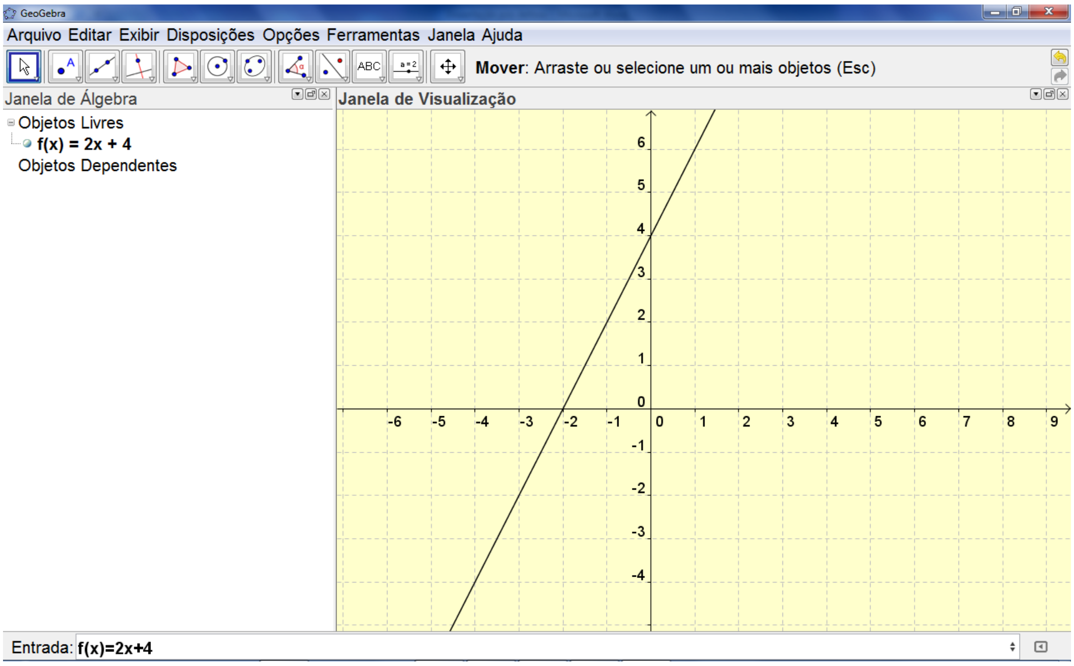


Figura 1.2: O comando digitado no campo “Entrada” será mostrado na “Janela de Álgebra” e, caso tenha um ente geométrico correspondente, será plotado na “Janela de Visualização”. No exemplo tem-se a função $f(x) = 2x + 4$ com a respectiva representação geométrica.

Na parte de cima da janela do GeoGebra tem-se a barra de menu, onde é possível, por exemplo, abrir ou salvar arquivos. A barra logo abaixo possui uma série de ícones que substituem a digitação. No exemplo anterior, a função digitada intersecta o eixo x na abscissa -2 e o eixo y na ordenada 4. Assim, usando o ícone “Reta definida por Dois Pontos”, clica-se seguidamente nos dois pontos e aparecerá tanto a reta na “Janela de Visualização” quanto sua equação na “Janela de Álgebra” como na figura 1.3.

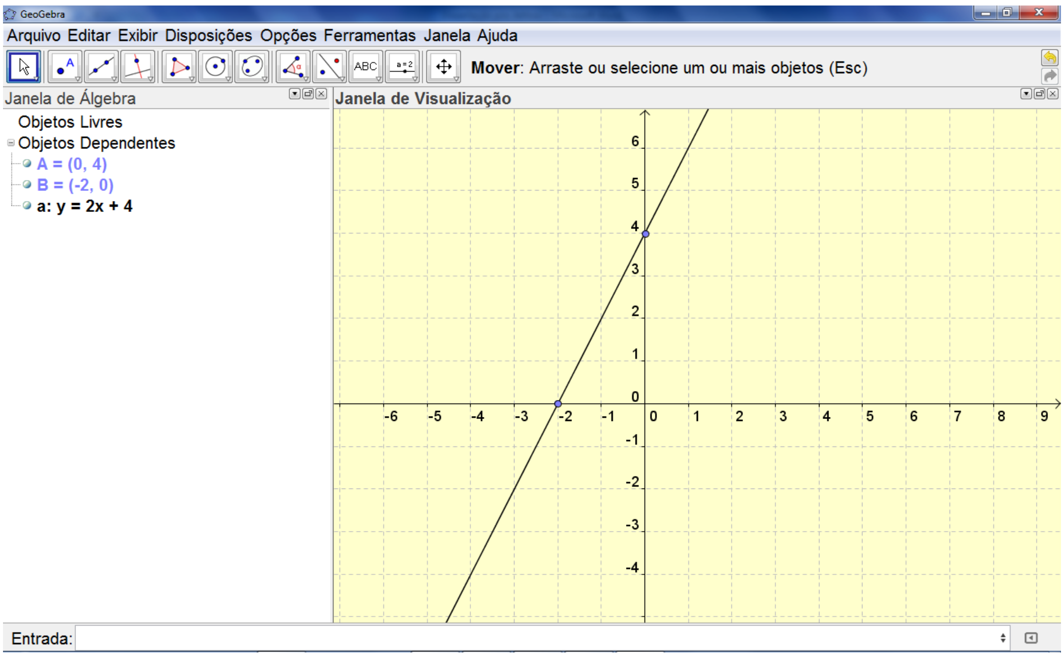


Figura 1.3: Dados dois pontos pode-se usar o terceiro ícone para definir uma reta que passa por dois pontos.

Para a construção dos arquivos que serão utilizados no decorrer do trabalho é necessário conhecer alguns ícones. Estes estão representados, nas próximas quatro figuras, com a respectiva função.

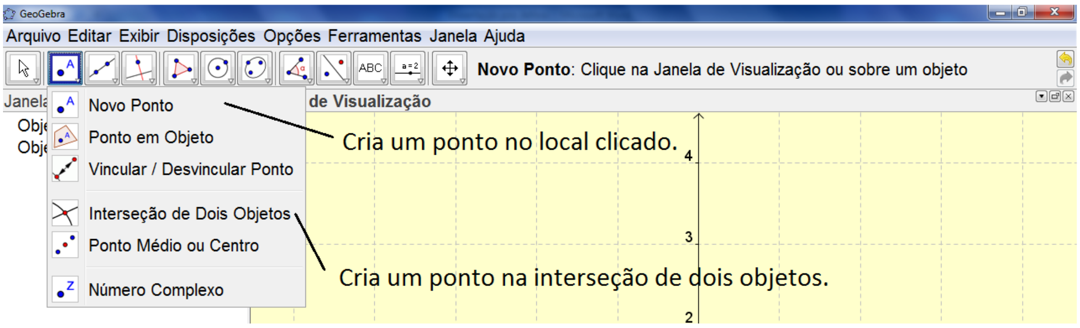


Figura 1.4: O ícone “Novo Ponto” cria um ponto no exato local da “Janela de Visualização” onde for clicado. Já o ícone “Interseção de Dois Objetos” cria um ponto na interseção de dois objetos.

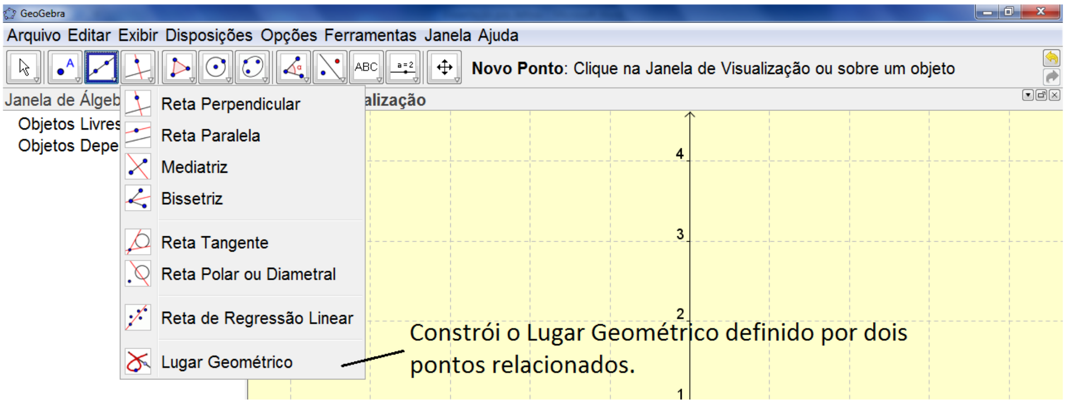


Figura 1.5: O ícone “Lugar Geométrico” constrói o lugar geométrico definido pelo movimento de dois pontos.

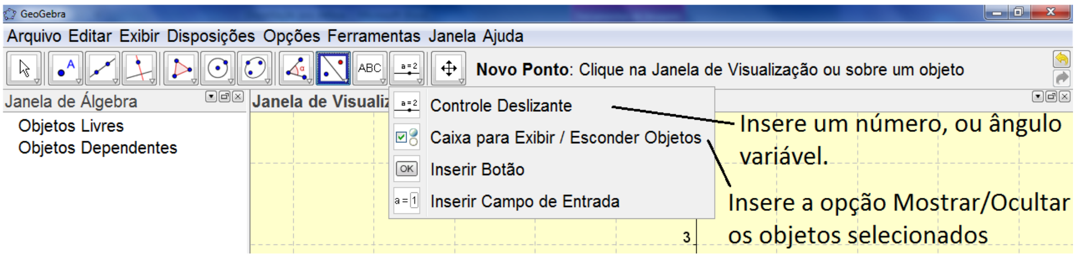


Figura 1.6: O ícone “Controle Deslizante” tem a função de inserir um número ou ângulo que pode ser variado a qualquer momento. Já o ícone “Caixa para Esconder / Exibir Objetos” exibe, na “Janela de Visualização”, a opção de exibir ou ocultar os objetos previamente selecionados.

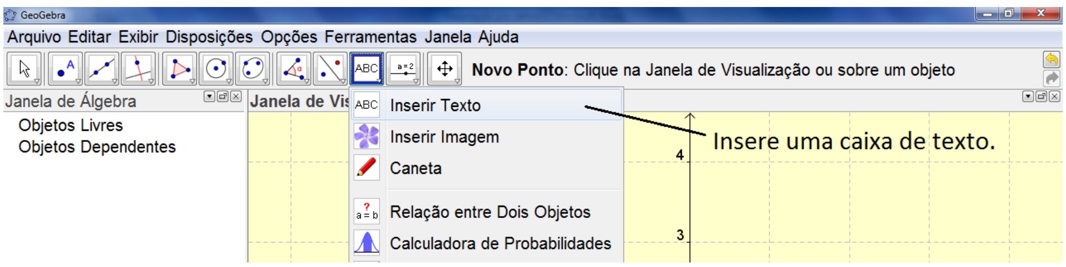


Figura 1.7: O ícone “Inserir Texto” abre uma caixa de texto no local clicado. O texto pode ser, inclusive, em linguagem *Latex*.

CAPÍTULO 2

2 Estudo das Funções Afim e Quadrática usando o GeoGebra

Em seu livro, Matemática-Volume Único, Luiz Roberto Dante introduz o ensinode funções com uma exploração intuitiva por meio de exemplos, de situações simples ecomuns, que são familiares aos alunos, para que eles possam associar o conteúdo a serministrado com a sua experiência de vida. É feita uma relação com a teoria de conjuntos edefinidos os conceitos de domínio, contradomínio, imagem, representação algébrica atravésde fórmulas matemáticas e representação gráfica com uma comparação com os conceitoscitados anteriormente. Assim, segue-se como na maioria dos livros didáticos, definindoos tipos de funções e fazendo estudo das funções polinomiais, algébricas, trigonométricas,e outras mais.Esta abordagem é,geralmente, a usada por todos os professores do ensinomédio, em todo o país.

O que se propõe à frente não é uma mudança nessa abordagem ou sequência,mas uma sugestão, de como enriquecer as aulas, usando um instrumento que fará comque o aluno participe da construção de seu saber. O que há de novo é a metodologia, queengloba o uso do GeoGebra para o ensino das funções Afim e Quadrática.

2.1 Função Afim

Existem muitos exemplos, no dia a dia, em que as funções estão presentes. Oprofessor deve sempre partir de uma situação problema e usá-la para ministrar algo novo.Quando se fala da relação entre o tamanho de uma caixa e o custo para produzi-la, entre otempo de funcionamento de uma máquina e o produto resultante, entre o comprimento deuma circunferência e o tamanho do raio, são exemplos defunções. Algumas, em particular, têm características interessantes, que podem fazercom que se presuma com facilidade certos dados.

A função afim é um tipo de função bem simples. Quando se fala, por exemplo,do salário de um funcionário de uma loja, que recebe uma parte fixa e uma parte variável,que corresponde a uma determinada comissão sobre o total de vendas que ele faz duranteo mês, trata-se de um exemplo de função afim.

Definição[2]

A função afim é uma função algébrica do tipo f :ℝ→ ℝ;$f(x) = ax + b$. Sua curva característica é uma reta. O coeficiente a indica a inclinação da reta, daí o termo "coeficiente angular". Também pode ser interpretado como taxa de variação. Já o coeficiente b é denominado coeficiente linear e como $f(0) = a.0 + b = b$ é também a ordenada do ponto de interseção do gráfico de f com o eixo vertical.

2.1.1 Trabalhando a Função Afim no GeoGebra

O GeoGebra oferece alternativas de visualização animada para a melhor assimilação dos conceitos relacionados à função afim. Aqui serão expostas formas de abordar a relação entre o coeficiente a e o termo independente b com o gráfico da função, o significado de taxa de variação e análise do sinal da função usando um aplicativo do GeoGebra, de forma que o aluno descubra essas inter-relações, orientados pelas perguntas do professor.

2.1.2 Criando o arquivo GeoGebra

A seguir, uma sequência detalhada dos passos para construção de um arquivo do GeoGebra, que irá permitir uma manipulação da função .

1. Em "Entrada" digite *a=ControleDeslizante[-10,10,0.1,1,72,false,true,false,false]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; em "Básico"habilite a opção "Exibir Rótulo"; em "Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" *a<0*; no campo "Verde" *a=0* e no campo "Azul" digite *a>0.*
2. Clique no ícone "Caixa para Exibir/Esconder Objetos"; clique na "Janela de Visualização"; na janela que abrirá, em "Legenda" digite *a*; selecione o objeto *Número a*; clique em "Aplicar". Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; clique em "Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" *a<0*; no campo "Verde" *a=0* e no campo "Azul" digite *a>0.*
3. Em "Entrada" digite *b=ControleDeslizante[-10,10,0.1,1,72,false,true,false,false]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; habilite a opção "Exibir Rótulo"; em

[2] Definição comumente dada pelos livros didáticos para Função Afim.

"Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" *b<0*; no campo "Verde" *b=0* e no campo "Azul" digite *b>0.*

4. Clique no ícone "Caixa para Exibir/Esconder Objetos"; clique na "Janela de Visualização"; na janela que abrirá, em "Legenda" digite *b*; selecione o objeto *Número b*; clique em "Aplicar". Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; clique em "Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" *b<0*; no campo "Verde" *b=0* e no campo "Azul" digite *b>0.*
5. Em "Entrada" digite *f(x)=a*x+b*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre a reta; vá em "Propriedades" e formate a função aumentado espessura da linha e escolhendo uma cor.
6. Em "Entrada" digite *Texto["f(x)= "f]*; dê "Enter"; clicando e arrastando, posicione o texto em local adequado; clique com o botão direito do mouse sobre o texto e habilite a opção "Posição Absoluta na Tela". Esse procedimento também pode ser feito clicando diretamente na função que aparece na "Janela Algébrica" e arrastando para a "Janela de Visualização".
7. Clique no ícone "Caixa para Exibir/Esconder Objetos"; clique na "Janela de Visualização"; na janela que abrirá, em "Legenda" digite *Função*; selecione o objeto *Texto "texto 1"*; clique em "Aplicar".
8. Em "Entrada" digite *Texto["Raiz = "(-b/a)]*; dê "Enter"; clicando e arrastando, posicione o texto em local adequado. Clique com o botão direito do mouse sobre o texto; em "Propriedades-Básico" habilite a opção "Posição Absoluta na Tela"; em "Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" *-b/a<0*; no campo "Verde" *-b/a=0* e no campo "Azul" digite *-b/a>0.*
9. Em "Entrada" digite *P=(-b/a,0)*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o ponto criado; em "Básico"habilite a opção "Exibir Rótulo−Valor"; em "Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" " *-b/a<0*; no campo "Verde" *-b/a=0* e no campo "Azul" digite *-b/a>0.*
10. Clique no ícone "Caixa para Exibir/Esconder Objetos"; clique na "Janela de Visualização"; na janela que abrirá, em "Legenda" digite *Raíz*; selecione o objeto *Texto "texto 2"* e ; clique em "Aplicar".
11. Em "Entrada" digite *p:f(x)≤y≤0*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre *p* na "Janela de Álgebra"; em "Cor" escolha azul. Há a possibilidade em "Estilo-Preenchimento" de inserir uma figura. Assim pode-se escolher uma figura que faça alusão ao sinal da função.
12. Clique no ícone "Caixa para Exibir/Esconder Objetos"; clique na "Janela de Visualização"; na janela que abrirá, em "Legenda" digite *f(x)>0*; selecione o objeto *Desigualdade p*; clique em "Aplicar".
13. Em "Entrada" digite *n:0 ≤y≤ f(x)*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre *p* na "Janela de Álgebra"; em "Cor" escolha vermelha. Há a possibilidade em "Estilo-

Preenchimento" de inserir uma figura. Assim pode-se escolher uma figura que faça alusão ao sinal da função.

14. Clique no ícone "Caixa para Exibir/Esconder Objetos"; clique na "Janela de Visualização"; na janela que abrirá, em "Legenda" digite *f(x)<0*; selecione o objeto *Desigualdade n*; clique em "Aplicar".
15. Em "Entrada" digite *c=ControleDeslizante[-15,15,0.1,1,72,false,false,false,false]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; em "Básico"habilite a opção "Exibir Rótulo".
16. Em "Entrada" digite *d=ControleDeslizante[-15,15,0.1,1,72,false,false,false,false]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; em "Básico"habilite a opção "Exibir Rótulo".
17. Em "Entrada" digite *T_1=(-b/a+c,f(-b/a+c))*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o ponto criado; em "Básico"desabilite a opção "Exibir Rótulo".
18. Em "Entrada" digite *T_2=(-b/a+c+d,f(-b/a+c+d))*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o ponto criado; em "Básico"desabilite a opção "Exibir Rótulo".
19. Em "Entrada" digite *t_1=Segmento[T_1, (x(T_1), 0)]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o segmento criado; em "Estilo" escolha pontilhado.
20. Em "Entrada" digite *t_2=Segmento[T_2, (x(T_2), 0)]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o segmento criado; em "Estilo" escolha pontilhado.
21. Em "Entrada" digite *t_3=Segmento[T_2, (0, y(T_2))]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o segmento criado; em "Estilo" escolha pontilhado.
22. Em "Entrada" digite *t_4=Segmento[T_1, (0, y(T_1))]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o segmento criado; em "Estilo" escolha pontilhado.
23. Em "Entrada" digite *t_5=Segmento[(x(T_1), 0), (x(T_2), 0)]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o segmento criado; em "Básico-Exibir Rótulo" escolha "Valor". Formate a espessura e a cor de forma a destacar o segmento.
24. Em "Entrada" digite *t_6=Segmento[(0, y(T_1)), (0, y(T_2))]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o segmento criado; em "Básico-Exibir Rótulo" escolha "Valor". Use a formatação do item anterior.
25. Em "Entrada" digite *t=Polígono[(x(T_2),y(T_1)),T_1,T_2]*; dê "Enter".
26. Em "Entrada" digite *α=Ângulo[(x(T_2),y(T_1)),T_1,T_2]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o ângulo criado e habilite a opção "Exibir Rótulo".
27. Clique no ícone "Caixa para Exibir/Esconder Objetos"; clique na "Janela de Visualização"; na janela que abrirá, em "Legenda" digite *Taxa de Variação*; selecione os objetos T_1, T_2, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, *t*, *Número c*, *Número d*, *ângulo α*e os segmentos que compõe o triângulo t; clique em "Aplicar".

2.1.3 Fazendo o estudo da função afim

Depois de realizadas as ações anteriores, é conveniente formatar o arquivo tornando mais agradável sua interação. Para tanto pode-se esconder pontos, retas e outros objetos desnecessários na visualização. Também é interessante formatar os segmentos, pontos e o próprio gráfico da função, trocando cores espessura, omitindo alguns rótulos. Esta formatação fica a gosto.

Um exemplo, que será usado no decorrer deste artigo está ilustrado na figura 2.2.1.

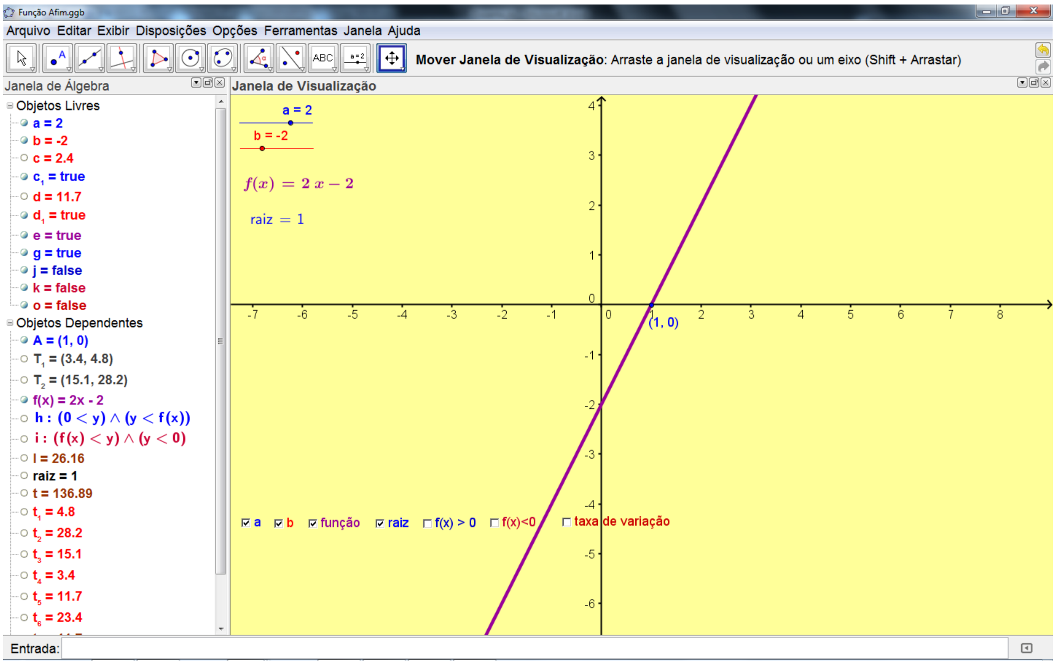


Figura 2.1.1: Arquivo "Função Afim" criado no GeoGebra. Permite o estudo da função relacionado aos parâmetros a e b, raiz da função, estudo dos sinais e taxa de variação.

Inicialmente o professor permite que os alunos explorem o arquivo, dando à eles a oportunidade de fazerem descobertas por conta própria.

Posteriormente o professor pode perguntar para os alunos o que eles acham que pode acontecer com o gráfico se alterar o valor do coeficiente angular. Deve-se orientar o pensamento deles para as alternativas de resposta, pois, o gráfico, não deixará de ser uma reta. Depois disso deve-se solicitar que variem o coeficiente a da função usando o parâmetro no aplicativo representado também pela letra a arrastando-o. Com isso espera-se que sejam capazes de construir significados e extrair as relações. Percebe-se, interativamente, que o comportamento da reta é alterado e pode-se salientar então a relação com o nome Coeficiente Angular.

Note na figura 2.1.2, a representação de algumas das retas que serão visualizadas pelo programa ao variar o valor do coeficiente a.

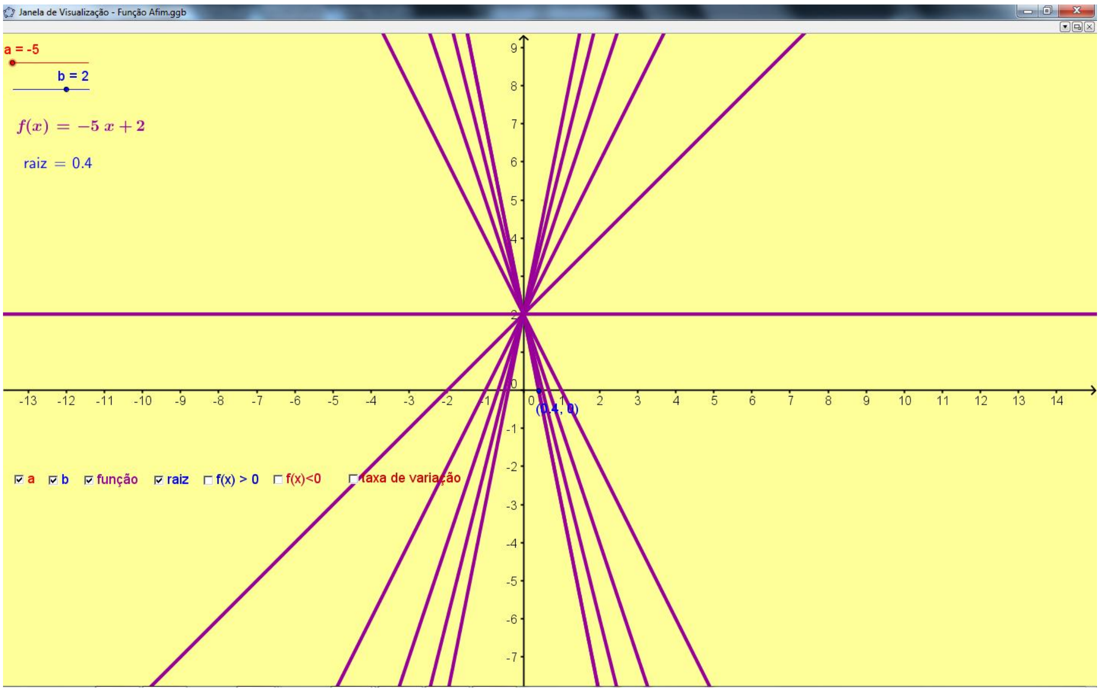


Figura 2.1.2: Alterando o valor do coeficiente *a*, o *software* apresentará, dinamicamente, as posições relativas da reta que representa a função afim.

Quando se varia o coeficiente angular,o coeficiente linear tem um comportamento específico. Os alunos devem perceber esse comportamento. Algumas perguntas podem direcioná-los.

- *Que comportamento da função permite identificar o papel do coeficiente linear no gráfico?*
- *Que ponto no gráfico está relacionado com o coeficiente linear?*
- *Quais as coordenadas do ponto em torno do qual o gráfico gira?*
- *Quando se varia o coeficiente angular têm-se mudanças na inclinação da reta em torno de um ponto, no caso o ponto (0,b), o que pode se esperar ao fixar o coeficiente angular e variar o termo independente?*

Ao variar o coeficiente b da função, tem-se interativamente, o comportamento da reta. Note, na figura 2.1.3, a representação de algumas das retas que serão apresentadas pelo programa ao variar o valor do coeficiente b.

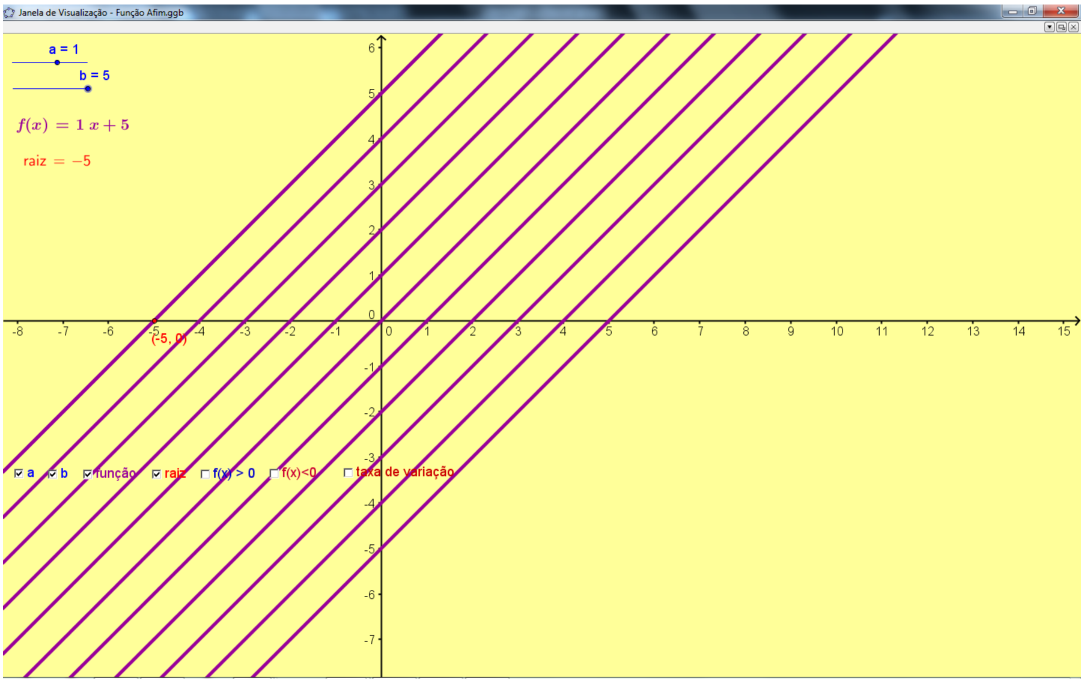


Figura 2.1.3: Alterando o valor do termo independente, o *software* apresentará, dinamicamente, as posições relativas da reta que representa a função afim.

Com respeito à última pergunta, é importante verificar se a visualização atendeu às suposições dos alunos, quando se varia o valor de b. Com esta tarefa pode-se concluir melhor que o coeficiente b pode ser identificado como o ponto de interseção com o eixo y. Feito isso, é conveniente que aluno altere os dois parâmetros para concluir que b está relacionado, também, com a translação, exclusivamente, vertical do gráfico da função.

Outro aspecto é verificar a raiz da função como o ponto de interseção da reta com o eixo x. Percebe-se que quando se varia os coeficientes geralmente a raiz também varia. Pode-se perguntar:

- *Como fazer para que a raiz seja fixa e exista uma família de funções afim que tem a mesma raiz?*

Outra opção de atividade é trabalhar com os casos particulares da função afim. Quando $a = 1$ e $b = 0$, tem-se uma função identidade e verificar suas características. Quando a real e $b = 0$, tem-se uma função linear e estudar suas características gerais.

O aplicativo usado aqui permite também o estudo do sinal da Função Afim de maneira bem simples, pois seu *designe* pode ser formatado para facilitar a interpretação. Veja na figura

2.1.4 que há cores e sinais distintos que orientam o pensamento para melhor percepção dos intervalos onde f é positiva ou negativa.

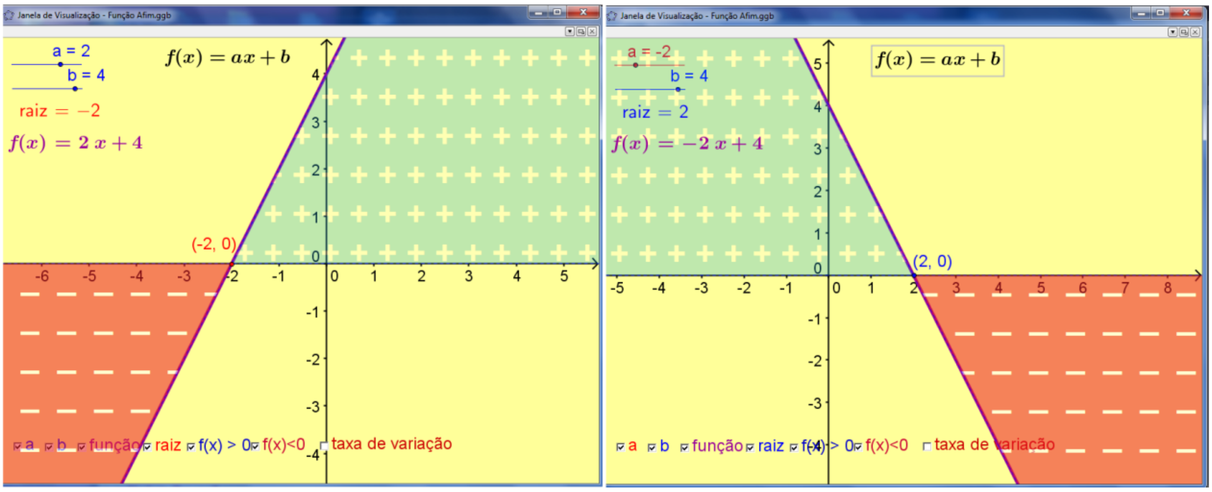


Figura 2.1.4: Estudo do sinal da Função Afim. À esquerda, como $a > 0$, a função é negativa para $x < -\frac{b}{a}$ e positiva para $x > -\frac{b}{a}$. Já à direita, como $a < 0$, a função é negativa para $x > -\frac{b}{a}$ e positiva para $x < -\frac{b}{a}$.

O que caracteriza a função afim é a taxa de variação[3] dada por $taxa\ de\ variação = tx_v = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ser constante. A simples demonstração a seguir pode ajudar os alunos a confirmar essa propriedade e relacionar a taxa de variação com o coeficiente angular.

$$tx_v = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{a.x_2+b-(a.x_1+b)}{x_2-x_1} = \frac{a.x_2+b-a.x_1-b}{x_2-x_1} = \frac{a.x_2-a.x_1}{x_2-x_1} = \frac{a.(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = a.$$

No aplicativo gerado no GeoGebra há a possibilidade de fazer a experimentação e reafirmar visualmente a relação entre a taxa de variação e o coeficiente angular.

[3] Simplificadamente, “taxa de variação” é uma comparação do crescimento da variável dependente com relação à variação da variável independente.

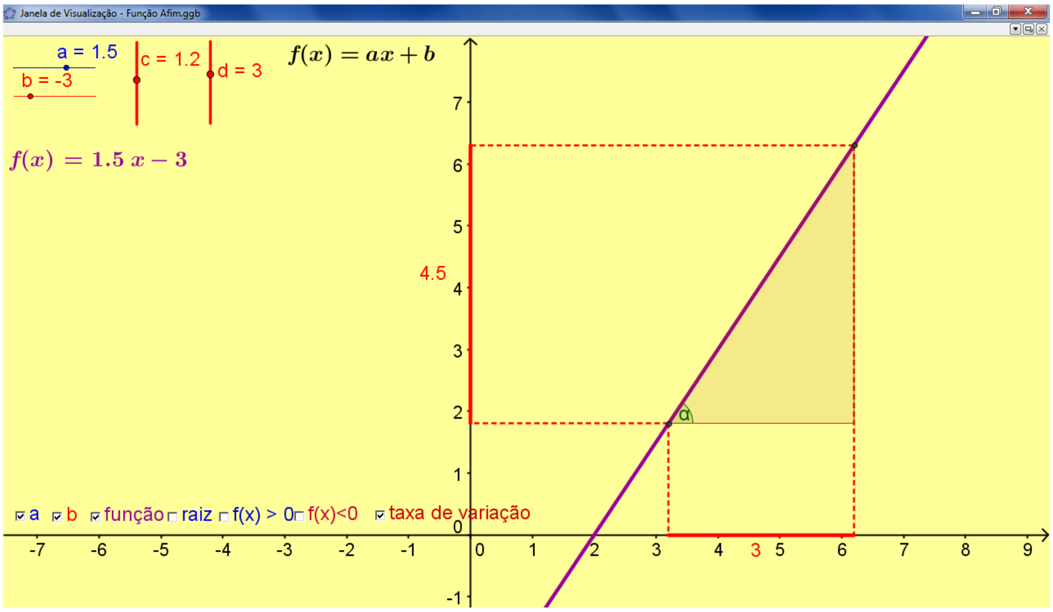


Figura 2.1.5: O aplicativo, criado no GeoGebra, permite inferir que a taxa de variação, o coeficiente angular da reta e a tangente do ângulo entre a reta e a horizontal têm valores iguais. Na ilustração, ambos têm valor dado por $\frac{4,5}{3} = 1,5$.

O mais importante é permitir que os educandos possam "brincar" com as figuras e a partir de sua manipulação, experimentação e dedução empírica descobrir as propriedades da função afim.

2.2 Função Quadrática

Em um jogo de futebol quando a bola é lançada ao ar em um lançamento longo, ao esguichar água obliquamente com uma mangueira, ao lançar uma bala de canhão no ar, aparecem similaridades entre os percursos desses objetos no espaço. René Descartes (1596-1650) foi o primeiro a associar as formas geométricas com fórmulas algébricas. O caminho determinado pelos objetos anteriores no espaço é uma curva denominada parábola. Se for observado no plano, a parábola representa o gráfico de uma Função Quadrática ouFunção Polinomial do Segundo Grau.

O termo parábola é muito comum em engenharia eletrônica e física quando se fala em antena parabólica, ou na geração de energia elétrica usando propriedades de espelhos parabólicos onde os raios solares que incidem sobre o parabolóide espelhado são refletidos para o foco, propriedades estas exclusivas da parábola.

Definição[4]

A função quadrática é uma função algébrica do tipo $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$; $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, cuja curva característica é a parábola. Esta possui uma série de termos importantes como concavidade, valor máximo quando a concavidade é voltada para baixo, valor mínimo quando a concavidade é voltada para cima, coordenadas do vértice, eixo de simetria, discriminante que fornece o número de raízes, etc.

2.2.1 Criando o arquivo GeoGebra

O arquivo GeoGebra que será utilizado para análise desta função, tem sua construção dada pelos passos a seguir.

1. Em "Entrada" digite *a=ControleDeslizante[-10,10,0.1,1,72,false,true,false,false]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; em "Básico"habilite a opção "Exibir Rótulo"; em "Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" *a<0*; no campo "Verde" *a=0* e no campo "Azul" digite *a>0.*
2. Clique no ícone "Caixa para Exibir/Esconder Objetos"; clique na "Janela de Visualização"; na janela que abrirá, em "Legenda" digite *a*; selecione o objeto *Número a*; clique em "Aplicar". Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; clique em "Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" *a<0*; no campo "Verde" *a=0* e no campo "Azul" digite *a>0.*
3. Em "Entrada" digite *b=ControleDeslizante[-10,10,0.1,1,72,false,true,false,false]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; habilite a opção "Exibir Rótulo"; em "Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" *b<0*; no campo "Verde" *b=0* e no campo "Azul" digite *b>0.*
4. Clique no ícone "Caixa para Exibir/Esconder Objetos"; clique na "Janela de Visualização"; na janela que abrirá, em "Legenda" digite *b*; selecione o objeto *Número b*; clique em "Aplicar". Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; clique em "Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" *b<0*; no campo "Verde" *b=0* e no campo "Azul" digite *b>0.*
5. Em "Entrada" digite *c=ControleDeslizante[-10,10,0.1,1,72,false,true,false,false]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; habilite a opção "Exibir Rótulo"; em

[4] Definição comumente presente nos livros didáticos.

"Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" $c<0$; no campo "Verde" $c=0$ e no campo "Azul" digite $c>0$.

6. Clique no ícone "Caixa para Exibir/Esconder Objetos"; clique na "Janela de Visualização"; na janela que abrirá, em "Legenda" digite *c*; selecione o objeto *Número c*; clique em "Aplicar". Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; clique em "Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" $c<0$; no campo "Verde" $c=0$ e no campo "Azul" digite $c>0$.
7. Em "Entrada" digite $f(x)=a\ x^2+b\ x+c$; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; vá em "Propriedades" e formate a função aumentado espessura da linha e escolhendo uma cor.
8. Em "Entrada" digite *Texto["f(x)= "f]*; dê "Enter"; clicando e arrastando, posicione o texto em local adequado; clique com o botão direito do mouse sobre o texto e habilite a opção "Posição Absoluta na Tela". Esse procedimento também pode ser feito clicando diretamente na função que aparece na "Janela Algébrica" e arrastando para a "Janela de Visualização".
9. Clique no ícone "Caixa para Exibir/Esconder Objetos"; clique na "Janela de Visualização"; na janela que abrirá, em "Legenda" digite *Função*; selecione o objeto *Texto "texto 1"*; clique em "Aplicar".
10. Em "Entrada" digite $\Delta=b^2 - 4a\ c$; dê "Enter"; clicando e arrastando, posicione o texto em local adequado; clique com o botão direito do mouse sobre o texto e habilite a opção "Posição Absoluta na Tela". Vá em "Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" $\Delta <0$; no campo "Verde" $\Delta =0$ e no campo "Azul" digite $\Delta >0$.
11. Clique no ícone "Caixa para Exibir/Esconder Objetos"; clique na "Janela de Visualização"; na janela que abrirá, em "Legenda" digite *Delta*; selecione o objeto *Texto "texto 2"*; clique em "Aplicar".
12. Em "Entrada" digite *x_1 = "(-b+sqrt(Δ))/(2a)]*; dê "Enter"; clicando e arrastando, posicione o texto em local adequado. Clique com o botão direito do mouse sobre o texto; em "Propriedades-Básico" habilite a opção "Posição Absoluta na Tela"; em "Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" *x_1<0*; no campo "Verde" *x_1=0* e no campo "Azul" digite *x_1>0*.
13. Em "Entrada" digite *x_2 = "(-b-sqrt(Δ))/(2a)]*; dê "Enter"; clicando e arrastando, posicione o texto em local adequado. Clique com o botão direito do mouse sobre o texto; em "Propriedades-Básico" habilite a opção "Posição Absoluta na Tela"; em "Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" *x_2<0*; no campo "Verde" *x_2=0* e no campo "Azul" digite *x_2>0*.
14. Em "Entrada" digite *Raiz[f]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre os pontos criados; em "Básico"habilite a opção "Exibir Rótulo−Valor".

15. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda” digite *Raízes*; selecione os objetos *Texto “texto 3”, Texto “texto 4”* e os dois pontos criados no item 14 ; clique em “Aplicar”.
16. Em “Entrada” digite *V=((-b)/(2a),(-Δ)/(4a))*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o ponto criado; em “Básico”habilite a opção “Exibir Rótulo−Nome e Valor”.
17. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda” digite *Vértice*; selecione o ponto *V*; clique em “Aplicar”.
18. Em “Entrada” digite $g(x)=-a\ x^2+c$; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a curva criada; em “Básico”habilite a opção “Exibir Rótulo−Nome e Valor”. Use formatação diferente da usada para f(x).
19. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda” digite *Lugar Geométrico*; selecione a *Função g*; clique em “Aplicar”.
20. Em “Entrada” digite *p:f(x)≤y≤0*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre *p* na “Janela de Álgebra”; em “Cor” escolha azul. Há a possibilidade em “Estilo-Preenchimento” de inserir uma figura. Assim pode-se escolher uma figura que faça alusão ao sinal da função.
21. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda” digite *f(x)>0*; selecione o objeto *Desigualdade p*; clique em “Aplicar”.
22. Em “Entrada” digite *n:0 ≤y≤ f(x)*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre *p* na “Janela de Álgebra”; em “Cor” escolha vermelha. Há a possibilidade em “Estilo-Preenchimento” de inserir uma figura. Assim pode-se escolher uma figura que faça alusão ao sinal da função.
23. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda” digite *f(x)<0*; selecione o objeto *Desigualdade n*; clique em “Aplicar”.
24. Em “Entrada” digite *q:x=-b/(2a)*; dê “Enter”. Use o formato pontilhado.
25. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda” digite *Eixo de Simetria*; selecione a *Função q*; clique em “Aplicar”.

Um exemplo, que será usado no decorrer deste trabalho está ilustrado na figura 2.2.1.

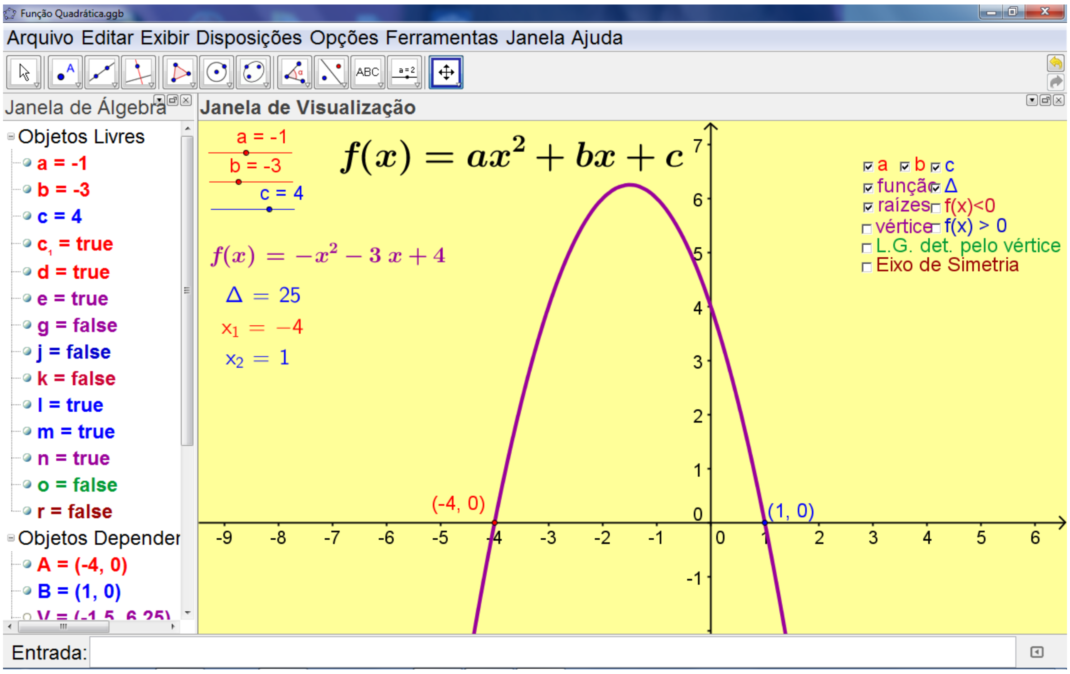


Figura 2.2.1: Função Quadrática no GeoGebra.A formatação visual de alguns elementos são particulares.

2.2.2 Manipulando a Função Quadrática no GeoGebra

Dada a oportunidade aos alunos de exploração do aplicativo, para que possam fazer conjecturas a cerca dos parâmetros, o professor conduzirá a aula destacando o comportamento gráfico paralelamente à manipulação de cada parâmetro.

Ao variar o coeficiente $a$da função, tem-se interativamente, mudança no comportamento da parábola. Note na figura 2.2.2, a representação de algumas das parábolas que serão apresentadas pelo programa ao variar o valor do coeficiente a movimentando-se seu respectivo parâmetro. Aqui, espera-se que os alunos façam conjecturas acerca do comportamento da parábola com a variação do coeficiente a.

Perguntas devem ser feitas, pelo professor, a fim de direcionar os alunos a inferir que o coeficiente a influenciará na mudança da concavidade e consequentemente na velocidade de crescimento da parábola. Por exemplo.

- *Assumindo valores positivos e crescentes para o valor do coeficiente a, o que é observado no comportamento da parábola?*
- *Assumindo valores negativos e decrescentes para o valor do coeficiente a, o que é observado no comportamento da parábola?*

- *Qual o comportamento da parábola, ao alternar valores positivos e negativos para o coeficiente* a*?*
- *Por definição de função quadrática,* $a \neq 0$. *Por quê? E se* a *assumisse o valor zero?*

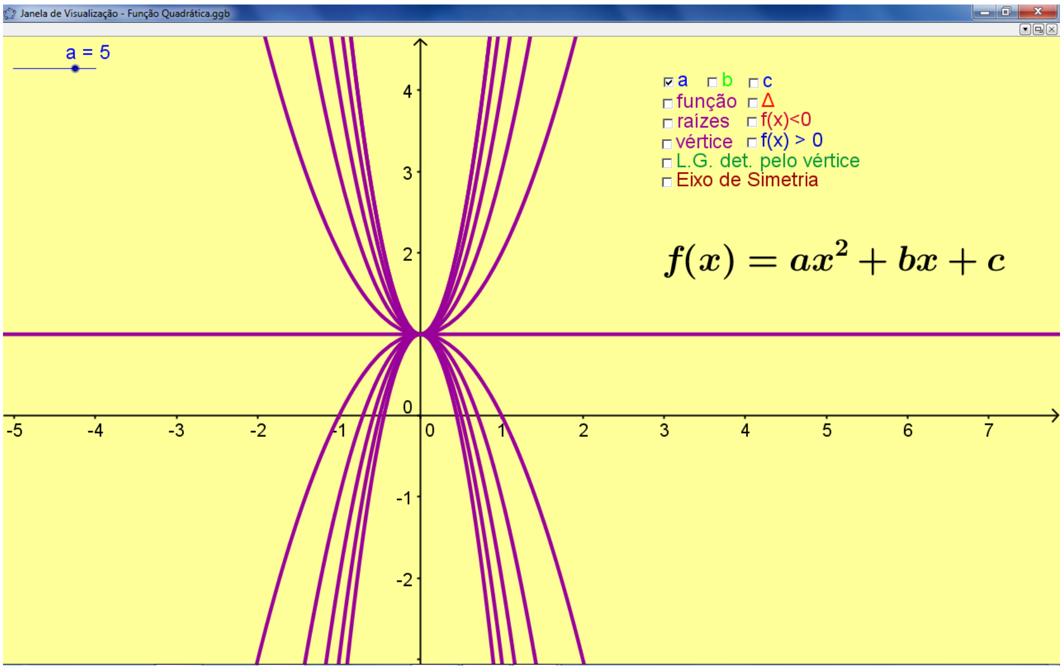


Figura 2.2.2: Comportamento da parábola ao alterar o coeficiente a para b e c fixos.

É importante que o professor não dê as respostas imediatamente, ou que utilize o programa para mostrar as características relacionadas com a variação dos coeficientes, mas que os alunos sejam guiados para descobrir pela manipulação da curva as propriedades.

Ao variar o coeficiente $b$da função, tem-se automaticamente, mudanças no comportamento da curva. Note, na figura a seguir, a representação de algumas das parábolas que serão apresentadas pelo programa ao variar o valor do coeficiente b.

Espera-se que os alunos sejam capazes de perceber que o coeficiente bé responsável pela translação horizontal e vertical da parábola. Para facilitar a compreensão alguns questionamentos são viáveis.

- *O que é observado na representação gráfica da função, quando o coeficiente b assume o valor zero?*
- *Há alguma analogia entre o sinal de b e a forma com que a parábola intersecta o eixo das ordenadas?*

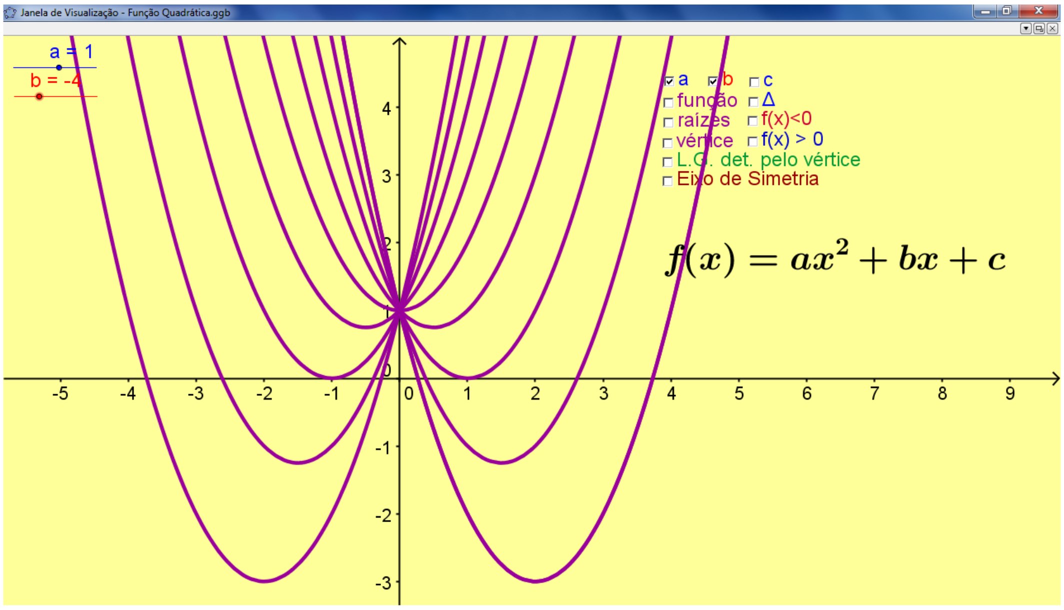


Figura 2.2.3: Comportamento da parábola ao alterar o coeficiente b para a e c fixos.

Um aspecto interessante é mostrar que, com a variação de b, o vértice da parábola movimenta-se determinando um lugar geométrico específico (ver figura 2.2.4) de equação $f(x) = -ax^2 + c$. Apesar de não ser direta tal inferência, com auxílio do *software*, consegue-se percebê-lo e inferir sua equação. Isso pode ser feito seguindo a linha de comando abaixo.

1. *Habilite a visualização do vértice no arquivo criado.*
2. *Clique com o botão direito sobre o vértice e habilite o rastro.*
3. *Altere o valor de b.*
4. *Depois de feitas as inferências pelos alunos, habilite o "L. G. det. pelo vértice" e confirme os resultados.*

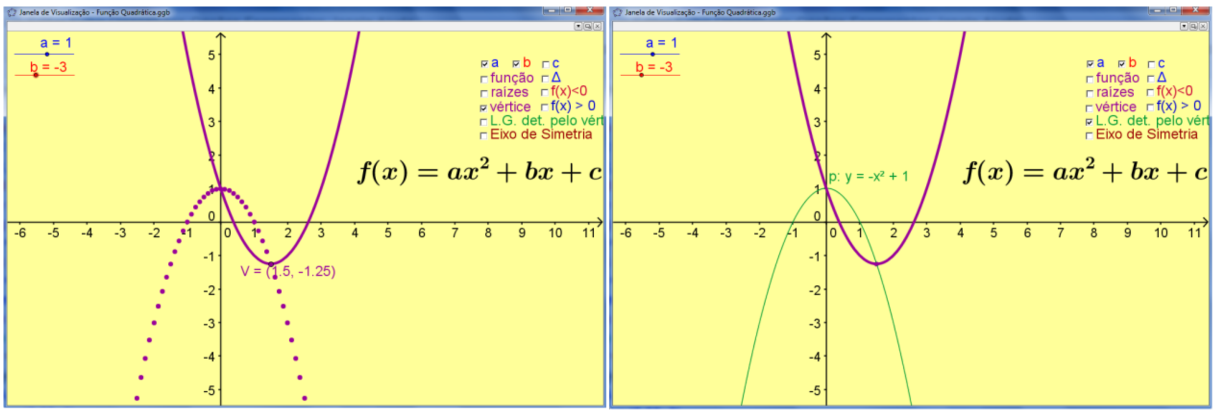


Figura 2.2.4: À esquerda percebe-se o rastro deixado pelo vértice ao alterar o valor de b. À direita o Lugar Geométrico, confirmado pelo programa, definido pelo vértice ao alterar o valor de b.

Para que o aluno perceba a translação vertical da parábola, basta alterar o valor do coeficiente c, movimentando o parâmetro no aplicativo.Note na figura 2.2.5, a representação de algumas das parábolas que serão apresentadas pelo programa ao variar somente o valor do coeficiente c.

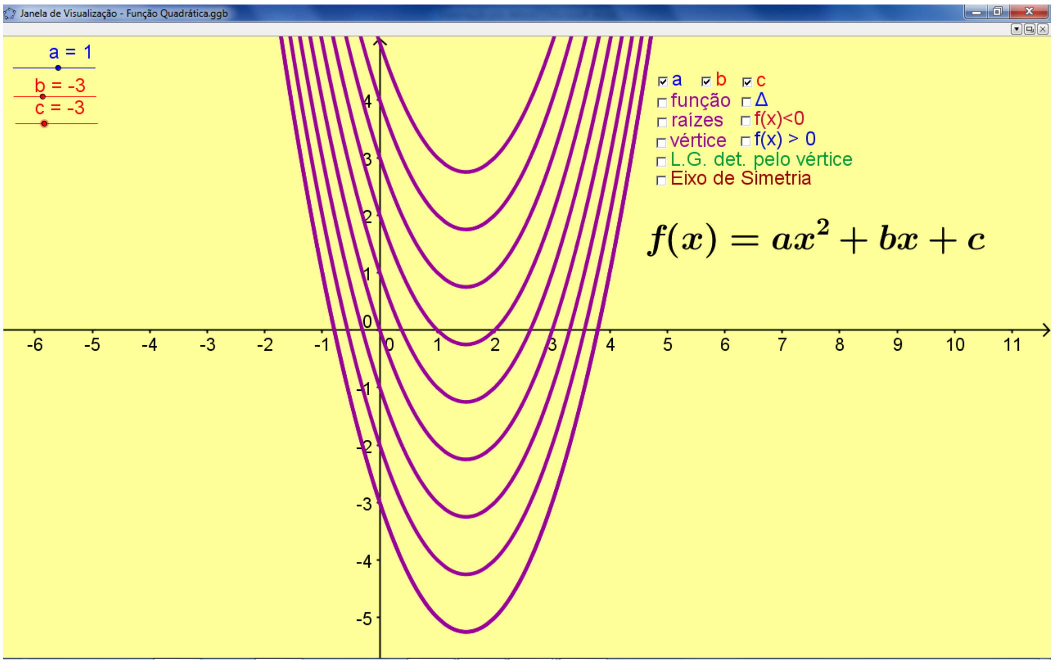


Figura 2.2.5: Comportamento da parábola ao alterar o coeficiente c para a e b fixos.

O aplicativo também possibilita um estudo detalhado acerca das raízes e do discriminante (Δ), bastando habilitá-los. Com a alteração dos coeficientes, automaticamente serão apresentados, os valores de Δ e das raízes, caso existam. Isso oferecerá a oportunidade para o aluno relacionar a existência de raízes reais, bem como sua quantidade, em função de Δ. Na figura a seguir têm-se alguns casos.

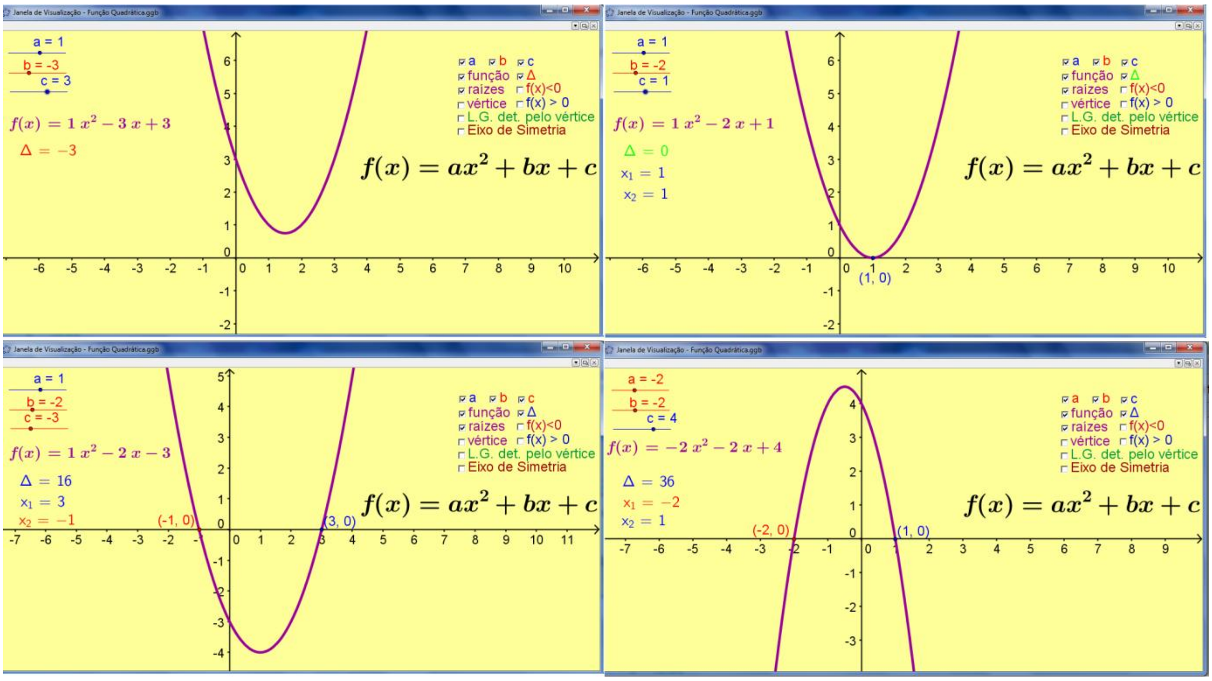


Figura 2.2.5: Estudo das Raízes da Função Quadrática em função do discriminante. No canto superior esquerdo $\Delta < 0$ verifica-se a ausência de raízes; no canto superior direito $\Delta = 0$ verifica-se raiz única; nos cantos inferiores $\Delta > 0$ e consequentemente a presença de duas raízes distintas.

Para o estudo do sinal da função é necessário habilitar os itens $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$. Com isso, aparecerá na janela de visualização, algo como na figura 2.2.6, que mostra o sinal da função para intervalos de x. Aqui também, pode-se alterar os coeficientes e, interativamente, analisar a variação dos sinais da função quadrática.

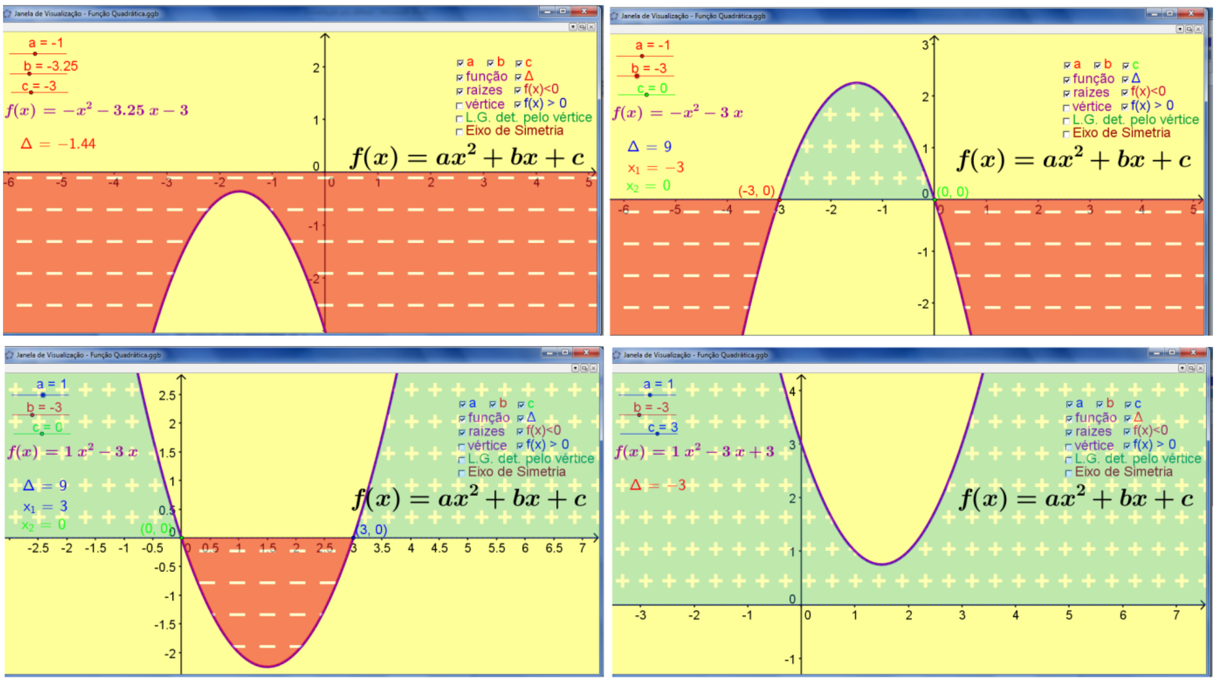
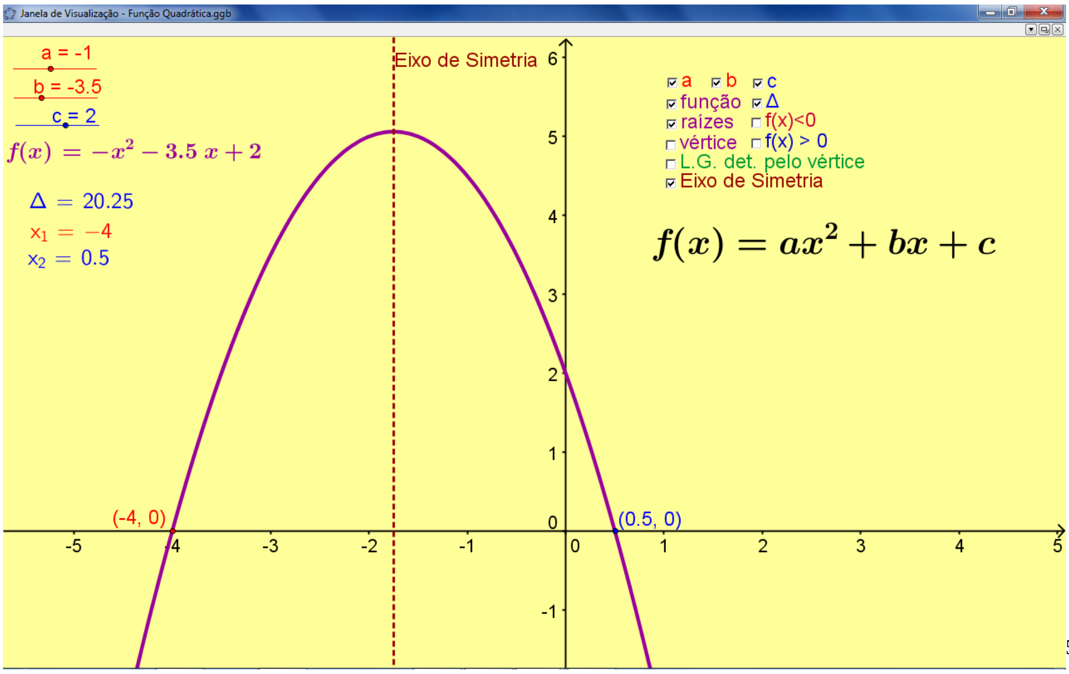


Figura 2.2.6: Estudo do sinal da Função Quadrática no GeoGebra. Observe nos cantos superior esquerdo e inferior direito, que a função é respectivamente negativa e positiva para todo domínio.

Para finalizar, o arquivo permite visualizar o Eixo de Simetria da parábola. Para tanto, basta habilitar “Eixo de Simetria” como apresentado na figura 2.2.7.



[5]

Figura 2.2.7: Eixo de Simetria é dado pela reta$x = x_v$.

[5] Eixo de Simetria é a reta de equação $x = x_v$, em que x_v representa a abscissa do vértice da parábola. Observe que o gráfico da função para $x \leq x_v$ é simétrico, com relação ao eixo de simetria, ao gráfico da função para $x \geq x_v$, daí seu nome.

CAPÍTULO 3

3 Estudo das FunçõesExponenciale Logarítmica usando o GeoGebra

As funções exponenciais e logarítmicas são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento (ou decrescimento) da variável independente é muito rápido ou muito lento.

Seu estudo torna-se mais envolvente na medida em que se busca uma abordagem conceitual e gráfica dentro de várias aplicações no campo da ciência. A estratégia para a implementação dessa abordagem está no uso de atividades investigativas. Assim, a fase de discussão é fundamental para que os alunosganhem entendimento, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e reflitam sobre seu trabalho, aumentando seu poder de argumentação.

3.1 Função Exponencial

> Uma piscina tem capacidade para $100m^3$ de água. Quando a piscina está completamente cheia, é colocado 1 kg de cloro na água. A água pura (sem cloro) continua a ser colocada na piscina a uma vazão constante, sendo o excesso de água eliminado por meio de um ladrão. Depois de 1 hora, um teste revela que ainda restam 900 g de cloro na piscina.Que quantidade de cloro restará na piscina 10 horas após sua colocação? E após meia hora da aplicação? E após **t** horas?

O exercício acima é um típico exemplo de aplicação da função exponencial. Comumente a resposta dada à primeira pergunta do problema é que, após 10 horas, não há mais cloro na piscina. Esta resposta resulta da aplicação do modelo mais simples de variação de uma grandeza, expresso por uma função afim. Segundo este, a variação sofrida em cada intervalo de 1 hora é sempre a mesma. Assim, se na primeira hora foram eliminados 100g de cloro, o mesmo deveria ocorrer em cada uma das 9 horas seguintes, fazendo com que todo o cloro seja eliminado nestas 10 horas.

No entanto, essa solução não está correta. Não é razoável admitir que a eliminação de cloro dar-se-á uma taxa constante. De fato, é mais razoável que esta taxa dependa da quantidade de cloro presente na piscina; quanto maior a quantidade de cloro, mais cloro é eliminado por unidade de tempo.

Na verdade, parece intuitivo que a quantidade eliminada por unidade de tempo seja proporcional à quantidade existente de cloro.Assim, a perda de cloro, nos períodos consecutivos de 1 hora, não é a mesma. O que é constante, em cada um destes períodos, é a variação relativa, resultando numa redução exponencial de cloro.

Definição

Denomina-se função exponencial de base a, toda função real dada por $f(x) = a^x$(com $a > 0$ e $a \neq 1$), onde x pertence ao conjunto dos números reais.Quando $a > 1$, tem-se uma função exponencial crescente e quando $0 < a < 1$ tem-se uma função exponencial decrescente.

Neste trabalho é explorado o caso mais completo em que a função é dada por $f(x) = a + b.c^{\frac{x}{d}}$, sendo a, b, c e d números reais com $c > 0$, $c \neq 1$ e $d \neq 0$.

3.1.1 Criando o arquivo GeoGebra

O arquivo GeoGebra que será utilizado para análise desta função, tem sua construção dada pelos passos a seguir.

1. Em “Entrada” digite *a=ControleDeslizante[-10,10,0.1,1,72,false,true,false,false]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; em “Básico”habilite a opção “Exibir Rótulo”; em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” *a<0*; no campo “Verde” *a=0* e no campo “Azul” digite *a>0.*
2. Em “Entrada” digite *b=ControleDeslizante[-10,10,1,0.1,72,false,true,false,false]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; habilite a opção “Exibir Rótulo”; em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” *b<0*; no campo “Verde” *b=0* e no campo “Azul” digite *b>0.*
3. Em “Entrada” digite *c=ControleDeslizante[-1,5,0.1,1,72,false,true,false,false]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; habilite a opção “Exibir Rótulo”; em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” *c<0*; no campo “Verde” *c=0* e no campo “Azul” digite *c>0.*

4. Em “Entrada” digite *d=ControleDeslizante[-10,10,0.1,1,72,false,true,false,false]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; habilite a opção “Exibir Rótulo”; em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” $d<0$; no campo “Verde” $d=0$ e no campo “Azul” digite $d>0$.
5. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda” digite *a*; selecione o objeto *Número a*; clique em “Aplicar”. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; clique em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” $a<0$; no campo “Verde” $a=0$ e no campo “Azul” digite $a>0$.
6. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda” digite *b*; selecione o objeto *Número b*; clique em “Aplicar”. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; clique em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” $b<0$; no campo “Verde” $b=0$ e no campo “Azul” digite $b>0$.
7. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda” digite *c*; selecione o objeto *Número c*; clique em “Aplicar”. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; clique em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” $c<0$; no campo “Verde” $c=0$ e no campo “Azul” digite $c>0$.
8. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda” digite *d*; selecione o objeto *Número d*; clique em “Aplicar”. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; clique em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” $d<0$; no campo “Verde” $d=0$ e no campo “Azul” digite $d>0$.
9. Em “Entrada” digite *f(x)=a + b c^(x/d)*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; vá em “Propriedades” e formate a função aumentado espessura da linha e escolhendo uma cor.
10. Em “Entrada” digite *Texto["f(x)= "f]*; dê “Enter”; clicando e arrastando, posicione o texto em local adequado; clique com o botão direito do mouse sobre o texto e habilite a opção “Posição Absoluta na Tela”. Esse procedimento também pode ser feito clicando diretamente na função que aparece na “Janela Algébrica” e arrastando para a “Janela de Visualização”.
11. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda” digite *Função*; selecione o objeto *Texto “texto 1”*; clique em “Aplicar”.
12. Em “Entrada” digite *e:x=a*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; formate-a aumentando a espessura e escolhendo “Estilo Pontilhado”; em “Básico-Exibir” escolha “Valor”.

13. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda” digite *Assíntota*; selecione o objeto *e;* clique em “Aplicar”.

Um exemplo do arquivo criado, que será usado no decorrer deste trabalho está ilustradonafigura 3.1.1.

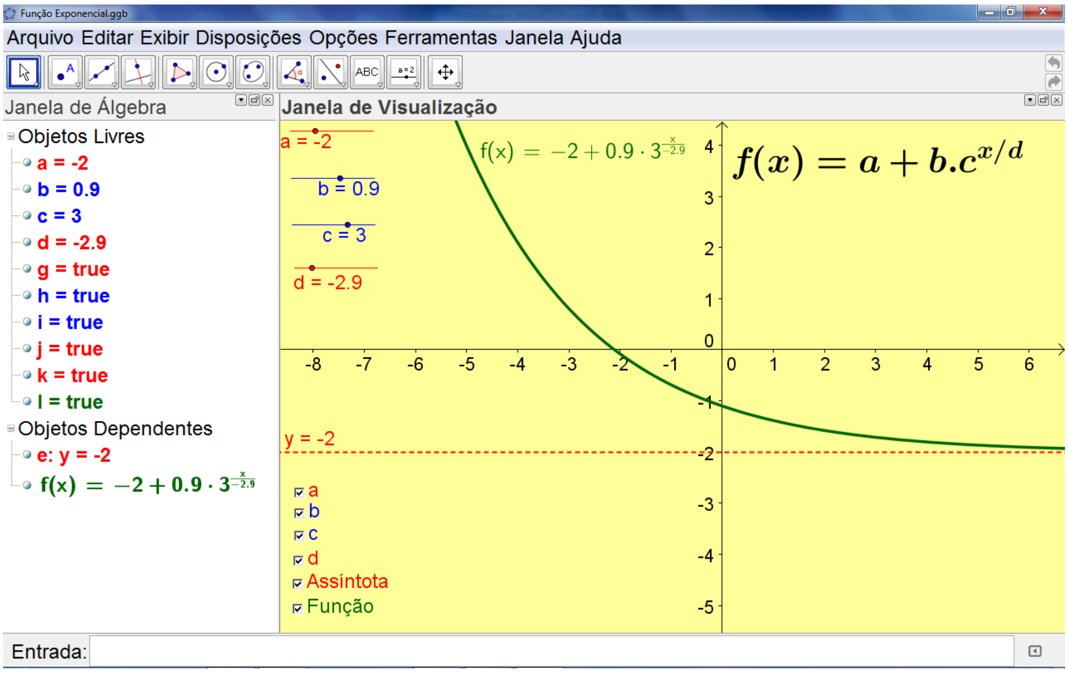


Figura 3.1.1: Função Exponencial no GeoGebra.

3.1.2 Manipulando a Função Exponencial no GeoGebra

O arquivo, construído conforme seção 3.1.1,depois de dada a oportunidade de manipulação aos alunos, pode ser explorado seguindo a mesma metodologia das perguntas, com objetivo de conduzir o aluno aos resultados esperados.

É conveniente iniciar com o parâmetro *a* e relacioná-lo com a *assíntota*[6].

- *O que ocorre com o gráfico da função ao alterar o valor do parâmetro* a*?*
- *Qual a relação entre o parâmetro a e a assíntota?*

Ao analisar o comportamento do gráfico da função (ver figura 3.1.2) com a alteração do parâmetro a, o aluno perceberá a consequente translação vertical e que a assíntota tem equação $y = a$.

[6] No ensino médio, ao estudar as funções exponenciais e logarítmicas, o conceito de assíntota é simplificado como sendo uma reta que a curva “tende” a tocar.

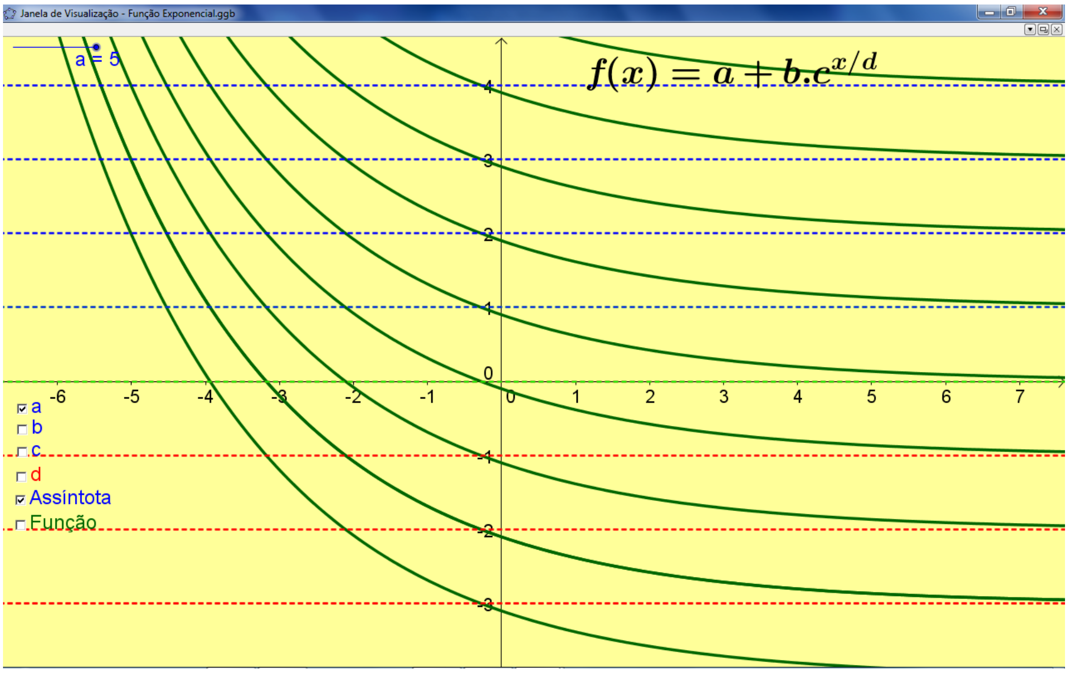


Figura 3.1.2: Ao alterar apenas o valor do parâmetro *a*, o gráfico da função é transladado verticalmente.

Para análise do parâmetro b, convém atribuir o valor zero para o parâmetro a. Algumas perguntas são convenientes.

- *Fazendo $a = 0$ e alterando o valor de$b$, o que pode ser observado?*
- *Qual a relação entre o valor de b e o ponto de interseção entre a função eo eixo das ordenadas?*
- *Qual seria a resposta da questão anterior se a também fosse alterado?*

Na figura 3.1.3permiteuma análise. O aluno observará que a função intersectará o eixo vertical no ponto $(0, a + b)$.

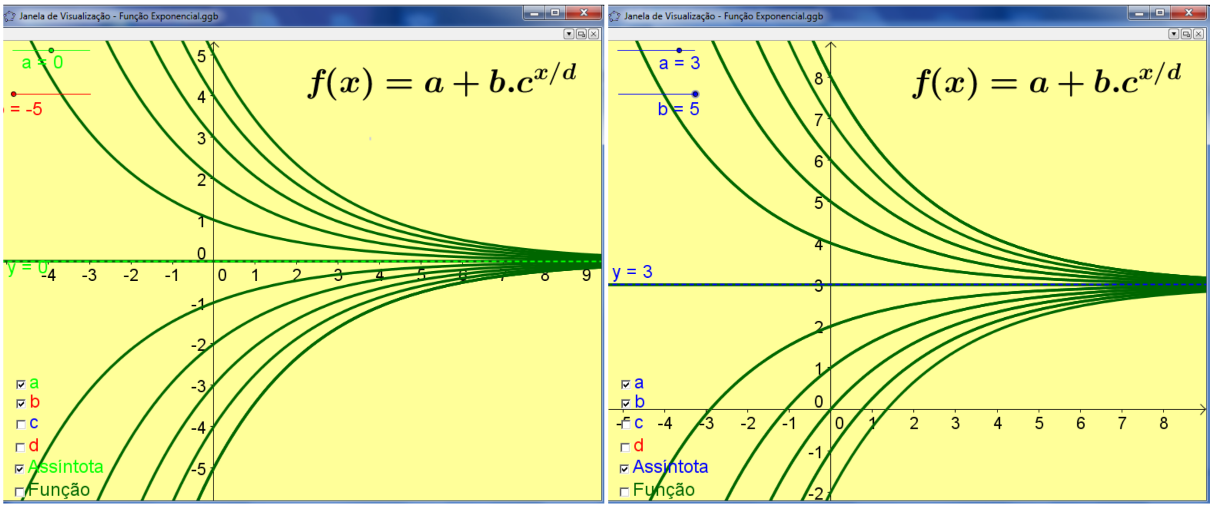


Figura 3.1.3: À esquerda, com $a = 0$, o ponto de interseção da função $y = a + b.c^{\frac{x}{d}}$, com o eixo y, tem coordenadas $(0, b)$.À direita, com a variando, o ponto de interseção da função $y = a + b.c^{\frac{x}{d}}$, com o eixo y, tem coordenadas $(0,\ a + b)$.

O termo $c^{1/d}$ trata-se da base da função exponencial $y = a + b.c^{\frac{x}{d}}$. Convém, numa análise preliminar, atribuir $d = 1$.

- *Fazendo* $d = 1$ *e alterando o valor de* c, *o que pode ser observado?*

O esperado é que o aluno distinga quando a função é crescente ou decrescente. Na figura 3.1.4 é ilustrado comportamentos importantes para o gráfico da função nesta situação.

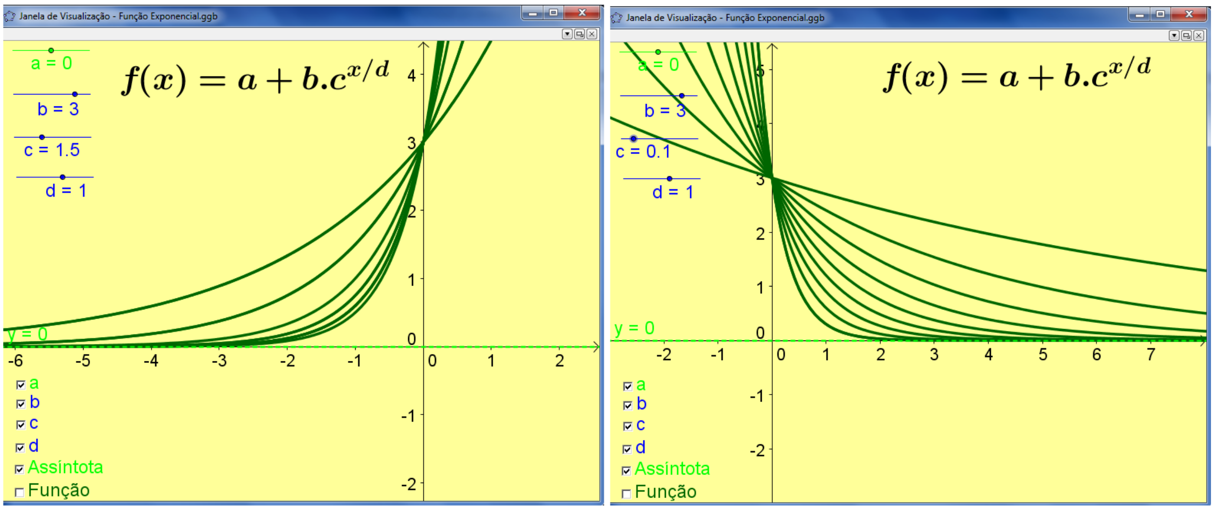


Figura 3.1.4: Base maior que um, a função é crescente (esquerda). Base entre zero e um, a função é decrescente.

É importante também questionar.

- *O que ocorre com a alteração do parâmetro* d?
- *Para* $c = 0{,}5$, *o que representa* d?

A intenção é que o aluno relacione d com a velocidade de crescimento/decrescimento da função. O segundo item é uma oportunidade de esclarecer o significado de “meia-vida[7]”. A figura 3.1.5 ilustra o que ocorre com o gráfico para algumas mudanças no parâmetro d.

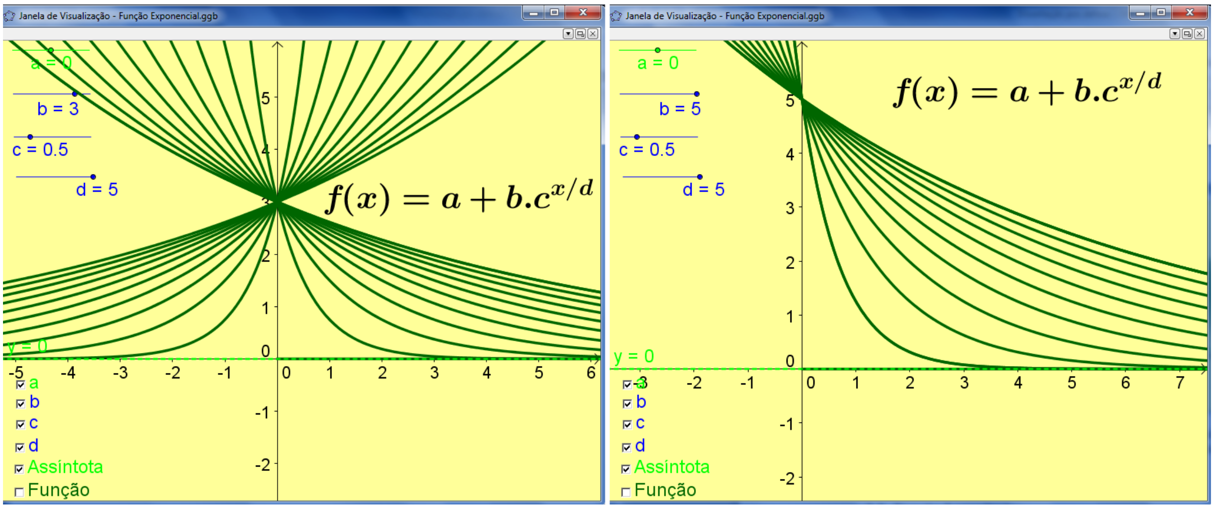


Figura 3.1.5: À esquerda o comportamento da função $y = a + b.c^{\frac{x}{d}}$ ao alterar o valor de d. À direita um caso particular em que d representa a “meia-vida”. Nesse último deve-se atribuir $c = 0{,}5$antes de alterar o valor de d.

3.2 Função Logarítmica

Comparável ao aparecimento dos computadores no século XX, os logaritmos foram introduzidos no século XVII como uma ferramenta computacional, fornecendo aos cientistas daquela época um poder de cálculo até então inimaginável. Facilitaram, principalmente, os trabalhosos cálculos trigonométricos da astronomia e da navegação.

Para agilizar esses cálculos, surgiram nessa época asprimeiras tábuas de logaritmos, inventadas independentemente por John Napier(1550-1617) e JostBürgi (1552-1632). Logo depois, Henry Briggs (1561-1631)aperfeiçoou essas tábuas, apresentando os logaritmos decimais.

A principal contribuição dos logaritmos foi a de transformar operações demultiplicação e divisão em, respectivamente, adição e subtração.

A função logarítmica, porém, nunca morrerá já que asvariações exponencial e logarítmica são partes vitais da natureza. Consequentemente,um estudo das propriedades da

[7]A meia-vida é a quantidade de tempo característica de um decaimento exponencial. Por exemplo, quando se uma pessoa ingere um medicamento, seu organismo tende a eliminá-lo. O tempo necessário para que metade desta substância seja eliminada é denominado “meia-vida”.

função logarítmica e de sua inversa, a funçãoexponencial, será sempre uma parte importante do ensino da Matemática.

Definição[8]

Dado um número real b, $b > 0$ e $b \neq 1$, chamamos função logarítmica de base b a função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = log_b x$.

3.2.1 Criando o arquivo GeoGebra

O arquivo GeoGebra que será utilizado para análise desta função, tem sua construção dada pelos passos a seguir.

1. Em "Entrada" digite *b=ControleDeslizante[0,10,0.1,0.1,72,false,true,false,false]*; dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; habilite a opção "Exibir Rótulo"; em "Propriedades−Avançado", na janela que abrirá digite no campo "Vermelho" *b<0*; no campo "Verde" *b=0* e no campo "Azul" digite *b>0.*
2. Em "Entrada" digite *f(x)=log(x)/log(b)*, dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; formate-o como preferir.
3. Clique no ícone "Novo Ponto" e insira um ponto sobre a função.
4. Em "Entrada" digite *y=x*, dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre a reta criada; formate-a como preferir.
5. Clique no ícone "Reflexão em Relação a uma Reta"; clique no ponto (provavelmente nominado A); clique na reta *y=x*. Clique no ponto criado com o botão direito do rato e habilite o rastro.
6. Em "Entrada" digite *c=Segmento[A,A'];* dê "Enter"; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; formate-o com a opção pontilhado.
7. Clique no ícone "Lugar Geométrico", clique nos dois pontos criados anteriormente. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; formate-o como preferir.
8. Clique no ícone "Caixa para Exibir/Esconder Objetos"; clique na "Janela de Visualização"; na janela que abrirá, em "Legenda", digite *Simetria*; selecione a função *y=x, os dois pontos e o segmento criados anteriormente*, clique em "Aplicar".
9. Clique no ícone "Caixa para Exibir/Esconder Objetos"; clique na "Janela de Visualização"; na janela que abrirá, em "Legenda", digite *Inversa*; selecione o lugar geométrico criado no itm 7,

---

[8]DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, volume único**. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2005.

clique em “Aplicar”. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; formate-o com o mesmo formato do item 7.

10. Clique no ícone “Inserir Texto”, ative a opção “Fórmula Latex”, digite *$ f(x)=log_{b}x $*, clique em “Ok”. Clique com o botão direito do mouse sobre o texto criado; formate-o aumentando o tamanho e cor que preferir.

Na figura 3.2.1, um exemplo do arquivo criado.

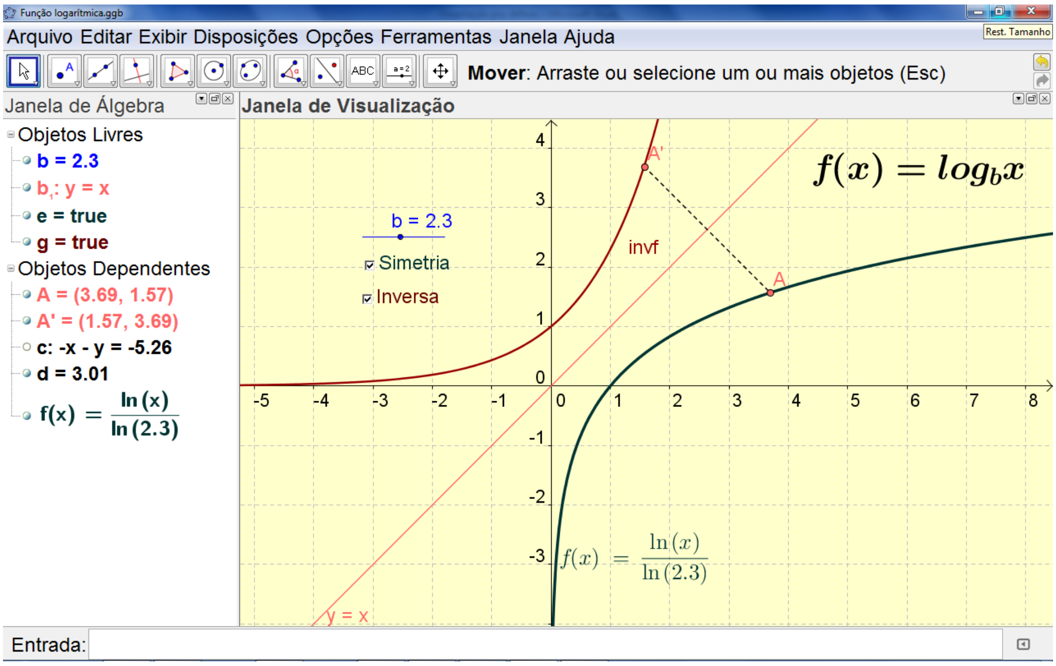


Figura 3.2.1: Representação gráfica da função $f(x) = log_b x$ no GeoGebra.

3.2.2 Manipulando a Função Logarítmica no GeoGebra

Inicialmente deve ser dada a oportunidade dos alunos manipularem o aplicativo e fazerem suas inferências particulares.

A exploração do arquivo criado junto com o professor, pode ser iniciada por meio de algumas perguntas.

- *Quais observações podem ser feitas ao alterar o valor da base b?*
- *Qual o comportamento observado para $0 < b < 1$? E para $b > 1$?*

A figura 3.2.2 mostra o gráfico da função para alguns valores de b.

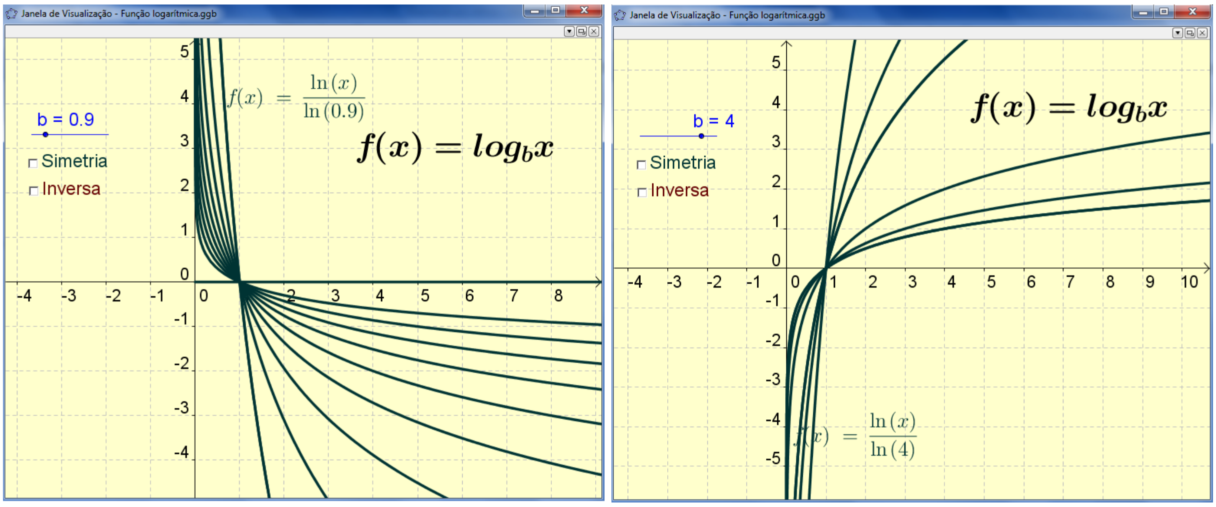


Figura 3.2.2: Alterando os valores da base b, verifica-se o comportamento do gráfico da função $f(x) = log_b x$. Crescente para $b > 1$ (à direita) e decrescente para $0 < b < 1$.

Seja$A$ um ponto sobre a curva e A' outro ponto que é simétrico ao ponto A em relação à função identidade $y = x$. Estando apenas o item “Simetria” habilitado, pode-se fazer alguns questionamentos.

- *O que é observado ao clicar e arrastar o ponto A?*
- *O que representa o rastro deixado pelo ponto A’?*

A figura 3.2.3 ilustra o resultado destas ações.

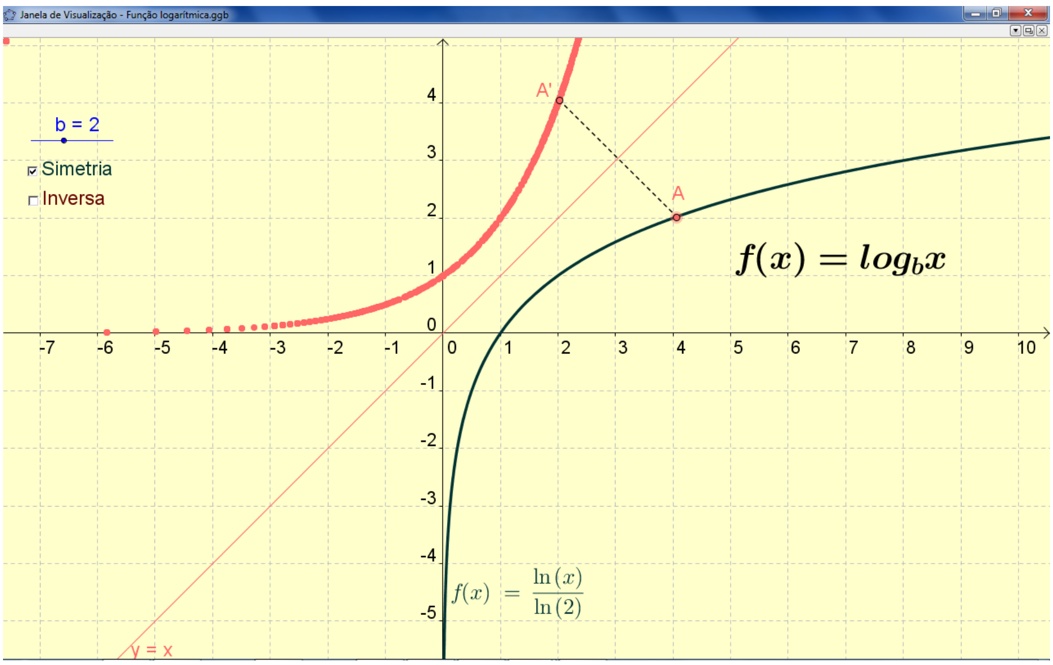


Figura 3.2.1: Rastro deixado por *A’* ao movimentar o ponto *A*, representando a inversa da função logarítmica.

Para finalizar, estando apenas o item “Inversa” habilitado, pode-se confirmar/discordar das respostas dadas aos questionamentos anteriores, já que será apresentada a inversa da função estudada. Ver figura 3.2.4.

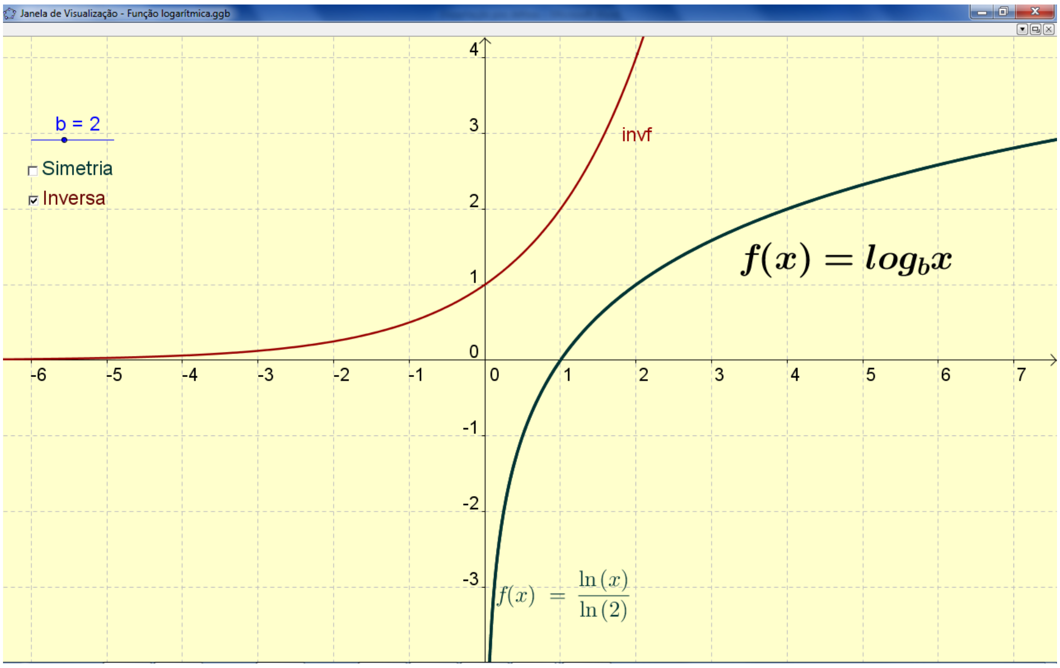


Figura 3.2.4: Representação da função $f(x) = log_b x$ e de sua inversa $f^{-1}(x) = b^x$.

Observação

Neste texto foram trabalhadas as funções $f(x) = a + b.c^{\frac{x}{d}}$ e $f(x) = log_b x$. A escolha destes formatos de função se deve pela aplicabilidade e explorações feitas no ensino médio. Obviamente, a inversa de $f(x) = a + b.c^{\frac{x}{d}}$ é dada por $f^{-1}(x) = d.log_c \frac{x-a}{b}$ que se trata de uma função que poderia confundir os alunos fugindo do objetivo da aula.

CAPÍTULO 4

4 Estudo das FunçõesTrigonométricas usando o GeoGebra

As Funções Trigonométricas ou Funções Circulares apresentam umacaracterística nova em relação às funções anteriores: a periodicidade. Estas funções ajudam a compreender fenômenos periódicos que nos rodeiam, podendo servir de modelos matemáticos em várias situações como na pressão sanguínea do coração, nas variações diárias na temperatura de um determinado local, no nível das marés em uma bacia marítima, na tensão e na corrente elétrica de uma rede, no campo eletromagnético gerado no microondas, etc.

4.1 O Ciclo Trigonométrico

É denominadacircunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico ou ainda círculo trigonométrico a circunferência orientada de centro na origem *O* de um sistema cartesiano ortogonal *xOy*. Esta, possui raio unitário (r = 1) e cujo sentido positivo é o anti-horário.

4.1.1 Trabalhando o Ciclo Trigonométrico no GeoGebra

O objetivo é ajudar o aluno que começou a estudar os conceitos de ciclo trigonométrico a identificar o valor do seno, do cosseno bem como da tangente de um ângulo, observando a periodicidade.

4.1.2 Criando o arquivo GeoGebra

O arquivo GeoGebra que será utilizado para análise desta função, tem sua construção dada pelos passos a seguir.

1. Em “Entrada” digite *ControleDeslizante[0°,360°,1°,1,72,true,true,false,false]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; habilite a opção “Exibir Rótulo”.

2. Em “Entrada” digite *λ:x²+y²=1*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a circunferência; clique em “Propriedades”; clique em “Básico”; marque a opção “Fixar Objeto” e desabilite a opção “Exibir Rótulo”.
3. Em “Entrada” digite *O=(0,0)*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; desabilite a opção “Exibir Rótulo”.
4. Em “Entrada” digite *A=(1,0)*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; desabilite a opção “Exibir Rótulo”.
5. Em “Entrada” digite *P=Girar[A,α,O]*; dê “Enter”.
6. Em “Entrada” digite *Ângulo[A,O,P]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a marca do ângulo; clique em “Propriedades”; clique em “Básico”; habilite a opção “Exibir Rótulo − Valor”.
7. Em “Entrada” digite *P_x=(x(P),0)*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o ponto criado; desabilite a opção “Exibir Rótulo”.
8. Em “Entrada” digite *P_y=(0,y(P))*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o ponto criado; desabilite a opção “Exibir Rótulo”.
9. Em “Entrada” digite *B=Interseção[x=1,Reta[O,P]]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o ponto criado; desabilite a opção “Exibir Rótulo”.
10. Em “Entrada” digite *s=Segmento[O,P_y]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o segmento criado; clique em “Propriedades−Estilo”; escolha “7” para “Espessura da Linha”; clique em “Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” *y(P)<0*; no campo “Verde” *y(P)=0* e no campo “Azul” digite *y(P)>0.*
11. Em “Entrada” digite *c=Segmento[O,P_x]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o segmento criado; clique em “Propriedades−Estilo”; escolha “7” para “Espessura da Linha”; clique em “Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” x*(P)<0*; no campo “Verde” x*(P)=0* e no campo “Azul” digite x*(P)>0.*
12. Em “Entrada” digite t*=Segmento[A,B]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o segmento criado; clique em “Propriedades−Estilo”; escolha “7” para “Espessura da Linha”; clique em “Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” *y(B)<0*; no campo “Verde” *y(B)=0* e no campo “Azul” digite *y(B)>0.*
13. Em “Entrada” digite *s_1=Segmento[P,P_y]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o segmento criado; clique em “Propriedades−Estilo”; escolha “3” para “Espessura da Linha” e “Estilo Pontilhado”; clique em “Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” *y(P)<0;* no campo “Verde” *y(P)=0* e no campo “Azul” digite *y(P)>0.*
14. Em “Entrada” digite c*_1=Segmento[P,P_x]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o segmento criado; clique em “Propriedades−Estilo”; escolha “3” para “Espessura da Linha” e “Estilo Pontilhado”; clique em “Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” x*(P)<0;* no campo “Verde” *x(P)=0* e no campo “Azul” digite *x(P)>0.*
15. Em “Entrada” digite *t_1=Segmento[P,P_y]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o segmento criado; clique em “Propriedades−Estilo”; escolha “3” para “Espessura da Linha” e “Estilo Pontilhado”; clique em “Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” *y(B)<0;* no campo “Verde” *y(B)=0* e no campo “Azul” digite *y(B)>0.*

16. Em “Entrada” digite *Texto["sen(α)= "sin(α)]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o texto criado; clique em “Propriedades−Posição”; selecione o ponto P_y; clique em “Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” *y(P)<0*; no campo “Verde” *y(P)=0* e no campo “Azul” digite *y(P)>0*.
17. Em “Entrada” digite *Texto["cos(α)= "cos(α)]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o texto criado; clique em “Propriedades−Posição”; selecione o ponto P_x; clique em “Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” *x(P)<0*; no campo “Verde” *x(P)=0* e no campo “Azul” digite *x(P)>0*.
18. Em “Entrada” digite *Texto["tg(α)= "tan(α)]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o texto criado; clique em “Propriedades−Posição”; selecione o ponto B; clique em “Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” *y(B)<0*; no campo “Verde” *y(B)=0* e no campo “Azul” digite *y(B)>0*.
19. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; em “Legenda” digite *sen(α)*; selecione os objetos P_y, s, s_1 e Texto texto1; clique em “Aplicar”. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; clique em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” *y(P)<0*; no campo “Verde” *y(P)=0* e no campo “Azul” digite *y(P)>0*.
20. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda”, digite *cos(α)*; selecione os objetos P_x, c, c_1 e Texto texto2; clique em “Aplicar”. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; clique em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” *x(P)<0*; no campo “Verde” *x(P)=0* e no campo “Azul” digite *x(P)>0*.
21. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda”, digite *tg(α)*; selecione os objetos B, t, t_1 e Texto texto3; clique em “Aplicar”. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; clique em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” *y(B)<0*; no campo “Verde” *y(B)=0* e no campo “Azul” digite *y(B)>0*.
22. Em “Entrada” digite *f_s=Função[sin(x),0,α]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; formate-a aumentando a espessura e escolhendo uma cor.
23. Em “Entrada” digite *f_c=Função[cos(x),0,α]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; formate-a aumentando a espessura e escolhendo uma cor diferente da função seno.
24. Em “Entrada” digite *f_s=Função[tan(x),0,α]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; formate-a aumentando a espessura e escolhendo uma cor diferente das anteriores.
25. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda”, digite *Função Seno*; selecione a função f_s clique em “Aplicar”. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; formate-o com o mesmo formato do item 22.
26. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda”, digite *Função Cosseno*; selecione a função f_c clique em “Aplicar”. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; formate-o com o mesmo formato do item 23.

27. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda”, digite *Função Tangente*; selecione a função f_t clique em “Aplicar”. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; formate-o com o mesmo formato do item 24.

Um exemplo do arquivo construído está ilustrado na figura 4.1.1.

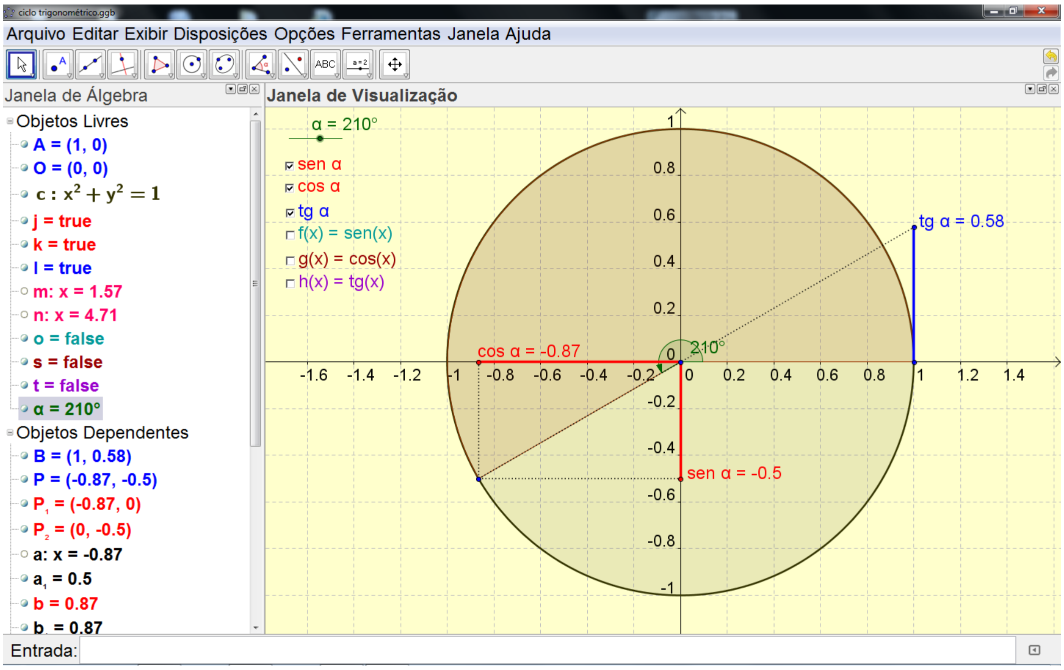


Figura 4.1.1: Estudando o Ciclo Trigonométrico no GeoGebra.

4.1.3 Manipulando o Ciclo Trigonométrico no GeoGebra

Depois de dada a oportunidade de manipulação aos alunos, algumas perguntas podem ajudar a conduzi-los aos resultados esperados.

- *Estando apenas “sen α” habilitado, o que observado ao “animar” α?*
- *Qual a conclusão quanto ao sinal de sen α com relação aos quadrantes?*
- *Qual a relação entre o seno de um ângulo e o seno de seu suplemento?*
- *Quais serão os valores desta razão trigonométrica para ângulos superiores a 360°?*

Alguns casos particulares do que ocorre com a dinâmica do ciclo estão ilustrados nas figuras 4.1.2 e 4.1.3.

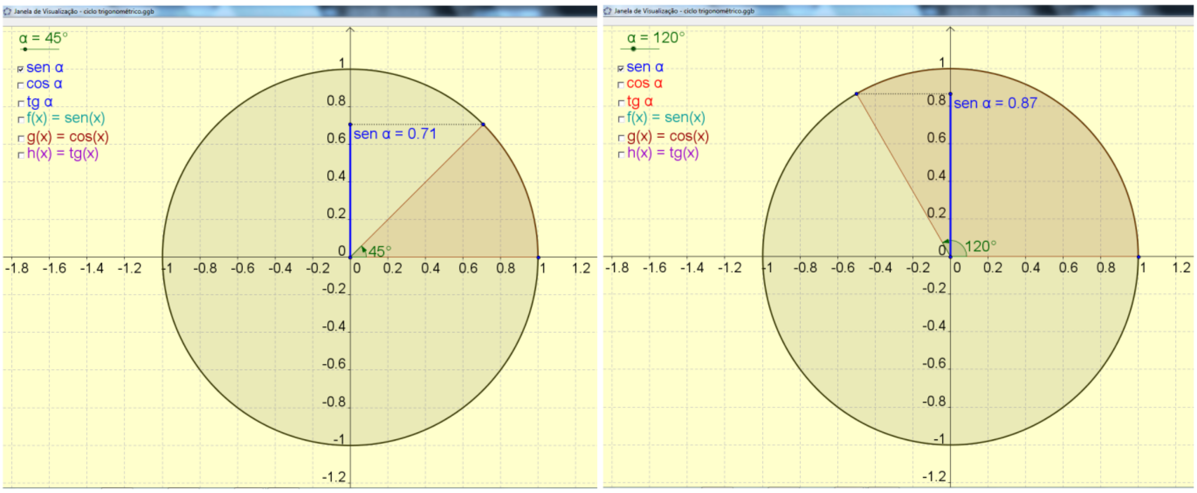


Figura 4.1.2: O valor do $\text{sen}(\alpha)$ é representado pelas projeções sobre o eixo y (1º e 2º quadrantes).

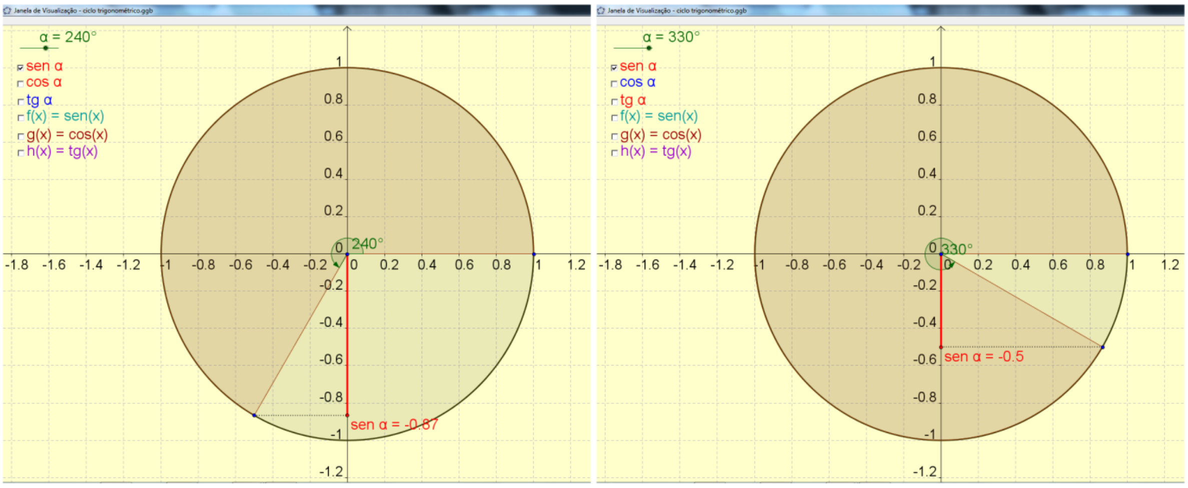


Figura 4.1.3: O valor do $\text{sen}(\alpha)$ é representado pelas projeções sobre o eixo y (3º e 4º quadrantes).

As mesmas perguntas feitas com relação ao $\text{sen}(\alpha)$, podem ser feitas para estudo do $\cos(\alpha)$ e da $\text{tg}(\alpha)$. As figuras 4.1.4 e 4.1.5 ilustram alguns casos.

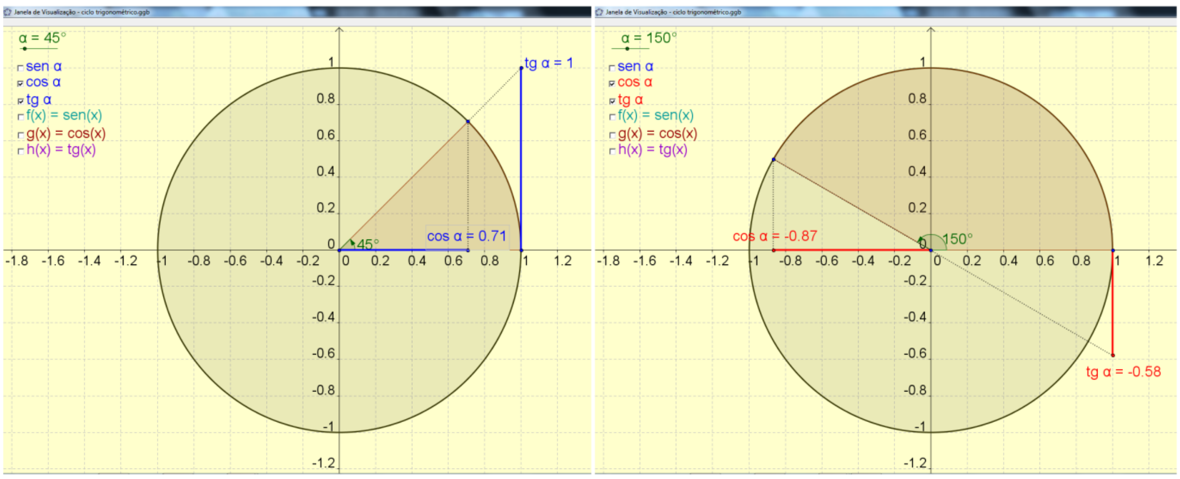


Figura 4.1.4: O valor do $\cos(\alpha)$ e da $\text{tg}(\alpha)$(1º e 2º quadrantes).

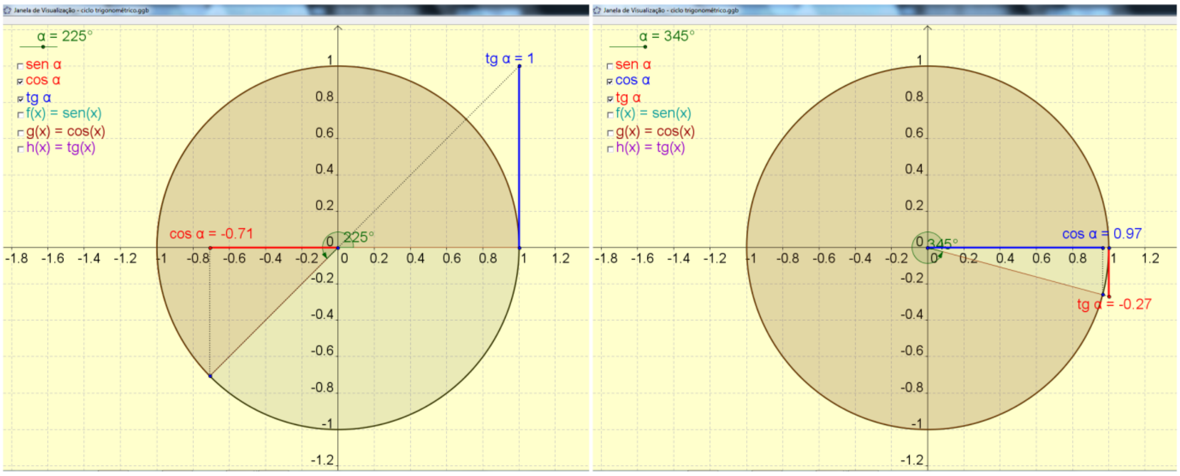


Figura 4.1.5: O valor do $\cos(\alpha)$ e da $\mathrm{tg}(\alpha)$(3º e 4º quadrantes).

O aplicativo ainda permite a construção das funções seno, cosseno e tangente de forma dinâmica. Para isto, basta habilitar as funções desejadas e “animar” o ângulo α. Também é conveniente alterar o espaçamento do eixo $x$para $\pi/2$. A figura 4.1.6 ilustra o fato.

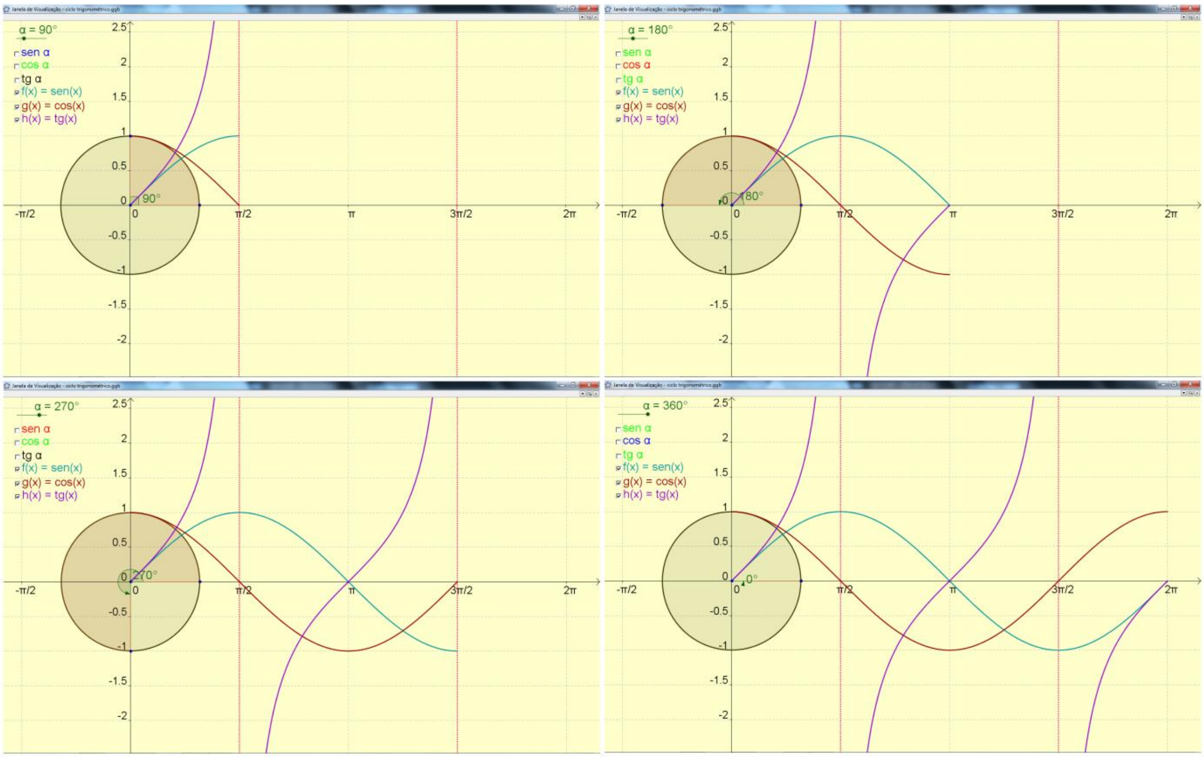


Figura 4.1.6: O aplicativo descreve as funções $\mathrm{sen}(x), \cos(x)$ e $\mathrm{tg}(x)$ em uma volta completa no ciclo trigonométrico.

4.2 Funções Trigonométricas

Propõe-se nesta seção,uma análise do que ocorre com o gráfico destas funções quando seus parâmetros são alterados já que, muitas das aplicações em diferentes áreas do conhecimento são modeladas por funções trigonométricas do tipo $y = a + b.\operatorname{sen}(c.x + d)$e $y = a + b.\cos(c.x + d)$sendo a, b, c e d constantes reais.

Os gráficos destas funções podem ser obtidos transladando,alongando, comprimindo e/ou refletindo apropriadamente cada gráfico, a partir das funções $y = \operatorname{sen}(c.x)$e $y = \cos(c.x)$respectivamente.

A construção gráfica destas funções com lápis e papel é maçante e exige tempo, nem sempre disponível na carga horária destinada ao conteúdo. Com o uso do *software*GeoGebra é permitido ao aluno tirar suas próprias conclusões acerca do comportamento gráfico destas curvas diante das alterações de seus parâmetros.

4.2.1 Trabalhando a Funções Trigonométricas no GeoGebra

A seguir é sugerida uma sequência de atividades a serem desenvolvidas para que o aluno observe e conclua os efeitos determinados pela alteração dos parâmetros das funções, em seus respectivos gráficos, por meio do uso do *software*GeoGebra.

4.2.2 Criando o arquivo GeoGebra

O arquivo GeoGebra que será utilizado para análise das funções trigonométricas dos tipos $y = a + b.\operatorname{sen}(c.x + d)$,$y = a + b.\cos(c.x + d)$ e $y = a + b.\operatorname{tg}(c.x + d)$sendo a, b, c e d constantes reais, tem sua construção dada pelos passos a seguir.

1. Na “Janela de Visualização”, clique com o botão direito; vá em “Propriedades−Eixo x”, habilite “Distância” e selecione *π/2*; clique em “Fechar”.
2. Em “Entrada” digite *a=ControleDeslizante[-10,10,1,1,72,false,true,false,false]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; em “Básico”habilite a opção “Exibir Rótulo”; em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” *a<0*; no campo “Verde” *a=0* e no campo “Azul” digite *a>0.*

3. Em “Entrada” digite *b=ControleDeslizante[-10,10,1,1,72,false,true,false,false]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; habilite a opção “Exibir Rótulo”; em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” $b<0$; no campo “Verde” $b=0$ e no campo “Azul” digite $b>0$.
4. Em “Entrada” digite *c=ControleDeslizante[-10,10,1,1,72,false,true,false,false]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; habilite a opção “Exibir Rótulo”; em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” $c<0$; no campo “Verde” $c=0$ e no campo “Azul” digite $c>0$.
5. Em “Entrada” digite *d=ControleDeslizante[-2π,2π,π/12,1,72,false,true,false,false]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; habilite a opção “Exibir Rótulo”; em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” $d<0$; no campo “Verde” $d=0$ e no campo “Azul” digite $d>0$.
6. Em “Entrada” digite *f_s(x)=a+bsin(c x+d)*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; formate-a aumentando a espessura e escolhendo uma cor.
7. Em “Entrada” digite *f_c(x)=a+b cos(c x+d)*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; formate-a aumentando a espessura e escolhendo uma cor diferente da função seno.
8. Em “Entrada” digite *f_t(x)=a+btan(c x+d)*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; formate-a aumentando a espessura e escolhendo uma cor diferente das anteriores.
9. Em “Entrada” digite *f_1=Função[f_s,0,2π/abs(c)]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; formate-a aumentando a espessura e escolhendo uma cor diferente da função f_s.
10. Em “Entrada” digite *f_2=Função[f_c,0,2π/abs(c)]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; formate-a aumentando a espessura e escolhendo uma cor diferente da função f_c.
11. Em “Entrada” digite *n=ControleDeslizante[-10,10,1,1,72,false,true,false,false]*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; em “Básico”habilite a opção “Exibir Rótulo”; em “Propriedades−Avançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” $a<0$; no campo “Verde” $a=0$ e no campo “Azul” digite $a>0$.
12. Em “Entrada” digite *x=(π/2+n π-d)/c*; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; habilite o rastro; formate-a aumentando a espessura e escolhendo “Estilo Pontilhado” por se tratar de uma assíntota.
13. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda”, digite *Função Seno*; selecione as funções f_s e f_1 clique em “Aplicar”. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; formate-o com o mesmo formato do item 6.
14. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda”, digite *Função Cosseno*; selecione as funções f_c e f_2 clique em “Aplicar”. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; formate-o com o mesmo formato do item 7.
15. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda”, digite *Função Tangente*; selecione a função f_t, o valor n e a reta e; clique em “Aplicar”. Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; formate-o com o mesmo formato do item 8.

Um exemplo do resultado desta construção, que será usado no decorrer deste texto, está ilustrado na figura 4.2.1.

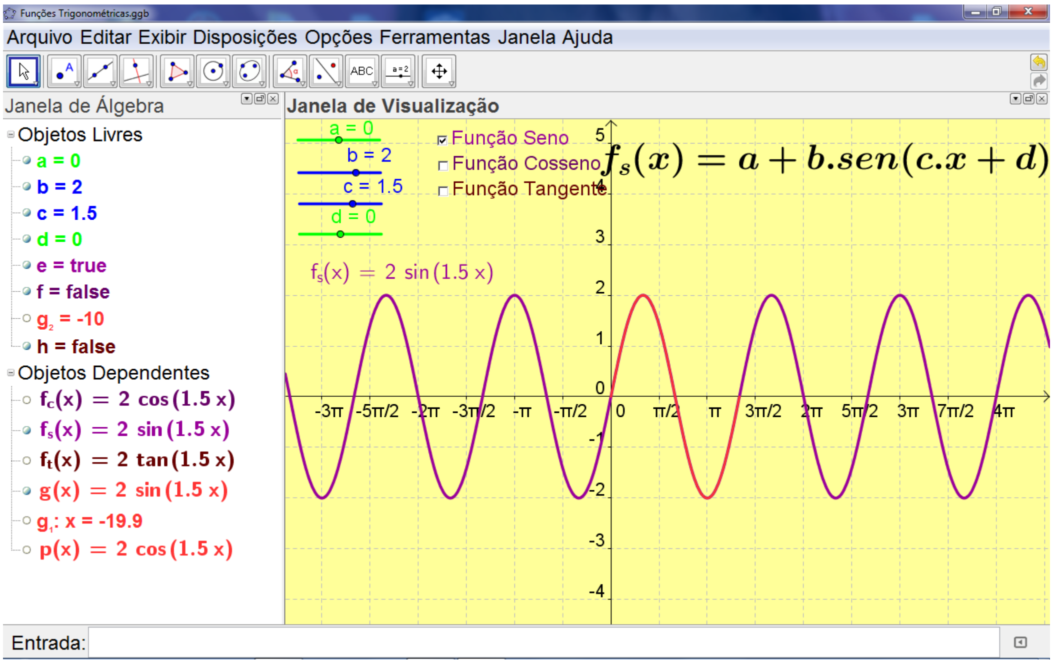


Figura 4.2.1: Estudo dinâmico do comportamento gráfico das Funções Trigonométricas.

4.2.3 Manipulando as Funções Trigonométricas no GeoGebra

Depois de dada a oportunidade de manipulação aos alunos para que tirem suas conclusões preliminares, podem ser feitas perguntas que direcionarão para as conclusões esperadas.

- *Estando apenas a Função Seno habilitada, o que ocorre com seu gráfico, quando o parâmetro a for alterado?*

  A figura 4.2.2 ilustra tal experiência.

- *Estando apenas a Função Seno habilitada, o que ocorre com seu gráfico, quando o parâmetro bé alterado?*
- *Qual a relação entre o valor da amplitude da função e parâmetro b?*

  A figura 4.2.3 ilustra tal situação.

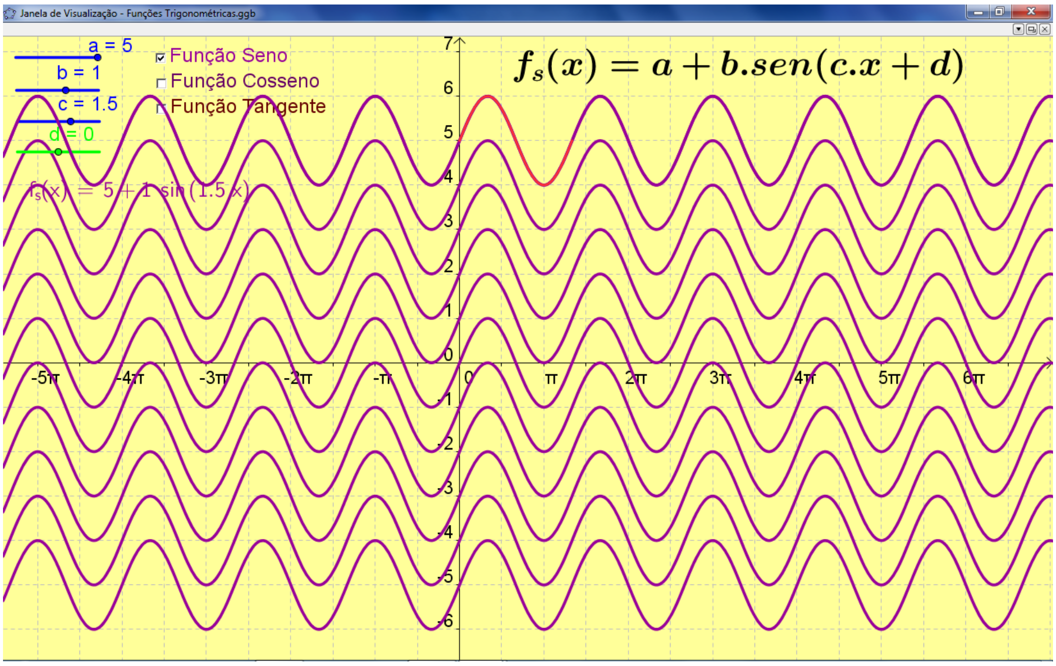


Figura 4.2.2: Translação vertical da função $y = a + b.\text{sen}(c.x + d)$ ao alterar o valor do parâmetro a.

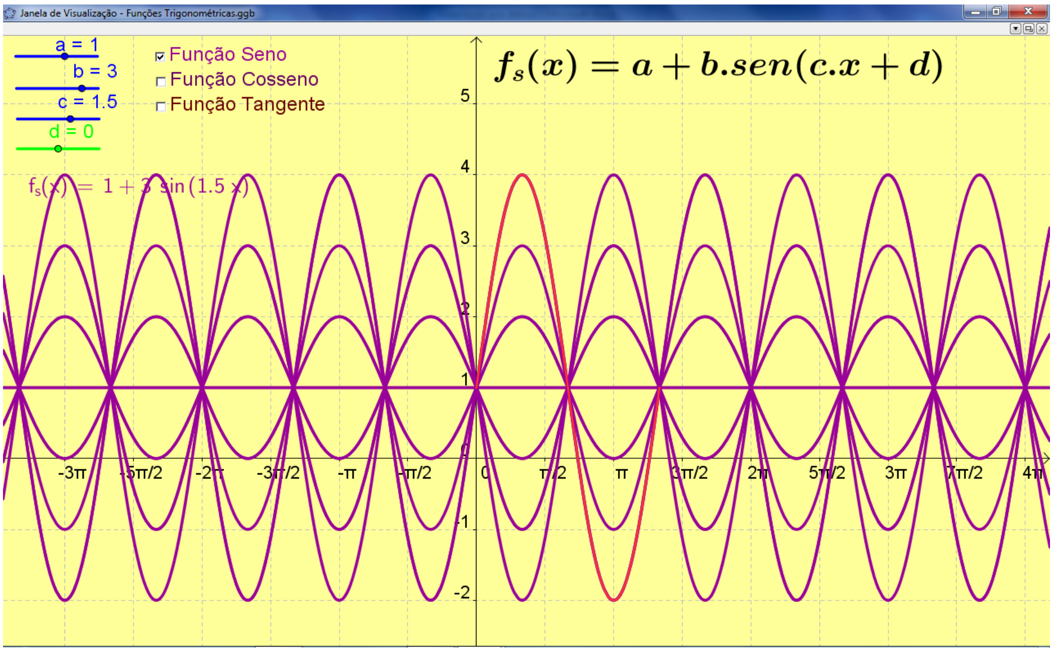


Figura 4.2.3: Alteração da amplitude da função $y = a + b.\text{sen}(c.x + d)$ ao alterar o valor do parâmetro b.

- *Estando apenas a Função Seno habilitada, o que ocorre com seu gráfico, quando o parâmetro cé alterado?*
- *Qual a relação entre o valor do período da função e parâmetro c?*

Há uma alteração no período da função. A figura 4.2.4 ilustra tal situação.

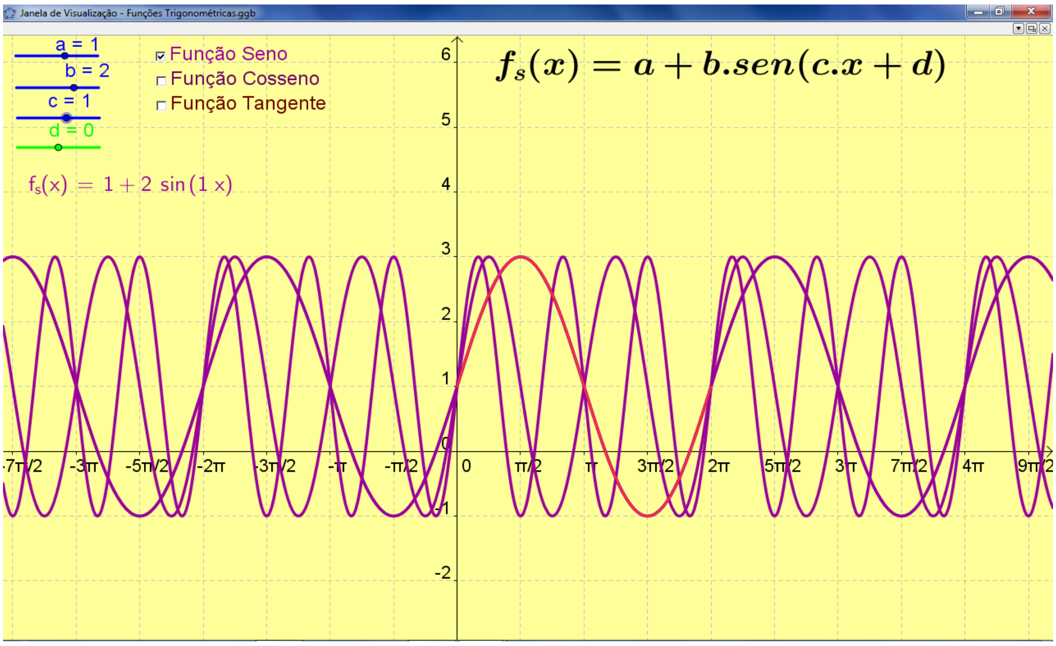


Figura 4.2.4: Alteração do período da função $y = a + b.\text{sen}(c.x + d)$ ao alterar o valor do parâmetro c.

- *Estando apenas a Função Seno habilitada, o que ocorre com seu gráfico, quando o parâmetro d for alterado?*

O parâmetro d relaciona-se com a translação do gráfico da função. A figura 4.2.4 ilustra tal situação.

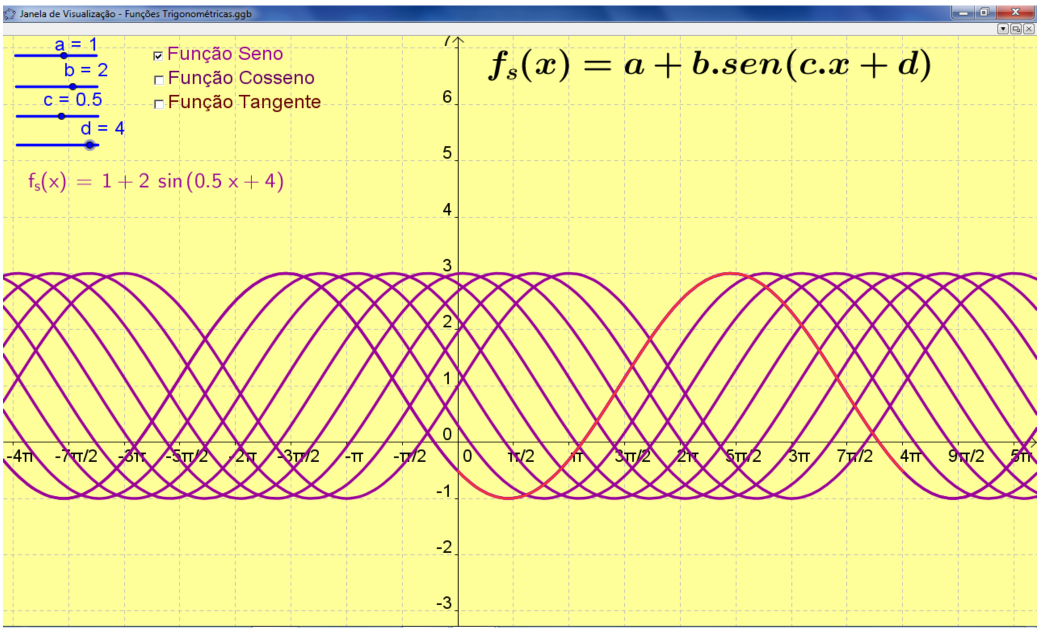


Figura 4.2.5: Movimento horizontal descrito pela função $y = a + b.\text{sen}(c.x + d)$ ao alterar o valor do parâmetro d.

Como a função cosseno tem o mesmo gráfico da função $y = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$, a análise é similar à feita com a função seno. Pode-se, inclusive, usar as mesmas perguntas para nortear o entendimento dos alunos.

Já no estudo da função tangente, pode-se enfatizar o conceito de assíntotavertical além de permitir aos alunos observar a nova periodicidade desta função.

A figura 4.2.6 retrata um exemplo da representação gráfica da função tangente para os valores dos parâmetros a, b, c e $d$da figura.

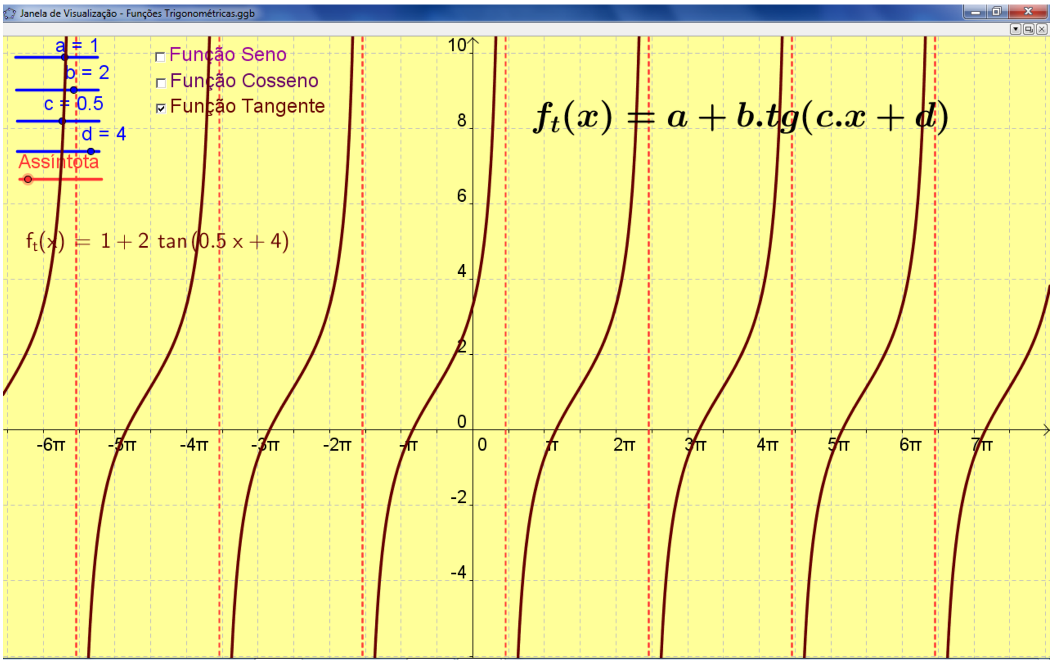


Figura 4.2.6: Representação gráfica da função tangente $y = a + b.\text{tg}(c.x + d)$. Para visualizar as assíntotas deve-se clicar em “Assíntota” e arrastar.

Considerações Finais

O *software*GeoGebra possui uma ferramenta que deve ser divulgada. Trata-se da possibilidade de publicar, na internet, qualquer arquivo construído. Assim o professor pode trabalhar, inclusive à distância (ver Anexo II), tendo a possibilidade de interagir com seus alunos. Na figura 5.1 estão os passos para realizar a publicação de um arquivo no geogebratube.

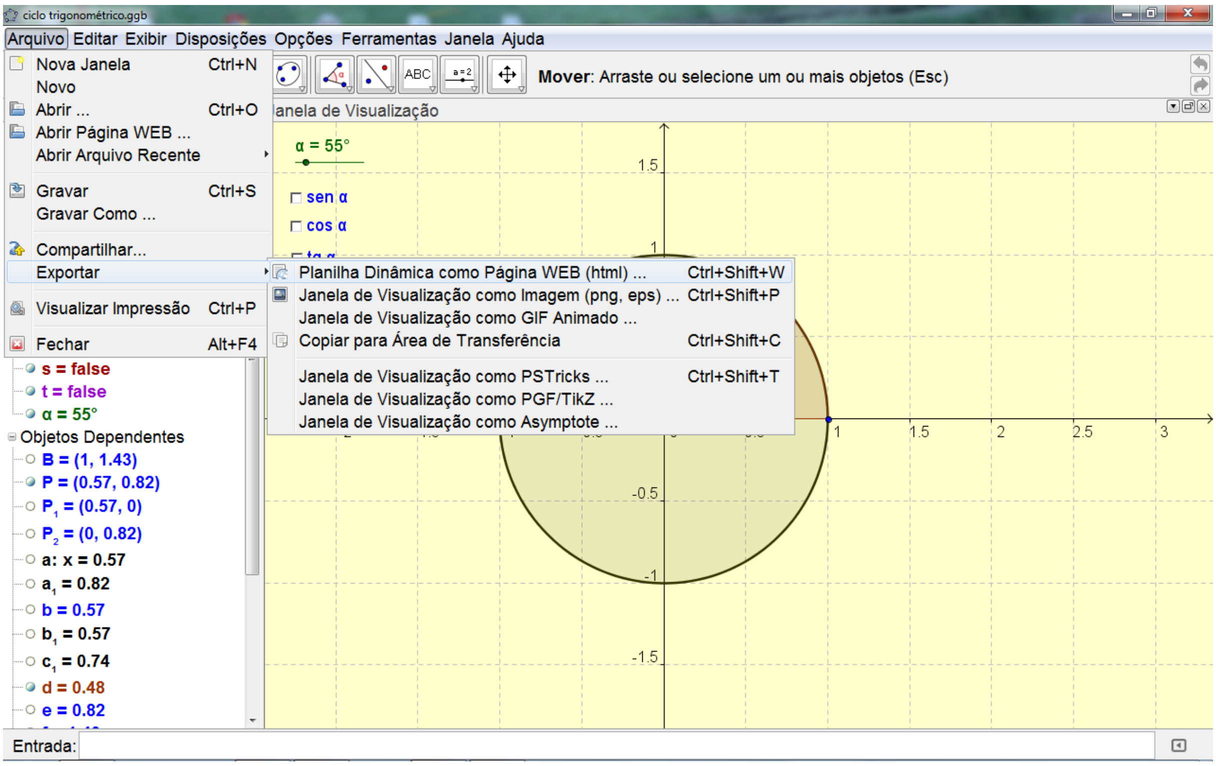


Figura 5.1: Clicando em “Arquivo/Exportar Planilha Dinâmica como Página WEB” é possível publicar um arquivo GeoGebra numa página da internet.

Depois de realizada a sequência anterior, aparecerá uma janela (figura 5.2) onde é possível explicar o arquivo e ainda propor atividades que conduzirão os alunos a concretizarem o conhecimento sobre o tema abordado.

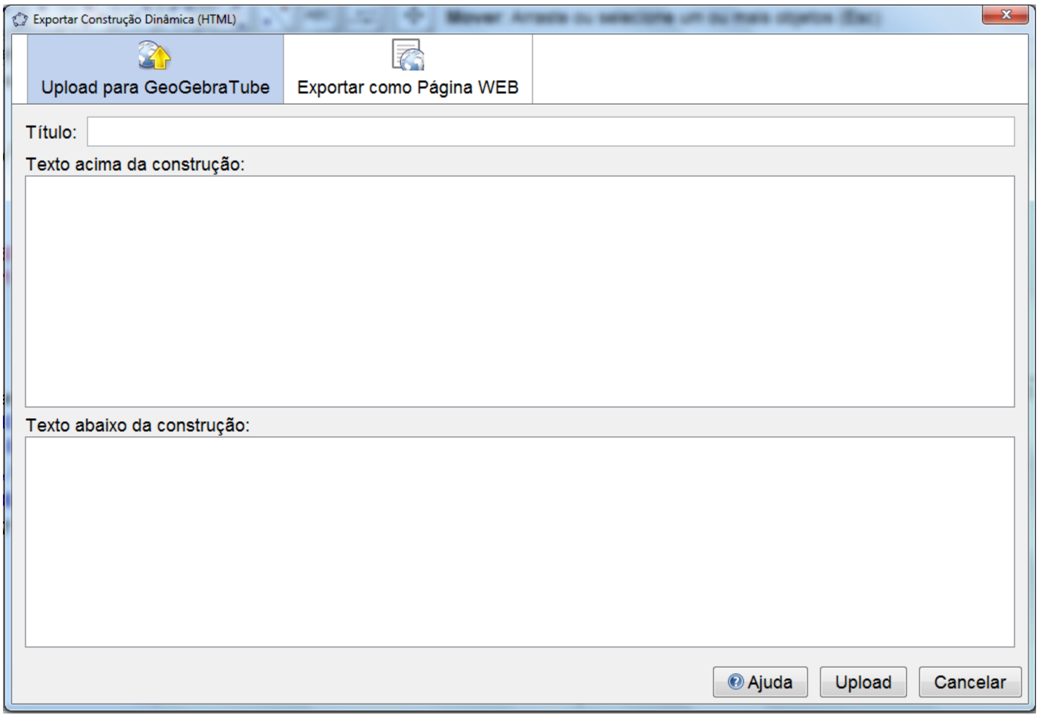


Figura 5.2: Opções de fazer a publicação do arquivo GeoGebra.

Depois de publicado, basta copiar o *link* do arquivo que pode ser enviado por e-mail ou postado nas redes sociais ou em ambientes virtuais de aprendizagem (ver Anexo II). O aluno que acessar o *link* terá opções como interagir com o arquivo, podendo postar comentários, críticas, perguntas. Terá ainda a possibilidade de fazer o *download* do arquivo. Na figura 5.3, um exemplo de um arquivo publicado.

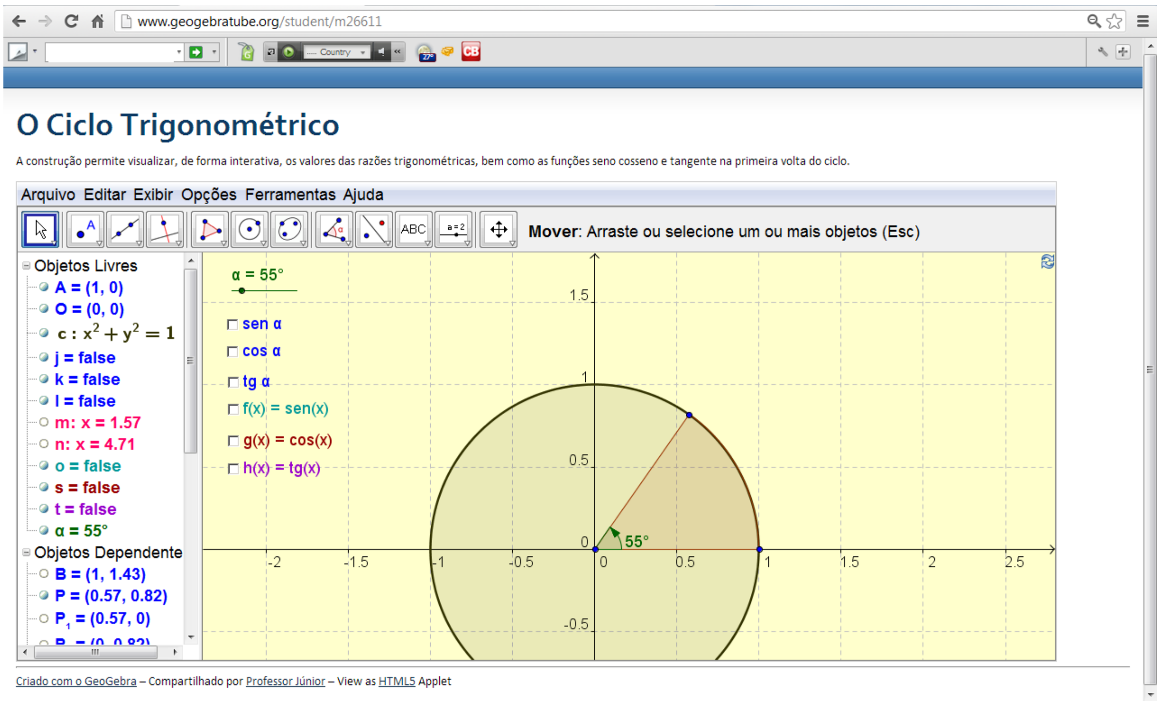


Figura 5.3: Exemplo de um arquivo publicado no geogebratube.

A seguir a relação dos *links* dos arquivos criados neste trabalho.

Função Afim: http://www.geogebratube.org/student/m25213
Função Quadrática: http://www.geogebratube.org/student/m25220
Função Exponencial: http://www.geogebratube.org/student/m29708
Função Logarítmica: http://www.geogebratube.org/student/m29709
Ciclo Trigonométrico: http://www.geogebratube.org/student/m26611
Funções Trigonométricas: http://www.geogebratube.org/student/m29548

CONCLUSÃO

Para que se alcancem os reais objetivos educacionais do ensino da matemática é necessário que os alunos compreendam o que é transmitido para eles, em sala de aula, e que possam aplicar esse conhecimento em diferentes situações da vida, sendo capazes de fazer uso do que lhes foi ensinado para prosseguir com a aquisição do conhecimento. Mas, para que entendam, há a necessidade de que a linguagem usada seja acessível e interessante para eles. Sob a auréola desse contexto, quanto mais os jovens têm acesso a novas tecnologias, mais os métodos tradicionais de ensino se tornam antiquados e desestimulantes.

O natural de uma criança é querer aprender. É possível reposicionar os mecanismos de ensino da matemática dentro do ambiente tecnológico moderno e usar essas ferramentas didáticas como estratégias que facilitem o processo de ensino e aprendizagem.

Toda experiência feita com uso de recursos tecnológicos, especificamente *softwares* educativos, quando bem direcionada se traduz em resultados satisfatórios. Verifica-se maior participação, mais interesse e sempre fala sobre como fora interessante a aula, principalmente aqueles acostumados com aulas tradicionais.

Sabe-se de muito tempo que, na matemática, para que se desenvolva o raciocínio lógico, exigem-se muitas habilidades que vão além das treinadas na escola. Quando se faz uso de instrumentos, como o computador, a calculadora, a internet, entre outros, há a possibilidade de relacionar o conteúdo com a experiência já vivenciada pelos alunos. O mais interessante é se apropriar do espaço da sala de aula como ambiente de desafios e de construção mútua do saber. Tanto professores como alunos, descobrindo juntos novas estratégias de aprendizagem e de ensino.

Nestes sete anos que trabalho com o GeoGebra percebi que, com suas manipulações, gráficos dinâmicos e cores variadas, o interesse dos alunos é despertado automaticamente, principalmente se lhes é oferecido o manuseio do *software*, muito mais do que quando se usa apenas fala e se escreve na lousa (ver Anexo I).

Outro aspecto,que observei, é que os alunos sentem a necessidade de estudar mais e têm seus processos mentais de visualização aprimorados. É bem apercebido que nem todas as pessoas têm uma boa visualização geométrica imaginária. Mas quando lhes apresentam as imagens dos gráficos das funções, elas interiorizam melhor o conteúdo e conseguem interrelacioná-los melhor com aspectos do dia a dia.

Assim como muitos outros trabalhos já foram escritos sobre o uso de *softwares* no ensino de funções, neste comprova-se que o uso do GeoGebra nas aulas de Matemática permite um grande avanço por meio da manipulação de seus respectivos gráficos.

O GeoGebra, portanto, permite uma melhor articulação do conteúdo e melhor escolha de atividades. Agiliza processos de cálculo e construção com lápis e papel. Com a construção gráfica, as propriedades das funções são mais bem compreendidas, pois são percebidas pelos próprios alunos por experimentação, propiciando maior tempo para assimilação das características das respectivas funções.

É lógico que há desafios, mas é necessário enfrentá-los a fim de se interagir com o mundo moderno, ainda mais quando o resultado é um aprendizado mais significativo, participativo e gratificante.

Bibliografia

BORBA, M.C. **Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento**. In: BICUDO, M.A.V. (org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: UNESP, 1999. p. 285 – 295.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à pratica**. Campinas: Papirus, 2003.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, volume único**. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2005.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

GIRALDO, Victor et al. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática** – SBM. Rio de Janeiro – 2012.

LIMA, Elon Lages. **Conceituação, Manipulação e Aplicações. Os três componentes do ensino de matemática**. Revista do Professor de Matemática (RPM-41). IMPA-RJ, 1999.

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 12 out. 2012.

VALENTE, J. A. **Liberando a mente: computadores na educação especial**. Campinas: Gráfica da UNICAMP, 1991.

VALENTE, J.A. **Por que o Computador na Educação?** Disponível em: <http://www.edutec.net/Textos/Alia/PROINFO/prf_txtie09.htm>. Acesso em: 07 dez. 2012.
http://www.tvbrasil.org.br/fotos/salto/series/162048Distutindo.pdf

ANEXO I

Experiência com o *software*

Na figura A.1.1 estou lecionando na Escola Particular Pequeno Príncipe, em Teófilo Otoni – Minas Gerais.

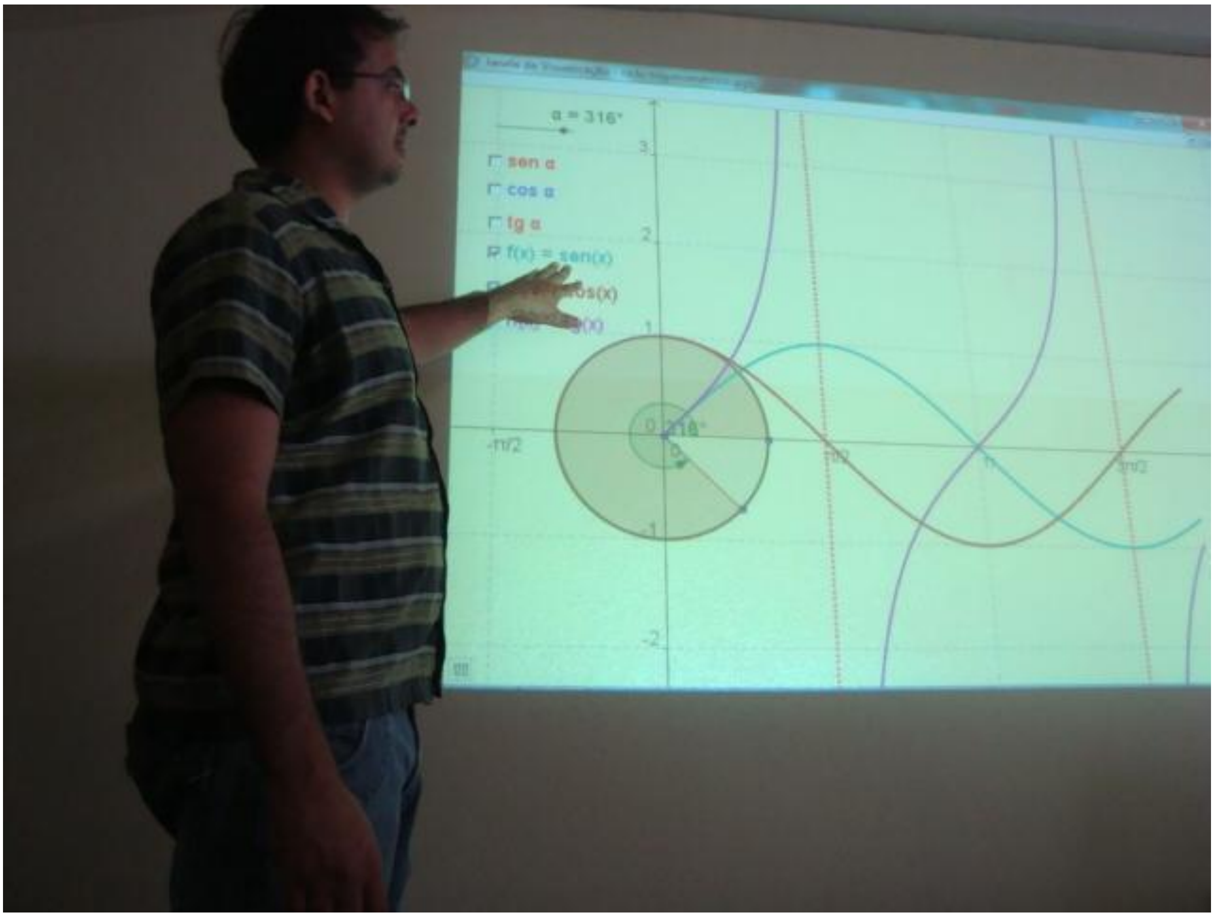


Figura A.1.1: Aula dada na Escola Particular Pequeno Príncipe em Novembro de 2012.

Obviamente a estrutura física é indispensável para o trabalho com recursos computacionais. Na figura A.2 podemos ver uma sala com um número razoável de computadores. Mesmo sendo necessário revezamento de máquinas é possível que todos tenham a oportunidade de manipular o *software*.

Figura A.1.2: Os alunos têm a oportunidade de construir seu conhecimento ao manipularem o aplicativo e fazer suas inferências.

A agilidade nos processos mentais oferecida pelo software permite uma abrangência maior do conteúdo em menos tempo.

Figura A.1.3: O manuseio do *software* permite inferências que agilizam o processo de ensino aprendizagem.

A fim de conhecer a opinião dos alunos quanto às aulas dadas com o auxílio do GeoGebra foi passado um questionário. As figuras A.1.4 até A.1.8 apresentam algumas opiniões.

GEOMETRIA DINÂMICA COM O GEOGEBRA NO ENSINO DE ALGUMAS FUNÇÕES

FICHA DE AVALIAÇÃO

NOME: Júlia Durlino Martins ALUNO (X) PROFESSOR (___)
IDADE: 15
ESCOLA: Escola Pequeno Príncipe

1) Grau de satisfação da aula.

(X) Muito satisfeito (___) Satisfeito (___) Pouco satisfeito (___) Insatisfeito

2) Qual a sua opinião sobre o software GeoGebra?

O software GeoGebra é uma maneira bem mais fácil e divertida de aprender matemática, compreender os gráficos.

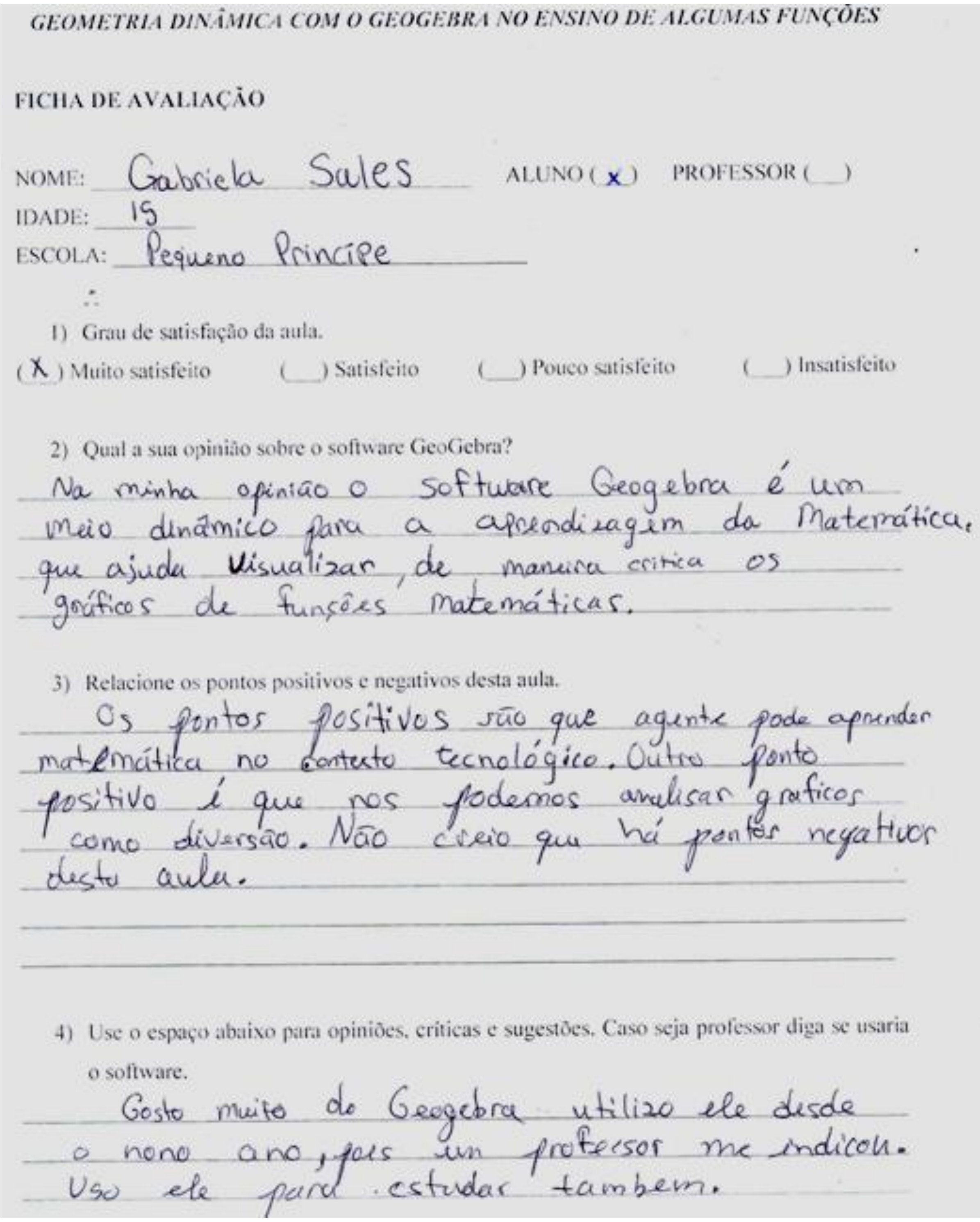
3) Relacione os pontos positivos e negativos desta aula.

Eu vejo mais pontos positivos porque é uma maneira que todos os alunos se interessam mais, chama a atenção, até pra aqueles que não gostam muito da matéria, ficam mais interessados.

4) Use o espaço abaixo para opiniões, críticas e sugestões. Caso seja professor diga se usaria o software.

Eu acho que todos os professores deveriam utilizar o software, fica uma aula diferente, mais animada. Deveria ter mais vezes.

Figura A.1.4: Questionário sobre uma aula dada com o auxílio do *software*GeoGebra, respondido por uma aluna do 1º ano da Escola Particular Pequeno Príncipe.



GEOMETRIA DINÂMICA COM O GEOGEBRA NO ENSINO DE ALGUMAS FUNÇÕES

FICHA DE AVALIAÇÃO

NOME: Gabriela Sales ALUNO (x) PROFESSOR ( )

IDADE: 15

ESCOLA: Pequeno Princípe

1) Grau de satisfação da aula.

(X) Muito satisfeito ( ) Satisfeito ( ) Pouco satisfeito ( ) Insatisfeito

2) Qual a sua opinião sobre o software GeoGebra?

Na minha opinião o software Geogebra é um meio dinâmico para a aprendizagem da Matemática. que ajuda visualizar, de maneira critica os gráficos de funções matemáticas.

3) Relacione os pontos positivos e negativos desta aula.

Os pontos positivos são que agente pode aprender matemática no contexto tecnológico. Outro ponto positivo é que nos podemos analisar graficos como diversão. Não creio que há pontos negativos desta aula.

4) Use o espaço abaixo para opiniões, críticas e sugestões. Caso seja professor diga se usaria o software.

Gosto muito do Geogebra utilizo ele desde o nono ano, pois um professor me indicou. Uso ele para estudar tambem.

Figura A.1.5: Questionário sobre uma aula dada com o auxílio do *software*GeoGebra, respondido por uma aluna do 1º ano da Escola Particular Pequeno Príncipe.

GEOMETRIA DINÂMICA COM O GEOGEBRA NO ENSINO DE ALGUMAS FUNÇÕES

FICHA DE AVALIAÇÃO

NOME: Lavínia Ribeiro ALUNO (x) PROFESSOR (__)

IDADE: 15 anos

ESCOLA: Particular Pequeno Príncipe

1) Grau de satisfação da aula.

(x) Muito satisfeito (__) Satisfeito (__) Pouco satisfeito (__) Insatisfeito

2) Qual a sua opinião sobre o software GeoGebra?

O software GeoGebra é muito satisfatório pois, contribui para a fixação da matéria anteriormente explicada na sala de aula. E torna aula menos repetitiva, forma de chamar mais atenção para matéria, em relação ao aluno.

3) Relacione os pontos positivos e negativos desta aula.

Os pontos positivos são: disperta maior interesse do aluno em relação a matéria, facilita o entendimento também. Os pontos negativo é que houve falta de computador para 2 alunos, inclusive eu, mas, deu certo no final pois o professor disponibilizou data show, para a melhora da visualização.

4) Use o espaço abaixo para opiniões, críticas e sugestões. Caso seja professor diga se usaria o software.

Acredito que ajudaria no facilitamento do entedimento da matéria, se a escola adotar, seria muito gratificante para todos nós.

Figura A.1.6: Questionário sobre uma aula dada com o auxílio do *software*GeoGebra, respondido por uma aluna do 1º ano da Escola Particular Pequeno Príncipe. A aluna critica a falta de máquinas para todos.

GEOMETRIA DINÂMICA COM O GEOGEBRA NO ENSINO DE ALGUMAS FUNÇÕES

FICHA DE AVALIAÇÃO

NOME: Pedro Clemente Pereira Pinheiro ALUNO (X) PROFESSOR (___)
IDADE: 15
ESCOLA: Pequeno Principe - Colégio Cientifico

1) Grau de satisfação da aula.

(X) Muito satisfeito (___) Satisfeito (___) Pouco satisfeito (___) Insatisfeito

2) Qual a sua opinião sobre o software GeoGebra?

Eu gostei muito da aula apresentada pelo Professor Junior co Geogebra, ajuda na aprendizagem e deixa a aula dinamica

3) Relacione os pontos positivos e negativos desta aula.

Positivo: Facilitou a aprendizagem na matéria

Negativo: na escola não tinha computador suficiente para os alunos.

4) Use o espaço abaixo para opiniões, críticas e sugestões. Caso seja professor diga se usaria o software.

A aula com a utilização do software facilitou a aprendizagem e o melhor entendimento da matéria

Figura A.1.7: Questionário sobre uma aula dada com o auxílio do *software*GeoGebra, respondido por um aluno do 1º ano da Escola Particular Pequeno Príncipe.

Na figura A.1.8 é apresentado o mesmo questionário aplicado aos alunos, porém respondido por um professor que fez questão de assistir a aula.

GEOMETRIA DINÂMICA COM O GEOGEBRA NO ENSINO DE ALGUMAS FUNÇÕES

FICHA DE AVALIAÇÃO

NOME: Fabrício Ferreira Dias ALUNO ( ) PROFESSOR (X)

IDADE: 31

ESCOLA: Waldemar Neves da Rocha

1) Grau de satisfação da aula.

(X) Muito satisfeito ( ) Satisfeito ( ) Pouco satisfeito ( ) Insatisfeito

2) Qual a sua opinião sobre o software GeoGebra?

Excelente ferramenta didática, pois permite explorar a visualização dinâmica dos gráficos.

3) Relacione os pontos positivos e negativos desta aula.

Maior articulação entre os conceitos relacionados com os parâmetros e as mudanças decorrentes nos respectivos gráficos.

Nem todos os alunos acompanham bem os comandos e precisam do auxílio dos colegas;

4) Use o espaço abaixo para opiniões, críticas e sugestões. Caso seja professor diga se usaria o software.

O software é muito útil permitindo aulas atraentes, dinâmicas e que auxiliam na generalização de conceitos.

Figura A.1.8: Questionário sobre uma aula dada com o auxílio do *software*GeoGebra, respondido por um colega professor da Escola Particular Pequeno Príncipe.

ANEXO II

Questionário *on-line*

Na intenção de aperfeiçoar os arquivos criados, além de conhecer a opinião de colegas professores, os arquivos criados e publicados no *geogebratube* tiveram seus *links* enviados por *e-mail* junto com um questionário conforme figura A.2.1.

GERALDO JR LOPES <lopesgeraldojr@gmail.com> 8 fev

para jotaba1, jera_coelho, enilson70, bragancab, vicentegeraldo, laiscouy, wallasmat, vanessavania2

Olá pessoal,

Saudações!

Estou realizando um trabalho que culminará numa dissertação de mestrado junto à UFV. Trata-se do uso do software GeoGebra, um programa que oferece alternativas para o ensino de matemática desde o nível fundamental ao ensino superior.

Meu trabalho foca o 1º ano do ensino médio, mais especificamente as funções Afim, Quadrática, Exponencial, Logarítmica e as Trigonométricas.

Abaixo estão os links dos arquivos que criei que poderão ser utilizados livremente caso haja interesse. Segue também um link de um pequeno questionário onde espero ter o retorno referente ao arquivo. Preciso muito desta avaliação, então peço a gentileza de responderem.

Estou a disposição para qualquer questionamento.

Obrigado pela atenção!

Abraço

Geraldo lopes Júnior
Mestrando PROFMAT-UFV
Professor IFNMG

Função Afim

Função Quadrática

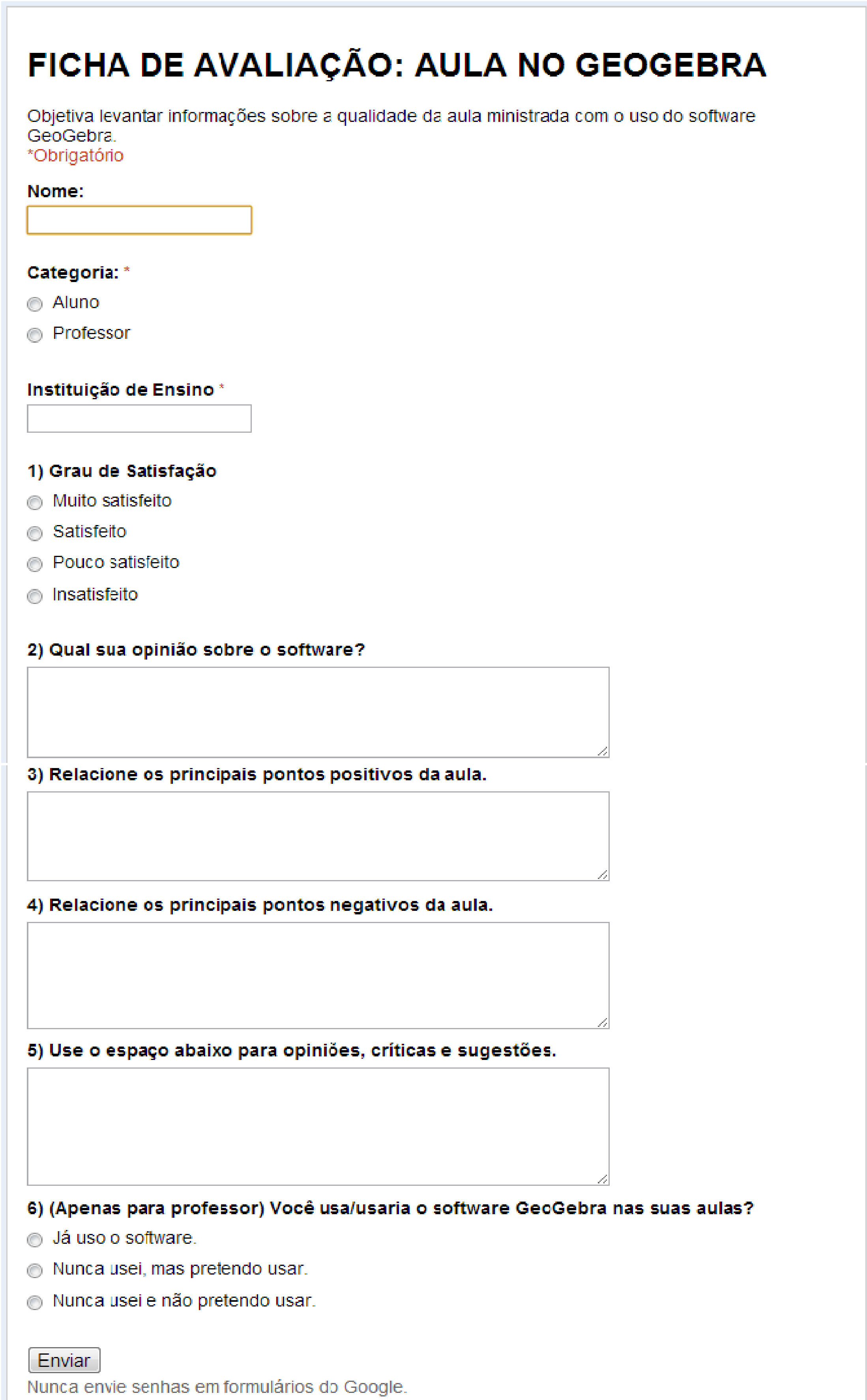
Ciclo Trigonométrico

Funções Trigonométricas

Questionário (Favor responder)

Figura A.2.1: E-mail enviado aos colegas professores de matemática e alunos.

A figura A.2.1 ilustra o questionário *on-line* enviado aos professores e alunos para que pudessem explorar os aplicativos criados no GeoGebra. A intenção é que o retorno dado pelos professores e alunos pudessem nortear possíveis aperfeiçoamentos nos arquivos criados no *software*.



FICHA DE AVALIAÇÃO: AULA NO GEOGEBRA

Objetiva levantar informações sobre a qualidade da aula ministrada com o uso do software GeoGebra.
*Obrigatório

Nome:

Categoria: *

- Aluno
- Professor

Instituição de Ensino *

1) Grau de Satisfação

- Muito satisfeito
- Satisfeito
- Pouco satisfeito
- Insatisfeito

2) Qual sua opinião sobre o software?

3) Relacione os principais pontos positivos da aula.

4) Relacione os principais pontos negativos da aula.

5) Use o espaço abaixo para opiniões, críticas e sugestões.

6) (Apenas para professor) Você usa/usaria o software GeoGebra nas suas aulas?

- Já uso o software.
- Nunca usei, mas pretendo usar.
- Nunca usei e não pretendo usar.

Enviar

Nunca envie senhas em formulários do Google.

Figura A.2.2: Questionário enviado junto com os *links* dos aplicativos GeoGebra.

Na tabela A.2.1, algumas respostas recebidas estão descritas na íntegra.

Tabela A.2.1: Respostas dadas ao questionário on-line referente aos arquivos criados no GeoGebra para uso em sala de aula.

Nome	**Sandro Alves de Azevedo**
Categoria	Professor
Instituição de Ensino	Colégio Franciscano Imaculada Conceição
Grau de Satisfação	Muito satisfeito
Qual sua opinião sobre o *software*?	Magnífico e é o possível meio de interação para que nossos alunos tenham mais prazer com a nossa disciplina, sem contar a agilidade para perceber as diferenças gráficas com a variação dos coeficientes ou funções.
Pontos positivos	As comparações que rapidamente ajuda-nos a perceber com as mudanças nos valores dos coeficientes ou funções a partir do cursor. Sem contar a dinâmica do ensino que é bastante motivador.
Pontos negativos	Faltou as questões debatedoras com o ciclo trigonométrico. Não sei se são só exemplos de questionamentos, mas usaria muito mais questões para discussões coletivas.
Opiniões/Sugestões	Já enunciado acima nas questões 3 e 4.
Quanto ao uso do *software*	Nunca usei, mas pretendo usar.
Nome	**Enilson Vieira Chaves**
Categoria	Professor
Instituição de Ensino	Escola Estadual São Sebastião
Grau de Satisfação	Muito satisfeito
Qual sua opinião sobre o *software*?	Muito interessante e fácil de manusear. Auto-instrutivo. Fiz uma pequena demonstração com meus alunos e eles mostraram interesse por ser simples e fácil de mexer. Que bom que iniciativas como estas estão chegando com um custo tão acessível aos professores das redes estaduais.
Pontos positivos	1. Auto-instrutivo 2. Fácil manuseio 3. Interativo 4. Inteligente
Pontos negativos	1. Os alunos não querem largar os computadores.
Opiniões/Sugestões	***
Quanto ao uso do *software*	Já uso o software.
Nome	Douglas Luan de Souza
Categoria	Aluno
Instituição de Ensino	UFVJM
Grau de Satisfação	Satisfeito
Qual sua opinião sobre o *software*?	O Geogebra é muito bom. Oferece uma gama muito ampla de recursos além de ser completamente intuitivo e utilizar a linguagem matemática, a qual o público alvo já deve estar familiarizado.
Pontos positivos	Simplicidade.
Pontos negativos	Não há ponto negativo, mas creio que poderia ser melhor.
Opiniões/Sugestões	Acho que poderia ter incluído uma opção para pesquisador ou monitor (meu caso) no questionário. Quanto às aulas, acredito que possam ser ainda mais atraentes. No ciclo trigonométrico, pode-se dar um jeito de mostrar a relação entre seno e cosseno no triângulo retângulo (relação fundamental).
Quanto ao uso do *software*	Já uso o software.
Nome	**Roberta LayraFaragóJardi**

Categoria	Aluno
Instituição de Ensino	Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Grau de Satisfação	Muito satisfeito
Qual sua opinião sobre o *software*?	Já trabalho com o software e gosto muito! São muitas as possibilidades que ele oferece. Abrange uma rica quantidade de conteúdos a serem trabalhados.. Um software muito intuitivo, simplesmente demais!
Pontos positivos	Os gráficos estão visualmente agradáveis, os conteúdos bem abordados. Muito bom e completo o Ciclo Trigonométrico, com o seno, cosseno e tangente e seus respectivos gráficos!
Pontos negativos	Na minha opinião não houveram pontos negativos.
Opiniões/Sugestões	Muito bom seu trabalho!
Quanto ao uso do *software*	Já uso o software.
Nome	**WeverssonDalmasoSellin**
Categoria	Professor
Instituição de Ensino	UFVJM
Grau de Satisfação	Satisfeito
Qual sua opinião sobre o *software*?	O software Geogebra é uma ferramenta de grande valia para o ensino, por permitir uma interação bastante interessante entre os alunos e o conteúdo ministrado.
Pontos positivos	Interatividade,dinamismo.
Pontos negativos	Não vejo pontos negativos.
Opiniões/Sugestões	Tenho só algumas sugestões para melhorar os aplets disponibilizados online: Função Afim: Corrigir o Título: "O aquivo permite umestudo..." Sugestão: Ocultar a janela de álgebra; Colocar textos explicativos para variação dos seletores a e b. Por exemplo: Movimente o seletor a e observe o que ocorre com o gráfico etc Função Quadrática: Mesmas sugestões quanto à janela de álgebra e seletores Ciclo Trigonométrico: Ocultar a janela de álgebra, menus e barra de ferramentas; Colcar informações sobre o que se espera que o aluno faça. Por exemplo, varie o seletor do ângulo, marque a caixa tal etc e observe o que acontece. Funções Trigonométricas: Ocultar a janela de álgebra, menus e barra de ferramentas;
Quanto ao uso do *software*	Já uso o software.
Nome	**Eduardo Antônio Soares Júnior**
Categoria	Aluno
Instituição de Ensino	Colégio Tiradentes da Polícia Militar
Grau de Satisfação	Muito satisfeito
Qual sua opinião sobre o *software*?	O Geogebra possui uma grande aplicabilidade nos conteúdos de matemática, destacando-se funções e geometria.O software ainda mostra ser bastante dinâmico e interativo para o usuário,facilitando muitas vezes o entendimento de conteúdos.
Pontos positivos	#Ocorre a maior compreensão da análise gráfica das funções relacionadas. #É possível estabelecer conceitossobre o comportamento da reta e da curva, de acordo com a variação numérica dos coeficientes das funções. #Com a ferramenta computacional é possível aumentar o grau de entendimento sobre o estudo do sinal das funções. #Com o círculo trigonométrico utilizando a ferramenta é possível entender as diferenças entre as funções trigonométricas.

	#Já a análise gráfica das funções trigonométricas é possível entender melhor o gráfico de cada uma delas, o seu período e sua imagem.
Pontos negativos	
Opiniões/Sugestões	A aula utilizando o Geogebra aumenta ainda mais o grau de interesse dos alunos,já que na aula convencional o conteúdo funções exige muito a análise gráfica e com a ferramenta é possível fazer tal análise mais detalhada e criativa.
Quanto ao uso do *software*	