

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LUIZ HENRIQUE ALMEIDA DE SOUZA DO NASCIMENTO

ELIPSE INSCRITA DE STEINER

CAMPO GRANDE - MS

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

LUIZ HENRIQUE ALMEIDA DE SOUZA DO NASCIMENTO

ELIPSE INSCRITA DE STEINER

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Aniz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2017

Elipse Inscrita de Steiner

Luiz Henrique Almeida de Souza do Nascimento

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Claudemir Aniz -UFMS

Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson - USP

Prof. Dr. Elen Viviani Pereira Spreafico - UFMS

Campo Grande – MS, 20 de Novembro de 2017.

Agradecimentos

A Deus, por sua bondade, misericórdia e graça em minha vida.

À minha esposa Gleyce e ao meu filho Henrique, pelo amor, cuidado, paciência e por tornarem minha vida mais feliz e completa.

Aos meus pais Altamiro e Eliane, por me ensinarem o que é certo, por nunca medirem esforços e sempre me apoiarem em minhas escolhas. À minha avó Anna, pelo seu “amor de vó” repleto de carinho, e por fazer tudo ao seu alcance pelos netos. Aos meus irmãos Jeferson, Rafael e Giulia, pela companhia e apoio.

Aos meus sogros Tetsuya e Ivanice e os demais familiares por todo apoio prestado à minha família e pelas palavras de incentivo durante o mestrado.

Ao professor Dr. Claudemir Aniz, pela paciência, pelos conselhos, direcionamento nos estudos e pela disposição ao me atender.

Aos professores do INMA, pois foram fundamentais em minha formação acadêmica, profissional e pessoal.

Aos integrantes da turma PROFMAT 2015, pelo auxílio durante o curso através dos estudos, conselhos e momentos de descontração.

À CAPES, pelo incentivo financeiro durante o curso.

Resumo

Dado um triângulo qualquer, o Teorema de Steiner garante a existência de uma única elipse inscrita que tangencia os lados nos pontos médios e possui a maior área dentre todas as outras elipses contidas neste triângulo. Motivados por estes resultados desenvolvemos este trabalho, que se divide em duas partes. A primeira compreende os três primeiros capítulos, onde discutimos alguns conceitos geométricos acerca de pontos notáveis, elipses e construção de elipses inscritas em um triângulo, dado um foco. Já a segunda parte é composta pelas ferramentas fundamentais para a demonstração do Teorema de Steiner, tais como números complexos e transformações afins. Ainda neste último capítulo, é demonstrado o Teorema de Steiner.

Palavras-chave: Elipse de Steiner, Elipses Inscritas em Triângulos, Números Complexos, Transformações Afins.

Abstract

Given a triangle, Steiner's Theorem guarantees the existence of a single inscribed ellipse that tangentiates the sides at the midpoints and has the largest area among all the other ellipses contained in this triangle. Motivated by these results we developed this work, which is divided into two parts. Part one comprises the first three chapters, where we discuss some geometric concepts about remarkable points, ellipses and construction of ellipses inscribed in a triangle, given its focus. The second part is composed by the fundamental tools for the demonstration of Steiner's Theorem, such as complex numbers and affine transformations. Still in this part, in the last chapter, Steiner's Theorem is demonstrated.

Keywords: Steiner Ellipses, Inscribed Ellipses in Triangles, Complex Numbers, Affine Transformations.

Sumário

1	Lugares Geométricos	3
1.1	Triângulos	3
1.2	Lugares Geométricos	10
1.3	Pontos Notáveis em Triângulos	13
1.4	Área de Triângulos	20
2	Elipses	24
2.1	Forma Canônica	24
2.2	Rotação dos Eixos Coordenados	28
2.3	Forma Paramétrica	30
3	Elipses Inscritas em Triângulos	34
4	Transformações Afins	41
4.1	Combinações Afins	41
4.2	Coordenadas Baricêntricas	42
4.3	Transformações no Plano	45
4.4	Transformações Afins	48
5	Números Complexos	56
5.1	Forma Algébrica	56
5.2	Forma Trigonométrica	60
6	Elipse de Steiner	69
7	Conclusão	78

Lista de Figuras

1.1	Correspondência entre os vértices A e E , B e F , C e G de dois triângulos congruentes.	4
1.2	LAL	5
1.3	ALA	5
1.4	LLL	5
1.5	Cateto \times Hipotenusa	5
1.6	Ângulos alternos internos.	6
1.7	A soma dos ângulos internos de um triângulo.	6
1.8	Medida da base média de um triângulo.	7
1.9	Lei dos senos	8
1.10	Lei dos cossenos, caso em que $\angle B$ agudo	9
1.11	Lei dos cossenos, caso em que $\angle B$ é obtuso.	9
1.12	Circunferência de centro O e raio r	11
1.13	$P \in m \implies PA = PB$	11
1.14	$PA = PB \implies P \in$ (mediatriz de AB)	12
1.15	A bissetriz do ângulo $\angle AOB$	12
1.16	O circuncentro de um triângulo.	13
1.17	A circunferência circunscrita em um triângulo.	14
1.18	O incentro de um triângulo.	14
1.19	Construção da reta t tangente à circunferência λ em P	15
1.20	A circunferência inscrita em um triângulo.	15
1.21	A circunferência λ tangente nos pontos médios dos lados do triângulo ABC . . .	16
1.22	O ortocentro de um triângulo retângulo é o vértice do ângulo reto.	17
1.23	O ortocentro de um triângulo acutângulo.	17
1.24	O ortocentro de um triângulo obtusângulo.	18

1.25	O baricentro de um triângulo.	19
1.26	O baricentro de um triângulo equilátero coincide com o incentro e o circuncentro.	19
1.27	Fórmula do seno	20
1.28	Área do triângulo utilizando o raio da circunferência inscrito.	23
2.1	Elementos da Elipse	24
2.2	Elipse com a reta focal coincidente com o eixo OX	25
2.3	Elipse com a reta focal coincidente com o eixo OY	26
2.4	Translação dos eixos coordenados	27
2.5	Elipse transladada com a reta focal paralela ao eixo OX	27
2.6	Elipse transladada com a reta focal paralela ao eixo OY	28
2.7	Rotação de ângulo θ entre os eixos OX e $O\bar{X}$	29
2.8	Parametrização da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $r > 0$	31
2.9	Parametrização da circunferência de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$	32
2.10	Interpretação geométrica da parametrização da elipse ε	33
3.1	Reta t tangente à elipse ε	35
3.2	Construção da elipse inscrita em um triângulo.	36
3.3	Elipses inscritas em um triângulos.	36
3.4	Os conjugados isogonais de um triângulo.	37
3.5	Foco coincidente com o incentro.	38
3.6	Foco coincidente com o ortocentro.	38
3.7	O ortocentro de um triângulo acutângulo.	39
3.8	O ortocentro de um triângulo retângulo coincide com o vértice do ângulo reto.	39
3.9	O ortocentro de um triângulo obtusângulo.	40
4.1	A reta que passa por A e B	42
4.2	P pertencente a CD	44
4.3	O baricentro e as três medianas do triângulo ABC	44
4.4	A translação T_r aplicada na reta r e no sistema de eixos ortogonais OXY	45
4.5	Rotação de ângulo α aplicada no ponto P	46
4.6	Reflexão em torno da reta r coincidente com o eixo OX	47
4.7	Homotetia de centro O e razão 2 aplicada em um triângulo ABC	48

5.1	Representação dos complexos no plano de Argand-Gauss	58
5.2	Argumento de um número complexo	60
5.3	Representação geométrica do produto de complexos	61
5.4	Representação geométrica das raízes n-ésimas de complexos	66
5.5	Triângulo equilátero de vértices z_1, z_2 e z_3	67
6.1	Elipse de Steiner no triângulo de vértices $z_1 = 6i, z_2 = 5 + i$ e $z_3 = -5 + i$	75

Introdução

Sabemos que em todo triângulo existe uma circunferência inscrita, porém não é trivial que exista uma elipse inscrita. Na verdade, existem infinitas elipses inscritas em um triângulo. O objetivo deste trabalho é demonstrar que dentre estas elipses, existe apenas uma com características especiais que são: tangenciar o triângulo nos pontos médios dos lados, ter a maior área e ainda possuir seu centro coincidente com o baricentro. Esta elipse é denominada elipse de Steiner.

Este trabalho está dividido em seis capítulos. O primeiro capítulo contém um breve estudo sobre triângulos, com foco principal nos lugares geométricos e pontos notáveis. Dos pontos notáveis destacamos o baricentro, pois ele é o centro da elipse de Steiner. Apresentamos também algumas fórmulas para o cálculo de áreas dos triângulos, como a fórmula do seno e a fórmula de Herão. No segundo capítulo definimos elipses, identificando seus elementos e obtemos algumas de suas equações nas formas canônica e paramétrica. Já no terceiro, demonstramos um método de construção de uma elipse inscrita num triângulo, dado, como um dos focos, um ponto no interior deste. E assim, mostramos que existem infinitas elipses inscritas em um triângulo.

No quarto capítulo, introduzimos o conceito de combinações afins e mostramos que numa combinação afim $P = \lambda A + \mu B + \gamma C$, com $\lambda + \mu + \gamma = 1$, o ponto P pertence ao triângulo quando $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\gamma \geq 0$, que é o caso do baricentro. Ainda neste capítulo temos alguns tipos de transformações no plano, como rotações, translações, reflexões e homotetias. O foco principal deste capítulo são as transformações afins de posto dois, pois são elas que levam retas paralelas em retas paralelas, círculos em elipses, pontos médios em pontos médios, baricentro em baricentro. Estas são ferramentas fundamentais para a demonstração do teorema de Steiner.

No capítulo cinco, apresentamos os números complexos explicitando, inicialmente, sua definição algébrica, sua representação no plano de Argand-Gauss e algumas propriedades de suas operações. Em seguida, temos a representação trigonométrica, com algumas operações e propriedades. Finalmente, o capítulo seis contém a demonstração do teorema de Steiner. Para

realizar esta demonstração, foram utilizados resultados estudados nos capítulos quatro e cinco. Neste capítulo estudamos as coordenadas dos focos e do baricentro; demonstramos a existência e a unicidade desta elipse; e demonstramos que a elipse de Steiner é a que possui maior área.

Capítulo 1

Lugares Geométricos

Neste capítulo serão abordadas definições preliminares sobre triângulos e congruências, indicando cinco casos em que isto ocorre. No entanto, o principal assunto abordado neste, é lugares geométricos e pontos notáveis em um triângulo. Traremos também alguns conceitos de área de triângulos, apresentando algumas formas, não muito usuais, como a fórmula do seno e a fórmula de Herão. Este capítulo teve como base [2], [9] e [10].

1.1 Triângulos

Sabemos que três pontos distintos e não colineares A , B e C formam um triângulo e que este triângulo pode ser classificado de três modos em relação às medidas de seus lados: equilátero (quando todos os três lados têm mesma medida), isósceles (quando apenas dois lados têm mesma medida) ou escaleno (quando todos os lados têm medidas diferentes). Há também a classificação de acordo com seus ângulos: acutângulo (quando possui todos os ângulos agudos, isto é, menores que 90°), retângulo (quando possui exatamente um ângulo reto) e obtusângulo (quando possui um ângulo obtuso, maior de 90°).

É importante observar que utilizaremos AB para denotar o segmento AB e \overline{AB} para representar a medida do segmento AB . Do mesmo modo, $\angle A$ representa o ângulo A e $m(\angle A)$ a medida do ângulo A .

Definição 1 *Dados dois segmentos AB e CD e dois ângulos $\angle A$ e $\angle B$, diremos que $AB = CD$ quando $\overline{AB} = \overline{CD}$ e diremos que dois ângulos $\angle A = \angle B$ quando $m(\angle A) = m(\angle B)$.*

Para simplificar a notação, usaremos o símbolo “=” para significar congruência. Desse modo,

$AB = CD$ deve ser lido como AB é congruente a CD e $\angle A = \angle B$ deve ser lido como ângulo A é congruente ao ângulo B .

Definição 2 *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

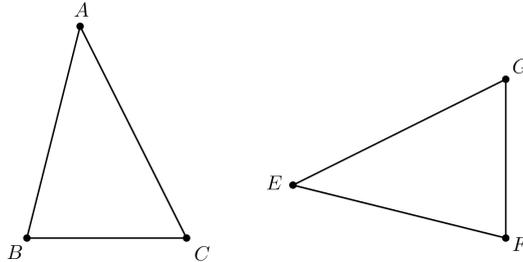


Figura 1.1: Correspondência entre os vértices A e E , B e F , C e G de dois triângulos congruentes.

Se ABC e EFG são dois triângulos congruentes e se

$$A \leftrightarrow E$$

$$B \leftrightarrow F$$

$$C \leftrightarrow G$$

é a correspondência que define a congruência, então valem, simultaneamente, as seis condições:

$$AB = EF \quad BC = FG \quad AC = EG$$

$$\angle A = \angle E \quad \angle B = \angle F \quad \angle C = \angle G$$

Para facilitar a verificação de congruência de triângulos, existem alguns critérios que são chamados de **casos de congruência de triângulos**. De modo geral, podemos afirmar que dois triângulos são congruentes, quando eles satisfazem pelo menos uma das seguintes condições dadas nos casos abaixo:

Caso 1: [LAL (Lado, Ângulo, Lado)] Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por estes dois lados forem respectivamente congruentes a dois lados de um outro triângulo e ao ângulo formado por estes dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

Caso 2: [ALA (Ângulo, Lado, Ângulo)] Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre estes dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

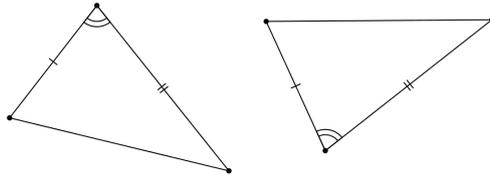


Figura 1.2: LAL

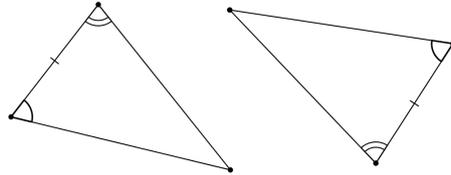


Figura 1.3: ALA

Caso 3: [LLL (Lado, Lado, Lado)] Se dois triângulos tem três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes.

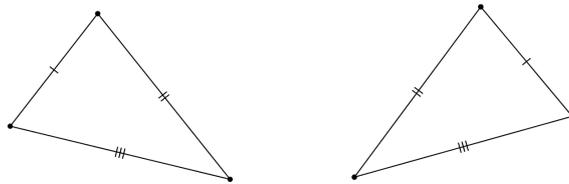


Figura 1.4: LLL

Caso 4: [CH (Cateto, Hipotenusa)] Se dois triângulos retângulos têm congruentes um cateto e a hipotenusa, então eles são congruentes.

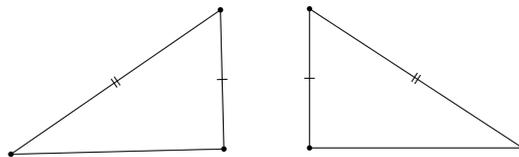


Figura 1.5: Cateto \times Hipotenusa

Dados no plano uma reta r e um ponto $A \notin r$, assumimos a unicidade da paralela como um postulado, **quinto postulado de Euclides**, conforme enunciado a seguir:

Postulado 1 *Dados no plano, uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s , paralela a r e passando por A .*

Através deste postulado é possível demonstrar alguns resultados importantes da Geometria Euclidiana, como por exemplo o **Teorema dos ângulos alternos-internos** apresentado na proposição a seguir.

Proposição 1 *Sejam duas retas cortadas por uma transversal comum. Um par de ângulos alternos internos é formado por ângulos congruentes se, e somente se, as retas são paralelas.*

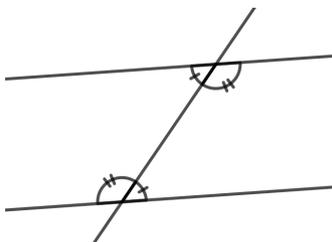


Figura 1.6: Ângulos alternos internos.

Uma consequência relevante deste teorema está apresentado na seguinte proposição.

Proposição 2 *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .*

Demonstração:

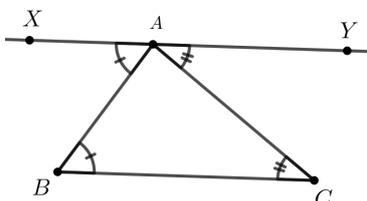


Figura 1.7: A soma dos ângulos internos de um triângulo.

Sejam ABC um triângulo qualquer, uma reta r paralela a BC , passando por A e $X, Y \in r$ tais que $A \neq X$, $A \neq Y$ e $A \in XY$. Pelo Teorema dos ângulos alternos internos, temos que $\angle B = \angle BAX$ e $\angle C = \angle CAY$, de sorte que

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = m(\angle A) + m(\angle BAX) + m(\angle CAX) = 180^\circ.$$

■

Uma base média de um triângulo é o segmento que une dois pontos médios de seus lados. Assim, todo triângulo tem exatamente três bases médias. Em relação estes segmentos, temos um resultado conhecido como **Teorema da Base Média**.

Proposição 3 *Seja ABC um triângulo qualquer. Se MN é a base média de ABC relativa a BC , então MN e BC são paralelos. Reciprocamente, se pelo ponto médio M do lado AB traçarmos uma paralela ao lado BC , então tal reta intersecta o lado AC em seu ponto médio N . Ademais, em qualquer dos casos acima, temos*

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$$

Demonstração: Para a primeira parte, tome M' sobre a semirreta de origem M que contém N tal que $MN = NM'$. Como N é o ponto médio de AC e $\angle ANM = \angle CNM'$ (pois são ângulos opostos pelo vértice) os triângulos AMN e $CM'N$ são congruentes pelo caso LAL. Portanto $M'C = MA$ e $\angle M'CN = \angle MAN$, donde segue que pelo Teorema dos ângulos alternos internos, as retas que contém $M'C$ e AM são paralelas. Assim, $BM = AM = M'C$ e BM é paralelo a $M'C$. Estes fatos nos garantem que o quadrilátero $MBCM'$ é um paralelogramo. E, como em todo paralelogramo os lados opostos são iguais e paralelos, temos

$$BC \text{ e } MN \text{ são paralelos e, } \overline{BC} = \overline{MM'} = 2 \cdot \overline{MN}.$$

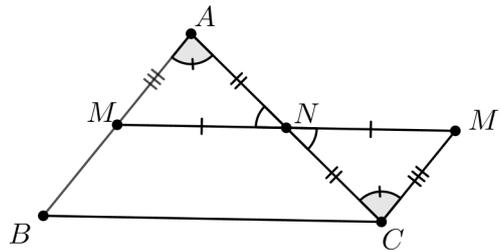


Figura 1.8: Medida da base média de um triângulo.

Reciprocamente, seja r a reta que passa pelo ponto médio M do lado AB e é paralela ao lado BC . Como a reta que contém MN também passa por M e é paralela a BC , segue do quinto postulado de Euclides que r contém MN ; e em particular, $N \in r$. ■

Proposição 4 *Se R é o raio da circunferência circunscrita a um triângulo de lados a , b e c , então*

$$\frac{a}{\text{sen}(\angle A)} = \frac{b}{\text{sen}(\angle B)} = \frac{c}{\text{sen}(\angle C)} = 2R.$$

Demonstração:

Considere um triângulo ABC , donde $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$ e ABC inscrito no círculo λ de raio R e centro O . Seja A' o ponto simétrico ao ponto B em relação ao O . Temos então

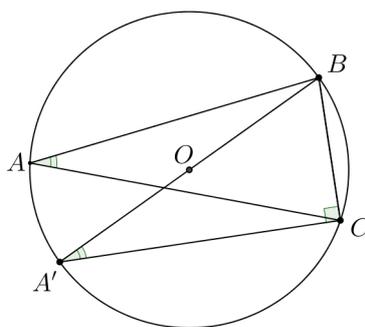


Figura 1.9: Lei dos senos

que os ângulos $\angle A$ e $\angle A'$ são congruentes, pois estão inscritos no mesmo arco, e que o triângulo $A'BC$ é retângulo em C pois este ângulo está inscrito num arco de 180° . Dessa forma, usando a relação trigonométrica do seno no triângulo $A'BC$ temos que

$$\text{sen}(\angle A') = \frac{a}{2R} \Leftrightarrow 2R = \frac{a}{\text{sen}(\angle A')} \Leftrightarrow 2R = \frac{a}{\text{sen}(\angle A)}.$$

De modo análogo, provamos que $2R = \frac{b}{\text{sen}(\angle B)}$ e $2R = \frac{c}{\text{sen}(\angle C)}$. Portanto,

$$\frac{a}{\text{sen}(\angle A)} = \frac{b}{\text{sen}(\angle B)} = \frac{c}{\text{sen}(\angle C)} = 2R.$$

■

Proposição 5 *Em um triângulo ABC qualquer, para lados opostos aos ângulos internos A , B e C com medidas respectivamente a , b e c valem as relações:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\angle A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\angle B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\angle C)$$

Demonstração: Caso 1: (ângulo $\angle B$ agudo)

Seja \overline{AD} a altura relativa ao lado \overline{BC} e $m = BD$. Temos então que o triângulo ABC foi dividido em outros dois triângulos retângulos ABD e ADC . Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABD obtemos que

$$c^2 = h^2 + m^2 \implies h^2 = c^2 - m^2 \quad (i)$$

Fazendo o mesmo no triângulo ADC temos que

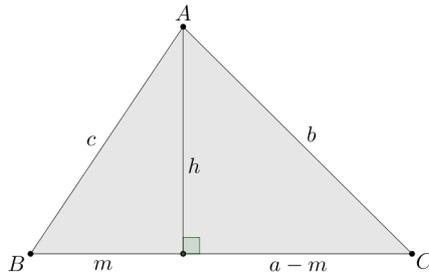


Figura 1.10: Lei dos cossenos, caso em que $\angle B$ agudo

$$b^2 = h^2 + (a - m)^2 \implies b^2 = h^2 + a^2 - 2am + m^2 \quad (ii)$$

de (i) e (ii) temos que

$$b^2 = c^2 - m^2 + a^2 - 2am + m^2 \implies b^2 = c^2 + a^2 - 2am \quad (iii)$$

No triângulo ABD temos que

$$\cos(\angle B) = \frac{m}{c} \implies m = c \cdot \cos(\angle B) \quad (iv)$$

de (iii) e (iv) temos

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos(\angle B).$$

Caso 2: (ângulo $\angle B$ obtuso)

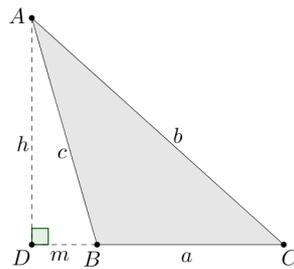


Figura 1.11: Lei dos cossenos, caso em que $\angle B$ é obtuso.

Seja AD a altura relativa ao lado \overline{BC} e $m = BD$. Temos então dois triângulos retângulos ABD e ADC . Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABD obtemos que

$$c^2 = h^2 + m^2 \implies h^2 = c^2 - m^2 \quad (i)$$

Fazendo o mesmo no triângulo ADC temos que

$$b^2 = h^2 + (a + m)^2 \implies b^2 = h^2 + a^2 + 2am + m^2 \quad (ii)$$

de (i) e (ii) temos que

$$b^2 = c^2 - m^2 + a^2 + 2am + m^2 \implies b^2 = c^2 + a^2 + 2am \quad (iii)$$

No triângulo ABD temos que

$$\begin{aligned} \cos(\angle ABD) &= \cos(\pi - \angle B) = -\cos(\angle B) \\ -\cos(\angle B) &= \frac{m}{c} \implies m = -c \cdot \cos(\angle B) \end{aligned} \quad (iv)$$

de (iii) e (iv) temos

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos(\angle B).$$

De modo análogo, mostramos que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\angle A)$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\angle C)$.

1.2 Lugares Geométricos

Definição 3 *Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano, o **lugar geométrico** dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto L do plano que satisfaz as duas condições a seguir:*

- i) Todo ponto de L possui a propriedade P .*
- ii) Todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a L .*

Em outras palavras, L é o lugar geométrico da propriedade P se L for constituído por todos os pontos do plano que têm a propriedade P . A seguir, vamos definir alguns lugares geométricos, assim como algumas propriedades e aplicações dos mesmos.

Exemplo 1 *A circunferência é o lugar geométrico dos pontos P que distam r (raio) de um ponto O (centro).*

Definição 4 *Dados dois pontos A e B no plano, a **mediatriz** do segmento AB é a reta perpendicular a AB e que passa por seu ponto médio.*

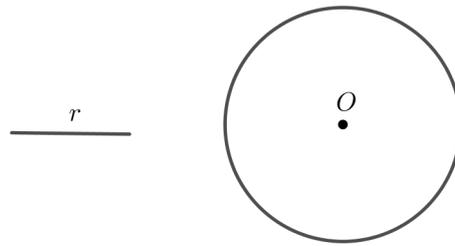


Figura 1.12: Circunferência de centro O e raio r .

De acordo com a proposição a seguir, podemos caracterizar a mediatriz de um segmento como um lugar geométrico.

Proposição 6 *Dados os pontos A e B no plano, a mediatriz do segmento AB é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de A e de B .*

Demonstração: Seja M o ponto médio e m a mediatriz do segmento AB . Se $P \in m$, então, os triângulos PAM e PBM são congruentes pelo caso LAL, pois PM é comum a ambos os triângulos, $m(\angle PMA) = m(\angle PMB) = 90^\circ$, $AM = BM$. Logo $PA = PB$.

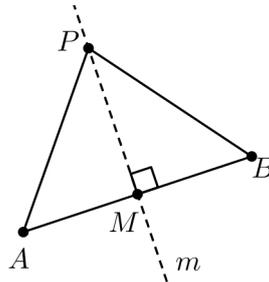


Figura 1.13: $P \in m \implies PA = PB$

Reciprocamente, seja um ponto P do plano tal que $PA = PB$ e M o ponto médio de AB . Daí, os triângulos PAM e PBM são congruentes pelo caso LLL, pois $PA = PB$, $AM = BM$, PM é comum a ambos, logo, $m(\angle PMA) = m(\angle PMB)$. Como $m(\angle PMA) + m(\angle PMB) = 180^\circ$ então $m(\angle PMA) = m(\angle PMB) = 90^\circ$ e PM é perpendicular ao segmento AB . Portanto a reta que contém o segmento PM é a mediatriz de AB . ■

Definição 5 *Dado um ângulo $\angle AOB$ no plano, a **bissetriz** de $\angle AOB$ é a semirreta que possui origem no vértice do ângulo e que divide $\angle AOB$ em dois ângulos congruentes.*

Uma caracterização da bissetriz como lugar geométrico está essencialmente contida na proposição a seguir.

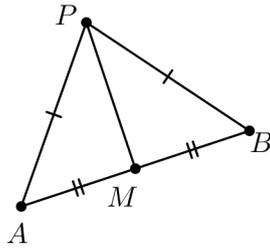


Figura 1.14: $PA = PB \implies P \in (\text{mediatriz de } AB)$

Proposição 7 *Seja $\angle AOB$ um ângulo dado. O ponto P interior ao ângulo é equidistante dos lados se, e somente se, P pertence à bissetriz de $\angle AOB$.*

Demonstração: Seja P o ponto no interior de $\angle AOB$ de modo que $PM = PN$, onde M e N são os pés das perpendiculares baixadas de P respectivamente às semirretas de origem O que passam por A e B . Então os triângulos MOP e NOP são congruentes, pelo caso CH, pois a hipotenusa OP é comum em ambos os triângulos e $PM = PN$. Daí, $\angle MOP = \angle NOP$ e portanto, P pertence à bissetriz de AOB .

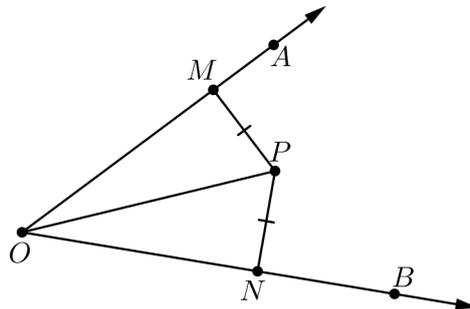


Figura 1.15: A bissetriz do ângulo $\angle AOB$

Reciprocamente, suponha que P pertença à bissetriz de $\angle AOB$ e sejam M e N os pés das perpendiculares baixadas de P respectivamente às semirretas OA e OB de origem O . Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , segue que os $\angle MPO = \angle NPO$. Dessa forma os triângulos OMP e ONP são congruentes, pelo caso ALA, pois OP é comum a ambos os triângulos, $\angle MOP = \angle NOP$ e $m(\angle MPO) = m(\angle NPO)$. Daí, $PM = PN$ e portanto, P equidista das semirretas OA e OB . ■

1.3 Pontos Notáveis em Triângulos

Desenvolvendo os conceitos de lugares geométricos nos triângulos obtemos alguns pontos notáveis, denominados de incentro, circuncentro, ortocentro e baricentro.

Proposição 8 *Em todo triângulo, as mediatrizes passam todas por um mesmo ponto, o **circuncentro** do triângulo.*

Demonstração: Sejam ABC um triângulo qualquer, r , s e t , respectivamente as mediatrizes dos lados BC , AC e AB , e O o ponto de interseção das retas r e s .

Pela caracterização da mediatriz de um segmento como um lugar geométrico, temos que $OB = OC$ (pois $O \in r$) e $OC = OA$ (pois $O \in s$). Portanto, $OB = OA$ e segue, novamente da caracterização da mediatriz como um lugar geométrico que $O \in t$.

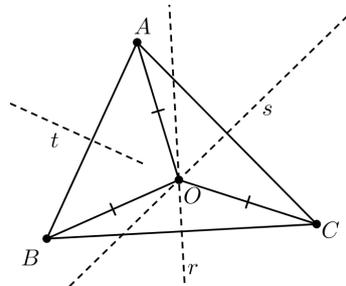


Figura 1.16: O circuncentro de um triângulo.

Proposição 9 *Todo triângulo admite uma única circunferência passando por seus vértices. Tal circunferência é dito circunscrito ao triângulo e seu centro é o circuncentro do mesmo.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo de circuncentro O . Como O é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo, temos $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Denotando R tal distância comum, segue que a circunferência de centro O e raio R passa por A , B e C . Existe, portanto, uma circunferência passando pelos vértices do triângulo ABC .

Reciprocamente, o centro de uma circunferência que passe pelos vértices de ABC deve equidistar dos mesmos. Portanto, o centro pertence às mediatrizes dos lados ABC , de forma que coincide com o ponto de interseção das mesmas, isto é, com o circuncentro O de ABC . Por fim, o raio da circunferência, sendo a distância de O aos vértices, é igual a R . ■

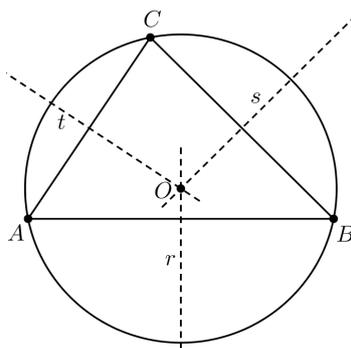


Figura 1.17: A circunferência circunscrita em um triângulo.

Proposição 10 *As bissetrizes internas de todo triângulo concorrem em um único ponto, o **incentro** do triângulo.*

Demonstração: Sejam r , s e t , respectivamente, as bissetrizes internas dos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ do triângulo ABC e I o ponto de interseção das retas s e t . Como $I \in s$ segue pela caracterização da bissetriz como lugar geométrico, que I equidista dos lados AB e BC . De modo análogo, como $I \in t$, I equidista dos lados AC e CB . Portanto I equidista de AC e AB e, usando novamente a caracterização das bissetrizes como lugar geométrico, concluímos que I pertence à bissetriz de $\angle A$, isto é, $I \in r$.

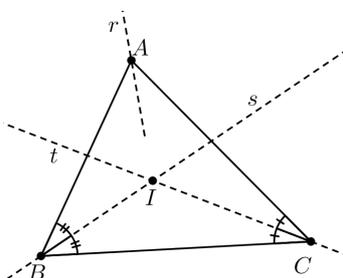


Figura 1.18: O incentro de um triângulo.

■

Definição 6 *Uma circunferência λ e uma reta r são tangentes ou, ainda, a reta r é tangente à circunferência λ se r e λ tiverem exatamente um ponto P em comum.*

A proposição a seguir nos ensina como construir uma reta tangente a uma circunferência dada passando por um ponto da mesma.

Proposição 11 *Sejam λ uma circunferência de centro O e P um ponto de λ . Se t é a reta que passa por P e é perpendicular a OP então t é tangente a λ .*

Demonstração: Seja R o raio de λ . Se $Q \neq P$ é outro ponto de t , temos que $QO > PO > R$, uma vez que $m\angle QPO = 90^\circ$ é o maior ângulo do triângulo OPQ . Portanto, $Q \notin \lambda$, assim, P é o único ponto comum a t e λ . ■

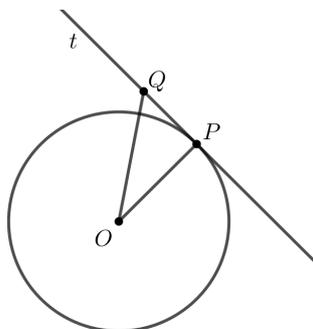


Figura 1.19: Construção da reta t tangente à circunferência λ em P .

Proposição 12 *Todo triângulo admite uma única circunferência contida no mesmo e tangente a seus lados. Tal circunferência é dita inscrita no triângulo e seu centro é o incentro do triângulo.*

Demonstração: Seja I o incentro do triângulo ABC . Como I é o ponto de interseção das bissetrizes internas de ABC , temos que I equidista dos lados de ABC . Sendo r tal distância comum aos lados, segue que a circunferência de centro I e raio r está contida em ABC e tangencia seus lados.

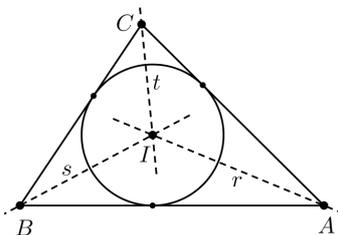


Figura 1.20: A circunferência inscrita em um triângulo.

Reciprocamente, o centro de uma circunferência inscrita no triângulo ABC que tangencia seus lados, deve equidistar dos mesmos. Portanto, o centro pertence às bissetrizes dos ângulos

do triângulo ABC , de forma que coincida com o ponto de interseção das mesmas, isto é, com o incentro I de ABC . Por fim, o raio da circunferência, sendo a distância de I aos pés das perpendiculares baixadas de I aos lados de ABC , é igual a r . ■

Um resultado interessante que é usado na prova do teorema de Steiner é que:

Proposição 13 *Uma circunferência inscrita em um triângulo tangencia os lados em seus pontos médios se, e somente se, este triângulo é equilátero.*

Demonstração: Seja λ a circunferência inscrita no triângulo ABC e tangente aos lados AB , AC e BC , respectivamente nos pontos médios M , N e P .

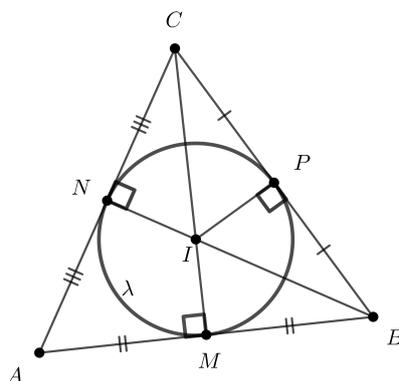


Figura 1.21: A circunferência λ tangente nos pontos médios dos lados do triângulo ABC

O incentro I é equidistante dos lados do triângulo, isto é, $IM = IN = IP$. Daí temos que os triângulos MIB e PIB são congruentes pelo caso CH. De modo análogo, $MIA = NIA$ e $CPI = CNI$. Logo $PB = BM = MA = AN = NC = CP$. Portanto o triângulo ABC é equilátero.

Reciprocamente, seja o triângulo ABC equilátero e λ a circunferência inscrita neste triângulo tangente aos lados AB , AC e BC , respectivamente, nos M , N e P . Como o triângulo ABC é equilátero, temos que as mediatrizes e as bissetrizes coincidem, logo o incentro I equidista tanto dos lados dos triângulos, quanto dos vértices. Isto é, $IA = IB = IC$ e $IM = IN = IP$. Dessa forma, temos que os triângulos MIB , BIP , PIC e CIN são congruentes pelo caso CH. Então $BP = PC$, $CN = NA$ e $AM = MB$. Portanto, a circunferência λ tangencia o triângulo nos pontos médios. ■

Definição 7 *Em um triângulo ABC , a **altura** relativa ao lado BC (ou ao vértice A) é o segmento que une o vértice A ao pé da perpendicular baixada de A à reta que contém BC . Nesse caso, denominamos o pé da perpendicular em questão de pé da altura relativa a BC .*

Analogamente, temos em ABC as alturas relativas aos lados AC e AB , de modo que todo triângulo possui exatamente três alturas.

Proposição 14 *Em todo triângulo, as três alturas ou seus prolongamentos se intersectam em um só ponto, o **ortocentro** do triângulo.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer. Temos então três casos a considerar:

(i) ABC é retângulo:

Suponhamos, sem perda de generalidade, que ABC é reto em B . Então, B é o pé das alturas relativas aos lados AB e AC . Como a altura relativa ao lado AC passa por B , segue que as alturas de ABC concorrem em B , o ortocentro.

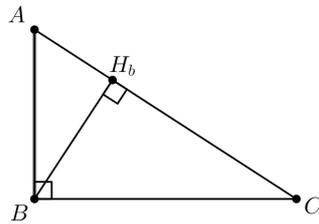


Figura 1.22: O ortocentro de um triângulo retângulo é o vértice do ângulo reto.

(ii) ABC é acutângulo:

Seja, respectivamente, por A , B e C , as retas r , s e t paralelas a BC , CA e AB , respectivamente, e sejam $r \cap s = \{P\}$, $s \cap t = \{M\}$ e $r \cap t = \{N\}$. Então os quadriláteros $ABCN$ e $ABMC$ são paralelogramos, e assim $CN = AB = CM$ e daí, C é o ponto médio de MN . Analogamente, B é o ponto médio de MP e A é o ponto médio de NP .

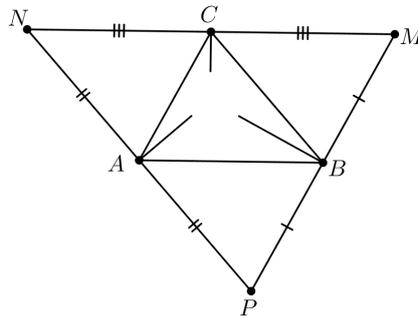


Figura 1.23: O ortocentro de um triângulo acutângulo.

Por outro lado, a altura relativa a BC também é perpendicular a NP , já que as retas que contém BC e NP são paralelas. Do mesmo modo, as alturas relativas a AC e AB são

respectivamente perpendiculares a MP e MN . Segue que as alturas do triângulo ABC são as mediatrizes do triângulo MNP . Como já provamos que as mediatrizes de um triângulo se intersectam em um único ponto, concluímos que as alturas de ABC são concorrentes.

(iii) ABC é obtusângulo:

Este caso é análogo ao caso (ii)

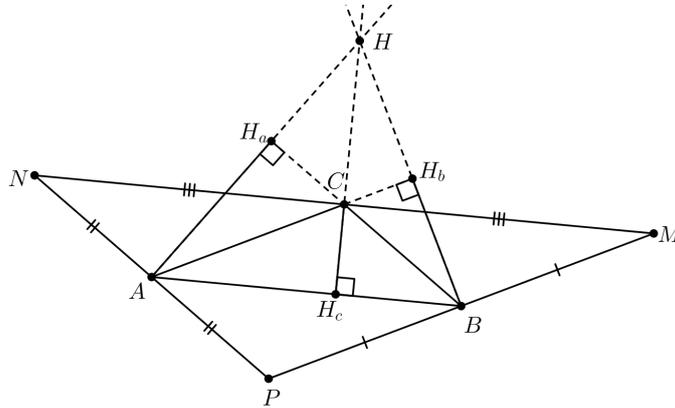


Figura 1.24: O ortocentro de um triângulo obtusângulo.

Definição 8 Em um triângulo, os segmentos que ligam um vértice ao ponto médio de seu lado oposto são chamados de medianas do triângulo.

Proposição 15 Em todo triângulo, as três medianas se intersectam em um só ponto, o **baricentro** do triângulo. Ademais, o baricentro divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão $2 : 1$.

Demonstração: Sejam N e P , respectivamente os pontos médios dos lados AC e AB , e seja $BN \cap CP = G_1$. Sejam ainda, S e T os pontos médios dos segmentos BG_1 e CG_1 , respectivamente. Observe agora que NP é a base média de ABC relativa a BC e ST é a base média de BCG_1 relativa a BC ; logo, pelo Teorema da Base Média, tanto NP quanto ST são paralelos a BC e têm comprimento igual à metade de BC . Portanto $NP = ST$ e, NP e ST são paralelos, de modo que, $NPST$ é um paralelogramo. Sobre os paralelogramos, temos que suas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios, daí, $PG_1 = G_1T$ e $NG_1 = G_1S$. Mas como $BS = SG_1$ e $CT = TG_1$, segue que $BS = SG_1 = G_1N$ e $CT = TG_1 = G_1P$, igualdades que por sua vez fornecem $\overline{BG_1} = 2\overline{G_1N}$ e $\overline{CG_1} = 2\overline{G_1P}$.

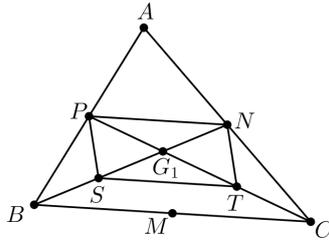


Figura 1.25: O baricentro de um triângulo.

Agora, se M for o ponto médio de BC e G_2 for o ponto de interseção das medianas AM e BN , concluímos, analogamente, que G_2 divide AM e BN na razão $2 : 1$ a partir de cada vértice. Mas, daí, segue que os pontos G_1 e G_2 são tais que $\overline{BG_1} = 2\overline{G_1N}$ e $\overline{BG_2} = 2\overline{G_2N}$, isso implica, que G_1 e G_2 são pontos coincidentes. Por fim, chamamos este ponto de G e segue que AM , BN e CP concorrem em G e que G divide cada uma das medianas na razão $2 : 1$ a partir do vértice correspondente. ■

Proposição 16 *A circunferência circunscrita em um triângulo equilátero possui o dobro do raio da circunferência inscrita neste triângulo.*

Demonstração:

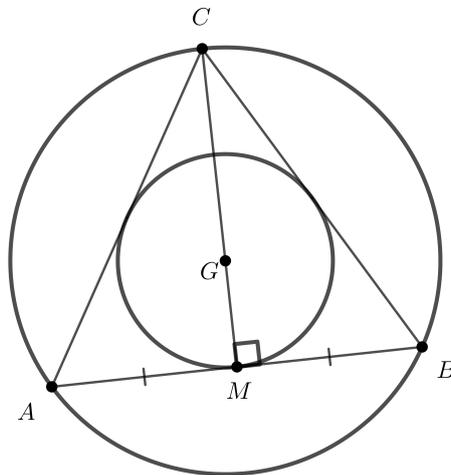


Figura 1.26: O baricentro de um triângulo equilátero coincide com o incentro e o circuncentro.

Sejam o triângulo ABC equilátero, λ_i a circunferência inscrita em ABC e λ_c a circunferência circunscrita a este triângulo. Como o triângulo é equilátero, sabemos que a mediatriz coincide com a bissetriz e conseqüentemente, também coincide com a mediana. Considere G o baricentro

(coincidente com o incentro e o circuncentro) e M o ponto médio do lado AB . Então pela proposição 15 temos que $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM}$. Portanto o raio da circunferência circunscrita é o dobro do raio da inscrita em um triângulo equilátero. ■

Destes quatro pontos notáveis, o mais importante para nossa abordagem é o baricentro, pois é este o ponto que coincide com o centro da elipse de Steiner, fato este que veremos no decorrer deste trabalho.

1.4 Área de Triângulos

Em relação à área de triângulos, a forma mais usual de obtê-la é através da metade do produto das medidas da base e da altura. No entanto, temos outras maneiras de a calcular, como por exemplo, a **fórmula do seno** para áreas de triângulo expressa na proposição a seguir.

Proposição 17 *Se ABC é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, ângulos internos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$, e R o raio da circunferência circunscrita, então*

$$A(ABC) = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen}(\angle A) = \frac{abc}{4R}$$

Demonstração:

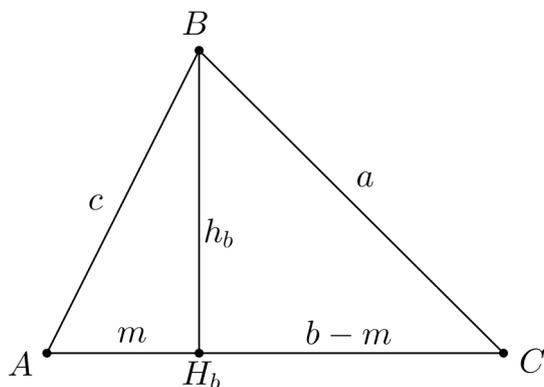


Figura 1.27: Fórmula do seno

Considere um triângulo ABC , em que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$, $\overline{BH_b} = h_b$ a altura relativa ao lado AC e $\overline{AH_b} = m$. Daí,

$$A(ABC) = \frac{1}{2}bh_b. \quad (i)$$

Por outro lado, temos no triângulo BH_bC que

$$\text{sen}(\angle C) = \frac{h_b}{a} \implies h_b = a \cdot \text{sen}(\angle C). \quad (ii)$$

De (i) e (ii), segue que $A(ABC) = \frac{1}{2}ba \cdot \text{sen}(\angle C)$. Pela proposição 4, temos que

$$\frac{c}{\text{sen}(\angle C)} = 2R \implies \text{sen}(\angle C) = \frac{c}{2R}.$$

Portanto,

$$A(ABC) = \frac{1}{2}ba \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

■

Outra forma de se calcular a área de triângulos é por meio da fórmula de Herão, em que:

Proposição 18 *Se um triângulo ABC possui os lados medindo a, b e c e seu perímetro é representado por $2s = a + b + c$, então a área do triângulo ABC é dada por*

$$A(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

.

Demonstração: Pela proposição 17, temos que

$$A(ABC) = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen}(\angle A) \implies 4 \cdot A(ABC) = 4 \cdot \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen}(\angle A) = 2bc \cdot \text{sen}(\angle A)$$

Elevando ambos os membros ao quadrado obtemos,

$$16A(ABC)^2 = 4b^2c^2 \cdot \text{sen}^2(\angle A) = 4b^2c^2 \text{sen}^2(\angle A) \quad (i)$$

Como $\text{sen}^2(\angle A) + \cos^2(\angle A) = 1$, então

$$16A(ABC)^2 = 4b^2c^2 \cdot (1 - \cos^2(\angle A)) \quad (ii)$$

Pela lei dos cossenos temos

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\angle A) &\implies 2bc \cdot \cos(\angle A) = b^2 + c^2 - a^2 \\ &\implies \cos(\angle A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (iii) \end{aligned}$$

De (ii) e (iii) segue que

$$\begin{aligned}
16A(ABC)^2 &= 4b^2c^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2\right) \\
&= 4b^2c^2 \cdot \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \\
&= (2bc - (b^2 + c^2 - a^2))(2bc + (b^2 + c^2 - a^2)) \\
&= (2bc - (b^2 + c^2) + a^2)(2bc + (b^2 + c^2) - a^2) \\
&= (-(b - c)^2 + a^2)((b + c)^2 - a^2) \\
&= (-(b - c) + a)((b - c) + a)((b + c) - a)((b + c) + a) \\
&= (a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)(a + b + c) \\
&= (2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2a)2s \\
&= 2(s - b)2(s - c)2(s - a)2s \\
&= 16s(s - a)(s - b)(s - c).
\end{aligned}$$

O que nos dá que

$$A(ABC)^2 = s(s - a)(s - b)(s - c).$$

Portanto,

$$A(ABC) = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

.

Proposição 19 *Se um triângulo ABC possui os lados medindo a , b e c , e r é a medida do raio da circunferência inscrita a este triângulo, então $A(ABC) = r \cdot s$, onde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ é o semiperímetro do triângulo.*

Demonstração:

Seja o triângulo ABC com os lados BC , AC e AB medindo respectivamente, a , b e c , e I o incentro deste triângulo. Temos então que o triângulo ABC pode ser decomposto em outros três, ABI , BCI e ACI . Temos assim que

$$A(ABC) = A(BCI) + A(ACI) + A(ABI) \quad (i)$$

Como a circunferência tangencia os três lados do triângulo ABC , temos que a altura dos triângulos BCI , ACI e ABI é r . Logo, por (i), temos

$$A(ABC) = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r = r \cdot \frac{1}{2}(a + b + c) = r \cdot s.$$

■

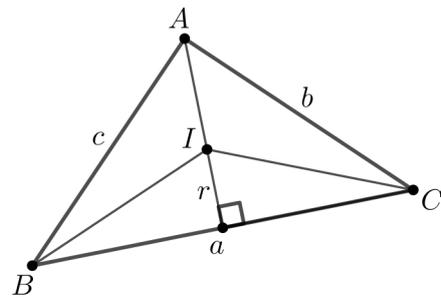


Figura 1.28: Área do triângulo utilizando o raio da circunferência inscrito.

Capítulo 2

Elipses

Neste capítulo traremos um breve estudo sobre elipses. Inicialmente as definiremos, identificando seus elementos. Em seguida, será abordada sua equação na forma canônica em algumas situações, finalizando com a equação na forma paramétrica. Este capítulo teve como base [3].

2.1 Forma Canônica

Definição 9 *Uma elipse ε de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, $0 \leq c < a$, $d(F_1, F_2) = 2c$ e $\varepsilon = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$*

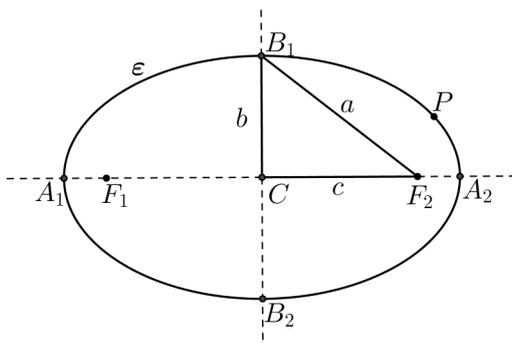


Figura 2.1: Elementos da Elipse

Os pontos F_1 e F_2 são chamados focos e a reta que os contém denomina-se reta focal. A interseção da reta focal com ε são os pontos A_1 e A_2 chamados de vértices da elipse e o segmento A_1A_2 de eixo focal ou eixo maior. O ponto médio C de A_1A_2 é o centro da elipse e os segmentos CA_1 e CA_2 são os semieixos maiores de comprimento a . A reta não focal é a

mediatriz do segmento A_1A_2 e a interseção da reta não focal com ε são os pontos B_1 e B_2 . O eixo não focal da elipse é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ e os segmentos CB_1 e CB_2 são os semieixos menores, de comprimento b , onde $b^2 = a^2 - c^2$.

A partir da definição da elipse, vamos obter a sua equação em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY para alguns casos especiais. Inicialmente trataremos de dois casos, que são os que possuem o centro coincidente com o ponto $O = (0, 0)$ deste sistema de eixos.

Caso 1: Elipse ε com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

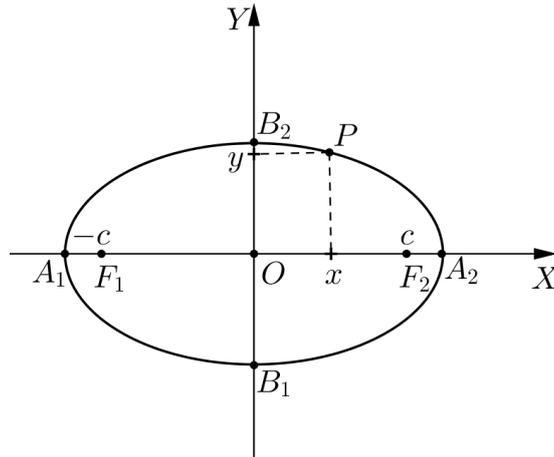


Figura 2.2: Elipse com a reta focal coincidente com o eixo OX

Neste caso temos que $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$. Dessa forma, pela definição da elipse temos que:

$$\begin{aligned}
 P = (x, y) \in \varepsilon &\iff d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\
 &\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\
 &\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 &\iff (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
 &\iff x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
 &\iff 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 &\iff a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 &\iff (a^2 - xc)^2 = (a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\
&\iff a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \\
&\iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \\
&\iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
&\iff b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
&\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.
\end{aligned}$$

Portanto a forma canônica da elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Caso 2: Elipse ε com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Neste caso temos que $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$. De modo análogo ao primeiro caso, temos que $P \in \varepsilon$ se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \iff \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

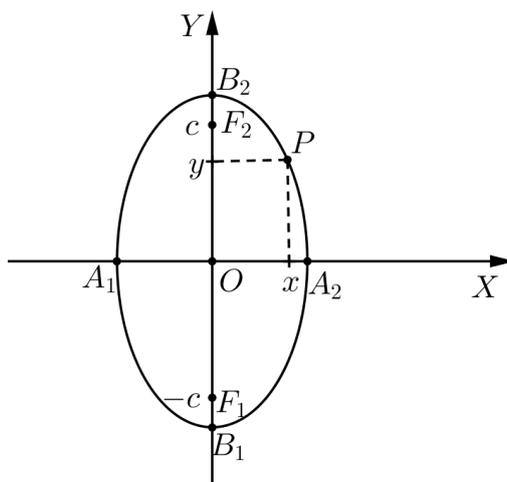


Figura 2.3: Elipse com a reta focal coincidente com o eixo OY

Considere OXY um sistema de eixos ortogonais e seja $\bar{O} = (x_0, y_0)$ um ponto no plano. Seja \overline{OXY} o sistema ortogonal de eixos em que \overline{OX} e \overline{OY} são paralelos a OX e OY respectivamente e também possuem, respectivamente, o mesmo sentido. Designaremos por (\bar{x}, \bar{y}) as coordenadas do ponto P no sistema de eixos \overline{OXY} e por (x, y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY .

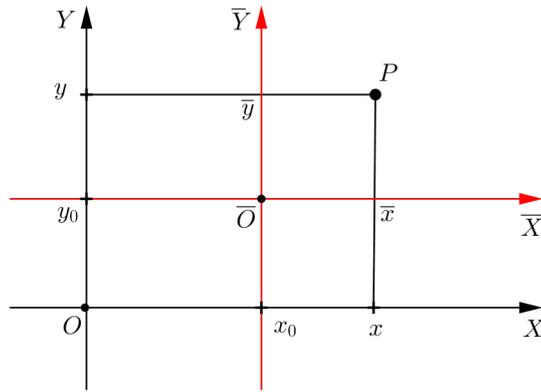


Figura 2.4: Translação dos eixos coordenados

As coordenadas do ponto P nos sistemas de eixo OXY e \overline{OXY} são relacionadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + x_0 \\ y = \bar{y} + y_0 \end{cases}$$

Através da translação de um sistema de eixos ortogonal, vamos desenvolver outros dois casos. Nestes, a elipse possui o centro transladado com sua reta focal paralela ao eixo OX ou ao eixo OY . São eles:

Caso 3: Elipse ε com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX

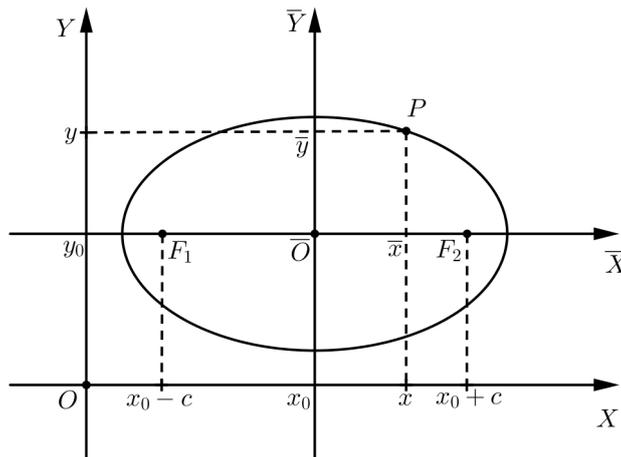


Figura 2.5: Elipse transladada com a reta focal paralela ao eixo OX

Seja $\overline{O} = (x_0, y_0)$ o centro da elipse ε , reta focal $y = y_0$ e focos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$. Um ponto $P = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ pertence à ε se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

ou seja,

$$\Leftrightarrow d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) + d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 + c, y_0)) = 2a$$

$$\Leftrightarrow d((\bar{x}, \bar{y}), (-c, 0)) + d((\bar{x}, \bar{y}), (c, 0)) = 2a$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Caso 4: Elipse ε com centro no ponto $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY

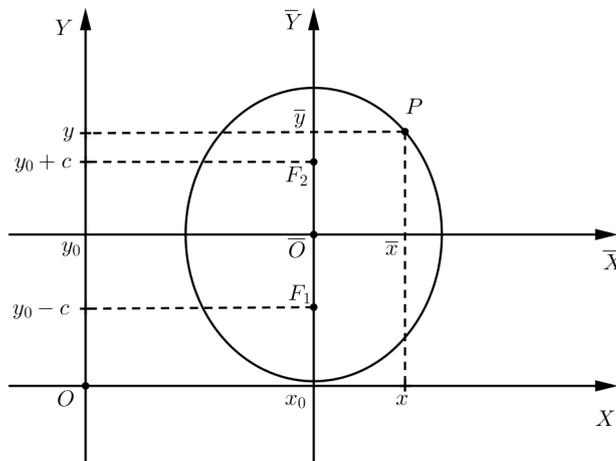


Figura 2.6: Elipse transladada com a reta focal paralela ao eixo OY

Análogo ao caso anterior, podemos verificar que a forma canônica da equação da elipse ε com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OY é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1, \text{ onde } b^2 = a^2 - c^2.$$

2.2 Rotação dos Eixos Coordenados

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais. Dado um ângulo θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, seja \overline{OXY} o sistema obtido girando os eixos OX e OY de ângulo θ no sentido positivo (que vai de OX para OY) em torno da origem O , como mostra a Figura 2.7.

Sejam (\bar{x}, \bar{y}) as coordenadas do ponto P em relação ao sistema \overline{OXY} . Então as coordenadas (x, y) deste mesmo ponto em relação ao eixo OXY é dado da seguinte forma

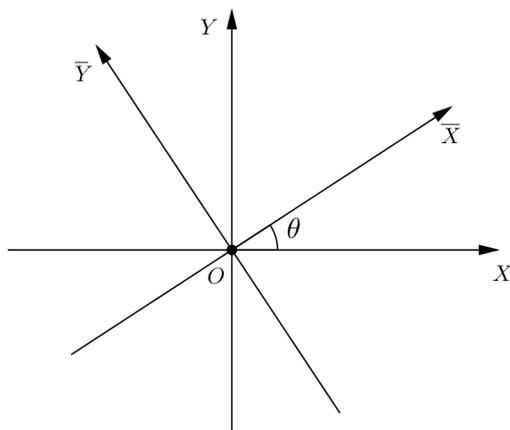


Figura 2.7: Rotação de ângulo θ entre os eixos OX e $O\bar{X}$

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta \\ y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta \end{cases}.$$

Por outro lado, também podemos obter (\bar{x}, \bar{y}) em função de (x, y) da seguinte forma

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos \theta + y \sin \theta \\ \bar{y} = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}.$$

Estas equações são chamadas de relações de mudança de coordenadas.

Exemplo 2 Dado um sistema de eixos ortogonais OXY , considere o sistema de eixos obtido pela rotação positiva de 30° dos eixos OX e OY em torno da origem. Uma elipse nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} tem centro na origem, um de seus focos é $(\sqrt{5}, 0)$ e um ponto $(0, 2)$. Determine a equação da elipse nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} e nas coordenadas x e y .

Solução: Nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} , note que o semieixo menor b mede 2 e a distância focal c é $\sqrt{5}$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos que a medida do semieixo maior a é igual a 3. Logo, pela forma canônica da elipse temos que

$$\varepsilon : \frac{\bar{x}^2}{9} + \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$$

é equação da elipse no sistema de eixos $O\bar{X}\bar{Y}$.

Usando as relações de mudança de coordenadas temos

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} \\ \bar{y} = -x \sin 30^\circ + y \cos 30^\circ = \frac{-x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Substituindo na equação de ε , obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{x}^2}{9} + \frac{\bar{y}^2}{4} = 1 &\implies \frac{\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2}\right)^2}{9} + \frac{\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2}{4} = 1 \\
&\implies \frac{\frac{3x^2}{4} + \frac{2\sqrt{3}xy}{4} + \frac{y^2}{4}}{9} + \frac{\frac{x^2}{4} - \frac{2\sqrt{3}xy}{4} + \frac{3y^2}{4}}{4} = 1 \\
&\implies \frac{3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2}{36} + \frac{x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2}{16} = 1 \\
&\implies 12x^2 + 8\sqrt{3}xy + 4y^2 + 9x^2 - 18\sqrt{3}xy + 27y^2 = 144 \\
&\implies 21x^2 - 10\sqrt{3}xy + 31y^2 - 144 = 0.
\end{aligned}$$

Considere a equação geral do segundo grau nas variáveis x e y :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (i)$$

O conjunto dos pontos que satisfazem a equação (i) representa uma cônica (elipse, hipérbole ou parábola) ou uma cônica degenerada (conjunto vazio, ponto, par de retas ou uma reta).

O número real $I = B^2 - 4AC$ é chamado de indicador de (i). Ele estabelece que a equação representa uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio quando $I < 0$.

2.3 Forma Paramétrica

Definição 10 *Seja C uma curva plana. Dizemos que uma aplicação*

$$\gamma : D \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

é uma parametrização de C se a sua imagem $\gamma(D)$ coincide com C , ou seja,

$$C = \gamma(D) = \{(x(t), y(t)) | t \in D\},$$

onde D é um subconjunto de \mathbb{R} (geralmente um intervalo ou a união de uma quantidade finita de intervalos). A imagem $\gamma(D) \subset \mathbb{R}^2$ é também chamada de traço de γ .

A parametrização de uma curva plana pode ser vista como a trajetória de uma partícula móvel que se desloca sobre o plano em um intervalo de tempo. Neste caso, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ nos dá a posição da partícula no instante t .

Para determinar uma parametrização de uma elipse, precisamos inicialmente desenvolver um caso particular, que é a circunferência. Dessa maneira, sejam $C : x^2 + y^2 = r^2$ a circunferência

de centro na origem e raio $r > 0$, e t a medida em radianos do ângulo $\angle P_0OP$ (tomada no sentido positivo), onde O é a origem do sistema ortogonal de eixos, $P_0 = (r, 0)$ é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo OX e $P = (x, y)$ é um ponto de C . Consideremos o ponto $P' = (x, 0)$. Como o triângulo $OP'P$ é retângulo em P' , as expressões das coordenadas x e y em função do parâmetro t são:

$$x = r \cdot \cos t \text{ e } y = r \cdot \text{sen } t.$$

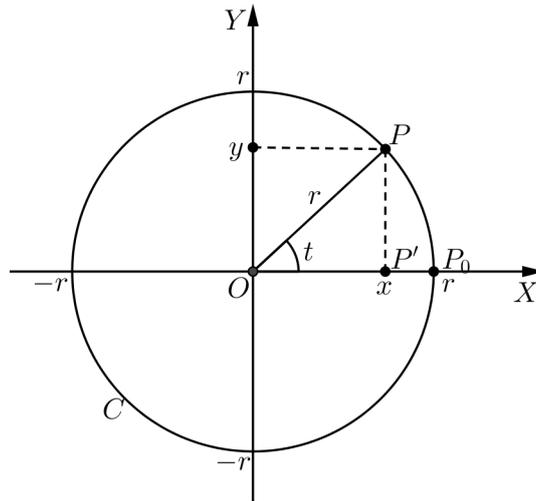


Figura 2.8: Parametrização da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $r > 0$.

Fazendo t percorrer os valores do intervalo $[0, 2\pi)$, obtemos todos os pontos da circunferência. Podemos também fazer com que t percorra todos os números reais. Dessa forma, realizaríamos um número infinito de voltas sobre a circunferência. Portanto uma possibilidade de equações paramétricas para a circunferência C é:

$$C : \begin{cases} x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \text{sen } t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Seja agora a circunferência $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$. Pela translação do sistema de eixos OXY , obtemos um novo sistema de eixos \overline{OXY} , onde $\overline{O} = (x_0, y_0)$ é o centro da circunferência.

Nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} no sistema \overline{OXY} , a equação cartesiana da circunferência é $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2$, pois neste sistema C também tem raio r . E análogo ao caso anterior, temos que $\bar{x} = r \cdot \cos t$ e $\bar{y} = r \cdot \text{sen } t$, $t \in \mathbb{R}$ são as equações paramétricas de C nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} . Daí,

$$C : \begin{cases} x = x_0 + \bar{x} = x_0 + r \cdot \cos t \\ y = y_0 + \bar{y} = y_0 + r \cdot \text{sen } t \end{cases} ; t \in \mathbb{R},$$

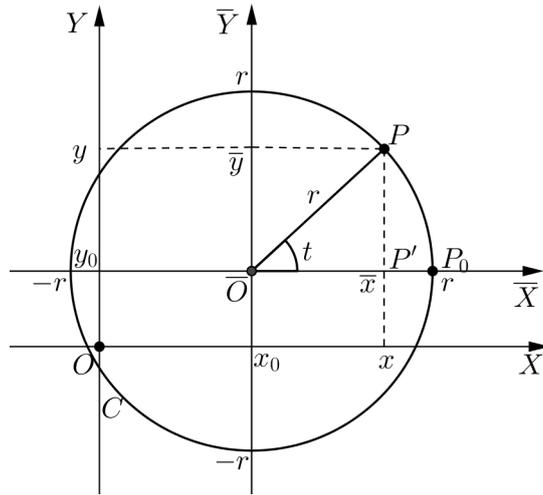


Figura 2.9: Parametrização da circunferência de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$.

são equações paramétricas da circunferência C nas coordenadas x e y .

Seja $\varepsilon : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ uma elipse de centro (x_0, y_0) . Consideremos a circunferência $C : \alpha^2 + \beta^2 = 1$ de centro na origem e raio $r = 1$. Como

$$(x, y) \in \varepsilon \iff (\alpha, \beta) = \left(\frac{x - x_0}{a}, \frac{y - y_0}{b} \right) \in C,$$

e

$$C : \begin{cases} \alpha = \cos t \\ \beta = \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de C , obtemos que,

$$\varepsilon : \begin{cases} x = x_0 + a \cdot \cos t \\ y = y_0 + b \cdot \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

e

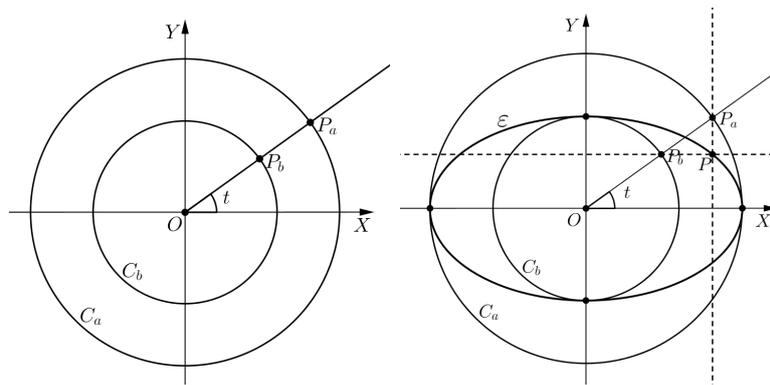
$$\varepsilon : \begin{cases} x = x_0 + a \cdot \sin t \\ y = y_0 + b \cdot \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

são duas possíveis parametrizações da elipse ε .

O significado geométrico do parâmetro $t \in \mathbb{R}$ pode ser visto da seguinte maneira.

Sejam $C_a : x^2 + y^2 = a^2$ a circunferência de centro na origem e raio a e $C_b : x^2 + y^2 = b^2$ a circunferência de centro na origem e raio b .

Consideremos para cada $t \in \mathbb{R}$, os pontos $P_a = (a \cdot \cos t, a \cdot \sin t) \in C_a$ e $P_b = (b \cdot \cos t, b \cdot \sin t) \in C_b$ tais que os vetores OP_a e OP_b fazem um ângulo t , no sentido positivo, com o semieixo positivo OX .



(a) Circunferências C_a e C_b , $a > b > 0$ (b) Construção da elipse ε

Figura 2.10: Interpretação geométrica da parametrização da elipse ε .

A interseção da reta $r_a : x = a \cdot \cos t$, paralela ao eixo OY que passa pelo ponto P_a , com a reta $r_b : y = b \cdot \sin t$, paralela ao eixo OX que passa pelo ponto P_b , nos dá o ponto $P = (a \cdot \cos t, b \cdot \sin t)$ pertencente à elipse $\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Capítulo 3

Elipses Inscritas em Triângulos

Esta unidade é destinada ao estudo de elipses inscrita em triângulos. Nela, mostraremos, passo a passo, como construir uma elipse inscrita em um triângulo. Além disso, traremos alguns conceitos importantes, tais como conjugados isogonais e a propriedade reflexiva das elipses. Este capítulo teve como base [1] e [8].

Sabemos que existe uma única circunferência inscrita a um triângulo dado e, admitindo que a circunferência é um caso particular de elipse, será que existe outra(s) elipse(s) inscrita(s) neste mesmo triângulo?

A resposta é sim. Mais precisamente, para cada ponto F pertencente ao interior do triângulo, mostraremos que existe uma elipse inscrita nesse triângulo, tendo F como um de seus focos. Dessa forma, existem infinitas elipses inscritas em um mesmo triângulo.

Dados, no plano euclidiano, uma elipse ε e uma reta t , diremos que t é uma reta tangente a ε se t contém exatamente um ponto de ε , chamado ponto de tangência. Quando $t \cap \varepsilon = \{P\}$, diremos também que t é uma reta tangente a ε em P .

A figura 3.1 ilustra como traçar essa tangente. Dado $P \in \varepsilon$, considere o ponto Q pertencente à semirreta $F'P$ tal que $\overline{F'Q} = 2a$. A mediatriz do segmento FQ é a reta tangente a ε em P .

De fato, como P está entre F' e Q , segue que

$$\overline{PQ} = \overline{F'Q} - \overline{PF'} = 2a - \overline{PF'} = \overline{PF}$$

de modo que $P \in t$, onde t é a mediatriz do segmento FQ . Além disso, dado $A \in t$, com A distinto de P , temos

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{AQ} + \overline{AF'} > \overline{F'Q} = 2a.$$

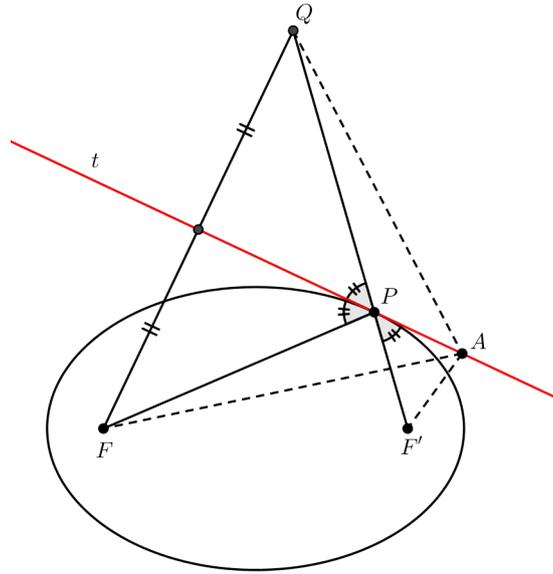


Figura 3.1: Reta t tangente à elipse ε .

Portanto, A não pertence a ε e concluímos que $t \cap \varepsilon = P$.

A construção efetuada revela imediatamente a validade de uma conhecida propriedade refletora da elipse: os ângulos que os raios focais PF e PF' formam com a reta tangente a ε em P são congruentes.

Retornando ao nosso problema da elipse inscrita no triângulo, seja ABC um triângulo arbitrário e F um ponto qualquer no seu interior. Vamos determinar uma elipse ε tendo F como um de seus focos de modo que as retas AB , BC e CA sejam tangentes a ε .

Definição 11 *Dois pontos A e A' são simétricos em relação à reta r quando r é a mediatriz do segmento AA' .*

Considere os simétricos Q , R e S do ponto F em relação às retas BC , AC e AB , respectivamente. Sendo F' o circuncentro do triângulo QRS , ou seja, o centro da circunferência que contém Q , R e S . Os raios $F'S$, $F'Q$ e $F'R$ intersectam as retas AB , BC , AC nos pontos P_1 , P_2 , P_3 , respectivamente.

Vamos verificar que a elipse passa pelos pontos P_1 , P_2 e P_3 . Para isto, devemos provar que $\overline{FP_i} + \overline{F'P_i} = 2a$ para $i = 1, 2, 3$. Consideremos $\overline{F'S} = \overline{F'Q} = \overline{F'R} = 2a$, daí,

$$\overline{F'S} = \overline{F'P_1} + \overline{P_1S} = 2a$$

Vamos marcar D na interseção do lado AB com o segmento FS . Como S é o simétrico de F em relação ao lado AB , segue que AB é a mediatriz do segmento FS , logo $FP_1 = SP_1$ e

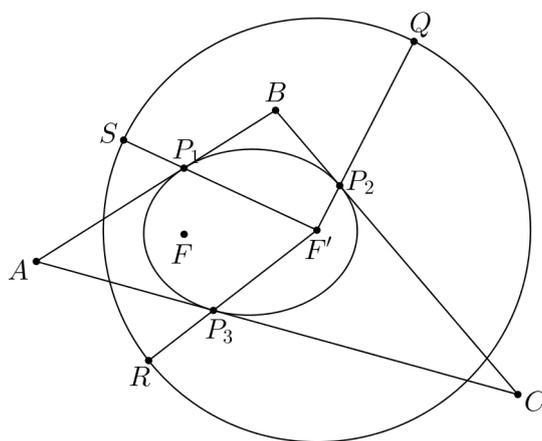


Figura 3.2: Construção da elipse inscrita em um triângulo.

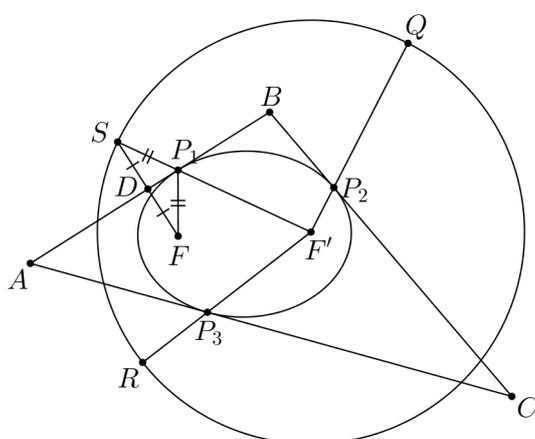


Figura 3.3: Elipses inscritas em um triângulos.

portanto

$$\overline{F'P_1} + \overline{P_1S} = \overline{F'P_1} + \overline{P_1F} = 2a.$$

Analogamente mostramos que $\overline{F'P_2} + \overline{P_2F} = 2a$ e $\overline{F'P_3} + \overline{P_3F} = 2a$, portanto P_1 , P_2 e P_3 são pontos da elipse de focos F e F' , tangente aos lados do triângulo e medida do eixo focal $2a$.

Observe que para cada ponto que tomarmos no interior do triângulo como F vai sempre existir um F' . Ou seja, como há infinitos pontos possíveis de se tomar para F , podemos garantir que dado um triângulo qualquer, existirão infinitas elipses inscritas neste triângulo.

Definição 12 Dado um triângulo ABC , o conjugado isogonal em relação a ABC de um ponto G interior a ABC é obtido refletindo as retas AG , BG e CG em relação às bissetrizes internas de ABC que passam por A , B , e C , respectivamente. As retas, resultantes das reflexões, são concorrentes no isogonal G' de G .

Proposição 20 Os pontos F e F' são conjugados isogonais com relação ao triângulo ABC .

Demonstração:

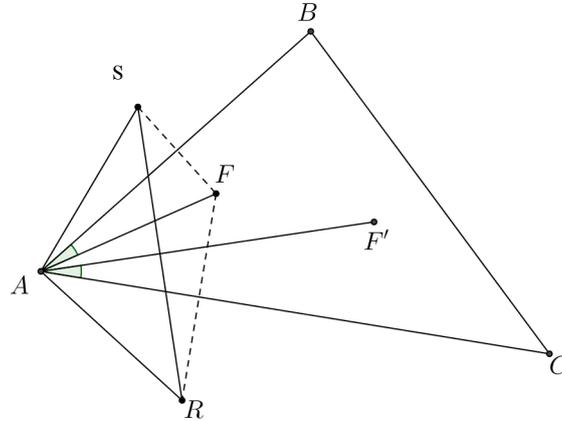


Figura 3.4: Os conjugados isogonais de um triângulo.

Seendo $x = m(\angle BAF) = m(\angle BAS)$ e $y = m(\angle CAF) = m(\angle CAR)$, temos $m(\angle QAR) = 2(x + y)$. Por outro lado, o triângulo ASR é isósceles, pois $AS = AF = AR$ e, como F' pertence à mediatriz do segmento SR , segue que $m(\angle SAF') = x + y$. Mas $m(\angle RAC) = y$, donde $m(\angle CAF') = x = m(\angle BAF)$. Logo, AF e AF' são semirretas simétricas em relação à reta que contém a bissetriz do ângulo de vértice A do triângulo ABC . Assim, as semirretas AF e AF' são reflexões uma da outra em relação à bissetriz interna do ângulo $\angle A$ no triângulo ABC . De modo análogo, provamos o mesmo em relação às bissetrizes de $\angle B$ e $\angle C$. Portanto, F e F' são conjugados isogonais. ■

Duas escolhas especiais para o ponto F merecem destaque. A primeira é o ponto F sendo escolhido como o incentro I do triângulo ABC . Como I é equidistante das retas que contêm os lados do triângulo, o circuncentro do triângulo QRS é o próprio ponto I e, portanto, $F' = I = F$. Nesse caso, a elipse coincide com a circunferência inscrita no triângulo ABC .

A segunda escolha relevante é quando tomamos F como sendo o ortocentro H de um triângulo acutângulo ABC . Como os simétricos de H em relação às retas AB , BC e CA pertencem à circunferência circunscrita ao triângulo ABC , o circuncentro do triângulo QRS coincide com o circuncentro do triângulo ABC . Neste caso, a elipse inscrita tem como focos dois pontos notáveis do triângulo: o ortocentro e o circuncentro do triângulo ABC .

Para verificar a veracidade desta afirmação em relação à escolha do ortocentro, vamos demonstrar a seguinte propriedade.

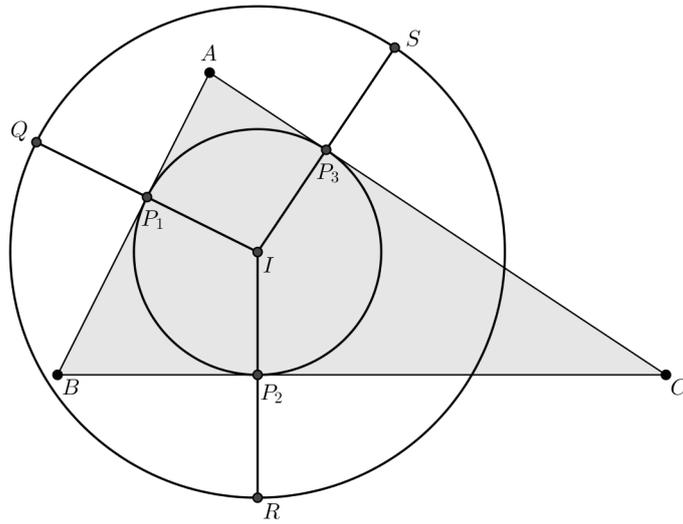


Figura 3.5: Foco coincidente com o incentro.

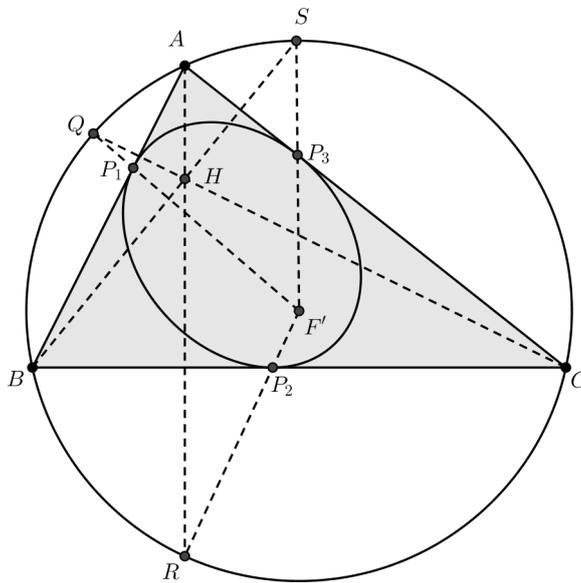


Figura 3.6: Foco coincidente com o ortocentro.

Proposição 21 *Seja um triângulo ABC inscrito em uma circunferência; H o ortocentro de ABC ; as alturas AD, BE, CF ; e M, N e P , respectivamente, os pontos onde as retas suportes das alturas cortarão a circunferência circunscrita a ABC . Então*

$$\overline{DH} = \overline{DM}, \overline{EH} = \overline{EN} \text{ e } \overline{FH} = \overline{FP}.$$

Demonstração: Caso 1: Triângulo acutângulo

Se $m(\angle DAB) = \alpha$ e $m(\angle ABC) = \beta$, então α e β são complementares e $m(\angle FCB) = 90^\circ - \beta = \alpha$, pois o triângulo FCB é retângulo. Além disso, $\angle DAB$ e $\angle MCB$ são ângulos

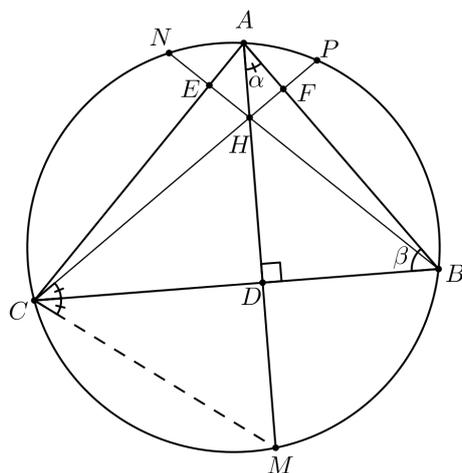


Figura 3.7: O ortocentro de um triângulo acutângulo.

inscritos relativos ao mesmo arco BM , logo $m(\angle MCB) = \alpha$.

Os triângulos CHD e MCD são congruentes pelo caso ALA e, portanto, $\overline{DH} = \overline{DM}$, como queríamos demonstrar.

Repetindo o mesmo raciocínio para os outros lados, temos provada a proposição.

Caso 2: Triângulo Retângulo

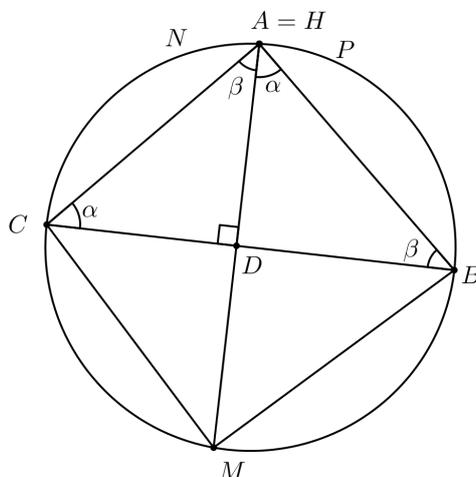


Figura 3.8: O ortocentro de um triângulo retângulo coincide com o vértice do ângulo reto.

Seja o triângulo ABC retângulo em A . O ortocentro H deste triângulo coincide com o vértice A .

Se $m(\angle ABC) = \beta$ e $m(\angle ACB) = \alpha$, então $m(\angle BAM) = m(\angle ACB) = \alpha$. Além disso, $\angle ACB$ e $\angle BMA$ são ângulos inscritos relativos ao mesmo arco AB , logo $m(\angle BMA) = \alpha$. Temos então que os triângulos ABD e MBD são congruentes pelo caso ALA, pois BD é

Capítulo 4

Transformações Afins

Neste capítulo introduziremos o conceito de combinações afins para representar pontos e suas coordenadas. Em seguida, falaremos sobre transformações no plano trazendo alguns exemplos, tais como: rotação, translação, reflexão e homotetia. O foco principal deste capítulo são as transformações afins, em especial as de posto dois, pois são elas que levam retas paralelas em retas paralelas, circunferências em elipses, pontos médios em pontos médios, baricentro em baricentro. Este capítulo teve como base [5].

4.1 Combinações Afins

Definição 13 O símbolo \overrightarrow{AB} será utilizado para designar o vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade B .

Se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ são coordenadas, em relação a um sistema de eixos ortogonais, então os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ são as coordenadas do vetor \overrightarrow{AB} e escrevemos $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Definição 14 Sejam A, B, C e P pontos no plano. $P = A + \overrightarrow{BC}$ quando $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BC}$.

Definição 15 Para dois pontos quaisquer A, B e números reais λ e μ , com $\lambda + \mu = 1$, a combinação afim $\lambda A + \mu B$ é o ponto $P = A + \mu \overrightarrow{AB}$.

Observe que, dados dois pontos distintos A e B , o ponto $P = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ é o ponto médio do segmento AB .

Dados A, B pontos distintos do plano, quando o parâmetro t assume todos os valores reais, o ponto

$$(1-t)A + tB = A + t\overrightarrow{AB},$$

combinação afim de A e B , percorre toda a reta determinada por estes pontos.

A expressão $P(t) = (1-t)A + tB$ é uma equação paramétrica da reta que passa por A e B .

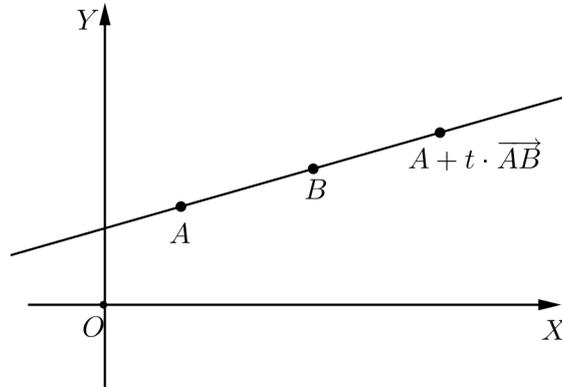


Figura 4.1: A reta que passa por A e B .

Se nos restringirmos a considerar $t \in [0, 1]$, isto é, $0 \leq t \leq 1$, o ponto $P(t) = (1-t)A + tB$ percorre todo o segmento AB , começando com A quando $t = 0$ e terminando em B quando $t = 1$. Para cada $t \in [0, 1]$, temos,

$$d(P(t), A) = t \cdot d(A, B) \text{ e } d(P(t), B) = (1-t) \cdot d(A, B).$$

Segue que,

$$\frac{d(P(t), A)}{d(P(t), B)} = \frac{t}{1-t}.$$

Logo, $P(t) = (1-t)A + tB$ é o ponto do segmento AB que o divide na razão $t : (1-t)$.

Dadas as coordenadas dos pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ num dado sistema ortogonal, as coordenadas do ponto $P = (1-t)A + tB$ são $P = ((1-t)a + tc, (1-t)b + td)$.

4.2 Coordenadas Baricêntricas

Definição 16 *Sejam A, B, C pontos do plano e λ, μ, γ números reais com $\lambda + \mu + \gamma = 1$. A combinação afim $P = \lambda A + \mu B + \gamma C$ é o ponto $P = A + \mu\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$.*

Como $\lambda + \mu + \gamma = 1$, existem sempre dois destes três números com soma diferente de zero. Seja $\lambda + \mu \neq 0$. Então podemos escrever:

$$P = \lambda A + \mu B + \gamma C = (\lambda + \mu) \left[\frac{\lambda}{\lambda + \mu} A + \frac{\mu}{\lambda + \mu} B \right] + \gamma C.$$

Para mostrar esta igualdade, sejam D e P' os pontos dados por

$$D = \left[\frac{\lambda}{\lambda + \mu} A + \frac{\mu}{\lambda + \mu} B \right] \text{ e } P' = (\lambda + \mu)D + \gamma C.$$

Então $\overrightarrow{AD} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DP'} = \gamma \overrightarrow{DC}$, logo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP'} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP'} \\ &= \overrightarrow{AD} + \gamma \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{AD} + \gamma(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \\ &= (1 - \gamma)\overrightarrow{AD} + \gamma\overrightarrow{AC} \\ &= (\lambda + \mu)\overrightarrow{AD} + \gamma\overrightarrow{AC} \\ &= \mu\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}, \end{aligned}$$

pois $\lambda + \mu + \gamma = 1$. Assim,

$$P' = A + \mu\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \lambda A + \mu B + \gamma C = P.$$

Portanto,

$$P = (\lambda + \mu)D + \gamma C = (\lambda + \mu) \left[\frac{\lambda}{\lambda + \mu} A + \frac{\mu}{\lambda + \mu} B \right] + \gamma C.$$

Isso fornece P como combinação afim dos pontos D e C enquanto D , por sua vez, é uma combinação afim de A e B .

Para $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\gamma \geq 0$ e $\lambda + \mu + \gamma = 1$, o ponto D pertence ao segmento AB . Consequentemente o ponto P pertence ao segmento CD . Portanto P pertence ao triângulo ABC .

Reciprocamente, dado um ponto arbitrário P pertencente o triângulo, a reta CP encontra o lado AB num ponto D . Como P pertence a CD temos $P = (1 - s)C + sD$, com $s \in [0, 1]$. Por outro lado, como D está no segmento AB , temos $D = (1 - t)A + tB$, com $t \in [0, 1]$. Substituindo, temos:

$$P = (1 - s)C + s[(1 - t)A + tB] = (1 - s)C + s(1 - t)A + stB.$$

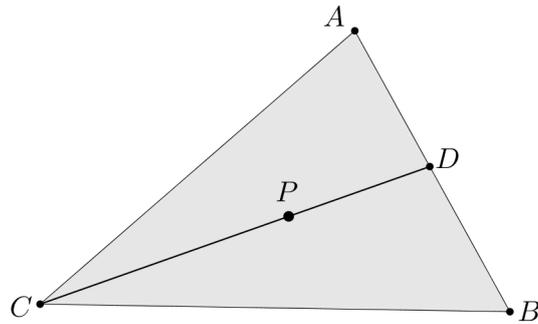


Figura 4.2: P pertencente a CD

Pondo $\lambda = s(1 - t)$, $\mu = st$ e $\gamma = 1 - s$, vemos que $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\lambda + \mu + \gamma = 1$ e $P = \lambda A + \mu B + \gamma C$.

Concluimos assim, que um ponto P pertence ao triângulo ABC se, e somente se, $P = \lambda A + \mu B + \gamma C$, com $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\gamma \geq 0$ e $\lambda + \mu + \gamma = 1$.

Se A, B, C são pontos não colineares, os números não negativos λ, μ, γ com $\lambda + \mu + \gamma = 1$, são chamados de *coordenadas baricêntricas* do ponto $P = \lambda A + \mu B + \gamma C$, no triângulo ABC .

Como $P = A + \mu \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}$, temos também $\overrightarrow{AP} = \mu \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}$, as coordenadas baricêntricas μ e γ são os coeficientes que exprimem o vetor \overrightarrow{AP} como combinação linear de \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} . Como \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} não são múltiplos um do outro, segue-se que μ e γ são determinados de modo único a partir do ponto P .

O ponto $P = \lambda A + \mu B + \gamma C$ pertence ao segmento BC se, e somente se, $\lambda = 0$. Analogamente, o ponto P pertence aos segmentos AB e AC , quando $\gamma = 0$ e $\mu = 0$ respectivamente. Para $\lambda > 0$, $\mu > 0$ e $\gamma > 0$, o ponto P pertence ao interior do triângulo.

Em um triângulo ABC , sejam $M_{AB} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, $M_{BC} = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$ e $M_{AC} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$, respectivamente, os pontos médios dos lados AB, BC e AC . Os segmentos AM_{BC}, BM_{AC} e CM_{AB} são chamados de mediana do triângulo ABC .

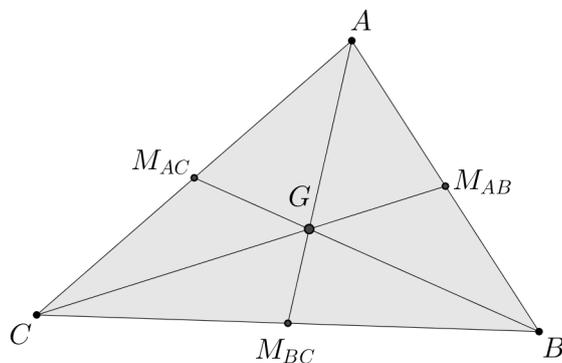


Figura 4.3: O baricentro e as três medianas do triângulo ABC

Como o baricentro divide cada mediana, a partir do vértice correspondente na razão 2 : 1, temos que

$$G = \frac{2}{3}M_{AB} + \frac{1}{3}C = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) + \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

Portanto o *baricentro* G do triângulo ABC é o ponto

$$P = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

4.3 Transformações no Plano

Definição 17 Uma transformação T no plano Π é uma função $T : \Pi \longrightarrow \Pi$, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto P do plano Π outro ponto $P_1 = T(P)$ deste plano. O ponto P_1 é chamado de imagem de P por T .

Veremos a seguir alguns exemplos de transformações no plano.

Definição 18 (Translação) A translação $T_v : \Pi \longrightarrow \Pi$, determinada pelo vetor $v = \overrightarrow{AB}$, dados A e B no plano, é a transformação que leva cada ponto P do plano Π no ponto $T_v(P) = P + v$.

Se num sistema de eixos ortogonais, as coordenadas de v são (α, β) , então para cada ponto $P = (x, y)$ tem-se $T_v(P) = (x + \alpha, y + \beta)$.

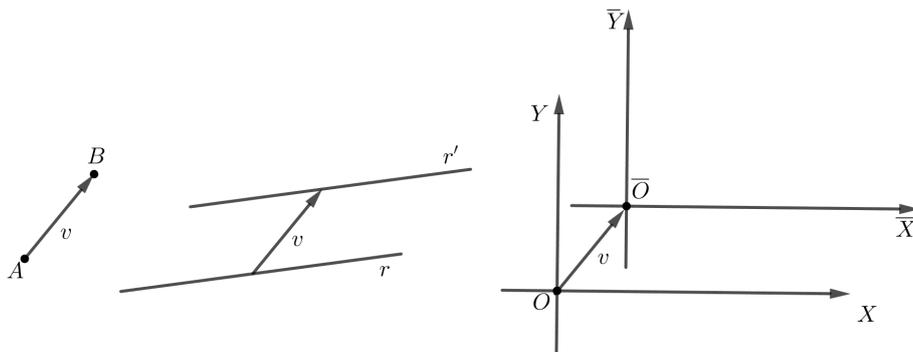


Figura 4.4: A translação T_v aplicada na reta r e no sistema de eixos ortogonais OXY .

A translação determinada pelo vetor v leva toda reta r numa reta r' paralela a r e transforma o sistema de eixos OXY no sistema de eixos \overline{OXY} , cujos eixos \overline{OX} e \overline{OY} são paralelos e tem o mesmo sentido de OX e OY , respectivamente.

Definição 19 (Rotação) *Seja OXY um sistema de eixos ortogonais do plano. A rotação de centro O e ângulo α é a transformação $R_\alpha : \Pi \rightarrow \Pi$ que aplica o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ com*

$$x_1 = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \operatorname{sen} \alpha \text{ e } y_1 = x \cdot \operatorname{sen} \alpha + y \cdot \cos \alpha.$$

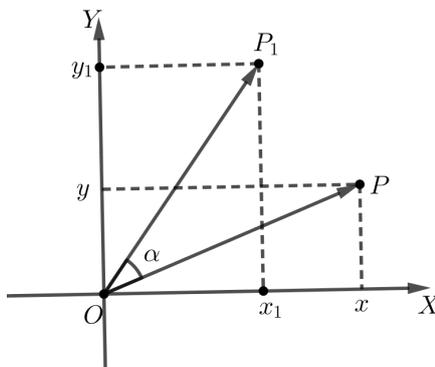


Figura 4.5: Rotação de ângulo α aplicada no ponto P .

Exemplo 3 *Tomemos a circunferência unitário C , de equação $x^2 + y^2 = 1$. Examine o efeito de uma rotação R_α de ângulo α e de centro na origem aplicada a C .*

Solução: Para obter a equação de $R_\alpha(C)$, é preciso obter as expressões das coordenadas x e y de um ponto P em função das coordenadas x_1 e y_1 de seu transformado $R_\alpha(P)$. Pela definição de rotação, x_1 e y_1 são dados, em termos de x e y , por

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha \\ y_1 = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha \end{cases}.$$

É possível inverter estas equações resolvendo este sistema nas incógnitas x e y . Multiplicando a primeira equação por $\cos \alpha$, a segunda por $\operatorname{sen} \alpha$ e somando estas equações, obtemos

$$x = x_1 \cos \alpha + y_1 \operatorname{sen} \alpha.$$

Substituindo este resultado na segunda equação do sistema e observando que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, obtemos

$$y = -x_1 \operatorname{sen} \alpha + y_1 \cos \alpha.$$

Substituindo x e y na equação da circunferência obtemos

$$(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha)^2 + (-x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha)^2 = 1$$

que resulta em

$$x_1^2 \cos^2 \alpha + 2x_1 y_1 \sin \alpha \cos \alpha + y_1^2 \sin^2 \alpha + x_1^2 \sin^2 \alpha - 2x_1 y_1 \sin \alpha \cos \alpha + y_1^2 \cos^2 \alpha = 1,$$

ou seja,

$$x_1^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + y_1^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1.$$

Utilizando novamente a identidade $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, temos

$$x_1^2 + y_1^2 = 1.$$

Isso significa que a equação obtida pela figura transformada é a mesma da figura original. Ou seja, a circunferência é invariante sob rotações em torno do seu centro.

Definição 20 (Reflexão) *A reflexão em torno da reta r é a transformação $T : \Pi \rightarrow \Pi$ que faz corresponder a cada ponto $P \in \Pi$ o ponto $P_1 = T(P) \in \Pi$, simétrico de P em relação a r .*

Tomando um sistema de eixos ortogonais OXY no qual o eixo OX coincida com a reta r em torno da qual se dá a reflexão T , para cada ponto $P = (x, y)$ tem-se $T(P) = P_1 = (x, -y)$.

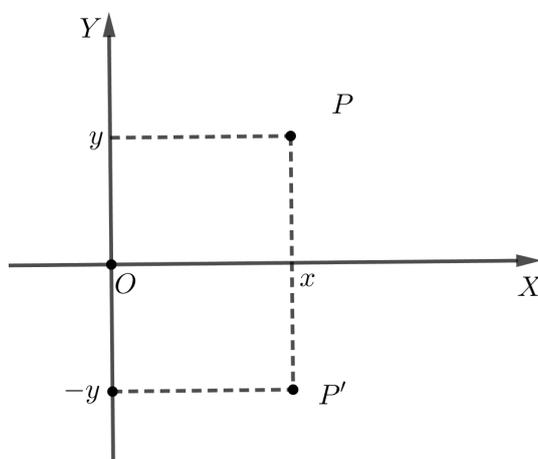


Figura 4.6: Reflexão em torno da reta r coincidente com o eixo OX .

Definição 21 (Homotetia) *A homotetia de centro O e razão r é a transformação $H : \Pi \rightarrow \Pi$, que associa a cada ponto $P \in \Pi$ o ponto $P_1 = H(P)$, tal que $\overrightarrow{OP_1} = r \cdot \overrightarrow{OP}$.*

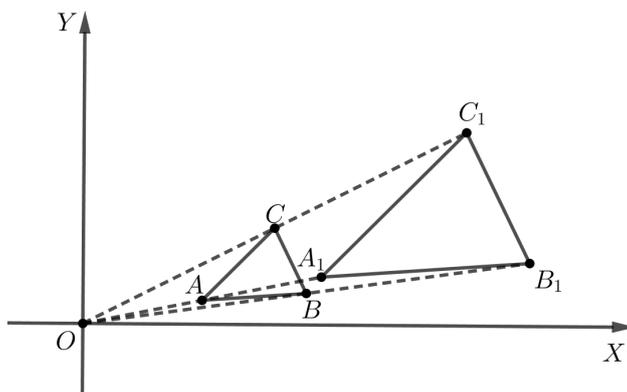


Figura 4.7: Homotetia de centro O e razão 2 aplicada em um triângulo ABC .

Dado OXY um sistema ortogonal de eixos e H uma homotetia de centro O e razão r . A imagem do ponto $P = (x, y)$ pela homotetia H é o ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ em que $x_1 = rx$ e $y_1 = ry$.

Exemplo 4 Considere a elipse $\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e examine o efeito de uma homotetia de razão $r > 0$.

Solução: A homotetia leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$, onde $x_1 = rx$ e $y_1 = ry$. Note que

$$\frac{x_1^2}{(ra)^2} + \frac{y_1^2}{(rb)^2} = \frac{r^2x^2}{r^2a^2} + \frac{r^2y^2}{r^2b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ou seja, $H(\varepsilon)$ é uma elipse com centro na origem e semieixo maior medindo ra e semieixo menor medindo rb .

O restante deste capítulo será destinado ao estudo de transformações afins, que é a principal ferramenta para a demonstração do Teorema de Steiner.

4.4 Transformações Afins

Definição 22 Dizemos que $F : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma transformação afim do plano Π quando para quaisquer pontos P, Q em Π e todo número real t , vale:

$$F((1-t)P + tQ) = (1-t)P_1 + tQ_1 \quad (i)$$

onde $P_1 = F(P)$, $Q_1 = F(Q)$. Podemos reescrever (i) da seguinte forma,

$$F(P + t \cdot \overrightarrow{PQ}) = P_1 + t \cdot \overrightarrow{P_1Q_1}. \quad (ii)$$

Se $P_1 \neq Q_1$, a igualdade (ii) transforma a reta PQ na reta P_1Q_1 de tal modo que, mantendo P e Q fixos, um ponto R da reta PQ pode ser escrito na forma $R = P + t \cdot \overrightarrow{PQ}$, que é equivalente a $\overrightarrow{PR} = t \cdot \overrightarrow{PQ}$, logo o valor absoluto $|t|$ é igual a razão entre as distâncias $d(P, R)$ e $d(P, Q)$. O número t é negativo quando o ponto R está a esquerda do segmento orientado PQ e positivo quando R está a direita de P e $0 \leq t \leq 1$, quando R pertence ao segmento PQ .

Se ainda supusermos $P_1 \neq Q_1$ temos que a transformação afim leva os pontos

$$R = (1 - t)P + tQ \text{ e } S = (1 - s)P + sQ,$$

nos pontos,

$$R_1 = (1 - t)P_1 + tQ_1 \text{ e } S_1 = (1 - s)P_1 + sQ_1.$$

Das retas PQ e P_1Q_1 , segue que

$$\overrightarrow{RS} = (s - t)\overrightarrow{PQ} \text{ e } \overrightarrow{R_1S_1} = (s - t)\overrightarrow{P_1Q_1},$$

logo,

$$|s - t| = \frac{d(R, S)}{d(P, Q)} = \frac{d(R_1, S_1)}{d(P_1, Q_1)},$$

donde,

$$\frac{d(R, S)}{d(R_1, S_1)} = \frac{d(P, Q)}{d(P_1, Q_1)} = \text{constante}$$

As igualdades acima nos garantem que, ao longo da reta PQ , a transformação afim F preserva a razão entre distâncias.

Proposição 22 *Dada a transformação afim $F : \Pi \rightarrow \Pi$, se $F(A) = A_1$, $F(B) = B_1$, $F(C) = C_1$ e $\alpha + \beta + \gamma = 1$, então*

$$F(\alpha A + \beta B + \gamma C) = \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1.$$

Demonstração: Tendo $\alpha + \beta + \gamma = 1$, não se pode ter $\alpha + \beta = \alpha + \gamma = \beta + \gamma = 0$, pois somando as equações teríamos, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0$. Então temos que $\alpha + \beta \neq 0$ ou $\alpha + \gamma \neq 0$ ou $\beta + \gamma \neq 0$. Vamos supor que $\alpha + \beta \neq 0$, daí temos que

$$\begin{aligned} \alpha A + \beta B + \gamma C &= (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot A + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot B \right) + \gamma C \\ \alpha A + \beta B + \gamma C &= (1 - \gamma)[(1 - t) \cdot A + t \cdot B] + \gamma C \end{aligned}$$

onde $t = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$. Utilizando a definição de transformações afim duas vezes, temos que

$$\begin{aligned}
 F(\alpha A + \beta B + \gamma C) &= (1 - \gamma)F([(1 - t) \cdot A + t \cdot B]) + \gamma F(C) \\
 &= (1 - \gamma)[(1 - t) \cdot F(A) + t \cdot F(B)] + \gamma F(C) \\
 &= (1 - \gamma)[(1 - t) \cdot A_1 + t \cdot B_1] + \gamma C_1 \\
 &= (\alpha + \beta) \left[\left(1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) \cdot A_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot B_1 \right] + \gamma C_1 \\
 &= \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1
 \end{aligned}$$

■

A igualdade acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F(A + \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC}) = A_1 + \beta \cdot \overrightarrow{A_1B_1} + \gamma \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$$

com β e γ números reais quaisquer.

Proposição 23 *Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano Π . Uma transformação $F : \Pi \rightarrow \Pi$ é afim se, e somente se, existe constantes a, b, c, d, p, q tais que F leva cada ponto $P = (x, y)$ do plano no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$, onde*

$$\begin{cases} x_1 = ax + by + p \\ y_1 = cx + dy + q \end{cases} \quad (4.1)$$

Demonstração: Seja a transformação afim $F : \Pi \rightarrow \Pi$, poremos $U = (1, 0)$, $V = (0, 1)$, $F(O) = O_1 = (p, q)$, $F(U) = U_1 = (a + p, c + q)$, $F(V) = V_1 = (b + p, d + q)$. Dado $P = (x, y)$, temos

$$P = O + x \cdot \overrightarrow{OU} + y \cdot \overrightarrow{OV},$$

logo, pela definição da transformação afim, se $P_1 = F(P)$ então,

$$\begin{aligned}
 P_1 &= O_1 + x \cdot \overrightarrow{O_1U_1} + y \cdot \overrightarrow{O_1V_1} \\
 &= (p, q) + x \cdot (a, c) + y \cdot (b, d) \\
 &= (ax + by + p, cx + dy + q).
 \end{aligned}$$

Portanto as coordenadas do ponto P_1 são dadas pelas equações $x_1 = ax + by + p$ e $y_1 = cx + dy + q$. Reciprocamente, se $F : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma transformação que, no sistema de eixos ortogonais OXY , leva os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (r, s)$, respectivamente, nos pontos

$P_1 = (x_1, y_1)$ e $Q_1 = (r_1, s_1)$ cujas coordenadas são expressas pelas equações $x_1 = ax + by + p$, $y_1 = cx + dy + q$, $r_1 = ar + bs + p$ e $s_1 = cr + ds + q$. Então,

$$\begin{aligned}
 F((1-t) \cdot P + t \cdot Q) &= F(P + t \cdot \overrightarrow{PQ}) \\
 &= F((x, y) + t \cdot ((r, s) - (x, y))) \\
 &= F(x + t \cdot (r - x), y + t \cdot (s - y)) \\
 &= (a \cdot (x + t \cdot (r - x)) + b \cdot (y + t \cdot (s - y)) + p, c \cdot (x + t \cdot (r - x)) + d \cdot (y + t \cdot (s - y)) + q) \\
 &= ((ax + by + p) + t \cdot a \cdot (r - x) + t \cdot b \cdot (s - y), cx + dy + q + t \cdot c \cdot (r - x) + t \cdot d \cdot (s - y)) \\
 &= (ax + by + p, cx + dy + q) + t \cdot (a \cdot (r - x) + b \cdot (s - y), c \cdot (r - x) + d \cdot (s - y)) \\
 &= P_1 + t \cdot \overrightarrow{P_1Q_1}
 \end{aligned}$$

Dessa forma temos que F é uma transformação afim, pois

$$F(P + t \cdot \overrightarrow{PQ}) = P_1 + t \cdot \overrightarrow{P_1Q_1}$$

■

Corolário 1 *Translações, rotações, reflexões e homotetias são transformações afins.*

Existem três tipos de transformações afins:

Transformações de posto zero: são as transformações afins constantes $F : \Pi \rightarrow \Pi$. Para que F seja constante é suficiente que transforme três pontos não colineares em um único ponto.

Transformações de posto um: são as transformações afins $F : \Pi \rightarrow \Pi$ que transformam todo o plano Π em numa reta. Elas não são constantes nem injetivas. Se $P \neq Q$ mas $F(P) = F(Q)$, então F é constante ao longo da reta PQ e de todas as retas paralelas a PQ . F transforma essas retas em pontos os quais, como F não é constante, continuam uma reta, imagem do plano Π pela transformação F .

Transformações de posto dois: são as transformações afins $F : \Pi \rightarrow \Pi$ que possui uma das seguintes propriedades, e portanto todas elas: a) F é injetiva; b) F é sobrejetiva; c) F transforma três pontos não colineares em pontos não colineares. Logo, as transformações afins de posto dois são aquelas que possuem uma inversa $F^{-1} : \Pi \rightarrow \Pi$.

Ao analisarmos uma transformação afim $F : \Pi \rightarrow \Pi$ no sistema de eixo ortogonal OXY , temos que F leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $F(P) = P_1 = (x_1, y_1)$ com

$$\begin{cases} x_1 = ax + by + p \\ y_1 = cx + dy + q \end{cases}$$

A transformação F terá posto zero quando $a = b = c = d = 0$, isto é, $F(x, y) = (p, q)$. Terá posto um se, e somente se, algum dentre os números reais a, b, c e d é diferente de zero, de modo que a determinante $\Delta = ad - bc \neq 0$. Isto é, os vetores $u = (a, c)$ e $v = (b, d)$, temos pelo menos um não nulo, de modo que um deles é múltiplo do outro. Com essa condição, temos que existe um número real m tal que $b = m \cdot a$ e $d = m \cdot c$, logo

$$\begin{cases} x_1 = ax + by + p \\ y_1 = max + mby + q \end{cases}$$

Portanto, os pontos $P_1 = (x_1, y_1) = (ax + by + p, max + mby + q)$ estão todos na reta $y_1 = mx_1 + (q - mp)$. Finalmente, F tem posto dois se, e somente se, o determinante $\Delta = ad - bc \neq 0$, isto é, quando os vetores $u = (a, c)$ e $v = (b, d)$ não são colineares. Essa condição nos garante que, dados x_1 e y_1 , o sistema de equações acima tem solução única $P = (x, y)$. Desse modo, para cada ponto P_1 existe um único P tal que $F(P) = P_1$. Assim F é sobrejetiva e portanto tem posto dois. Para nossa abordagem, estamos considerando transformações afins de posto dois.

Proposição 24 *Uma transformação afim $F : \Pi \rightarrow \Pi$ injetiva, transforma retas paralelas em retas paralelas.*

Demonstração: Sejam r e s retas paralelas em Π . Como F é injetiva, então $r_1 = F(r)$ e $s_1 = F(s)$ são retas em Π . Afirmamos que r_1 e s_1 são paralelas. Se r_1 e s_1 não são paralelas, então existe $P_1 \in r_1 \cap s_1$ e teríamos $P_1 = F(P)$ com $P \in r$ e $P_1 = F(Q)$ com $Q \in s$. Sendo F injetiva, isso obrigaria $P = Q$, e então as retas r e s teriam um ponto $P = Q$ em comum, contradizendo o fato de que são paralelas. ■

Definição 23 *Um conjunto ordenado de três pontos não colineares A, B, C é denominado referencial no plano Π .*

Fixado um referencial A, B, C no plano Π , qualquer ponto P desse plano exprime-se, de modo único, como combinação afim

$$P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C = A + \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC},$$

dos pontos A, B, C , onde $\alpha = 1 - \beta - \gamma$.

De fato, os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} não são múltiplos um do outro, pois A, B e C são pontos distintos, logo existem e são únicos os números reais β, γ , tais que

$$\overrightarrow{AP} = \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Proposição 25 *Seja A, B, C um referencial no plano Π . Dados arbitrariamente os pontos A_1, B_1 e C_1 em Π , existe uma, e uma só, transformação afim $F : \Pi \rightarrow \Pi$ tal que $F(A) = A_1$, $F(B) = B_1$ e $F(C) = C_1$.*

Demonstração: Dado qualquer ponto P no plano Π , existem α_1, α_2 e α_3 únicos tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ e $P = \alpha_1 \cdot A + \alpha_2 \cdot B + \alpha_3 \cdot C$. Definimos a transformação $F : \Pi \rightarrow \Pi$, da seguinte forma,

$$F(P) = \alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot B_1 + \alpha_3 \cdot C_1.$$

É imediato que $F(A) = A_1$, $F(B) = B_1$, $F(C) = C_1$.

Seja também Q um ponto qualquer do plano, então existem β_1, β_2 e β_3 únicos tais que $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$ e $Q = \beta_1 \cdot A + \beta_2 \cdot B + \beta_3 \cdot C$. Tomemos λ_1, λ_2 e λ_3 , tais que $\lambda_i = (1-t) \cdot \alpha_i + t \cdot \beta_i$, $i = 1, 2, 3$. Assim, $(1-t) \cdot P + t \cdot Q = \lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B + \lambda_3 \cdot C$, logo

$$\begin{aligned} F((1-t) \cdot P + t \cdot Q) &= \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot B_1 + \lambda_3 \cdot C_1 \\ &= (1-t) \cdot (\alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot B_1 + \alpha_3 \cdot C_1) + t \cdot (\beta_1 \cdot A_1 + \beta_2 \cdot B_1 + \beta_3 \cdot C_1) \\ &= (1-t) \cdot F(P) + t \cdot F(Q). \end{aligned}$$

Ou seja, F é uma transformação afim. Finalmente se $G : \Pi \rightarrow \Pi$ é outra transformação afim com $G(A) = A_1$, $G(B) = B_1$ e $G(C) = C_1$, então para todo ponto P do plano, com $P = \alpha_1 \cdot A + \alpha_2 \cdot B + \alpha_3 \cdot C$, tem-se

$$G(P) = \alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot B_1 + \alpha_3 \cdot C_1 = F(P),$$

e portanto, $G = F$. ■

Fixado um sistema de eixos ortogonais OXY , temos que uma transformação afim F leva um ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (ax + by + p, cx + dy + q)$, onde a, b, c, d, p e q não dependem do ponto P . Considerando a matriz de ordem 2 cujas colunas são, respectivamente, (a, c) e (b, d) , temos que a constante $\det F = ad - bc$ é o determinante desta matriz.

O sinal de $\det F$ indica se o sentido de rotação do vetor (a, c) para o vetor (b, d) coincide ou não com o sentido de rotação de OX para OY . E o valor absoluto $|\det F|$ é o fator pelo qual F multiplica a área de um triângulo qualquer no plano.

Na geometria analítica, podemos calcular a área de triângulos de acordo com a seguinte proposição:

Proposição 26 Seja ABC o triângulo de vértices $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$ e $C = (x_2, y_2)$ então $A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix} \right|$.

Exemplo 5 Calcule a área do triângulo de vértices $A = (-2, 0)$, $B = (2, 1)$ e $C = (-2, 1)$.

Solução: Temos $\overrightarrow{AB} = (4, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, 1)$. Logo,

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |4| = 2.$$

Proposição 27 Seja uma transformação afim $F : \Pi \rightarrow \Pi$ que transforma um triângulo qualquer ABC num triângulo $A_1B_1C_1$, então

$$\frac{A(A_1B_1C_1)}{A(ABC)} = |\det F|.$$

Essa constante é chamada determinante da transformação F .

Demonstração: Seja a transformação afim $F : \Pi \rightarrow \Pi$ que transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $F(P) = (ax + by + p, cx + dy + q)$. Dessa forma dados $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$ e $C = (x_2, y_2)$, F os transforma em

$$\begin{aligned} A_1 &= (ax_0 + by_0 + p, cx_0 + dy_0 + q), \\ B_1 &= (ax_1 + by_1 + p, cx_1 + dy_1 + q), \\ C_1 &= (ax_2 + by_2 + p, cx_2 + dy_2 + q). \end{aligned}$$

As áreas dos triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ são, respectivamente, os valores absolutos dos seguintes determinantes ”

$$\frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix} \right|$$

e

$$\frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) & a(x_2 - x_0) + b(y_2 - y_0) \\ c(x_1 - x_0) + d(y_1 - y_0) & c(x_2 - x_0) + d(y_2 - y_0) \end{bmatrix} \right|.$$

Pondo,

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix}$$

temos que

$$A(ABC) = \frac{1}{2}|\det X| \text{ e } A(A_1B_1C_1) = \frac{1}{2}|\det M \cdot X| = \frac{1}{2}|\det M| \cdot |\det X|.$$

Então segue que $\frac{A(A_1B_1C_1)}{A(ABC)} = \frac{\frac{1}{2}|\det M| \cdot |\det X|}{\frac{1}{2}|\det X|} = |\det M| = |ad - bc| = |\det F|.$ ■

A seguir enunciaremos um resultado que será utilizado no capítulo 6 e cuja demonstração pode ser encontrada em [5] nas páginas 207 a 211.

Proposição 28 *Uma transformação afim de posto dois $F : \Pi \longrightarrow \Pi$ transforma circunferências em elipses.*

Capítulo 5

Números Complexos

Neste capítulo abordaremos conceitos de números complexos, tais como, definição algébrica, sua representação no plano de Argand-Gauss e algumas operações. Em seguida, falaremos de sua representação trigonométrica, as operações e propriedades decorrentes. Estes conceitos constituem uma base importante para a demonstração do Teorema de Steiner. Este capítulo teve como base [6] e [4].

5.1 Forma Algébrica

O conjunto dos números complexos é formado pelos números que podem ser expressos na forma $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.

$$\mathbb{C} = \{x + yi | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

A forma $z = x + yi$ é denominada forma algébrica de um número complexo, em que x é chamado de parte real e y de parte imaginária, eles são respectivamente denotados por $\text{Re}(z) = x$ e $\text{Im}(z) = y$. Se $x = 0$ e $y \neq 0$, isto é, $z = yi$ o complexo é chamado de imaginário puro. Já no caso em que $y = 0$, $z = x$ é um número real. Dessa maneira, vemos que todo número real pode ser expresso na forma $z = x + 0i$.

Definição 24 *Os complexos $z = x + yi$ e $z' = x' + y'i$ são iguais se, e somente se, $x = x'$ e $y = y'$. Em particular, tem-se $x + yi = 0$ se, e somente se, $x = 0$ e $y = 0$.*

Definição 25 *Sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = z_2 + iy_2$, com x_1, x_2, y_1 e $y_2 \in \mathbb{R}$. A soma de z_1 e z_2 é o número complexo dado por*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Proposição 29 *Sejam z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$, então:*

- i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (comutatividade da adição).*
- ii) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (associatividade da adição).*
- iii) $z_1 + 0 = z_1$ (elemento neutro).*
- iv) Existe $-z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 + (-z_1) = 0$ (elemento simétrico).*

Nota: Se $z_1 = x + yi$, então $-z_1 = -x + (-y)i$.

Definição 26 *Sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, com x_1, x_2, y_1 e $y_2 \in \mathbb{R}$. A multiplicação procede-se como na multiplicação de dois binômios, fazendo $i^2 = -1$. Assim:*

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

Proposição 30 *Sejam z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$, então:*

- i) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (comutatividade da multiplicação).*
- ii) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (associatividade da multiplicação).*
- iii) $z_1 \cdot 1 = z_1$ (elemento unidade).*
- iv) Se $z_1 \neq 0$, existe $z_1^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 \cdot z_1^{-1} = 1$ (elemento inverso).*
- v) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ (distributividade).*

Nota: Se $z_1 = x + yi \neq 0$, então $x^2 + y^2 \neq 0$ e $z_1^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$.

Definição 27 *Chama-se complexo conjugado de $z = x + yi$, o número complexo $\bar{z} = x - yi$.*

É interessante observar que tanto soma quanto o produto de um número complexo pelo seu conjugado são números reais, pois

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot \overline{(x + yi)} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - y^2i^2 = x^2 - y^2 \cdot (-1) = x^2 + y^2.$$

$$z + \bar{z} = (x + yi) + \overline{(x + yi)} = (x + yi) + (x - yi) = 2x.$$

O produto $z \cdot \bar{z}$ é denominado de norma de $z = x + yi$ e é denotado por $N(z) = x^2 + y^2$.

Definição 28 *Sejam z_1 e z_2 dois complexos sendo $z_2 \neq 0$. O quociente entre z_1 e z_2 , indicado por $\frac{z_1}{z_2}$ é o complexo $z_1 \cdot z_2^{-1}$. Em particular, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{N(z)}$*

Utilizando o conjugado, temos o seguinte processo prático para dividir dois complexos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} \cdot \frac{x_2 - y_2i}{x_2 - y_2i} = \frac{(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Proposição 31 *Sejam z_1 e z_2 números complexos, então valem algumas propriedades:*

i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

ii) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - (\overline{z_2})$;

iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

iv) Se $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

v) Se z é real, então $z = \overline{z}$;

vi) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$;

vii) $z_1 + \overline{z_1} = 2 \operatorname{Re}(z_1)$

viii) Se n é um inteiro positivo, $(\overline{z_1})^n = \overline{(z_1)^n}$;

ix) $z_1 \cdot \overline{z_1} = N(z)$.

Fixando um sistema ortogonal de coordenadas no plano, o complexo $z = x + yi$ é representado pelo ponto $P = (x, y)$. O plano no qual representamos os complexos é chamado de plano de “Argand-Gauss” devido aos estudos feitos nesta área pelos matemáticos Jean Robert Argand (1768-1822) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

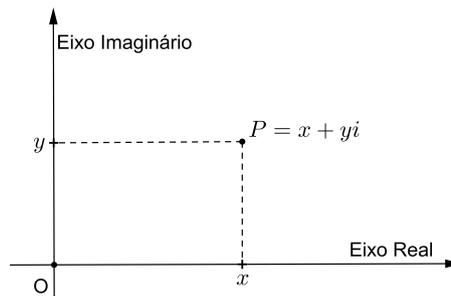


Figura 5.1: Representação dos complexos no plano de Argand-Gauss

Os números complexos podem ser representados neste plano de modo que a cada número complexo corresponda a um único ponto e, reciprocamente, cada ponto do plano corresponda a um único número complexo. Desta forma, o número $z = x + yi$ está associado ao ponto $P = (x, y)$ e este ponto é chamado de afixo ou imagem do complexo z .

Definição 29 *Se P é o afixo do complexo $z = x + yi$, então o módulo deste complexo é o número real não negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. A interpretação geométrica do módulo de z é o módulo do vetor de origem $(0, 0)$ e de extremidade (x, y) .*

Proposição 32 *Sejam z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$, então:*

i) $|z_1| \geq 0$ e $|z_1| = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$.

$$ii) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

$$iii) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0.$$

$$iv) |z_1| = |\bar{z}_1|$$

$$v) |\operatorname{Re}(z_1)| \leq |z_1|, |\operatorname{Im}(z_1)| \leq |z_1| \text{ e } |z_1| \leq |\operatorname{Re}(z_1)| + |\operatorname{Im}(z_1)|.$$

Proposição 33 Para todo número complexo z_1 e z_2 valem as desigualdades:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Demonstração: Sejam z_1 e z_2 números complexos, daí,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1 + z_2}) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1| |\bar{z}_2| + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1| |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

Como $|z_1 + z_2|^2 \geq 0$ e $(|z_1| + |z_2|)^2 \geq 0$, então

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Por outro lado,

$$|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2|.$$

Daí, $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

De modo análogo, temos que $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|$. Como

$$||z_1| - |z_2|| = \max\{|z_1| - |z_2|, |z_2| - |z_1|\}$$

então $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$. Portanto,

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

■

5.2 Forma Trigonométrica

Definição 30 *Seja P o afixo de um número complexo $z \neq 0$ e O a origem do plano de Argand-Gauss. Chama-se argumento de z qualquer um dos ângulos θ que a segmento OP forma com a parte positiva do eixo real.*

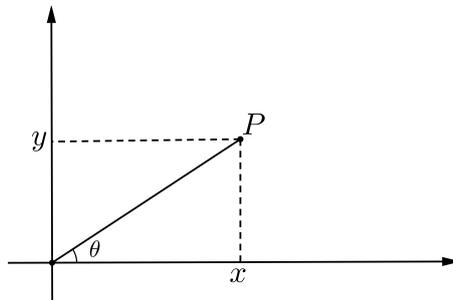


Figura 5.2: Argumento de um número complexo

Todo complexo não-nulo possui uma infinidade de argumentos, dois quaisquer deles, diferindo entre si por um múltiplo de 2π . O argumento que pertence ao intervalo $[0, 2\pi)$ é chamado de argumento principal e é representado por $\text{Arg } z$.

Observe, na figura anterior, que por meio das razões trigonométricas temos $\cos \theta = \frac{x}{|z|}$ e $\sin \theta = \frac{y}{|z|}$. Pondo x e y em evidência em cada equação, temos que $x = |z| \cdot \cos \theta$ e $y = |z| \cdot \sin \theta$. Portanto, se θ é um argumento de $z = x + yi$, então podemos escrever que $z = |z| \cos \theta + i|z| \sin \theta = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ que é denominada de forma trigonométrica do complexo z . Além disso, pode-se mostrar que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, mantendo todas as propriedades da função exponencial, de forma que podemos escrever $z = |z|e^{i\theta}$ chamado de forma exponencial do complexo.

A forma trigonométrica de um número complexo é uma ferramenta que nos auxilia em algumas operações dos números complexos, tais como a multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Proposição 34 *Se $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, então*

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

e, se $|z_2| \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot |z_2|(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\&= |z_1| \cdot |z_2|[\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2] \\&= |z_1| \cdot |z_2|[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2)] \\&= |z_1| \cdot |z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)].\end{aligned}$$

Para provar a segunda parte, basta mostrar que vale a seguinte sentença

$$\frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \cdot z_2 = z_1$$

Dessa forma, usando a primeira parte temos que

$$\begin{aligned}\frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \cdot z_2 &= \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \cdot |z_2|(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\&= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot |z_2|[\cos((\theta_1 - \theta_2) + \theta_2) + i \operatorname{sen}((\theta_1 - \theta_2) + \theta_2)] \\&= |z_1|[\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1] \\&= z_1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

■

Quando multiplicamos um complexo z por $\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, o vetor que representa z sofre uma rotação de ângulo θ em torno da origem

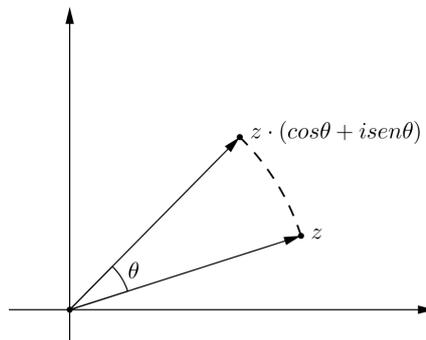


Figura 5.3: Representação geométrica do produto de complexos

Com efeito, para multiplicar complexos, multiplicamos os módulos e somamos os argumentos. Como $\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ tem módulo 1, $z \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ tem o mesmo módulo que z . O

argumento de $z \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ é o argumento de z aumentado θ . Logo o vetor que representa $z \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ é o resultado da rotação do vetor que representa z de um ângulo θ em torno da origem.

Para o cálculo de potências de números complexos, temos uma fórmula conhecida como **Fórmula de De Moivre**. Ela nos garante que:

Proposição 35 (Fórmula de De Moivre) *Se $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e n é inteiro, então*

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)].$$

Demonstração: Inicialmente provaremos que vale para $n \in \mathbb{N}$. Note que a fórmula trivialmente vale para $n = 0$ e $n = 1$. Para $n > 1$, temos que

$$z^n = [|z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = \underbrace{[|z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)] \cdot [|z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)] \cdots [|z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]}_{n\text{-vezes}}.$$

Utilizando a fórmula do produto reiteradamente, obtemos que

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)].$$

Vamos provar agora que a fórmula vale para n inteiro negativo.

Seja $n = -m$ com m natural. Temos então que

$$\begin{aligned} [|z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n &= [|z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^{-m} \\ &= \frac{1}{[|z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^m} \\ &= \frac{1 \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)}{|z|^m \cdot (\cos(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta))} \\ &= \frac{1}{|z|^m} \cdot \frac{\cos 0 + i \operatorname{sen} 0}{\cos(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta)} \end{aligned}$$

Pela fórmula do quociente dos números complexos, temos que

$$\begin{aligned} [|z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n &= \frac{1}{|z|^m} \cdot [\cos(0 - m\theta) + i \operatorname{sen}(0 - m\theta)] \\ &= |z|^{-m} \cdot [\cos(-m\theta) + i \operatorname{sen}(-m\theta)] \\ &= |z|^n \cdot [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)] \end{aligned}$$

Portanto $z^n = |z|^n \cdot [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$ é válido para todo n inteiro. ■

Vejamos agora como calcular as raízes dos números complexos, sabendo que:

Definição 31 Um número complexo w é uma raiz n -ésima do complexo z se $w^n = z$, para n natural.

Exemplo 6 Determine as raízes quadradas do complexo $6 - 8i$.

Solução: Pela definição de raízes, temos que determinar o complexo $x + yi$, x e y reais, tais que $(x + yi)^2 = 6 - 8i$. Assim,

$$(x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + y^2i^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = 6 - 8i.$$

Pela igualdade dos complexos, segue que

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 6 \\ 2xy = -8 \end{cases} \quad (5.1)$$

Pela segunda equação temos que $y = \frac{-4}{x}$. Daí, substituindo na primeira obtemos

$$x^2 - \frac{16}{x^2} = 6 \implies x^4 - 6x^2 - 16 = 0$$

Substituindo x^2 por a temos que $a^2 - 6a - 16 = 0$ e utilizando a fórmula de Bháskara obtemos $a = 8$ ou $a = -2$. Logo, $x^2 = 8$ ou $x^2 = -2$. Como x é real, temos apenas duas possibilidades para x : $x = 2\sqrt{2}$ ou $x = -2\sqrt{2}$. Como $y = \frac{-4}{x}$, temos $y = -\sqrt{2}$ ou $y = \sqrt{2}$, respectivamente. Portanto, as raízes são $2\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ e $-2\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Outra maneira de se calcular uma raiz quadrada deste complexo é através de um resultado conhecido como **fórmula de transformação de radicais duplos** que nos garante que:

Proposição 36 Sejam A e B números complexos, dessa forma

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Demonstração: Sejam X e Y complexos tais que

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{X} \pm \sqrt{Y}.$$

Tomemos então

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{X} + \sqrt{Y} \quad (i)$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{X} - \sqrt{Y} \quad (ii)$$

Somando (i) e (ii) temos

$$\begin{aligned}\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} &= 2\sqrt{X} \\ \Leftrightarrow A + \sqrt{B} + 2\sqrt{A^2 - B} + A - \sqrt{B} &= 4X \\ \Leftrightarrow X &= \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}\end{aligned}$$

Por outro lado, subtraindo (i) por (ii) temos

$$\begin{aligned}\sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}} &= 2\sqrt{Y} \\ \Leftrightarrow A + \sqrt{B} - 2\sqrt{A^2 - B} + A - \sqrt{B} &= 4Y \\ \Leftrightarrow Y &= \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

■

Voltando ao Exemplo 4 temos

$$\sqrt{6 - 8i} = \sqrt{6 - \sqrt{64i^2}} = \sqrt{6 - \sqrt{-64}}$$

Desta forma, $A = 6$ e $B = -64$ e utilizando a fórmula de transformação de radicais temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{6 - \sqrt{-64}} &= \sqrt{\frac{6 + \sqrt{6^2 - (-64)}}{2}} - \sqrt{\frac{6 - \sqrt{6^2 - (-64)}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{6 + 10}{2}} - \sqrt{\frac{6 - 10}{2}} \\ &= \sqrt{8} - \sqrt{-2} \\ &= 2\sqrt{2} - i\sqrt{2}\end{aligned}$$

Portanto as raízes serão $2\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ e $-(2\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

É importante observar que este método é eficaz quando $A > 0$ e $A^2 - B$ é igual ao quadrado de um número racional, caso contrário permaneceríamos ainda com radicais duplos.

O exemplo acima nos mostra, de modo particular, como determinar as raízes quadradas de um complexo. Porém os métodos utilizados nele não se aplicam para quaisquer índices. Por isso, de modo geral, podemos determinar raízes n-ésimas utilizando a fórmula descrita a seguir:

Proposição 37 Dados o número complexo $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e o número natural n ($n \geq 2$), então existem n raízes enésimas de z que são da forma:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right],$$

em que $\sqrt[n]{|z|} \in \mathbb{R}_+$ e $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Demonstração: Determinaremos todos os complexos z_k tais que $\sqrt[n]{z} = z_k$.

Seja $z_k = |z_k| \cdot (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$, aplicando a definição de raízes enésimas temos:

$$\sqrt[n]{z} = z_k \iff z_k^n = z$$

então

$$\begin{aligned} [|z_k| \cdot (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n &= |z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ |z_k|^n \cdot (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) &= |z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \end{aligned}$$

Portanto é necessário:

- (1) $|z_k|^n = |z| \implies |z_k| = \sqrt[n]{|z|}$
- (2) $\cos n\alpha = \cos \theta$
- (3) $\operatorname{sen} n\alpha = \operatorname{sen} \theta$

De (2) e (3) temos que

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \implies \alpha = \frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}.$$

Supondo $0 \leq \theta < 2\pi$, vamos determinar os valores de k para os quais resultam valores de α compreendidos entre 0 e 2π .

$$\begin{aligned} k = 0 &\implies \alpha = \frac{\theta}{n} \\ k = 1 &\implies \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \\ k = 2 &\implies \alpha = \frac{\theta}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \\ &\vdots \\ k = n-1 &\implies \alpha = \frac{\theta}{n} + (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

Estes n valores de α não são congruentes por estarem no intervalo $[0, 2\pi)$; portanto, dão origem a n valores distintos para z_k .

Considerando agora o valor de α obtido para $k = n$, temos

$$k = n \implies \alpha = \frac{\theta}{n} + n \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi.$$

Este valor de α é dispensado por ser congruente ao valor obtido com $k = 0$.

De modo análogo ocorre para $k = n + 1, n + 2, n + 3, \dots$ e $k = -1, -2, -3, \dots$. Portanto para obtermos os valores de z_k é suficiente fazer $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$.

■

Observe que as raízes têm todas o mesmo módulo, $\sqrt[n]{|z|}$. Logo, se $|z| \neq 0$, as imagens destas raízes se situam em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{|z|}$. Observe também que dando valores inteiros a k , os argumentos crescem em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$, o que mostra que estas raízes estão uniformemente espaçadas na circunferência. Portanto, podemos concluir que se $|z| \neq 0$ as imagens dessas raízes são vértices de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{|z|}$.

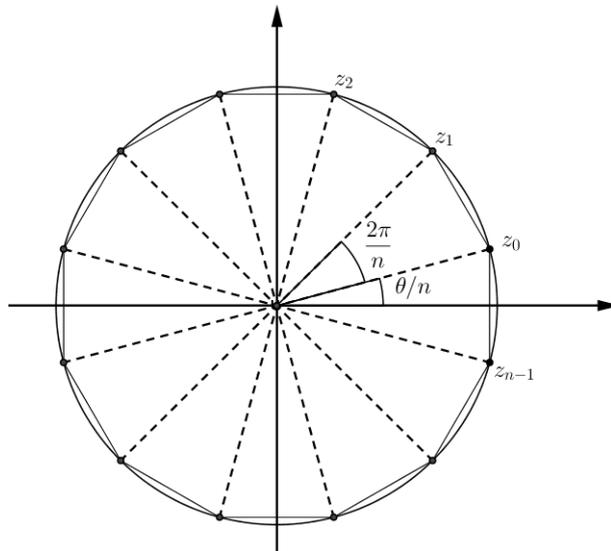


Figura 5.4: Representação geométrica das raízes n -ésimas de complexos

Exemplo 7 *Determine as raízes cúbicas de 1.*

Solução: O número complexo 1 tem módulo 1 e argumento 0. Então, podemos representá-lo na forma trigonométrica por $1 \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$. Pela proposição 36, as raízes cúbicas de 1 são z_k , de modo que

$$z_k = \sqrt[3]{1 \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)} = \sqrt[3]{1} \cdot \left[\cos \frac{k \cdot 2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{k \cdot 2\pi}{3} \right]$$

para $k = 0, 1, 2$. Temos então as raízes:

$$k = 0 \implies z_0 = 1 \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1;$$

$$k = 1 \implies z_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$k = 2 \implies z_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Observe que essas raízes são vértices de um triângulo equilátero inscrito na circunferência de centro na origem e raio 1. Além disso, pela proposição 16 temos que o raio da circunferência inscrita a este triângulo é $\frac{1}{2}$.

Se $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$, então as raízes cúbicas de 1 são 1, ω e ω^2 . Mais ainda, $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Note que se $z \neq 0$ é um complexo e ζ é uma raiz cúbica de z , então as outras raízes cúbicas de z são: $\omega\zeta$ e $\omega^2\zeta$. De fato,

$$\zeta^3 = (\omega\zeta)^3 = (\omega^2\zeta)^3 = z$$

e $\{\zeta, \omega\zeta, \omega^2\zeta\}$ é um conjunto com três elementos.

A seguir apresentaremos um resultado que será utilizado no próximo capítulo.

Proposição 38 *Se os complexos z_1 , z_2 e z_3 são vértices de um triângulo equilátero, então $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$*

Demonstração: Note que os vetores com extremos nos vértices $z_3 - z_2$, $z_2 - z_1$, $z_1 - z_3$,

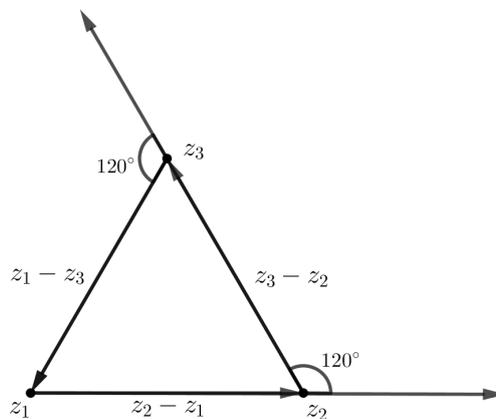


Figura 5.5: Triângulo equilátero de vértices z_1 , z_2 e z_3 .

formam ângulos de 120° . Portanto,

$$z_3 - z_2 = (z_2 - z_1)(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) \quad (i)$$

$$z_1 - z_3 = (z_3 - z_2)(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) \quad (ii)$$

De (i) e (ii) temos que

$$\begin{aligned}\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_3} &= \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} \implies (z_3 - z_2)(z_3 - z_2) = (z_2 - z_1)(z_1 - z_3) \\ &\implies z_3^2 - z_3z_2 - z_2z_3 + z_2^2 = z_2z_1 - z_2z_3 - z_1^2 + z_1z_3 \\ &\implies z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3.\end{aligned}$$

■

Capítulo 6

Elipse de Steiner

Este capítulo é destinado à demonstração do Teorema de Steiner e tem como base [7].

Sejam z_1 , z_2 e z_3 números complexos que são vértices de um triângulo. A seguir veremos algumas relações entre as raízes de $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ e as raízes de sua derivada $p'(z)$. Note que

$$p(z) = z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)z - z_1z_2z_3 \quad (6.1)$$

e

$$p'(z) = 3z^2 - 2(z_1 + z_2 + z_3)z + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3). \quad (6.2)$$

Seja $g = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$, que é o baricentro do triângulo $z_1z_2z_3$. As raízes de $p'(z)$ são:

$$g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)}. \quad (6.3)$$

Note que o baricentro do triângulo $z_1z_2z_3$ é igual ao ponto médio das raízes de $p'(z)$.

Lema 1 *As raízes de $p'(z)$ estão no interior do triângulo $z_1z_2z_3$*

Demonstração: Suponha que z' é uma raiz de $p'(z)$. Observe que $z' \neq z_j$ para $j = 1, 2, 3$ visto que $p(z)$ não tem raízes múltiplas. Então,

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\left(\frac{p'(z')}{p(z')}\right)} = \overline{\left(\frac{(z' - z_2)(z' - z_3) + (z' - z_1)(z' - z_3) + (z' - z_1)(z' - z_2)}{p(z')}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{(z' - z_2)(z' - z_3)}{p(z')}\right)} + \overline{\left(\frac{(z' - z_1)(z' - z_3)}{p(z')}\right)} + \overline{\left(\frac{(z' - z_1)(z' - z_2)}{p(z')}\right)} \\ &= \frac{1}{\overline{z' - z_1}} + \frac{1}{\overline{z' - z_2}} + \frac{1}{\overline{z' - z_3}} \\ &= \frac{z' - z_1}{|z' - z_1|^2} + \frac{z' - z_2}{|z' - z_2|^2} + \frac{z' - z_3}{|z' - z_3|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= (z' - z_1)|z' - z_1|^{-2} + (z' - z_2)|z' - z_2|^{-2} + (z' - z_3)|z' - z_3|^{-2} \\
\Rightarrow 0 &= z'|z' - z_1|^{-2} - z_1|z' - z_1|^{-2} + z'|z' - z_2|^{-2} - z_2|z' - z_2|^{-2} + z'|z' - z_3|^{-2} - z_3|z' - z_3|^{-2} \\
\Rightarrow 0 &= z'(|z' - z_1|^{-2} + |z' - z_2|^{-2} + |z' - z_3|^{-2}) - z_1|z' - z_1|^{-2} - z_2|z' - z_2|^{-2} - z_3|z' - z_3|^{-2} \\
\Rightarrow z' &(|z' - z_1|^{-2} + |z' - z_2|^{-2} + |z' - z_3|^{-2}) = z_1|z' - z_1|^{-2} + z_2|z' - z_2|^{-2} + z_3|z' - z_3|^{-2} \\
\Rightarrow z' &= \frac{z_1|z' - z_1|^{-2} + z_2|z' - z_2|^{-2} + z_3|z' - z_3|^{-2}}{|z' - z_1|^{-2} + |z' - z_2|^{-2} + |z' - z_3|^{-2}}
\end{aligned}$$

Isto nos dá $z' = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3$, onde

$$\alpha_k = \frac{|z' - z_k|^{-2}}{\sum_{j=1}^3 |z' - z_j|^{-2}} > 0 \text{ e } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$$

Como z' é uma combinação afim de z_1, z_2, z_3 e satisfaz as igualdades acima, concluímos que ele pertence ao interior do triângulo $z_1 z_2 z_3$. ■

Lema 2 *O polinômio $p'(z)$ tem uma raiz repetida se, e somente se, o triângulo é equilátero.*

Demonstração: Suponha que o triângulo $z_1 z_2 z_3$ é equilátero, então

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Esta igualdade é equivalente a

$$3g^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3,$$

logo $p'(z)$ tem apenas uma raiz que é g .

Reciprocamente, suponha que $p'(z)$ tem apenas uma raiz, então

$$3g^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Substituindo na equação (6.1), obtemos

$$\begin{aligned}
p(z) &= z^3 - 3gz^2 + 3g^2z - z_1 z_2 z_3 \\
&= (z - g)^3 - z_1 z_2 z_3 + g^3
\end{aligned}$$

Seja ζ uma raiz cúbica de $z_1 z_2 z_3 - g^3$, então as raízes de $p(z)$ são $g + \zeta, g + \omega\zeta$ e $g + \omega^2\zeta$, onde $\omega = e^{2\pi i/3}$. Estes pontos são os vértices de um triângulo equilátero. ■

Uma ligação mais sofisticada entre as raízes de um polinômio cúbico e as raízes de sua derivada resulta de um importante resultado de Steiner.

Teorema 1 (Teorema de Steiner) *Dado qualquer triângulo, há uma única elipse inscrita no triângulo que passa pelos pontos médios dos lados do triângulo e é tangente aos lados do triângulo nesses pontos médios. Se z_1, z_2 e z_3 são os vértices do triângulo, então os focos da elipse são*

$$g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)}, \quad (6.4)$$

onde $g = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ é o baricentro.

A elipse inscrita no triângulo $z_1 z_2 z_3$ que tangencia os lados em seus pontos médios é chamada de **elipse de Steiner**. Note que de (6.4) podemos garantir que o centro da elipse de Steiner coincide com o baricentro do triângulo $z_1 z_2 z_3$. Além disso, a elipse de Steiner se degenera em uma circunferência se, e somente se, o triângulo $z_1 z_2 z_3$ é equilátero.

Temos ainda de (6.3) e (6.4) o seguinte resultado:

Corolário 2 (Siebeck) *Se z_1, z_2, z_3 são pontos não colineares em \mathbb{C} e $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. Então as raízes de $p'(z)$ são os focos da elipse de Steiner.*

O restante deste capítulo será dedicado à demonstração do Teorema 1. Na prova do teorema de Steiner faz-se uso de transformações afins, então vamos recordar alguns fatos necessários sobre transformações afins e lineares no plano cartesiano \mathbb{R}^2 . Consideraremos o plano como o conjunto \mathbb{C} dos números complexos e escreveremos as transformações em termos de números complexos, identificando o ponto (x, y) de \mathbb{R}^2 com o número complexo $z = x + yi$. Em termos de números complexos, uma transformação linear f tem a forma $f(z) = Az + B\bar{z}$, onde $A = a_1 + a_2 i$ e $B = b_1 + b_2 i$.

Note que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(z) = Az + B\bar{z} = (a_1 + ia_2) \cdot (x + yi) + (b_1 + ib_2)(x - yi) \\ &= a_1 x - a_2 y + b_1 x + b_2 y + i(a_1 y + a_2 x + b_2 x - b_1 y) \\ &= (a_1 x - a_2 y + b_1 x + b_2 y, a_1 y + a_2 x + b_2 x - b_1 y) \\ &= ((a_1 + b_1)x + (b_2 - a_2)y, (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y) \end{aligned}$$

A matriz da transformação linear f é

$$M = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & b_2 - a_2 \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{bmatrix}.$$

O $\det M = (a_1 + b_1)(a_1 - b_1) - (a_2 + b_2)(-a_2 + b_2) = a_1^2 - b_1^2 - (-a_2^2 + b_2^2) = (a_1^2 + a_2^2) - (b_1^2 + b_2^2) = |A|^2 - |B|^2 \neq 0$ se, e somente se, esta transformação tem posto dois. Assim, f é bijetiva se, e somente se, $|A| \neq |B|$.

Se f tem posto dois, a imagem de qualquer circunferência com o centro na origem é uma elipse ou uma circunferência com centro na origem. Utilizaremos $\mathbb{T} = \{z; |z| = 1\}$ para representar uma circunferência com centro na origem e raio igual a 1 e $r\mathbb{T}$ para representar uma circunferência com centro também na origem e raio $r > 0$. Reciprocamente dado uma elipse ε e qualquer circunferência $r\mathbb{T}$, existe uma transformação linear de posto dois que aplica $r\mathbb{T}$ em ε .

Na notação complexa, uma transformação afim tem a forma $f(z) = Az + B\bar{z} + C$, em que C é um número complexo. Isto é, uma transformação afim é uma transformação linear seguida de uma translação.

As transformações afins em geral não preservam o comprimento ou o ângulo, porém elas aplicam retas em retas, retas paralelas em retas paralelas, pontos médios em pontos médios e baricentro em baricentro. Tais fatos ocorrem pelo fato de utilizarmos transformações afins de posto dois. O teorema seguinte será utilizado na demonstração do Teorema de Steiner.

Teorema 2 *Se $f(z) = Az + B\bar{z} + C$ é uma transformação afim bijetiva, então a imagem da circunferência $r\mathbb{T}$ é a elipse com focos $C \pm 2r\sqrt{AB}$, semieixo maior de comprimento $(|A| + |B|)r$, e semieixo menor com comprimento $||A| - |B||r$.*

Demonstração: É suficiente considerar o caso $C = 0$, $f(z) = Az + B\bar{z}$ uma transformação linear bijetiva e $r = 1$, pois $f(rz) = rf(z)$. Se $A = 0$ ou $B = 0$, então a imagem da circunferência unitária é uma circunferência com centro na origem e raio medindo $|B|$ ou $|A|$, respectivamente. Suponha agora que $A \neq 0$ e $B \neq 0$, daí f aplica a circunferência \mathbb{T} em uma elipse, basta mostrar que os focos são $\pm 2\sqrt{AB}$, semieixo maior de comprimento $(|A| + |B|)$, e semieixo menor com comprimento $||A| - |B||$.

Para isto, utilizaremos a forma paramétrica da circunferência unitária, que é e^{it} , para $t \in \mathbb{R}$. Dessa forma, $f(e^{it}) = Ae^{it} + Be^{-it} = |A|e^{i\alpha}e^{it} + |B|e^{i\beta}e^{-it} = |A|e^{i(\alpha+t)} + |B|e^{i(\beta-t)}$, onde pela forma exponencial dos complexos, $A = |A|e^{i\alpha}$ e $B = |B|e^{i\beta}$. Pela proposição 32, temos que, $||A| - |B|| \leq ||A|e^{i(\alpha+t)} + |B|e^{i(\beta-t)}| \leq |A| + |B|$. Isto mostra que a elipse contém a circunferência $|z| = ||A| - |B||$ e está contida na circunferência $|z| = |A| + |B|$.

A igualdade $||A|e^{i(\alpha+t)} + |B|e^{i(\beta-t)}| = |A| + |B|$ ocorre se, e somente se, $e^{i(\alpha+t)} = e^{i(\beta-t)}$. Isso ocorre quando $\alpha + t = \beta - t + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $t = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) + k\pi$, para

algum $k \in \mathbb{Z}$.

Temos que, para $t = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ e $t = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) + \pi$, $|f(e^{it})| = |A| + |B|$. Isto nos garante que o semieixo maior é $a = |A| + |B|$. Já que $A = |A|e^{i\alpha}$ e $B = |B|e^{i\beta}$, então $e^{i\alpha/2} = \frac{\sqrt{A}}{|A|^{1/2}}$ e $e^{i\beta/2} = \frac{\sqrt{B}}{|B|^{1/2}}$, respectivamente. Daí,

$$f(e^{i(\beta-\alpha)/2}) = |A|e^{i\alpha} \cdot e^{i(\beta-\alpha)/2} + |B|e^{i\beta} \cdot e^{-i(\beta-\alpha)/2} = e^{i(\alpha+\beta)/2} \cdot (|A| + |B|) = \frac{|A| + |B|}{|AB|^{1/2}} \sqrt{AB}.$$

Portanto \sqrt{AB} é um vetor direção do eixo focal. De modo análogo, $||A| - |B|| = ||A|e^{i(\alpha+t)} + |B|e^{i(\beta-t)}|$ se, e somente se, $e^{i(\alpha+t)} = -e^{i(\beta-t)}$, ou seja, $\alpha + t = \beta - t + \pi + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $t = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) + \frac{\pi}{2} + k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí, o comprimento do semieixo menor é $b = ||A| - |B||$. Agora para determinar os focos, utilizaremos a relação $c^2 = a^2 - b^2 = 4|A||B|$ de modo que $c = 2|A|^{1/2}|B|^{1/2}$. Portanto os focos são $\pm 2\sqrt{AB}$. ■

Demonstração do Teorema de Steiner:

Existência:

Vamos mostrar a existência de uma elipse inscrita que tangencia os lados do triângulo nos pontos médios. Considere o triângulo equilátero Δ com vértices 1 , $\omega = e^{2\pi i/3}$ e ω^2 . Dado um triângulo qualquer $z_1 z_2 z_3$ em \mathbb{C} , existe uma única transformação afim $f(z) = Az + B\bar{z} + C$ de modo que $f(1) = z_1$, $f(\omega) = z_2$ e $f(\omega^2) = z_3$. Obtemos então o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} f(1) = A + B + C = z_1 \\ f(\omega) = A\omega + B\bar{\omega} + C = z_2 \\ f(\omega^2) = A\omega^2 + B\bar{\omega}^2 + C = z_3 \end{cases} \quad (6.5)$$

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega & \bar{\omega} & 1 \\ \omega^2 & \bar{\omega}^2 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ e $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$. O sistema de equações 6.5 equivale

a $A \cdot X = Z$. Como $\det A = 3$, então A possui matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Logo,

$$\begin{aligned}
A \cdot X = Z &\Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot Z \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot Z \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 \\ z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Como z_1, z_2, z_3 não são colineares então f é uma bijeção. A circunferência $\frac{1}{2}\mathbb{T}$ é inscrita ao triângulo equilátero de vértices $1, \omega$ e ω^2 , então a transformação f aplica $\frac{1}{2}\mathbb{T}$ na elipse $f(\frac{1}{2}\mathbb{T})$ que tangencia o triângulo $z_1 z_2 z_3$ nos pontos médios de seus lados, pois transformações afins aplicam pontos médios em pontos médios.

Observemos que

$$\begin{aligned}
AB &= \left(\frac{1}{3}(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) \right) \cdot \left(\frac{1}{3}(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3) \right) \\
&= \frac{1}{9}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + (\omega + \omega^2)(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)) \\
&= \frac{1}{9}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)) \\
&= g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)
\end{aligned}$$

pois $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Pelo Teorema 2, f aplica $(\frac{1}{2}\mathbb{T})$ em uma elipse de focos

$$g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)}.$$

Unicidade:

Provaremos agora que a elipse de Steiner é única. Suponha que ε é uma elipse inscrita no triângulo $z_1 z_2 z_3$ e tangente aos pontos médios dos lados. Há uma transformação afim bijetiva h que aplica a circunferência $\frac{1}{2}\mathbb{T}$ na elipse ε . A pré-imagem do triângulo $z_1 z_2 z_3$ é um triângulo, digamos $Z_1 Z_2 Z_3$, com a circunferência $\frac{1}{2}\mathbb{T}$ inscrito e tangente aos lados nos pontos médios. Logo, pela proposição 13 o triângulo $Z_1 Z_2 Z_3$ é equilátero. A circunferência circunscrita a um triângulo equilátero possui o dobro do raio da circunferência inscrita, então os vértices de $Z_1 Z_2 Z_3$ estão contidos em \mathbb{T} . Se necessário, podemos compor h com uma rotação para garantir que $Z_1 = 1$ e conseqüentemente, $\{Z_2, Z_3\} = \{\omega, \omega^2\}$. Se necessário, também podemos compor

h com uma reflexão sobre o eixo real para garantir que $Z_2 = \omega$ e $Z_3 = \omega^2$. Então $h = f$ e ε é a elipse construída na primeira parte do argumento. ■

Exemplo 8 *Determine os focos e a equação da elipse de Steiner de um triângulo com vértices $z_1 = 6i$, $z_2 = 5 + i$ e $z_3 = -5 + i$.*

Solução: Seja $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = (z - 6i)(z - (5 + i))(z - (-5 + i))$. Daí, $P(z) = z^3 - 8iz^2 - 38z - 156i$ e $P'(z) = 3z^2 - 16iz - 38$, onde $\alpha_1 = \frac{8i + 5\sqrt{2}}{3}$ e $\alpha_2 = \frac{8i - 5\sqrt{2}}{3}$ são raízes de $p'(z)$. Logo, a elipse de Steiner inscrita no triângulo com seus vértices $z_1 = (0, 6)$, $z_2 = (5, 1)$ e $z_3 = (-5, 1)$ possui focos iguais a $F_1 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{3}, \frac{8}{3}\right)$ e $F_2 = \left(\frac{-5\sqrt{2}}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Como um dos pontos médios deste triângulo é o ponto $M = (0, 1)$ temos que $d(F_1, M) + d(F_2, M) = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. Daí, a medida do semieixo focal será $a = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. A medida do semieixo não focal, neste caso, será igual a $b = d(g, M) = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$. Portanto a equação desta elipse será $\frac{x^2}{\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{8}{3}\right)^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = 1$.

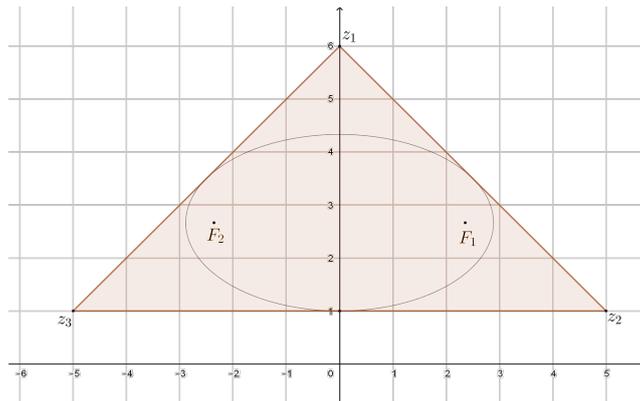


Figura 6.1: Elipse de Steiner no triângulo de vértices $z_1 = 6i$, $z_2 = 5 + i$ e $z_3 = -5 + i$.

A seguir, provaremos que a elipse de Steiner é a que possui maior área dentre todas as outras inscritas em um triângulo.

É fato que uma circunferência inscrita em um triângulo tem o maior raio, e assim a maior área entre todas as outras circunferências contidas neste mesmo triângulo. Esta propriedade é análoga para as elipses.

Teorema 3 *Seja C qualquer círculo contido no triângulo $z_1z_2z_3$. Então*

$$\frac{A(C)}{A(z_1z_2z_3)} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

e a igualdade acontece se, e somente se, o triângulo $z_1z_2z_3$ é equilátero e C é o círculo inscrito.

Demonstração: Seja r a medida do raio do círculo inscrito ao triângulo $z_1z_2z_3$. Como o círculo inscrito é o maior círculo contido em um triângulo, podemos afirmar que dado um círculo C qualquer contido no triângulo $z_1z_2z_3$, $A(C) \leq \pi r^2$ e a igualdade acontece se, e somente se, C é o círculo inscrito ao triângulo. Portanto é suficiente provar que

$$\frac{\pi r^2}{A(z_1z_2z_3)} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

com igualdade se, e somente se, o triângulo $z_1z_2z_3$ é equilátero.

Representaremos por a , b , e c as medidas dos lados de $z_1z_2z_3$ e $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ o semi-perímetro. Pela fórmula de Herão, $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ é a área do triângulo $z_1z_2z_3$, bem como o produto $r \cdot s$ também é. Portanto,

$$r^2s = \frac{[A(z_1z_2z_3)]^2}{s} = (s-a)(s-b)(s-c).$$

Como a média geométrica é menor do que ou igual à média aritmética, temos que

$$[(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{1}{3}} \leq \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} = \frac{s}{3}$$

com a igualdade se, e somente se, $a = b = c$. Assim,

$$r^2s \leq \frac{s^3}{27} \iff r^2 \leq \frac{s^2}{27} \iff r \leq \frac{s}{3\sqrt{3}}$$

e igualdade apenas se $z_1z_2z_3$ é equilátero. Então,

$$\frac{\pi r^2}{A(z_1z_2z_3)} = \frac{\pi r}{s} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

com igualdade se, e somente se, o triângulo $z_1z_2z_3$ é equilátero. ■

Teorema 4 *Entre todas as elipses contidas em um triângulo, a elipse de Steiner é a que tem a maior área. Mais precisamente, para qualquer elipse ε contida no triângulo $z_1z_2z_3$,*

$$\frac{A(\varepsilon)}{A(z_1z_2z_3)} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

e a igualdade vale apenas se ε é a elipse de Steiner.

Demonstração: Considere a transformação afim f , com $f(1) = z_1$, $f(\omega) = z_2$ e $f(\omega^2) = z_3$. Dessa forma, $f(\frac{1}{2}\mathbb{T}) = \varepsilon_0$ é a elipse de Steiner. Como transformações afins multiplicam áreas por um mesmo fator, então

$$\frac{A(\varepsilon_0)}{A(z_1 z_2 z_3)} = \frac{A(\frac{1}{2}\mathbb{T})}{A(\Delta)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

em que Δ é o triângulo de vértices 1 , ω e ω^2 .

Agora considere qualquer elipse ε contida no triângulo $z_1 z_2 z_3$. Daí existe uma transformação afim h que aplica $\frac{1}{2}\mathbb{T}$ em ε . A imagem inversa do triângulo $z_1 z_2 z_3$ é o triângulo $Z_1 Z_2 Z_3$ que tem $\frac{1}{2}\mathbb{T}$ como círculo inscrito. Então, pelo Teorema 3, temos que $\frac{A(\varepsilon)}{A(z_1 z_2 z_3)} = \frac{A(\frac{1}{2}\mathbb{T})}{A(Z_1 Z_2 Z_3)} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ e a igualdade só vale se o triângulo $Z_1 Z_2 Z_3$ é equilátero e $\frac{1}{2}\mathbb{T}$ é o círculo inscrito. Como na prova do Teorema de Steiner, as condições da igualdade implicam que ε é a elipse de Steiner. ■

Capítulo 7

Conclusão

Como dito inicialmente, dado um triângulo qualquer, existem infinitas elipses inscritas. Dentre estas há uma única que tangencia este triângulo nos pontos médios e possui o centro no baricentro. Esta elipse é denominada elipse de Steiner. Interessados por estes resultados, demos início a este trabalho com o objetivo de demonstrar o teorema de Steiner.

Embora a demonstração deste teorema seja sofisticada, seu resultado é claro. Para determinar as coordenadas do foco e a equação da elipse de Steiner é necessário, apenas, identificar pontos no plano \mathbb{R}^2 como números complexos e manipular algébricamente polinômios de grau menor do que ou igual a três no conjunto dos números complexos.

A construção geométrica de elipses inscritas em um triângulo é fácil de ser realizada, pois utiliza-se apenas conceitos de perpendicularismo. Dessa forma elas podem ser construídas utilizando régua, compasso (ou esquadro) e um pedaço de barbante.

Referências Bibliográficas

- [1] *ALVES, S. Elipses inscritas num triângulo.* Revista do Professor de Matemática 82, p. 46 - 49, SBM, 2013.
- [2] *BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana.* Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2006.
- [3] *DELGADO, J; FRENSEL, K; CRISSAFF; L. Geometria Analítica.* Coleção PROFMAT, SBM, 2013.
- [4] *IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar 6: Complexos, Polinômios e Equações.* 7ª edição. Editora Atual, 2005.
- [5] *LIMA, E. L. Coordenadas no Plano.* 6ª edição, Coleção do Professor de Matemática, SBM 2013.
- [6] *LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio, volume 3.* Coleção do Professor de Matemática, 6ª edição, SBM, 2010.
- [7] *MINDA, D.; PHELPS, S. Triangles, Ellipses, and Cubic Polynomials.* The American Mathematical Monthly, Vol. 115, No. 8, p. 679-689, 2008.
- [8] *MONTEIRO, M. A. De Nossos Alunos.* Revista do Professor de Matemática 55, p. 26 - 28, SBM, 2004.
- [9] *NETO, A. C. M. Geometria.* Coleção PROFMAT, SBM, 2013.
- [10] *NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana.* Edição Especial PIC - OBMEP. SBM, 2014.