

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação  
Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional

Pedro Roberto Miguel Arakaki

**SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES  
COM APLICAÇÕES**

Campo Grande - MS

2017

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação  
Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional

Pedro Roberto Miguel Arakaki

SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES  
COM APLICAÇÕES

Orientadora Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do  
Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato  
Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos  
para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2017

# SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES COM APLICAÇÕES

**Pedro Roberto Miguel Arakaki**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Lino Sanabria

Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

Profa. Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas (Orientadora)

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Campo Grande - MS, 11 de dezembro de 2017

*“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação.”*

Carl Friedrich Gauss

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus que fez brotar em mim a semente do conhecimento e tornou possível gerar muitos frutos, a sua misericórdia e amor reinaram sobre mim.

Agradeço aos meus familiares que de algum modo contribuíram para minha formação, e em especial, meu agradecimento à minha avó Candida Arakaki ou Tsuruko Arakaki, que me deu todo recurso necessário quando mais precisei. Palavras não descrevem a minha gratidão, mas a sua memória sempre em meu coração.

Aos meus colegas do mestrado agradeço por compartilharem seus conhecimentos, ao meu amigo Neri e ao Dailton meu grande agradecimento pela ajuda com a parte de formatação do trabalho. Aos professores que gentilmente nos prepararam para a formação de mestrado, meu agradecimento, vocês serão nossos eternos mestres.

Um agradecimento especial para a Professora Elisabete Sousa Freitas, a simplicidade de sua didática nos mostra a complexidade do seu conhecimento, foi um grande privilégio lhe ter como orientadora, este trabalho foi possível graças ao seu olhar atento. Meu conhecimento e pensamento matemático enriqueceram pelas suas aulas e orientações, eternamente grato.

# Resumo

Abordamos um tema da Análise Matemática, Sequências e Séries de Funções, geralmente visto no últimos capítulos dos livros texto de Cálculo ou de Análise, tema este que faz a relação entre funções reais e sequências e séries de números reais. Com hipóteses adicionais, a teoria é desenvolvida numa linguagem mais elementar do que nos cursos de Análise Real, visando mais as aplicações em conteúdos do Ensino Médio.

**Palavras-chave:** Séries de Funções, Convergência Uniforme, Séries de Potências.

# Abstract

We address a theme of Mathematical Analysis, Sequences and Series of Functions, generally seen in the last chapters of the textbooks of Calculus or Analysis, the theme that makes the relation between real functions and sequences and series of real numbers. With additional hypotheses, the theory is developed in a more elemental language than in the courses of Real Analysis, aiming more the applications in contents of High School.

**Key words:** Series of Functions, Uniform Convergence, Power Series.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Pré-requisitos</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Sequências e Séries de Funções</b>	<b>9</b>
2.1	Sequências de Funções . . . . .	9
2.1.1	Convergência Pontual . . . . .	9
2.1.2	Convergência Uniforme . . . . .	14
2.2	Séries de Funções . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Séries de Taylor</b>	<b>25</b>
3.1	Aproximação de Funções por Funções Polinomiais . . . . .	25
3.2	Fórmula de Taylor Com Resto de Lagrange . . . . .	29
3.2.1	O Número $e$ é Irracional . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Séries de Potências</b>	<b>34</b>
<b>5</b>	<b>Aplicações</b>	<b>41</b>
5.1	Construção das Funções Seno e Cosseno sem o uso da Geometria . . . . .	41
5.2	Teorema da Série Binomial . . . . .	44



# Introdução

Este trabalho sobre Sequências e Séries de Funções tem como objetivo principal o estudo das Séries de Potências, com aplicações em funções que já aparecem no Ensino Médio. As Séries de Potências são casos particulares das Séries de Funções e as funções que podem ser definidas por Séries de Potências formam a importante classe das chamadas Funções Analíticas.

Em geral, os livros de Cálculo apresentam os principais Teoremas sobre Séries de Potências sem suas respectivas demonstrações, como por exemplo, sem a prova que estas séries podem ser derivadas termo a termo. Nos livros de Análise Real, os resultados sobre Séries de Potências, suas demonstrações e aplicações aparecem no final do livro, e nem sempre são estudadas pela maioria dos alunos que cursam Análise Real. Pensamos neste tema porque acreditamos que um professor de matemática precisa saber um pouco mais sobre os conteúdos que ele ensina.

Tendo em vista as funções que queremos estudar, consideramos sempre que os domínios das funções são intervalos da reta e enunciamos versões mais fracas de alguns teoremas, mas suficientes para atingir nosso objetivo principal.

Admitindo conhecidos resultados básicos do Cálculo Diferencial e Integral, começamos com Sequências e Séries de Funções reais, onde o conceito de convergência uniforme é fundamental para demonstrar os resultados sobre Séries de Potências. Em seguida, trabalhamos com as Séries de Taylor, as quais são exemplos importantes de Séries de Funções e apresentamos as séries das funções Seno, Cosseno e Exponencial. No quarto capítulo, sobre Séries de Potências, usamos fortemente o conceito de convergência uniforme para demonstrar os resultados sobre derivação e integração termos a termo. No último capítulo, as séries de potências são usadas para definir as funções trigonométricas seno e cosseno sem o uso da geometria. Concluimos com uma generalização do binômio de Newton.

# Capítulo 1

## Pré-requisitos

Neste trabalho, admitiremos conhecimentos básicos de um curso de Cálculo que podem ser consultadas nas referências [6], [7], [8], [9],[10] e [11]. Para facilitar a leitura, faremos a seguir um resumo dos principais resultados que serão utilizados nos próximos capítulos.

### Limite

**Definição 1.1 (Limite)** *Sejam  $I$  um intervalo na reta e  $x_0$  um número real tal que para todo  $\delta > 0$ , tem-se que  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I \neq \emptyset$ . Dizemos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tem limite  $L$ , quando  $x$  tende a  $x_0$ , e denotamos*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se, dado  $\epsilon > 0$ , existir  $\delta > 0$ , tal que para todo  $x \in I$

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

**Teorema 1.1** *Sejam  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  tais que, para  $x_0$  real e para todo  $\delta > 0$  tem-se que  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I \neq \emptyset$ , com  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ . Então*

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \text{ se } M \neq 0.$$

Além disso, se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  e  $g$  é limitada numa vizinhança de  $x_0$ , tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

**Definição 1.2 (Função Contínua)** *Seja  $I$  um intervalo da reta e  $x_0 \in I$ . Dizemos que uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $x_0$  se, dado  $\epsilon > 0$  arbitrário, existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in I$ ,*

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

## Derivada

**Definição 1.3 (Derivada)** *Sejam  $I$  um intervalo na reta e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Fixado  $x_0 \in I$ , diremos que  $f$  é derivável em  $x_0$  se existir o limite*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

*Nesse caso, tal limite será denominado derivada de  $f$  em  $x_0$ , sendo denotado por  $f'(x_0)$ .*

**Teorema 1.2** *Se  $f$  for derivável em  $x_0$ , então  $f$  será contínua em  $x_0$ .*

**Teorema 1.3** *Sejam  $f$  e  $g$  funções deriváveis e  $k$  uma constante real, valem as regras de derivação:*

1.  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ ;
2.  $(kf(x))' = kf'(x)$ ;
3.  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ ;
4.  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ .

**Teorema 1.4 (Regra da Cadeia)** *Sejam  $I$  e  $J$  intervalos abertos e  $g : I \rightarrow J$  e  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  funções dadas. Se  $g$  é derivável em  $x_0 \in I$  e  $f$  é derivável em  $g(x_0) \in J$ , então  $f \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em  $x_0$ , com*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) g'(x_0).$$

**Teorema 1.5 (Rolle)** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ . Se  $f(a) = f(b) = 0$ , então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

**Teorema 1.6 (Teorema do Valor Médio - TVM)** *Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ , então existe pelo menos um número  $c \in (a, b)$  tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

*ou,*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

## Integral

**Definição 1.4** *Sejam  $F(x)$  e sua derivada  $F'(x) = f(x)$  funções contínuas num intervalo  $[a, b]$ . Inserindo pontos  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  obtemos  $n$  subintervalos  $[t_0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$ ,  $\dots$ ,  $[t_{n-1}, t_n]$  contidos em  $[a, b]$ . Escolhendo pontos  $x_1 \in [t_0, t_1]$ ,  $x_2 \in [t_1, t_2]$ ,  $\dots$ ,  $x_n \in [t_{n-1}, t_n]$  e considerando a soma  $S_n = f(x_1)(t_1 - t_0) + f(x_2)(t_2 - t_1) + \dots + f(x_n)(t_n - t_{n-1})$ , o símbolo  $\int_a^b f(x)dx$  representa o  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  e é chamado de integral definida da função  $f$  desde  $x = a$  até  $x = b$ . A função  $F$  é chamada de primitiva da função.*

**Teorema 1.7 (Teorema Fundamental do Cálculo)** *Se uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua então  $f$  possui uma primitiva  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Teorema 1.8** *Se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas. Então*

$$1) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

$$2) \text{ Se } c \in \mathbb{R}, \int_a^b c \cdot f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

**Teorema 1.9** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, então a função  $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  também é contínua, e vale a desigualdade abaixo:*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

## Sequências de Números Reais

**Definição 1.5** *Uma sequência de números reais é uma função  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  dos números naturais e tomando valores no conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais.*

*O valor de  $x(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , será representado por  $x_n$  é chamado o termo de ordem  $n$ , ou o  $n$ -ésimo termo da sequência.*

*Escreve-se  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ , ou  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou simplesmente  $(x_n)$  para indicar a sequência.*

**Definição 1.6** *Uma sequência  $(x_n)$  é limitada superiormente quando o conjunto  $x(\mathbb{N})$ , dos seus termos, é limitado superiormente.*

**Definição 1.7** Uma sequência  $(x_n)$  é limitada inferiormente quando o conjunto  $x(\mathbb{N})$ , dos seus termos, é limitado inferiormente.

**Definição 1.8** Uma sequência  $(x_n)$  é limitada quando o conjunto  $x(\mathbb{N})$ , dos seus termos, é limitado .

**Definição 1.9** Uma sequência  $(x_n)$  é crescente quando  $x_n < x_{n+1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se vale  $x_n \leq x_{n+1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , diz-se que a sequência é não-decrescente.

**Definição 1.10** Uma sequência  $(x_n)$  é decrescente quando  $x_n > x_{n+1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se vale  $x_n \geq x_{n+1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , diz-se que a sequência é não-crescente.

**Definição 1.11** As sequências crescentes, decrescentes, não-crescentes e não-decrescentes são chamadas sequências monótonas.

**Definição 1.12** Dada uma sequência  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais, uma subsequência de  $x$  é a restrição da função  $x$  a um subconjunto infinito  $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\} \subset \mathbb{N}$ , onde  $n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$ . Escreve-se  $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  ou  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_i}, \dots)$ , para indicar a subsequência.

Observamos que uma subsequência passa a ser vista como uma nova sequência  $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ , portanto uma função de domínio natural onde  $i \rightarrow x_{n_i}$ , para cada  $i \in \mathbb{N}$ .

**Proposição 1.1** Para que uma sequência monótona seja limitada é necessário e suficiente que ela possua uma subsequência limitada.

**Definição 1.13** Diz-se que o número real  $a$  é limite da sequência  $(x_n)$  de números reais e escreve-se  $\lim x_n = a$ , ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , quando para cada número real  $\epsilon > 0$ , dado arbitrariamente, for possível obter um natural  $n_0$  tal que  $|x_n - a| < \epsilon$ , sempre que  $n > n_0$ . De modo equivalente temos,

$$\lim x_n = a. \equiv \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \implies |x_n - a| < \epsilon.$$

Quando  $\lim x_n = a$ , diz-se que a sequência  $(x_n)$  converge para  $a$ , ou tende para  $a$  e escreve-se também  $x_n \rightarrow a$ . Uma sequência que possui limite chama-se convergente. Do contrário, ela se chama divergente.

**Proposição 1.2** Toda sequência convergente é limitada.

**Teorema 1.10** *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

**Corolário 1.1** *Se uma sequência monótona  $(x_n)$  possui uma subsequência convergente, então  $(x_n)$  é convergente.*

**Teorema 1.11 (Teorema do Confronto)** *Sejam  $x_n \leq y_n \leq z_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $\lim x_n = \lim z_n = a$  então  $\lim y_n = a$ .*

**Teorema 1.12** *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

**Definição 1.14 (Sequência de Cauchy)** *Uma sequência  $(x_n)$  de números reais é chamada sequência de Cauchy quando dado arbitrariamente um número  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que*

$$m, n > n_0 \implies |x_m - x_n| < \epsilon.$$

**Teorema 1.13** *Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

**Teorema 1.14** *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

**Teorema 1.15** *Se uma sequência de Cauchy  $(x_n)$  possui uma subsequência convergindo para  $a \in \mathbb{R}$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .*

**Teorema 1.16** *Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.*

**Definição 1.15** *Seja  $(x_n)$  uma sequência de números reais. Diremos que  $\lim x_n = +\infty$  ( $x_n$  tende para  $+\infty$ ) quando para todo número real  $A > 0$  tomado arbitrariamente, for possível encontrar um índice  $n_0$  tal que  $x_n > A$ , para todo  $n > n_0$ .*

**Definição 1.16** *Seja  $(x_n)$  uma sequência de números reais. Diremos que  $\lim x_n = -\infty$  ( $x_n$  tende para  $-\infty$ ) quando para todo número real  $A > 0$  tomado arbitrariamente, for possível encontrar um índice  $n_0$  tal que  $x_n < -A$ , para todo  $n > n_0$ .*

## Séries de Números

**Definição 1.17** *Seja  $(a_n)$  uma sequência de números reais. Definimos a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  como sendo a sequência  $(S_n)$  de números reais, onde  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se existir o limite  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , diremos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente e o limite  $S$  será chamado de soma da série. Escreveremos então*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

*Se a sequência  $(S_n)$  das reduzidas for divergente, diremos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.*

**Teorema 1.17** *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  são séries convergentes, então*

*$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b \cdot a_n$ , onde  $b \in \mathbb{R}$ , são convergentes e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} b \cdot a_n = b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**Teorema 1.18 (Critério de Cauchy)** *A fim de que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  seja convergente, é necessário e suficiente que, para cada  $\epsilon > 0$ , exista um índice  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon$$

*quaisquer que sejam  $n > n_0$  e  $p \in \mathbb{N}$ .*

**Teorema 1.19** *Se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .*

**Teorema 1.20 (Critério das Séries Alternadas)** *Seja  $(a_n)$  uma sequência não crescente, de termos não negativos, com  $\lim a_n = 0$ . Então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  converge.*

**Teorema 1.21 (Critério da Comparação)** *Sejam  $(a_n)$  e  $(b_n)$  duas seqüências de termos não negativos. Se existem  $c > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{R}$  tais que*

$$n > n_0 \implies a_n \leq cb_n.$$

*Então,*

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  convergente  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  convergente;

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergente  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergente.

**Teorema 1.22 (Critério da Razão)** *Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  tal que  $a_n \neq 0$ . Suponha que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L.$$

1. *Se  $L < 1$ , então a série é (absolutamente) convergente;*
2. *Se  $L > 1$ , então a série é divergente;*
3. *Se  $L = 1$ , nada se pode afirmar quanto a convergência da série.*



# Capítulo 2

## Sequências e Séries de Funções

Definiremos convergências pontual, uniforme e demonstraremos alguns teoremas. Apresentaremos teoremas sobre continuidade, derivação e integração termo a termo.

### 2.1 Sequências de Funções

#### 2.1.1 Convergência Pontual

**Definição 2.1** *Seja  $I$  um intervalo da reta. Uma sequência de funções  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma correspondência que associa a cada número  $n \in \mathbb{N}$  uma função  $f_n$ , definida em  $I$  e tomando valores reais. Escreve-se  $(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots)$  ou  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou simplesmente  $(f_n)$  para indicar a sequência de funções. Note-se que para cada  $x \in I$ ,  $(f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots)$  é uma sequência de números reais.*

**Exemplo 2.1** *Tome  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_n(x) = x^n$ . Neste caso, temos*

$$(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots) = (x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots).$$

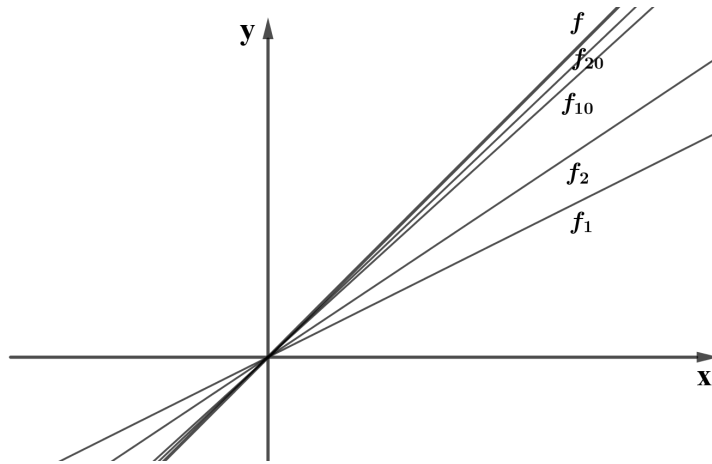
**Definição 2.2** *Uma sequência de funções  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  converge pontualmente para a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  quando, para cada  $x \in I$ , a sequência de números reais  $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$  converge para o número  $f(x)$ . Ou seja para todo  $x \in I$  fixado, tem-se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Em geral, a convergência pontual é denominada também de convergência simples.

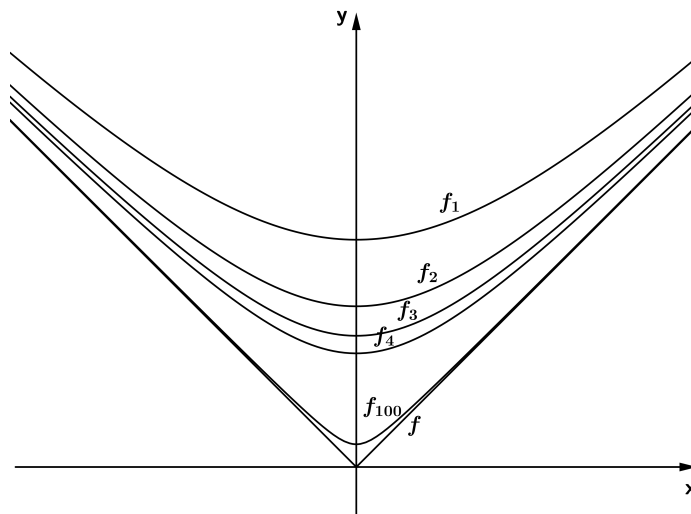
Por simplicidade na escrita, muitas vezes escreveremos  $f_n \rightarrow f$  pontualmente em  $I$ , indicando que a sequência de funções  $(f_n)$  converge pontualmente para  $f$  em  $I$ .

**Exemplo 2.2** A sequência de funções  $f_n(x) = \frac{nx}{n+1}$  converge pontualmente para  $f(x) = x$ , pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{n+1} = x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = x \cdot 1 = f(x)$ .



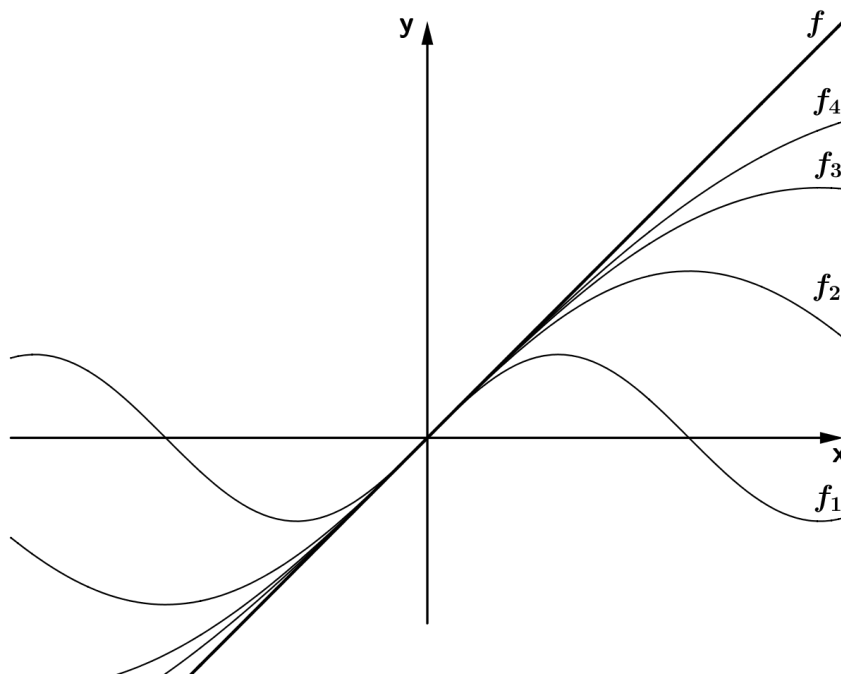
**Exemplo 2.3** A sequência de funções  $f_n(x) = \sqrt{\frac{1+nx^2}{n}}$  converge pontualmente para  $f(x) = |x|$  (função modular). De fato, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1+nx^2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n} + x^2} = \sqrt{x^2} = |x|.$$



**Exemplo 2.4** A sequência de funções  $f_n(x) = n \operatorname{sen} \frac{x}{n}$  converge pontualmente para  $f(x) = x$ . De fato, temos

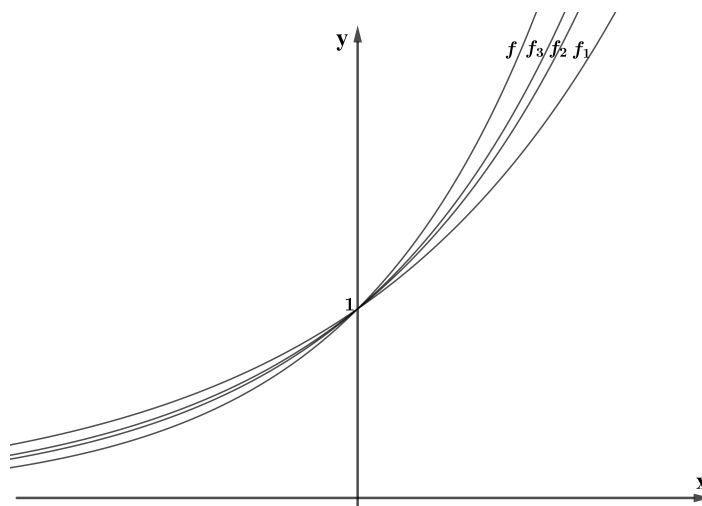
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen} \frac{x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x n \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{n}}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = x \cdot 1 = x = f(x).$$



**Exemplo 2.5** A sequência de funções  $f_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por  $f_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi - x)$  não converge para função alguma pois, tomando por exemplo  $x = \frac{\pi}{4}$ , tem-se que  $f_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left((-1)^{n+1} \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ . Portanto, não existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

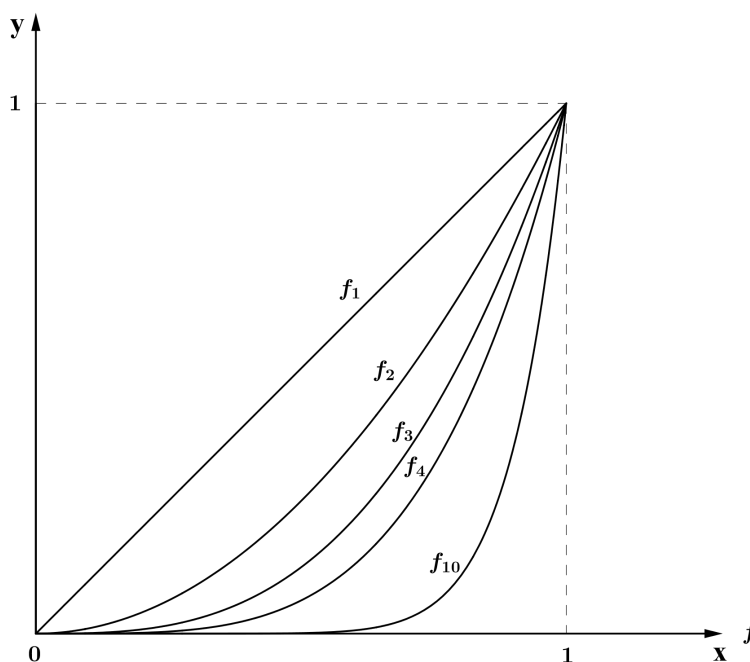
**Exemplo 2.6** A sequência de funções  $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$  converge pontualmente para  $f(x) = e^x$  (função exponencial). De fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^x = e^x.$$

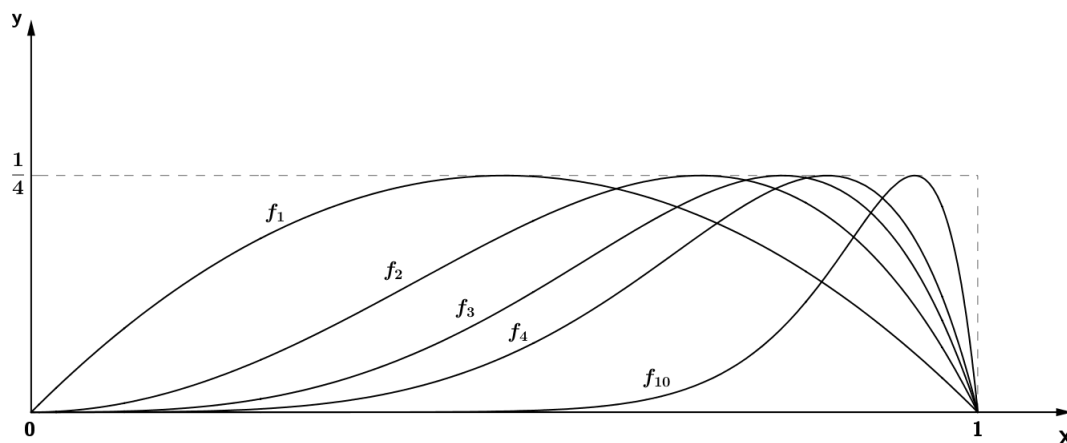


**Exemplo 2.7** A sequência de funções  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por  $f_n(x) = x^n$ , converge pontualmente para a função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{se } 0 \leq x < 1. \end{cases}$

De fato, para  $x = 1$  temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1$  e para  $0 \leq x < 1$  temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ .



**Exemplo 2.8** A sequência de funções  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por  $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ , converge pontualmente para a função identicamente nula. De fato, para  $x = 1$  temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n(1 - 1^n) = 0$  e para  $0 \leq x < 1$  temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n(1 - x^n) = 0$ .



Retomando a definição de convergência pontual, uma sequência de funções  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  converge pontualmente para a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  quando fixado  $x \in I$ , tem-se que: dado qualquer  $\epsilon > 0$ , pode-se obter um inteiro  $n_0$ , que depende de  $x$  e de  $\epsilon$ , tal que

$$n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Pode ocorrer que dado  $\epsilon > 0$  fixo, não exista um natural  $n_0$  que sirva simultaneamente para todo  $x \in I$ .

**Exemplo 2.9** A sequência de funções  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por  $f_n(x) = \frac{x}{n}$ , converge pontualmente para a função identicamente nula. De fato, fixado  $x \in \mathbb{R}$  tem-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$ . Agora tomando, por exemplo,  $\epsilon = 1$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  sempre existe um  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| \geq n$ , daí  $\left| \frac{x}{n} - 0 \right| = \frac{|x|}{n} \geq 1$ . Portanto, neste caso, não existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \implies \left| \frac{x}{n} - 0 \right| = \frac{|x|}{n} < 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.10** Vimos, no exemplo 2.7, que a sequência de funções  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n$  converge pontualmente para a função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f(x) = 0$  se  $0 \leq x < 1$  e  $f(1) = 1$ . Fixe  $\epsilon = \frac{1}{2}$  e considere  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{n_0} = 1$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$1 - \delta < x < 1 \implies x^{n_0} \geq \frac{1}{2}.$$

Concluimos que para todo  $n \in \mathbb{N}$  existem pontos  $x \in [0, 1)$  tais que

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x^n| \geq \frac{1}{2}.$$

Neste caso, fixando  $\epsilon = \frac{1}{2}$  não conseguimos determinar  $n_0$  tal que

$$n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in I.$$

Existem sequências de funções que quando fixamos  $\epsilon > 0$  é possível obter um natural  $n_0$  que sirva para todo  $x \in I$ , isto é,  $n_0$  depende somente de  $\epsilon > 0$ . Nestes casos, a convergência  $f_n \rightarrow f$  é chamada de convergência uniforme.

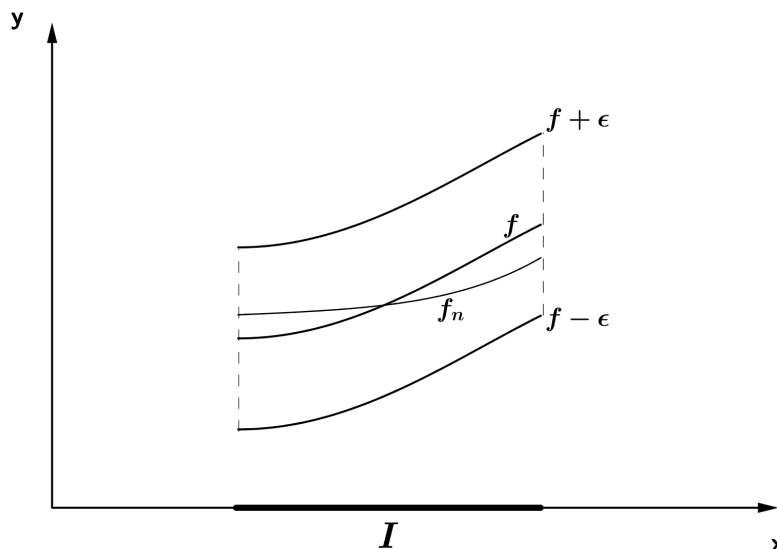
### 2.1.2 Convergência Uniforme

**Definição 2.3** *Seja  $I$  um intervalo da reta. Uma sequência de funções  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente para uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ , para todo  $x \in I$ .*

Da definição temos,

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \iff -\epsilon < f_n(x) - f(x) < \epsilon \iff f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon, \quad \forall x \in I,$$

gráficamente, significa que o gráfico de  $f_n$  está contido no que chamamos de faixa de raio  $\epsilon$  em torno do gráfico de  $f$ .



**Exemplo 2.11** *Vimos, no exemplo 2.9, que a sequência de funções  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_n(x) = \frac{x}{n}$  converge para a função  $f(x) = 0$ , mas não uniformemente. Agora tomando  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , a sequência definida por  $f_n(x) = \frac{x}{n}$  converge uniformemente para  $f(x) = 0$ . De fato, considere  $\epsilon > 0$ . Seja  $k > 0$  tal que  $[a, b] \subset [-k, k]$ , logo  $|x| \leq k$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Considerando  $n_0 \in \mathbb{N}$  com  $n_0 > \frac{k}{\epsilon}$  tem-se que*

$$n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} - 0 \right| = \frac{|x|}{n} < \frac{k}{n_0} < \epsilon$$

portanto, a convergência é uniforme.

**Exemplo 2.12** *A sequência de funções  $f_n(x) = x^n$  converge, mas não uniformemente para a função  $f$  definida por  $f(x) = 0$  se  $0 \leq x < 1$  e  $f(1) = 1$  em  $[0, 1]$  (exemplo 2.10). No entanto, tomando  $0 < \delta < 1$  tem-se que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente no intervalo  $[0, 1 - \delta]$ . Para provar que a convergência é uniforme, considere  $\epsilon > 0$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \delta)^n = 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \implies (1 - \delta)^n < \epsilon$ . Agora, para todo  $x \in [0, 1 - \delta]$  temos que*

$$n > n_0 \implies |x^n - 0| = x^n \leq (1 - \delta)^n < \epsilon,$$

portanto,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $[0, 1 - \delta]$ .

**Teorema 2.1** *Se uma sequência de funções  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente para uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e todas as  $f_n$  são contínuas num ponto  $a \in I$  então  $f$  é contínua no ponto  $a$ .*

**Demonstração.** Considere  $\epsilon > 0$ . Tem-se que

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|.$$

Como  $f_n \rightarrow f$  uniformemente, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $x \in I$

$$n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Considere um  $n$  fixo tal que  $n > n_0$ . Como  $f_n$  é contínua, existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in I, |x - a| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Logo, para todo  $x \in I, |x - a| < \delta$ , tem-se que

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

■

**Corolário 2.1** *Se uma sequência de funções contínuas  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente para uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  então a função  $f$  é contínua.*

Provamos anteriormente que, a sequência de funções contínuas  $f_n(x) = x^n$  converge pontualmente para a função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 0$  se  $0 \leq x < 1$  e  $f(1) = 1$ . Além disso, no exemplo 2.10, provamos que a convergência não é uniforme. Agora, usando o Corolário 2.1, basta observar que a função  $f$  não é contínua para concluirmos que a convergência não é uniforme.

Também provamos que, a sequência de funções contínuas  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por  $f_n(x) = \frac{x}{n}$ , converge pontualmente para a função identicamente nula, mas a convergência não é uniforme. Este exemplo mostra que a recíproca do Corolário 2.1 não é válida.

O próximo Teorema afirma que se a sequência  $f_n$  convergir monotonamente para uma função  $f$ , valerá a recíproca do Corolário 2.1.

**Definição 2.4** *Uma sequência de funções  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  converge monotonamente para a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  quando, para cada  $x \in I$ , a sequência de números  $(f_n(x))$  é monótona e, além disso,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .*

**Teorema 2.2 (Dini)** *Se uma sequência de funções contínuas  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  converge monotonamente para uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , então a convergência é uniforme.*

**Demonstração.** Dado  $\epsilon > 0$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere o conjunto

$$K_n = \{x \in [a, b]; |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \subset [a, b].$$

Afirmamos que  $K_n$  é fechado, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De fato, seja  $(y_k)$  uma sequência de números em  $K_n$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$ . Segue que,  $|f_n(y_k) - f(y_k)| \geq \epsilon$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $f_n$  e  $f$  são contínuas,  $\lim_{k \rightarrow \infty} |f_n(y_k) - f(y_k)| = |f_n(y) - f(y)| \geq \epsilon$ , donde  $y \in K_n$ . Para  $x \in [a, b]$  fixo, como  $(f_n(x))$  é monótona, tem-se que

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots \leq f(x) \text{ ou } f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots \geq f_n(x) \geq \dots \geq f(x)$$

logo, a distância de  $f_n(x)$  à  $f(x)$  diminui conforme  $n$  aumenta. Segue daí que  $|f_{n+1}(x) - f(x)| \geq \epsilon \implies |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$ , portanto  $K_{n+1} \subset K_n$ , para todo  $n$ . Assim,  $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$  onde todos os conjuntos são fechados e limitados.



Se todos os  $K_n$  fossem não vazios teríamos  $\bigcap K_n \neq \emptyset$ . Mas  $\bigcap K_n = \emptyset$ , pois  $x \in K_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  implicaria  $|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$  para todo  $n$ , o que seria um absurdo, já que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .

Logo existe  $n_0$  natural tal que  $K_{n_0} = \emptyset$ , e assim  $K_n = \emptyset$  para todo  $n > n_0$ , ou seja,

$$n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Portanto, a convergência é uniforme. ■

**Definição 2.5** *Seja  $I$  um intervalo da reta. Uma sequência de funções  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se uma sequência de Cauchy quando, para qualquer  $\epsilon > 0$ , dado arbitrariamente, for possível obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que*

$$m, n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

qualquer que seja  $x \in I$ .

**Proposição 2.1** *Seja  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções. Suponha que, para cada  $x$  fixo em  $I$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que*

$$m, n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Então, existe  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f_n \rightarrow f$ , isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , para todo  $x \in I$ .

**Demonstração.** Para  $x \in I$  ( $x$  fixado), segue da hipótese que  $(f_n(x))$  é uma sequência de Cauchy de números reais, logo a sequência numérica  $(f_n(x))$  é convergente. Então para cada  $x \in I$ , existe um número  $f(x)$  tal que  $(f_n(x))$  converge para  $f(x)$ . Assim define-se uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $x \in I$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$
■

**Teorema 2.3 (Critério de Cauchy)** *Uma sequência de funções  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uniformemente convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.*

**Demonstração.** Suponhamos que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente. Dado arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$  para todo  $x \in I$ . Portanto, para todo  $x \in I$ , se  $m, n > n_0$  tem-se

$$|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo  $(f_n)$  é uma sequência de Cauchy.

Reciprocamente, suponhamos que  $(f_n)$  é uma sequência de Cauchy. Pela Proposição 2.1, a sequência  $(f_n)$  converge pontualmente para uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , para todo  $x \in I$ . Além disso, dado  $\epsilon > 0$  arbitrário, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$m, n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } x \in I.$$

Agora fixando  $n$  e  $x$  na desigualdade anterior e fazendo  $m \rightarrow \infty$ , teremos para  $n > n_0$   $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ , para todo  $x \in I$ . Isto prova que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente. ■

**Corolário 2.2** *Se as funções  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas e  $(f_n)$  converge uniformemente em  $(a, b)$ , então a sequência  $(f_n)$  converge uniformemente em  $[a, b]$ .*

**Demonstração.** Considere  $\epsilon > 0$ . Como  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $(a, b)$ , pelo Teorema 2.3,  $(f_n)$  é de Cauchy em  $(a, b)$ . Segue que, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$m, n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ para todo } x \in (a, b).$$

Por hipótese as funções  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas, então  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = f_n(a)$ , logo

$$|f_m(a) - f_n(a)| = \lim_{x \rightarrow a} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

De maneira análoga, temos que  $|f_m(b) - f_n(b)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ . Assim,

$$m, n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Portanto,  $(f_n(x))$  é sequência de Cauchy em  $[a, b]$  e, pelo Teorema 2.3,  $(f_n)$  converge uniformemente em  $[a, b]$ . ■

**Exemplo 2.13** A sequência de funções  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{n}$  é uma sequência de Cauchy. De fato, para todo  $\epsilon > 0$  tome  $n_0 \in \mathbb{N}$  com  $n_0 > \frac{2}{\epsilon}$ . Daí, para  $m, n > n_0$  temos,

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= \left| \frac{\text{sen}(mx)}{m} - \frac{\text{sen}(nx)}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{\text{sen}(mx)}{m} \right| + \left| \frac{\text{sen}(nx)}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{m} \right| + \left| \frac{1}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Assim  $(f_n)$  é uma sequência de Cauchy e portanto converge uniformemente para uma função  $f$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n} = 0$  tem-se que  $f = 0$ .

**Teorema 2.4** Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções contínuas  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , que converge uniformemente para uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Sendo  $g_n, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  as funções definidas por

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \quad e \quad g(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

então  $(g_n)$  converge uniformemente para  $g$ . Em particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**Demonstração.** Para  $x \in [a, b]$ , tem-se que

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt.$$

Considere  $\epsilon > 0$ . A convergência uniforme de  $(f_n)$  para  $f$  garante que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\epsilon}{b-a},$$

para todo  $t \in [a, b]$ . Portanto, para  $n \geq n_0$  e  $x \in [a, b]$ , segue das desigualdades acima que

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \int_a^x \frac{\epsilon}{b-a} dt = \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (x-a) \leq \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \epsilon.$$

Portanto, a sequência  $(g_n)$  converge uniformemente para a função  $g$ . Em particular,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(b) = g(b)$ , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

■

**Teorema 2.5** *Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções deriváveis e com derivadas contínuas em  $[a, b]$ . Se  $f'_n \rightarrow g$  uniformemente em  $[a, b]$  e para um certo  $c \in [a, b]$ , a sequência numérica  $(f_n(c))$  converge, então  $(f_n)$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para uma função derivável  $f$ , tal que  $f' = g$ , isto é,*

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n.$$

**Demonstração.** Como as funções  $f'_n$  são contínuas tem-se, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f'_n(t) dt.$$

Pelo Teorema 2.4,  $\int_c^x f'_n(t) dt$  converge e além disso  $(f_n(c))$  também converge, portanto  $f_n(x)$  converge. Segue que existe  $f$  tal que, para todo  $x \in [a, b]$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  e, novamente pelo Teorema 2.4,  $f(x) = f(c) + \int_c^x g(t) dt$ . Portanto,  $f'(x) = g(x)$ .

Vamos provar agora que a convergência  $f_n \rightarrow f$  é uniforme. Tem-se que,

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f'_n(t) dt \text{ e } f(x) = f(c) + \int_c^x g(t) dt.$$

Subtraindo as duas equações, obtemos

$$f_n(x) - f(x) = f_n(c) - f(c) + \int_c^x (f'_n(t) - g(t)) dt$$

e assim,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(c) - f(c)| + \left| \int_c^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right|.$$

Considere  $\epsilon > 0$ . Como  $f' \rightarrow g$  uniformemente e  $f_n(c) \rightarrow f(c)$ , existem  $n_1, n_2$  naturais tais que

$$n > n_1 \implies |f'_n(t) - g(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \text{ e } n > n_2 \implies |f_n(c) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  e  $n > n_0$  tem-se, no caso em que  $c \leq x$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \int_c^x \frac{\epsilon}{2(b-a)} dt \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(x-c) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \epsilon.$$

Ainda considerando  $n > n_0$  no caso  $x < c$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(c) - f(c)| + \left| \int_x^c (f'_n(t) - g(t)) dt \right| \text{ e consequentemente,}$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \int_x^c \frac{\epsilon}{2(b-a)} dt \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(c-x) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \epsilon.$$

Assim,  $n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Portanto, a convergência é uniforme. ■

## 2.2 Séries de Funções

**Definição 2.6** Dada uma sequência  $(f_n)$  de funções  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

como sendo a sequência  $(S_n)$  de funções  $S_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 2.7** Se  $(S_n)$  converge simplesmente para  $f$ , então a série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge simplesmente para  $f$ . Neste caso, escrevemos  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ .

**Definição 2.8** Se a sequência de funções  $(S_n)$  converge uniformemente para a função  $f$ , então a série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniformemente para  $f$ .

**Teorema 2.6 (Teste M de Weierstrass)** Seja  $(a_n)$  uma sequência de números e  $(f_n)$  uma sequência de funções  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  tais que:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente;
2.  $|f_n(x)| \leq a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $x \in I$ .

Então, a séries de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  convergem uniformemente.

**Demonstração.** Fixado  $x \in I$ , como  $|f_n(x)| \leq a_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente, pelo teste da comparação para séries numéricas, concluímos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

converge absolutamente. Portanto, ficam bem definidas as funções  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  e  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ . Para provar que as convergências são uniformes, tome  $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$  e  $T_n = \sum_{k=1}^n |f_k|$ . Para cada  $x \in I$  e  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$|f(x) - S_n| = \left| \sum_{k>n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k>n} |f_k(x)| \leq \sum_{k>n} a_k \quad \text{e}$$

$$|g(x) - T_n| = \sum_{k>n} |f_k(x)| \leq \sum_{k>n} a_k.$$

Considere  $\epsilon > 0$ . Como  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \implies \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right| = \left| \sum_{k>n} a_k \right| < \epsilon.$$

Logo, para  $n > n_0$  e para todo  $x \in I$ , tem-se que,

$$|f(x) - S_n| \leq \sum_{k>n} a_k < \epsilon \quad \text{e} \quad |g(x) - T_n| \leq \sum_{k>n} a_k < \epsilon.$$

Portanto,  $(S_n)$  e  $(T_n)$  convergem uniformemente para  $f$  e  $g$ , respectivamente, isto é, as séries de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  convergem uniformemente. ■

**Teorema 2.7** *Seja  $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$  uma série uniformemente convergente de funções contínuas  $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Então  $f$  é contínua e tem-se que*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k.$$

**Demonstração.** Considere  $S_n = \sum_{k=1}^n f_k = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ . Temos que cada  $S_n$  é contínua, pois é soma de funções contínuas, e como  $S_n \rightarrow f$  uniformemente concluímos que  $f$  é contínua. Pelo Teorema 2.4, concluímos que

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n.$$

Assim,

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k.$$

Portanto,

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k.$$

■

**Teorema 2.8** *Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  uma série de funções deriváveis, com derivadas contínuas no intervalo  $[a, b]$ . Se  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$  converge para um certo  $c \in [a, b]$  e a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n = g$  converge uniformemente em  $[a, b]$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$  converge uniformemente em  $[a, b]$  e  $f$  é derivável, com  $f' = g$ . Ou seja,*

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n.$$

**Demonstração.** Considere  $S_n = \sum_{k=1}^n f_k = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ . Temos que cada  $S_n$  é derivável com derivada contínua, pois é soma de funções deriváveis com derivadas contínuas.

Temos também que existe  $c \in [a, b]$  tal que  $S_n(c)$  é convergente e que  $S'_n = f'_1 + f'_2 + \dots + f'_n$  converge uniformemente para uma função  $g$ . Então, pelo Teorema 2.5,  $(S_n)$  converge uniformemente para uma função derivável  $f$ , com  $f' = g$ . Portanto,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ e } f' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k.$$

■

**Teorema 2.9** *Uma série convergente  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  de funções contínuas não negativas  $f_n$  em  $[a, b]$  é uniformemente convergente se, e somente se,  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  é uma função contínua em  $[a, b]$ .*

**Demonstração.** Seja  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  de funções contínuas não negativas  $f_n$  em  $[a, b]$ . Suponhamos primeiramente que  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  é uniformemente convergente, isto é, a sequência de somas parciais  $(S_n)$  converge uniformemente para  $f$ . Como cada  $S_n$  é contínua e a convergência é uniforme,  $f$  é contínua em  $[a, b]$ .

Reciprocamente, suponhamos agora que  $f$  é contínua. Como cada função  $f_n$  é não negativa a sequência de somas parciais  $S_n = f_1 + \dots + f_n$  é uma sequência monótona de funções contínuas convergindo para uma função contínua, logo pelo Teorema de Dini,  $S_n$  converge uniformemente, isto é,  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  é uniformemente convergente. ■



# Capítulo 3

## Séries de Taylor

Neste capítulo apresentamos um importante exemplo de séries de funções denominadas de séries de Taylor.

### 3.1 Aproximação de Funções por Funções Polinômiais

Uma função polinomial é uma função  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por uma expressão

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

onde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  são constantes reais. Inicialmente, observamos que uma função polinomial

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

fica completamente determinada quando se conhecem seu valor e o de suas derivadas até a ordem  $n$ , no ponto 0. De fato, temos que  $p(0) = a_0$ .

Considerando a derivada de  $p(x)$ ,

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1},$$

obtemos,  $p'(0) = a_1$ . Continuando a derivação sucessivamente,

$$p''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \cdots + (n-2)(n-1)a_{n-1}x^{n-3} + (n-1)na_nx^{n-2},$$

$$p'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + \cdots + (n-3)(n-2)(n-1)a_{n-1}x^{n-4} + (n-2)(n-1)na_nx^{n-3},$$

obtemos  $p''(0) = 2a_2$ ,  $p'''(0) = 2 \cdot 3a_3 = 3!a_3$ . Derivando até a ordem  $n$  teremos

$$p^{(4)}(0) = 4!a_4, p^{(5)}(0) = 5!a_5, \dots, p^{(n)}(0) = n!a_n.$$

Portanto,  $a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}$  para todo  $0 \leq k \leq n$ , onde consideramos  $0! = 1$  e assim

$$p(x) = \frac{p(0)}{0!} + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

De modo análogo, considerando um número real  $a$  e o polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_{n-1}(x - a)^{n-1} + a_n(x - a)^n$$

teremos

$$p(x) = \frac{p(a)}{0!} + \frac{p'(a)}{1!}(x - a) + \frac{p''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{p'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

**Definição 3.1 (Polinômio de Taylor)** *Seja uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n$  vezes derivável num ponto  $a \in I$ , onde  $I$  é um intervalo da reta. O polinômio de Taylor de ordem  $n$  de  $f$  no ponto  $a$  é o polinômio*

$$p(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

*Este é o único polinômio de grau  $\leq n$  cujas derivadas, desde a ordem zero até a ordem  $n$ , no ponto  $a$  coincidem com as derivadas correspondentes de  $f$  no ponto  $a$ .*

Antes de enunciarmos o Teorema que estabelece a aproximação de uma função  $f$  com o seu polinômio de Taylor, provaremos um Lema que será usado na demonstração do mesmo.

**Lema 1** *Seja  $r : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$  vezes derivável ( $n \geq 1$ ), no ponto  $0 \in I$ . A fim de que*

$$r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$$

*é necessário e suficiente que*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0.$$

**Demonstração.** Inicialmente, usando indução sobre  $n$ , mostraremos que a condição é necessária. Para verificar a validade para  $n = 1$ , suponha  $r(0) = r'(0) = 0$ . Temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x) - r(0)}{x - 0} = r'(0) = 0.$$

Suponhamos agora a validade para  $n - 1$ . Suponha

$$r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n)}(0).$$

Usando a hipótese de indução aplicada para a função  $r'$ , concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r'(x)}{x^{n-1}} = 0.$$

Segue que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x| < \delta \implies \left| \frac{r'(x)}{x^{n-1}} \right| < \epsilon.$$

Usando o Teorema do Valor Médio aplicado a função  $r$ , segue que existe  $c$ ,  $0 < |c| < |x|$  tal que  $r'(c) = \frac{r(x) - r(0)}{x - 0}$ , logo  $|r'(c)| = \left| \frac{r(x)}{x} \right|$ , dividindo ambos os membros por  $|x^{n-1}|$  obtemos  $\left| \frac{r(x)}{x^n} \right| = \left| \frac{r'(c)}{x^{n-1}} \right|$ . Daí, observando que  $0 < \frac{|c|}{|x|} < 1$  obtemos

$$0 < |x| < \delta \implies \left| \frac{r(x)}{x^n} \right| = \left| \frac{r'(c)}{x^{n-1}} \right| = \left| \frac{r'(c)}{c^{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{c^{n-1}}{x^{n-1}} \right| < \epsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0.$$

Agora, usando indução sobre  $n$ , mostraremos que a condição é suficiente. Para  $n = 1$ , suponha  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x} = 0$ . Segue daí que,

$$r(0) = \lim_{x \rightarrow 0} r(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x} x = 0 \quad \text{e} \quad r'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x) - r(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x} = 0.$$

Suponha a validade para  $n - 1$ . Suponha que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$ . Considere a função  $\varphi$  definida por  $\varphi(x) := r(x) - \frac{r^{(n)}(0)}{n!} x^n$ . Temos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^{n-1}} = 0$ , logo usando a hipótese de indução concluímos que

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0.$$

Da definição de  $\varphi$ , temos que  $r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n-1)}(0) = 0$ . Agora como  $\varphi^{(n)}(x) = r^{(n)}(x) - r^{(n)}(0)$ , temos  $\varphi^{(n)}(0) = 0$ .

Temos então,  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi^{(n)}(0) = 0$ , e usando a primeira parte da prova, concluímos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^n} = 0$ .

Logo,  $0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^n} - \frac{r^{(n)}(0)}{n!} = \frac{-r^{(n)}(0)}{n!}$ . Portanto,  $r^{(n)}(0) = 0$ . ■

**Observação.** As duas implicações demonstradas no Lema 1 são ótimos exemplos de prova usando indução e se encontram em [4].

**Teorema 3.1** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $I$  é um intervalo,  $n$  vezes derivável no ponto  $a \in I$ . Então, para todo  $h$  tal que  $a + h \in I$ , tem-se que*

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + r(h),$$

onde  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$ .

**Demonstração.** Considere

$$r(h) = f(a + h) - f(a) - f'(a) \cdot h - \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n.$$

Temos que  $r(0) = 0$ ,  $r'(0) = f'(a) - f'(a) = 0$  e  $r''(0) = r'''(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$ .

Portanto, pelo Lema 1, concluímos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

■

**Observação.** Se no enunciado do Teorema 3.1 colocarmos  $a + h = x$  teremos

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n}_{\text{Polinômio de Taylor}} + r(x)$$

onde  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x - a)^n} = 0$ .

**Definição 3.2** *Dizemos que uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^n$ , e escrevemos  $f \in C^n$ , quando  $f$  é  $n$  vezes derivável em  $I$  e  $f^{(n)}$  é uma função contínua em  $I$ .*

### 3.2 Fórmula de Taylor Com Resto de Lagrange

**Teorema 3.2 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)** *Seja  $f : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$ ,  $n$  vezes derivável no intervalo aberto  $(a, x)$ . Então existe  $c \in (a, x)$  tal que*

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-a)^n,$$

onde  $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-a)^n$ . Escrevendo  $x = a + h$ , isto equivale a dizer que, existe  $c \in (a, a+h)$  tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot h^n.$$

**Demonstração.** Considere  $\varphi : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(t) := f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \dots - \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} - \frac{K}{n!} (x-t)^n$$

onde a constante  $K$  é escolhida de modo que  $\varphi(a) = 0$ .

Como  $\varphi(x) = 0$ , usando a hipótese sobre a função  $f$ , concluímos que a função  $\varphi$  satisfaz as condições do Teorema de Rôlle, logo existe  $c \in (a, x)$  tal que  $\varphi'(c) = 0$ . Derivando  $\varphi(t)$  temos,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= - \left( f^{(1)}(t) + f^{(2)}(t)(x-t) - f^{(1)}(t) + \frac{f^{(3)}(t)(x-t)^2}{2!} - 2 \cdot \frac{f^{(2)}(t)(x-t)}{2!} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f^{(4)}(t)(x-t)^3}{3!} - 3 \cdot \frac{f^{(3)}(t)(x-t)^2}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{K(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \\ &= \frac{(K - f^{(n)}(t))}{(n-1)!} (x-t)^{n-1}. \end{aligned}$$

Como  $\varphi'(c) = 0$  temos  $\frac{(K - f^{(n)}(c))}{(n-1)!} (x-c)^{n-1} = 0$ , logo  $K = f^{(n)}(c)$ . Portanto,

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-a)^n.$$

■

**Teorema 3.3 (Unicidade da Fórmula de Taylor)** *Seja  $f : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$ ,  $n$  vezes derivável no intervalo aberto  $(a, x)$ , tal que*

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 \cdot (x-a) + a_2 \cdot (x-a)^2 + \dots + a_{n-1} \cdot (x-a)^{n-1}}_{\text{poliômio } p(x)} + g(x)$$

onde  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0$ . Então  $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

**Demonstração.** Com as notações do Teorema de Taylor com resto de Lagrange, subtraindo as duas equações, temos

$$\begin{aligned} & [a_0 - f(a)] + \left[ a_1 - \frac{f'(a)}{1!} \right] (x-a) + \left[ a_2 - \frac{f''(a)}{2!} \right] (x-a)^2 + \cdots + \left[ a_{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \right] (x-a)^{n-1} \\ &= R_n(x) - g(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n - g(x). \text{ Como } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0, \text{ concluímos que} \\ & \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^{n-1}} \cdot (x-a)^{n-1} = 0 \cdot 0 = 0. \text{ Assim, quando } x \rightarrow a, \text{ todos os termos,} \\ & \text{exceto o primeiro, tendem a zero, logo } a_0 = f(a). \end{aligned}$$

A seguir, dividimos todos os termos por  $(x-a)$  e obtemos

$$\left[ a_1 - \frac{f'(a)}{1!} \right] + \left[ a_2 - \frac{f''(a)}{2!} \right] (x-a) + \cdots + \left[ a_{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \right] (x-a)^{n-2} = \frac{R_n(x) - g(x)}{(x-a)}.$$

Novamente fazemos  $x \rightarrow a$  e obtemos  $a_1 = \frac{f'(a)}{1!}$ . Continuando desse modo, obtemos as igualdades

$$a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \dots, a_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

No último passo, teremos  $a_{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} = \frac{R_n(x) - g(x)}{(x-a)^{n-1}}$ , onde o primeiro termo desta equação não depende de  $x$  e no segundo termo temos uma fração com denominador tendendo a zero quando  $x \rightarrow a$ , portanto concluímos que  $R(x) = g(x)$  numa vizinhança do ponto  $a$ . ■

**Proposição 3.1** *Sejam  $I$  um intervalo da reta e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função infinitamente derivável. Se existe uma constante  $K \geq 0$  tal que  $|f^{(n)}(x)| \leq K^n$ , para todos  $n \geq 1$  e  $x \in I$ , então, fixado um  $a \in I$  tem-se que:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Neste caso a série  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$  é denominada série de Taylor de  $f$  em  $a$ .

**Demonstração.** Considere  $a \in I$  e  $n$  um número natural. Como  $f$  é infinitamente derivável, segue do Teorema de Taylor com resto de Lagrange que

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

para algum  $c$  entre  $a$  e  $x$ . Assim  $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$ , onde

$$S_n(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n)!} \cdot (x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

e

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{(K|x-a|)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(K|x-a|)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ , concluímos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  e portanto

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

■

Vamos aplicar os resultados obtidos até agora para determinar as séries de Taylor da função Exponencial, da função Seno e da função Cosseno.

**Exemplo 3.1 (Funções Seno e Cosseno)** *As funções trigonométricas  $f(x) = \text{sen } x$  e  $g(x) = \text{cos } x$  são infinitamente deriváveis em  $\mathbb{R}$  e temos que*

$$f(x) = \text{sen}(x), f'(x) = \text{cos}(x), f''(x) = -\text{sen}(x), f^{(3)}(x) = -\text{cos}(x), f^{(4)}(x) = \text{sen}(x),$$

$$g(x) = \text{cos}(x), g'(x) = -\text{sen}(x), g''(x) = -\text{cos}(x), g^{(3)}(x) = \text{sen}(x), g^{(4)}(x) = \text{cos}(x).$$

*Continuando, concluímos que*

$$\text{sen}^{(2n)} x = (-1)^n \text{sen } x \text{ e } \text{sen}^{(2n+1)} x = (-1)^n \text{cos } x;$$

$$\text{cos}^{(2n)} x = (-1)^n \text{cos}(x) \text{ e } \text{cos}^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \text{sen}(x),$$

e portanto,

$$\text{sen}^{(2n)}(0) = 0 \text{ e } \text{sen}^{(2n+1)}(0) = (-1)^n;$$

$$\text{cos}^{(2n)}(0) = (-1)^n \text{ e } \text{cos}^{(2n+1)}(0) = 0.$$

Como  $|f^{(n)}(x)| \leq 1$  e  $|g^{(n)}(x)| \leq 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e para todo  $x$  real, usando a Proposição 3.1, com  $a = 0$ , concluímos que

$$\text{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

e

$$\text{cos}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots.$$

**Exemplo 3.2 (Função Exponencial)** Como a função  $f(x) = e^x$  é infinitamente derivável em  $\mathbb{R}$ , usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange, com  $a = 0$ , podemos escrever, para algum  $c$  entre  $0$  e  $x$ :

$$e^x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n.$$

Como  $f(0) = 1$  e  $f^{(n)}(x) = e^x$ , temos  $f^{(n)}(0) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{f^n(c)}{n!}x^n,$$

ou ainda,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{n!}x^n.$$

Agora, usando o fato de que a função Exponencial é crescente, e sabendo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$  obtemos:

$$\text{se } 0 < c < x, \quad \left| \frac{e^c}{n!}x^n \right| = e^c \cdot \frac{|x|^n}{n!} \leq e^x \cdot \frac{|x|^n}{n!}$$

e

$$\text{se } x < c < 0, \quad \left| \frac{e^c}{n!}x^n \right| = e^c \cdot \frac{|x|^n}{n!} \leq e^0 \cdot \frac{|x|^n}{n!},$$

logo,

$$0 \leq \left| \frac{e^c}{n!}x^n \right| = e^c \cdot \frac{|x|^n}{n!} \leq \max\{e^0, e^x\} \cdot \frac{|x|^n}{n!} \rightarrow 0.$$

Usando o Teorema do Confronto, concluímos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^c}{n!}x^n = 0$  e portanto

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Em particular, fazendo  $x = 1$ , obtemos o número  $e$  como soma de uma série:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

### 3.2.1 O Número $e$ é Irracional

Usando a série que define o número  $e$ , vamos mostrar que  $e$  é um número irracional.

Suponhamos, por absurdo, que  $e$  é racional. Daí  $e = \frac{m}{n}$ , com  $m, n$  naturais, além disso como  $2 < e < 3$  teremos  $n \geq 2$ .



Escrevendo  $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = S_n + R_n$ , onde  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  e  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ , segue que

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots = \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right]$$

e assim,

$$R_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} \cdots \right].$$

Usando a fórmula da série geométrica, obtemos

$$R_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!n}.$$

Portanto,  $S_n < e < S_n + \frac{1}{n!n}$ .

Multiplicando a desigualdade acima por  $n!$ , obtemos

$$n!S_n < e \cdot n! < n!S_n + \frac{1}{n}$$

donde,

$$n!S_n < \frac{m}{n} \cdot n! < n!S_n + \frac{1}{n} < n!S_n + 1,$$

e simplificando,

$$n!S_n < m(n-1)! < n!S_n + 1.$$

Observando que  $n!S_n = 2n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!}$  é um número inteiro, chegamos a uma contradição, pois o inteiro  $m(n-1)!$  se encontra entre os inteiros consecutivos  $n!S_n$  e  $n!S_n + 1$ .

■

# Capítulo 4

## Séries de Potências

A série de Taylor  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$  definida anteriormente é um caso particular de séries de potências, isto é, séries da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

onde  $a_0, a_1, a_2, \dots$  são números reais. Nesse caso, temos uma série de funções  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f_n(x) = a_n \cdot (x - x_0)^n$ , infinitamente deriváveis.

Neste capítulo, aplicaremos os resultados de séries de funções no caso particular de séries de potências. Por simplicidade de notação, consideraremos o caso  $x_0 = 0$ , ou seja, as séries da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

O caso geral se reduz a este pela mudança de variáveis, trocando  $x - x_0$  por  $x$ .

**Proposição 4.1** *Suponhamos que a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge em um ponto  $x = c \neq 0$ . Então a série converge absolutamente para todo  $x$  tal que  $|x| < |c|$ .*

**Demonstração.** Como  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$  converge, segue-se que  $a_n c^n \rightarrow 0$ . Logo, essa sequência é limitada e assim existe  $M$  tal que  $|a_n c^n| \leq M$ , para todo  $n$  natural. Fixemos agora um  $x$  tal que  $|x| < |c|$ , temos então

$$|a_n x^n| = |a_n c^n| \left| \frac{x}{c} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{c} \right|^n.$$

Como  $\left| \frac{x}{c} \right| < 1$ , então a série  $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{c} \right|^n$  converge e pelo critério de comparação, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  também converge. ■

Segue daí, o seguinte Corolário.

**Corolário 4.1** *Suponhamos que a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  não converge em um ponto  $x = a \neq 0$ . Então ela não converge, também, para todo  $|x| > |a|$ .*

**Teorema 4.1** *Dada a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , uma das possibilidades deve ocorrer*

1. *A série converge absolutamente somente para  $x = 0$ ;*
2. *A série converge absolutamente para todo  $x$  real;*
3. *Existe um número real  $R > 0$  tal que a série converge absolutamente no intervalo  $(-R, R)$  e diverge para  $|x| > R$ .*

*Ocorrendo o item 3., dizemos que  $R > 0$  é o raio de convergência da série. Também dizemos que o raio é, respectivamente, zero e  $+\infty$ , nos casos 1. e 2..*

**Demonstração.** Seja  $D = \{x \in \mathbb{R}; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge absolutamente}\}$ . Temos que  $D$  é não vazio, pois  $0 \in D$ . Se  $D = \{0\}$ , a série converge absolutamente somente para  $x = 0$ . Se  $D = \mathbb{R}$ , a série converge absolutamente para todo  $x$  real. Suponhamos então  $D \neq \{0\}$  e  $D \neq \mathbb{R}$ . Segue que existe  $b \neq 0$  real tal que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |b|^n$  diverge e usando o Corolário 4.1 concluímos que  $D \subset [-|b|, |b|]$ , logo um conjunto limitado. Além disso, existe  $a \neq 0$  tal que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |a|^n$  converge.

Como o conjunto  $D$  é não vazio e limitado, existe um número real  $R$  supremo do conjunto  $D$  (menor cota superior de  $D$ ).

Temos que  $0 < R \leq |b|$ , pois  $|a| \in D$  e  $|b|$  é uma cota superior de  $D$ .

Afirmamos que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge absolutamente quando  $|x| < R$  e diverge quando  $|x| > R$ .

Se  $|x| < R$ , existe  $r \in D$  tal que  $|x| < r \leq R$  e pela Proposição 4.1,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$  converge absolutamente quando  $|u| < r$ , então em particular  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge absolutamente.

Se  $|x| > R$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  convergisse, então tomando  $x_0$  tal que  $R < x_0 < |x|$  teríamos  $x_0 \in D$ , o que contradiz que  $R$  é o supremo de  $D$ .

■

**Corolário 4.2** *Seja dada uma sequência  $(a_n)$  de números reais não nulos. Se existe  $0 \leq R \leq \infty$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$ , então a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  tem raio de convergência  $R$ .*

**Demonstração.** Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} = \frac{|x|}{R},$$

o teste da razão garante que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge absolutamente se  $\frac{|x|}{R} < 1$  e diverge se  $\frac{|x|}{R} > 1$ .

Portanto, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge se  $|x| < R$  e diverge se  $|x| > R$  e o Teorema 4.1 garante que o raio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  é igual a  $R$ . ■

**Teorema 4.2** *Seja  $R > 0$  ou  $R = +\infty$  o raio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Então a série converge uniformemente em  $|x| < c$  para qualquer  $0 < c < R$ .*

**Demonstração.** Seja  $x_0$  tal que  $c < x_0 < R$ . Como a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  converge, segue que o termo geral tende a zero. Em particular, existe  $M > 0$  tal que  $|a_n x_0^n| \leq M$ , para todo  $n$ . Assim, para  $|x| < c$ , temos

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq M \left( \frac{c}{x_0} \right)^n.$$

Como a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{c}{x_0} \right)^n$  converge, aplicando o Teste M de Weierstrass concluímos que a convergência é uniforme. ■

**Observação:** Se o raio da série é infinito, a demonstração mostra que a convergência das séries de potências além de absoluta é uniforme em qualquer intervalo limitado.

Aplicaremos a seguir os resultados estabelecidos para Séries de Funções no caso particular de Séries de Potências.

**Proposição 4.2** *Se a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  tem raio de convergência  $R > 0$ , então:*

1. *A função  $f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  é contínua;*
2. *Para todo  $x \in (-R, R)$ , temos  $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ . Em particular, a série do segundo membro tem raio de convergência maior ou igual a  $R$ .*

**Demonstração.** Seja  $f_n : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f_n(x) = a_n x^n$ . Temos que  $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$  em  $(-R, R)$ , onde as funções  $f_n$  são contínuas e pelo Teorema 4.2 a convergência é uniforme em  $[-r, +r]$  para todo  $0 < r < R$ . Segue do Teorema 2.7 que  $f$  é contínua em  $[-r, +r]$  para todo  $0 < r < R$ , portanto contínua em  $(-R, R)$ . Além disso,

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

■

**Teorema 4.3** *Se a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  tem raio de convergência  $R > 0$ , então:*

1. *A função  $f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , é infinitamente derivável;*
2. *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$ , para todo  $x \in (-R, R)$ , e a série que define a função da derivada de ordem  $k$ ,  $f^{(k)}$ , também tem raio de convergência  $R$ .*

**Demonstração.** Seja  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , definida em  $(-R, R)$ .

Primeiramente vamos provar que para  $n = 1$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n-1)!} a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

tem raio de convergência  $R$  e que  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ .

Seja  $\tilde{R}$  o raio de convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ . Para todo inteiro  $n \geq 1$  e  $x \in \mathbb{R}$

tem-se  $|n a_n x^n| \geq |a_n x^n|$ . Assim, se  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  converge, então

$x \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$  converge e por comparação, concluímos que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  também converge. Portanto,  $\tilde{R} \leq R$ .

Agora, para  $0 < x < R$  e  $0 < x + h < R$ , temos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+h)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, segue que para cada  $n \geq 1$  existe  $c_n \in (x, x+h)$  tal que  $\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n(c_n)^{n-1}$ , portanto

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n (c_n)^{n-1}.$$

Como  $|na_n x^{n-1}| \leq |na_n (c_n)^{n-1}|$ , e  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n (c_n)^{n-1}$  converge absolutamente, então pelo teste da comparação a série  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$  também converge absolutamente. De maneira análoga, se  $-R < x < 0$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n (c_n)^{n-1}$  converge absolutamente. Temos então que  $\tilde{R} \geq R$  e as duas séries têm mesmo raio de convergência. Agora, defina a função  $g : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ . Pelo item 2. da Proposição 4.2, temos

$$\int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0.$$

Para  $|x| < R$ , utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}.$$

Por hipótese de indução suponha que  $f$  é  $m$  vezes derivável, e que

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n x^{n-m},$$

com raio de convergência  $R$ . Pela primeira parte,  $f^{(m)}$  é derivável e a série de potências que define  $(f^{(m)})' = f^{(m+1)}$  tem raio de convergência  $R$  e é tal que

$$f^{(m+1)}(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} (n-m) a_n x^{n-m-1},$$

ou ainda,

$$f^{(m+1)}(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-(m+1))!} a_n x^{n-(m+1)}.$$

■

**Corolário 4.3** Se a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  tem raio de convergência  $R > 0$ , então a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$  também tem raio de convergência  $R$ .

**Demonstração.** Basta observar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Portanto, pelo Teorema 4.3, ambas as séries tem raio de convergência  $R$ . ■

**Corolário 4.4** Suponha que série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  tem raio de convergência  $R > 0$ , e seja  $f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Então  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ , para todo  $n \geq 0$ , e portanto  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  é a série de Taylor de  $f$ .

**Demonstração.** Segue do Teorema 4.3 que,  $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{(n-n)!} a_n = n! a_n$ , portanto  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ . ■

**Exemplo 4.1 (Função Logarítmica)** Considere a serie geométrica  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ , onde  $|x| < 1$ . Temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^k x^k + \dots = \frac{1}{1+x}.$$

Usando o Corolário 4.2 temos que

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \right| = \left| \frac{1}{-1} \right| = 1$$

e assim a série  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$  tem raio de convergência  $R = 1$ .

Como  $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$ , obtemos, usando a Proposição 4.2 que,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k t^k dt, \quad \text{e portanto}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

também com raio de convergência igual a 1.

**Exemplo 4.2 (Função Arcotangente)** A função  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  definida por  $\tan(x) = y \iff \arctan(y) = x$ , é a função inversa da função tangente chamada de função arcotangente.

Considere a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ , série geométrica de raio igual a 1.

Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Como  $\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ , obtemos para  $|x| < 1$ ,

$$\arctan(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt, \quad e \quad \text{assim}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

**Exemplo 4.3 (Função Exponencial)** Considere a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , cujo raio de convergência é  $+\infty$ .

Sejam  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  e  $g(x) = e^{-x} \cdot f(x)$ , definidas em  $\mathbb{R}$ . Segue do Teorema 4.3, que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x).$$

Portanto,  $g'(x) = (e^{-x} \cdot f(x))' = -e^{-x} f(x) + e^{-x} \cdot f'(x) = 0$  e conseqüentemente, a função  $g$  é constante.

Como  $f(0) = 1$ , segue que  $e^{-x} \cdot f(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Portanto, obtemos novamente que

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$



# Capítulo 5

## Aplicações

### 5.1 Construção das Funções Seno e Cosseno sem o uso da Geometria

Como uma aplicação da derivação termo a termo das séries de potências faremos uma construção rigorosa das funções trigonométricas, sem o uso da geometria. Vamos obter alguns resultados para as funções seno e cosseno e as fórmulas da soma de arcos.

Começamos considerando as seguintes séries de potências:

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Aplicando o teste da razão, concluímos que as duas séries tem raio de convergência infinito, logo definem funções infinitamente deriváveis em  $\mathbb{R}$ .

Temos que  $c(0) = 1$  e  $s(0) = 0$ . Agora,

$$\begin{aligned} c(-x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (-x)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (-1)^{2n} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= c(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s(-x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (-x)^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (-1)^{2n+1} x^{2n+1} \\
&= (-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
&= -s(x).
\end{aligned}$$

Assim,  $c(-x) = c(x)$  e  $s(-x) = -s(x)$ . Derivando termo a termo segue que,

$$\begin{aligned}
c'(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot \frac{(-1)^n \cdot x^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= (-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= (-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= -s(x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s'(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right)' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (2n+1) \cdot x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\
&= c(x).
\end{aligned}$$

Seja  $h$  a função, definida em  $\mathbb{R}$ , por  $h(x) = s^2(x) + c^2(x)$ . Daí  $h'(x) = 2s(x)c(x) - 2c(x)s(x) = 0$ , conseqüentemente,  $h(x) = c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (função constante). Como  $h(0) = s(0) + c(0) = 0 + 1 = 1$  concluímos que para todo  $x \in \mathbb{R}$

$$s^2(x) + c^2(x) = 1.$$

Como  $s^2(x) + c^2(x) = 1$ , segue que  $-1 \leq c(x), s(x) \leq 1$ .

Continuamos agora tomando  $y \in \mathbb{R}$  fixo e considerando as funções  $f$  e  $g$  definidas como

$$f(x) = s(x+y) - s(x)c(y) - s(y)c(x)$$

e

$$g(x) = c(x + y) - c(x)c(y) + s(x)s(y).$$

Derivando, obtemos

$$f'(x) = c(x + y) - c(x)c(y) + s(y)s(x),$$

e

$$g'(x) = -s(x + y) + s(x)c(y) + c(x)s(y).$$

Portanto,  $f' = g$  e  $g' = -f$ . Daí resulta que  $(f^2 + g^2)' = 2ff' + 2gg' = 2fg - 2fg = 0$ , donde  $f^2 + g^2$  é uma função constante. Como  $f(0) = g(0) = 0$ , obtemos  $f^2(x) + g^2(x) = 0$ , e daí  $f(x) = g(x) = 0$ , para todo  $x$ . Assim, valem as fórmulas de adição

$$0 = s(x + y) - s(x)c(y) - s(y)c(x) \iff s(x + y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)$$

e

$$0 = c(x + y) - c(x)c(y) + s(x)s(y) \iff c(x + y) = c(x)c(y) - s(x)s(y).$$

Temos que a função  $c$  é contínua e  $c(0) = 1 > 0$ . Afirmamos que existe algum  $x > 0$  tal que  $c(x) = 0$ .

Suponhamos, por absurdo, que  $c(x) \neq 0$ , para todo  $x > 0$ . Usando o Teorema do Valor Intermediário, a função  $c$  não poderia mudar de sinal e teríamos que  $c(x) > 0$ , para todo  $x > 0$ .

Como  $s'(x) = c(x) > 0$ , a função  $s$  seria crescente para  $x > 0$ . Daí, para qualquer  $1 \leq x$ , temos  $s(1) \leq s(x)$ , donde

$$s(1) \cdot (x - 1) \leq \int_1^x s(t)dt = c(1) - c(x) \leq 2.$$

Assim, teríamos  $s(1) \cdot (x - 1) \leq 2$ , para todo  $x$ , o que não é possível. Portanto  $c(x)$  deve anular-se para algum  $x > 0$ . O dobro do menor número positivo para o qual  $c$  se anula é denominado  $\pi$ , assim  $c\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

A segunda fórmula de adição nos dá  $c(2x) = c^2(x) - s^2(x) = 2c^2(x) - 1$ . Logo  $c(\pi) = -1$  e, portanto,  $s(2\pi) = 0$ . Usando esses resultados e as fórmulas de adição, temos que  $s(x + 2\pi) = s(x)$  e  $c(x + 2\pi) = c(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Isso mostra que as funções  $c(x)$  e  $s(x)$  são funções periódicas de período  $2\pi$ .

Finalizamos aqui observando que poderíamos continuar, fazendo um estudo mais completo das funções trigonométricas sem argumentos geométricos.

## 5.2 Teorema da Série Binomial

O objetivo desta seção é a generalização da fórmula de Newton. Para todos  $x \in \mathbb{R}$  e  $m \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^m = \binom{m}{0}1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{m-1}x^{m-1} + \binom{m}{m}x^m$$

onde, para  $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$\binom{m}{n} = \begin{cases} \frac{m!}{n!(m-n)!}, & \text{quando } n \leq m \\ 0, & \text{quando } n > m \end{cases}$$

observando que  $0! := 1$ .

Quando  $n \leq m$  tem-se que

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}.$$

O lado esquerdo da equação anterior só tem sentido quando  $m \in \mathbb{N}$  mas no lado direito faz sentido considerarmos  $m \in \mathbb{R}$ .

Assim, tomando um número real  $\alpha$  definimos o chamado número binomial generalizado como

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Como exemplos, consideramos

$$\binom{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{3!} \quad \text{e} \quad \binom{\pi}{4} = \frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)(\pi-3)}{4!}.$$

**Lema 2** *Dados  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos:*

1.  $\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}$ ;
2.  $\frac{n}{\alpha} \binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha-1}{n-1}$  para todo  $\alpha \neq 0$ ;
3.  $\left| \binom{\alpha}{n} \right| \leq 1$ , para  $|\alpha| \leq 1$ .

**Demonstração.**

1. 
$$\binom{\alpha}{n} - \binom{\alpha-1}{n} = \frac{1}{n!} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1) - \frac{1}{n!} (\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!}(\alpha - 1)(\alpha - 2)\dots(\alpha - n + 1)(\alpha - (\alpha - n)) \\
&= \frac{1}{(n - 1)!}(\alpha - 1)(\alpha - 2)\dots(\alpha - n + 1) \\
&= \binom{\alpha - 1}{n - 1}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha - 1}{n} + \binom{\alpha - 1}{n - 1}.$$

Esta equação é conhecida como relação de Stiefel.

2.

$$\frac{n}{\alpha} \binom{\alpha}{n} = \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)}{n!} = \frac{(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)}{(n - 1)!} = \binom{\alpha - 1}{n - 1}$$

para todo  $\alpha \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
3. \quad \left| \binom{\alpha}{n} \right| &= \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\dots(\alpha - n + 1)}{n!} \leq \frac{|\alpha|(|\alpha| + 1)(|\alpha| + 2)\dots(|\alpha| + n - 1)}{n!} \\
&\leq \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n!} = 1.
\end{aligned}$$

■

Agora vamos demonstrar o Teorema da Série Binomial de Newton.

**Teorema 5.1** *Sejam  $\alpha, x \in \mathbb{R}$ . Para  $\alpha \neq 0$  e  $|x| < 1$ , temos*

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

**Demonstração.** Considere a série  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ , onde  $\alpha \neq 0$ . Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{|\alpha - n|} = 1,$$

o raio de convergência da série é igual a 1.

Logo, o Teorema 4.3 garante que a função  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$  é derivável e  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1}$ .

Usando o item 2. do Lema 2 temos que

$$k \binom{\alpha}{k} = \alpha \frac{k}{\alpha} \binom{\alpha}{k} = \alpha \binom{\alpha-1}{k-1}$$

e assim,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1}.$$

Considerando a função  $(1+x)f'(x)$ , obtemos

$$(1+x)f'(x) = \alpha(1+x) \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1}, \text{ ou seja,}$$

$$(1+x)f'(x) = \alpha \left( \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^k \right).$$

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1} = \binom{\alpha-1}{1-1} x^{1-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1}$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^k = \sum_{k=2}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-2} x^{k-1},$$

então

$$(1+x)f'(x) = \alpha \left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-2} x^{k-1} \right)$$

$$\text{e assim, } (1+x)f'(x) = \alpha \left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \binom{\alpha-1}{k-1} + \binom{\alpha-1}{k-2} \right) x^{k-1} \right).$$

Agora usando a relação de Stiefel, obtemos

$$(1+x)f'(x) = \alpha \left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{\alpha}{k-1} x^{k-1} \right) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha f(x).$$

Seja  $g(x) = (1+x)^{-\alpha} f(x)$ . Então, para  $|x| < 1$ , temos

$$g'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} f(x) + (1+x)^{-\alpha} f'(x) = (1+x)^{-\alpha-1} (-\alpha f(x) + (1+x)f'(x)) = 0.$$

Consequentemente  $g$  é constante em  $(-1, 1)$ . Como  $g(0) = (1+0)^{-\alpha} f(0) = 1 \cdot 1 = 1$ , obtemos que  $(1+x)^{-\alpha} f(x) = 1$  para todo  $x \in (-1, 1)$ , e portanto

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha$$

para  $|x| < 1$ .

■

**Corolário 5.1** *Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Para  $\alpha, \beta \neq 0$ , temos*

$$(1 + \beta x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (\beta x)^k$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| < \frac{1}{|\beta|}$ .

**Demonstração.** Fazendo  $y = \beta x$ , o resultado segue do Teorema 5.1 onde  $|\beta x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{|\beta|}$ .

■

O binômio de Newton estudado no Ensino Médio, é um caso particular do Teorema 5.1. De fato, sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a, b \neq 0$  e  $|a| \neq |b|$ . Sem perda de generalidade podemos supor  $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ . Tomando  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , aplicando o Teorema 5.1 segue que

$$(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = a^n \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k + R_n\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

onde  $R_n\left(\frac{b}{a}\right) = \sum_{k>n}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k = 0$ , pois  $\binom{n}{k} = 0$  para  $k > n$ .

Logo,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k a^{n-k}.$$

Nos casos  $a = 0$ ,  $b = 0$  e  $|a| = |b|$ , a equação é válida trivialmente.

**Exemplo 5.1 (Função Arcoseno)** *A função  $\arcsen : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  definida por  $\sen(x) = y \iff \arcsen(y) = x$  é a inversa da função seno denominada função arcoseno.*

*Temos que*

$$(\arcsen(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Usando o Teorema 5.1 segue que,

$$(1-x)^\alpha = (1+(-x))^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Tomando  $\alpha = -\frac{1}{2}$  e substituindo  $x$  por  $x^2$ , obtemos

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k}. \quad (\mathbf{I})$$

Antes de desenvolver o número binomial acima, observamos que

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) = \frac{(2k)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

e

$$\begin{aligned} \frac{(2k)!}{k!k!} &= \frac{2k(2k-1)(2k-2)\dots(2k-k+1)k!}{k!k!} \\ &= \frac{2k(2k-1)(2k-2)\dots(2k-k+1)}{k!} \\ &= \binom{2k}{k}. \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{k} &= \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}-1\right) \left(-\frac{1}{2}-2\right) \dots \left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \dots \left(-\frac{1-2k}{2}\right)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k}{2^k k!} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \\ &= \frac{(-1)^k}{2^k k!} \cdot \frac{(2k)!}{2^k k!} \\ &= \frac{(-1)^k}{4^k} \cdot \binom{2k}{k}. \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na equação (I) obtemos,

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} x^{2k}.$$

Como  $\arcsen(x) = \int_0^x (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt$ , temos que

$$\arcsen(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k(2k+1)} \binom{2k}{k} x^{2k+1}.$$



# Conclusão

Desenvolvemos de modo simplificado sequências e séries de funções explorando os principais resultados relacionados às convergências pontual e uniforme, como teoremas de derivação e integração termo a termo, visando aplicações em conteúdos do Ensino Médio.

De um modo geral, este conteúdo pode dar suporte para professores de Matemática, que desejam um aprofundamento no seu estudo, e também para alunos de graduação que cursam Análise na Reta.

# Referências Bibliográficas

- [1] ANTONIO CAMINHA MUNIZ NETO (2015). *Fundamentos de Cálculo*, Coleção PROFMAT, SBM.
- [2] DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO (1996). *Análise I*, 2ª edição, LTC Editora.
- [3] ELON LAGES LIMA (2006). *Análise Real*, Volume 1, Coleção Matemática Universitária, IMPA.
- [4] ELON LAGES LIMA (1989). *Curso de Análise*, Volume 1, Projeto Euclides, IMPA.
- [5] GERALDO SEVERO DE SOUZA ÁVILA (1993). *Introdução a Análise Matemática*, Editora Edgard Blücher LTDA.
- [6] HAMILTON LUIZ GUIDORIZZI (2008). *Um Curso de Cálculo*, Volume 1, 5ª edição, LTC Editora.
- [7] HAMILTON LUIZ GUIDORIZZI (2008). *Um Curso de Cálculo*, Volume 4, 5ª edição, LTC Editora.
- [8] MICHAEL SPIVAK (1994). *Calculus*, 3ª edição, Publish or Perish.
- [9] PAULO BOULOS (1986). *Exercícios Resolvidos e Propostos de Sequências e Séries de Números e de Funções*, Editora Edgard Blücher LTDA.
- [10] PAULO BOULOS (1983). *Introdução ao Cálculo*, Volume 2, 2ª edição, Editora Edgard Blücher LTDA.
- [11] PRISCILA KLITZKE MORENO (2016) *Dissertação: Números Reais e curiosidades das Somas Infinitas*. Disponível em [https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=95180](https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=95180).

- [12] WALTER RUDIN (1969). *Principles of Mathematical Analysis*, 2 ed., McGraw-Hill, New York.
- [13] WILFRED KAPLAN (1972). *Cálculo Avançado*, Volume 2, Editora Edgard Blücher LTDA.
- [14] Vídeo aula ministrada pelo professor Carlos Gustavo Moreira, disponível em [http://stratoimpa.br/videos/2017-analise-na-reta/analise\\_na\\_reta\\_20170221\\_19.mp4](http://stratoimpa.br/videos/2017-analise-na-reta/analise_na_reta_20170221_19.mp4). Página consultada em 10/01/2017.
- [15] Notas de aulas do professor Wagner Vieira Leite Nunes, disponível em <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/apperon/notas-sma333-wagner.pdf>. Página consultada em 20/05/2017.