UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Bauru

Maíra Lopes Toledo

Uma abordagem sobre a Geometria Não-Euclidiana para o Ensino Fundamental

Bauru
2018

Maíra Lopes Toledo

Uma abordagem sobre a Geometria Não-Euclidiana para o Ensino Fundamental

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Profmat - Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Orientadora: Profª. Drª. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza

Bauru
2018

Toledo, Maíra Lopes
Uma abordagem sobre a Geometria Não-Euclidiana para o Ensino Fundamental / Maíra Lopes Toledo. - Bauru [s.n.], 2018.
60 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Tatiana M. Rodrigues de Souza
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Ciências

1. Geometria. 2. Geometria Não-Euclidiana. 3. Ensino de Matemática. I. Rodrigues - de Souza, Tatiana Miguel. III. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Ciências. IV. Uma abordagem sobre a Geometria Não-Euclidiana para o Ensino Fundamental.

CDU -

Maíra Lopes Toledo

Uma abordagem sobre a Geometria Não-Euclidiana para o Ensino Fundamental

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Profmat - Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza
UNESP – Bauru
Orientadora

Prof. Dr. Gustavo Antonio Pavani
UNICENTRO - Universidade Estadual do Centro-Oeste do Paraná

Profª. Drª. Cristiane Alexandra Lázaro
UNESP – Bauru

Bauru
23 de fevereiro de 2018

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais (Salete e Pedro) e irmãos (Lucas e Thaís) que sempre acreditaram em mim me deram suporte se fazendo presentes nestes anos.

Aos meus professores, em especial à minha orientadora Tatiana Miguel Rodrigues de Souza, que me deu todas as direções necessárias. Aos meus professores que ministraram durante todo o meu período no Profmat.

Aos meus alunos que foram inspiração e participantes ativos para a elaboração de todo o percurso.

Aos meus amigos que com toda amizade e paciência contribuíram valiosamente para a formação deste trabalho.

RESUMO

O objetivo desta dissertação é apresentar a Geometria do Taxi e a Geometria Esférica, que fazem parte da Geometria Não-Euclidiana, para alunos que cursam o Ensino Fundamental. O tema será tratado nessa dissertação de forma teórica, usando definição de distância na Geometria euclidiana, na Geometria do Taxi e distância na Geometria Esférica. A partir destas definições apresentaremos conceitos como círculos e triângulos, os quais estão presentes na Geometria Euclidiana, irão compará-los na Geometrias do Taxi e Esférica. A metodologia do trabalho constituirá na indução do aluno ao questionamento dos postulados de Euclides, com enfoque no Quinto Postulado, sobre as paralelas, através de atividades em sala de aula que exijam os conceitos aprendidos nas Geometrias do Taxi e Esférica. Os resultados mostraram que os alunos associaram de maneira positiva os conceitos matemáticos ensinados em sala de aula com sua realidade social, tornando o ensino de Matemática mais dinâmico e atrativo

Palavras-chave: Geometria*.* Geometria Não-Euclidiana*.* Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This thesis aims is to present the theories: Taxicab Geometry and Spherical Geometry, which are part of non-Euclidean Geometry, a mathematical concept, taught for elementary school students of the Elementary School. The content of this dissertation will be explained theoretically using the definition of distances Euclidean Geometry, in the Taxi Geometry and the Spherical Geometry. This study will introduce fundamental academic concepts with are part of Euclidean Geometry, as circles and triangles, and compare with Taxicab Geometry and Spherical Geometry. The methodology is composed to induce the students to ask questions about the “Postulates of Euclides”, specially the fifth one, about parallels through classroom activities that require concepts of Taxicab Geometry and Spherical Geometry. The results have been shown that the students associate very well mathematical concepts with their social reality, and that the Mathematic teaching have became more dynamic and attractive for those students.

.

Keywords: Geometry; non-Euclidean geometry; Mathematic teaching.

Lista de Ilustrações
Figuras

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Quando ouvimos a palavra Geometria ser pronunciada, o primeiro pensamento são desenhos e formas geométricas que veem em nossa cabeça, é um dos primeiros contatos com a matemática desde a infância. Poucos sabem que ela é denominada Geometria Euclidiana e que seus ensinamentos são um dos mais antigos da história da Matemática. Contudo o que abordaremos nesse trabalho são as Geometrias não Euclidianas, trazendo visões de um mesmo conteúdo em espaços diferentes e propondo algumas atividades escolares com essas novas geometrias que se tornaram legitimas no século XIX.

A discussão em torno do Quinto Postulado de Euclides (o postulado das paralelas) foi a grande responsável pela descoberta de tais geometrias. Durante séculos, diversos matemáticos acharam que seria possível chegar ao resultado do Quinto Postulado como um teorema, utilizando os outros quatro postulados, e que portanto aquele pudesse ser descartado. Diante desse dilema, acabou se abrindo caminho para que outros matemáticos aprofundassem os estudos e descobrissem geometrias onde o postulado das paralelas não é válido, trazendo resultados muito importantes para a Matemática. Dentre essas Geometrias, destacaremos no trabalho a Geometria do Táxi e a Geometria Esférica (DEVITO, 2006).

Com essas novas evoluções na história da geometria, pergunta-se: Não teriam essas outras geometrias algum lugar nos conhecimentos matemáticos que são considerados importantes para a formação dos estudantes na sociedade atual?

A Proposta Curricular para a Matemática do Ensino Fundamental do Estado de São Paulo (1991, p. 88) sugere o ensino da Geometria Esférica para “[...] concretizar as noções de círculos máximos e circunferências máximas, respectivamente, em esferas e superfícies esféricas [...]”. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p. 24) destacam:

> [...] a Matemática não evolui de for organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. [...] Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para a aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico.

Portanto, com base no PCN, é válido estudar a leis das Geometrias Não Euclidianas.

O principal objetivo deste trabalho é propor atividades acerca da Geometria Esférica e da Geometria do Taxi, buscando instigar professores de Matemática e alunos da Educação Básica, do ensino médio e fundamental, a trabalharem em sala de aula com estas Geometrias, visando a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

A priori, para atender o objetivo, apresentaremos as três Geometrias: Euclidiana, Esférica e Taxista. Com um prévio conhecimento das três, direcionando sempre as principais diferenças entre elas, fica mais fácil estabelecer uma comparação e o porquê das evoluções e necessidades de novas visões em perspectivas diferentes. Neste sentido, uma cronologia é apresentada com os principais resultados matemáticos e pensadores que contribuíram diretamente ou, indiretamente, para tais geometrias não euclidianas. Os elementos da Geometria Esférica e Geometria do Taxi são apresentados por meio de definições e teoremas, com o intuito de compará-las com a Geometria Euclidiana.

Serão estabelecidas duas atividades, uma trabalhada com a Geometria Taxista e a outra com a Geometria Esférica. Em uma das atividades será possível encontrar a fundamentos da disciplina de Geografia. Tais atividades foram aplicadas em prática com alunos das séries iniciais do Fundamental II em escolas privadas e estaduais, onde os resultados e desenvolvimento serão todos apresentados.

Também teremos a apresentação de uma oficina, onde um jogo com os conceitos da Geometria do Táxi foi construído e apresentado durante uma feira cultural por alunos do primeiro colegial do Ensino Médio.

O propósito deste trabalho é o de contribuir para a divulgação das geometrias não euclidianas e incentivar sua exploração, cuja consequência maior poderá ser a de contribuir para capacidade do aluno a pensar e produzir matemática de forma mais flexível e criativa.

CAPÍTULO 1: Geometria Euclidiana

A palavra geometria vem do grego ‘geometrin’ (geo, ‘terra’ e trin, ‘medida’); originalmente a geometria era a Ciência tratada na Terra. Os Elementos de Euclides é um tratado matemático geométrico constituído por 13 livros escrito pelo matemático Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C. (SANTOS, 2016).

Euclides de Alexandria, escritor, mestre, matemático da escola platônica, e aclamado como o Pai da Geometria, nasceu na Síria e teve seus estudos firmados principalmente em Atenas. Ele é até hoje, em toda a história da Matemática, considerado como um dos mais importantes estudiosos deste campo na antiga Grécia. (SANTANA, S.D.)

Estudar a Geometria Euclidiana é uma tentativa de entender a natureza matemática do ponto de vista de sua fonte antiga mais importante. Mesmo que o conteúdo possa ser considerado abstrato na sua maior parte, Euclides conseguiu consolidá-la por mais de dois mil anos. Euclides ensina a disciplina com aspectos e conceitos com sua visão geral. Apresenta o fundamento axiomático de uma teoria matemática e o contextualiza para a solução de um problema específico. Visando como a abstração trata e impõe a apresentação estritamente dedutiva de uma teoria. (BICUDO, 2009)

O matemático Euclides apresentava o conceito de definições e que é de extrema importância saber conceitos que levam a classificações de temas relevantes. Ele também criou o famoso algoritmo que leva o seu nome para a solução de problemas específicos da aritmética.

Um dos maiores pensamentos científicos é a habilidade de desvelar verdades que são visíveis somente aos ‘olhos da mente’, e de desenvolver modos e meios de lidar com elas. É isso que Euclides faz no caso das magnitudes irracionais ou incomensuráveis. (BICUDO, 2009)

E finalmente, nos Elementos de Euclides, deparamos com belas demonstrações e que são totalmente compreendidas por qualquer indivíduo que tenha o conhecimento razoável em Matemática (LOIOLA, 2014).

Os primeiros 4 livros, que hoje podem ser pensados como capítulos, tratam da Geometria Plana conhecida na época, enquanto os demais tratam de teorias dos números, dos incomensuráveis e da Geometria Espacial.

No livro 1, dos Elementos de Euclides, iniciou-se o estudo da Geometria Plana, hoje conhecida como Geometria Euclidiana Plana em sua homenagem. O que Euclides fez, foi construir a geometria plana através do método axiomático. Seu intuito é que se uma afirmação A1 é verdadeira, ele pode mostrar como esta afirmação segue logicamente de uma outra afirmação A2, a qual você acredita ser verdadeira. No entanto, se você não acredita em A2, ele terá que repetir o processo utilizando uma outra afirmação A3. O processo é repetido até atingir uma afirmação que você acredita ser verdadeira. Esta afirmação tem o papel de um axioma (ou postulado) (SANTOS e VIGLIONI, 2011).

Para tal, de acordo com Santos e Viglioni (2011), existem dois requisitos que devem ser cumpridos para que uma prova seja correta.

Requisito 1: Aceitar como verdadeira, certas afirmações chamadas axiomas ou postulados, sem a necessidade de prova.

Requisito 2: Saber como e quando a afirmação segue logicamente da outra.

O trabalho de Euclides destaca-se pelo fato que com apenas 5 postulados ele foi capaz de deduzir 465 proposições, muitas complicadas e não intuitivas.

Os cinco Postulados de Euclides são:

Postulado 1: Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

***Postulado 2*:** Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

***Postulado 3*:** Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

***Postulado 4*:** Todos os ângulos retos são iguais.

De acordo com Costa (2012) No livro 1 dos Elementos de Euclides temos a proposição abaixo:

Proposição 1.1: Sejam duas retas m e n cortadas por uma terceira reta r. Se a soma dos ângulos formados é 180°, então m e n são paralelas. Veja a figura 1.

Simbolicamente temos: $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow m \cap n = \varnothing$.

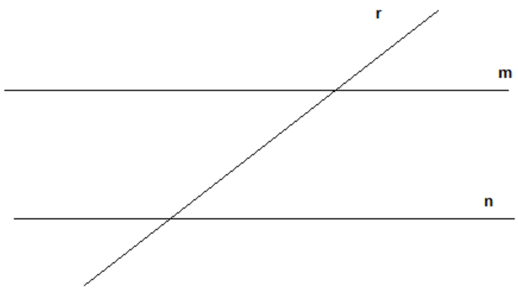

Figura 1 – Postulado 5

A recíproca desta afirmação é exatamente o postulado 5, de acordo com Antunes(2009).

Postulado 5: Sejam duas retas m e n cortadas por uma terceira reta r. Se a soma dos ângulos formados é menor que 180°, então m e n não são paralelas. Além disso, as retas se intersectam do lado dos ângulos cuja a soma é menor que 180°.

Em símbolos matemáticos esta afirmação é equivalente a:

$\alpha + \beta < 180° \Longrightarrow m \cap n \neq \emptyset$.

Essa afirmação é equivalente a $m \cap n = \varnothing \Rightarrow \alpha + \beta \geq 180°$.

Porém, se $\alpha + \beta > 180°$, teríamos que a soma dos suplementares de α e β seria menor que 180°, implicando pelo Postulado 5, que $m \cap n \neq \emptyset$ o que é uma contradição!

Retas Concorrentes e Paralelas

Duas retas são ditas concorrentes quando se intersectam em um ponto em comum. Se elas não possuem nenhum ponto em comum são ditas paralelas. (Santos; Viglioni, 2011).

Noções Primitivas da Geometria

De acordo com Costa (2012), os conceitos primitivos da Geometria Euclidiana são: ponto, reta e plano.

1. O ponto é a figura geométrica formada pelo encontro de duas retas.

Características: Não possui dimensão; É representado por letras maiúsculas e latinas.

2. A reta é a figura geométrica constituída por uma linha que estabelece a menos distância entre duas posições. A reta possui uma dimensão; A reta é ilimitada, não possui início e fim; É representada por letras minúsculas e latinas.

3. O plano é a figura definida por duas retas concorrentes. O plano possui duas dimensões; O plano é ilimitado; É representado por letras maiúsculas e gregas.

Os resultados de Euclides não são suficientes para demonstrar todos os resultados da Geometria Plana (ATIQUE, 2007).

Pontos e retas satisfazem os seguintes Axiomas:

Axiomas de Incidência

Axioma de Incidência 1: dado dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Axioma de Incidência 2: em toda reta existem pelo menos dois pontos distintos.

Axioma de Incidência 3: existem três pontos distintos com a propriedade que nenhuma reta passa por esses três pontos.

Temos, por definição que um conjunto de pontos A é colinear, se existe uma única reta r, tal que o conjunto A esteja contido em r, logo o terceiro axioma pode ser reescrito da seguinte maneira:

Axioma de Incidência 3: existem pelo menos 3 pontos distintos não colineares.

Destes 3 axiomas podemos deduzir:

1.Toda reta possui pelo menos dois pontos

2.Não existe uma única reta contendo todos os pontos.

3.Existem pelo menos 3 pontos distintos no plano.

Proposição 1.2*:* Se duas retas distintas ou não se intersectam ou intersectam-se em um único ponto.

Demonstração: Sejam m e n duas retas distintas em que m e n possuem pelo menos dois pontos distintos em comum Pelo Axioma de Incidência 1, m e n coincidem, que é uma contradição ao fato de que m e n são retas distintas. Logo, m e n possuem ponto em comum ou não possuem nenhum.

Proposição 1.3: Por todo ponto P, existe pelo menos duas retas distintas passando por ele.

Demonstração: Pelo axioma de incidência 3, existe um ponto Q distinto de P. Pelo Axioma de Incidência 1, existe uma única reta r que passa por P e Q. Temos também pelo Axioma de Incidência 3 que existe um ponto A, que não pertence a reta r. Novamente, pelo Axioma de Incidência 1, existe uma reta s distinta de r que contém os pontos P e A, provando a existência de duas retas pelo menos.

Proposição 1.4*:* Por todo ponto P, existe pelo menos uma reta r que não passa pelo ponto P.

Demonstração: Pela proposição anterior, existem duas retas distintas s e v que passam pelo ponto P. Pelo Axioma de Incidência 2, existem em s um ponto Q diferente de P e um ponto A que pertence a reta v. Pelo Axioma de Incidência1, existe uma reta passando por Q e A. Afirmamos que P não pertence a reta t. De fato, suponha por absurdo que P pertence a reta t, então t possui os pontos P e Q, portanto t=s. De modo análogo, se P e Q pertencem a t, logo t=v. Então, concluímos que s=v, o que é uma contradição. Portanto, P não pertence a reta t.

Abaixo seguem definições que serão usadas no decorrer do texto todo.

A distancia entre dois pontos X e Y será denotada por XY.

Circunferência ou Círculo

Seja A um ponto e r um número real positivo. O círculo de centro A e raio r é constituído por todos os pontos B do plano, tais que AB = r.

Ângulo

Um ângulo com vértice A é a união de duas semirretas com a mesma origem, chamadas de lados do ângulo. Notação: BÂC, CÂB ou Â.

Se dois ângulos BÔA e CÔB possuem um lado OB em comum, e os outros dois lados AO e OC são semirretas distintas de uma mesma reta, os ângulos são suplementares. Veja a figura 2:

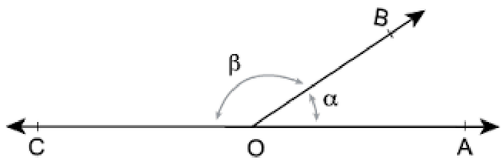

Figura 2 – Ângulos Suplementares

Um ângulo é dito raso se os lados são semirretas distintas de uma mesma reta.

Axioma de Medição: Todo ângulo corresponde a um único número real maior ou igual a zero. Este número é zero, se e somente se os lados dos ângulos se coincidem.

Definição

Métrica: Uma métrica é uma função matemática que mede a distância.

Definição

Lugar Geométrico: é um conjunto de pontos caracterizados por uma propriedade.

1.1 Distância entre Dois Pontos no $\mathbb{R}^2$

Consideramos plano $\mathbb{R}^2$ e duas retas perpendiculares, sendo uma delas horizontal e a outra vertical. A horizontal é denominada Eixo das Abscissas e a vertical é denominado Eixo das Ordenadas.

Os pares ordenados de pontos do plano são indicados na forma de P (x_p,y_p),no qual x_p será a abscissa do ponto P e o y_p será a ordenada.

Dados P (x_p,y_p) e Q (x_q,y_q), obtemos a distância entre os pontos P e Q traçando as projeções destes pontos sobre os eixos coordenados, encontrando o ponto R, o qual tem coordenadas $(x_R,\ y_R)=(x_Q,y_P)$. Assim, considerando o triângulo retângulo PQR (conforme as figuras 4 e 5 abaixo) e aplicando o teorema de Pitágoras, temos

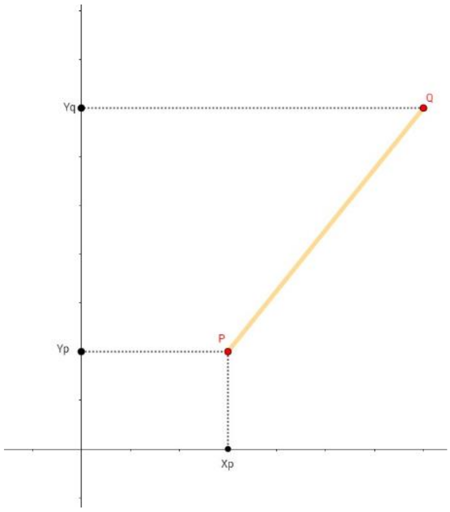

Figura 3 – Distância entre P e Q (1).

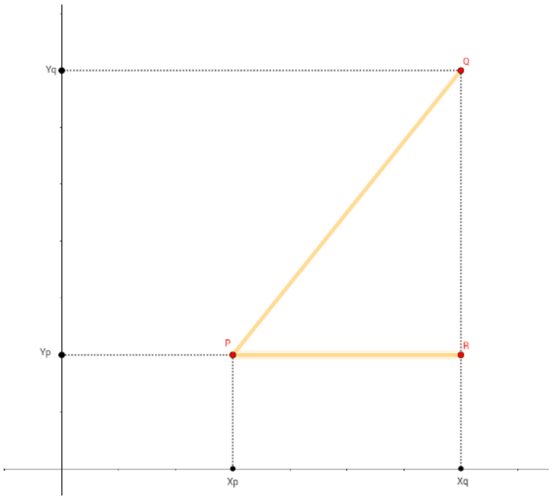

Figura 4 – Distância entre P e Q (2)

$$[d(P,Q)]^2 = [d(P,R)]^2 + [d(R,Q)]^2 = |x_Q - x_R|^2 + |y_Q - y_R|^2 = (x_q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2.$$

Portanto, $d(P,Q) = \sqrt{d(P,R)^2 + d(R,Q)^2}$.

Observe que, o segmento PQ é a hipotenusa do triângulo retângulo PQR, o segmento PR é o segmento é o outro cateto, como também PQ = d(P,Q), PR = d(P,R) e QR = d(Q,R).

1.2 Distância de Dois Pontos no $\Re^3$

Já definimos que o menor caminho entre dois pontos é a reta que os une. Dessa maneira, o cálculo necessário para calcular essa distância será medir o comprimento desse segmento de reta.

Normalmente, o cálculo para medir um segmento de reta é feito pelo Teorema de Pitágoras. Portanto, usaremos o mesmo teorema, assim como é usado no plano $\Re^2$, para calcular a distância entre dois pontos no espaço.

Demonstração da Fórmula

Observe, na figura, os pontos A= (x_A,y_A,z_A) e B = (x_B,y_B,z_B). Primeiramente, devemos traçar um segmento entre esses dois pontos.

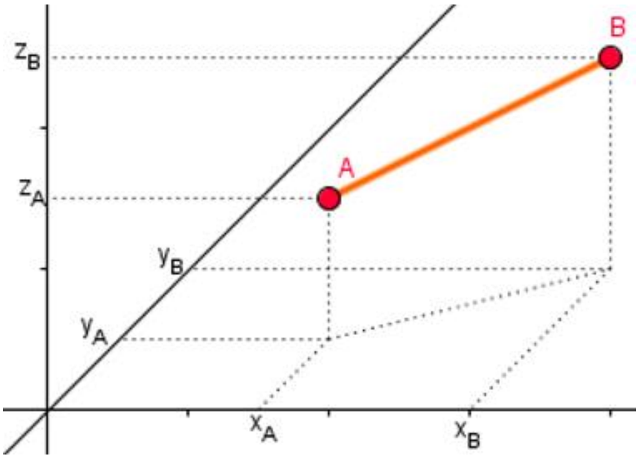

Figura 5 – Distância entre A e B

Feito isso, observe na figura abaixo o mesmo segmento projetado no plano xy.

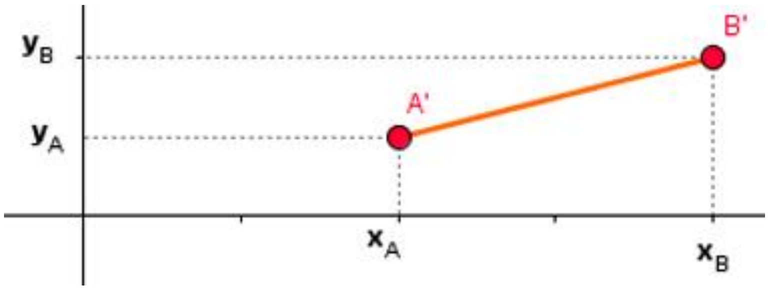

Figura 6 – Distância entre A'e B'

Observe que o problema a distância no plano fica reduzido à distância entre dois pontos no plano. Usaremos o Teorema de Pitágoras para descobrir o quadrado da distância entre A' e B', isto é, d(A',B'), onde A' é a projeção do ponto A em relação ao plano xy e B' a projeção do ponto B no plano xy.

Logo, teremos: $d(A',B')^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$.

Feito isso, utilizaremos o Teorema de Pitágoras novamente para calcular a distância entre A e B. Observe que o segmento AB é hipotenusa de um triângulo retângulo em que A'B' é cateto e base (esse segmento é paralelo à projeção do segmento AB e possui o mesmo tamanho) e $z_A - z_B$ é o outro cateto e altura.

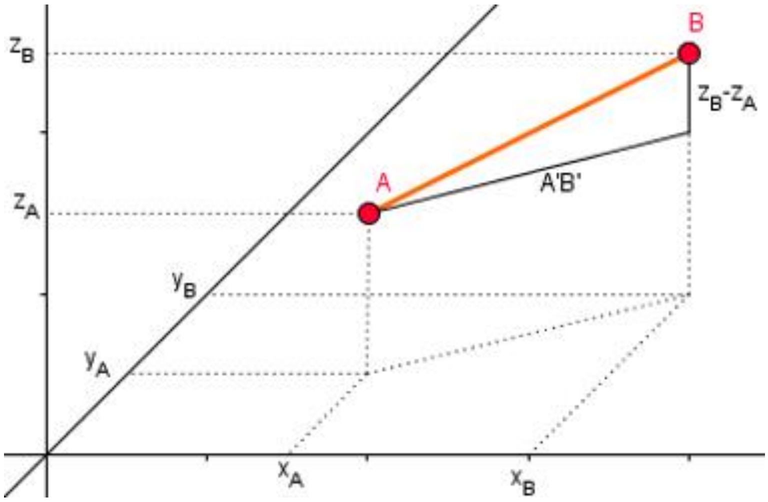

Figura 7 – Teorema de Pitágoras

Desse modo, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$d(A,B)^2 = d(A',B')^2 + (z_A - z_B)^2 \text{ logo,}$$

$$d(A,B)^2 = ((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2) + (z_A - z_B)^2 \text{, assim,}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

Iremos definir polígonos e círculo, os quais serão objetos que também serão observados nas outras geometrias.

Triângulo

Definição: Três pontos não colineares formam um triângulo. Nesse caso, a região triangular correspondente é a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos que unem os três pontos dois a dois. Sendo A, B e C tais pontos, diremos que A, B e C são os vértices do triângulo ABC.

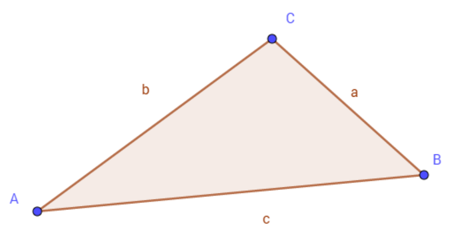

Figura 8 – Triângulo ABC

Polígonos

Definição: Sejam $n \geq 3$ um natural e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2 \ldots A_n$ é um polígono convexo se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semipleno, dentre os que ela determina (aqui e no que segue $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$)(SOUZA, 2016).

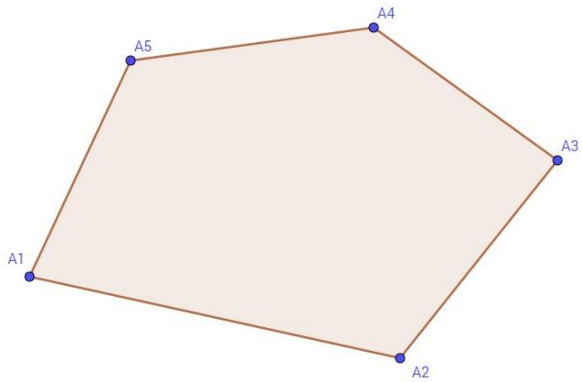

Figura 9 – Polígono de 5 lados

Definição: Os pontos A_1, A_2, ..., A_n são os vértices do polígono e os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ ...., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_{n+1}}$ (ou, por vezes, seu comprimento) são os lados do polígono.

Congruência de Triângulo

A noção intuitiva de igualdade para triângulos recebe o nome de congruência. Dizemos que dois triângulos são congruentes se podem ser superpostos por meio de um deslocamento, sem deformá-los.

Se se dois triângulos ABC e A’B’C’ forem congruentes, deve existir uma correspondência entre os vértices de um e do outro, de modo que os ângulos internos em vértices correspondentes sejam iguais, bem como o sejam os lados opostos a vértices correspondentes (CAMINHA, 2007).

A figura abaixo mostra dois triângulos congruentes ABC e A’B’C’, com correspondência de vértices

$A \leftrightarrow A'; \; B \leftrightarrow B'; C \leftrightarrow C'.$

Considere os triângulos:

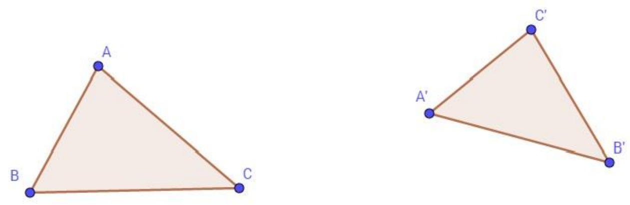

Figura 10 – Congruência de Triângulos

Para tais triângulos temos seguinte relação dos ângulos $\hat{A} = \widehat{A'}, \hat{B} = \widehat{B'}, \hat{C} = \widehat{C'}$ e a seguinte relação para os lados: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\overline{AC} = \overline{A'C'}$; $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.

A congruência dos triângulos possui as duas propriedades: simetria e transitividade, ou seja, se A é congruente a B então B é congruente a A; e também se A é congruente a B e B é congruente a C, então A é congruente a C.

Denotamos por $ABC \equiv A'B'C'$ quando o triângulo ABC é congruente ao triângulo A'B'C'. Os critérios usados para verificar se dois triângulos são congruentes são chamados de Casos de Congruência de triângulos e serão relatados a seguir.

Segundo Faria, seguem os seguintes teoremas.

Teorema 1.1 (Caso ALA – Ângulo, Lado, Ângulo): Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\overline{AB} = \overline{EF}, \hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então ABC ≡ EFG.

Por exemplo:

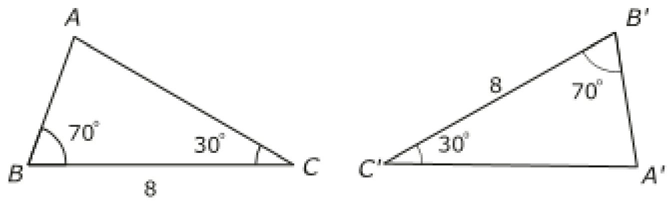

Figura 11 – Caso A.L.A.

Teorema 1.2 (Caso LLL – Lado, Lado, Lado): Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes.

Considere o exemplo:

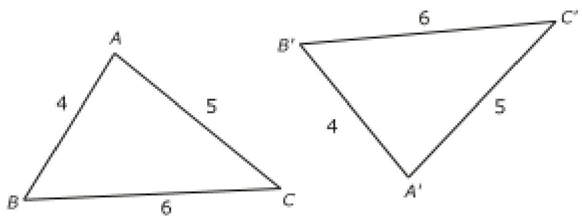

Figura 12 – Caso L.L.L.

Teorema 1.3 (caso LAL – Lado, Ângulo, Lado): Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\overline{AB} = \overline{EF}$,$\overline{AC} = \overline{EG}$ e $\hat{A} = \hat{E}$ então ABC ≡ EFG.

Por exemplo:

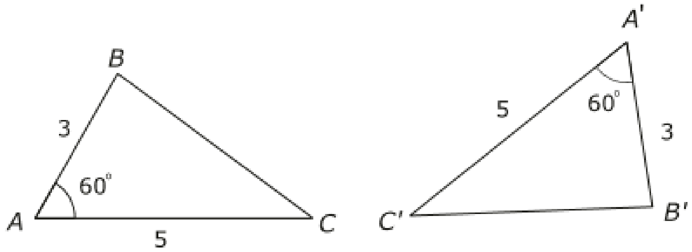

Figura 13 – Caso L.A.L.

Observação: Caso particular do caso LLL.

Esse caso pode ser expresso da seguinte maneira:

Teorema do Cateto e Hipotenusa

Proposição 1.5: Se dois triângulos retângulos têm um cateto e uma hipotenusa congruentes, então esses triângulos são congruentes.

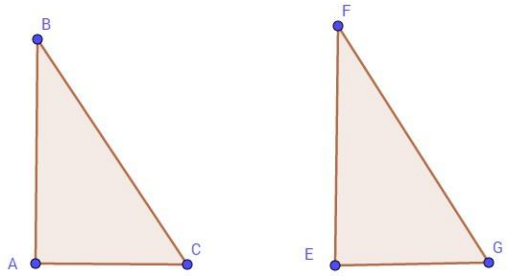

Figura 14 – Caso particular LLL.

Demonstração: Dado o triângulo retângulo ABC, com hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c, e o triangulo retângulo EFG com hipotenusa de medida e e catetos de medidas f e g. Por hipótese, temos a = e, b = f. Aplicando Teorema de Pitágoras nos dois triângulos temos: $a^2 + b^2 = c^2$ e $e^2 + f^2 = g^2$

Assim, obtemos $a^2 + b^2 = e^2 + f^2$, portanto, c=g. Isto implica que os triângulos dados são congruentes, pelo caso LLL. Logo, se dois triângulos retângulos têm congruentes um cateto e uma hipotenusa, então serão congruentes.

CAPÍTULO 2. Geometrias Não Euclidianas

2.1 Geometria do Táxi

De acordo com César (2010) a Geometria do Taxi, também conhecida como Geometria do Taxista, Geometria do Manhattan, entre outros nomes, tem como base a Geometria Euclidiana, mudando apenas a métrica. Essa geometria foi introduzida por Hermann Minkowski (1864-1909).

Segundo Fuzzo (2017), Karl Menger propôs, em 1952, uma exibição no Museu e Indústria de Chicago, que destacou a geometria do táxi. Um pequeno livrinho foi distribuído neste evento, intitulado “Você vai gostar de Geometria” e foi nas páginas dele que a geometria de Hermann Minkowski foi chamada de taxicab geometry pela primeira vez, ou seja, foi quando se usou o termo da Geometria do Táxi pela primeira vez.

Segundo Wanderley et al. (2002) a Geometria do Táxi apresenta muitas propriedades semelhantes às da Geometria Euclidiana. Utiliza-se da mesma definição de ponto e reta, a táxi-distância (distância na Geometria do Táxi) é sempre não negativa e igual a zero caso os pontos coincidirem, é simétrica e ainda satisfaz a desigualdade triangular.

Nessa geometria, cada ponto corresponde ao cruzamento de duas retas perpendiculares – ‘as ruas de uma cidade ideal’. Tenha em mente uma cidade onde há ruas e avenidas e o trânsito é livre em todos os sentidos, e as ruas são paralelas.

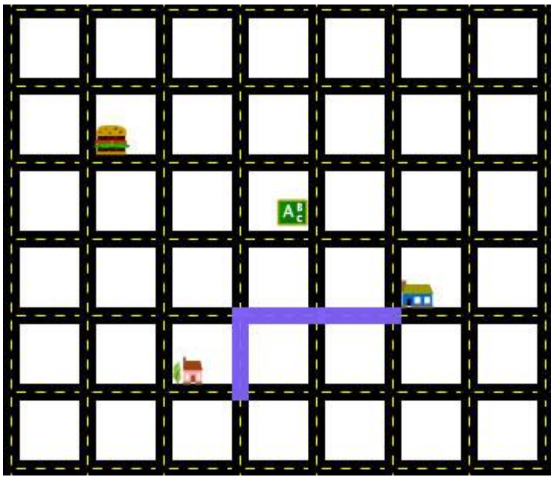

Figura 15 – Cidade Ideal

Na Geometria do Taxi temos que a função distância é definida de modo diferente. A função distância do taxi é denotada por d_t e é definida por:

Dado os pontos A(x_a, y_a)e B (x_b, y_b), temos que: $d_t(A,\mathrm{B}) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$

A função d_t satisfaz as seguintes propriedades:

I. $d_t(A, A) = 0$

II. Se A≠B, então $d_t(A, B) \neq 0$

III. $d_t(A, B) = d_t(B, A)$

IV. $d_t(A, B) \leq d_t(A, C) + d_t(C, B)$, para quaisquer pontos A,B e C.

Assim, a função distância do taxi d_t é uma métrica

Sejam A(x_a, y_a); B(x_b, y_b) e C (x_c, y_c)pontos quaisquer do plano cartesiano. Temos:

I. $d_t(A, A) = 0$

Aplicando a definição, temos que $d_t(A, A) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b| = 0 + 0 = 0$

II. $d_t(A, B) \neq 0$**,** se A ≠ B.

Se A ≠ B, então $x_a \neq x_b$ ou $y_a \neq y_b$. Logo $|x_a - x_b| > 0$ ou $|y_a - y_b| > 0$.

Portanto, $d_t(A,\mathrm{B}) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b| > 0$.

III. $d_t(A, B) = d_t(B, A)$

Temos que:

$$d_t(A,B)=|x_a-x_b|+|y_a-y_b|=|-(x_a-x_b)|+|-(y_a-y_b)|=$$
$$|-1||x_a-x_b|+|-1||y_a-y_b|=|x_b-x_a|+|y_b-y_a|=d(B,A).$$

IV. $d_t(A,B)\le d_t(A,C)+d_t(C,B)$

Pela propriedade de desigualdade triangular, temos:

$|x_a-x_b|=|x_a-x_c+x_c-x_b|\le|x_a-x_c|+|x_c-x_b|$ e

$|y_a-y_b|=|y_a-y_c+y_c-y_b|\le|y_a-y_c|+|y_c-y_b|$.

Somando os dois membros das desigualdades, teremos:

$|x_a-x_b|+|y_a-y_b|\le|x_a-x_c|+|x_c-x_b|+|y_a-y_c|+|y_c-y_b|$ e, portanto,

$$d_t(A,B)\le d_t(A,C)+d_t(C,B).$$

Para maior clareza das propriedades serão apresentados alguns exemplos.

Exemplo 1

Seja A(2,2) e B(4,4), obtemos:

$d_t A,B)=|4-2|+|4-2|=2+2=4$

Veja a representação a seguir:

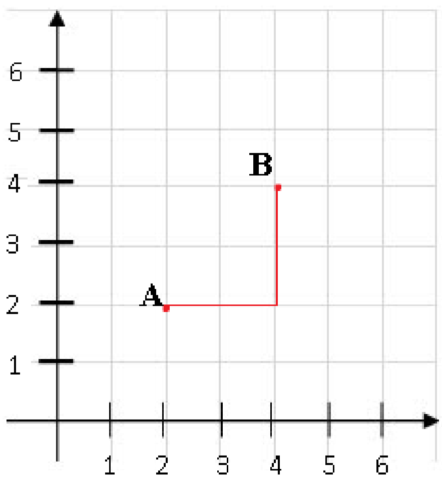

Figura 16 – Distância entre A e B

Exemplo 2

Sejam A (2,3), B(1,5), C(2,4), D(2,2), E(3,0) e $F(4,1)$

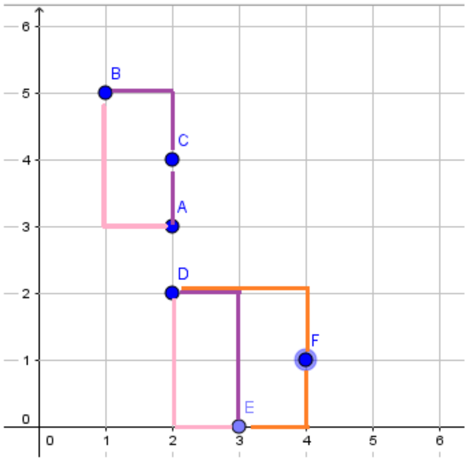

Figura 17 – Distância entre os pontos A e B e entre os pontos D e E

Observação: Em relação aos pontos A, B e C, temos que $d_t(A,B) = d_t(A,C) + d_t(C,B)$. Entretanto, ao observarmos os pontos D, E e F, obtemos:

$$d_t(D,E) < d_t(\mathrm{D},\mathrm{F}) + d_t(\mathrm{F},\mathrm{E})$$

Distância entre dois pontos com coordenadas não inteiras

Vamos calcular a distância entre os pontos C $\left(\frac{5}{4},2\right)$ e D $\left(\frac{15}{8},3\right)$, ilustrados a seguir. O trajeto mais curto de C até D é o menor entre os trajetos destacados a seguir:

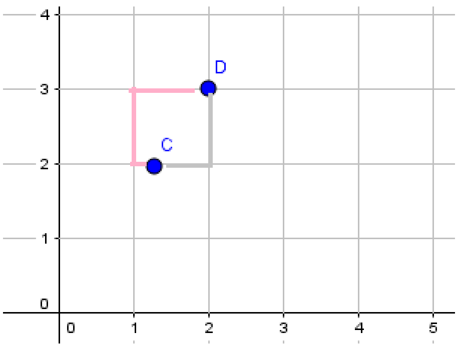

Figura 18 – Distância entre os pontos C e D

O comprimento do caminho cinza é igual a

$\left|\frac{5}{4}-1\right|+|2-2|+|1-1|+|2-3|+\left|1-\frac{15}{8}\right|=\frac{13}{8}$ e o comprimento do caminho rosa é igual a $\left|\frac{5}{4}-2\right|+|2-2|+|2-2|+|2-3|+\left|2-\frac{15}{8}\right|+|3-3|=\frac{15}{8}$.

Portanto, a distância entre os pontos C e D é dada por:

$d_{t=}|x_c-x_d|+|y_c-y_d|=\left|\frac{5}{4}-\frac{15}{8}\right|+|2-3|=\frac{13}{8}$, ou seja é o trajeto rosa.

Observe que na Geometria Euclidiana a menos distância entre os pontos C e D seria a hipotenusa CD e a medida de CD é:

$$\overline{CD}^2=\overline{DE}^2+\overline{CE}^2=1^2+\left|2-\frac{5}{4}\right|^2=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16},$$

$$Logo, \overline{CD}=\frac{5}{4}<\frac{13}{8}.$$

2.2 Definições na Geometria do Táxi

Circunferência na Geometria do Táxi

Definimos, na Geometria Euclidiana, circunferência como sendo o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de um ponto fixo denominado centro (LOIOLA, 2012).

Sejam, os pontos M(x,y) e O (a,b), tal que M pertence a circunferência e O seja o centro da mesma, isto é, D(M,O) = r.

Sejam:

$C_e=\{M(x,y)\in\mathbb{R}^2$ / De = (O,M) = r$\}$, usando a métrica euclidiana.

$C_t=\{M(x,y)\in\mathbb{R}^2$ / Dt = (O,M) = r$\}$, usando a métrica do taxi.

E, desse modo:

$C_e=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=$ e $C_t=|x-a|+|y-b|=r$

Onde C_e e C_t representam de modo algébrico a circunferência no modelo euclidiano e no modelo do taxi, respectivamente. A equação C_e representada em um sistema de eixos cartesianos nos fornece a seguinte visualização gráfica da circunferência:

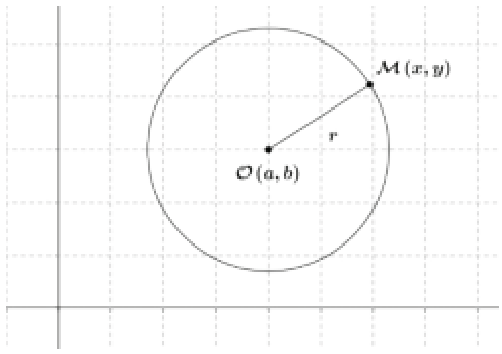

Figura 19 – Circunferência Euclidiana

Considerando:

$C_t = |x-a| + |y-b| = r$

Para x < a e y ≥ b, temos y = x $+(r-a+b)$ (I).

Para x ≥ a e y < b, temos y = -x $+(r+a+b)$ (II).

Para x >a e y ≤ b, temos y = x $+(-r-a+b)$ (III).

Para x ≤ a e y < b, temos y = -x $+(-r+a+b)$ (IV).

Sabemos que as equações I, II, III e IV são equações de retas e que os pares I e II, I e IV, III e IV, II e III são perpendiculares concorrentes nos pontos A $(a, b+r)$, B $(a-r, b)$, C $(a, b-r)$ e D $(a+r,$ b$)$, respectivamente. Como d_t (A,B) = d_t (B,C) = d_t (C,D) = d_t (D,A) = 2r, onde d_t é a distância do Geometria do Taxi, dessa forma temos que o quadrilátero ABCD formado é um quadrado. Então, concluímos que a a circunferência na Geometria do Táxi é um quadrado.

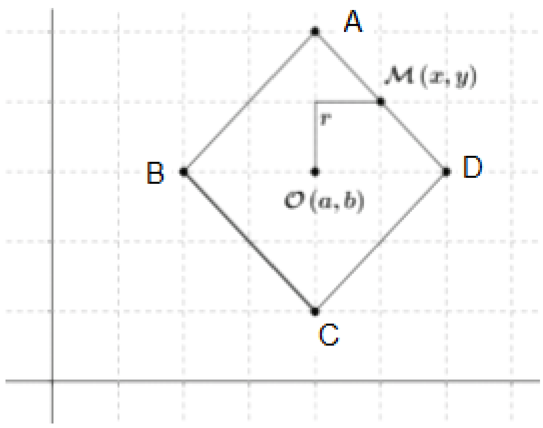

Figura 20 – Circunferência na Geometria do Táxi

Ângulos na Geometria do Taxi

Um t- raiano é um ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência unitária do taxista e intercepta um arco de unidade de comprimento do taxi, isto é, comprimento 1 na geometria taxista (LIMA, 2012).

A medida de um ângulo do taxi é o número de t radianos subentendido pelo ângulo sobre o vértice, como mostra a imagem abaixo:

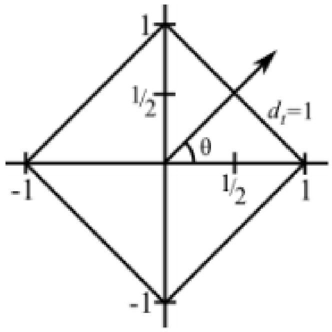

Figura 21 – Ângulo na Geometria Taxista

Definição: Um t-radiano é a medida do comprimento ao longo da circunferência unitária do taxista. Temos que os ângulos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ e π tem valores 1,2 e 4 t radianos na Geometria do Taxista.

2.3 Axiomas na Geometria Do Táxi

Segundo Lima,(2012), na Geometria do Taxi valem todos os axiomas da Geometria Euclidiana, com exceção do postulado L.A.L(lado, ângulo, lado).

Para tanto, considere os pontos A (2,1), B(4,1), C(2,3), D(5,2), E(7,2) e F(6,3). Conforme a figura, os triângulos retângulos BAC e DEF são retângulos isósceles, mas não satisfazem o postulado LAL, pois o triângulo BAC tem dois lados com medidas do taxi iguais a 2 e a hipotenusa igual a 4, e o triângulo DEF tem os três lados com medida do taxi igual a 2 e o ângulo entre esses lados medindo 90°, porém os triângulos não são congruentes, pois os terceiros lados tem medidas do taxi diferentes.

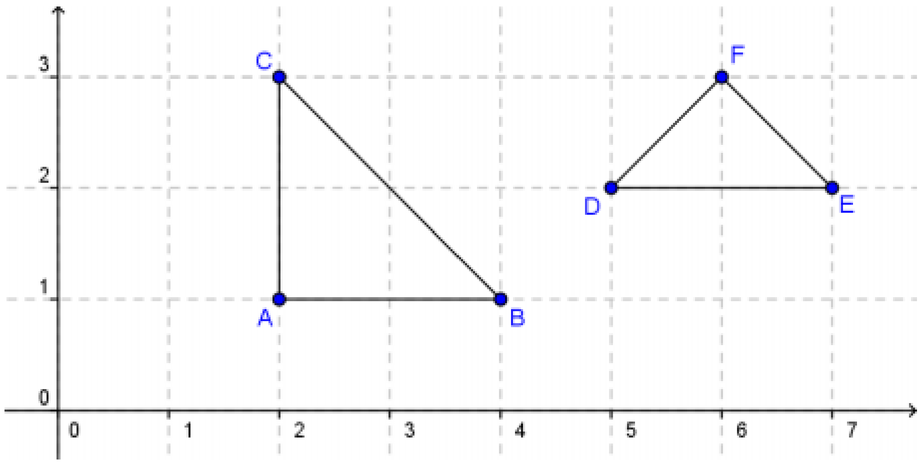

Figura 19 – Triângulos Retângulos e Isósceles

É válido lembrar que na Geometria do Táxi e Euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

2.4 Geometria Esférica

O estudo da geometria esférica se formalizou no século XIX, depois das descobertas da Geometrias Euclidianas, mas os matemáticos que abrangiam essa área eram muito ignorados pelos colegas da profissão. Os estudos, no entanto, quando relacionados com os triângulos esféricos, vem sendo desenvolvido no decorrer dos séculos. Pedro Nunes, matemático português, foi um dos que trouxe importantes informações a essa área quando, na época dos descobrimentos, descobriu uma curva chamada loxodrômica, que gerou muitas controvérsias. Vale constar que loxodrômica é a curva que, à superfície da Terra, faz um ângulo constante com todos os meridianos

Segundo DEVITO (2006) o desenvolvimento foi intenso, quando a humanidade necessitou resolver problemas como a construção de casas, a demarcação de terras, entre outros. Nesta geometria, abandona-se a noção de estar entre e a reta não é mais infinita como na Geometria Euclidiana, mas sim, limitada.

Segundo Thomaz e Franco, esta geometria foi desenvolvida, independentemente, por Nicolai Lobachevsky e, quase que simultaneamente, por Janos Bolyai. Nicolai dedicou mais de vinte anos à sua descoberta.A primeira apresentação pública de seu trabalho foi feita à Sociedade de Física e Matemática.Sem nenhuma aceitação, suas afirmações colocavam em dúvida a inquestionável Geometria de Euclides.

Ainda de acordo com Thomaz e Franco, Janos, em carta a seu pai Farkas Bolyai escreveu em 1823: Resolvi publicar um trabalho sobre a teoria das paralelas, o objetivo ainda não foi alcançado, mas tenho feito descobertas maravilhosas que quase sou esmagado por elas... do nada criei o universo. Em contrapartida, Farkas, que passou a vida inteira tentando provar o postulado das paralelas, quando soube que seu filho também estava absorvido pelo problema, escreveu-lhe: Pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema, tanto isto quanto as paixões sensuais, porque isso também pode tomar todo seu tempo, e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida! Janos não mostrou nenhuma indecisão nas suas convicções, porém não aprofundou as suas ideias.

De acordo com Cruz e Santos (2009), Lobatchevsky foi um matemático com uma ampla visão sobre o conhecimento matemático. Realizou estudos em vários campos da Matemática. Na geometria suas pesquisas alcançaram grandes destaques. Realizou investigações sobre o postulado das paralelas, pelas quais assumiu a contradição em relação ao quinto postulado de Euclides e, com os conceitos elaborados, ampliou significativamente o campo da geometria. A Geometria é um dos campos que foram seu objeto de estudo. Foi o primeiro a expor publicamente as suas descobertas em um número de papéis, culminando com sua Pangeometria de 1855, (que foi ditada, pois já se achava velho cego), provando, no entanto, a força de sua mente e a auto-confiança.

Finalmente, no início do século XIX ainda não estava claro se o Quinto Postulado tinha validade absoluta ou se podia ser desobedecido em geometrias alternativas. Os trabalhos de Girolamo Saccheri (1667-1733) que publicou uma série de teoremas, concluindo ter chegado a uma contradição do quinto postulado de Euclides, que aparece na obra de Euclides intitulada Elementos. Mas, após essa publicação, Saccheri veio a falecer, permanecendo sua obra esquecida, seus trabalhos eram praticamente ignorados e as ideias de Lobatchevski eram tidas como absurdos . Nessa época, o grande matemático alemão Bernhard Riemann chamou a atenção para uma falha cometida por Euclides, Saccheri e os outros pioneiros. É que eles sempre admitiam, sem contestar, que uma reta tem de ser infinita e ilimitada. Isso é dito no Segundo Postulado de Euclides e significa que, se um cidadão começasse a viajar em linha reta, seguindo a trajetória de um raio de luz, nunca chegaria ao fim da linha, mesmo se fosse eterno. Talvez isso valha apenas para o espaço euclidiano e não seja necessário em outros espaços, sugeriu Riemann. Deixando de lado essa restrição, Riemann mostrou que podia criar uma geometria na qual a soma dos ângulos de um triângulo era maior que 180 graus.

2.4.1 Definições

Superfície esférica

É o lugar geométrico dos pontos que distam exatamente r do centro da esfera.

Corda

É o segmento de reta definido por dois pontos distintos da superfície esférica.

Diâmetro da Superfície Esférica

É uma corda que contém o centro da esfera.

Pontos Antípodas

São pontos diametralmente oposto, isto é, dado um ponto M, seu antípoda M', é o único ponto da superfície esférica tal que MM' é um diâmetro do mesmo.

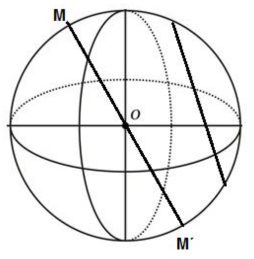

Figura 20 – Pontos Antípodas

Circunferência Máxima

É uma circunferência que tem o mesmo raio da superfície esférica.

Elementos Notáveis da Superfície Esférica

Eixo: qualquer reta que contém o centro O.
Polos: são os pontos de intersecção de eixo com a superfície esférica.
Equador: é a circunferência máxima, que o plano é perpendicular ao eixo.
Paralelo: é uma circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo e é paralelo ao equador.
Meridiano: é uma semicircunferência máxima cujo plano passa pelo eixo e liga os polos.

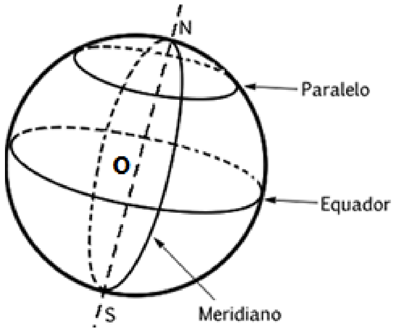

Figura 21 – Superfície Esférica

Elementos da Esfera

Calota Esférica: Quando a intersecção de um plano com uma superfície esférica é uma circunferência, temos que essa superfície esférica foi dividida em duas partes, cada uma destas é denominada calota.

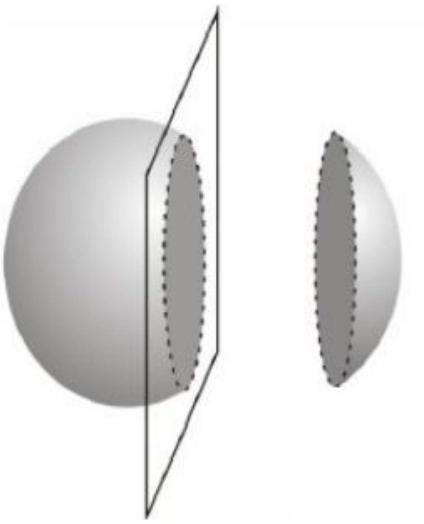

Figura 22 – Calota Esférica

Zona Esférica: É a parte esférica delimitada por dois planos distintos paralelos e não tangentes à superfície esférica, mas que a intersectam.

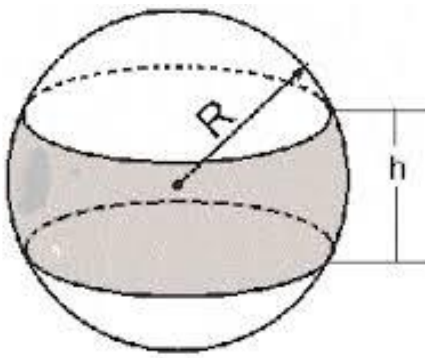

Figura 23 – Zona Esférica

Ângulo Esférico: É o ângulo formado por dois arcos de circunferências máximas. Sua medida é a mesma do ângulo formado pelas semirretas tangentes a esse arco.

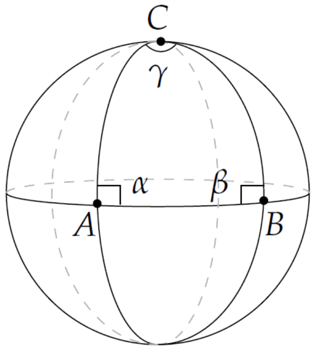

Figura 24 – Ângulo Esférico

Fuso Esférico: Também conhecido como biângulo esférico, é a região compreendida entre dois meridianos.

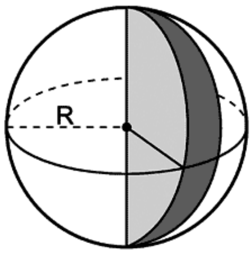

Figura 25 – Fuso Esférico

Biângulo: na esfera, os lados dos polígonos são segmentos esféricos, ou seja, arcos menores de círculo máximo; dados dois círculos máximos, estes intersectam-se sempre em dois pontos antípodas, dividindo a esfera em quatro regiões, cada uma das quais com dois lados; estas regiões designam-se por biângulos ou lúnulas. Portanto, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, na Geometria Esférica existem polígonos com dois lados, os biângulos, cujos vértices são pontos antípodas e cujos lados são semi-círculos máximos.

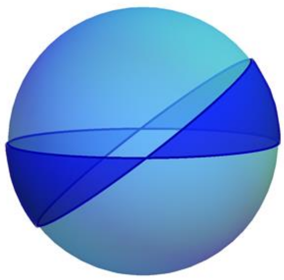

Figura 26 – Biângulo

Triângulo Esférico: Superfície limitada por 3 arcos de circunferência máximas, onde a soma de seus ângulos internos excede 180°.

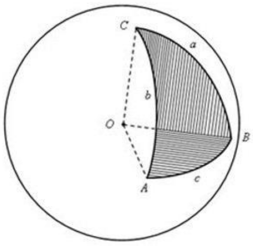

Figura 27 – Triângulo Esférico

Proposição *A área de um triângulo esférico sobre a superfície esférica de raio 1 é igual a* $\alpha+\beta+\gamma-\pi$.

Demonstraremos, a soma dos ângulo internos de um triângulo esférico. (Nogueira, 2018).

Teorema: Sejam α, β e γ, as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC, então $\alpha+\beta+\gamma=\pi+\dfrac{a}{r^2}$, onde a é a área desse triângulo esférico e r é o raio da superfície esférica.

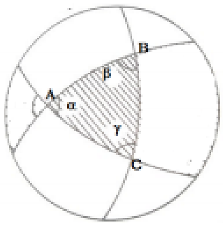

Figura 28 – Ângulos do Triângulo Esférico

Prolongando os lados do triângulo esférico, teremos três fusos completos, com os mesmos ângulos internos desse triângulo. A área de cada um desses fusos é completos é $4\alpha r^2$, $4\beta r^2$ e $4\gamma r^2$. A área de um triângulo esférico ABC é igual a área do triângulo A'B'C' formado pelos pontos antípodas do triângulo esférico ABC, pois estes ângulos são congruentes, pelo caso LLL, por exemplo o lado AB e A'B' são arcos subtendidos por ângulos congruentes, casos opostos pelo vértice. Ao somarmos estas áreas teremos a área da superfície esférica acrescida de quatro vezes o área do triângulo esférico ABC, pois foi contado duas vezes a mais a área do triângulo esférico ABC e duas vezes a mais a área do triângulo esférico A'B'C'. Logo:

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = 4\pi \mathrm{r}^2 + 4a$$

$$4r^2(\alpha+\beta+\gamma) = 4r^2\left(\pi + \frac{a}{r^2}\right)$$

$$\alpha+\beta+\gamma = \left(\pi + \frac{a}{r^2}\right)$$

2.5 Sistema de Coordenada na Esfera

É habitual associarmos a cada ponto P de $\mathbb{R}^3$ é uma tripla (x,y,z), onde x é a projeção sobre de p sobre θ eixo x, y é a projeção de P sobre o eixo y e z é a projeção de P sobre o eixo Z, que chamamos de coordenadas de P.

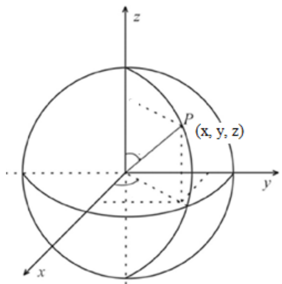

Figura 29 – Tripla (x, y, z)

2.5.1. Distância entre dois Pontos

É a trajetória mais curta entre os pontos, que é a chamada geodésica. Na esfera, as geodésicas são os círculos máximos que são os círculos traçados sobre uma superfície esférica cujos raios coincidem com o raio da esfera.

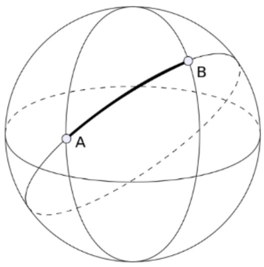

Figura 30 – Distância entre dois pontos na esfera

Para definirmos o cálculo entre a distância de dois pontos é mais conveniente associarmos aos pontos de uma esfera uma tripla (ρ,θ,ϕ), definido assim:

ρ é a distância à origem;

θ é o ângulo, medido em radianos, entre a projeção de $\overline{O\rho}$ sobre o plano xy e o eixo x;

ϕ é o ângulo, medido em radianos, entre $\overline{O\rho}$ e o eixo z.

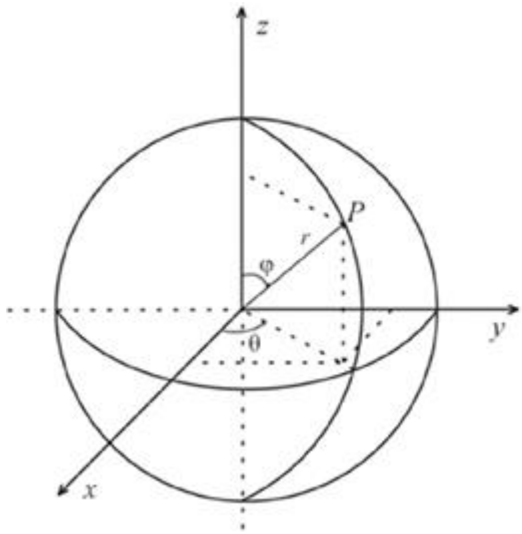

Figura 31 – Coordenadas de um ponto no espaço

O ângulo θ é denominado longitude de ρ, e o ângulo φ é denominado latitude. Temos as seguintes relações entre coordenadas esféricas e cartesianas. (ADAMES, 2005)

$x = \rho \cos\theta . sen\varphi$;

$y = \rho sen\theta . sen\varphi$;

$z = \rho \cos\varphi$

O estudo da Geometria Esférica, principalmente o relacionado com triângulos esféricos, é muito antigo e foi sendo desenvolvido ao longo dos séculos devido à sua grande aplicabilidade à Astronomia e à Navegação. O português Pedro Nunes foi um dos matemáticos que se notabilizou nesta área tendo descoberto uma curva que, na época dos Descobrimentos, gerou alguma controvérsia: a curva loxodrómica. Mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores têm que ter conhecimentos sobre Geometria Esférica.

CAPÍTULO 3: Comparando as três Geometrias

Até aqui, identificamos várias definições, postulados e resultados específicos da Geometria Euclidiana, Geometria Esférica e Geometria do Táxi. Desta maneira, o objetivo é apresentar, por meio de figuras e comparações, alguns exemplos de definições e demonstrações conceituais das três Geometrias, visando observar suas maiores diferenças. Essas comparações são feitas fundamentadas no trabalho de Zanella (2013). Desta maneira fica interessante e didático ensinar para os alunos as diferenças entre as geometrias, fazendo comparações com conceitos mais simples e de domínio do aluno.

3.1 Por um ponto fora de uma reta, passam quantas retas paralelas à reta dada?

Na Geometria do Táxi e na Geometria Euclidiana passa uma única reta paralela a um ponto externo a uma reta dada. Enquanto, na Geometria Esférica não há " retas paralelas'', uma vez que quaisquer duas circunferências máximas sempre se intersectam em dois pontos antípodas. Temos então, uma situação onde o quinto postulado de Euclides é negado.

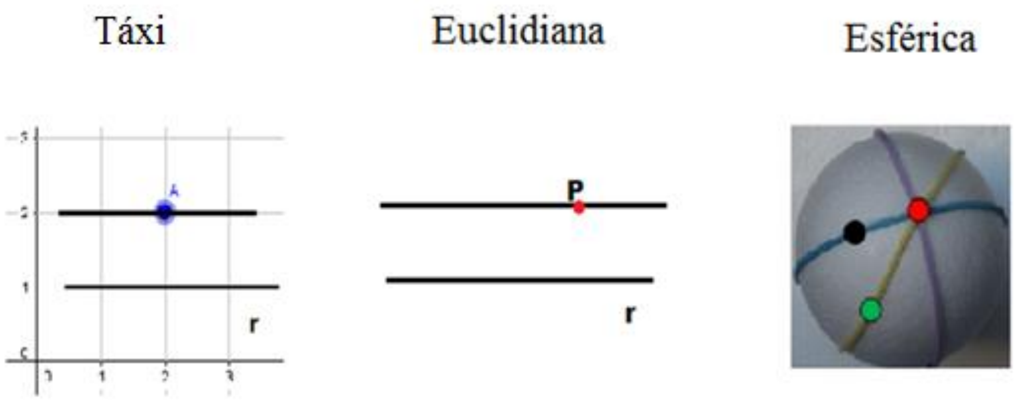

Figura 32 – Um ponto fora de uma reta nas três Geometrias

3.2 Qual é menor distância entre dois pontos distintos?

Na Geometria do Táxi, teremos que a menor distância entre dois pontos distintos será uma reta, se os pontos possuírem uma das coordenadas com o mesmo valor. A ilustração mostra que os pontos A e B possuem a mesma coordenada y e que os pontos C e O possuem a mesa coordenada x. No entanto, os pontos E e F não possuem nenhuma das coordenadas com o mesmo valor, logo eles não terão uma reta como a menor distância entre eles, mas sim, o caminho mais curto formado pelas retas perpendiculares que os ligam.

Na Geometria Euclidiana, a menos distância entre dois pontos distintos será sempre uma reta, enquanto na Geometria Esférica, a menor distância entre dois pontos será o menor arco entre esses dois pontos.

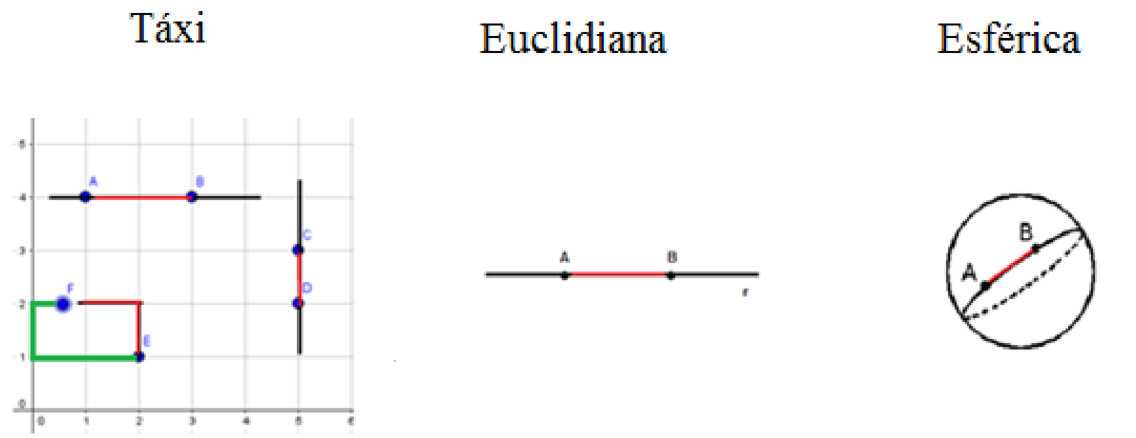

Figura 33 – Distância entre dois pontos nas três Geometrias

3.3 Qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo?

Na Geometria do Táxi e Euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Já na Geometria Esférica, a soma dos ângulos internos de um triângulo excede 180° (conforme visto anteriormente).

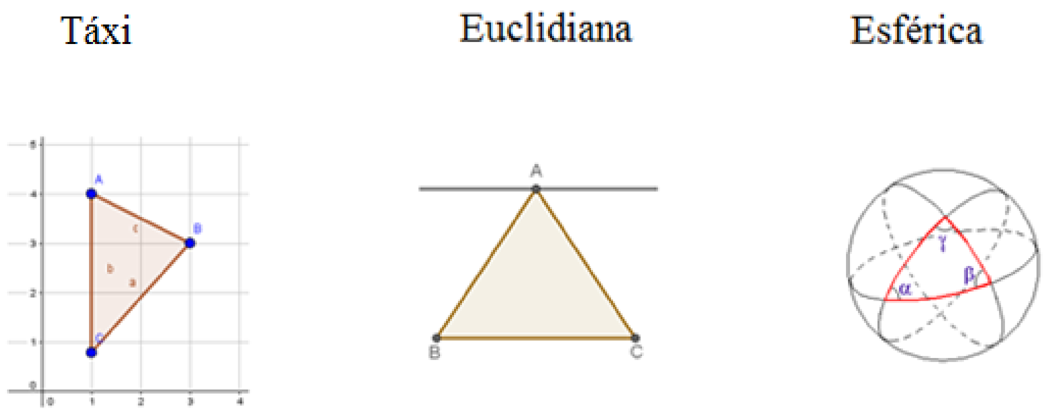

Figura 34 – Triângulo nas três Geometrias

3.4 Como é formado uma circunferência?

Uma circunferência na Geometria do Táxi é um conjunto de pontos com uma distância fixa, chamada de raio, até um ponto chamado centro. As táxi- circunferências são quadradas e com os lados orientados segundo um ângulo de 45° dos eixos coordenados. (conforme visto anteriormente).

A circunferência formada tanto na Geometria Esférica e Euclidiana é o conjunto de todos os pontos que equidistam de um ponto fixo denominado centro. Na figura observamos que esta foi feita no plano usando a Geometria Euclidiana.

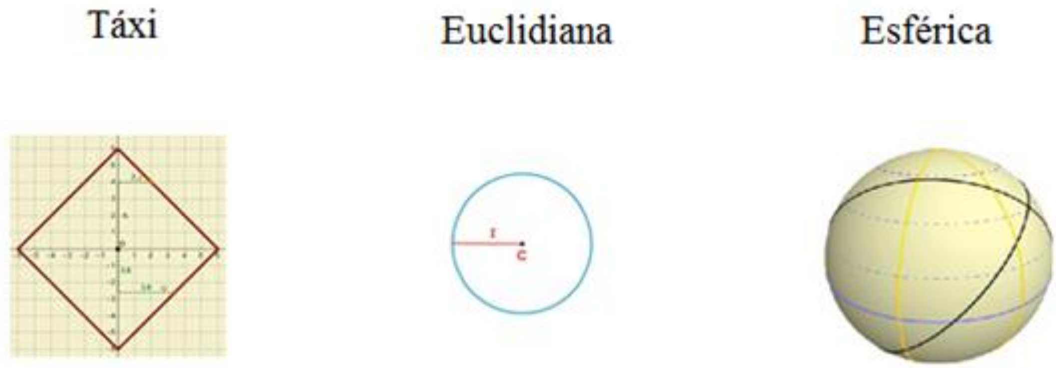

Figura 35 – Circunferência nas três Geometrias

3.5 Qual é o polígono com o menor número de lados?

O polígono formado com a menor quantidade de lados é um triangulo para a Geometria do Táxi e para a Geometria Euclidiana. No entanto, temos que na Geometria Esférica, o polígono formado com a menor quantidade de lados é um Biângulo.

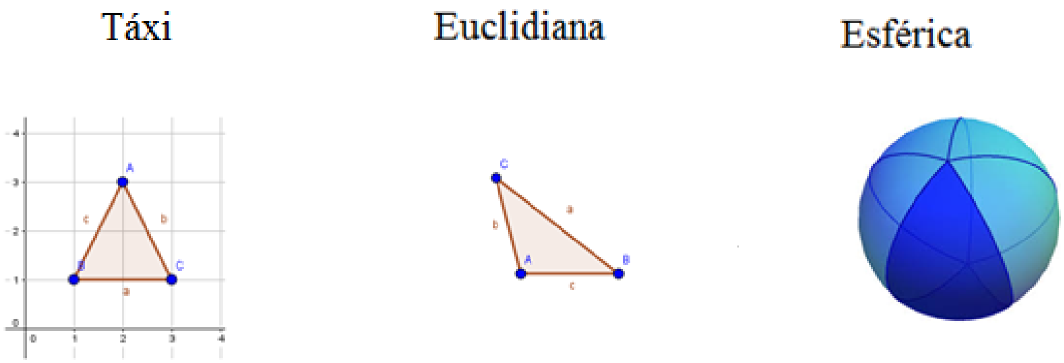

Figura 36 – Polígonos nas três Geometrias

Perceba que há necessidade das geometrias não-euclidianas para a compreensão dos conceitos geométricos, quando analisados em planos diferentes do plano de Euclides. É importante compreender a necessidade das geometrias não-euclidianas para o avanço das teorias científicas, para a articulação de ideias geométricas em planos de curvatura nula, positiva e negativa.

É primordial repensarmos sobre a prática pedagógica e, por meio dessas comparações e relações, proporcionarmos novas visões e ideias para que os alunos também tenham conhecimento de outras Geometrias Não Euclidianas.

Dessa forma, é possível que o trabalho do professor tenha uma sistematização que seja ampliada e aprimorada. É certo que as abordagens de um novo cenário para a Geometria do Táxi e Geometria Esférica ainda então se iniciando na Educação, contudo é essencial e papel do professor sempre buscar uma escola inovadora.

CAPÍTULO 4: Atividades e Oficina das Geometrias Não Euclidianas

4.1 Atividade Geometria do Táxi – Polígonos e Malha Quadriculada

Público Alvo: alunos do sexto ano do ensino fundamental.
Material de apoio: papel quadriculado, papel sulfite, régua, compasso e lápis de cor.
Pré requisitos: reconhecer polígono e círculos.
Planejamento

Iniciaremos a atividade fazendo uma pequena introdução à Geometria do Táxi, fornecendo aos alunos as principais definições e especificações da Geometria e, principalmente, as fundamentais diferenças quanto à Geometria Euclidiana.

Será necessário que o aluno tenha em mãos uma folha sulfite e que possua o material necessário para desenhar. É primordial que o aluno reconheça diferentes tipos de polígonos, retas, curvas e círculos.

Para desenvolver a atividade na malha quadriculada, o aluno deve ter uma compreensão razoável da introdução da Geometria do Táxi, caso contrário ele não conseguirá terminar a atividade com sucesso e fazer as conclusões esperadas.

A organização de cada um é essencial, uma atividade com etapas diferentes requer bastante paciência e auxílio do professor. Os alunos precisam estar em sincronia no decorrer da aula, para que com o passar da atividade proposta, eles consigam finalizá-la em tempos similares.

A conclusão do grupo é a etapa mais importante, a troca, a aprendizagem e diferenças precisam ser exaltadas no fim da aula.

Dificuldades Previstas

A maior dificuldade do aluno é traçar segmentos na malha quadriculada segmentos que a métrica taxista não permita. O professor deve ficar atento e em caso de necessidade, fornecer outra malha quadriculada para o aluno. Outra dificuldade que pode ser encontrada é que o aluno não saiba a diferença entre alguns tipos de polígonos.

Recomendações Metodológicas

A atividade pode ser feita individualmente ou em pequenos grupos que não excedam 3 pessoas.

Objetivos

- Apresentar uma nova Geometria ao aluno.
- Explorar a visão de uma nova métrica.

- Saber comparar um mesmo desenho com espaço e regras diferentes.

Procedimentos

I. Explicar no quadro negro, que a Geometria do Táxi funciona como uma "cidade perfeita'', onde teremos apenas direções na vertical e na horizontal. É válido que neste momento, o professor faça um desenho, mostrando o caminho que pode ser feito entre dois pontos, ressaltando principalmente as direções que não podem ser feitas. Um bom esquema de explicação pode ser visto na figura abaixo:

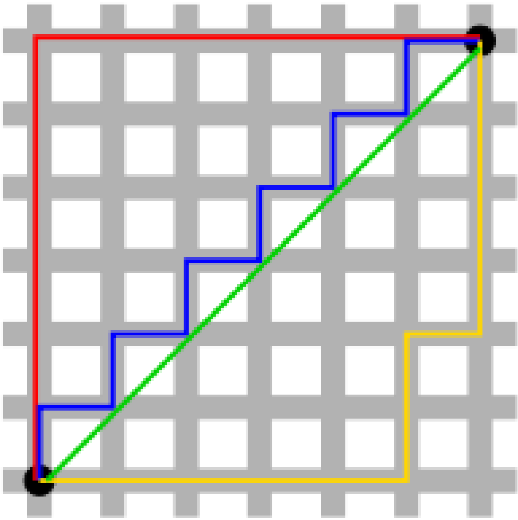

Figura 37 – Caminhos entre dois pontos

II. Entregar uma folha sulfite para cada aluno e pedir que ele desenhe com o auxílio de régua e compasso:

- Quadrado
- Retângulo
- Circunferência
- Triângulo
- Hexágono

Figura 38 – Materiais

III. Entregue a malha quadriculada aos alunos e peça que realizem os mesmos desenhos feitos anteriormente. Certifique que eles estão obedecendo a métrica da Geometria do Táxi.

Caso o aluno o aluno cometa erros na métrica da geometria, auxilie-o individualmente.

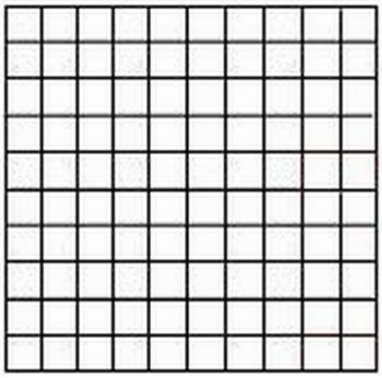

Figura 39 – Malha Quadriculada

IV. Quando todos os alunos concluírem as duas primeiras etapas da atividade, peça que eles pendurem tanto a malha quadriculada e a folha sulfite em um lugar adequado na sala de aula.

V. Ao final da atividade, peça que os alunos sentem em círculo para que as conclusões, trocas, aprendizagens e diferenças sejam exaltadas.

Relato da Atividade

No dia 27 de setembro de 2017, a atividade 'Geometria do Táxi - Polígonos e Malha Quadriculada' foi realizada na Escola Estadual Joaquim Rodrigues Madureira, na cidade de Bauru para os alunos do 6° Ano B do período Vespertino. A sala, que é composta por 36 alunos, teve a presença de 26 deles no dia.

A atividade se iniciou com uma parte teórica para que fosse ensinada a introdução e os principais conceitos da Geometria do Táxi. Esse momento decorreu muito bem, o título 'Geometria do Taxi', ao ser exposto na lousa, causou de uma primeira impressão de surpresa e estranheza aos alunos, e já começaram a surgir os primeiros questionamentos como: - Por que Táxi? – É um jogo? –Que Geometria é essa? – Precisa desenhar um carro?

Entretanto, a medida que a Geometria ia sendo ilustrada e explicada, os alunos começavam a esclarecer suas dúvidas iniciais.

Quando o plano cartesiano foi mostrado a eles sem nenhuma dica ou especulação, já conseguiram compará-lo ao 'gps do celular'.

Para explicar a métrica taxista, será colocado dois pontos distintos na ilustração quadriculada e em negrito diversos caminhos possíveis entre eles, inclusive aqueles que são considerados não permitidos para a Geometria. A transição da geometria taxista para a realidade do dia a dia deles é a metodologia mais eficaz e satisfatória que temos para conseguir a melhor aprendizagem possível. E foi exatamente o que aconteceu, ao mostrar no plano os caminhos que um táxi faria nas ruas, eles perceberam naturalmente que não se pode traçar os caminhos pelas diagonais, já que um táxi não pode atravessar por cima de um quarteirão.

As perguntas que surgiram nesse momento foram: - Mas e se a rua for contra mão? – Se estiver a pé pode cortar caminho? – Pode ir por qualquer caminho ou tem que ser o mais curto?

Figura 40 – Aula Geometria do Táxi

Fonte: Própria autoria

Após ao esclarecimento das dúvidas, foi dado início as etapas práticas da atividade.

Foi distribuído a cada um dos alunos, um régua, um transferidor e uma folha sulfite. Nesta primeira etapa, eles deveriam desenhar com o auxílio dos materiais escolares, uma circunferência, um quadrado, um triângulo, um retângulo e um hexágono. Não houve grandes dificuldades nesses primeiros desenhos, pois os conceitos da Geometria Euclidiana são ensinados desde os anos iniciais para eles.

A maior dúvida nesse momento, era se os polígonos precisavam ser regulares e alguns alunos não se lembravam o que era um hexágono, auxiliei-os e quando todos terminaram seus desenhos, a folha de cada um deles foi recolhida.

Figura 41 – Aluno concluindo a primeira etapa dos desenhos

Fonte: Própria autoria

Na segunda etapa da atividade prática, cada aluno recebeu uma malha quadriculada e continuaram com os materiais escolares para auxílio se necessário. Foi pedido para que cada um deles desenhassem os mesmos polígonos e a circunferência que haviam feito na folha sulfite.

O início foi bastante tranquilo. Naturalmente eles começavam pelos polígonos mais simples, como o quadrado e o retângulo. As dúvidas começaram a surgir principalmente na construção do triângulo, da circunferência e do hexágono.

Para os desenhos de triângulos, alguns alunos se confundiram e tentaram traçar retas nas diagonais dos quadrados da malha, o que fora explicado que não era permitido. Entreguei uma nova malha quadriculada para esses alunos, sempre deixando bem claro que não haveria certo ou errado, mas que a ideia era ver como eles imaginavam construir um triângulo sem traçar os caminhos não permitidos pela métrica taxista. Com uma nova tentativa, a maioria deles conseguiu concluir o que eles entendiam por um triângulo usando a métrica taxista.

É incrível como eles logo se adaptaram e buscaram o caminho mais fácil. Anteriormente quando foi pedido que desenhassem um hexágono, pude notar que a maioria dos alunos, até mesmo com certa dificuldade, tentavam desenhar um hexágono regular, sem que eu tivesse mencionado a necessidade dele ser regular. Porém, ao se depararem com a malha quadriculada, perceberam rapidamente que o traçar um hexágono regular seria muito difícil, dessa forma, a maioria deles desenhou um hexágono qualquer, sem desobedecer as métricas taxistas.

Em relação a circunferência, foi o momento mais complicado da atividade. Apenas dois alunos conseguiram representar uma circunferência no formato de um quadrado. Enquanto os outros alunos tentaram demonstrá-la construindo um polígono com uma grande quantidade de lados, porque com a expansão do desenho, a figura seria similar a uma figura circular

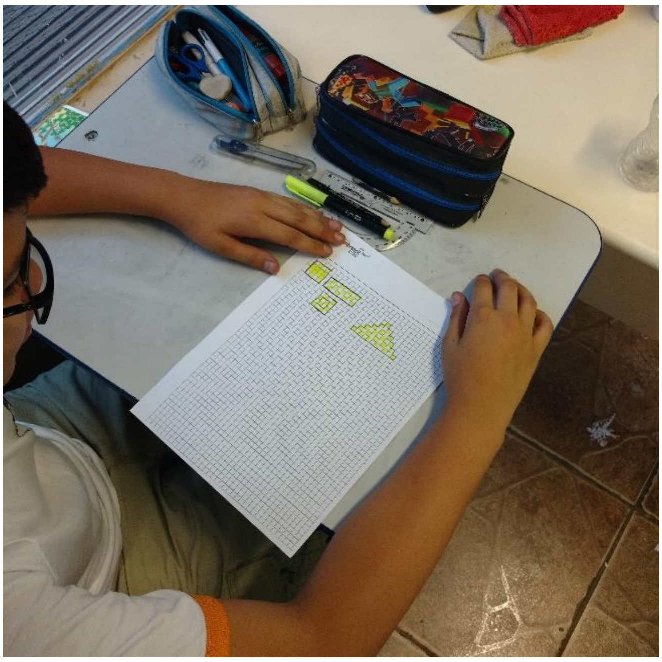

Figura 42 – Polígonos na malha quadriculada (1)

Fonte: Própria autoria

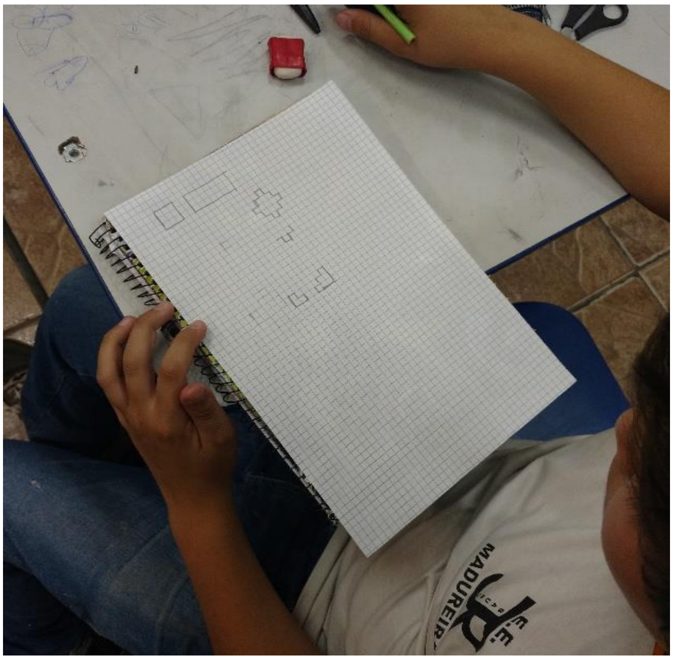

Figura 43 – Polígonos na malha quadriculada (2)

Fonte: Própria autoria

Quando todos finalizaram a segunda etapa, todas as malhas quadriculadas foram recolhidas, em uma parede na sala de aula foram penduradas as folhas sulfites na horizontal e logo abaixo delas também pendurei todas as malhas quadriculadas.

Foi pedido aos alunos que se aproximassem e observassem as duas etapas concluídas por eles e seus colegas. Eles perceberam que muitos desenhos eram semelhantes e alguns até praticamente idênticos. Eles discutissem entre si e trocaram as experiências e dificuldades que encontraram durante toda atividade prática. Ao fim da aula todos se sentaram e de forma mais direcionada foi conduzida uma discussão em grupo, para que as visões e conclusões de cada um fossem ouvidas e discutidas. Neste momento foi mostrado no quadro o desenho de outros polígonos na malha quadriculada e também explicada como a circunferência pode ser vista no formato de um quadrado na Geometria do Táxi.

Figura 44 – Finalização da atividade

Fonte: Própria autoria

A atividade foi extremamente proveitosa e satisfatória. Havia uma insegurança de apresentar uma nova geometria aos alunos, pois uma vez que a Matemática é uma das disciplinas onde a maioria dos alunos apresentam dificuldades na aprendizagem.

Contudo, talvez a proximidade da Geometria do Taxi com a realidade vivida por eles tenha tornado a atividade mais dinâmica e bem direcionada do que eu se possa imaginar. A pergunta mais cobrada em sala de aula pelos alunos é sempre saber a utilidade daquilo que aprendem, onde tais cálculos e definições podem ser usados em suas vidas, e a Geometria Taxista é bastante conveniente para trazer a matemática para o cotidiano deles.

4.2 Atividade Geometria Esférica – Um novo campo de desenho

Público Alvo: alunos do sétimo ano do ensino fundamental.
Material de apoio: caneta colorida, laranjas e esfera de isopor.
Pré requisitos: conceitos fundamentais da geometria euclidiana, alguns conceitos da geometria esférica (como pontos de pólo, equador, latitudes e longitudes) os quais são necessários para entender as coordenadas geográficas.

Planejamento

A primeira etapa da atividade será reservada para os conceitos fundamentais tanto da Geometria Plana, quanto foi da Esférica. Apesar do grau escolar garantir que o aluno já reconheça todos esses conceitos, é importante explorar e relembrar alguns aspectos específicos.

Cada aluno deve receber uma laranja e uma esfera de isopor, o material suficiente e especifico garantem que a atividade seja muito mais bem aproveitada e compreendida.

Para desenvolver as etapas dos desenhos na laranja e na esfera de isopor, que serão explicadas mais adiante, o aluno será livre para desenvolver a sua visão da geometria esférica. Para tal, perguntas e especulações da parte do professor no momento dessas etapas devem ser muito bem direcionadas.

A troca de ideias e questionamentos entre os colegas e com o professor deve ser permitida a todo momento, é um campo novo. Logo as dúvidas serão imediatas, e, portanto, não deve se esperar o fim da atividade para sanar algumas perguntas.

Ao fim da atividade será proposta uma exposição do trabalho feito por cada um dos alunos e fazer uma avaliação final em grupo.

Dificuldades Previstas

O estudante pode ter um bloqueio para começar a desenhar em um corpo esférico, uma vez que polígonos, retas ou curvas são construídos, com auxílio de instrumentos, facilmente utilizados em um campo plano.

Recomendações Metodológicas

A atividade deve ser proposta em grupo de três pessoas. Recomende que eles troquem ideias e visões antes de começarem as etapas dos desenhos.

Objetivos

- Apresentar uma nova Geometria ao aluno.
- Reconhecer a visão do aluno na Geometria Esférica.
- Trazer proximidade da Geometria Esférica no cotidiano do aluno.

Procedimentos

I. O início da atividade terá como propósito a introdução à Geometria Esférica e também alguns tópicos da Geometria Euclidiana. É necessário ressaltar as diferenças marcantes entre as duas, para tal será usado um exemplo muito simples e satisfatório: um globo terrestre e um mapa mundial.

Não há melhor exemplo que esses dois objetos para entender o quanto as coisas se modificam dependendo do local onde são tratadas. Escolhendo aleatoriamente dois países iguais em ambos os objetos, mostraremos ao aluno, marcando com uma caneta sob o mapa e o globo, o que se formará ao traçar a distância entre os lugares escolhidos. Com esse pequeno exemplo, espera-se que o aluno consiga perceber a diferença entre reta e um arco e compreender um pouco melhor os formatos traçados em um objeto esférico.

Figura 45 – Planisfério

Figura 46 – Globo Terrestre

II. Entregue a cada um dos alunos uma laranja e peça para eles traçarem algumas retas e circunferências. Durante este momento, é interessante que o professor permita uma troca de ideias entre os alunos e também com ele, e que durante os desenhos, o professor estimule os alunos com algumas perguntas, como: - Podemos chamar essa linha de uma linha reta esférica? Essa linha é um arco? A circunferência tem um ponto no centro? A circunferência é oval?

III. Esta etapa da atividade será feita em um outro corpo esférico, no caso, uma esfera de isopor. Forneça o objeto para cada um dos seus alunos e proceda a atividade com a mesma metodologia da atividade anterior. Para os desenhos no isopor, peça que os alunos desenhem 3 polígonos diferentes, um retângulo, um quadrado e um triângulo. Neste momento, teste algumas perguntas, como: - Como são os ângulos do triângulo? Os quadrados têm os quatro ângulos congruentes? O retângulo é oval?

IV. Quando todos os alunos terminarem os respectivos desenhos, coloque todos as esferas de isopor em uma mesa e todas as laranjas em uma outra mesa. Dê alguns minutos para os alunos observarem e compararem o trabalho feito em sala.

V. Para finalizar, proponha que os alunos ressaltem as diferenças que perceberam nos desenhos e conte quais foram as maiores dificuldades encontradas na atividade. O professor deve fazer uma breve conclusão e ressaltar a importância de conhecer a Geometria Esférica, mostrar que ela está totalmente englobada na vida dos nossos alunos.

Relato da Atividade

No dia 5 de outubro de 2017, a atividade Geometria Esférica- Um novo campo de desenho, foi realizada no Colégio Rembrandt Coc na cidade de Bauru para os alunos do 7° Ano A do período matutino. A sala que é composta por 30 alunos, teve a presença de 28 deles no dia.

Na sala de aula com um globo terrestre em mãos, vários olhares de surpresa. Um objeto tão comum na aula de geografia, parecia inédito nas mãos de uma professora de matemática. Foi projetado no quadro branco um mapa-múndi e dado início as explicações necessárias.

Ressaltado primeiramente a Geometria Euclidiana, foi contado um pouco da história do Matemático Euclides, foi chamada a atenção para as datas em que tudo se iniciou para que eles notassem há quanto o estudo da geometria permanece o mesmo.

Os alunos aprendem Geometria Euclidiana durante toda vida escolar, porém pelo conteúdo programado das escolas é muito difícil introduzir a história da matemática durante as aulas. Pode ser notado que praticamente todos não sabiam do nome Euclidiana, para eles a Geometria se baseia em figuras geométricas e medidas.

Foram ensinados os principais conceitos da Geometria Esférica, a sala de aula escolhida é composta por alunos muito interessados e espertos. Não houve dificuldade alguma em ressaltar os conceitos que englobam a superfície esférica, pois todos eles são trabalhados na disciplina de Geografia. Com isso fica fácil determinar com eles o que era polos, meridianos, eixos, arcos, etc.

Para dar início a comparação entre as duas Geometrias, foi pedido que um dos alunos escolhessem dois países do Planeta Terra. Escolhido os dois países, primeiro foi traçado com uma régua, a distância estre esses dois países na imagem projetada no quadro, discutido rapidamente que o traço formado era uma reta, sem nenhuma controvérsia. Ao ser traçada a distância entre os dois países no globo terrestre, a discussão já foi um pouco diferente, a maioria deles logo respondeu que o traço feito era um arco. Já outros alunos ainda diziam enxergar uma reta. Quando questionados, um deles me respondeu – 'É só esticar o globo e deixar ele plano'. Claro que nesse momento houve uma pequena descontração por parte de outros alunos, foi explicado que dessa maneira ele estava mudando o campo de desenho e foi pedido para ele me responder o que via no globo e não o que viraria o traço por mudar a estrutura do globo terrestre. Com um pouco mais de atenção e paciência, todos acabaram concordando que o traço feito na superfície esférica era de fato, um arco.

Segue abaixo algumas das imagens da atividade:

Figura 47 – Aula Geometria Esférica (1)

Fonte: Própria autoria

Figura 48 – Aula Geometria Esférica (2)

Fonte: Própria autoria

Figura 49 – Aula Geometria Esférica (3)

Fonte: Própria Autoria

Para dar início a primeira etapa prática foi distribuído para cada um dos alunos uma laranja, eles deixaram disponível em suas respectivas carteiras uma régua e um compasso para dar auxilio nos desenhos caso eles julgassem necessário. Foi pedido a eles que desenhassem várias retas e circunferências na fruta. Avisado que o desenho não seria certo ou errado, que o objetivo era que eles demonstrassem a visão deles na nova Geometria.

Foi possível observar que a maioria deles nem tentou usar a régua e muito menos o compasso para fazer qualquer um dos desenhos. Alguns deles, no início da atividade quando foram designados a fazerem as retas na laranja, de imediato me indagaram que não seria possível a construção de uma reta no corpo esférico. Para esses alunos, que já estavam com uma visão mais clara da Geometria Esférica, exigi um pouco mais deles e pedi que tentassem desenhar duas circunferências máximas sem que elas se cruzassem. A minoria dos alunos tentou ao máximo traçar a reta sem que ela “se curvasse “, mas com o passar da atividade todos perceberam que seria impossível.

Quanto aos desenhos em relação à circunferência, a grande dificuldade dos alunos foi construí-la de forma perfeita, como usar o compasso na laranja seria muito difícil, os comentários dos alunos era que ela não ficaria ‘bonita’, mas nenhum deles questionou a impossibilidade de desenhá-la no corpo esférico.

Recolhida as frutas dos alunos não foi feita uma conclusão após esta primeira etapa, como ela foi dinâmica durante todo a sua duração, com troca de ideias e visões pessoais por parte deles, foi iniciada então a segunda etapa prática.

Figura 50 – Circunferência na Fruta

Fonte: Própria autoria

Na segunda etapa da prática a da atividade, foi fornecido a cada um dos alunos uma esfera de isopor e foi pedido que cada um desenhasse um triângulo, um quadrado e um retângulo no objeto. Os alunos acharam essa parte muito mais tranquila que a outra, o primeiro comentário foi que seria mais fácil desenhar, pois a esfera era mais “lisa” que a laranja.

Não houve nenhum questionamento de que algum dos três polígonos seria impossível de desenhar, a maioria deles informou que os polígonos não ficariam perfeitos, outros até chegaram a comentar que os lados seriam “tortos”. A maior preocupação não era adaptar o desenho ao novo campo, mas sim em tentar trazer os conceitos da Geometria Euclidiana nas construções na esfera de isopor.

É natural essa primeira forma deles agirem, pois os alunos passam a vida escolar inteira aprendendo a construir polígonos com auxílio de régua, compasso, esquadro ou transferidor em um campo plano. Onde o professor, na maioria das vezes, é bastante exigente e cauteloso nas construções de desenhos geométricos. Por este motivo, eles demoraram um pouco para terminar os três polígonos, pois tentavam ao máximo, que as arestas permanecessem retas. Chamada a atenção de todos foi pedido que eles se esquecessem de todos os polígonos feitos com réguas e afins na vida deles, que o objetivo da atividade era ter uma nova visão a Geometria ensinada e não ficar preso com conceitos e regras já aprendidos, que eles refizessem os três polígonos de forma mais espontânea e natural de acordo com o objeto esférico em mãos.

Com o término da segunda etapa, o comentário geral era que os polígonos eram redondos, mas que ainda dava para reconhecer cada um deles. Alguns comentaram que o quadrado lembrava uma circunferência e que os triângulos e os retângulos tinham um formato oval. Neste momento eles trocaram de esferas com os amigos e colegas e conversassem um pouco sobre como foi executar os desenhos.

Para finalizar a atividade, foi mostradi no quadro que os ângulos internos de um triângulo esférico excedem 180°, eles ficaram bastante surpresos com a diferença, pois há pouquíssimo tempo eles haviam aprendido e demonstrado geometricamente a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Euclidiana. É favorável mostrar a diferença de algo que eles viram há pouco tempo e que se tem como verdade absoluta em uma geometria e pode ser vista de outra maneira em outra. A atividade foi bastante conclusiva e inovadora, pois alguns perguntaram se eu iria dar continuidade nas outras aulas e outros ainda queriam saber se nos próximos exercícios apareceriam triângulos com a soma maior que 180°. Isso mostra que o aluno não está com a cabeça fechada para aprender novas Geometrias.

Figura 51 – Quadrado na esfera

Fonte: Própria Autoria

Figura 52 –Triângulo na esfera

Fonte: Própria Autoria

4.3 Oficina - Caça Pokémon

O caça pokemón será um jogo exposto em uma feira cultural que terá como base o plano cartesiano, os conceitos da geometria do taxi e o objetivo é o mesmo do aplicativo Pokémon Go. Todo o funcionamento e lógica do jogo serão explicadas e detalhadas mais a frente, antes será apresentado todo trabalho feito para a realização da oficina.

Fiz o convite para seis alunos que cursam o primeiro ano do ensino médio que viessem assistir uma aula extra que abordaria a Geometria do Taxi. A aula foi fornecida em horário contrário ao obrigatório por eles, no caso no período vespertino. Contei com a presença dos seis alunos convidados e tivemos um encontro com duração de 1 hora e 40 minutos.

Apresentei a eles um pouco da história, definição, conceitos e métricas da Geometria do Táxi. Utilizei do plano cartesiano para demonstrar a diferença entre distâncias euclidianas e distâncias taxistas. A escolha de alunos do primeiro colegial deve-se a eles já serem capazes de trabalhar com cálculos modulares. Para dar mais um exemplo, mostrei a eles um vídeo bastante autoexplicativo sobre a nova Geometria. Como eram poucos alunos e estavam em número par, pedi que em duplas eles marcassem pontos no plano cartesiano e que desafiassem o colega a traçar a menor distância possível entre eles de acordo com os novos conceitos aprendidos.

A aula foi bastante dinâmica e satisfatória, no final dela frisei que o meu objetivo era mostrar a eles que a Matemática pode sim se desenvolver mais, se inovar e se mostrar de outras maneiras. E que são vários os motivos que levam os educadores matemáticos a proporem o ensino da Geometria do Táxi nas escolas. Inicialmente, é importante mencionar que, conforme o ensino da Matemática deve estar voltado à formação do cidadão, o qual, sabidamente, deveria utilizar cada vez mais os conceitos matemáticos em sua rotina. Nesta direção, a Geometria do Táxi pode ser apresentada, com a intenção de se integrar a Matemática ao cotidiano do aluno, pois esta se apresenta em todos os lugares, não podendo, portanto, deixar de ser encontrada no espaço das "ruas". Desta forma, confrontado com esta nova Geometria, o aluno pode ser levado a perceber que existem outras Geometrias além da Euclidiana, possibilitando que tenha despertada a sua curiosidade para novos ambientes matemáticos.

Ao fim da aula, fiz um novo convite aos alunos. Perguntei se estavam dispostos a construírem um jogo que seria exposto da Feira Cultural da escola deles, onde seria abordado os fundamentos da Geometria do Táxi para que pudéssemos mostrar não só os alunos, mas todo o púbico que também estaria presente no dia e interessasse em aprender. Com o convite aceito combinamos de nos encontrar na próxima semana para a construção do Caça Pokemón.

Para a construção do painel, foi necessárias várias matérias específicas como:

-Uma cartolina com uma pequena introdução a Geometria do Táxi.
-Um painel de papelão que foi pintado.
-Fita isolante para a construção dos eixos do Plano Cartesiano.
-Taxas que representavam os pontos do plano Cartesiano.
-Figuras coloridas com alguns pokémons conhecidos.
-Barbantes de cores diferentes usados no objetivo do jogo.

Eu levei todo o material necessário no dia combinado e expliquei a cada um deles o que cada um deveria fazer.

Segue abaixo imagens do dia do trabalho:

Figura 53 – Cartolina com pequena itrodução a Geometria do Táxi

Figura 54 – Peças do Jogo

Figura 55 – Construção do Plano (1)

Na primeira imagem o aluno marca a lápis os pontos do plano e na segunda imagem temos uma aluno fixando as taxas e dando identidade ao jogo.

Figura 56 – Construção do Plano (2)

Antes de explicar como o jogo Caça Pokémon funciona, é importante saber sobre o aplicativo Pokémon Go para quem não o conhece, pois foi a partir dele que que surgiu a ideia de montar o tabuleiro embasado com as regras da Geometria do Taxi.

Pokémon GO é um jogo eletrônico free-to-play de realidade aumentada voltado para smartphones. Foi desenvolvido por uma colaboração entre a Niantic, Inc., a Nintendo e a The Pokémon Company para as plataformas iOS e Android. O jogo foi lançado em julho de 2016 em alguns países do mundo. Fazendo uso do GPS e câmera de dispositivos compatíveis, o jogo permite aos jogadores capturar, batalhar, e treinar criaturas virtuais, chamadas Pokémon, que aparecem nas telas de dispositivos como se fossem no mundo real.

Ao jogar Pokémon Go, o usuário interage com um mapa semelhante ao do Google Maps. O jogador se localiza e procura Pokémon por meio desse mapa. À medida que ele se desloca, o aplicativo vibra para avisar sobre a presença dessas criaturinhas virtuais pelo caminho. Ao tocar a tela do smartphone é possível visualizar o Pokemón no mesmo local onde o jogador está, pois o jogo usa a câmera do próprio aparelho para projetar no ambiente uma imagem que se assemelha muito à realidade virtual. Para capturar o monstrinho, basta utilizar uma Pokebola. Daí em diante, além de tentar pegar todos os mais de 150 Pokémon, ao atingir o nível 5 do jogo é possível participar de batalhas com outros usuários e dominar os diversos ginásios espalhados pela cidade. Além dos campos de batalhas e centros de treinamento, existem pontos específicos onde é possível coletar itens e Pokebolas. Esses locais geralmente são pontos muito conhecidos na cidade (museus, monumentos, entre outros).

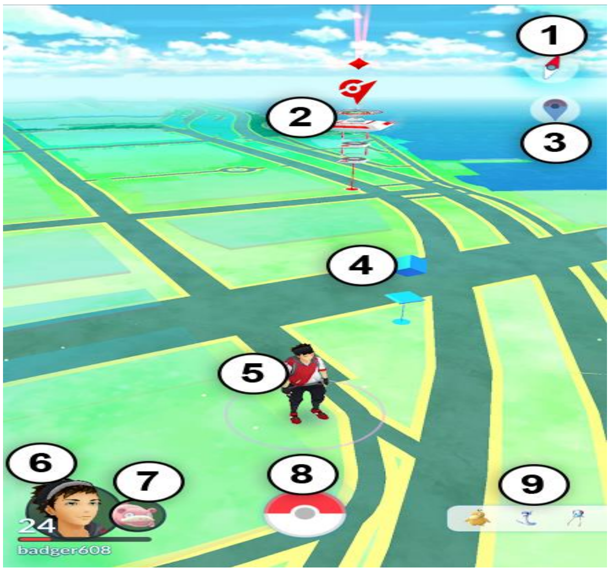

Figura 57 – Aplicativo Pokémon Go na tela do celular com o jogador ativo

A ideia foi jogar no plano o que é feito no espaço e juntar o aplicativo, as métricas taxistas e um grande tabuleiro para a Amostra Cutural.Com o plano cartesiano traçado no tabuleiro, as taxas rosas representavam os quadrados proporcionando uma imagem dos quarteirões perfeitos de uma “cidade ideial” que remete a geometria taxista.

Foram colocados quatro pokémons diferentes (escolhemos os mais conhecidos por uma questão de chamar mais atenção). Cada um deles foi colocado em um quadrante diferente e para ele ficar preso foi usado uma taxa preta. Em um ponto diferente da origem, prendemos dois pedaços de barbantes de cores diferentes e de comprimentos congruentes.

O tabuleiro só poderia ser jogado com duas pessoas ao mesmo tempo. O objetivo era bastante simples, obedecendo as métricas taxistas, os dois jogadores tinham que chegar exatamente até a taxa preta do mesmo Pokémon escolhido pelo caminho mais curto possível. Quando os dois concluíam seus caminhos, bastava ver em qual dos barbantes havia sobrado o maior comprimento, pois esse então tinha encontrado o menor caminho.

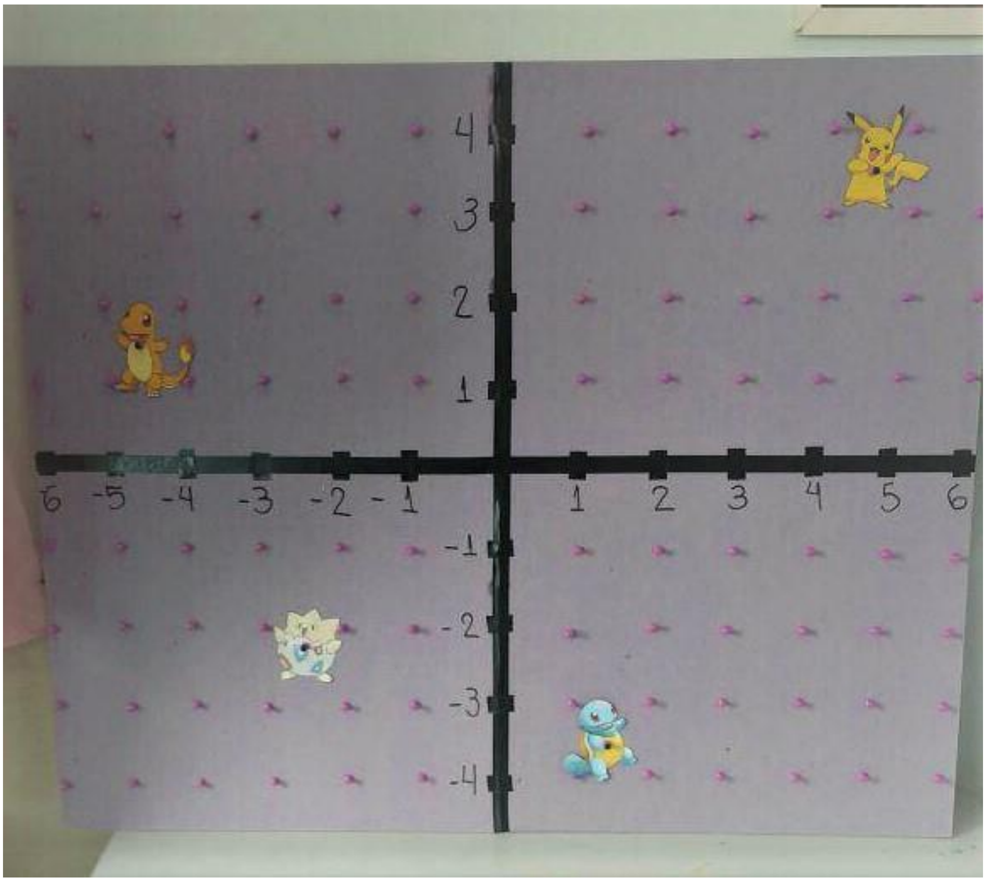

Figura 58 – Painel Caça Pokémon

4.3.1. Dia da Oficina

A feira Cultural ocorreu no dia 8 de outubro de 2017 no colégio Rembrandt Coc. O objetivo do encontro é de motivarmos os alunos por meio de atividades extracurriculares, despertando o interesse em aprender e participar de novas atividades, diferenciadas do dia a dia da sala de aula. É preciso oferecer oportunidades aos nossos jovens, e a Feira Cultural teve como meta a socialização dos educandos e suas famílias. Vimos, por meio dessas atividades, um interesse incomum na produção dos trabalhos. Os alunos compareciam, fora do período de aulas, para pesquisar, montar murais, fazer tudo aquilo que era necessário sempre com o auxílio de um professor. A organização dessas atividades foi iniciada depois das férias de julho, foram desenvolvidos cartazes, maquetes, curiosidades, atividades práticas, elaborados alguns pratos típicos de cultura mexicana e nordestina, bem como tivemos a apresentação de dança, coral e banda. Cada aluno e professor deu um pouco de si, contribuindo com um belo dia de aprendizagem e alegria.

O jogo Caça Pokémon foi colocado na sala destinada aos trabalhos de Matemática, juntamente com outros trabalhos meus e de outros professores. A feira teve início às 15h e encerramento às 20h, durante esse período os alunos que ajudaram na construção do jogo, fizeram um revezamento de horário. Desta maneira sempre tinha alguém ao lado para auxiliar o pais, alunos e amigos que tinham curiosidade em jogar. Ao lado do trabalho também deixei exposto o cartaz, com uma pequena introdução a Geometria do Táxi.

Todos os alunos que contribuíram com a realização da oficina estavam muito bem preparados para explicar o jogo e também sobre o que era a Geometria do Táxi. Grande parte do período eu também fiquei na sala com eles, mas não precisei intervir em nenhum momento para explicar ou corrigir algo exposto por eles.

Durante o tempo que eu permaneci ao lado do jogo, notei que a maioria dos interessados eram crianças, talvez pelo pokemón ou pela espontaneidade que elas tem naturalmente, contudo no dia houve uma média de 350 expectadores na feira. E por mais que a maioria deles não jogassem, muitas pessoas leram o cartaz explicativo e perguntavam como o jogo funcionava e se a Geometria Taxista existia ou era algo inventado pelos alunos.

Segue abaixo imagem de crianças jogando o Caça Pokémon:

Figura 59 – Público da Feira Cultural

Como a feira ocorreu em uma sexta-feira, eu e meus alunos não tivemos tempo para nos reunirmos e conversarmos naquela semana. Quando tivemos a oportunidade, agradeci a todos pelo trabalho bem executado e parabenizei cada um por todas as etapas concluídas. Tive um retorno muito positivo dos seis alunos, todos eles tiveram a mesma percepção que a minha, isto é, ressaltaram que a maioria das pessoas que se interessaram eram crianças ou adolescentes, que poucos adultos deram oportunidade de brincar ou ouvir um pouco sobre a Geometria.

CONCLUSÃO

Vamos relatar algumas conclusões feitas separadamente e sobre as atividades realizadas.

Tratando da Atividade Geometria do Táxi – Polígonos e Malha Quadriculada, que foi trabalhada com alunos da escola estadual, ao analisarmos a atividades realizadas pelos alunos, individualmente, verificamos que o resultado foi bastante satisfatório. Não somente pela finalidade da proposta que foi cumprida por eles, mas principalmente pela compreensão apresentada em sala de aula. Durante o processo, os alunos participaram com interesse, demonstraram ter compreendido que a Geometria do Táxi é aplicável em uma situação que faz parte do seu cotidiano, ou seja, uma situação real de suas vidas, por exemplo, o deslocamento diário de suas residências para a escola. Portanto, quando a geometria já estava bastante clara para eles, não foi difícil para a grande maioria, traçar os polígonos desejados na malha quadriculada usando as métricas taxistas.

Quanto à Atividade Geometria Esférica – Um novo campo de desenho, foi melhor do que esperado. Talvez por eles já trabalharem com muitos aspectos da Geometria Esférica na disciplina de Geografia, tornou a atividade muito mais produtiva. O maior objetivo que foi alcançado pelos alunos, no estudo da Geometria Esférica, é que eles ampliem seus conhecimentos geométricos, enriquecendo suas competências e habilidades para além do que se faz tradicionalmente. É interessante que os alunos reflitam mais em suas aulas de geometria, que eles podem e devem enxergar qualquer tipo de desenho, além da forma plana. E, principalmente, melhorar o ensino e a aprendizagem em sala de aula, promovendo discussões com os alunos sobre que tipo de geometria que melhor se aplica para explicar a nossa realidade.

A oficina realizada por alunos pré-escolhidos do ensino do ensino médio foi também muito bem aproveitada. A ideia de apresentar o jogo em uma feira cultural é alcançar um grande número de pessoas em um curto período de tempo. Entretanto, o jogo pode ser muito bem adaptado para um tabuleiro que caiba na carteira do aluno e ser trabalhado em sala de aula. Com cuidado e auxílio, os alunos podem até ajudar na sua construção, o que já vai lhe proporcionando noção e curiosidade no assunto que será trabalhado. Claro que o trabalho do professor será maior do que o do cotidiano, porém a inovação na educação é um assunto tratado nacionalmente, e muitas vezes um simples jogo de tabuleiro, um novo assunto, uma nova visão do espaço e da matemática podem propiciar isso.

De maneira geral, este trabalho também possibilita analisar a matemática sobre outra perspectiva, observar que essa disciplina possui outros aspectos, características e propriedades que não estamos habituados. E com o intuito de divulgar a Geometria do Táxi e a Geometria Esférica, acredito que este trabalho pode beneficiar professores e futuros professores de matemática para que tenham contato com outro tipo de geometria que não seja a Geometria Euclidiana, tradicionalmente ensinada nas escolas.

Ensinar Matemática não é uma tarefa simples, acredito que o professor, durante sua prática, pode estabelecer conexões, desde que esteja atento ao contexto escolar, inserindo conteúdos e práticas que não estejam estabelecidas nas diretrizes, indo além do currículo básico quando julgue o tema importante para aquele assunto. Por fim, é incentivado que outras atividades escolares com conteúdo embasados nas geometrias não euclidianas sejam mais frequentes em sala de aula, buscando a evolução da matemática e a proximidade dela com finalidades no nosso cotidiano, tornando assim as aulas de matemática mais dinâmicas e prazerosas.

Referências

ADAMES, M. R. **Geometria Esférica**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2005. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/96500/Marcio_Rostirolla_Adames.pdf;jsessionid=5C35148052B25D58AAA6D6FC155C2A31?sequence=1. Acesso em 23 de agosto de 2017.

ANDRADE, F. C; SARMENTO, I. L; LOPES, L. M. L. **A geometria do taxista e as tecnologias digitais no proeja guia de turismo**. Campina Grande, 2016. IX Encontro Paraibano de Educação Matemática, 2016. **Anais**. 13 p.

ANTUNES, M.C. **Uma posição inserção das geometrias não euclidianas no ensino médio.** Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2009. Disponível em:< https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/18218/000728046.pdf> Acesso: em 04 de Jan de 2018.

ATIQUE, R. G. W. **Geometria.** 2007. Universidade de São Paulo, s.d. Disponível em:< http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/rwik/geometria/apostila.pdf>. Acesso em: 22 de Nov de 2017.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em:< http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/images/Gestar%20II_Mat_TP5.pdf>Acesso em 25 de setembro de 2017.

BICUDO, I. **Os elementos Euclide.** São Paulo: Unesp, 2009. 593p.

CÉSAR, S. M. C; GAZIRE, E. S. **Minicurso de Geometria Táxi.** Universidade Católica de Minas Gerais. Universidade Católica de Minas Gerais. Pós-graduação em ensino de Ciências e Matemática. Belo Horizonte, 2010. Disponível em:<http://www1.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20150306113049.pdf. Acesso em: 09 de Ago de 2017.

CRUZ, D. G.; SANTOS, C. H. Algumas diferenças entre a geometria euclidiana e as geometrias não-euclidianas – hiperbólica e elíptica – a serem abordadas nas séries do ensino médio. Paraná, 2009. Disponível em: <http://www.unicentro.br/editora/anais/xeprem/CC/29.pdf >

DEVITO, A.; FREITAS, A.K.; PEREIRA, K.C. Geometrias Não Euclidianas. Trabalho de Conclusão de disciplina, MA24, IMEECC, Universidade Estadual de Campinas, 2006. Disponível em <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/nao_euclidiana>. Acesso em 13 de agosto de 2017.

Distância entre dois pontos no espaço. S.D Disponível em:< http://alunosonline.uol.com.br/matematica/distancia-entre-dois-pontos-no-espaco.html> Acesso em: 01 de Jul de 2017.

DOLCE, O; POMPEU, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana. 2013. São Paulo: Atual. 37 páginas.

Fundação do Centro Universitário da Zona Oeste- Rio de Janeiro, Brasil. **Geometria Plana.** S.D. Disponível em:< http://www.uezo.rj.gov.br/proext/matematicaGeometria.pdf> Acesso em: 13 Mar. 2017.

FUZZO, R. A; REZENDE, V; SANTOS, T. S. **Geometria de Táxi: A menor distância entre dois pontos nem sempre é como pensamos**. Núcleo de pesquisa Multidisciplinar. Encontro de Produção Científica e Tecnológica. 2010, Campo Morão. **Anais.** Disponível em:<http://www.fecilcam.br/nupem/anais_v_epct/PDF/ciencias_exatas/10_FUZZO_REZENDE_SANTOS.pdf>. Acesso em: 02 de Fev de 2017.

LIMA, R. R. Geometria do Taxista. Campo Mourão, 2012. Universidade Tecnológica do Paraná. Disponível em:< http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/479/1/CM_ESPMAT_II_2012_07.pdf> Acesso em: 05 de Mar de 2017.

LOIOLA, C. A. G. Um Taxi para Euclides: **Uma Geometria Não Euclidiana na Educação Básica.** Rio de Janeiro. PUC- Rio, 2014.

Medeiros, J. C. **Fundamentos da Geometria**, 2015. Disponível em:< http://educacao.globo.com/matematica/assunto/geometria-plana/fundamentos-da-geometria.html> Acesso em: 20 de Outubro de 2017.

MIRANDA, D. F; BARROSO, L. C; ABREU, J. F. **Geometria Táxi: Uma geometria não- euclidiana descomplicada.** PUC- Minas, 2005.
MINKOWSKI, H. **Taxicab Geometry.** s.d. Disponível em:< http://taxicabgeometry.altervista.org/angles_trig/angles.html> Acesso em: 03 de Jan de 2018.

NETO, I. F. **Um novo conceito de distância: a distância do táxi e aplicações**. São José do Rio Preto, 2013. (Dissertação para obtenção do título de mestre em Matemática).

NOGUEIRA, L. S; PEÇANHA, V; KILHIAN, K. **Demonstração da fórmula de cálculo da área de uma superfície esférica: uma construção dos elementos de área que simplifica as operações com integral única em coordenadas polares**. Departamento de MAtemática da UFV.
S.D. Disponível em:<http://www2.unemat.br/eugenio/arquivos/esfera.pdf>. Acesso em: 02 de fevereiro de 2018.

SANTANA, A.L. Euclides. S.D. Info Escola. Disponível em:< https://www.infoescola.com/biografias/euclides/>. Acesso em: 10 de Set de 2017.

SANTOS, A. R. S; VIGLIONI, H. H. B. **Geometria euclidiana.** São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011.

SANTOS, W. T. **A história do quinto postulado, as geometrias não euclidianas e suas implicações no pensamento científico**. Rio Grande. 2016. Universidade Federal do Rio Grande- FURG.

SANTOS, W. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática da UFRJ. S.D. Disponível em:<http://www.im.ufrj.br/walcy/Geometria%20Euclideana%20Plana.pdf> Acesso em: 19 de Agosto de 2017.

SÃO PAULO, Secretaria de Estado da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: matemática e suas tecnologias. São Paulo: SEE, 2010.Disponível em <http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf>. Acesso em 10 de julho de 2017.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **"Distância entre dois pontos no espaço",** Brasil Escola. S.D. Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/distancia-entre-dois-pontos-no-espaco.htm>. Acesso em 02 Junho de 2017.

SILVA, W. D; LIBARDI, A. K. M. **Uma introdução à Geometria Esférica.** Rio Claro: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho; Instituto de Geociências e Ciências Exatas; 2015.

SOUZA, G. F. **Resolução de Problemas Envolvendo Cálculo de áreas de Figuras Planas via Polígonos Equidecomponíveis**. Universidade Federal de Goiás, Catalão. 2016. Disponível em:< https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/6242/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Gilsimar%20Francisco%20de%20Souza%20-%202016.pdf>. Acesso em: 05 de Mar de 2017.

SOUZA, H. M; LEIVAS, J. C P. Geometria do Taxi: **Uma investigação com estudantes do ensino médio**. São Paulo, 2016. XII Encontro Nacional de Educação Matemática, Jul 2017. **Anais.** 12p.

THOMAS, M. L.; FRANCO, V. S. Geometria Não-Euclidiana/Geometria Esférica. Disponível em: <https://issuu.com/alceub.c.filho/docs/233-4> Acesso em: 19 de agosto de 2017.

Universidade Federal do Rio de Janeiro. Cálculo Diferencial e Integral II- Espaço Tridimensional Capítulo 3. S.D. Disponível em: < http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo2/capitulo3_espaco.pdf> Acesso em: 01 de Jul de 2017.

Universidade Federal de Sergipe. Geometria Euclidiana Plana- Axiomas e Medições- Aula 2. S.D. Disponível em: <http://www.cesadufs.com.br/ORBI/public/uploadCatalago/15473716022012Geometria_Eucliadiana_Plana_Aula_2.pdf> Acesso em: 19 de Agosto de 2017.

UESU, D. Universidade Federal Fluminense. Congruência de Triângulos- Aula 2. S.D. Disponível em:<http://www.professores.uff.br/dirceuesu/wp-content/uploads/sites/38/2017/07/GBaula2.pdf>. Acesso em: 20 de Dezembro de 2017.

ZANELLA, I. A. Geometria esférica: uma proposta de atividades com aplicações. Londrina-PR, 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina-PR, 2013. 131p.