

Andréa Ribeiro Fernandes Simonini

Mosaicos geométricos: Estudo de ângulos e  
simetrias.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

DATA:14/12/2017

Andréa Ribeiro Fernandes Simonini

Mosaicos geométricos: Estudo de ângulos e simetrias.

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Orientador: Prof. Geraldo de Oliveira Filho

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF  
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

DATA:14/12/2017

## FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do CCT / UENF

31/2018

Simonini, Andréa Ribeiro Fernandes

Mosaicos geométricos : estudo de ângulos e simetrias / Andréa Ribeiro Fernandes Simonini. – Campos dos Goytacazes, 2017.

100 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2017.

Orientador: Geraldo de Oliveira Filho.

Área de concentração: Matemática.

Bibliografia: f. 75-77.

1. GEOMETRIA NA ARTE 2. ÂNGULO INTERNO 3. SIMETRIA (MATEMÁTICA) 4. ESCHER, MAURITS CORNELIS (1898-1972) 5. MATEMÁTICA (ENSINO FUNDAMENTAL) – ESTUDO E ENSINO I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 372.7

Andréa Ribeiro Fernandes Simonini

Mosaicos geométricos: Estudo de ângulos e simetrias.

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 14 de dezembro de 2017.



---

**Profª. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto**  
D.Sc. - IFFluminense



---

**Prof. Nelson Machado Barbosa**  
D.Sc. - UENF



---

**Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre**  
D.Sc. - UENF



---

**Prof. Geraldo de Oliveira Filho**  
D.Sc. - UENF  
(ORIENTADOR)

*À minha irmã Tatiana e ao meu marido Hércules que me deram grande suporte.*

*Aos meus filhos Virgínia e João Pedro, meus tesouros.*

*À minha mãe Eliane e minha sogra Sônia.*

# Agradecimentos

Aos meus familiares que me apoiaram durante toda essa jornada.

Aos meus colegas de profissão que me ajudaram a enfrentar os desafios.

Aos meus diretores de escola pela compreensão nos momentos mais difíceis.

À minha especial colega de trabalho Evelise pela grande ajuda.

Ao coordenador Oscar, sempre disposto a ajudar quando muitas vezes foi solicitado.

Aos professores de mestrado por todo conhecimento adquirido.

Aos meus colegas de mestrado por todas as dificuldades e superações que passamos nesta jornada.

Ao professor e orientador Geraldo que orientou o meu trabalho de maneira clara, objetiva e eficiente.

*"Professor não é o que ensina,  
mas o que desperta no aluno a  
vontade de aprender."  
Jean Piaget*

# Resumo

Vários estudos e pesquisas de educadores matemáticos abordam sobre o ensino da Geometria enfatizando a importância do uso de materiais concretos durante o processo de aprendizagem. Nesse sentido, o presente trabalho tem por objetivo relatar a experiência realizada com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental sobre o estudo de ângulos e os tipos de simetria (reflexão, rotação e translação). No decorrer das aulas, os alunos por meio de atividades lúdicas como tangram, e utilizando-se de materiais concretos acessíveis puderam construir e formalizar os conceitos matemáticos em questão. À cada atividade realizada, a confiança entre os alunos foi crescente e aproveitando-se desse fato, outras atividades baseadas em algumas obras de Escher foram inseridas tornando, assim, o estudo de simetria mais interessante e enriquecedor.

**Palavras-chave:** Artes, Ângulos Internos, Simetrias, Escher



# Abstract

Several studies and researches by mathematics educators address the issue of teaching geometry, highlighting the importance of the use of concrete material during the process of learning. In this sense, the current work aims at reporting the experience carried on with eighth grade elementary students, about the study of angles and types of symmetry (reflection, rotation and translation). During the lessons, students were able to build and consolidate the given mathematical concepts through the use of entertaining activities such as tangram and the use of accessible concrete material. After each activity, the confidence among students increased and, by seizing this opportunity, other activities based on some works by Escher were proposed, thus making the study of symmetry more interesting and enriching.

**Key-words:** Art, Internal Angles , Symmetries, Escher

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Igreja de Ravena . . . . .	23
Figura 2 – Basílica de Santa Sofia . . . . .	23
Figura 3 – Basílica de São Marcos . . . . .	24
Figura 4 – Palácio de Alhambra . . . . .	24
Figura 5 – Detalhes do interior do Palácio de Alhambra . . . . .	25
Figura 6 – Escher,M.C . . . . .	25
Figura 7 – Algumas obras famosas de Escher:à esquerda,Two Birds, de 1938 e à direita, Lizard, de 1942 . . . . .	26
Figura 8 – Calçadão de Copacabana . . . . .	26
Figura 9 – Pentágonos regulares . . . . .	28
Figura 10 – Arranjos com as seguintes configurações:(4,4,4,4),(6,6,6) e (3,3,3,3,3)	28
Figura 11 – Arranjo de um triângulo equilátero,um decágono e um pentadecágono .	31
Figura 12 – Arranjo de dois pentágonos e um decágono . . . . .	32
Figura 13 – À esquerda, arranjo (3,3,6,6) e à direita dois arranjos com configurações diferentes (3,3,6,6) e (3,3,3,?) . . . . .	32
Figura 14 – À esquerda, (3,3,4,12); no centro, (3,4,3,12) e à direita (3,4,4,6) . . . . .	33
Figura 15 – Três tipos de mosaicos regulares . . . . .	33
Figura 16 – Oito tipos de mosaicos semi regulares . . . . .	34
Figura 17 – Imagens que retratam alguma regularidade . . . . .	35
Figura 18 – Imagens que expressam a simetria na <b>natureza</b> . . . . .	36
Figura 19 – Imagens que expressam a simetria nas <b>obras de arte</b> . . . . .	36
Figura 20 – Imagens que retratam a simetria na <b>arquitetura</b> . . . . .	36
Figura 21 – Reflexão de um polígono em relação ao eixo de simetria r . . . . .	37
Figura 22 – (a): três eixos de simetria, (b): quatro eixos de simetria e (c): cinco eixos de simetria . . . . .	37
Figura 23 – Figura <b>A</b> e a sua imagem <b>A'</b> . . . . .	38
Figura 24 – Posições do ponto <b>O</b> . . . . .	38
Figura 25 – Polígonos com centro de rotação no ponto <b>O</b> . . . . .	39
Figura 26 – Deslocamentos da figura original . . . . .	39
Figura 27 – Movimento de translação . . . . .	39
Figura 28 – Reflexão e em seguida, o movimento de translação da figura original . .	40

Figura 29 – À esquerda, caderno de uma aluna sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo e à direita, a atividade sobre os ângulos internos de um polígono regular	50
Figura 30 – Kit de polígonos regulares	51
Figura 31 – Atividade realizada pelos alunos utilizando os polígonos	53
Figura 32 – Combinações de polígonos que não se expandem pelo plano	54
Figura 33 – Combinações de polígonos que se expandem pelo plano	54
Figura 34 – Primeira atividade de simetria de reflexão realizada pelos alunos	55
Figura 35 – Atividades 2, 3 e 4 corretas e a atividade 1 apresentando erros em relação aos eixos vertical e horizontal	56
Figura 36 – Outras atividades que apresentaram erros	57
Figura 37 – Atividades realizadas pelos alunos da turma 802, sem erros	57
Figura 38 – Outras atividades realizadas pela turma 801, sem erros	58
Figura 39 – Atividades com erros, a partir da figura original	58
Figura 40 – Alunos na confecção dos moldes	59
Figura 41 – Os moldes preparados pelos alunos	60
Figura 42 – Mandalas feitas pela turma 801	60
Figura 43 – Mandalas feitas pela turma 802	61
Figura 44 – Trabalhos de simetria de translação	62
Figura 45 – Outros trabalhos realizados pelos alunos sobre simetria de translação	62
Figura 46 – Malhas com as configurações coloridas pelos alunos	63
Figura 47 – Passos para a construção do modelo 1	65
Figura 48 – Pavimentação formada pelas translações dos moldes	65
Figura 49 – Passos para a construção do molde a partir do hexágono	66
Figura 50 – Pavimentação formada pelas rotações dos moldes	67
Figura 51 – Do lado esquerdo da figura, a construção do molde e do lado direito, a pavimentação construída	68
Figura 52 – Do lado esquerdo da figura, erros na colagem e a posição das "carinhas" impossibilitando a rotação e do lado direito, trabalho incompleto em relação ao número de peças	68
Figura 53 – Outros trabalhos a partir do hexágono e triângulo*, respectivamente, utilizando-se de rotações	68
Figura 54 – Figuras formadas a partir do quadrado, utilizando-se de translações	69
Figura 55 – Figuras formadas a partir do triângulo, utilizando-se de translações, rotações e reflexões	69

# Lista de quadros

Quadro 1 – Medidas dos ângulos internos, em graus . . . . .	27
Quadro 2 – Arranjos de 3 polígonos em torno de um vértice . . . . .	30
Quadro 3 – Arranjos de 4 polígonos em torno de um vértice . . . . .	30
Quadro 4 – Arranjos de 5 polígonos em torno de um vértice . . . . .	31
Quadro 5 – Arranjo de 6 polígonos em torno de um vértice . . . . .	31
Quadro 6 – Conteúdos trabalhados na primeira etapa . . . . .	43
Quadro 7 – Conteúdos trabalhados na segunda etapa . . . . .	43
Quadro 8 – Perguntas feitas aos alunos . . . . .	52
Quadro 9 – <b>Modelo 1</b> : Construção a partir do quadrado . . . . .	64
Quadro 10 – <b>Modelo 2</b> : Construção a partir do hexágono . . . . .	66
Quadro 11 – <b>Modelo3</b> : Construção a partir do triângulo . . . . .	67
Quadro 12 – Total de alunos/Alunos que fizeram a avaliação . . . . .	70
Quadro 13 – Relação entre os acertos das questões e o número de alunos de cada turma . . . . .	70

# Sumário

Introdução . . . . .	13
<b>1 O ENSINO DA MATEMÁTICA NAS ÚLTIMAS DÉCADAS</b>	<b>16</b>
<b>2 MOSAICOS . . . . .</b>	<b>22</b>
2.1 Significado . . . . .	22
2.2 Um pouco da história dos mosaicos: Arte presente desde a Antiguidade até os dias de hoje . . . . .	22
2.3 Tipos de mosaicos . . . . .	27
<b>3 SIMETRIA . . . . .</b>	<b>35</b>
3.1 Significado . . . . .	35
3.2 Tipos de simetria . . . . .	37
3.2.1 Simetria por reflexão . . . . .	37
3.2.2 Simetria por rotação . . . . .	38
3.2.3 Simetria de translação . . . . .	39
3.2.4 Reflexão deslizante . . . . .	40
<b>4 METODOLOGIA E O USO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS</b>	<b>41</b>
4.1 METODOLOGIA . . . . .	41
4.1.1 Quanto à natureza da Pesquisa . . . . .	41
4.1.2 Campo da Pesquisa . . . . .	42
4.1.3 Sujeitos da Pesquisa . . . . .	42
4.1.4 Instrumentos da Pesquisa e Procedimentos para a análise dos dados . . . . .	43
4.2 MATERIAIS MANIPULÁVEIS COMO RECURSO DIDÁTICO . . . . .	44
4.2.1 Materiais manipuláveis no ensino da Geometria . . . . .	46
<b>5 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA . . . . .</b>	<b>48</b>
5.1 Trabalhando com polígonos . . . . .	48
5.1.1 Aula 1 . . . . .	48
5.1.2 Aulas 2 e 3 . . . . .	48
5.1.3 Aulas 4, 5 e 6 . . . . .	49
5.1.4 Aulas 7 a 12 . . . . .	50
5.2 Trabalhando com simetrias . . . . .	55
5.2.1 Aulas 13, 14 e 15 . . . . .	55
5.2.2 Aulas 16 a 20 . . . . .	59

5.2.3	Aula 21 a 23 . . . . .	61
5.3	Trabalhando com polígonos e simetria . . . . .	63
5.4	Trabalhando simetria com Escher . . . . .	63
5.4.1	Desvendando as técnicas . . . . .	64
5.5	Avaliação . . . . .	70
5.5.1	Dados da avaliação . . . . .	70
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	72
REFERÊNCIAS . . . . .		75
APÊNDICES . . . . .		78
APÊNDICE A – ATIVIDADE SOBRE POLÍGONOS . . . . .		79
A.1	Revisão sobre polígonos . . . . .	80
A.2	Atividade sobre polígonos . . . . .	81
APÊNDICE B – ATIVIDADE SOBRE ÂNGULOS . . . . .		82
B.1	Revisão sobre ângulos . . . . .	83
B.2	Atividade sobre ângulos . . . . .	84
B.3	Soma dos ângulos internos de um polígono regular . . . . .	85
B.4	Medidas dos ângulos internos de um polígono regular . . . . .	86
APÊNDICE C – ATIVIDADE SOBRE SIMETRIA DE REFLEXÃO . . . . .		87
C.1	Atividade sobre simetria de reflexão . . . . .	88
APÊNDICE D – ATIVIDADE SOBRE SIMETRIA DE ROTAÇÃO . . . . .		90
D.1	Atividade sobre simetria de rotação . . . . .	91
APÊNDICE E – ATIVIDADE SOBRE SIMETRIA DE TRANSLAÇÃO . . . . .		92
E.1	Atividade sobre simetria de translação . . . . .	93
APÊNDICE F – ATIVIDADE SOBRE ESCHER . . . . .		95
F.1	Atividade sobre Escher . . . . .	96
APÊNDICE G – AVALIAÇÃO . . . . .		97
G.1	Avaliação . . . . .	98

# Introdução

O trabalho realizado nesta pesquisa envolveu o estudo dos ângulos e simetrias no Ensino Fundamental, mais precisamente com as turmas do oitavo ano. Para o estudo sobre simetrias, tema principal dessa dissertação, um longo caminho foi desenvolvido até chegar a sua abordagem. Por meio da construção dos mosaicos geométricos, utilizando-se apenas polígonos regulares foi feita uma breve revisão sobre polígonos e os tipos de ângulos. Tornou-se necessário, também, o estudo da soma dos ângulos internos de um polígono regular, e finalmente, o cálculo dos ângulos internos dos principais polígonos regulares.

Deste modo, esta preparação tornou o tema principal mais enriquecedor para o aluno, ao resgatar os conceitos mencionados acima de grande importância no ensino da Geometria bem como interligá-los com o estudo de simetrias, realizando uma conexão entre vários assuntos. Esse fato é mencionado nos PCNs (BRASIL, 1997, p.19)

o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.

Um tema, como simetria, oferece ao professor recursos didáticos acessíveis e simples que podem ser explorados nas atividades em sala de aula. Logo, proporciona uma aprendizagem a partir das situações cotidianas dos alunos levando uma aproximação da Matemática com o mundo físico do aluno. Além disso, segundo os PCNs (BRASIL, 1997), se o trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, etc permitirá ao aluno estabelecer conexões não somente com a Matemática mas com outras áreas do conhecimento.

Assim, diante das observações mencionadas acima, e pelo fato, da pesquisadora ao longo do seu trabalho como professora constatar algumas dificuldades apresentadas pelos colegas de profissão ao abordar alguns conteúdos relacionados a Geometria para seus alunos, surge o interesse em desenvolver o tema desta pesquisa tendo como principal objetivo propor atividades sobre ângulos e simetrias de caráter mais lúdico com a participação ativa dos alunos no processo de aprendizagem.

Para isso, nas etapas do desenvolvimento do tema desta pesquisa foram apresentados os seguintes objetivos específicos:

- Explorar os conceitos sobre polígonos, polígonos regulares e ângulos através de atividades escritas e do uso do transferidor
- Obter, inicialmente, o cálculo da soma dos ângulos internos de um polígono regular pela decomposição em triângulos e em seguida, pela fórmula deduzida
- Utilizar os polígonos regulares na construção das configurações envolvendo o estudo dos ângulos internos
- Explorar o conceito de simetria e os tipos de simetria por meio de atividades diversificadas, utilizando materiais simples e acessíveis
- Enriquecer o estudo de simetria através das obras de Escher.

Contudo, antes de desenvolver o tema principal deste trabalho, foi realizado um breve estudo sobre a história do ensino da Matemática nas últimas décadas, especialmente sobre o estudo da Geometria. Nota-se, um ensino de Matemática marcado pela preocupação excessiva com formalizações precoces de conceitos ao enfatizar a linguagem da teoria dos conjuntos carregadas de simbolismos e estruturas algébricas. Este fato, acabou comprometendo o aprendizado do cálculo aritmético e da Geometria por muitos anos (BRASIL, 1998).

Segundo Lorenzato (1995) há inúmeras causas ligadas direta e indiretamente à sala de aula, as quais são responsáveis por este abandono da Geometria por muitos anos. A primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários. E a segunda causa deve-se à exagerada importância dada ao livro didático, que durante anos, em muitos deles a Geometria foi apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica, e em outros a Geometria foi reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico.

No entanto, segundo Lorenzato (1995), há outras causas que embora distantes da sala de aula, contribuíram para caótica situação do ensino da Geometria, dentre elas destaca-se o Movimento da Matemática Moderna que teve como uma de suas propostas a algebrização da Geometria.

Assim, diante dos principais fatos relatados nesta pesquisa, este trabalho propõe, de alguma forma, contribuir na formação pedagógica do professor, tornando-o mais consciente sobre a trajetória do ensino da Matemática em nosso país.

Em alguns trabalhos relacionados ao tema, pode-se perceber algumas semelhanças e diferenças com essa pesquisa, como "Construção de mosaicos inspirados nas obras de



Maurits Cornelis Escher", autoria de [Andrade \(2015\)](#). Seu trabalho foi realizado com alunos do Ensino Médio, e em uma das etapas, seus alunos desenharam os polígonos regulares, por meio de moldes.

Diferentemente de [Andrade \(2015\)](#), este trabalho como foi realizado com alunos do Ensino Fundamental, a construção dos polígonos por meio de moldes acarretaria bastante tempo e a imprecisão nos cortes das figuras feitos pelos alunos poderia levar a conclusões erradas. Diante de tal fato, os alunos receberam um kit de 120 polígonos regulares, ao manipularem as peças chegavam às conclusões.

Em outro trabalho de [Alves \(2014\)](#), sob o título "O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher", o tema foi desenvolvido, de maneira aprofundada, através das obras de Escher, com alunos do Ensino Médio.

Porém, na proposta deste trabalho, as obras de Escher foram um complemento e a sua abordagem foi realizada após a aplicação de outras tarefas, constituindo, assim, como atividades de enriquecimento.

Já o trabalho de [Fabricio \(2016\)](#), tendo, como título "A configuração de polígonos regulares e simetria na construção de mosaicos no sexto ano de Ensino Fundamental" abordou, também, a construção de mosaicos envolvendo apenas alguns tipos de polígonos regulares, porém, limitando-se ao uso da malha para o estudo de simetria.

Para uma melhor compreensão deste trabalho, a pesquisa foi organizada em seis capítulos da seguinte forma:

O Capítulo 1 apresenta uma breve reconstituição histórica do ensino de Geometria no país nas últimas décadas.

O Capítulo 2 refere-se a história dos mosaicos, com ênfase nos mosaicos constituídos por polígonos regulares.

O Capítulo 3 aborda os tipos de simetria: reflexão, translação e rotação.

O Capítulo 4 descreve os aspectos metodológicos desta pesquisa e realiza um estudo sobre o uso de materiais manipuláveis como recurso didático nas aulas de Matemática, especialmente, no ensino da Geometria.

O Capítulo 5 traz toda a preparação e o desenvolvimento do tema deste trabalho realizado com os alunos.

Finalmente, o Capítulo 6 trata-se da Considerações Finais relatando os fatos mais importantes do trabalho realizado, ressaltando as dificuldades e os imprevistos que aconteceram ao longo da execução das atividades.

# Capítulo 1

## O ensino da Matemática nas últimas décadas

Antes de desenvolver o tema desta dissertação, foi feita uma breve pesquisa sobre a situação do ensino da Matemática nas últimas décadas e diante dos fatos pode-se perceber que os conteúdos a serem abordados mudam de acordo com o momento histórico do país e os interesses políticos de cada época, tendo as principais Reformas Educacionais no Brasil seguindo as tendências mundiais. As principais considerações sobre este assunto foram relatadas de maneira breve, uma vez que este estudo é muito complexo e há uma grande variedade de pesquisas voltadas a este tema.

Baseando nos trabalhos de [Miranda \(2003\)](#) e [Gomes \(2007\)](#), esse estudo inicia-se pela primeira Reforma Educacional no país: a Reforma Francisco Campos, em 1920. Antes da Reforma, o ensino secundário (fundamental e complementar) era considerado por Campos, ministro da Educação, como mero curso de passagem para o curso superior e sua preocupação era torná-lo de caráter mais educativo. No campo da Matemática, a pessoa de Euclides Roxo foi o grande responsável pelas mudanças ocorridas, influenciado pelo Movimento Internacional para a modernização do ensino da Matemática o qual já estava ocorrendo na Europa e EUA e aliado às ideias da Escola Nova, defendeu a fusão das disciplinas: Aritmética, Álgebra e Geometria, até então ensinadas isoladamente, em uma única: Matemática.

Segundo [Miranda \(2003\)](#), as instruções pedagógicas que constavam no prefácio do livro de Euclides Roxo deixavam bem claro, que a Matemática deveria visar além do desenvolvimento do espírito e do raciocínio lógico, a outras aptidões ligadas às suas aplicações. Acrescidas a isto, a presença constante das três disciplinas: Aritmética, Álgebra e Geometria mostrava a preocupação em estabelecer a correlação entre elas e para isso, é introduzido o estudo de função, sendo apresentada inicialmente de forma intuitiva e desenvolvida posteriormente, de forma gradual, na forma geométrica e expressa pelas representações gráficas. No campo da Geometria, abandono, em parte, do rígido formalismo

de Euclides com a introdução da ideia de mobilidade de cada figura, por meio do qual, em cada caso particular, torna-se compreensível o caráter geral da Geometria (MIRANDA, 2003).

Quais as conclusões sobre a Reforma Francisco Campos no campo da Matemática?

De acordo com Miranda (2003), a ideia de uma matemática unificada defendida por Euclides Roxo que foi apresentada inicialmente aos professores do Colégio Pedro II gerou grandes polêmicas, pois nem todos os professores aceitaram essa mudança que implicava numa reestruturação profunda nos programas de Matemática, e além disso, os professores que eram especialistas em apenas uma disciplina tiveram dificuldade para trabalhar a Matemática de forma unificada.

Em razão do Golpe de Estado, Euclides Roxo que pretendia implantar aos poucos sua proposta, primeiramente no Colégio Pedro II, diante da implantação obrigatória por parte do Governo viu sua proposta tornar-se oficial já em 1930, com a Reforma Francisco Campos em âmbito nacional, implicando pouco tempo para uma discussão mais ampla e numa preparação adequada aos professores impossibilitando assim, o sucesso do Movimento (MIRANDA, 2003).

Nota-se, porém, que o Movimento da Matemática unificada afetou os cursos regulares de Álgebra e Geometria, sendo abordados os problemas geométricos nos livros de Álgebra e a Trigonometria foi incluída no curso embora contrariasse matemáticos e não-matemáticos. Desse modo, pode-se concluir que o Movimento teve existência longa e influenciou a mudança do currículo matemático das escolas secundárias em todo o país (MIRANDA, 2003).

Contudo, segundo Gomes (2007), ao se fazer uma análise de diversas coleções de livros didáticos desta época conclui-se que os autores, com exceção de Euclides Roxo, pouco levaram em consideração a recomendação específica sobre o enfoque intuitivo e experimental para a apresentação inicial da Geometria.

Prosseguindo o trajeto histórico e tomando como referência principal de Dassie (2001), em 1942, houve uma reorganização da educação brasileira através da Reforma Capanema, muitos a consideram como uma reação à Reforma Campos. No curso secundário foram mantidos os cursos ginásial e colegial, modificando sua duração em relação à Reforma anterior: o primeiro correspondia a 4 anos (anteriormente tinha duração de 5 anos), o Curso Complementar passou a ser denominado Clássico ou Científico e teve a duração alterada de 2 para 3 anos.

Segundo Dassie (2001), em relação a Matemática, os programas possuem uma diferença marcante em relação aos programas da Reforma anterior, pois na Reforma Francisco Campos todas as ideias de Euclides Roxo implementadas no Colégio Pedro II foram acatadas. Em 1942, a elaboração dos programas de todas as disciplinas ficou sob a

responsabilidade de uma comissão e a discussão sobre tal elaboração envolveu pessoas de diferentes forças da sociedade civil e do Estado que não faziam parte da citada comissão.

Em linhas gerais, nos programas de 1942, pode-se destacar que:

- o ensino simultâneo da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, em torno da noção de função não está presente;
- a Geometria intuitiva foi preservada nos primeiros anos do ciclo enquanto a Geometria dedutiva passou a ser dada no terceiro ano;
- a volta da Aritmética teórica;
- permanência das noções de Cálculo e de Função nos programas bem como as noções de Geometria Analítica e Trigonometria.

Deste modo, conclui-se, que algumas ideias defendidas por Roxo apresentadas nos programas desde da Reforma Campos perderam terreno contudo vários pontos foram preservados com uma nova configuração (DASSIE, 2001).

Para Berti (2005), o programa teve um recuo à Matemática Tradicional defendida por alguns professores, como por exemplo, o Pe. Almeida Lisboa.

Também para a Reforma Capanema, a análise de coleções de livros didáticos mostra pouca presença no enfoque intuitivo e com maior destaque para os aspectos formais da Geometria (GOMES, 2007).

A década de 50 foi caracterizada pelo estabelecimento de programas mínimos regulamentados pela Portaria de 1951 elaborados pelos membros do Colégio Pedro II. Segundo Marques (2005), não foram inseridos novos conteúdos, entretanto, ocorreram mudanças na estrutura curricular, tendo como principal objetivo um programa mais simplificado, visando a qualidade e não a quantidade em relação aos conteúdos.

Neste período, o Brasil teve um grande crescimento industrial e populacional. Houve uma expansão contínua da rede escolar, sempre acompanhada da formação insuficiente de professor, tanto numérica quanto qualitativamente.

Até o final dos anos 50 e início dos anos 60, segundo Gomes (2007), baseando-se nos trabalhos de Regina Pavanello (1993) houve no Brasil, a predominância de uma escola secundária voltada às elites socioeconômicas que aspiravam ao Ensino Superior. Os aspectos dedutivos da Geometria não figuravam nas escolas profissionais e integravam somente as práticas pedagógicas das escolas frequentadas pelas elites.

Nos anos 60, o Brasil deixou de ser um país agrícola e recebeu o "status" de um país em crescente industrialização. Nessa década, em 1961, a LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional) foi aprovada e que teve como uma de suas principais características

a descentralização que atribuiu a cada Estado a liberdade e incumbência de cuidar de seu sistema educacional, dando autonomia na elaboração dos currículos(LAVORENTE, 2008).

Como a LDB ficou 10 anos no Congresso para ser aprovada, ela entrou em vigor já ultrapassada. A partir da frustração da LDB, alguns grupos trabalhavam em prol da educação e da cultura popular, da alfabetização e da consciência da população para os problemas nacionais. Nessa época prevaleceu a ideia de unir a função da escola com as necessidades do mercado de trabalho, sendo dado todo o apoio a profissionalização do Ensino Médio (ZANATTA, 2010).

É neste contexto que o Movimento da Matemática Moderna apareceu de forma acentuada no Brasil.

Finaliza-se, assim, este breve estudo histórico com o aparecimento do Movimento da Matemática Moderna e o surgimento da Educação Matemática, uma forte corrente de ensino, pode-se dizer, que inspira muitos professores na defesa de uma aprendizagem que parte das próprias experiências do aluno na construção de um conhecimento mais formal tendo como principal objetivo capacitar os indivíduos para serem cidadãos conscientes, criativos e atuantes.

O Movimento da Matemática Moderna surgiu no Brasil não como uma proposta de ensino voltada para a realidade da educação brasileira mas originou-se em um contexto pós-guerra e após o lançamento do primeiro satélite soviético, o Sputnik, levando os americanos a pensarem seriamente na urgência de uma reforma no ensino, principalmente a Matemática com o objetivo de uma melhor formação matemática dos cidadãos exigida pela evolução tecnológica, econômica e científica (ZANATTA, 2010).

Segundo Zanatta (2010), este movimento caracteriza-se pela mudança radical em relação à abordagem dos números e operações, há o abandono da concepção de número como resultado da medição de grandezas em favor de uma apresentação que passa a organizar os números com base nos conceitos de conjuntos e estruturas.

A Matemática Moderna chega ao Brasil repleta de formalismos, com excessiva preocupação com a linguagem matemática e com a simbologia da teoria dos conjuntos.

O esgotamento do Movimento da Matemática Moderna deu-se por volta do final dos anos 70 e início dos anos 80, e isso, deve-se principalmente, ao fato de adestrar os alunos em fórmulas e cálculos sem aplicações, apresentando a Matemática em ramos estanques e isolados com excessivo simbolismo e rigor na linguagem matemática e pelo seu caráter dedutivo(SOARES, 2005).

Assim, o Movimento da Matemática Moderna foi perdendo defensores até o seu desaparecimento.

Para Zanatta (2010), é possível dizer que o fracasso do Movimento da Matemática

Moderna contribuiu para uma nova tendência de ensino que é a Educação Matemática, tão forte e importante para o ensino da Matemática nos dias atuais.

No artigo de [Gomes \(2007\)](#), a autora cita uma declaração feita por Imenes sobre o ensino da Geometria que passou a predominar após o Movimento da Matemática Moderna. Para este autor, o ensino da Geometria marcou-se pela despersonalização, pois as abordagens adotadas não podiam ser caracterizadas nem como intuitivas e nem como formalizadas, tinha apenas um enfoque informativo devido a ausência da construção de ideias contidas nas proposições apresentadas aos estudantes impossibilitando aos alunos a percepção das relações entre as ideias. Vale ressaltar, que essa abordagem informativa estava associada a uma corrente pedagógica forte durante o regime militar no Brasil, o tecnicismo.

Além do enfoque informativo, Imenes(1987) destaca as abordagens experimentais adotadas. Ele defende uma abordagem inicial que priorize as dimensões intuitivas e experimentais e que encaminhe, posterior e progressivamente, para o trabalho com deduções locais dos resultados mais importantes.

E este modo de abordar a Geometria insere-se no Movimento da Educação Matemática que ganha força a partir de 1980, e se destaca com novas propostas curriculares, com a elaboração dos Programas Curriculares Nacionais(PCNs) para o Ensino Fundamental, sendo considerados atualmente um grande e importante guia para o professor no planejamento de suas aulas ao perceber a presença do enfoque experimental, juntamente com a abordagem histórica e do uso de situações do cotidiano dos alunos de forma a contemplar adequadamente a formalização de conceitos e a dimensão lógico-dedutiva da Matemática.

Segundo [Berti \(2005\)](#) percorrendo brevemente a trajetória do ensino brasileiro, especialmente a Matemática observa-se que nenhuma reforma conseguiu atingir e suprir as necessidades da sociedade brasileira totalmente. Ora, pelos programas elaborados seguindo as tendências mundiais ou adequados às elites; ora, elaborados com excessivos conteúdos aliados à despreparação dos professores, diante de programas impostos de forma autoritária.

Nos últimos anos, nota-se, uma grande preocupação por parte dos professores, tendo em vista as possíveis exigências e necessidades sobre a sociedade, com que tipo de Matemática ensinar e como ensinar? Qual é a Geometria necessária e conveniente para uma melhor formação dos cidadãos?

Para [Fiorentini \(2004\)](#), há diferentes modos de conceber e ver a questão da qualidade do ensino da Matemática. Alguns podem relacioná-la ao rigor e formalização dos conteúdos. Outros, ao emprego de técnicas de ensino e ao controle do processo ensino-aprendizagem com o objetivo de reduzir as reprovações. Há ainda aqueles que a relacionam ao uso de uma matemática ligada ao cotidiano ou à realidade do aluno. Assim, o conceito de

qualidade do ensino é relativo e modifica-se historicamente de acordo com as necessidades sócio-culturais e políticas.

E nós, educadores, como encontrar o equilíbrio entre o intuitivo e o dedutivo, o concreto e o abstrato?

Estamos bem preparados? Ou melhor: que Matemática o professor deve saber, para ensiná-la de maneira significativa aos jovens e crianças da escola básica (FIORENTINI, 2004)?

Ainda, segundo Fiorentini (2004, p.110)

para ser professor de Matemática não basta ter um domínio conceitual e procedimental da Matemática produzida historicamente. Sobretudo, necessita conhecer seus fundamentos epistemológicos, sua evolução histórica, a relação da Matemática com a realidade, seus usos sociais e as diferentes linguagens com as quais se pode representar ou expressar um conceito matemático.

Finalizando, independente das políticas educacionais, o professor precisa reconhecer o seu papel na formação do aluno e ser capaz de utilizar os instrumentos necessários para intervir quando a aprendizagem não foi alcançada, partindo da realidade escolar onde atua porém sem desconsiderar conceitos importantes da Matemática para a vida futura dos seus alunos. O verdadeiro educador precisa desmistificar para os seus alunos, que a Matemática é feita "para poucos" e conscientizá-los da importância dessa disciplina como grande ferramenta na resolução dos eventuais problemas que surgirão ao longo de suas vidas.

Enfim, é uma tarefa difícil mas não impossível.

# Capítulo 2

## Mosaicos

Este capítulo refere-se ao estudo dos mosaicos. Na primeira parte, foi realizada uma abordagem sobre a história dos mosaicos e em seguida, um estudo sobre os tipos de mosaicos constituídos por um ou mais tipos de polígonos regulares.

### 2.1 Significado

Ao pesquisar a origem da palavra **mosaico**, há dois conceitos que expressam de maneiras diferentes porém se complementam sobre o significado desta palavra.

Primeiramente, segundo [Sclovsky \(2008\)](#), "é uma palavra de origem grega, que significa "obra paciente, digna das musas". "Obra paciente" porque seu processo de transformação requer muita calma, habilidade e concentração e "digna das musas", já que se trata de um produto de rara beleza, elaborado com materiais que atravessam os séculos.

De acordo com [Imenes e Lellis \(2000\)](#), mosaico é uma pavimentação ou recobrimento de superfícies com ladrilhos, pedras, tacos de madeira ou outros revestimentos.

### 2.2 Um pouco da história dos mosaicos: Arte presente desde a Antiguidade até os dias de hoje

A arte de fazer mosaicos é muito antiga. Desde a Antiguidade vários povos com culturas das mais diversas, utilizavam figuras geométricas como elementos decorativos nas construções arquitetônicas, nas manifestações artísticas e até mesmo nos seus utensílios domésticos([REIS; FREITAS; JAFELICE, 2007](#)).

No século III a.C. os gregos formavam desenhos com as tesselas- pequenas peças de mármore cortadas em triângulos, quadrados ou outras formas que serviam de padrão ([CASTRUCCI; JR., 2007](#)).



Os romanos utilizavam o mosaico em seus templos e em residências de pessoas ricas e influentes, principalmente em cômodos destinados a receber e divertir visitantes, representando cenas que refletiam a riqueza de seus proprietários (SCLOVSKY, 2008).

Segundo Castrucci e Jr. (2007), o auge da arte do mosaico foi no Império Bizantino, durou do século IV ao século XV e estendeu-se por uma grande região da Europa, África e Ásia. Os mosaicos bizantinos tratavam quase exclusivamente do tema religião e retratavam, também, figuras do Imperador. Como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Igreja de Ravena



Fonte:<http://catedraismedievais.blogspot.com.br>. Acesso em 29 de abril de 2017

O mosaico então passou a não só limitar-se à pavimentação, mas passou a recobrir quase todas as superfícies das igrejas, como paredes, tetos e abóbodas, com tesselas de ouro e um vidro especial que refletia a luz em diferentes cores (SCLOVSKY, 2008).

Pode-se citar como exemplo a Igreja de Santa Sofia, em Istambul, que nessa época era a maior igreja cristã do Oriente, que teve sua cúpula e teto recobertos por um mosaico composto por cerca de milhões de tesselas de ouro. A Figura 2 mostra o exterior da igreja.

Figura 2 – Basílica de Santa Sofia



<http://hagiasophia.com>. Acesso em 29 de abril de 2017

A partir do século XI, a cidade de Veneza, na Itália, destacou-se a ponto de ser considerada a capital do mosaico. O melhor exemplo da influência bizantina em Veneza está na Basílica de São Marcos, com seus ornamentos mosaicos dourados e elaborados domos. O palácio impressiona pela ostentação de riqueza e poder (Figura 3).

Figura 3 – Basílica de São Marcos



<http://library.bc.edu>. Acesso em 30/04/2017

Algumas culturas desenvolveram mosaicos com motivos geométricos mais do que outras. É o caso do mosaico islâmico que sofreu grande influência do mosaico bizantino, embora possua suas características próprias. Uma de suas principais peculiaridades é a ausência da representação da figura humana, cuja proibição religiosa se aplica a qualquer tipo de representação artística islâmica. Com essa limitação, os islâmicos prestavam mais atenção na forma abstrata, criando composições geométricas (SCLOVSKY, 2008).

Segundo Castrucci e Jr. (2007), em Portugal e na Espanha, a arte do mosaico sofreu grande influência dos árabes os quais invadiram a península ibérica em 712. Um dos principais monumentos da ocupação islâmica é a cidadela de Alhambra, localizado na cidade espanhola de Granada, um complexo de palácios, jardins e fortaleza (Figura 4).

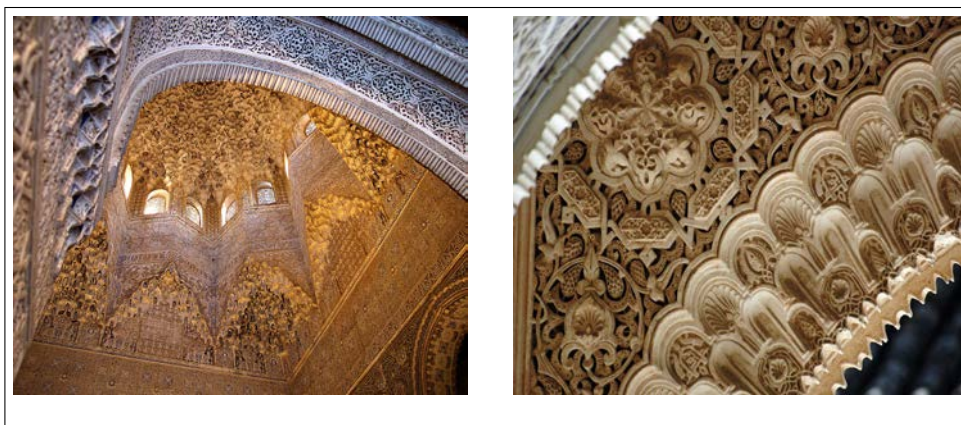
Figura 4 – Palácio de Alhambra



Fonte:<http://nationalgeographicexpeditions.com>. Acesso em 30 de abril de 2017

No interior do palácio há painéis decorativos com vários padrões de simetria que inspiram artistas e turistas que visitam o local, sendo considerado como uma das principais atrações turísticas do país, a Figura 5 mostra alguns detalhes deste interior.

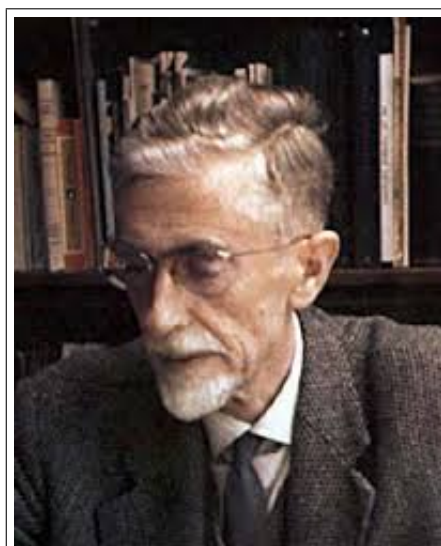
Figura 5 – Detalhes do interior do Palácio de Alhambra



Fonte:<http://wordwanderista.com> Acesso em 30 de abril de 2017

Segundo Alves (2014), um dos artistas que ficara fascinado pela divisão regular do plano encontrada em muitos dos motivos ornamentais do palácio foi Maurits Cornelius Escher (1898-1972) (Figura 6). Ele aplicava intuitivamente as técnicas milenares utilizadas pelos árabes através de muita observação e reprodução do que se via no palácio.

Figura 6 – Escher, M.C



Fonte:<http://oexplorador.com.br>. Acesso em 30 de abril de 2017

Escher explicou o conceito da divisão regular do plano (hoje chamada de ladrilhamento) com uma série de variações. Matemáticos e cristalógrafos classificaram essas divisões num total de dezessete sistemas diferentes, de acordo com simetrias (ESCHER; TJABBES, 2011).

Escher considerava esses ladrilhamentos o seu tema mais importante. Primeiro, ele substituiu as formas geométricas nuas, tais como paralelogramos, por imagens realísticas. Depois, ele se mostrou capaz de transformar essas imagens. A natureza era um dos temas fundamentais do trabalho de Escher. Salamandras, aves, peixes, plantas, formigas, besouros e sapos surgiam constantemente, às vezes como parte de um ladrilhamento, metamorfose ou ciclo (ESCHER; TJABBES, 2011).

Em 2010 e em 2011, o Centro Cultural Banco do Brasil apresentou **O mundo mágico de Escher**, a mais completa exposição do artista realizada no Brasil que reuniu 95 obras, entre gravuras, desenhos e fac-símiles mais conhecidos de Escher. Este acervo pertence à coleção do *Haags Gemeentemuseum*, que mantém o Museu Escher, na cidade de Haia, na Holanda.

Atualmente, as obras de Escher (Figura 7) também estão presentes nos livros didáticos e muitos professores adotam as obras do artista como ferramenta de ensino em suas aulas sobre simetrias tornando-as mais interessantes e enriquecedoras.

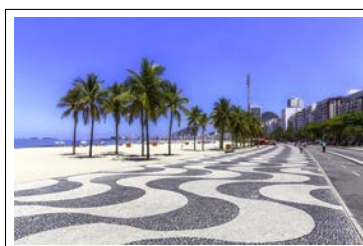
Figura 7 – Algumas obras famosas de Escher: à esquerda, *Two Birds*, de 1938 e à direita, *Lizard*, de 1942



Fonte://br.pinterest.com. Acesso em 03 de maio de 2017

No Brasil, uma das calçadas mais vistas no mundo é o calçadão de Copacabana que exibe um tipo de mosaico ondulado.

Figura 8 – Calçadão de Copacabana



Fonte://http:99graus.com.br. Acesso em 05 de maio de 2017



## 2.3 Tipos de mosaicos

Nesta pesquisa, a ênfase foi dada aos mosaicos formados por polígonos regulares, e para a sua composição foi estabelecida as seguintes condições:

- a intersecção entre dois polígonos regulares será um lado ou um vértice;
- a distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice será sempre a mesma, ou seja, formará um padrão.

### 2.3.1 Relação entre mosaicos e o ângulo interno de um polígono regular

A formação de um arranjo de polígonos regulares em torno de um vértice de modo que não haja nem lacunas nem superposições está diretamente ligada a medida do ângulo interno de cada polígono regular. Observe o Quadro 1:

Quadro 1 – Medidas dos ângulos internos, em graus

Lados	Ângulo interno	Lados	Ângulo interno
3	60	12	150
4	90	15	156
5	108	18	160
6	120	20	162
7	$128\frac{4}{7}$	24	165
8	135	36	170
9	140	42	$171\frac{3}{7}$
10	144	$n$	$180(1 - \frac{2}{n})$

Fonte: <http://mat.unb.br/leamat/wp-content/uploads/2015/09/06SOLUÇÃO-DAS-ATIVIDADES-COM-MOSAICOS.pdf>, acesso em 21 de maio de 2017

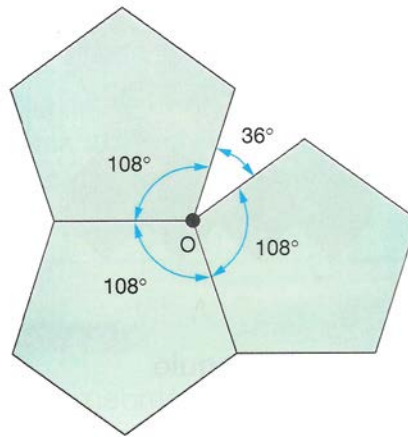
Para obter um encaixe perfeito entre os polígonos é necessário que a soma dos ângulos internos desses polígonos em torno de um vértice seja igual a  $360^\circ$ . Há mosaicos formados por um só tipo de polígono regular, os **mosaicos regulares**.

Para construção de mosaicos regulares, é preciso que o ângulo interno deste polígono seja um divisor de  $360^\circ$ . Pelo Quadro 1, verifica-se algumas medidas dos ângulos internos divisores de  $360^\circ$ :  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  e  $180^\circ$ . Acima, de  $120^\circ$ , apenas  $180^\circ$  e  $360^\circ$  são divisores de  $360^\circ$ , e sabe-se que não existem polígonos regulares com ângulos internos medindo  $180^\circ$  e  $360^\circ$ .

Como  $\frac{360^\circ}{120^\circ} = 3$ , e sendo  $m$  o número de polígonos regulares ao redor de um vértice tem-se, de início,  $m \geq 3$ . Além disso, como a menor medida do ângulo interno de um polígono regular é  $60^\circ$ , segue-se que o maior valor de  $m$  é dado por  $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$ , e portanto,  $3 \leq m \leq 6$ . Veja o que acontece quando tenta-se construir um mosaico utilizando apenas

pentágonos regulares. Observando a Figura 9, há uma lacuna que corresponde a um ângulo de  $36^\circ$ , o que não permite encaixar outro pentágono sem que haja sobreposição.

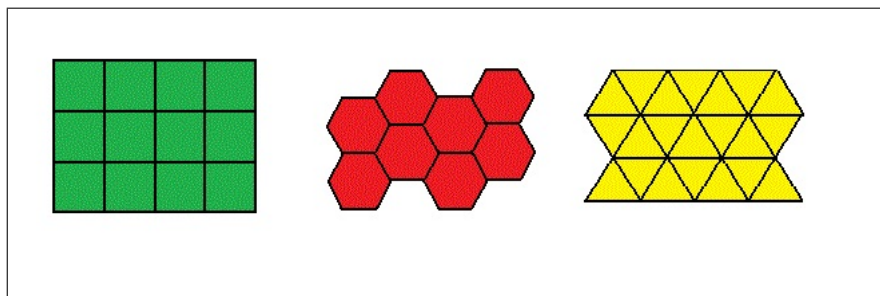
Figura 9 – Pentágonos regulares



Fonte: [Castrucci e Jr. \(2007, p.309\)](#)

Conclui-se, então, que os mosaicos com um só tipo de polígono regular são aqueles construídos só com triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos (Figura 10).

Figura 10 – Arranjos com as seguintes configurações: (4,4,4,4), (6,6,6) e (3,3,3,3,3,3)



Fonte: Adaptado de <http://fec.unicamp.br>. Acesso em 02 de junho de 2017

Existem, também, mosaicos formados por dois ou mais tipos de polígonos regulares, denominados **mosaicos semirregulares ou arquimedianos**.

Baseando nos estudos de [Alves e Dalcin \(1999\)](#), tem-se que, primeiramente, encontrar todas as possíveis combinações para um arranjo de três polígonos regulares ao redor de um vértice em comum de modo que não haja nem lacunas nem sobreposições.

Como a soma dos ângulos internos ao redor de um vértice é  $360^\circ$ , e a medida de cada ângulo interno é dada por  $a_i = (1 - \frac{2}{n_i})180^\circ$ , tem-se a seguinte equação:

$$\left(1 - \frac{2}{n_1}\right)180 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right)180 + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right)180 = 360 \quad (2.1)$$

Multiplicando por  $\frac{1}{180}$  os dois membros da equação 2.1:

$$1 - \frac{2}{n_1} + 1 - \frac{2}{n_2} + 1 - \frac{2}{n_3} = 2 \quad (2.2)$$

E somando  $(-3)$  em ambos os membros da equação 2.2, obtém-se:

$$-\frac{2}{n_1} - \frac{2}{n_2} - \frac{2}{n_3} = -1 \quad (2.3)$$

Finalmente, multiplicando por  $(-\frac{1}{2})$  ambos os membros da equação 2.3, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} \quad (2.4)$$

Supondo, sem perda de generalidade, que  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ . Logo,

$$\frac{1}{n_2} \leq \frac{1}{n_1} \text{ e } \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_1}$$

Substituindo as desigualdades acima na equação 2.4, tem-se:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} = \frac{3}{n_1} \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{n_1} \quad (2.6)$$

$$n_1 \leq 6 \quad (2.7)$$

De início, fazendo  $n_1 = 3$  e substituindo na equação 2.4, obtém-se:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}, \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{n_2}, \text{ daí } \frac{1}{n_3} = \frac{n_2 - 6}{6n_2}. \quad (2.8)$$

$$n_2 \geq 7 \quad (2.9)$$

Por outro lado,  $n_2 \leq n_3$ . Logo,

$$\frac{1}{n_2} \geq \frac{1}{n_3} \quad (2.10)$$

De 2.8 e 2.10, tem-se

$$n_2 \leq 12. \quad (2.11)$$

De 2.9 e 2.11, tem-se  $7 \leq n_2 \leq 12$ .

Substituindo os possíveis valores de  $n_2$  na equação 2.8 e lembrando que  $n_3$  é inteiro, obtém-se as seguintes soluções:  $(3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12)$ .

Procedendo da mesma forma para  $n_1 = 4$ ,  $n_1 = 5$  e  $n_1 = 6$ , obtém-se as seguintes combinações representadas no Quadro 2 abaixo:

Quadro 2 – Arranjos de 3 polígonos em torno de um vértice

$n_1$	$n_2$	$n_3$
3	7	42
3	8	24
3	9	18
3	10	15
3	12	12
4	5	20
4	6	12
4	8	8
5	5	10
6	6	6

Fonte: [Alves e Dalcin \(1999\)](#). Acesso em 02 de junho de 2017

Em seguida, resolvendo a equação  $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$  e usando o mesmo raciocínio obtém-se as seguintes combinações de arranjos de 4 polígonos ao redor de um vértice: (3,3,4,12), (3,3,6,6), (3,4,4,6) e (4,4,4,4). Porém, existe uma outra maneira de posicionar os polígonos de uma mesma combinação, formando assim, novos arranjos.

Desta forma, há sete maneiras de combinar 4 polígonos regulares ao redor de um vértice em comum (Quadro 3):

Quadro 3 – Arranjos de 4 polígonos em torno de um vértice

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$
3	3	4	12
3	4	3	12
3	3	6	6
3	6	3	6
3	4	4	6
3	4	6	4
4	4	4	4

Fonte: [Alves e Dalcin \(1999\)](#). Acesso em 02 de junho de 2017

Prosseguindo, as possíveis combinações de 5 polígonos regulares em torno de um vértice correspondem às soluções inteiras e positivas da equação  $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$ . São elas: (3,3,3,3,6) e (3,3,3,4,4). Como (3,3,3,4,4) admite uma outra disposição dos polígonos, tem-se ainda, (3,3,4,3,4).



Logo, há três maneiras de combinar 5 polígonos regulares ao redor de um vértice (Quadro 4):

Quadro 4 – Arranjos de 5 polígonos em torno de um vértice

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$
3	3	3	3	6
3	3	3	4	4
3	3	4	3	4

Fonte: [Alves e Dalcin \(1999\)](#). Acesso em 02 de junho de 2017

Finalmente, a última combinação de 6 polígonos ao redor de um vértice em comum corresponde a única solução da equação  $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} = 2$ , ou seja, (3,3,3,3,3,3) (Quadro 5):

Quadro 5 – Arranjo de 6 polígonos em torno de um vértice

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$n_6$
3	3	3	3	3	3

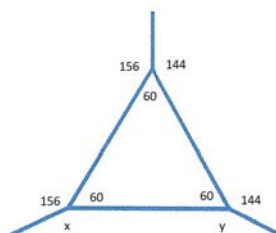
Fonte: [Alves e Dalcin \(1999\)](#). Acesso em 02 de junho de 2017

Estendendo um pouco mais no assunto sobre mosaicos, há uma pergunta a fazer: Será que todas as combinações acima podem ser expandidas por todo o plano formando mosaicos?

As combinações formadas por polígonos regulares os quais possuem uma menor quantidade de lados podem ser facilmente demonstradas ao tentar expandi-las num plano, como pode-se ver posteriormente. Mas, e as combinações formadas pelos polígonos de 24 e 42 lados?

Pela Figura 11, observa-se, pelo exemplo, a seguinte combinação (3,10,15), ou seja, um arranjo formado por um triângulo equilátero, um decágono e um pentadecágono, cujos ângulos internos são  $60^\circ$ ,  $144^\circ$  e  $156^\circ$ , respectivamente.

Figura 11 – Arranjo de um triângulo equilátero, um decágono e um pentadecágono

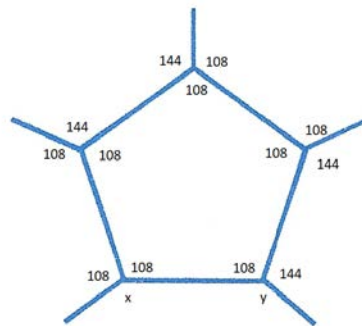


Fonte: Adaptado de [Alves e Dalcin \(1999\)](#). Acesso em 02 de junho de 2017

Como mostra a Figura 11, conclui-se que o polígono regular que falta para dar continuidade a pavimentação do plano não existe, pois os ângulos internos  $x$  e  $y$  não têm a mesma medida. Este arranjo só poderia ser estendido no plano, caso os outros dois polígonos regulares que formam um arranjo com o triângulo fossem congruentes. Com isso, as seguintes combinações não podem ser estendidas no plano: (3,7,42), (3,8,24) e (3,9,18).

O exemplo a seguir (Figura 12), refere-se às combinações com o pentágono regular. Analisando a combinação (5,5,10), ou seja, um arranjo formado por dois pentágonos e um decágono.

Figura 12 – Arranjo de dois pentágonos e um decágono

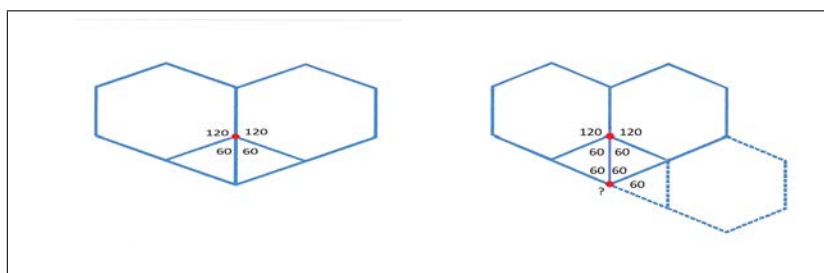


Fonte: Adaptado de [Alves e Dalcin \(1999\)](#). Acesso em 02 de junho de 2017

Pode-se perceber pela Figura 12 que os ângulos  $x = 144^\circ$  e  $y = 108^\circ$ . Logo este arranjo que envolve um pentágono regular e dois outros polígonos regulares não pode ser estendido no plano a menos que outros dois polígonos regulares sejam congruentes. Desta forma, a combinação (4,5,20) também não define mosaico no plano.

Com relação às combinações com quatro polígonos regulares (Figura 13), percebe-se que ao estender o arranjo (3,3,6,6) de modo que todos os vértices tenham esta mesma configuração, vê-se que será impossível.

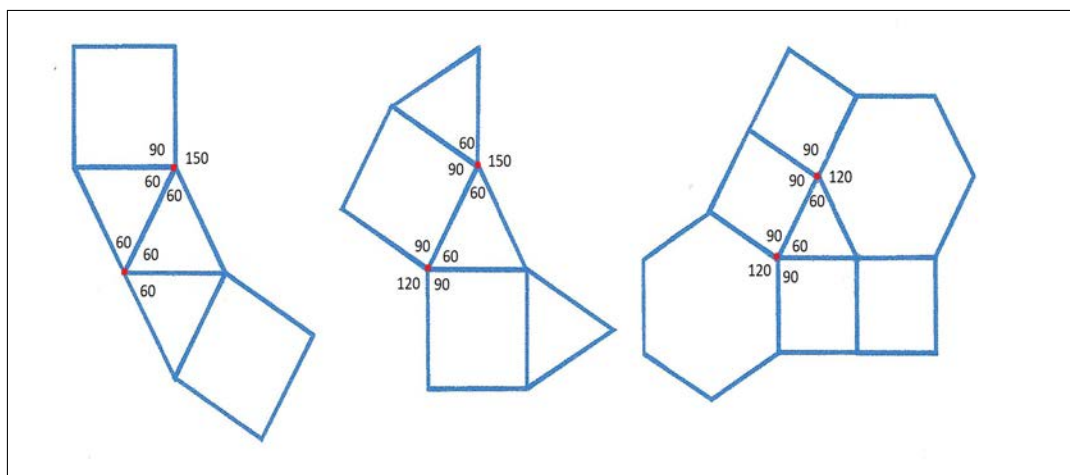
Figura 13 – À esquerda, arranjo (3,3,6,6) e à direita dois arranjos com configurações diferentes (3,3,6,6) e (3,3,3,?)



Fonte: [Alves e Dalcin \(1999\)](#). Acesso em 02 de junho de 2017

As combinações  $(3,3,4,12)$ ,  $(3,4,3,12)$  e  $(3,4,4,6)$ (Figura 14), também não se estendem pelo plano pois as configurações dos arranjos não mantêm o mesmo padrão.

Figura 14 – À esquerda,  $(3,3,4,12)$ ; no centro,  $(3,4,3,12)$  e à direita  $(3,4,4,6)$

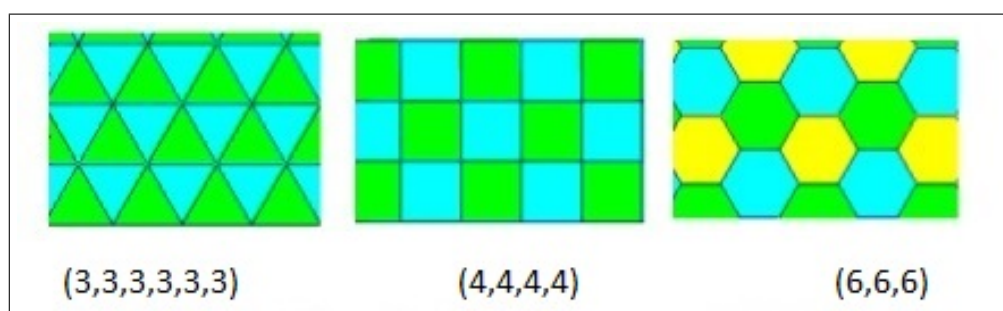


Fonte:Alves e Dalcin (1999). Acesso em 02 de junho de 2017

Desta forma, das **vinte e uma** possíveis combinações de polígonos regulares, **dez** delas não se estendem no plano a formar mosaicos. Assim, das **onze** combinações restantes, tem-se:

- **Três** combinações com **mesmo tipo de polígono regular**, que são os mosaicos regulares (Figura 15) e

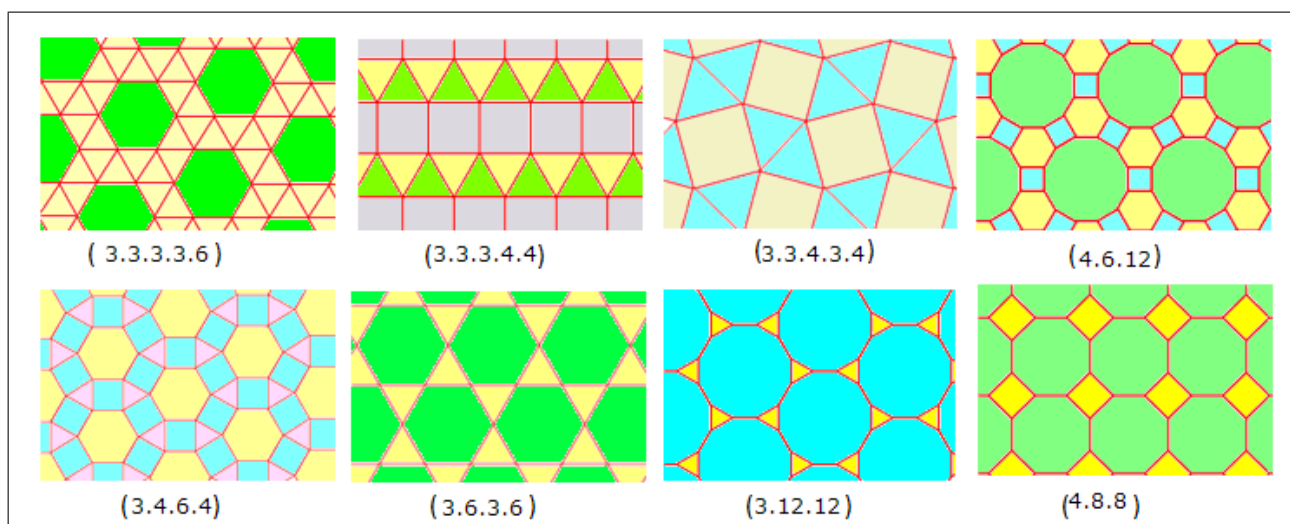
Figura 15 – Três tipos de mosaicos regulares



Fonte:<http://matematica.laguia2000.com>. Acesso em 02 de junho de 2017

- **Oito** combinações formadas por **dois ou mais tipos de polígonos regulares** chamados de mosaicos semi-regulares (Figura 16).

Figura 16 – Oito tipos de mosaicos semi regulares



Fonte: <http://matematica.laguia2000.com>. Acesso em 02 de junho de 2017

A existência dos mosaicos regulares já era conhecida pelos antigos pitagóricos da Matemática grega. A primeira pessoa a exibir os mosaicos semi-regulares foi J.Kepler, em trabalho publicado em 1619 (ALVES; DALCIN, 1999).

Assim, finaliza-se o estudo dos tipos de mosaicos e no capítulo seguinte, tem-se uma abordagem sobre simetria.

## Capítulo 3

### Simetria

Este capítulo dedica-se ao estudo de simetria, ou seja, das transformações geométricas no plano sendo dividido em duas partes: significado e os tipos de simetria.

#### 3.1 Significado

Observando a Figura 17, pode-se associar algum conceito matemático presente nas três imagens?

Figura 17 – Imagens que retratam alguma regularidade



Fontes:À esquerda, [http://portaldoprofessor.mec.gov.br/ficha TecnicaAula.html?aula=45741](http://portaldoprofessor.mec.gov.br/ficha_TecnicaAula.html?aula=45741); no centro, <http://br.pinterest.com> e à direita, <http://www.dreamstime.com/stock-photo-symmetrical-women-figures-line-image29553350>. Acesso em 22 de junho de 2017

Em qualquer uma delas identifica-se algum tipo de regularidade ou de repetição, que comumente designa-se por **simetria**. Segundo Bastos (2006), quando fala-se em simetria, esta-se a falar de simetria de uma figura. Muitos pensam que simetria está associada a ideia de "partes iguais", ou, à uma figura refletida. Porém, existem outros tipos de simetria presentes em elementos que transladam segundo um vetor ou rotacionam em torno de um ponto no plano (ALVES, 2014).

Ao analisar a simetria de uma figura, pretende-se saber que tipo de transformação geométrica ocorreu para que a figura fosse transformada em outra geometricamente igual, podendo variar a direção e o sentido (BOAVIDA, 2011).

A simetria não trata-se apenas de um conteúdo matemático. Aprimorando um pouco mais o nosso olhar para as coisas que nos cercam, pode-se perceber sua presença na arquitetura, nos objetos, nas obras de arte e nos elementos da natureza trazendo equilíbrio e harmonia.

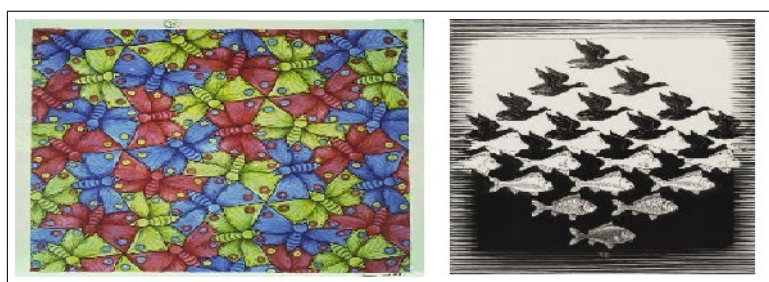
Observe alguns exemplos:

Figura 18 – Imagens que expressam a simetria na **natureza**



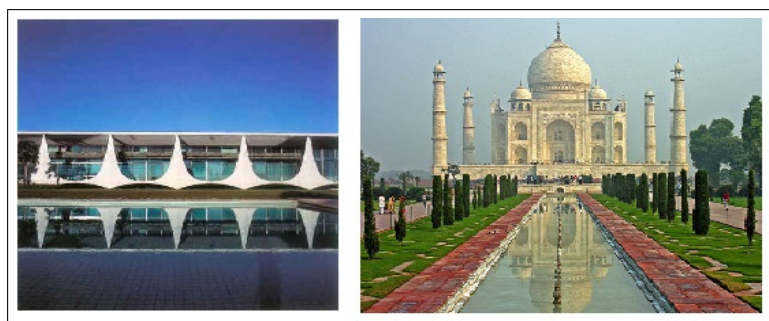
Fontes: À esquerda, <http://blogmatematic.blogspot.com.br> e à direita, <http://megacurioso.com.br>. Acesso em 25 de junho de 2017

Figura 19 – Imagens que expressam a simetria nas **obras de arte**



Fonte: <http://www.mescher.com./Gallery/gallery-symetry.htm>. Acesso em 25 de junho de 2017

Figura 20 – Imagens que retratam a simetria na **arquitetura**



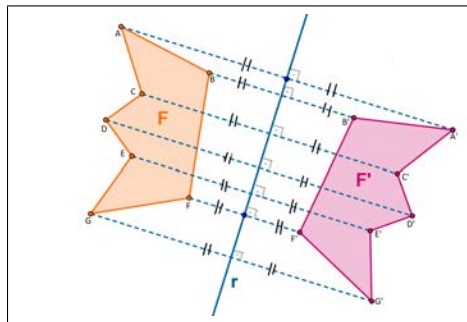
Fontes: À esquerda, <http://divisare.com> e à direita, <http://tudoindia.com.br>. Acesso em 25 de junho de 2017

## 3.2 Tipos de simetria

### 3.2.1 Simetria por reflexão

Considere um tipo de transformação no plano, caracterizada por uma reta  $r$  desse plano, que a cada ponto do plano associa-se o seu simétrico em relação à reta  $r$ . Esse tipo de transformação chama-se **reflexão** (NASSER; SOUSA; PEREIRA, 2004) ( Figura 21).

Figura 21 – Reflexão de um polígono em relação ao eixo de simetria  $r$



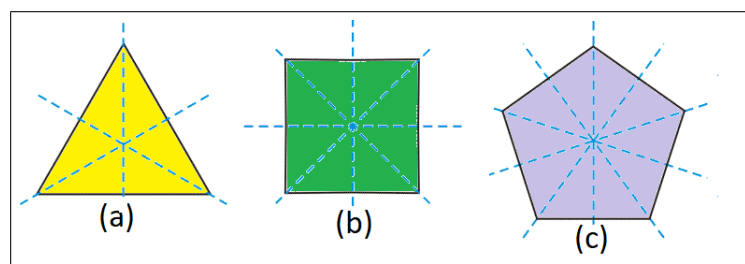
Fonte: Adaptado de <http://flipquiz.me>. Acesso em 26 de junho de 2017

Segundo Nasser, Sousa e Pereira (2004), a cada ponto da figura  $F$  é refletido em relação à reta  $r$  denominada **eixo de simetria**, dando origem a um ponto correspondente (simétrico) na figura refletida, obedecendo às seguintes condições:

- a linha que une cada par de pontos simétricos é perpendicular ao eixo de simetria;
- dois pontos simétricos estão à mesma distância (perpendicular) do eixo de simetria.

Algumas figuras podem apresentar mais de um eixo de simetria. Observe os exemplos na Figura 22.

Figura 22 – (a): três eixos de simetria, (b): quatro eixos de simetria e (c): cinco eixos de simetria



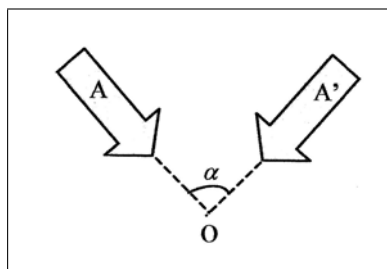
Fonte: Elaboração própria



### 3.2.2 Simetria por rotação

Considere, agora, uma transformação no plano caracterizada por um giro, em torno de um ponto fixo **O** num determinado ângulo  $\alpha$ . Observando a Figura 23, tem-se, neste caso, que a imagem de cada ponto da figura **A** é obtida através do giro de centro **O** e ângulo  $\alpha$ , no sentido horário (NASSER; SOUSA; PEREIRA, 2004).

Figura 23 – Figura **A** e a sua imagem **A'**

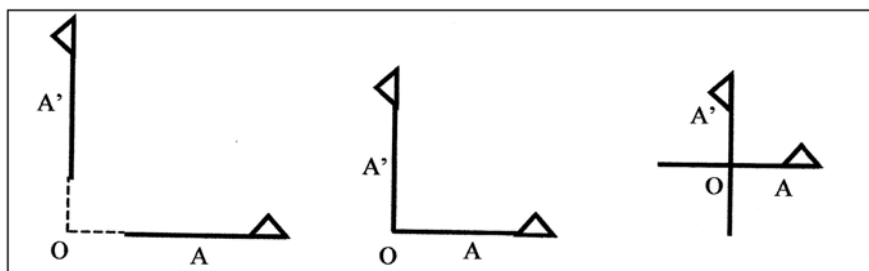


Fonte: Nasser, Sousa e Pereira (2004). Acesso em 20 de julho de 2017

Pode-se dizer, que a figura **A'** é a imagem da figura **A** por uma **rotação** de centro **O** e ângulo  $\alpha$ , no sentido horário.

O ponto **O** pode estar localizado fora da figura a ser gerada, sobre o seu contorno ou no interior da figura ( Figura 24).

Figura 24 – Posições do ponto **O**



Fonte: Nasser, Sousa e Pereira (2004). Acesso em 20 de julho de 2017

Observa-se que a posição da imagem de uma figura pode ser diferente, dependendo da posição do ponto **O** e do ângulo mas sua imagem mantém a forma e as dimensões da figura.

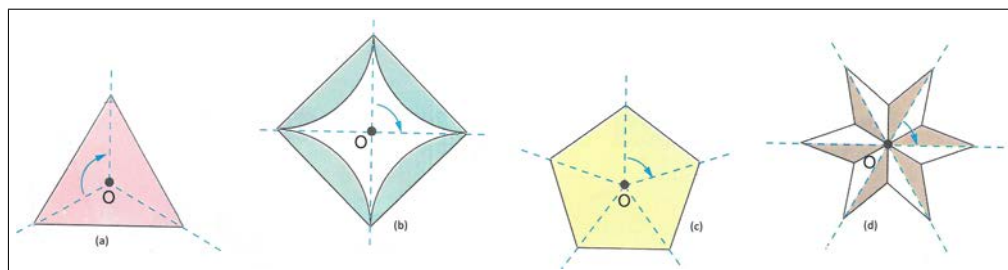
Assim, conclui-se que uma **rotação** de centro **O** e ângulo  $\alpha$  é uma transformação cuja imagem de uma figura é obtida gerando-se cada um de seus pontos segundo um arco de circunferência de centro **O**, correspondente ao ângulo  $\alpha$ , no sentido fixado, que pode ser horário ou anti-horário (NASSER; SOUSA; PEREIRA, 2004).

Observando os polígonos na Figura 25, pode-se perceber que, ao girar  $120^\circ$ , no sentido horário, a figura (**a**) em torno do centro de rotação **O**, ela permanecerá inalterada.



O mesmo ocorrerá ao girar  $90^\circ$  a figura **(b)**,  $72^\circ$  a figura **(c)**, e  $60^\circ$  a figura **(d)**, no sentido horário.

Figura 25 – Polígonos com centro de rotação no ponto **O**

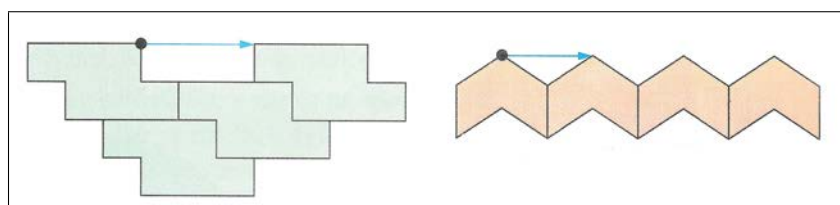


Fonte: [Castrucci e Jr. \(2007, p.305\)](#)

### 3.2.3 Simetria de translação

Na Figura 26, percebe-se que o desenho formado foi resultante do deslocamento de todos os pontos da figura original numa mesma direção, no mesmo sentido e percorrendo, paralelamente, a mesma distância. Este tipo de transformação é denominada de **translação** ([NASSER; SOUSA; PEREIRA, 2004](#)).

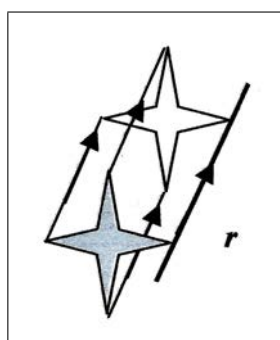
Figura 26 – Deslocamentos da figura original



Fonte: [Castrucci e Jr. \(2007, p.306\)](#)

Para definir uma translação devem ser fixados, portanto, a direção, o sentido e o comprimento do deslocamento segundo uma reta  $r$  (Figura 27).

Figura 27 – Movimento de translação



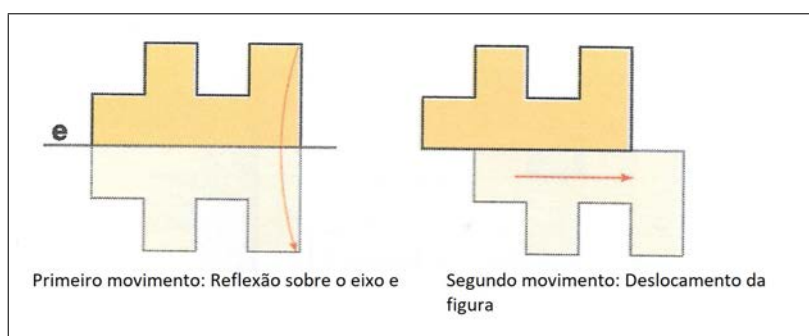
Fonte: [Nasser, Sousa e Pereira \(2004\)](#) Acesso em 20 de julho de 2017

Observa-se, também, que a imagem de uma figura por **translação** mantém sua forma e tamanho.

### 3.2.4 Reflexão deslizante

Neste tipo de transformação, aparece um movimento que consiste em fazer uma reflexão da figura original e, depois, deslizá-la para uma nova posição. O deslizamento é feito ao longo do eixo de simetria (IMENES; LELLIS, 2000)(Figura 28).

Figura 28 – Reflexão e em seguida, o movimento de translação da figura original



Fonte: Adaptado de Imenes e Lellis (2000, p.34)

Vale ressaltar que, apenas os três tipos de simetria (reflexão, rotação e translação) foram trabalhados nesta pesquisa.

Assim, finaliza-se o estudo de simetria tendo no próximo capítulo a abordagem sobre a metodologia empregada nesta pesquisa e a importância do uso de materiais manipuláveis na Matemática.

## Capítulo 4

# Metodologia e o uso de materiais manipuláveis

A primeira parte deste capítulo destina-se a descrever todos os recursos metodológicos empregados para a realização desta pesquisa: natureza da pesquisa, ambiente o qual foi realizada, os sujeitos participantes e os procedimentos utilizados para a análise dos dados da pesquisa. Na segunda parte, foi realizado um estudo sobre o uso de materiais concretos, destacando sua importância como recurso didático para as aulas de Matemática.

### 4.1 METODOLOGIA

#### 4.1.1 Quanto à natureza da Pesquisa

As pesquisas científicas podem ser classificadas, quanto à natureza, em dois tipos básicos: qualitativa e quantitativa e um misto dos dois tipos (OLIVEIRA, 2011).

Segundo Oliveira (2011), o conceito de pesquisa qualitativa envolve cinco características básicas que configuram este tipo de estudo: ambiente natural, dados descritivos, preocupação com o significado e processo de análise indutivo.

Deste modo, de acordo com as características descritas acima, esta pesquisa quanto à sua natureza apresenta uma abordagem qualitativa, pois:

- todo o estudo foi desenvolvido através do contato direto da pesquisadora com o ambiente físico e social dos alunos por meio do trabalho intensivo de campo;
- o material desta pesquisa foi obtido através das descrições dos alunos mediante fotografias, atividades escritas e lúdicas devidamente documentadas, ou seja, todos os dados da realidade foram predominantemente descritivos;

- o presente trabalho valorizou mais o processo do que o produto final por meio de atividades realizadas pelos alunos, observando os procedimentos utilizados pelos mesmos bem como as interações entre os grupos na sala de aula e
- a análise dos dados foi indutiva, ou seja, construída ao longo do processo, sem a preocupação, de buscar evidências na comprovação de hipóteses.

#### 4.1.2 Campo da Pesquisa

A pesquisa foi realizada na Escola Municipal Getúlio Vargas, na localidade de Tocos, décimo sétimo distrito de Campos dos Goytacazes, norte do Estado do Rio de Janeiro.

A escola funciona nos seguintes turnos: diurno(manhã e tarde) e noturno.

O ensino básico concentra-se na maior parte no período da manhã, com turmas regulares da Educação Infantil, Ensino Fundamental I e Ensino Fundamental II.

No período da tarde, tem-se as seguintes turmas: sexto ano e EJA. Já, no período da noite, somente a EJA.

A escola é bem localizada, possui boa estrutura física, com refeitório amplo, laboratório de ciências, salas com dimensões adequadas para 25 alunos e biblioteca bem equipada. Porém, há alguns pontos negativos, como: construção da quadra inacabada e alunos sem acesso à informática, embora a escola possua uma sala de computadores. Existem, também algumas contradições: salas equipadas com lousas interativas acompanhadas de data-show, porém com ventiladores de teto em condições precárias.

A escolha desta unidade escolar pela pesquisadora deve-se ao fato, de sua atuação como professora de turma na mesma desde o ano de 2011.

#### 4.1.3 Sujeitos da Pesquisa

Após a escolha do tema desta pesquisa e definidos os objetivos a serem alcançados, o próximo passo foi a seleção da turma participante deste trabalho.

O principal motivo da escolha pela turmas do oitavo ano, foi estabelecer uma coerência entre o tema da pesquisa em relação ao conteúdo definido para a turma em questão. Assim, os participantes da pesquisa foram 52 alunos, no total e distribuídos da seguinte forma: 26 alunos, na turma 801 e 26 alunos, na turma 802.

Vale ressaltar, que o número de matriculados era maior tanto na turma 801(31 alunos) como na turma 802 (28 alunos).

Um fato que merece atenção foi a presença significativa dos alunos durante o desenvolvimento de todas as atividades propostas deste trabalho.

#### 4.1.4 Instrumentos da Pesquisa e Procedimentos para a análise dos dados

Esta pesquisa foi desenvolvida em três etapas: Na primeira etapa foi feita uma abordagem dos conteúdos, considerados como pré-requisitos, indispensáveis para o andamento das futuras atividades. Em seguida, o desenvolvimento desta pesquisa por meio das atividades didáticas e finalmente, a aplicação de uma avaliação.

As atividades foram aplicadas nos meses de julho, agosto e setembro. Cada aula teve duração de 50 minutos.

Na primeira etapa, os conteúdos trabalhados com os alunos, considerados como pré-requisitos foram: polígonos e ângulos. O Quadro 6 mostra a sequência das atividades.

Quadro 6 – Conteúdos trabalhados na primeira etapa

<b>Atividade</b>	<b>Conteúdos didáticos</b>	<b>Número de aulas</b>
1	Estudo dos polígonos	1
2	Estudo dos ângulos	2
3	Estudo da soma dos ângulos internos de um triângulo	1
4	Estudo da soma dos ângulos internos de um polígono regular	2

Fonte: Elaboração própria

Na segunda etapa, conforme o Quadro 7, foram trabalhadas todas as atividades visando o desenvolvimento do tema desta pesquisa.

Quadro 7 – Conteúdos trabalhados na segunda etapa

<b>Atividade</b>	<b>Conteúdos didáticos</b>	<b>Número de aulas</b>
5	Utilização do kit de polígonos regulares	6
6	Simetria de reflexão: dobraduras	1
7	Simetria de reflexão: atividade escrita	1
8	Simetria de reflexão: tangram	1
9	Simetria de rotação: atividade escrita	1
10	Simetria de rotação: confecção de CDs	4
11	Simetria de translação: atividade escrita	1
12	Simetria de translação: dobraduras	2
13	Atividade envolvendo configurações e simetria	1
14	Estudo sobre Escher	1
15	Confecção de trabalhos sobre obras de Escher	6
16	Avaliação sobre Simetria	2

Fonte: Elaboração própria

Na terceira etapa, após a conclusão das atividades didáticas foi realizada uma pequena avaliação com o objetivo de verificar as conquistas e as dificuldades enfrentadas pelos alunos em relação ao conteúdo trabalhado.

A avaliação foi aplicada às turmas trabalhadas (801 e 802) contendo 6 questões sobre os tipos de simetria. O tempo de duração foi de aproximadamente 100 minutos (2 aulas).

A análise dos dados da avaliação encontra-se no capítulo seguinte assim como o relato de todas as atividades citadas nesse capítulo.

## 4.2 MATERIAIS MANIPULÁVEIS COMO RECURSO DIDÁTICO

Nos últimos anos, há uma forte tendência entre os professores sobre a importância de se trabalhar com o "concreto" no ensino da Matemática. Segundo [Nacarato \(2004\)](#), este concreto refere-se ao uso de materiais manipuláveis.

O uso de materiais manipuláveis no ensino foi detectado pela primeira vez por Pestalozzi, no século XIX, ao defender que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações ([NACARATO, 2004](#)).

No Brasil, a ideia de se trabalhar com esses recursos didáticos surgiu na década de 20, decorrente dos ideais da Escola Nova, de concepção empírico-ativista. Esta nova tendência em oposição à Escola Tradicional, considerava o aluno como centro do processo e os métodos de ensino baseados nos princípios "aprende-se a fazer fazendo" se pautavam em atividades desencadeadas pelo uso dos jogos e materiais manipuláveis valorizando a ação, a manipulação e a experimentação ([FIORENTINI, 1995](#)).

Contudo, nesta época, esses ideais não alcançaram êxito devido ao despreparo dos professores e pelas poucas inovações presentes no livro didático. Somente a partir da década de 1970, com o fracasso do Movimento da Matemática Moderna, esse ideário empírico-ativista é retomado com certa força ([FIORENTINI, 1995](#)).

A partir de 1980, constata-se uma proliferação de títulos de livros didáticos. Esses, por sua vez, tornaram-se a principal referência para os professores ([NACARATO, 2004](#)).

Neste período, destacam-se as contribuições advindas da Psicologia Cognitiva, por meio de Dienes e Bruner, baseados nas ideias de Piaget, influenciando fortemente as produções curriculares e, conseqüentemente, incorporadas pelos materiais didáticos destinados ao professor. Também, nesta época, a tendência construtivista passa a ser muito forte no ensino da Matemática ([NACARATO, 2004](#)).

Ainda [Nacarato \(2004\)](#), a partir de 1990, vários recursos didáticos, além dos materiais manipuláveis, como o uso de calculadoras e do computador vêm sendo sugeridos

para o ensino da Matemática.

Estudos mostram que o material concreto tem possibilitado que os estudantes estabeleçam relações entre as situações experienciadas na manipulação de tais materiais e a abstração dos conceitos estudados. O uso de material concreto propicia aulas mais dinâmicas, e amplia o pensamento abstrato por um processo de retificações sucessivas que possibilita a construção de diferentes níveis de elaboração do conceito (PAIS, 2006).

Segundo (LORENZATO, 2006), os materiais didáticos podem desempenhar várias funções, dependendo do objetivo a que se prestam: apresentar um assunto, motivar os alunos, auxiliar a memorização de resultados e facilitar a descoberta.

A preocupação com o ensino significativo também se faz presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997). A recomendação do uso de recursos didáticos, incluindo alguns materiais específicos, é feita em quase todas as propostas curriculares.

No entanto, segundo os PCNs (BRASIL, 1997), na prática, nem sempre há clareza do papel dos recursos didáticos no processo ensino-aprendizagem, bem como da adequação do uso desses materiais, sobre os quais se projetam algumas expectativas indevidas.

Ainda, de acordo com os PCNs (BRASIL, 1997), recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática.

Deste modo, será que o material concreto é um recurso indispensável para a aquisição de uma efetiva aprendizagem?

Um exemplo de uma opinião contrária quanto ao uso de materiais manipuláveis é colocado por Carraher e Schliemann (1998), citados por Fiorentini e Miorim (1990, p.2), ao afirmarem que "*não precisamos de objetos na sala de aula, mas de situações em que a resolução de um problema implique a utilização dos princípios lógico-matemáticos a serem ensinados*". Segundo Fiorentini e Miorim (1990), para esses pesquisadores, o concreto para a criança não significa necessariamente os materiais manipulativos, mas as situações que a criança tem de enfrentar socialmente.

Segundo Nacarato (2004), nenhum material didático-manipulável ou de outra natureza constitui a salvação para a melhoria do ensino de Matemática. Ou seja, não é o simples uso de materiais que possibilitará a elaboração conceitual por parte do aluno, mas a forma como esses materiais são utilizados e os significados que podem ser construídos a partir deles.

Deste modo, de acordo com Fiorentini e Miorim (1990), o professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico.

Nesse sentido, o material mais adequado, nem sempre, será o visualmente bonito e nem o já construído.

Ainda, segundo [Fiorentini e Miorim \(1990\)](#), ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um "aprender" mecânico e muito menos um "aprender" que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo, do qual o aluno durante a construção de um material tem a oportunidade de aprender Matemática de uma forma mais efetiva.

#### 4.2.1 Materiais manipuláveis no ensino da Geometria

Estudos na área da Geometria apontam a importância dos processos de visualização no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos ([NACARATO, 2004](#)).

Devido às dificuldades encontradas e ao fraco desempenho mostrado por alunos em Geometria, professores pesquisadores têm desenvolvido maneiras que façam o educando a se interessar e envolver-se no estudo da Geometria ([SANTOS, 2007](#)).

Segundo [Santos \(2007\)](#), uma dessas formas é o estudo da teoria de Van Hiele. Esse modelo foi criado por Pierre Van Hiele e sua esposa Dina Van Hiele, tendo por base nas dificuldades apresentadas por alunos do curso secundário na Holanda.

A teoria aponta que a aprendizagem em Geometria ocorre em **cinco** níveis hierárquicos de conhecimento: reconhecimento, análise, ordenação, dedução e rigor da conceituação ([SANTOS, 2007](#)).

Assim, o modelo de Van Hiele leva o aluno partir do nível da visualização de um conceito geométrico, seguir ao nível de análise, prosseguir pelo nível da dedução formal e, finalmente atingir o nível do rigor da conceituação do ente geométrico, passando a entender e relacionar conceitos geométricos abstratos ([SANTOS, 2007](#)).

Na teoria de Van Hiele a visualização, a análise e organização informal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito ([KALLEF, 1998](#)).

Segundo [Kallef \(1998\)](#), a habilidade da visualização pode ser desenvolvida até certo ponto, se for disponibilizado ao indivíduo um apoio didático baseado em materiais concretos representativos do objeto geométrico em estudo.

Assim, segundo a autora, é aconselhável que leve ao aluno a vivenciar experiências com diversos tipos de materiais concretos manipulativos, a fim de que ele possa ter a oportunidade de encontrar o meio material que seja mais apropriado à sua percepção sensorial e que mais aguace a sua criatividade.

Pode-se perceber também a importância da visualização expressa nos textos dos Parâmetros Curriculares Nacionais:



O pensamento geométrico se desenvolve inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. Por meio da observação e experimentação elas começam a discernir as características de uma figura, e a usar as propriedades para conceituar classes de formas (BRASIL, 1997, p.127)

De acordo com Nacarato (2004), há vários materiais que podem contribuir para o desenvolvimento da visualização em todas as séries e níveis, como: conjunto de sólidos geométricos, tangram, geoplano e poliminós.

Neste sentido, reforçando a importância de tais materiais no ensino da Geometria, Pais (2000) relata que o uso dos mesmos, por exemplo, como as peças do tangram possibilitam diferentes rotações, composições e decomposições ampliando o repertório de representações possíveis. Porém, o autor faz um alerta

o uso inadequado de um recurso didático pode resultar em uma inversão didática em relação à sua finalidade pedagógica inicial. Isto ocorre quando o material passa a ser utilizado como uma finalidade em si mesmo em vez de ser visto um instrumento para a aquisição de um conhecimento específico (PAIS, 2000, p.5)

Ainda, de acordo com Pais (2000)

nas atividades de ensino da Geometria, envolvendo o uso de materiais, é preciso estar duplamente vigilante para que toda informação proveniente de uma manipulação esteja em sintonia com algum pressuposto racional, e ao mesmo tempo, que todo argumento dedutivo esteja associado a alguma dimensão experimental. Acreditamos que este é o primeiro passo para valorizar uma interpretação dialética para o uso de materiais didáticos. Evitar uma racionalidade vazia desprovida de significado, assim como, evitar toda espécie de atividade empírica desconexa de um objetivo educacional previamente analisado (PAIS, 2000, p.13)

Assim, diante de tudo o que foi apresentado, observa-se o estímulo do uso de materiais manipuláveis no ensino da Geometria em todas as séries e níveis de ensino. Contudo, compete ao professor, antes de tudo, um exercício de reflexão pedagógica sobre quais materiais são mais apropriados no processo de aprendizagem, encontrando um equilíbrio entre a fase experimental com a manipulação de tais materiais e a fase de construção do pensamento dedutivo, sem a prioridade de uma sobre a outra.

## Capítulo 5

# DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Este capítulo apresenta toda a dinâmica na sala de aula envolvendo o tema dessa pesquisa. Ou seja, todas as atividades aplicadas aos alunos durante o desenvolvimento do trabalho.

### 5.1 Trabalhando com polígonos

Devido ao pouco conhecimento dos alunos sobre ângulos e polígonos, pois, muitos desconheciam os nomes dos polígonos de acordo com o número de lados bem como os tipos de ângulos (obtusos, agudos e retos) e o conceito de polígono regular, o presente trabalho iniciou-se com a revisão dos conteúdos mencionados acima.

#### 5.1.1 Aula 1

Nesta aula foi feita uma breve revisão sobre polígonos, como a classificação de acordo com os lados e o conceito de polígono regular.

A atividade desta aula teve os seguintes objetivos:

- Classificar os polígonos quanto ao número de lados.
- Reconhecer os polígonos regulares.

O texto e os exercícios dessa atividade foram retirados do livro "Vontade de Saber", sexto ano, FTD ( Apêndices [A.1](#) e [A.2](#)).

#### 5.1.2 Aulas 2 e 3

Estas aulas foram dedicadas à revisão sobre ângulos, os tipos de ângulos, destacando a importância do uso do transferidor nos exercícios, uma vez que, o uso do mesmo seria bastante solicitado aos alunos nas atividades sobre simetria de rotação.

A atividade teve como principais objetivos:

- Compreender a ideia de ângulo.
- Medir ângulos com o auxílio do transferidor e esquadro.
- Classificar ângulos em reto, raso, agudo e obtuso.

O texto e os exercícios desta atividade foram retirados do livro "Vontade de Saber", sexto ano, FTD ( Apêndices B.1 e B.2).

Apesar deste trabalho ter sido aplicado ao oitavo ano, a maioria dos alunos desconhecia o uso do transferidor e alguns deles apresentaram dificuldades em medir os lados de um polígono ao utilizarem a régua.

### 5.1.3 Aulas 4, 5 e 6

Nestas aulas, os conteúdos trabalhados foram o cálculo da soma dos ângulos internos de um triângulo e em seguida, a soma dos ângulos internos de um polígono regular.

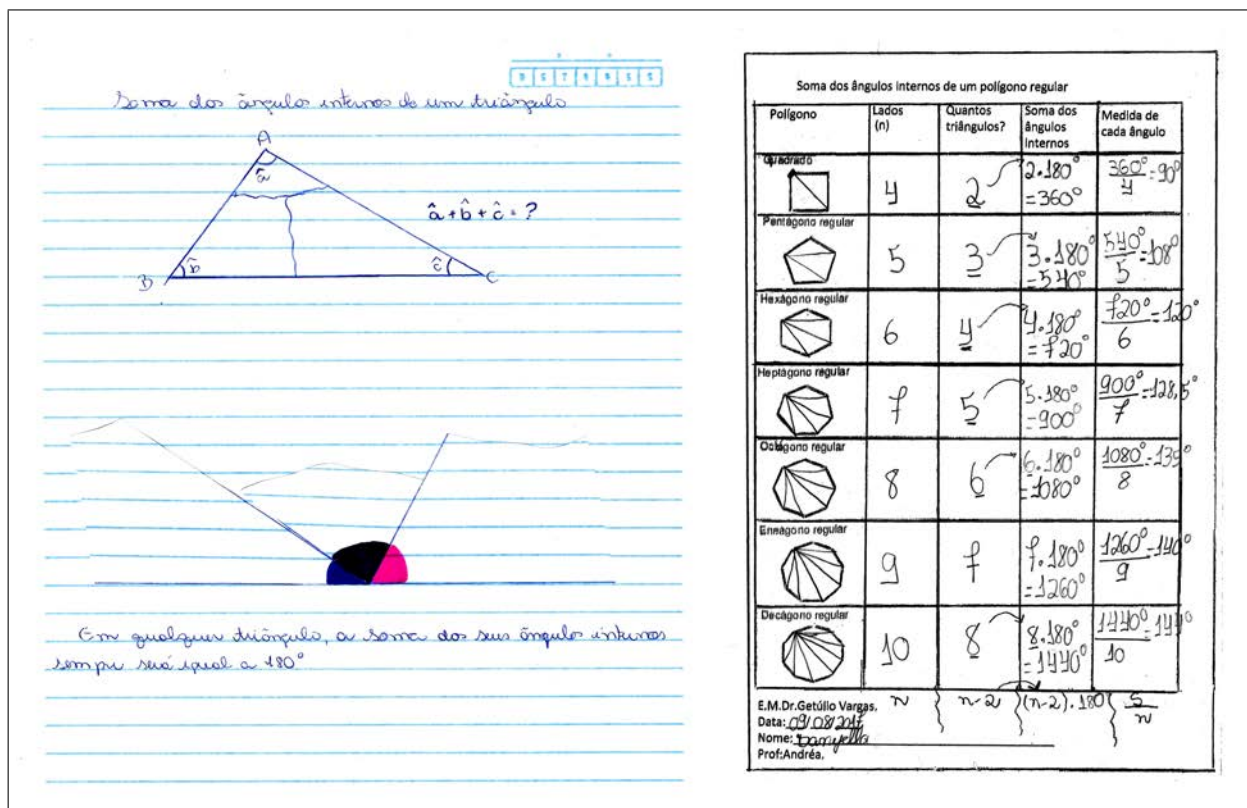
Os objetivos principais das atividades foram os seguintes:

- Verificar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a  $180^\circ$ .
- Calcular a soma dos ângulos internos de um polígono por meio da decomposição em triângulos.
- Deduzir a fórmula para o cálculo da soma dos ângulos internos de um polígono.
- Calcular os ângulos internos de um polígono regular.

Para o primeiro conteúdo, foi realizada uma simples atividade: cada aluno desenhou um triângulo no caderno, destacando os ângulos com cores diferentes, ao recortá-los e uni-los, os alunos chegaram a conclusão que a soma dos ângulos de qualquer triângulo era igual a  $180^\circ$  (Figura 29).

Enquanto que o segundo conteúdo foi trabalhado através da decomposição dos polígonos em triângulos, chegando assim, à fórmula  $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$  ( Apêndice B.3) dando ênfase nas medidas dos ângulos internos desses polígonos regulares, nos quais foram registrados em uma folha sendo utilizada nas atividades posteriores ( Apêndice B.4).

Figura 29 – À esquerda, caderno de uma aluna sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo e à direita, a atividade sobre os ângulos internos de um polígono regular



Fonte: Elaboração própria

### 5.1.4 Aulas 7 a 12

Para a realização das atividades, a turma foi dividida em grupos e cada grupo recebeu um kit de polígonos regulares de 3,4,5,6,7,8,9,10,12,15 e 20 lados. Cada kit continha um total de 120 polígonos regulares, que foram desenhados no Autocad e recortados por uma máquina que proporcionava um corte perfeito para o encaixe das peças (Figura 30).

O grande número de peças foi fundamental para a realização das atividades, uma vez que, inicialmente os alunos chegavam às respostas por meio do manuseio dessas peças.

O objetivo da atividade foi a pavimentação parcialmente do plano, obedecendo as seguintes condições:

- os vértices deveriam coincidir sempre num mesmo ponto (arranjo ou nó) e
- não deveria haver espaço nem sobreposições entre os polígonos.

Figura 30 – Kit de polígonos regulares



Fonte: Elaboração própria

Além disso, as tarefas foram realizadas seguindo uma sequência de perguntas, inicialmente com o seguinte objetivo:

- Concluir que a soma dos ângulos ao redor de um vértice era igual a  $360^\circ$ .

Após esta conclusão, outro objetivo da atividade era verificar se todas as combinações de polígonos cujo arranjo ao redor de um vértice era de  $360^\circ$ , puderam ser expandidas no plano a fim de formar mosaicos.

Nesta etapa, como foi mencionado anteriormente, uma grande quantidade de peças proporcionou aos alunos que chegassem a conclusões de maneira experimental, sendo mais coerente para a série que foi trabalhada.

No início, os alunos encaixavam os polígonos por tentativas, porém, à medida que aumentava o número de polígonos na formação de um arranjo, as dificuldades começaram a surgir. Neste momento, a partir das combinações de um só tipo de polígono, que, aliás, foram feitas sem dificuldades, os alunos perceberam que a soma dos ângulos ao redor de um arranjo sempre era de  $360^\circ$ . Deste modo, com a folha dos ângulos dos principais polígonos feita na aula anterior, eles chegaram aos outros arranjos.

O Quadro 8 mostra as perguntas que serviram na orientação do trabalho:

Quadro 8 – Perguntas feitas aos alunos

1. Utilizando **um tipo de polígono de cada vez**, quais polígonos se encaixam formando um arranjo?
2. É possível formar arranjos usando **um tipo de polígono regular** de mais de seis lados? Por quê?
3. Qual a quantidade mínima necessária de polígonos regulares para a formação de um arranjo?
4. Qual a quantidade máxima necessária de polígonos regulares para a formação de um arranjo?
5. Quais as possíveis combinações de três polígonos, sendo um deles um triângulo para a formação de um arranjo? É possível expandir todas essas combinações de modo a obtermos uma pavimentação do plano?
6. E com quatro polígonos? E com cinco polígonos? E com seis polígonos? Quais dessas combinações se expandem pelo plano?

Fonte: Elaboração própria

Nesta atividade, vale ressaltar, a atitude dos alunos ao receberem o kit de polígonos. Inicialmente, com os polígonos em mãos, os alunos não priorizaram as tarefas propostas, formando configurações de maneira desorganizada e apresentando pouco interesse.

Diante deste fato, a pesquisadora percebeu que algo deveria ser feito para que as atividades apresentassem um caráter mais matemático. Para que os objetivos da atividade fossem alcançados, foi feita uma gincana entre os grupos.

Os desafios propostos foram as perguntas feitas aos grupos, lançadas uma de cada vez. O grupo que, primeiramente, encontrava a solução da pergunta, recebia uma pontuação. Tal procedimento adotado pela pesquisadora gerou grande competitividade entre os alunos e a atividade conseguiu alcançar bastante êxito.

À medida que respondiam às perguntas, as respostas eram registradas numa folha dada a cada aluno no início da aula, contendo as perguntas do Quadro 8.



A Figura 31 mostra o trabalho realizado pelos alunos seguindo as orientações acima mencionadas.

Figura 31 – Atividade realizada pelos alunos utilizando os polígonos



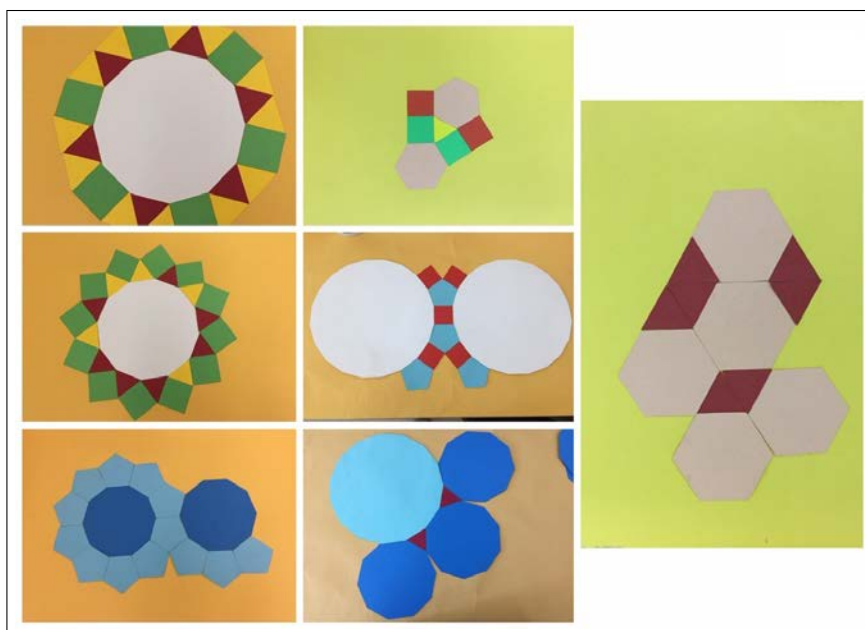
Fonte: Elaboração própria

Na expansão dos arranjos no plano, os alunos apresentaram duas dificuldades:

- alguns alunos ao expandirem os polígonos, não conseguiram mantê-los na mesma ordem nos arranjos ao longo da expansão e
- no início, alguns não distinguiam que as configurações  $(3,3,4,12)$  e  $(3,4,3,12)$ , por exemplo, eram diferentes, bem como outras:  $(3,3,6,6)$  e  $(3,6,3,6)$ .

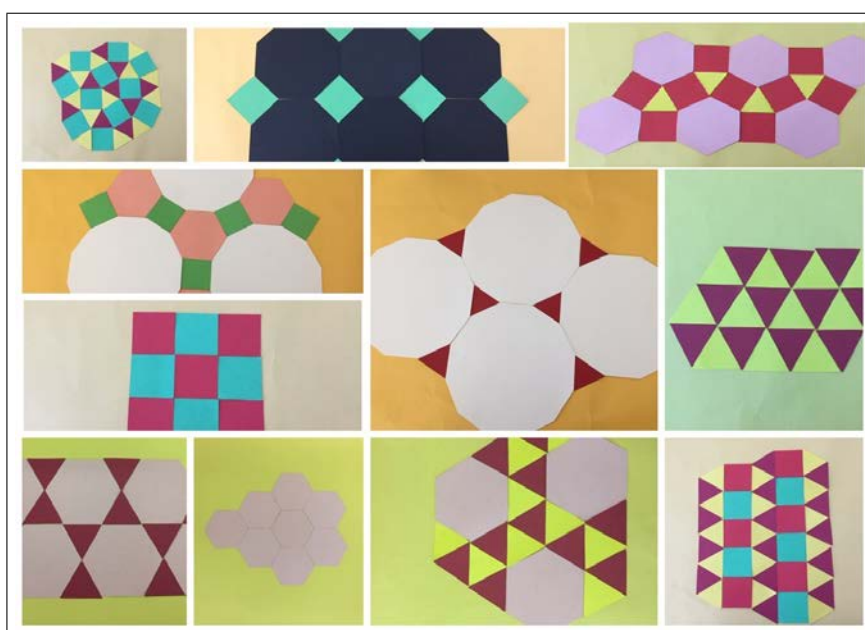
No final da atividade, para que os alunos assimilassem de maneira organizada o conteúdo trabalhado, a pesquisadora sugeriu a separação entre as combinações possíveis de expansão daquelas que não foram possíveis (Figuras 32 e 33).

Figura 32 – Combinações de polígonos que não se expandem pelo plano



Fonte: Elaboração própria

Figura 33 – Combinações de polígonos que se expandem pelo plano



Fonte: Elaboração própria

O estudo das configurações foi abordado , novamente, após o término do estudo sobre simetria, referindo-se a atividade 13, citada no capítulo anterior.



## 5.2 Trabalhando com simetrias

A primeira simetria trabalhada com os alunos foi a simetria de reflexão, em seguida, de rotação e finalmente, a simetria de translação.

A seguir, o roteiro das atividades feitas com os alunos.

### 5.2.1 Aulas 13, 14 e 15

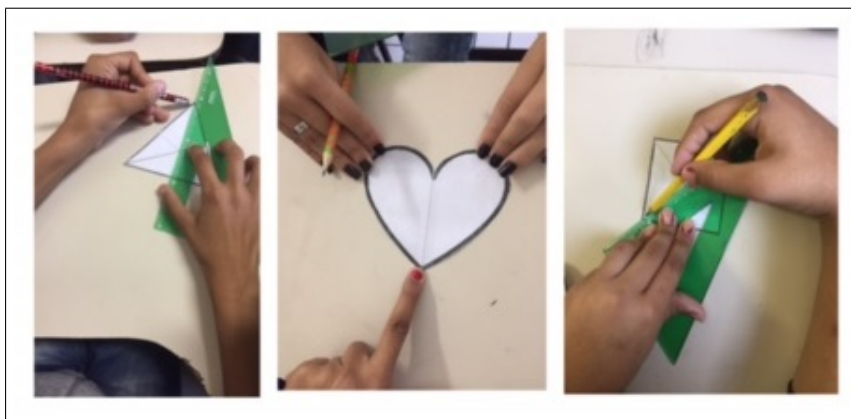
As atividades referentes a estas aulas tiveram como objetivos:

- Identificar o(s) eixo(s) de simetria numa figura.
- Reconhecer figuras que possuem eixo de simetria.
- Reconhecer as propriedades da simetria de reflexão.
- Obter a figura simétrica de cada figura dada em relação ao eixo de simetria solicitado.
- Reproduzir o desenho dado utilizando as peças do tangram, e depois obter a figura simétrica do desenho formado.

Inicialmente, uma folha com várias figuras foi entregue aos alunos, que recortaram e dobraram de modo que cada figura ficasse com duas partes iguais.

Em seguida, a(s) dobra(s) feita(s) foi(foram) definida(s) como eixo de simetria. Com a figura dobrada, foi solicitado aos alunos que marcassem algum ponto de modo que esse aparecesse nas duas partes. Assim feito, e com a figura desdobrada, o próximo passo foi medir a distância entre cada ponto e o eixo de simetria (Figura 34). Logo, os alunos perceberam uma das propriedades da simetria de reflexão.

Figura 34 – Primeira atividade de simetria de reflexão realizada pelos alunos



Fonte: Elaboração própria

Além disso, foram feitas duas atividades: uma escrita e uma lúdica.

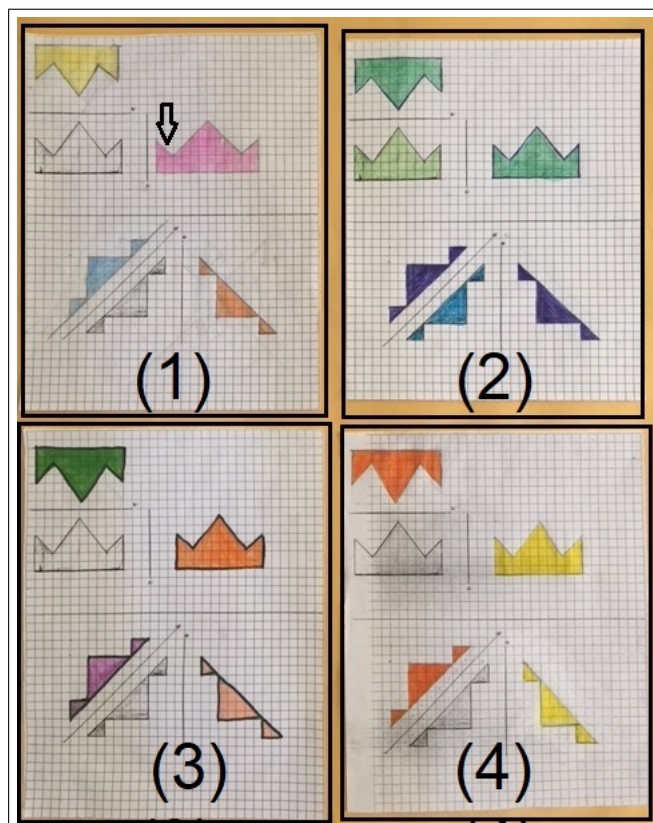
Na atividade escrita, os alunos resolveram exercícios retirados do livro *Vontade de Saber*, sexto ano, FTD (Apêndice C.1).

Nesta atividade, alguns alunos cometeram alguns erros ao reproduzir a imagem da figura original quando o eixo de simetria estava na posição inclinada e nas distâncias entre a figura simétrica e o eixo de simetria e.

Além disso, a orientação dada aos alunos era que o eixo de simetria e funcionasse como um espelho para que pudessem perceber a outra propriedade da simetria de reflexão, ou seja, sua imagem tinha sentido inverso em relação à figura original.

Abaixo, algumas atividades foram selecionadas com o objetivo de apontar os erros mais comuns cometidos (Figuras 35 e 36).

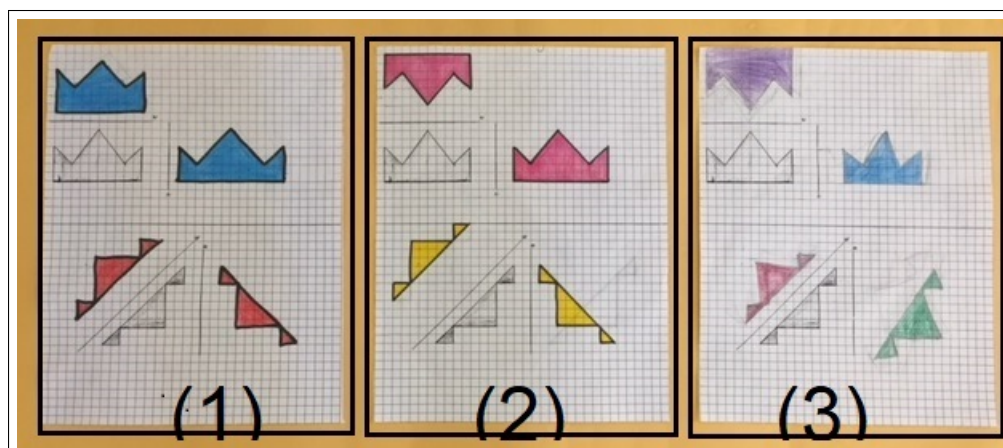
Figura 35 – Atividades 2, 3 e 4 corretas e a atividade 1 apresentando erros em relação aos eixos vertical e horizontal



Fonte: Elaboração própria

Na Figura 36, nas atividades 1 e 3, observa-se que não foram feitas as reflexões de algumas figuras, apenas a reprodução das mesmas, e erros nas distâncias entre as figuras simétricas em relação aos eixos de simetria.

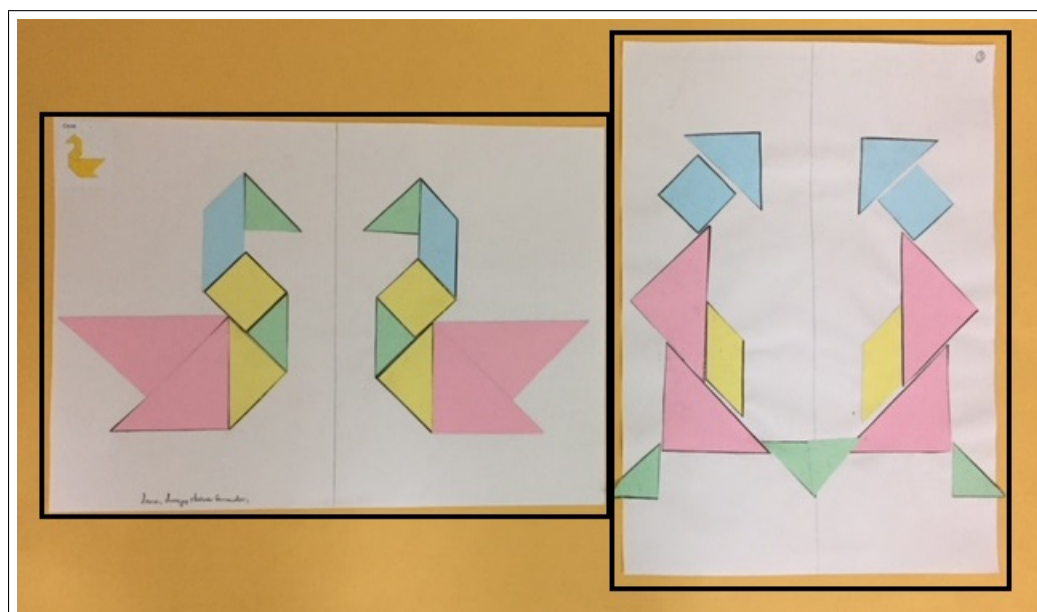
Figura 36 – Outras atividades que apresentaram erros



Fonte: Elaboração própria

Em seguida, os alunos realizaram uma tarefa envolvendo as peças do tangram. Cada grupo recebeu um kit contendo uma folha A4 com eixo de simetria (reta no meio da folha) e dois conjuntos de peças do tangram. De um lado da folha, os alunos fizeram a reprodução da figura proposta (lado superior esquerdo) e do outro, sua reflexão (Figura 37).

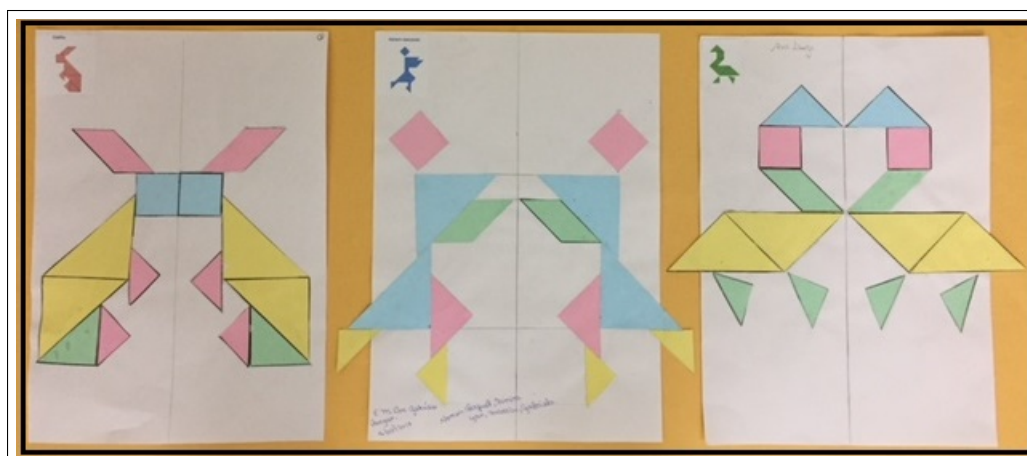
Figura 37 – Atividades realizadas pelos alunos da turma 802, sem erros



Fonte: Elaboração própria

A maioria dos alunos, ciente da propriedade da simetria de reflexão utilizou a régua nesta tarefa executando-a com perfeição (Figura 38).

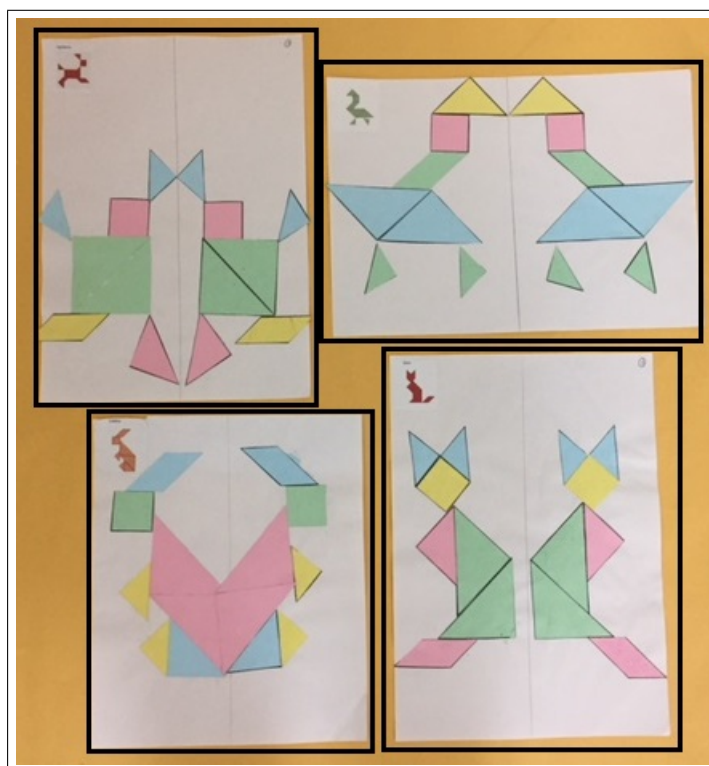
Figura 38 – Outras atividades realizadas pela turma 801, sem erros



Fonte: Elaboração própria

Abaixo, algumas atividades com erros a partir da construção da figura original (Figura 39).

Figura 39 – Atividades com erros, a partir da figura original



Fonte: Elaboração própria

Assim, finaliza-se as atividades de simetria de reflexão e a seguir, tem-se o estudo sobre a simetria de rotação.

### 5.2.2 Aulas 16 a 20

As atividades sobre simetria de rotação tiveram como objetivos:

- Identificar as figuras que apresentaram rotação em torno de um ponto.
- Reconhecer as imagens que apresentaram simetria de rotação de acordo com o ângulo solicitado.
- Identificar o ângulo de rotação utilizando o transferidor.
- Determinar os ângulos de  $45^\circ$  e de  $90^\circ$ , por meio de dobraduras.
- Utilizar os conhecimentos adquiridos sobre ângulos na confecção de mandalas.

Duas atividades foram elaboradas para as aulas de simetria de rotação: uma escrita e a outra, lúdica (confecção de mandalas utilizando CDs, transferidor, régua e tinta acrílica).

#### 1. Atividade escrita:

Para a atividade foram selecionados alguns exercícios de rotação do livro *Vontade de Saber*, sétimo ano (Apêndice D.1).

#### 2. Atividade lúdica:

Na confecção das mandalas, primeiramente, os alunos desenharam um círculo do tamanho de um CD e com o uso do transferidor marcaram ângulos de  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $120^\circ$ . Para os ângulos de  $45^\circ$  e  $90^\circ$ , não foi necessário o uso do transferidor, apenas dobraram o círculo até obter o ângulo desejado. Nas linhas marcadas, os alunos desenharam e cortaram os motivos formando, assim, os moldes (Figura 40).

Figura 40 – Alunos na confecção dos moldes

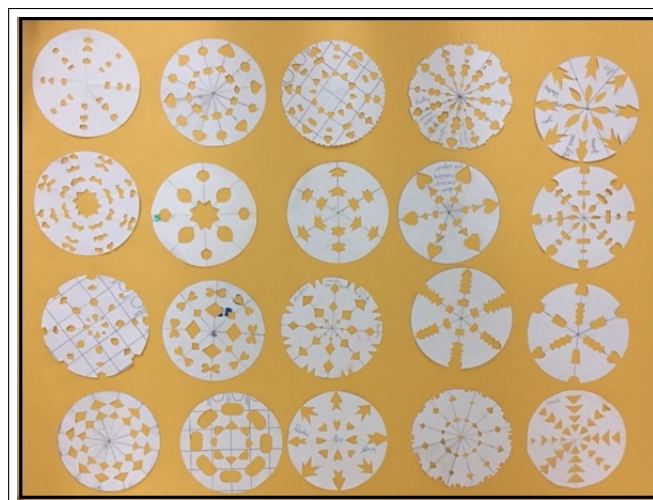


Fonte: Elaboração própria



Assim, com os moldes feitos (Figura 41) e com os CDs sem a película, as mandalas foram preparadas com tinta acrílica tornando uma atividade bem interessante ao proporcionar vários CDs com visual bastante diversificado.

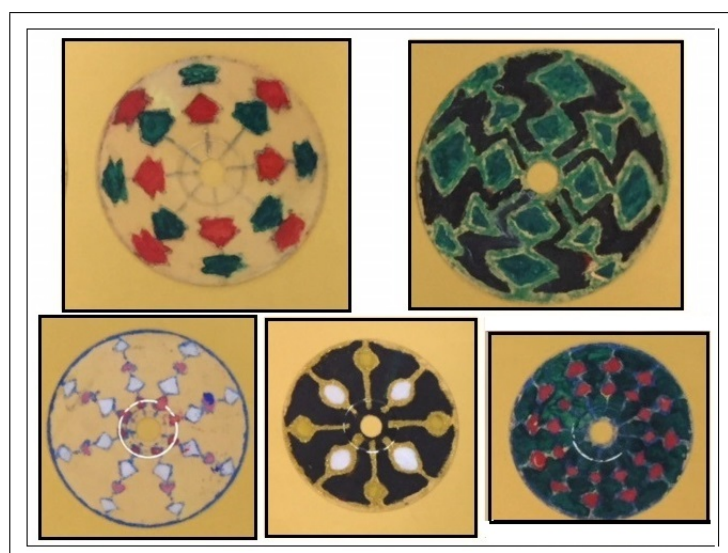
Figura 41 – Os moldes preparados pelos alunos



Fonte: Elaboração própria

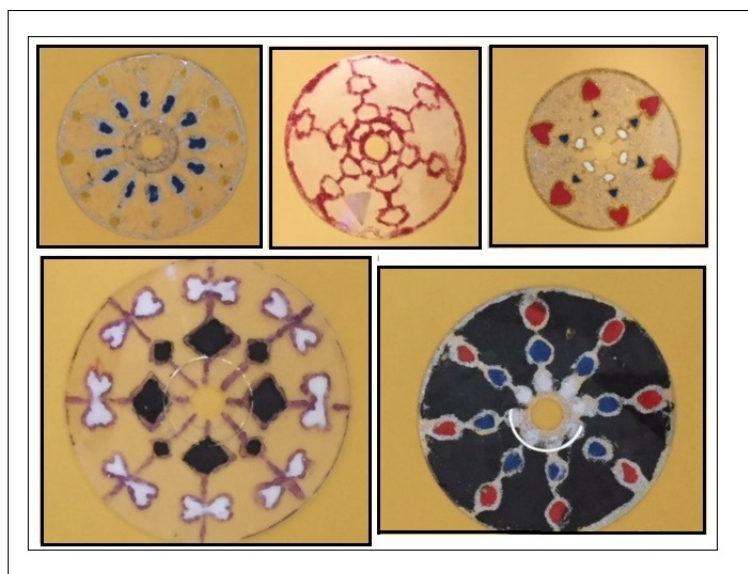
Esta etapa da atividade gerou grande entusiasmo nas turmas, pois, cada grupo confeccionou mais de um tipo de molde para a construção das mandalas, como foi visto anteriormente, e a seguir, as mandalas prontas (Figuras 42 e 43).

Figura 42 – Mandalas feitas pela turma 801



Fonte: Elaboração própria

Figura 43 – Mandalas feitas pela turma 802



Fonte: Elaboração própria

### 5.2.3 Aula 21 a 23

Finalmente, as atividades sobre simetria de translação. Da mesma forma como foram trabalhadas as simetrias de reflexão e rotação, os alunos fizeram duas atividades: uma escrita e outra, lúdica.

Os objetivos propostos para as atividades foram os seguintes:

- Identificar figuras simétricas por translação.
- Identificar a direção, o sentido, e a distância entre as figuras simétricas por translação.
- Reconhecer, por meio das dobraduras feitas, as propriedades da simetria de translação.

#### 1. Atividade escrita:

Para esta atividade foram selecionados os exercícios do livro *Vontade de Saber*, nono ano, FTD (Apêndice E.1).

#### 2. Atividade lúdica

Para a realização da atividade, foram entregues tiras de cartolina colorida aos alunos a fim de que os mesmos as dobrassem e em seguida, fizessem algum desenho. Ao desdobrarem, puderam observar a simetria de translação.

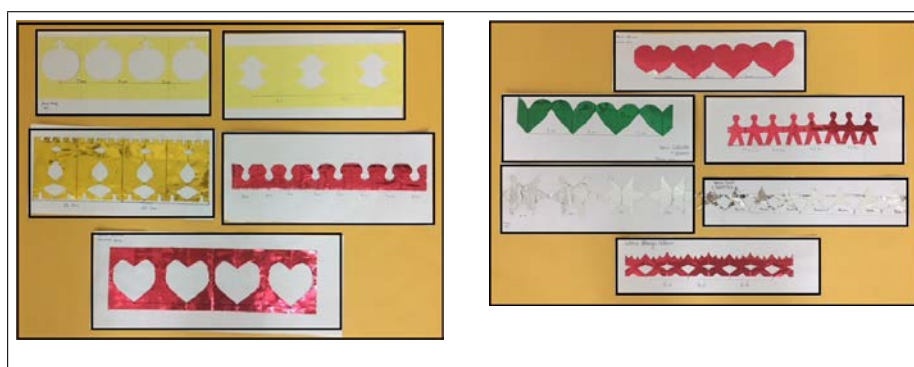
A atividade, apesar de simples, pois, muitos alunos já fizeram em alguma aula de Artes, a pesquisadora teve que orientá-los em relação ao corte da figura. Além disso, foi ressaltado o verdadeiro significado da simetria de translação, ou seja, as figuras movimentavam-se em um sentido, uma direção e mantinham uma mesma distância entre elas. Este fato foi averiguado pelos alunos com a utilização da régua. As Figuras 44 e 45 mostram os trabalhos realizados pelos alunos.

Figura 44 – Trabalhos de simetria de translação



Fonte: Elaboração própria

Figura 45 – Outros trabalhos realizados pelos alunos sobre simetria de translação



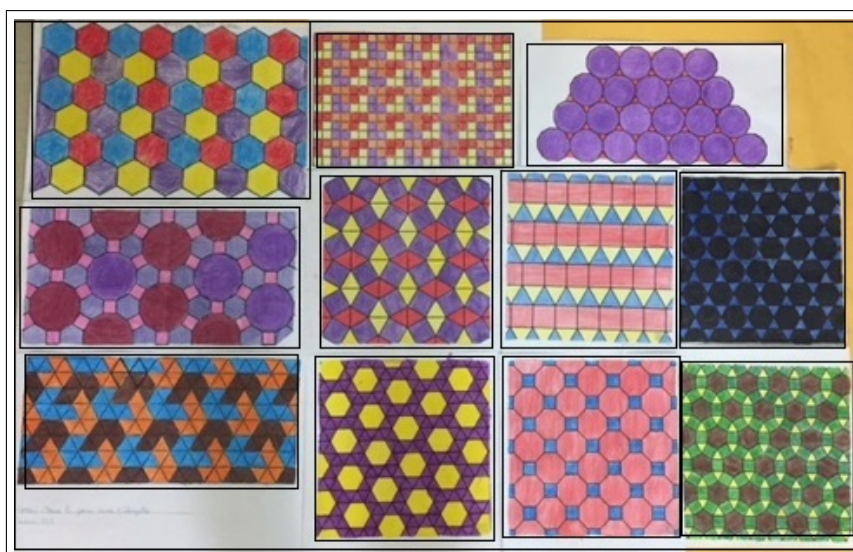
Fonte: Elaboração própria



### 5.3 Trabalhando com polígonos e simetria

Nesta atividade, houve uma relação entre os dois conteúdos estudados: as configurações de polígonos regulares que expandem no plano e as simetrias. O objetivo dessa atividade era colorir as onze configurações que se expandem no plano de modo que os alunos pudessem basear-se em algum tipo de simetria estudada anteriormente, fazendo assim, de uma maneira padronizada ( Figura 46).

Figura 46 – Malhas com as configurações coloridas pelos alunos



Fonte: Elaboração própria

Cada grupo de alunos coloriu um tipo de malha correspondendo a uma das onze configurações que se expandem no plano.

### 5.4 Trabalhando simetria com Escher

Durante os trabalhos de simetria, a pesquisadora observou que os alunos ao realizarem as atividades que envolviam algum tipo de produção artística ficavam bem motivados. Assim, aproveitando desse fato, e por considerar que as obras de Escher proporcionariam uma experiência bem diferente e bastante enriquecedora para o estudo de simetrias foi proposto aos alunos que fizessem uma pequena amostra baseada em alguns trabalhos do artista. Primeiramente, foi feita uma abordagem sobre Escher e suas obras através da leitura do livro [Imenes e Lellis \(2000\)](#), que utiliza-se de uma linguagem bem coerente para série trabalhada em questão (Apêndice F.1).

Durante a leitura, os alunos ficaram admirados ao virem as transformações dos polígonos em figuras, por exemplo, de um hexágono que deu forma a um lagarto .

Por meio da dissertação de [Alves \(2014\)](#), que relata de uma maneira mais aprofundada as obras e as técnicas de Escher, alguns modelos mais simples foram selecionados servindo de inspiração para os nossos trabalhos.

Os modelos selecionados foram as construções a partir da **translação no quadrado, reflexão no triângulo e rotação no hexágono**.

Cada turma(801 e 802) foi dividida em pequenos grupos, e cada um deles ficou responsável em desenvolver uma das técnicas acima.

Apesar de alguns incidentes, por exemplo, alguns alunos não tinham muita habilidade no corte dos moldes ao utilizarem a tesoura, gerando com isso pequenas falhas ao encaixar as figuras, o resultado final foi bastante satisfatório.

Alguns grupos fizeram trabalhos surpreendentes, como pode-se ver logo após as descrições das técnicas.

#### 5.4.1 Desvendando as técnicas

Inicialmente, cada grupo recebeu um kit contendo: um modelo com as instruções, um polígono regular(triângulo, quadrado ou hexágono) de papel cartão e um pedaço de cartolina. O polígono foi desenhado na cartolina e a partir daí, os alunos experimentaram várias formas até que chegassem a um molde para ser reproduzido, formando assim, as suas artes.

Primeiramente, o Quadro 9 mostra a técnica de construção a partir do quadrado.

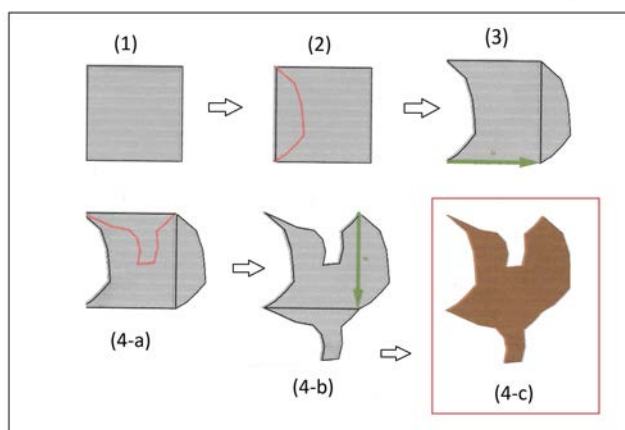
Quadro 9 – **Modelo 1**: Construção a partir do quadrado

1. Transferir o quadrado dado para a cartolina e recortar;
2. Em um dos lados do quadrado, desenhar um polígono;
3. Recortar o polígono desenhado e fazer sua translação para o outro lado do quadrado(lado oposto);
4. Repetir a operação com os outros lados do quadrado, ou seja, desenhar um polígono em um dos lados e transladá-lo para o lado oposto construindo, finalmente, a figura desejada;
5. Reproduzir vários moldes da figura construída e utilizando-se de translações, finalizar com os encaixes para formar a pavimentação.

Fonte: Adaptado de [Alves \(2014\)](#)

A Figura 47 demonstra os passos descritos no Quadro anterior para a construção da pavimentação.

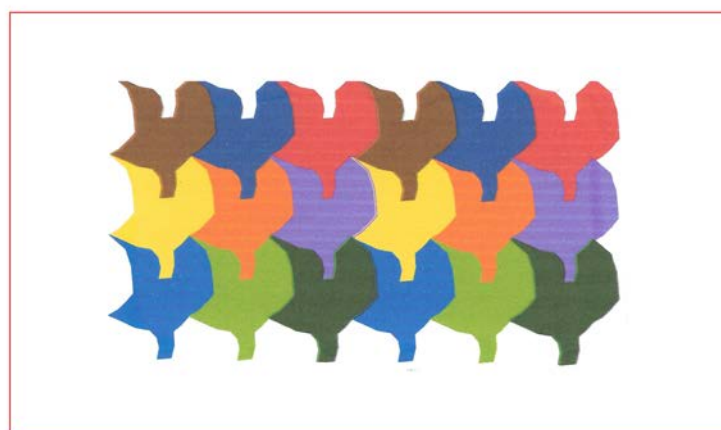
Figura 47 – Passos para a construção do modelo 1



Fonte: Adaptado de Alves (2014)

Abaixo, o resultado obtido com as translações dos moldes da Figura 4-c, como mostra a Figura 48.

Figura 48 – Pavimentação formada pelas translações dos moldes



Fonte: Alves (2014)

O Quadro 10 mostra a técnica do modelo 2, ou seja, a construção dos moldes a partir do hexágono.

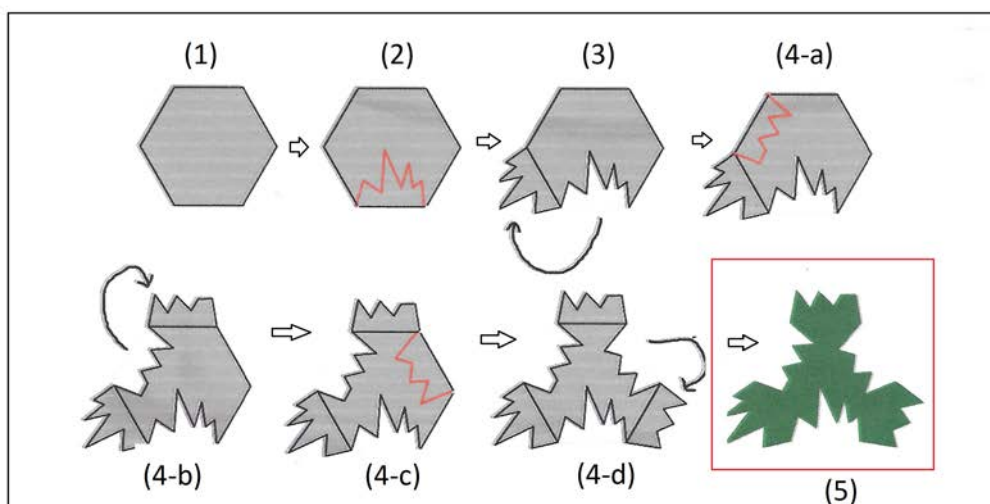
Quadro 10 – **Modelo 2**: Construção a partir do hexágono

1. Transferir o hexágono dado para a cartolina e recortar.
2. Em um dos lados do hexágono, desenhar um polígono.
3. Recortar o polígono desenhado e fazer sua translação para o lado adjacente.
4. Repetir a operação com os outros lados do hexágono, ou seja, desenhar um polígono em um dos lados e transladá-lo para o lado adjacente, construindo a figura desejada.
5. Reproduzir vários moldes da figura construída e utilizando-se de rotações para a obtenção dos encaixes, formando, assim, a pavimentação.

Fonte: Adaptado de [Alves \(2014\)](#)

A seguir, a Figura 49 demonstra os passos descritos do **Modelo 2**.

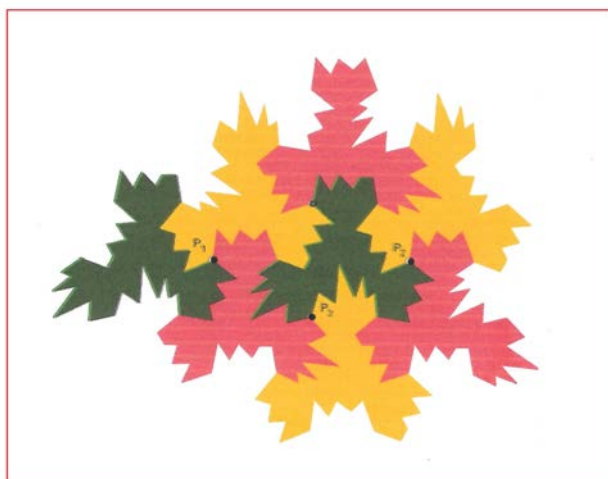
Figura 49 – Passos para a construção do molde a partir do hexágono



Fonte: [Alves \(2014\)](#)

Na Figura 50, tem-se o resultado obtido pelas rotações dos moldes da figura(5).

Figura 50 – Pavimentação formada pelas rotações dos moldes



Fonte: Alves (2014)

Finalmente, o Quadro 11 demonstra a técnica da construção a partir do triângulo.

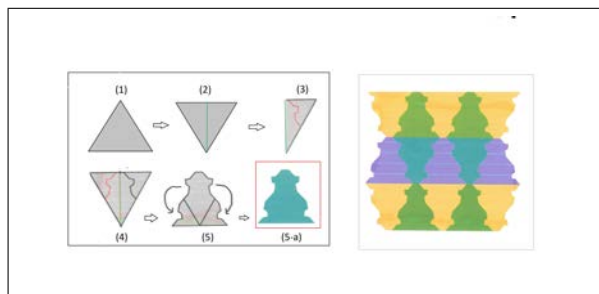
Quadro 11 – **Modelo3**: Construção a partir do triângulo

1. Transferir o triângulo dado para a cartolina e recortar.
2. Traçar uma das alturas do triângulo.
3. Dobrar o triângulo na linha da altura traçada e desenhar um polígono a partir de um dos vértices.
4. Ao recortar o polígono desenhado, obtêm-se dois polígonos, pois o triângulo encontra-se dobrado( na verdade, houve uma reflexão do polígono desenhado).
5. Desdobrar o triângulo e colar os polígonos conforme indicado nas setas, construindo a figura desejada. OBS: Ao fazer o corte do polígono com o triângulo dobrado, a reflexão torna-se mais perfeita.
6. Reproduzir vários moldes da figura desejada, e utilizando-se de rotações, reflexões e translações formar, finalmente, a pavimentação.

Fonte: Adaptado de Alves (2014)

A Figura 51 mostra os passos descritos do **Modelo 3**.

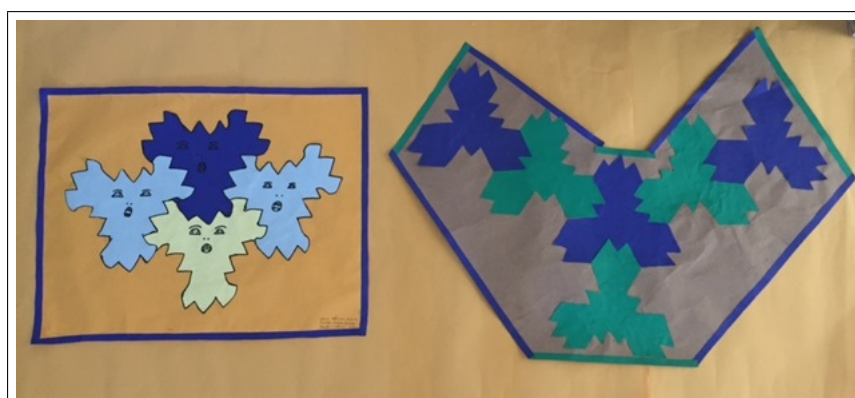
Figura 51 – Do lado esquerdo da figura, a construção do molde e do lado direito, a pavimentação construída



Fonte: Adaptado de Alves (2014)

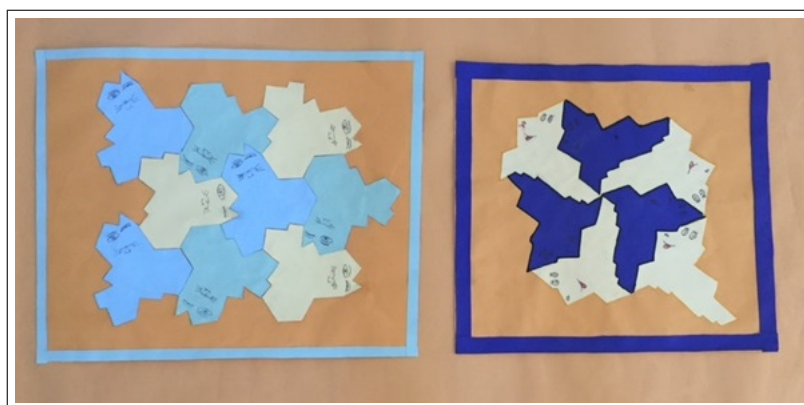
Os trabalhos realizados pelos alunos da turma 802 (Figuras 52 e 53).

Figura 52 – Do lado esquerdo da figura, erros na colagem e a posição das "carinhas" impossibilitando a rotação e do lado direito, trabalho incompleto em relação ao número de peças



Fonte: Elaboração própria

Figura 53 – Outros trabalhos a partir do hexágono e triângulo\*, respectivamente, utilizando-se de rotações



Fonte: Elaboração própria



\* O modelo sobre rotação do triângulo não foi fornecido aos alunos mas conseguiram realizar o trabalho.

Outros trabalhos feitos pelos alunos da turma 802 (Figuras 54 e 55).

Figura 54 – Figuras formadas a partir do quadrado, utilizando-se de translações



Fonte: Elaboração própria

Figura 55 – Figuras formadas a partir do triângulo, utilizando-se de translações, rotações e reflexões



Fonte: Elaboração própria

## 5.5 Avaliação

Após as tarefas realizadas, os alunos fizeram uma pequena avaliação sobre os tipos de simetria (Apêndice G.1). A avaliação teve como principal objetivo de mostrar se os alunos aprenderam de maneira eficaz o conteúdo estudado por meio das atividades desenvolvidas durante este trabalho.

### 5.5.1 Dados da avaliação

A seguir, a relação entre o número total de alunos e o número de alunos que realizaram a avaliação(Quadro 12):

Quadro 12 – Total de alunos/Alunos que fizeram a avaliação

Turmas	Total de alunos	Alunos que realizaram a avaliação
801	26	25
802	26	22

Fonte: Elaboração própria

Abaixo, o quantitativo de acertos em relação às questões é apresentado no Quadro 13:

Quadro 13 – Relação entre os acertos das questões e o número de alunos de cada turma

		801	802
Q.1	assinalaram as duas letras corretas	17	20
	assinalaram somente uma letra correta	6	2
	erraram a questão	2	-
Q.2	acertaram totalmente	8	8
	acertaram parcialmente*	5	4
	erraram a questão	12	10
Q.3	acertaram a letra <b>a</b>	25	12
	acertaram a letra <b>b</b>	18	8
	acertaram a letra <b>c</b>	18	12
	acertaram a letra <b>d</b>	-	6
Q.4	acertaram a questão	15	4
	erraram a questão	10	18
Q.5	acertaram a letra <b>a</b>	14	2
	acertaram a letra <b>b</b>	19	18
	acertaram a letra <b>c</b>	17	22
Q.6	acertaram	23	18
	erraram a questão	2	4

Fonte: Elaboração própria

\*O termo "acertaram parcialmente" refere-se a uma parte da figura traçada corretamente.



Ao observar os resultados, pode-se concluir que os rendimentos foram praticamente iguais entre as duas turmas, exceto, em relação às questões **3** e **4**.

As maiores dificuldades apresentadas foram o cálculo do ângulo de rotação (questão **4**) e o reconhecimento de mais um eixo de simetria na figura do triângulo (questão **3-d**).

Na questão **1**, os alunos assinalaram corretamente, identificando uma das características da simetria de reflexão, ou seja, a figura simétrica tem a posição invertida em relação ao eixo de simetria.

Na questão **2**, desenho da figura simétrica, a maioria dos alunos errou uma parte da figura ao traçá-la, não levando em consideração a distância entre as figuras em relação ao eixo de simetria porém todos reproduziram a figura simétrica do lado invertido.

Na questão **5**, os alunos identificaram apenas um tipo de simetria em cada obra de Escher, porém, algumas figuras apresentavam mais de um tipo, talvez este fato ocorreu devido a má impressão da cópia. Outro fato notável em relação a essa questão, especificamente a letra **a**, foi a quantidade expressiva de erros cometida pela turma 802 em não reconhecer a simetria de translação como resposta, uma vez que a simetria de translação é considerada como a simetria mais fácil de identificar nas figuras.

Este fato é comprovado na questão **6**, feita de maneira correta pela maioria dos alunos ao reconhecer as propriedades da simetria de translação no momento de desenhar na malha quadriculada. Apresentando, assim, os motivos com o mesmo tamanho e mantendo a mesma distância entre eles.

Por fim, pode-se dizer, que a avaliação foi satisfatória nas duas turmas, uma vez que não foram avisados antecipadamente, contudo assimilaram bem os conteúdos estudados.

## Capítulo 6

### Considerações Finais

Ensinar Geometria de maneira convencional, somente reforça a rejeição que muitos alunos têm pelo conteúdo. Ao longo desse trabalho, foi observada a falta de conhecimentos básicos dos alunos para a realização de algumas atividades, por exemplo, o uso do transferidor e da régua. Esse fato confirma o que foi relatado no capítulo 1: o conteúdo de Geometria, na maioria das vezes, é ensinado de uma forma breve e pouco cuidadosa por professores que enfatizam em excesso o ensino da álgebra.

Mas, ensinar Geometria de forma mais atraente também não é uma tarefa fácil.

Em primeiro lugar, um dos grandes desafios do professor é adequar e aplicar corretamente os recursos e os materiais concretos na sala de aula. Para que isso aconteça de maneira eficaz é preciso muito planejamento e dedicação.

Além disso, nós, professores, ensinamos em escolas que não oferecem boas condições de trabalho, deparamos com muitos alunos que chegam à escola desinteressados, com baixa auto-estima e sem qualquer perspectiva do futuro. Poucos reconhecem o papel da educação para suas vidas.

Assim, diante das dificuldades mencionadas, esse trabalho exigiu mais tempo que o previsto. Inicialmente, os alunos não sabiam trabalhar em grupos gerando certa confusão entre eles, porém, a cada aula, notava-se uma gradativa melhora em suas condutas.

Outro fato importante foi o resgate da auto-estima de alguns alunos, que muitas vezes, achavam que não conseguiriam realizar as tarefas propostas, mas, no final, superaram as expectativas.

No decorrer das atividades envolvendo os polígonos, os alunos ao procurarem os polígonos cuja soma dos ângulos ao redor do vértice resultaria em  $360^\circ$ , notou-se um avanço significativo em relação a linguagem dos alunos na classificação dos polígonos. Alguns conheciam os ângulos de certos polígonos regulares sem consultar a folha. Ressaltando, aqui, que esse não era o principal objetivo da tarefa.

Como foi relatado anteriormente, no capítulo 5, a atividade acima exigiu muito cuidado na fase de conclusão das configurações que poderiam ser expandidas no plano a fim de que o aluno assimilasse o conhecimento de forma mais organizada e coerente.

A partir da segunda atividade lúdica de reflexão(tangram), percebeu-se mais motivação dos alunos na realização das tarefas. A atividade lúdica de rotação(mandala em CD) e as atividades de Escher, apesar de terem exigido mais de uma aula, todos fizeram cuidadosamente e na maioria das vezes, por receio de errarem, muitos ficaram inseguros no início, porém, ao longo da tarefa, conquistaram mais confiança. Essa maneira de trabalhar com os alunos também faz parte das recomendações dos PCNs (BRASIL, 1997, p.70)

É importante que o professor estimule os alunos a desenvolver atitudes de organização, investigação, perseverança. Além disso, é fundamental que eles adquiram uma postura diante de sua produção que os leve a justificar e validar suas respostas e observem que situações de erro são comuns, e a partir delas também se pode aprender. Nesse contexto, é que o interesse, a cooperação, e o respeito para com os colegas começa a se constituir.

Vale ressaltar que as atividades em grupo ajudaram os alunos entre si, uma vez que, cada participante completava o outro para o desfecho das atividades.

Segundo os PCNs (BRASIL, 1997, p.80), a respeito da prática de trabalhar em grupo

Outro ponto importante a destacar é o de que, por meio de trocas que estabelecem entre si, os alunos passam a deixar de ver seus próprios pontos de vista como verdades absolutas e a enxergar os pontos de vista dos outros, comparando-os aos seus. Isso lhes permite comparar e analisar diferentes estratégias de solução

Nas atividades de simetria de translação, por serem mais fáceis de executar, os alunos conseguiram elaborar os desenhos bem diferentes obtendo um efeito bem criativo na elaboração dos moldes.

Nas atividades lúdicas realizadas pelos alunos, o mais importante foi sempre focar as propriedades matemáticas na execução das tarefas para que o aluno entendesse os reais objetivos de cada atividade e conseguisse relacioná-la ao conteúdo matemático estudado, realizando, assim, a formalização dos conceitos.

Pode dizer, que não foi uma tarefa fácil por vários motivos, como: indisciplina de alguns alunos, carência de alguns materiais e a ausência da prática em se trabalhar em grupos na sala de aula. Contudo, diante de cada etapa realizada, a motivação e a auto-estima foram resgatadas, proporcionando trabalhos surpreendentes.

Deste modo, pode-se dizer que os objetivos propostos dessa pesquisa, de maneira geral foram bem satisfatórios.

Como sugestão para trabalhos futuros, a interdisciplinaridade entre os professores de Artes, Matemática e História seria uma ideia a ser desenvolvida, uma vez que, o estudo

de polígonos e de ângulos pode ser abordado praticamente, em todas as séries. Assim, cada área pode utilizar os mosaicos como ponto de partida, retratando tanto a parte histórica dos mosaicos, como a sua parte artística, na confecção dos mesmos.

Diante do trabalho exposto, realizado por meio de materiais acessíveis, pelas dinâmicas em grupo e por atividades que envolviam alguma produção artística, espera-se que essa pesquisa possa, de alguma forma, ter resgatado o ensino da Geometria de forma mais prazerosa despertando no educando o gosto pela Matemática.

## Referências

- ALVES, C. M. F. *O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher*. Dissertação (Mestrado) — PROFMAT-IMPA, 2014. Disponível em: <[https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/claudia\\_fiuza.pdf](https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/claudia_fiuza.pdf)>. Citado 8 vezes nas páginas 15, 25, 35, 64, 65, 66, 67 e 68.
- ALVES, S.; DALCIN, M. Mosaicos do plano. *Revista do Professor de Matemática*, 1999. Disponível em: <[www.ufrgs.br/espamat/disciplinas/midias\\_digitais\\_l/2009/.../mosaicos\\_RPM40.pdf](http://www.ufrgs.br/espamat/disciplinas/midias_digitais_l/2009/.../mosaicos_RPM40.pdf)>. Citado 6 vezes nas páginas 28, 30, 31, 32, 33 e 34.
- ANDRADE, E. T. de. *Construção de mosaicos inspirados nas obras de Maurits Cornelis Escher*. Dissertação (Mestrado) — PROFMAT-Brasília, 2015. Citado na página 15.
- BASTOS, R. Simetria. *Educação e Matemática*, 2006. Citado na página 35.
- BERTI, N. M. O ensino de matemática no brasil: Aspectos para uma compreensão histórica. 2005. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.
- BOAVIDA, A. M. R. *O "mundo" da simetria refletindo sobre desafios do PMEB*. 2011. [Http://pt.slideshare.net/3zamar/o-mundo-da-simetria-reflectindo-sobre-desafios-do-pmeb-ana-maria-boavida-pfcm-da-eseips](http://pt.slideshare.net/3zamar/o-mundo-da-simetria-reflectindo-sobre-desafios-do-pmeb-ana-maria-boavida-pfcm-da-eseips). Citado na página 35.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (Primeira a Quarta séries)*. [S.l.]: Secretaria de Educação Fundamental-MEC, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 13, 45, 47 e 73.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais : Matemática (Quinta a Oitava séries)*. [S.l.]: Secretaria de Educação Fundamental-MEC, 1998. Citado na página 14.
- CASTRUCCI, G.; JR., G. *A conquista da matemática-sétimo ano*. [S.l.]: FTD, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 22, 23, 24, 28 e 39.
- DASSIE, B. A. *A matemática do curso secundário na reforma Gustavo Capanema*. Dissertação (Mestrado) — PUC, 2001. Disponível em: <[http://www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/biblioteca/php/mostrateses.php?arqtese=2001-DASSIE\\_B\\_A.pdf](http://www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/biblioteca/php/mostrateses.php?arqtese=2001-DASSIE_B_A.pdf)>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- ESCHER, M. C.; TJABBES, P. *O mundo mágico de Escher*. [S.l.]: Brasília: Centro Cultural Banco do Brasil, 2011. ISBN 9788564170001. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- FABRICIO, M. C. *A configuração de polígonos regulares e simetria para a construção de mosaicos no sexto ano do Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado) — UFSCAr-PROFMAT, 2016. Citado na página 15.

- FIorentini, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. *Zetetiké*, ano 03, número 04, 1995. Citado na página 44.
- FIorentini, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. *Revista de Educação PUC-Campinas*, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- FIorentini, D.; Miorim, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. *Boletim da SBEM*, número 09, ano 04, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.
- GOMES, M. L. O ensino da geometria nas últimas décadas: da ausência à presença com prevalência das abordagens experimentais. 2007. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 18 e 20.
- IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Geometria dos mosaicos*. [S.l.]: Scipione, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 22, 40 e 63.
- KALLEF, A. M. M. *Vendo e entendendo poliedros*. [S.l.]: EdUFF, 1998. Citado na página 46.
- LAVORENTE, C. R. *A matemática Moderna nos livros de Osvaldo Sangiorgi*. Dissertação (Mestrado) — PUC-SP, 2008. Disponível em: <[http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/carolina\\_riego.pdf](http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/carolina_riego.pdf)>. Citado na página 19.
- LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? *Educação Matemática em Revista*, 1995. Citado na página 14.
- LORENZATO, S. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores*. [S.l.]: Autores Associados, 2006. Citado na página 45.
- MARQUES, A. S. *Tempos Pré-Modernos: a matemática escolar dos anos 1950*. Dissertação (Mestrado) — PUC-SP, 2005. Disponível em: <<https://sappientia.pucsp.br/handle/handle/10926>>. Citado na página 18.
- MIRANDA, M. M. *A experiência norte-americana de fusão da Aritmética, Álgebra e Geometria e sua apropriação pela educação matemática*. Dissertação (Mestrado) — PUC-SP, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática*, número 09, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 44, 45, 46 e 47.
- NASSER, L.; SOUSA, G. A. de; PEREIRA, J. A. Explorando a geometria do ensino fundamental por meio de reflexões, translações e rotações. *VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 39.
- OLIVEIRA, M. F. de. *METODOLOGIA CIENTÍFICA: um manual para a realização de pesquisas em administração*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, 2011. Citado na página 41.
- PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. *Vigésima Terceira Reunião Anual da ANPEd*, 2000. Citado na página 47.
- PAIS, L. C. *Ensinar e aprender matemática*. [S.l.]: Autêntica, 2006. Citado na página 45.

REIS, E. L. dos; FREITAS, E. C. de; JAFELICE, R. S. da M. Ornamentos: uma aplicação da modelagem matemática para o ensino. *FAMAT em Revista-número 09*, 2007. Citado na página 22.

SANTOS, M. R. dos. Teoria de van hiele: Uma alternativa para o ensino da geometria no segundo ciclo. *IX ENEM- Belo Horizonte*, 2007. Citado na página 46.

SCLOVSKY, I. *História dos Mosaicos*. 2008. [Www.cursosdemosaicos.com.br](http://www.cursosdemosaicos.com.br). Disponível em: [www.cursosdemosaicos.com.br](http://www.cursosdemosaicos.com.br). Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 24.

SOARES, F. dos S. Os congressos de ensino da matemática no brasil nas décadas de 1950 e 1960 e as discussões sobre a matemática moderna. *Primeiro Seminário Paulista de História e Educação Matemática*, 2005. Citado na página 19.

ZANATTA, L. A. A. *O Movimento da Matemática Moderna*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, 2010. Citado na página 19.

# Apêndices



# **APÊNDICE A**

## **Atividade sobre polígonos**

Essa parte da dissertação destina-se às atividades escritas aplicadas aos alunos realizadas paralelamente com as atividades lúdicas durante o trabalho proposto.

## A.1 Revisão sobre polígonos



Escola \_\_\_\_\_

Aluno(a) \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Professora: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_



# POLÍGONOS

A inspiração para muitos artistas realizarem seus trabalhos pode ocorrer de várias maneiras. Alguns deles utilizam em suas obras formas geométricas. Veja nas imagens a representação das telas de dois artistas.

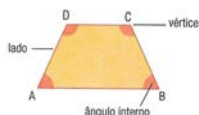


Observando as telas, podemos identificar algumas formas geométricas chamadas polígonos.



As **formas geométricas planas** cujo contorno é fechado e formado por segmentos de reta que não se cruzam são chamadas **polígonos**. Cada segmento de reta que compõe o contorno do polígono representa um de seus **lados**.

Em um polígono podemos destacar os seguintes elementos:



Neste polígono, temos:

- 4 lados:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{AD}$
- 4 vértices: A, B, C e D
- 4 ângulos internos:  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$

FONTE: Vontade de Saber, Sexto Ano, FTD.

### Classificação dos Polígonos

De acordo com o número de lados, vértices, e ângulos internos, os polígonos podem ser classificados da seguinte maneira.



### Polígonos regulares

Observe os polígonos:



Em cada um desses polígonos, todos os lados têm comprimentos iguais e todos os ângulos possuem a mesma medida.

## A.2 Atividade sobre polígonos



Escola \_\_\_\_\_  
 Aluno(a) \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_  
 Professora: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

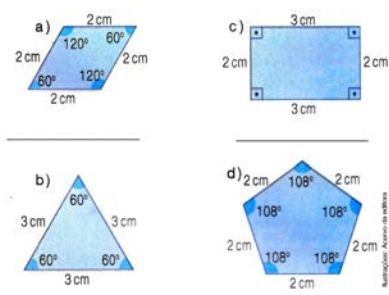


### Atividade sobre polígonos

1- O Código de Trânsito Brasileiro (CTB) regulamenta os direitos e deveres de motoristas e de pedestres. Respeitar o CTB é garantir menos acidentes e, conseqüentemente, menos vítimas. Observe algumas placas de sinalização de trânsito abaixo. Qual o nome do polígono que cada placa abaixo representa?

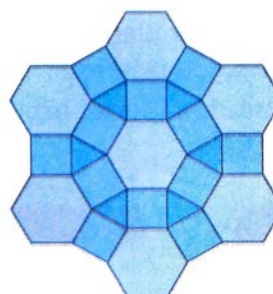


2- Com base nas medidas dos lados e dos ângulos indicados, identifique os polígonos regulares abaixo:



Fonte: Vontade de Saber, Sexto Ano

3 - Escreva o nome dos polígonos utilizados para compor o mosaico abaixo:



4 - Tarsila do Amaral (1886-1973), nascida em Capivari (SP), é considerada uma das mais importantes pintoras brasileiras. Tarsila utiliza-se em suas obras, de temas do cotidiano brasileiro, lembrando-se de sua infância e adolescência vividas em uma fazenda. Observe uma tela de Tarsila do Amaral e responda:



O Mamoeiro, de Tarsila do Amaral, 1925.

a) Identifique os polígonos presentes nessa tela. São regulares?

## **APÊNDICE B**

### **Atividade sobre ângulos**

## B.1 Revisão sobre ângulos



Escola: \_\_\_\_\_

Aluno: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Professora: \_\_\_\_\_

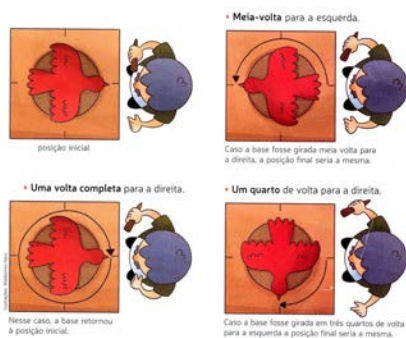


### Ângulos

Na confecção de esculturas é comum o uso de bases giratórias, onde a matéria-prima é colocada de maneira que o artista possa girá-la quando necessário, podendo assim esculpir diferentes partes do objeto sem que precise se deslocar. Observe um artista esculpindo um pássaro em uma base giratória.



Agora, veja alguns giros realizados na base giratória partindo



sempre de uma posição inicial.

Esses giros podem ser representados da seguinte maneira :



O giro em torno de um ponto fixo dá a ideia de ângulo. Além do giro, veja outras situações que nos dão a ideia de ângulo.



#### Ângulo agudo e ângulo obtuso



Em **A** está representado um ângulo cuja medida é menor que 90 graus. Esse tipo de ângulo é chamado **ângulo agudo**.

Já em **B**, está representado um ângulo maior que 90 graus e menor que 180 graus. Esse tipo de ângulo é chamado **ângulo obtuso**.

Fonte: Vontade de Saber, Sexto Ano, FTD

## B.2 Atividade sobre ângulos

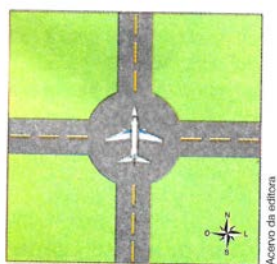


Escola \_\_\_\_\_  
 Aluno(a) \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_  
 Professora: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

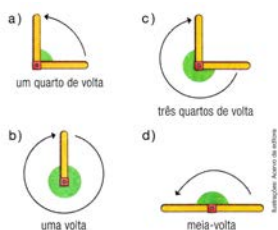


### Atividade sobre Ângulos

1) No pátio de manobras de um aeroporto, um avião estava de frente para a direção norte, como mostra a imagem. Escreva para qual direção o avião ficará de frente se ele realizar um giro de:

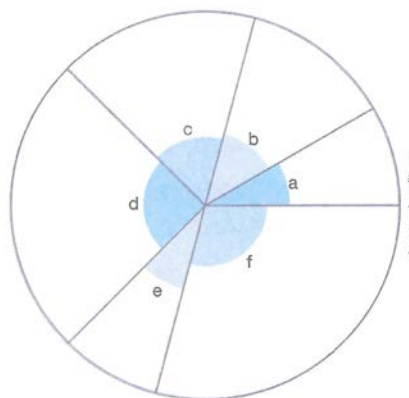


- um quarto de volta para a direita:
  - meia-volta para a esquerda:
  - três quartos de volta para a direita:
  - três voltas para a direita:
  - um quarto de volta para a esquerda:
- 2) Determine a medida, em graus, de cada ângulo indicado a seguir:

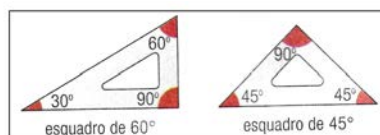


Fonte: Vontade de Saber, 6 Ano.

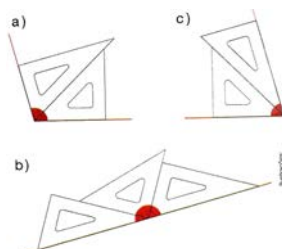
3) Utilizando um transferidor, meça cada ângulo indicado na figura abaixo:



4) Além do transferidor, outro instrumento que pode ser utilizado para medir ou construir ângulos é o esquadro. Observe os esquadros abaixo:



Escreva a medida dos ângulos indicados e depois, classifique-os em reto, agudo ou obtuso:



### B.3 Soma dos ângulos internos de um polígono regular



**PROFMAT**








Escola \_\_\_\_\_

Aluno(a) \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Professora: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_



Soma dos ângulos internos de um polígono regular

Polígono regular	Lados(n)	Quantos triângulos?	Soma dos ângulos internos	Medida de cada ângulo
Quadrado 				
Pentágono 				
Hexágono 				
Heptágono 				
Octógono 				
Eneágono 				
Decágono 				

Fonte: Elaboração própria

## B.4 Medidas dos ângulos internos de um polígono regular



Escola : \_\_\_\_\_  
 Aluno(a): \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_  
 Professora: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_



Medidas dos ângulos internos dos polígonos regulares

<p>Triângulo</p>	<p>Quadrado</p>	<p>Pentágono</p>
<p>Hexágono</p>	<p>Heptágono</p>	<p>Octógono</p>
<p>Eneágono</p>	<p>Decágono</p>	<p>Undecágono</p>
<p>Dodecágono</p>	<p>Pentadecágono</p>	<p>Icoságono</p>

Fonte: Elaboração própria



## **APÊNDICE C**

### **Atividade sobre simetria de reflexão**

## C.1 Atividade sobre simetria de reflexão

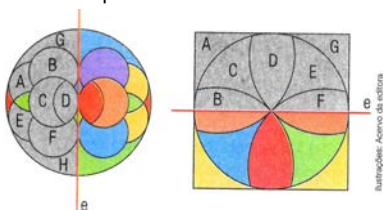


Escola \_\_\_\_\_  
 Aluno(a) \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_  
 Professora: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_



### Atividade escrita sobre simetria de reflexão

1) Nos mosaicos o eixo de simetria e é de simetria. Escreva a cor das partes representadas pelas letras em cada mosaico.



:

2) Quais das letras a seguir possuem:



- a) apenas um eixo de simetria?
- b) dois eixos de simetria?
- c) eixo de simetria horizontal?
- d) eixo de simetria vertical?

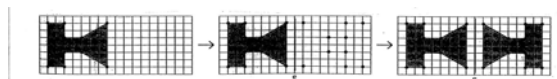
3) Quantos eixos de simetria tem um quadrado?

- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 8

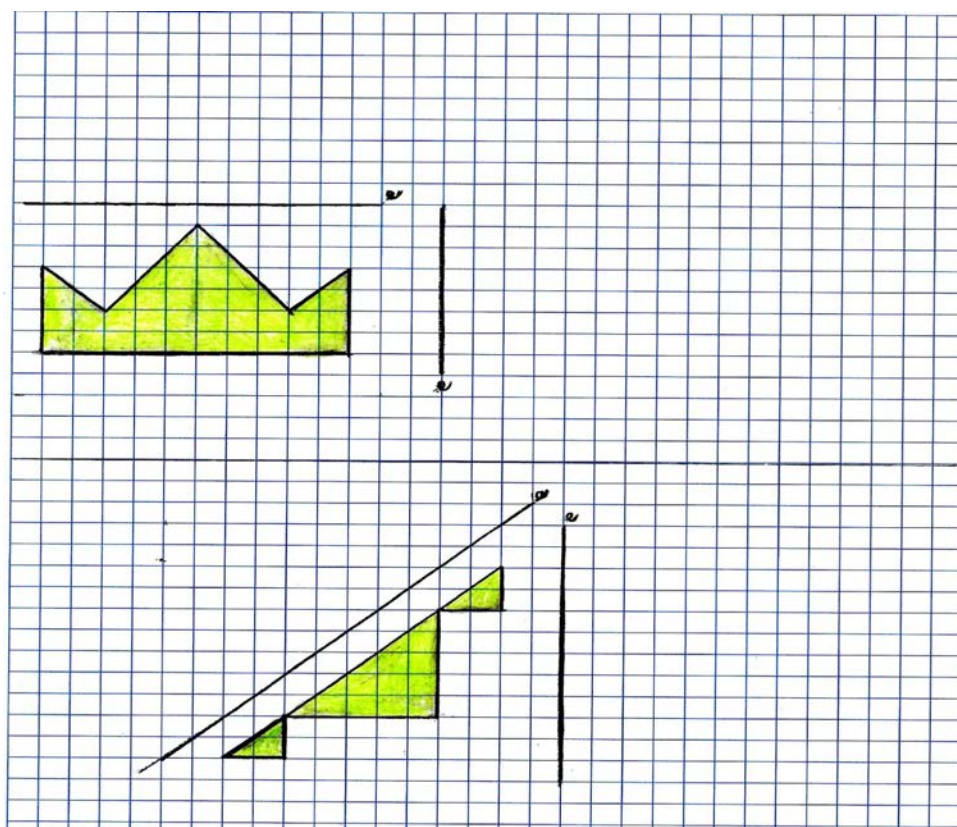
4) Em qual das placas o eixo e é um eixo de simetria?



4) Veja como Patrícia desenhou uma figura simétrica à outra utilizando uma malha quadriculada.



Agora, de maneira semelhante, reproduza as figuras em uma malha quadriculada e obtenha a figura simétrica de cada uma delas em relação ao eixo e.



Fonte: Vontade de Saber, Sexto Ano.

## **APÊNDICE D**

### **Atividade sobre simetria de rotação**

## D.1 Atividade sobre simetria de rotação

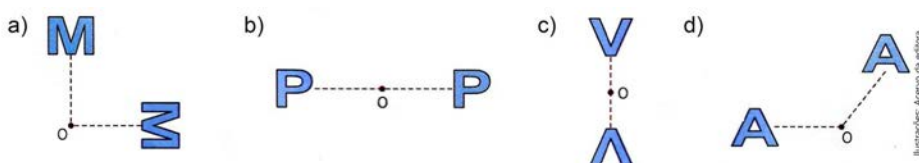


Escola \_\_\_\_\_  
 Aluno(a) \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_  
 Professora: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

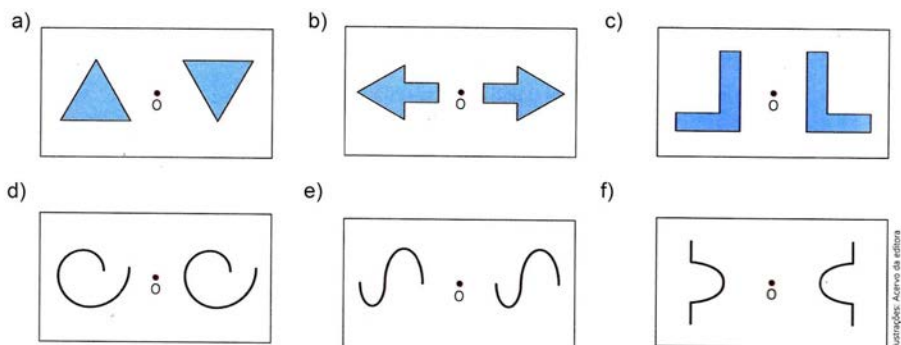


Atividade escrita sobre simetria de rotação

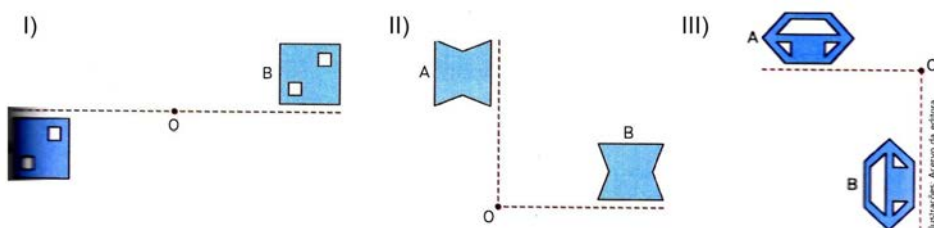
1) Em qual dos itens a letra sofreu rotação em torno do ponto O?



2) Em quais quadros a imagem sofreu uma rotação de 180 graus em torno do ponto O?



3) Em cada item, a figura B corresponde à rotação, no sentido horário, da figura A em relação ao ponto O. Utilizando um transferidor, meça o ângulo de rotação.



Fonte: Vontade de Saber, Sétimo Ano.

## **APÊNDICE E**

### **Atividade sobre simetria de translação**

## E.1 Atividade sobre simetria de translação

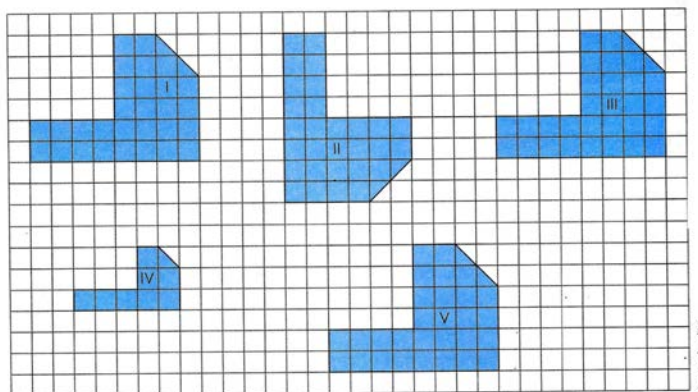


Escola: \_\_\_\_\_  
 Aluno(a) \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_  
 Professora: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

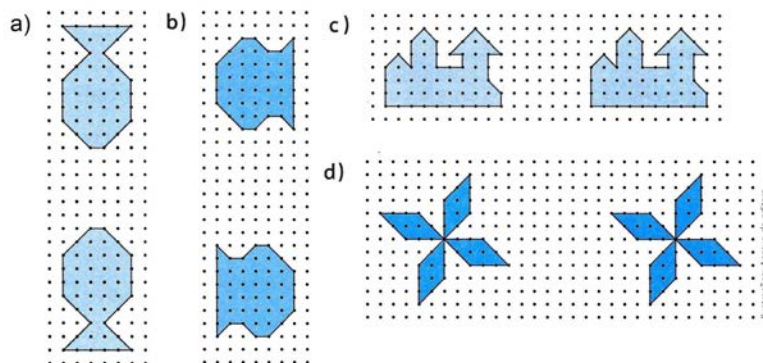


Atividade escrita sobre simetria de translação

1) Verifique quais das figuras são translações da figura I.

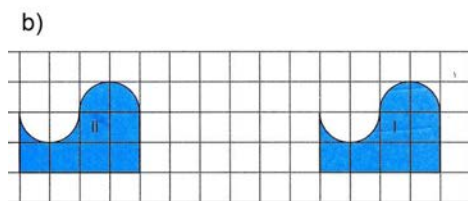
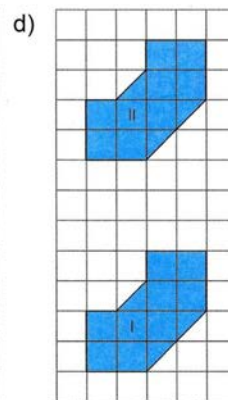
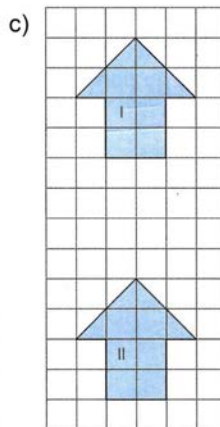
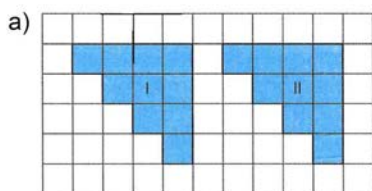


2) Em quais itens são apresentadas figuras simétricas por translação?





3) Em cada item, a figura II foi obtida por translação da figura I. Escreva a direção, a distância e o sentido dessa translação.



Ilustrações: Acervo da editora

Fonte: Vontade de Saber, Nono Ano

# **APÊNDICE F**

## **Atividade sobre Escher**

## F.1 Atividade sobre Escher



Escola: \_\_\_\_\_  
 Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_  
 Professora: \_\_\_\_\_



### Um pouco sobre Escher

Maurits Cornelis Escher nasceu em 1898, na Holanda, e faleceu em 1972. Desde então, sua fama não parou de aumentar. A maior parte de seu trabalho artístico é constituída por gravuras. Em seu país, Escher cursou a Escola de Arquitetura e Artes Decorativas. Depois, viajou muito pela Europa, especialmente pela Itália e Espanha. Foi nesse país que descobriu os mosaicos

Durante séculos, a Espanha foi ocupada por povos de cultura árabe, que lá ergueram palácios e mesquitas. O famoso palácio de Alhambra, por exemplo, tem paredes ladrilhadas com surpreendentes mosaicos geométricos. Esse contato com a arte dos árabes motivou Escher a estudar e criar seus fantásticos mosaicos. Não pense que Escher só fazia mosaicos, ele explorou muitos outros temas, quase sempre unindo Matemática e arte. Ele também dominou a arte do retrato, que fazia em gravuras e explorou o desenho



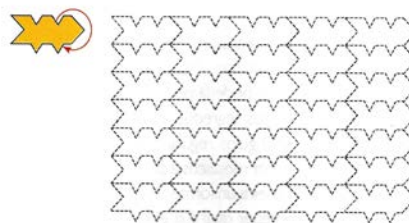
em perspectiva.

Uma característica notável de seus trabalhos está nas formas dos “ladrilhos” que parecem complicadas, mas que se encaixam perfeitamente. Vamos conhecer um dos segredos de Escher.

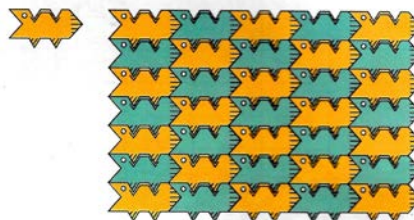
Você já viu malhas de triângulos regulares e também de quadrados. Imagine, agora uma malha de retângulos.

Nessa malha, podemos remover um pedaço do módulo e grudá-lo em outra parte do próprio módulo.

A mesma modificação é realizada na malha toda.



Podemos continuar alterando o módulo até obtermos a forma que nos interessa.



Fonte: Geometria dos Mosaicos, 2000.

# **APÊNDICE G**

## **Avaliação**

# G.1 Avaliação

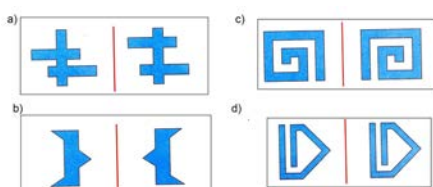


Escola: \_\_\_\_\_  
 Aluno(a) : \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_  
 Prof(a): \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

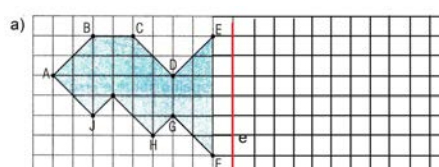


## Avaliação de Matemática

1) Verifique quais das figuras são simétricas por reflexão em relação ao eixo e:



2) Dada a figura abaixo, obtenha a figura simétrica em relação ao eixo e:



3) Veja algumas placas de sinalização de trânsito:



Quais placas:

- a) possuem eixo de simetria vertical?
- b) possuem eixo de simetria horizontal?
- c) não possuem eixo de simetria?
- d) possuem mais de um eixo de simetria?

4) Há muita simetria rotacional em nossa volta, seja em seres da natureza ou em construções humanas. Observe as fotos abaixo:

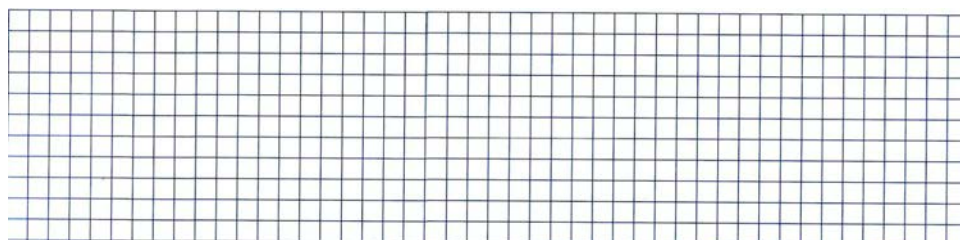


A flor, formada por quatro pétalas, apresenta simetria de rotação de 90 graus. De quantos graus é a simetria de rotação da estrela-do-mar?

5) Abaixo, temos algumas obras de Escher. Identifique quais os tipos de simetria usados nestas obras.



6) Desenhe na malha quadriculada abaixo, algum motivo utilizando a simetria de translação. Capriche!



Fontes: Vontade de Saber, Sexto Ano e Matemática Para Todos ,Nono Ano.