UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
DEPARTAMENTO DE PÓS- GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

UMA ABORDAGEM INTUITIVA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E SUAS APLICAÇÕES A PARTIR DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1° E 2° GRAU NO 1° ANO DO ENSINO MÉDIO

MACAPA
2017

JODSON NOBRE DA SILVA

UMA ABORDAGEM INTUITIVA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E SUAS APLICAÇÕES A PARTIR DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1° E 2° GRAU NO 1° ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao colegiado do Curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá, como requisito parcial para a obtenção do titulo de Mestre.

Orientadora: Profª. Drª. Simone de Almeida Delphim Leal.

MACAPÁ

2017

SILVA, Jodson Nobre da.

UMA ABORDAGEM INTUITIVA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E SUAS APLICAÇÕES A PARTIR DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1° E 2° GRAU NO 1° ANO DO ENSINO MÉDIO. Jodson Nobre da Silva – Macapá: UNIFAP/PROFMAT, 2017.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Sociedade Brasileira de Matemática – SBM; Fundação Universidade Federal do Amapá – UNIFAP.

Orientação: Profª. Drª. Simone de Almeida Delphim Leal.

Fundação Universidade Federal do Amapá.

UMA ABORDAGEM INTUITIVA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E SUAS APLICAÇÕES A PARTIR DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1° E 2° GRAU NO 1° ANO DO ENSINO MÉDIO

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Simone de Almeida Delphim Leal (Orientadora)

Profº. Dr. Erasmo Senger (Convidado)

Profª. Drª. Eliane Leal Vasquez (Convidada)

Profº. Msc. Rudá Tavares Magalhães (Convidado)

DATA: 12 / 09 / 2017

MÉDIA FINAL: APROVADO

Macapá

2017

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia, socorro presente na hora da angústia e a minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

Ao minha orientadora Simone Delphim, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.”

Cora Coralina

RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se o tema de Cálculo Diferencial de Funções Polinomiais de 1º e 2º grau no 1º ano do Ensino Médio apartir de uma abordagem intuitiva. A Fundamentação Teórica tem como objetivo apresentar os resultados de uma experiência a respeito do ensino de Cálculo Diferencial no Ensino Médio: noções de funções polinomiais, limites, taxa de variação da função, infinitésimo e derivada das funções polinomiais de 1º e 2º grau apresentado com coerência e clareza. Nesse intuito, demonstra-se uma maneira mais intuitiva e menos formal, sem usar o rigor de limite de uma função. Apresenta-se uma breve explanação dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio orientando a Disciplina de Matemática e como seu conteúdo deve ser ensinado. Na elaboração do trabalho foi feita inicialmente uma pesquisa de cunho bibliográfico a partir de dados analisados em alguns artigos e livros, com o objetivo de conhecer conceitos e definições sobre o Cálculo desde o seu surgimento com Isaac Newton (1666) e Leibniz (1684) chegando às suas aplicações de hoje. Posteriormente, realizou-se um estudo de caráter investigativo para que fosse possível apresentar um relato histórico do Cálculo Diferencial nas escolas do Brasil. Dessa forma, o presente trabalho visa relatar uma experiência docente que buscou uma forma de ensinar o Cálculo Diferencial no ensino médio por meio de uma abordagem intuitiva.

Palavras-Chaves: Cálculo Diferencial; Funções polinomiais; Ensino Médio; Abordagem intuitiva.

ABSTRACT

In this work, we present the topic of Differential Calculation of Polynomial Functions of 1st and 2nd grade in the 1st year of High School from an intuitive approach. The theoretical basis of this study is to present the results of an experiment about the teaching of Differential Calculus in High School: notions of polynomial functions, limits, rate of variation of function, infinitesimal and derived from polynomial functions of 1st and 2nd degree presented with coherence and clarity. In this sense, a more intuitive and less formal way is demonstrated, without using the strict limits of a function. A brief explanation of the National Curricular Parameters of High School is presented, guiding the Mathematics Discipline and how its content should be taught. In the elaboration of the work, a bibliographical research was carried out starting from data analyzed in some articles and books, with the objective of knowing concepts and definitions about the Calculation from its appearance with Isaac Newton (1666) and Leibniz (1684) arriving applications today. Subsequently, an investigative study was carried out in order to present a historical account of Differential Calculus in schools in Brazil. Thus, the present work aims to report a teaching experience that sought a way to teach Differential Calculus in high school through an intuitive approach.

Keywords: Differential Calculus; Polynomial functions; High school; Intuitive approach.

LISTA DE SIGLAS

DCNEM: Diretrizes Curriculares do Ensino Médio;

PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais;

PCNEM: Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio;

PNLD: Programa Nacional do Livro Didático.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática está presente na vida cotidiana de todo cidadão, por vezes de forma explícita e por vezes de forma sutil. Na sociedade atual, a Matemática é cada vez mais solicitada para descrever, modelar e resolver problemas nas diversas áreas da atividade humana. Aprender Matemática é aprender uma forma de refletir que contribui para ampliar nossa capacidade de ter uma visão critica acerca da realidade que vivemos. O estudo do cálculo diferencial (derivada) no ensino médio deve ajudar o discente a compreender conceitos matemáticos básicos e estabelecer relações entre estes e o mundo em que vive, levando em conta a diversidade dos contextos físicos e cultural em que está inserido.

É claro que a introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Uma delas, tão útil e necessária nos cursos de Física, diz respeito à Cinemática. Não há dificuldades no estudo do movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante. Mas ao passar adiante, desassistido da noção de derivada, o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente variado. E as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção de derivada, interpretada como velocidade instantânea. (ÁVILA. 1991, p.4)

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a partir do 1° ano do ensino médio, é importante um melhor conhecimento do estudo das funções polinomiais de 1° e 2° graus, enfocando no processo de variação, crescimento e decrescimento, pontos de Maximo e de mínimo da função. A partir do 1° ano, os alunos já possuem algum conhecimento sobre função do 1° e 2° graus. Então, faz-se necessário usar o calculo diferencial para compreensão mais ampla do comportamento das funções de 1° e 2° graus.

No segundo capítulo da presente dissertação foi realizado um estudo com base na historia do calculo diferencial, tendo como principais pensadores matemáticos Issac Newton e Leibniz. E mais um relato da historia do calculo nas escolas de ensino médio no Brasil. Além de tratar dos parâmetros curriculares nacionais do ensino médio, e de como a disciplina de matemática e seus conteúdos, estão distribuídos, conforme área do conhecimento e orientações pedagógicas dos parâmetros curriculares nacionais do ensino médio, para um bom desenvolvimento do trabalho docente do professor de matemática.

Entretanto, no terceiro capítulo foi abordado alguns conceitos e definições, tais, como: função, função polinomial, limite, infinitésimo, razão incremental, sendo que neste capitulo o calculo da derivada e suas regras de derivação partiu da ideia desenvolvida pelo físico inglês Silvanus Thompson, publicado em seu livro Made Easy pela editora Macmillan em 1914, o livro faz sucesso até hoje pelo seu tom humorado, parte deste livro foi publicado aos poucos pela revista Cálculo por mês, desde a edição 31 do mês de agosto de 2013 , e o comportamento da função a partir de sua derivada.

No quarto capítulo, o embasamento pedagógico do processo de ensino e aprendizagem levou em consideração o conhecimento prévio do aluno, fundamentada apartir da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel. O vídeo foi o recurso didático para fazer abordagens dos tópicos necessários que o aluno precisa para ter melhor compreensão sobre o assunto cálculo diferencial. O primeiro questionário foi aplicado versando questões sobre função do polinomial do 1º grau. E, antes da aplicação do segundo questionário, foi utilizado vídeo-aula para expor o conceito de função, bem como resoluções de exercícios. O segundo questionário foi aplicado versando questões sobre função do polinomial do 2º grau. E, antes da aplicação do terceiro questionário, foi usado vídeo-aula para abordar o tópico de função quadrática, bem como resoluções de exercícios. O terceiro questionário foi aplicado versando questões sobre razão incremental. E, antes da aplicação do terceiro questionário, foi trabalhado o conceito de razão incremental, a partir de vídeo-aula, bem como resoluções de exercícios. Finalizando foi utilizado algumas questões dos questionários aplicados para calcular a derivada das funções, e avaliar compreensão a respeito da temática.

O quinto capítulo configurou-se em analisar os dados a partir de um olhar qualitativo do estudo realizado com a metodologia aplicada, visando sugerir uma proposta de abordagem intuitiva de ensino do calculo diferencial que seja passível de aplicação prática.

2. REFERÊNCIAL TEÓRICO

2.1 BREVE HISTÓRICO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

O Cálculo diferencial surgiu a partir do pensamento do físico inglês Isaac Newton (1642-1727) e pelo filosofo, jurista e político alemão Gottfried Wihelm Leibniz (1646-1716), estes desenvolveram o cálculo diferencial com abordagens e visões diferentes, dando origem a uma disputa sobre o reconhecimento da descoberta do cálculo diferencial.

> Newton foi o inventor da técnica matemática atualmente chamada "cálculo diferencial". Numa atitude típica dele, não se preocupou em publicar o trabalho. Em consequência , viria a se envolver numa acrimoniosa disputa com Leibniz, que descobriu o cálculo diferencial independentemente. (MORRIS, 1998,p.74)

Diante do exposto, mostra-se que o desenvolvimento do cálculo diferencial aconteceu de forma independente. Afirma MOL (2013, p.103) "Ambos criaram métodos gerais e processos algorítmicos que transformaram o calculo infinitesimal em uma área com vida própria, independente da geometria". Desse modo, Newton desenvolveu o cálculo diferencial a partir da noção de cinemática, que chamou de calculo infinitesimal ou cálculo da fluxões, conforme declara:

> Eu não considero as grandezas matemáticas como formadas de partes por menores que sejam, mas como escritas por um movimento continuo. As linhas são descritas e engendradas, não pela justaposição de suas partes, mas pelo movimento continuo de pontos e as superfícies, pelo movimento de linhas; os sólidos, pelo movimento das superfícies, os ângulos, pela rotação dos lados; os tempos, por um fluxo continuo. Considerando, pois, que as grandezas que crescem em tempos iguais são maiores ou menores conforme cresçam com uma velocidade maior ou menor, procurei um método para determinar as grandezas conforme as velocidades dos movimentos ou acréscimos que engendram. Chamamos fluxões as velocidades de tais movimentos ou acréscimos, enquanto as grandezas engendradas chamar-se-iam fluentes, deparei, por voltados anos de 1665-1666, com o método das fluxões que usei na quadratura das curvas.(NEWTON,1704,p.165-166,tradução nossa)

As ideias de Newton sobre o cálculo diferencial, foram descritas em quatro de suas obras, são elas: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), publicada em 1687, e em seus ensaios De Analysis per Aequationes Numero Terminorum Infinitas (Sobre a Análise de

Equações com um Número Ilimitado de Termos), escrito em 1669 mas publicado em 1711, Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum (Método das Fluxões e das Séries Infinitas), e a obra Tractatus de Quadratura Curvarum (Tratado Sobre a Quadratura de Curvas), escrita em 1676 e publicada em 1704.

De acordo com BOYER (1974), os algarismos do cálculo só aparecem no Livro II, onde no lema II do Principia, deparamos com a seguinte formulação:

- O momento de qualquer genitum é igual aos momentos de cada um dos geradores multiplicados pelos índices das potências desses lados, e por seus coeficientes, continuamente.

> A explicação de Newton mostra que a palavra genitum, significa o que chamamos um "termo" e que por, "momento" de um genitum, ele entendeu o acréscimo infinitamente pequeno. Designando por ***a*** e o momento de A e por b o momento de B, Newton prova que o momento de AB é a.B +A.b, que o momento de $A^{\boldsymbol{n}}$ é na $A^{\boldsymbol{n}-1}$ e que o momento de $\frac{1}{A}$ é $\frac{-a}{Az}$. Essas expressões sibilinas, que são os equivalentes da diferencial de um produto, de uma potência e de um recíproco, respectivamente constituem o primeiro pronunciamento oficial de Newton sobre o cálculo [...] (BOYER, 1974,p.293).

Boyer (1974) relata que Newton não foi o primeiro a diferenciar. Sua descoberta se constituiu na consolidação desses elementos num algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam algébricas, sejam transcendentais. No entanto, os estudos de Lebniz sobre o cálculo diferencial desenvolveu-se a partir do problema geométrico de tangente.Publicou seu primeiro artigo sobre o cálculo em 1684, com o título de Nova Methodus pro maximis et minimis, itenque tangentibus qua hec irrationales quantitates moratur (Um Novo Método para Máximos e Mínimos, e Também para Tangentes, que não é Obstruído por Quantidades Irracionais).

Neste seu primeiro artigo publicado sobre cálculo diferencial. Descreve Boyer (1974, p.296), Leibniz fez a primeira exposição algorítmica das fórmulas $dxy = xdy + ydx$, $d(\frac{x}{y}) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ e $dx^n = nx^{n-1}dx$, para produtos, quocientes e potências, respectivamente.

> Leibniz percebeu que a busca da tangente a uma curva dependia das relações entre as ordenadas e as abscissas quando elas se tornam infinitesimalmente pequenas e que a quadratura dependia da soma de retângulos de bases infinitesimalmente pequenas apoiadas sobre o eixo das abscissas.(MOL, 2013, p.108)

.

Neste contexto, os estudos de Leibniz sobre o cálculo diferencial foram desenvolvidos a partir do triângulo característico. Descreve MOL (2013,p.108) "O ponto de partida de Leibniz para o estudo do cálculo diferencial foi, mais uma vez, o *triângulo característico"*.De acordo com BOYER (1974,p.295) "O elo de ligação parecia ser o triângulo infinitesimal ou "característico"[...], Barrow o aplicara ao problema de tangente."

Por outro lado, Mol (2013) também relata a paternidade em relação a criação do calculo diferencial ,que gerou uma das maiores disputas da história da matemática, da seguinte forma: A história da matemática reconhece que Newton foi o primeiro inventor do cálculo. No entanto, Leibniz desenvolveu seu método de forma independente e teve a primazia na divulgação de seus resultados, publicados décadas antes dos de Newton. Ademais, o método de Leibniz foi rapidamente aceito pelos matemáticos, sobretudo os da Europa continental, exercendo grande influência sobre o desenvolvimento posterior da matemática.

2.1.1. Breve História do Cálculo nas Escolas do Brasil

O ensino do cálculo já fez parte do currículo do ensino médio, foi inserido e retirado ao longo da história de nossa educação, mesmo não fazendo parte do conteúdo da disciplina de matemática do ensino médio, atualmente, mesmo assim, ainda aparece nos livros didáticos de matemática do ensino médio do Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLD).

O conteúdo de cálculo diferencial foi inserido oficialmente no currículo dos programas de ensino das escolas, pela primeira vez, em 1890, com reforma de Benjamin Constant Botelho de Magalhães, então Ministro e Secretario de Estado dos Negócios da Instrução Pública, Correios e Telégrafos (BRASIL. Decreto n° 981,1890).

Conforme descrito no Art. 30, do decreto de n° 981 de 1890, que trata das matérias do curso integral, distribuídas nos 7 (sete) anos, do ensino secundário.

> TERCEIRO ANNO
> 1ª cadeira - Geometria geral e o seu complemento algébrico. Cálculo diferencial e integral, limitado ao conhecimento das teorias rigorosamente

> indispensáveis ao estudo da mecânica geral propriamente dita: período de 6 horas.

No entanto, em 1901, com a reforma promovida por Epitácio Pessoa, que propunha que alguns conteúdos deixassem de ser ministrados no ensino secundário (Ensino Médio), entre eles, o cálculo diferencial (BRASIL.Decreto n° 3.914, 1901).

Conforme exposto, no Art 9, inciso IV, do decreto n° 3.914 de 1901.

> IV. No curso de matemática elementar o lente considerará as disciplinas a seu cargo não só como um complexo de teorias uteis em si mesmas, de que os alunos deverão ter conhecimento para aplicá-las ás necessidades da vida, senão também como poderoso meio de cultura mental, tendente a desenvolver a faculdade do raciocínio. Os limites desta matéria deverão ser assaz restritos, atendendo o programa a cura da mente ao lado prático, de maneira que o ensino se torne utilitário por numerosos exercícios de aplicação e por judiciosa escolha de problemas graduados da vida comum. De acordo com tais preceitos, o estudo da aritmética no primeiro ano abrangerá o sistema decimal de numeração, as operações sobre números inteiros e frações, as transformações que estas comportam, até ás dizimas periódicas, fazendo-se durante o curso uso habitual do calculo mental; no segundo ano virão as proporções e suas aplicações, progressões e logaritmos; o estudo da álgebra deverá ser levado até ás equações do 1º grau; no terceiro ano se completará o estudo da álgebra elementar, e se fará o da geometria, com o desenvolvimento usual relativo á igualdade, á semelhança, á equivalência, á retificação da circunferência, avaliação das áreas e dos volumes, tudo com aplicações praticas; do quarto anno será o desenvolvimento da álgebra no estudo do binômio de Newton, a determinação dos princípios gerais da composição das equações e sua resolução numérica pelos métodos mais simples e práticos; irá o estudo da geometria até englobar o das secções cônicas, com o traçado e principais propriedades das curvas correspondentes, (se efetuará o ensino da trigonometria retilínea, havendo sempre o cuidado de tornar frequentes as aplicações e a prática dos logaritmos, iniciada no segundo ano e desenvolvida no terceiro.alguns empreendedores são, sem dúvida, bons técnicos, entre eles, alguns não conhecem bem o mercado, a gestão financeira ou administrativa, as leis ou o ambiente socioeconômico. Para elaborar um plano de negócios, exigem-se conhecimentos sobre o setor do negócio e o contexto mercadológico, bem como percepção gerencial e habilidade para lidar com assuntos técnicos e legais, em diversas áreas, e para vencer barreiras no relacionamento interpessoal.

Neste contexto, com a reforma de Epitácio Pessoa, em 1901, o cálculo diferencial que compunha o conteúdo da disciplina de matemática, desde 1980, no terceiro ano do ensino secundário, deixa de ser conteúdo da disciplina de matemática.

Em 1929, a inserção do cálculo diferencial passa ganhar força, devido as inovações curriculares e pedagógicas, ocorridas no Colégio Pedro II, tendo o professor de matemática Euclides Roxo, como o protagonista destas inovações. O professor Euclides Roxo aderiu às ideias da ICMI (International Commission on

Mathematical Instruction), tendo como presidente da ICMI, o matemático alemão Felix Klein, que iniciou estudos sobre o ensino da Matemática na Escola Secundária em vários países.

> As ideias de Euclides Roxo diziam respeito basicamente à fusão dos diferentes ramos da matemática, interligando-os em uma única disciplina à reestruturação de todo o currículo em torno do conceito de função e à introdução de noções de cálculo diferencial e integral para todos os alunos do secundário. (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004, p.8)

As inovações curriculares, no Colégio Pedro II, implementadas por Euclides Roxo, influenciaram na reforma de Francisco Campos.

> Quanto aos programas de matemática e suas instruções pedagógicas, a Reforma Campos apenas apropriou-se das inovações que vinham sendo implementadas de forma paulatina, desde 1929, no Colégio Pedro II, tendo como protagonista o professor Euclides Roxo. (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004, p.8)

Entretanto, a reforma de Francisco Campos, só aconteceu oficialmente a partir do Decreto 19.890, de 18 de abril de 1931, e do decreto 21.241, de 4 de abril de 1932.De acordo com SOARES, DASSIE, ROCHA (2004,p.8), por sua vez afirmam: “As mudanças no ensino secundário, provocadas pela Reforma Campos, foram instituídas pelo decreto 19.890, de 18 de abril de 1931, e consolidadas por meio do decreto 21.241, de 4 de abril de 1932”.

Os decretos 19.890 e 21.241, de 1931 e 1932 respectivamente, não deixou de forma explicita os conteúdos que seriam ministrados nas escolas secundarias, possibilitando, assim, a volta do cálculo ao ensino secundário (ensino médio), pois, os decretos tratavam de que o “ Ensino Secundário oficialmente reconhecido seria ministrado no Colégio Pedro II e em estabelecimentos sob regime de inspeção oficial.”

> Art 10°. Os programas do ensino secundário, bem como as instruções sobre os métodos de ensino serão expedidos pelo Ministério da Educação e Saúde Pública e revistos, de três em três anos, por uma comissão designada pelo ministro e à qual serão submetidas as propostas elaboradas pela Congregação do Colégio Pedro II. (BRASIL.Decreto,19.890,1931)
> Art 12°. O ensino do curso complementar poderá ser ministrado nos estabelecimentos oficiais de ensino secundário e nos estabelecimentos sob o regime de inspeção. (BRASIL. Decreto,19.890,1931)
> Art. 1º. O ensino secundário, oficialmente reconhecido, será ministrado no Colégio Pedro II e em estabelecimentos sob o regime de inspeção oficial. (BRASIL.Decreto,21.241,1932)

Deste modo, o cálculo fez parte do currículo das escolas de ensino secundário, e perdurou até o surgimento do movimento chamado Matemática Moderna, que iniciou nos anos de 1950 e se consolidou nos anos de 1960.

> Professores de escola secundária e colégios começaram em fins da década de 1950 a escrever seus próprios textos dentro das bases já prefiguradas ou explicitamente recomendadas pelos grupos de currículos.Em Começos da década de 60 surgiu uma avalanche de tais livros e muitos outros continuaram a aparecerem desde então. [...] os inúmeros grupos e outros independentes de compêndios dirigiram-se todos mais ou menos para mesma direção.Foram todos portanto- e com muita justiça - descritos pelo termo de “matemáticos modernos” (ou “novos matemáticos). (KLINE; MORRIS,1976,p.34)

O objetivo da Matemática Moderna conforme enfatizavam seus defensores, não era descartar os conteúdos de matemática ensinados tradicionalmente.Segundo SOARES, DASSIE e ROCHA (2004, p.12)“ O objetivo era pôr “em dia” o ensino tradicional das escolas, e acrescentar aos programas certos temas da denominada *Matemática Moderna*, como o estudo de conjuntos; conceitos de grupo, anel e corpo; espaços vetoriais; matrizes; álgebra de Boole; noções de cálculo diferencial e integral e estatística”.

No entanto, o estudo da matemática moderna, centrou-se no ensino das estruturas e o uso da linguagem de conjunto como meio de ligação entre os tópicos ministrados em matemática, tendo como parâmetro o rigor e simbologia excessiva do conteúdo sobre conjunto, que tornou alguns assuntos do ensino médio, quase inviáveis de serem ministrados. Dentre eles, o cálculo diferencial e integral.

> O ensino passou a ter preocupações excessivas com abstrações internas à própria matemática, mais voltadas à teoria do que à prática.A linguagem dos conjuntos foi ensinada com tal ênfase que a aprendizagem de símbolos e de grande quantidade de terminologia comprometia o ensino do cálculo, da geometria e das medidas. (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004,p.12)

Neste contexto, relata Búrigo (2006,p .39):

> O sentido de aproximação ou adaptação à matemática universitária expressou-se com particular veemência em algumas ênfases presentes no discurso do movimento, relativas: ao rigor, à precisão da linguagem e à correção matemática das abordagens pedagógicas; às generalizações e à unidade da matemática como disciplina acadêmica; à compreensão das relações de necessidade e possibilidade entre axiomas e proposições decorrentes.

.

Diante do exposto, o cálculo diferencial, só é retirado oficialmente do currículo escolar, das escolas de ensino médio, a partir da lei 4.024, de 20 de dezembro 1961, esta que trata das diretrizes da educação básica.

Atualmente em relação aos livros didáticos, o PNLD é um programa que tem por objetivo prover as escolas públicas de ensino fundamental e médio com livros didáticos e acervos de obras literárias, obras complementares e dicionários, sendo executado em ciclos trienais alternados. No PNLD de 2012 nos livros Matemática-Contexto e Aplicações, volume 3 e Matemática Ensino Médio,volume 3, e no PNLD de 2015 no livro Matemática Ensino Médio,volume 3, nestes livros o conteúdo de derivada aparece como tópico.

Portanto, o Cálculo é ensinado antes da universidade em poucos estabelecimentos de ensino, principalmente, naqueles voltados à preparação para vestibulares que cobram o Cálculo em seus programas.

2.2. OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

2.2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais e o Ensino Médio

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal que orientam a educação no Brasil. Em relação ao ensino médio, os PCN distribui as disciplinas por área do conhecimento, são elas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências Humanas e suas Tecnologias e Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias, propondo uma visão integradora entre as disciplinas de mesma área de conhecimento, de modo a se reconhecer a relação entre aquelas de uma mesma área e entre as de áreas diversas. Apresenta, também, os objetivos específicos de cada área do conhecimento reunidos em torno de competências gerais.

> [...] A presença da Matemática nessa área se justifica pelo que de ciência tem a Matemática, por sua afinidade com as Ciências da Natureza, na medida em que é um dos principais recursos de constituição e expressão dos conhecimentos destas últimas, e finalmente pela importância de integrar a Matemática com os conhecimentos que lhe são mais afins. Esta última justificativa é, sem dúvida, mais pedagógica do que epistemológica, e pretende retirar a Matemática do isolamento didático em que tradicionalmente se confina no contexto escolar.(BRASIL, 2000, p. 93)

.

Os PCN do ensino médio é um documento que serve para orientar os professores, no intuito de se escolher novas abordagens e metodologias, que aperfeiçoe as práticas educativas do trabalho docente. Afirma LOPES (2002, p.367) “O documento dos parâmetros, entretanto, é a carta de intenções governamentais para o nível médio de ensino; configura um discurso que, como todo discurso oficial, projeta identidades pedagógicas[1] e orienta a produção do conhecimento oficial”.

A distribuição das disciplinas é dada por área do conhecimento, conforme união de conhecimentos que compartilham mesmo objeto de estudos, de tal forma que facilita a comunicação entre as disciplinas de mesma área de conhecimento, propiciando, uma prática escolar de caráter interdisciplinar.

Neste contexto, é descrito no texto das diretrizes curriculares nacionais do ensino médio (DCNEM), em relação às áreas do conhecimento: o currículo deve contemplar as quatro áreas do conhecimento, com tratamento metodológico que evidencie a contextualização e a interdisciplinaridade ou outras formas de interação e articulação entre diferentes campos de saberes específicos (BRASIL, 2012, art. 8° § 1º).

Como o foco deste trabalho esta voltada a disciplina de matemática, dar-se ênfase a área do conhecimento ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, pois, conforme os PCN a disciplina de matemática esta vinculada a área do conhecimento ciências da natureza, sendo esta área do conhecimento composta por quatro disciplinas no ensino médio , são elas: Física, química, biologia e matemática.

Em relação aos objetivos da área do conhecimento ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, e conforme os PCN tem-se a seguinte descrição:

> A - desenvolver a capacidade de comunicação, b - desenvolver a capacidade de questionar processos naturais e tecnológicos, identificando regularidades, apresentando interpretações e prevendo evoluções, c - desenvolver o raciocínio e a capacidade de aprender e d - compreender e utilizar a ciência, como elemento de interpretação e intervenção, e a tecnologia como conhecimento sistemático de sentido prático.

Portanto, mesmo as disciplinas sendo separada por área do conhecimento, isto não significa que a disciplina de área de conhecimento diferente não possa

[1] Sobre as identidades pedagógicas projetadas pela reforma do ensino médio no Brasil, ver Lopes (2002a).

.

comunicar-se entre elas, pois, nos PCN mostra-se algumas possibilidades, com foco direcionado a contextualização e interdisciplinaridade.

2.2.2 os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio e a Matemática

O ensino da matemática na última etapa da educação básica deve está pautada, em duas indagações importantes: A primeira é sobre a importância de se ensinar matemática, e a segunda, como ensinar matemática e tornar a aprendizagem mais real e significativa para o aluno. Segundo D'Ambrósio (2013), afirma:

> Há dois aspectos igualmente importantes apontados como objetivos da Educação Matemática: ser parte da educação geral, preparando o indivíduo para a cidadania, e servir de base para uma carreira em ciência e tecnologia. Ambos são igualmente necessários e, obviamente, vinculados.

Neste contexto, é importante que o processo ensino aprendizagem seja direcionado para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente.

Em relação, a ensinar e tornar a aprendizagem da matemática mais real e significativa há necessidade dos conteúdos serem contextualizados e que se faça conexão com outras áreas do conhecimento, direcionando para uma abordagem interdisciplinar. Conforme é descrito na resolução n° 2, do conselho nacional de educação, de 2012, em seu Art. 14, parágrafo VIII e IX:

> VIII - os componentes curriculares que integram as áreas de conhecimento podem ser tratados ou como disciplinas, sempre de forma integrada, ou como unidades de estudos, módulos, atividades, práticas e projetos contextualizados e interdisciplinares ou diversamente articuladores de saberes, desenvolvimento transversal de temas ou outras formas de organização;
> IX - os componentes curriculares devem propiciar a apropriação de conceitos e categorias básicas, e não o acúmulo de informações e conhecimentos, estabelecendo um conjunto necessário de saberes integrados e significativos;

Portanto, o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

.

2.2.3 Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio e o Conteúdo de Matemática

A escolha dos conteúdos de matemática no ensino médio, deve estar vinculada a importância de que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Assim como, a forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático.

> [...] os PCNEM não explicitam conteúdos mínimos obrigatórios, supondo-se, porém, que deva haver equilíbrio entre temas da Álgebra, da Geometria, das Funções e de Gráficos e a Probabilidade e a Estatística. É interessante destacar que em todos os países, o Cálculo Diferencial e Integral aparece no currículo mínimo. No Brasil, as coleções didáticas não mais tratam desse tema e, portanto, é provável que a maioria das escolas também não o faça.(GODOY, 2010, p.95)

Conforme as orientações curriculares nacionais para o ensino médio (2006, p.70) “os conteúdos básicos de matemática estão distribuídos em quatro blocos : Números e operações, funções, geometria, analise de dados e estatística, mas, isso não significa trabalhar os conteúdos desses blocos de forma isolada, e sim, buscar conexões entre eles”.

Segundo GODOY (2010, p.82), descreve sobre os conteúdos de matemática, conforme os PCN do ensino médio:

> Apesar de não estabelecer um currículo mínimo para o ensino de Matemática, os PCNEM fazem algumas considerações a respeito dos conteúdos que deverão ser trabalhados no Ensino Médio. Conforme esse documento, os elementos essenciais de um núcleo comum devem compor uma série de temas ou tópicos em Matemática escolhidos segundo critérios que visam ao desenvolvimento de atitudes e habilidades.[...] Esses conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

Neste contexto, a forma de trabalhar os conteúdos deve estar atrelada ao desenvolvimento do pensamento matemático, com critério de validação baseado em princípios lógicos comuns aos campos: Números e operações, funções, geometria, análise de dados e estatística.

.

> [...] o fazer matemático mobiliza quatro diferentes tipos de raciocínios ou intuições: o pensamento indutivo (ou raciocínios plausíveis, presentes no ato de criação matemática, na formulação intuitiva de novas conjecturas a serem validadas posteriormente); o raciocínio lógico-dedutivo (próprio da Álgebra e Geometria, por exemplo, e de tudo que diz respeito a provas de propriedades em todos os campos da Matemática); a visão geométrico-espacial (necessária para o aprendizado significativo da geometria e de suas aplicações) e o pensamento não-determinístico (característico da estatística e da probabilidade, campos que estudam eventos que envolvem aleatoriedade).(BRASIL, 2014, p.9-10)

Portanto, Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (2001), o currículo do Ensino Médio deve ser estruturado de modo a assegurar ao aluno a possibilidade de ampliar e aprofundar os conhecimentos matemáticos adquiridos no Ensino Fundamental de forma integrada com outras áreas do conhecimento e orientada pela perspectiva histórico-cultural na qual estão ligados os temas em estudo. Isto é proposto visando à preparação do aluno para o trabalho e exercício da cidadania e também a continuação de seus estudos em níveis superiores.

3 ABORDAGEM INTUITIVA DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Conforme os PCN, o critério central de um tema ou tópico, estar pautado na capacidade de um tema admitir a possibilidade de conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, a partir de suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

Neste contexto, o tópico de cálculo diferencial objeto de estudo neste trabalho, estar pautado na formulação intuitiva de novas conjecturas a serem validadas posteriormente, sem o uso do rigor de limite, aplicada as funções afim e quadrática. “[...] De modo geral, para que os alunos aprendam Matemática de modo significativo, é preciso dar-lhes a conhecer a verdadeira imagem da Matemática, uma ciência experimental, indutiva, ainda em construção [...]” (BARROSO, 2007).

Em relação a este pensamento, defende DULCLOS (1992), em seu artigo Cálculo do 2° grau, que é possível ensinar o cálculo, desde que abordado de forma conveniente. Isto implica em se ensinar o cálculo diferencial sem o rigor do uso de limite, que deve-se partir de uma apresentação intuitiva do conteúdo, seja esta geométrica ou algébrica, sem a necessidade inicial de abordar o conceito de continuidade de função.

Segundo, afirma Ávila (2002, p.89) “A continuidade é um conceito que faz pouca falta num primeiro curso de Cálculo, enquanto não temos de lidar com funções descontínuas”. Neste contexto, todo conceito de cálculo diferencial, terá sua aplicabilidade nas funções afins e quadráticas, sendo que sua abordagem terá como referência o livro Calculus Made Easy, publicado em 1910, foi um sucesso durante o século xx, e ainda faz suceso até hoje, seu autor Silvanus Phillips Thompson, trabalha o cálculo de forma intuitiva em um tom bem-humorado.

3.1 SILVANUS P. THOMPSON

A Breve biografia de Silvanus P. Thompson utilizada nesta secção, foi desenvolvida a partir da dissertação de mestrado, intitulada com o nome de: Silvanus Thompson e a desmistificação do cálculo: Resgatando uma história

.

esquecida, que foi desenvolvida por **Gustavo Alexandre de Miranda**, sob a orientação do professor doutor Ubiratan D' Ambrosio.

Segundo **Miranda (2004)**, Silvanus P. Thompson, nasceu em 1851, em York- Ingaterra. Formou-se engenharia elétrica, em Londres, e durante muitos anos foi o presidente da instituição de engenheiros elétricos da Inglaterra, tornando-se membro da Royal Society em 1891. A vida agitada de Silvanus P. Thompson, deu-se em virtude da vida acadêmica, na Royal Society e muitas outras sociedades das quais foi presidente, pois, Thompson escreveu numerosos livros técnicos e manuais de eletricidade, magnetismo, manuais de dínamo e ótica, além de escrever sobre as biografias dos cientistas Michael Faraday, Phillipp Reis e Lord Kelvin.

Neste contexto, Thompson foi um ativo cientista de seu tempo, sendo diretor e presidente de física aplicada no Finsbury Techical College (1885-1916) e também presidente das sociedades de física (1901-1903) e de ótica (1905). Para Miranda (2004,p. 68) A Biografia de Silvanus Thompson, registrada em The Institution of Electrical Enginneers-IEE-RU, informa que além de sua atividade cientifica, Thompson preocupava-se com a questão da educação técnica ,

Thompson ainda acreditava que, se os britânicos tivessem de concorrer com os alemães ou qualquer outra nação industrial, os operários precisariam estar devidamente treinados em princípios científicos, de modo a trabalhar " inteligentemente".

Diante do exposto, Miranda (2004), descreve que sua preocupação justifica-se pelo surgimento de vários impérios no fim século XIX e Inicio do século XX, que levou Thompson, uma vez diretor do Finsbury Technical, de Londres, a pôr em prática suas ideias educacionais, atraindo uma multidão de alunos às suas aulas. Assim, foi muito popular como professor e seus textos ganharam, inicialmente, lugar de destaque entre os estudantes ingleses. Muitas atividades acadêmicas de Thompson foram publicadas conforme descreve Miranda (2004, p. 69)

> Seu primeiro livro científico foi Elementary Lessons in Electricity and Magnetism (lições elementares sobre eletricidade e magnetismo), publicado em 18881. [...] tornou-se referência durante sete décadas no ensino de eletricidade e magnetismo. Entre os trabalhos seguintes viriam The Storage of Electricity, The Design of Dynamos, Dinamo-Electric Machinery (sete edições em inglês e duas em alemão), Polyphase Electric Currents, The Manufacture of Light, The Eletromagnet and Eletromagnetic Mechanisms e Optical Tables. Suas últimas publicações foram a biografia de Lord Kelvin (1910) e o livro Calculus Made easy (1910).

.

O livro Calculus Made Easy (1910) segundo MIRANDA (2004, p.69) despertou muito interesse nos alunos de Cálculo no início e decorrer do século XX, tornando-se um best seler, segundo a Chelsea Publishing Company (1976), sendo reeditado varias vezes. Mesmo assim, Thompson sofreu muitas críticas e repúdio de alguns matemáticos.

Todavia, Thompson já sabia que seu livro Calculus Made Easy não seria aceito pelos matemáticos, por apresentar um estilo intuitivo e informal. Além disso, o livro por tratar de um assunto de grande importância para os matemáticos, o cálculo- não estava em conformidade com o meio matemático.

No entanto, apesar deste livro de Silvanus Thompson ter sofrido muitas criticas pelos matemáticos da época, o livro Calculus Made Easy foi notado por alguns pesquisadores posteriores interessados no cálculo. Segundo MIRANDA (2004, p. 70) isso se deve à percepção de que este livro deveria ser recomendado aos iniciantes do cálculo. Diante disso, descreve Miranda (2004, p.70) que:

> Thompson tinha objetivos específicos, que não foram compreendidos na época. Visava ao público iniciante, objetivava criar um curso de cálculo acerca "filosofia" dos conceitos elementares do assunto. E, de fato, conquistou esse objetivo, vale lembrar, aqui, que muitos eminentes matemáticos e cientistas do século xx reconheceram que aprenderam Cálculo com o livro Calculus Made Easy.[...]

Como descrito anteriormente, o assunto de cálculo era abordado sem o rigor e sua estrutura formal, tinha uma linguagem mais simples voltada para aqueles que eram iniciantes no cálculo, mas muitos matemático e cientistas aprenderam cálculo a partir do livro Calculus Made Easy.

3.2 TÓPICOS DO LIVRO CALCULUS MADE EASY

O prólogo do livro começa com algumas frases interessantes e curiosas, que se referem aos escritores de livros didáticos sobre matemática avançada que escrevem da maneira mais difícil, sem se preocupar em mostrar a maneira mais fácil. Estes, ao contrario, repassam a impressão de que preferem impressioná-lo de forma mais rigorosa e formal, abordando o assunto da forma mais difícil.

> Ao considerar quantos tolos são capazes de empregar truques de cálculos, fico surpreso ao ver que tantos outros acham a tarefa de dominar os mesmos truqueis difícil e tediosa.
> Sendo eu mesmo um sujeito notavelmente estúpido, tive de desaprender as dificuldades, e agora tomo a liberdade de apresentar a meu tolo amigo as partes que não são tão difíceis. Domine tais partes e o resto virá sozinho. O que um tolo é capaz de fazer, outro também é. (REVISTA CÁLCULO, 2013, n° 31, p. 23)

No primeiro capitulo do livro, exibe o titulo “Cujo mote é libertá-los dos pavores preliminares”. Nesse capitulo, conforme descreve MIRANDA (2004, p. 78), Thompson dedica-se a uma descrição dos principais símbolos utilizados no cálculo diferencial e integral.

> Posso abolir de uma vez por todas o pavor preliminar, que desencoraja os jovens de até mesmo tentar aprender um pouquinho de cálculo, ao enunciar o significado dos dois principais símbolos em palavras coloquiais.
> Tais símbolos temíveis são: $(1)d$, que significa “um pouquinho de”.
> Assim, dx significa um pouquinho de x; ou du significa um pouquinho de u. Matemáticos normais acham mais educado dizer “um elemento de” em vez de “um pouquinho de”. Escolha a seu bel-prazer. Você descobrirá, contudo, que pode considerar tais pouquinhos (ou tais elementos) como sendo tão pequenos quanto queira.
> $(2)\int$, que é apenas um símbolo S alongado, e que você pode chamar (se quiser) de “a soma de”. Então, $\int dx$ significa a soma de todos os pouquinhos de x; ou $\int dt$ significa a soma de todos os pouquinhos de t. Matemáticos normais se referem a esse símbolo como “integral de”. (REVISTA CÁLCULO, 2013, n° 31, p. 23)

Em relação ao segundo capitulo, o seu titulo é “Sobre graus distintos de pequenez”, começa a trabalhar o conceito de infinitésimo, comparando diferentes ordens das quantidades pequenas. Esse conceito será de suma importância, já que em todo livro não se explicita o conceito de limite, neste livro há alguns dialogo com o leitor, para desenvolver a noção de infinitésimo vejamos algumas:

> Você verá, no processo de cálculo, que terá de lidar com quantidades pequenas de vários graus de pequenez.Terá também de aprender em quais circunstâncias pode tachar uma quantidade pequena como sendo tão miúda que pode desconsiderá-la. Tudo depende do grau relativo de miudeza.
> Antes de fixar quaisquer regras, deixe-me ajudá-lo a pensar em casos familiares. Há 60 minutos na hora, 24 horas no dia, 7 dias na semana. Portanto, há 1440 minutos no dia 10.080 minutos na semana.
> Como percebe, um minuto é quantidade de tempo muito pequena quando comparada com uma semana inteira. De fato, nossos antepassados o consideram pequeno quando comparado com uma hora, e por isso chamaram de “um minute”, significando uma fração diminuta de uma hora-

> qual seja, um sessenta avos. Depois precisaram de subdivisões de tempo ainda menores,e dividiram cada minuto em 60 partes ainda menores, que, naqueles dias, chamaram de “segundos minutes (quiseram dizer: quantidades pequenas de uma segunda ordem de pequenez) (REVISTA CÁLCULO, 2013, n° 31, p. 23).

Diante disso, percebe-se que Thompson fazia supressão dos termos infinitamente pequenos, ou seja, quanto menor essa menor quantidade, ela se torna menos importante, correspondente quantidade pequena na classe da segunda ordem de pequenez. Conforme é descrito em seu livro:

> Bem, no cálculo, você descreve dx para dizer um pouquinho de x. Essas coisas tais como dx, du e dy são chamados de “diferenciais”, isto é, o diferencial de x, o diferencial de u, o diferencial de y. Pode dizer que dx é uma pequena porção de x, e relativamente pequena por si mesma, mas não pode dizer que $x.dx$ ou $x^2.dx$ ou $a^2.dx$ são valores desprezíveis. Mas certamente poderia desprezar dx.dx, que seria uma quantidade de segunda ordem .(REVISTA CÁLCULO, 2013, n° 31, p. 24-25)

O terceiro capítulo refere-se a crescimento e variação das grandezas utilizadas no cálculo. Este capítulo a partir da sequência infinitésimo – taxas de variação, que se começa a estabelecer o conceito de derivada, onde o coeficiente diferencial (derivada) será definido. Thompson define quantidades constantes e variáveis

> Ao longo do cálculo, estamos lidando com quantidades que estão crescendo e com taxas de crescimento. Classificamos todas as quantidades em duas classes: constantes e variáveis. Aqueles que consideramos de valor fixo é chamada de constantes, geralmente denotamos algebricamente por letras do início do alfabeto, como a, b ou c; enquanto aqueles que consideramos capazes de crescer ou (como os matemáticos dizem) de "variando", denotamos por letras do final do alfabeto, como x, y, z, u, v, w ou às vezes t.(THOMPSOM, 1914, p.9)

Após breve explicação sobre constantes e variáveis no cálculo diferencial, é feita algumas considerações sobre dependências entre variáveis, conceitua de forma implícita o conceito de função, sem a preocupação descrever o conceito formal de função com toda simbologia matemática, que normalmente é usado nos livros de matemática avançada.

> Suponhamos que façamos x para variar, ou seja, queremos alterá-lo ou imaginar que seja alterado, adicionando-lhe um pouco que chamamos de

> dx. Estamos fazendo com que x se torne $x+dx$. Então, porque x foi alterado, y também terá alterado e se tornará $y+dy$ Aqui, o dy pode ser, em alguns casos, positivo, em outros negativos, e não terá (exceto muito raramente) o mesmo tamanho que o dx. (THOMPSOM, 1914, p.9-10)

Neste contexto, MIRANDA (2004, p.80) afirma que essa é a base para definição de derivada no livro Calculus Made Easy. A partir disso Thompson resolve alguns exemplos, isolando sempre os termos dx e dy. É a apartir desse processo de isolar dy e dx que defini-se o um dos conceitos mais importantes da matemática, que é o conceito de derivada.

> Na álgebra comum que você aprendeu na escola, você sempre estava caçando depois de uma quantidade desconhecida que você chamou de x ou y; ou às vezes havia duas quantidades desconhecidas para caçar simultaneamente. Agora você deve aprender a caçar de uma maneira nova; A raposa agora não é x nem aí. Em vez disso, você precisa caçar esse cachorro curioso chamado $\frac{dy}{dx}$ O processo de busca do valor $\frac{dy}{dx}$ é chamado de "diferenciação". Mas, lembre-se, o que é desejado é o valor dessa relação, quando tanto dy como dx são eles mesmo indefinidamente pequenos. O valor verdadeiro do coeficiente diferencial é aquele ao qual se aproxima no caso limitante quando cada um deles é considerado infinitamente menor. (THOMPSOM, 1914, p.16)

A partir do capitulo 4, preocupa-se com alguns processos para diferenciar, o processo que é descrito no livro para calcular a derivada de funções elementares, é feito por meio da comparação de acréscimos. Supõe-se uma variação na variável x, isso gera uma variação na variável y.

> Comecemos pela simples expressão $y=x^2$. Agora lembre-se que a noção fundamental sobre o cálculo é a idéia de crescer. Matemáticos chamam isso de variável. Agora, como y e x^2 são iguais uns aos outros, é claro que se x crescer, x^2 também crescerá. E se x^2 crescer, então y também crescerá. O que temos de descobrir é a proporção entre o crescimento de y e o crescimento de x. Em outras palavras, nossa tarefa é descobrir a relação entre dy e dx. Deixe x, então, crescer um pouco maior e tornar-se $x+dx$; Da mesma forma, y crescerá um pouco maior e se tornará $y+dy$. Então, claramente, ainda será verdade que o y ampliado será igual ao quadrado do x ampliado. Escrevendo isso, temos:
> $y+dy=(x+dx)^2$.
> Fazendo o quadrado que recebemos:

$y + dy = x^2 + 2.x.dx + (dx)^2$

Pode, portanto, ser descartado como bastante desprezível em comparação com os outros termos. Saindo, então temos:

$y + dy = x^2 + 2.x.dx$

Agora $y = x^2$, então deixe-nos subtrair isso da equação e nós deixamos:

$dy = 2.x.dx$

Dividindo tudo por dx, encontramos:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

(THOMPSOM,1914, p.18-19)

No capitulo 5, exibe o titulo "o próximo estágio: o que fazer com as constantes", mostra-se o que ocorre no processo de diferenciação quando aparecem constantes. Dando continuidade, o capitulo 6 "Somas, diferenças, produto e quociente", é trabalhado as regras de derivação de funções algébricas simples.

Volte às definições elementares e pense na equação a seguir, na qual u e v são funções de x. $y = uXv$. Agora faz x crescer para virar $x + dx$, e por isso u cresce para virar $u + du$, v cresce para virar $v + dv$ e, no fim das contas, y cresce para virar $y + dy$. Ao pôr, tudo isso no papel, fica com:

$y + dy = (u + du)X(v + dv)$

Como $y = uXv$ tira y do lado esquerdo e uXv do direito.

$dy = u.dv + v.du + du.dv$

O que faz com o último termo, $du.dv$? Bem, reconhece que é um termo de segunda ordem de pequenez (ou de segunda ordem de magnitude, como é o caso de $(dx)^2$, e daí já sabe pode desprezar termos assim:

$dy = u.dv + v.du)$

Por último, divide a expressão inteira por dx e ajeita os termos para que fiquem bonitos e claros:

$$\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$$

(REVISTA CÁLCULO, 2013, n° 33, p. 25)

3.3 ALGUNS CONCEITOS E DEFINIÇÕES IMPORTANTES

3.3.1 Função

Segundo, Stewart (2008,p.12) "uma função f é uma lei a qual para cada elemento x em um conjunto A faz corresponder exatamente um elemento chamado $f(x)$, em um conjunto B.

.

Em relação as funções em que A e B são conjuntos de números reais, descreve Stewart (2008,p.12)

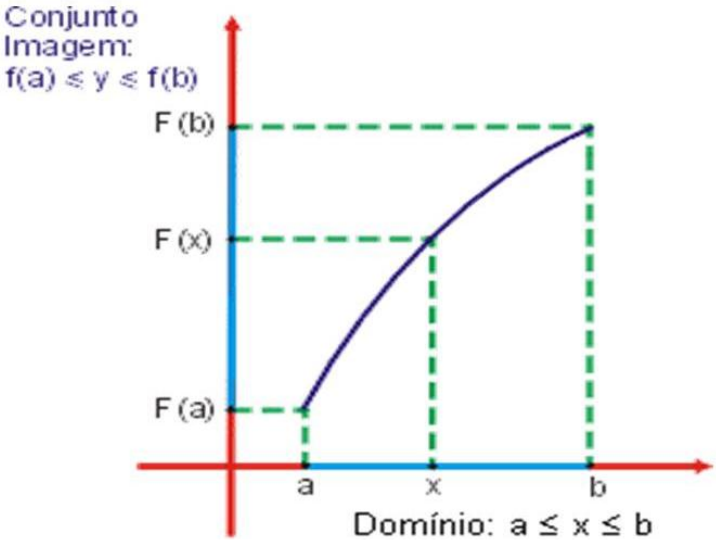
> O conjunto A é chamado domínio da função.O número $f(x)$ é o valor de f em x e deve ser lido como " f de x". A imagem de f é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ quando x varia por todo domínio.O símbolo que representa um número arbitrário no domínio de uma função f é chamado variável independente, e o que representa um número qualquer na imagem de f é denominado de variável dependente.

Neste contexto, apresenta-se o seguinte exemplo.

A área A de um círculo depende de seu raio r. A lei que conecta r e A é dada pela equação $A = \Pi r^2$. A cada número r positivo existe associado um único valor de A, e dizemos que A é função de r. Assim, tem-se que a variável r é independente, enquanto A é dependente.

Uma importante forma de visualizar uma função é através de seu gráfico, pois, afirma Stewart (2008, p.12) "O gráfico de uma função f nos dá uma imagem proveitosa do comportamento ou da "história de vida" de uma função". Em relação a gráfico de uma função, define Lima *et al* (2006,p.50) " O gráfico de uma função f : $R \rightarrow R$ é o conjunto dos pontos $P(x, F(x))$ que tem abscissa x e ordenada $F(x)$ para todo $x \in R$".

Figura 1: Representação do domínio e imagem da função



Fonte : www.educabras.com

3.3.2 Função Polinomial

Segundo, Stewart (2008, p.29) define uma função polinomial:

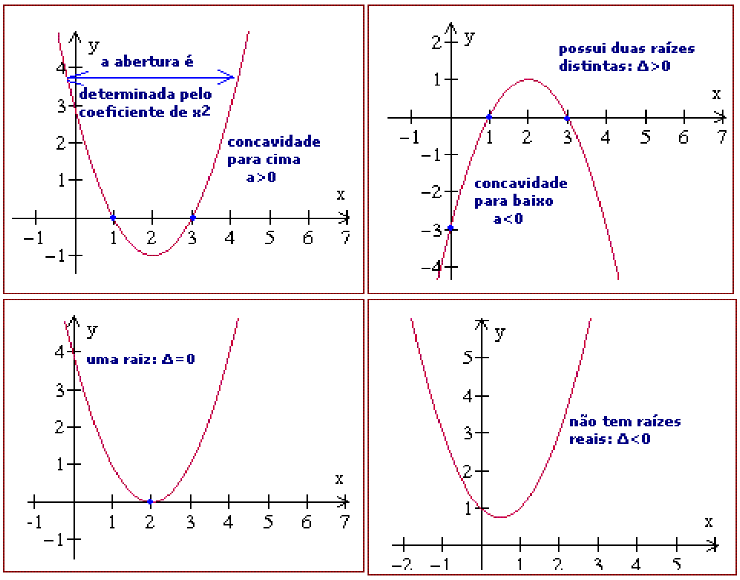
> Uma função P é denominada polinômio se $P(X) = a_n x^{n^o} + a_{n-1} x^{n-1^o} + ... + a_2 x^{2^o} + a_1 x + a_0$ onde n é um inteiro não negativo, e os números $a_{0,} a_1 a_2 ... a_n$ são constantes chamadas coeficientes do polinômio. O domínio de qualquer polinômio é $R = (-\infty, +\infty)$. Se o coeficiente dominante $an \neq o$, então o grau do polinômio é n.

Então, um polinômio de grau 1 é da forma $P(x) = mx + b$ e, portanto, é uma função afim. Um polinômio de grau 2 é da forma $P(x) = ax^2 + bx + bx + c$ é chamado função quadrática.

Em relação ao gráfico da função afim, $f(x) = ax + b$, segundo Lima *et al* (2006, p.50) “ é uma reta não-vertical (isto é, não paralela ao eixo OY) que corta OY no ponto de coordenadas ($0, b$) e passa pelo ponto de coordenadas ($1, a$) ”.

Ainda sobre gráfico de função, tem-se a função quadrática $f : R \to R$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, seu gráfico é uma parábola, sendo a, b e c pertencentes ao reias, e $a \neq 0$.

Figura 2: Função quadrática e suas raízes



Fonte: www.matematiques.com.br

.

Em relação a Δ, ele é definido da seguinte forma $\Delta = b^2 - 4.a.c$.

3.3.3 LIMITE DE UMA FUNÇÃO

A proposta é abordar de forma mais intuitiva, a partir de uma linguagem mais simples, segundo Kelley (2013,p.57) "Limite é o ponto máximo a que uma função tende dado um valor de x – e não importa se a função chega ou não a esse ponto máximo".

Diante dessa definição, veja o comportamento da função f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2, conforme tabela de valores de $f(x)$ para valores de x próximos de 2, mas não iguais a 2.

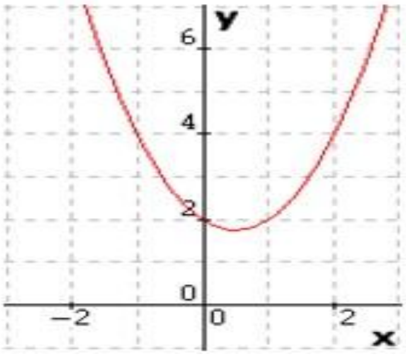
Tabela 1: Valores da função $f(x) = x^2 - x + 2$

X	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

Fonte: (Stewart,2008)

Vejamos o comportamento da função $f(x) = x^2 - x + 2$, segundo uma visão gráfica.

Figura 3: Gráfico da função $f(x) = x^2 - x + 2$



Fonte: (Stewart,2008)

.

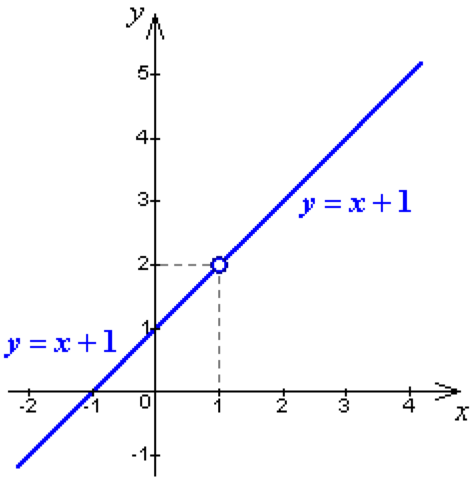
Conforme tabela 1 e gráfico 4 de $f(x) = x^2 - x + 2$, percebe-se que quando x aproxima-se cada vez mais de 2, tanto do lado direito quanto do lado esquerdo de 2, $f(x)$ fica mais próximo de 4.Isto é perceptível, pois tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 4 quanto se queira tornando x suficientemente próximo de 2.Isto descreve que o limite da função $f(x) = x^2 - x + 2$ quando x tende a 2 é igual a 4. Esta descrição tem a seguinte notação $\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 2) = 4$.

Neste contexto, afirma Stewart (2008, p.93):

> Escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e dizemos “o limite de f(x), quando x tende a a, é igual L” se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximos de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

A definição de limite segundo Stewart descreve que necessariamente a função $f(x)$ não precisa estar definida quando $x = a$, pois o que importa é como $f(x)$ está definida próximo de a. Vejamos a apresentação gráfica desta definição.

Figura 4: Gráfico da função afim $f(x) = x + 1$



Fonte: (Stewart,2008)

Sendo $y = f(x)$, observa-se que $f(x)$ não estar definida para $x = 1$, mas se x aproximar tão próximo quanto se queira de 1 por ambos os lados, a função $f(x) = x + 1$ terá limite igual a 2, ou seja, $\lim_{x \to 1} x + 1 = 2$.

.

A implicação disto, segundo Lima *et al* (2006, p.97) “ Uma função $f(x)$ não pode tender simultaneamente para dois limites finitos diferentes quando x tende para a”.

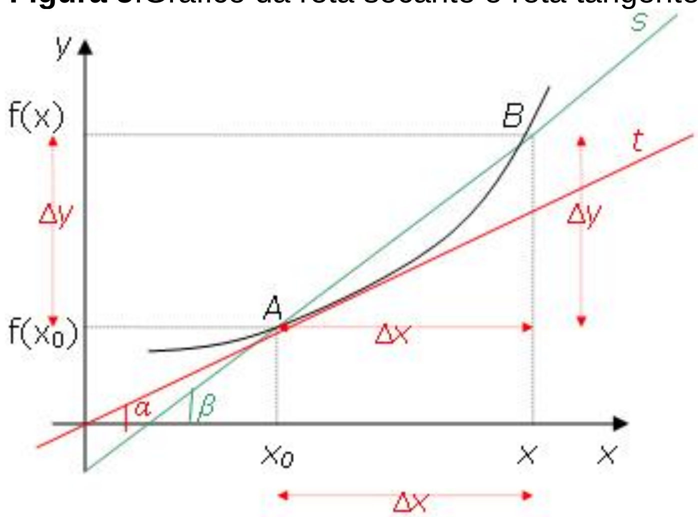
3.3.4 Infinitésimo

Chama-se de “infinitésimo” uma variável cujo limite é zero. Em geral, calcula-se este limite por meio de incrementos em funções. Conforme Lima *et al* (2006, p.99) “uma função $f(x)$ diz- se um infinitamente pequeno, ou um infinitésimo, no ponto a, se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$”.

3.3.5 Razão Incremental ou Taxa Média de Variação

Chamamos de razão incremental de uma função $f(x)$, o quociente de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, em que Δy e Δx são chamados incrementos, sendo que $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ e $\Delta x = x - x_0$.Observe o gráfico abaixo:

Figura 5:Gráfico da reta secante e reta tangente



Fonte:http://www2.anhembi.br/html/ead01/calculo_1/lu10/lo2/index.htm

Analisando o gráfico temos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\beta$, e quando Δx tende a 0 a reta secante s aproxima-se da reta tangente t. Então conclui-se que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, que é coeficiente angular da reta secante, aproxima-se do coeficiente angular da reta tangente t, este representaremos por $\frac{dy}{dx} = tg\alpha$.

Neste contexto, esta linguagem tem a seguinte notação $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$. Assim a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende a $\frac{dy}{dx}$, conforme Δx tende a 0 (caso o limite exista), sendo Δx o infinitésimo.

3.3.6 O Cálculo da Derivada

A função derivada tem a seguinte definição $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

Sendo $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ e $\Delta x = x - x_0$ logo, $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Como $x = x_0 + \Delta x$, temos que $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, que chamaremos de derivada da função.

A notação $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, logo, $f'(x_0)$ representa a derivada da função quando $x = x_0$.

Calculando a derivada da função afim e quadrática a partir de expressão geral de cada uma delas.

Exemplo: calcule a derivada da função $f(x_0) = a.x_0 + b$.

Sendo $y = (x_0)$, ao acrescentar Δx a x_0, y aumentará, implicando em: $y + \Delta y = a(x_0 + \Delta x) + b$ tem-se que $y + \Delta y = ax_0 + a\Delta x + b$ Como $y = f(x_0)$, logo $\Delta y = a\Delta x$.

Dividindo a expressão por Δx**,** chega-se: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$.

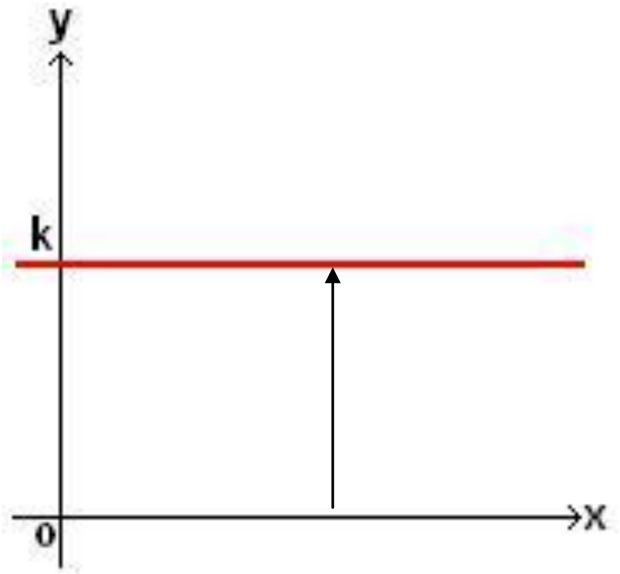
Quando Δx tende a zero, a tende a, e a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ por definição tende ao diferencial $\frac{dy}{dx}$ que vale a. Isto equivale dizer que: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \to \frac{dy}{dx} \to a$ quando $\Delta x \to 0$.

.

Diante do exposto, tem-se a seguinte linguagem $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, sendo $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} a$, logo, $\frac{dy}{dx} = a$.

Chega-se a essa conclusão a partir da propriedade de limite de uma constante, quando $f(x) = k$ uma função constante, limite de k quando $\Delta x \to a$, é k. Veja gráfico abaixo:

Figura 6: Gráfico da função constante $f(x) = k$



Fonte:http://universodasexatas.blogspot.com.br

Conforme grafico, para qualquer $x = a$, com x tendendo a a por ambos os lados, direito e esquerdo de a, quanto se queira, tem-se que $\lim_{\Delta x \to 0} k = k$.

Exemplo: calcule a derivada da função $f(x_0) = a.x_0{}^2 + b.x_0 + c$, com $a \neq 0$.

Sendo $y = f(x_0)$, ao acrescentar Δx a x_0, y aumentará, implicando em:

$$y + \Delta y = a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_o + \Delta x) + c$$

$$y + \Delta y = ax_0{}^2 + 2.a.x_o.\Delta x + a.\Delta x^2 + bx_0 + b.\Delta x + c$$

$$y + \Delta y = ax_0{}^2 + bx_0 + c + 2.a.x_0 \Delta x + a.\Delta x^2 + b.\Delta x$$

Sendo $y = ax_0{}^2 + b.x_0 + c$

$$\Delta y = 2.ax_0.\Delta x + a.\Delta x^2 + b.\Delta x$$

Dividi-se ambos os lados igualdade por Δx:

.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2.a.x_o. + a.\Delta x + b$$

Logo, $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 2.a.x_o. + a.\Delta x + b$

Então $\frac{dy}{dx} = 2.a.x_o. + b$

3.3.7 Regras de Diferenciação

a) Regras de derivada uma função constante: $f(x) = k$

Sendo $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, temos : $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_0)$.

Sendo $f(x_o + \Delta x) = k$ e $f(x_o) = k$, temos: $f(x_o + \Delta x) - f(x_0) = k - k = 0$.

Logo: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k-k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

$$\frac{dy(k)}{dx} = 0$$

b) Regra da potência, se n for um número real qualquer, então:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n.x^{n-1}$$

Sendo $y = x^n$, se acrescentarmos a $x + dx$, y crescerá $y + dy$, então:

$$y + dy = (x + dx)^n$$

A partir do desenvolvimento binomial, temos:

$$y + dy = x^n + n.x^{n-1}.dx + \frac{n.(n-1)}{2}.x^{n-2}.dx^2 + ... + n.x.dx^{n-1} + dx^n$$

Como $y = x^n$, temos:

$$dy = n.x^{n-1}.dx + \frac{n.(n-1)}{2}.x^{n-2}.dx^2 + ... + n.x.dx^{n-1} + dx^n$$

Agora despreza-se os termos pequenos de maior ordem de magnitude, ficará:

$$dy = n.x^{n-1}.dx$$

Dividindo por dx o lado esquerdo e direito da igualdade, temos:

.

$$\frac{dy}{dx} = n.x^{n-1}$$

Então: $\frac{d(x^n)}{dx} = n.x^{n-1}$

c) Regra da soma, se f e g forem ambas diferenciáveis, então:

$$\frac{d[f(x)+g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

Sendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ e $y = u + v$

x cresce para se transforma em $x + dx$, u crescerá para virar $u + du$ e v crescerá para virar $v + dv$.

Logo, y crescerá para virar $y + dy$, então:

$$y + dy = u + du + v + dv$$

Como $y = u + v$, temos :

$$dy = du + dv.$$

Agora dividi-se ambos os lados da igualdade por dx, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Então: $\frac{d[f(x)+g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$

d) Regra da diferença , se f e g forem ambas diferenciáveis, então:

$$\frac{d[f(x)-g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} - \frac{dg(x)}{dx}$$

Sendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$, $y = u - v$

x cresce para se transformar em $x + dx$, u crescerá para virar $u + du$ e v crescerá para virar $v + dv$.

Logo, y crescerá para virar $y + dy$, então:

$$y + dy = u + du - (v + dv)$$

$$y + dy = u + du - v + dv$$

Como $y = u - v$, temos:

$$dy = du - dv$$

Agora dividi-se ambos os lados da igualdade por dx, temos:

.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$$

Então: $\frac{d[f(x)-g(x)]}{dx}=\frac{df(x)}{dx}-\frac{dg(x)}{dx}$

e) Regra do múltiplo constante, se c for uma constante e f uma função diferençável, então: $\frac{d[c.h(x)]}{dx}=C.\frac{dh(x)}{dx}$.

Sendo $u=h(x)$ e $y=c.h(x)$, logo, $y=c.u$.

x cresce para se transforma em $x+dx$, u crescerá para virar $u+du$, logo y crescerá para virar $y+dy$, então:

$$y+dy=c.(u+du)$$

$$y+dy=c.u+c.du$$

Como $y=c.u$, temos:

$$dy=c.du$$

Agora dividi-se ambos os lados da igualdade por dx:

$$\frac{dy}{dx}=C.\frac{du}{dx}$$

Então: $\frac{d[c.h(x)]}{dx}=C.\frac{dh(x)}{dx}$

f) Regra do produto, se f e g forem ambas diferenciáveis, então:

$$\frac{d[g(x).h(x)]}{dx}=h(x).\frac{dg(x)}{dx}+g(x)\frac{dh(x)}{dx}$$

Sendo $u=h(x)$ e $v=g(x)$, $y=f(x)=u.v$.

x cresce para se transformar em $x+dx$, u crescerá para virar $u+du$ e v crescerá para virar $v+dv$, y crescerá para virar $y+dy$, então:

$$y+dy=(u+du).(v+dv)$$

$$y+dy=u.v+u.dv+v.du+du.dv.$$

Como $y=u.v$, temos:

$$dy=u.dv+v.du+du.dv$$

Sendo $du.dv$ um termo de segunda ordem de magnitude, despreza-se o termo $du.dv$, e implicará em:

$$dy=u.dv+v.du.$$

.

Agora dividi-se ambos os lados da igualdade por dx:

$$\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$$

Então: $\frac{d[g(x).h(x)]}{dx} = h(x).\frac{dg(x)}{dx} + g(x).\frac{dh(x)}{dx}$

g) Regra do quociente, se f e g forem ambas diferenciáveis, então:

$$\frac{d}{dx}[\frac{h(x)}{g(x)}] = \frac{g(x).\frac{dh(x)}{dx} - h(x).\frac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2}$$

Definindo $u = h(x)$ e $v = g(x)$, $y = f(x) = \frac{u}{v}$ e $u = v.y$.

x cresce para se transforma em $x + dx$, u crescerá para virar $u + du$, e v crescerá para virar $v + dv$,logo y crescerá para virar $y + dy$, então:

$$y + dy = \frac{u + du}{v + dv}$$

Transformando em um produto, temos:

$u + du = (v + dv).(y + dy)$.

Logo, temos que:

$u + du = v.y + v.dy + y.dv + du.dv$.

Sendo $du.dv$ um termo de segunda ordem de magnitude, despreza-se o termo $du.dv$, e implicará em: $u + du = v.y + v.dy + y.dv$.

Como $u = v.y$, temos:

$du = v.dy + y.dv$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por v, teremos: $v.du = v^2.dv + v.y.dv$.

Como $u = v.y$, e passando o termo $v.y.dv$ para o lado esquerdo da igualdade, temos que:

$v^{2}.dy = v.du - u.dv$.

Dividindo ambos os lados da igualdade por v^2, implicará em:

$$dy = \frac{v.du - u.dv}{v^2}.$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por dx, temos:

.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v.\frac{du}{dx}-u.\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

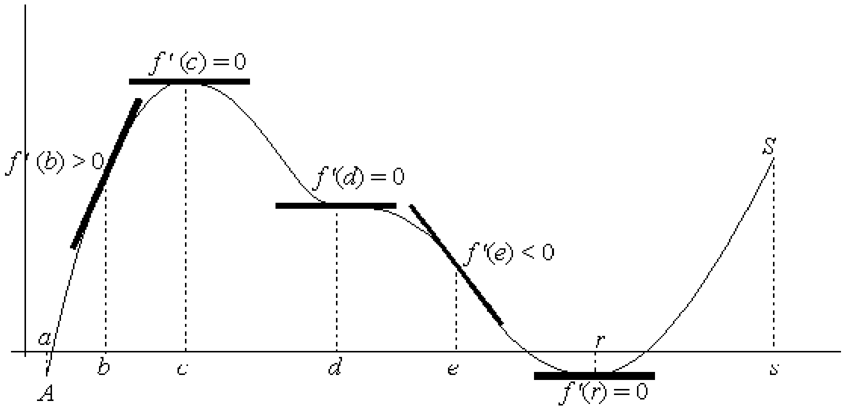
Então, temos: $\frac{d}{dx}[\frac{h(x)}{g(x)}]=\frac{g(x).\frac{dh(x)}{dx}-h(x).\frac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2}$.

3.3.8 A Derivada e o Comportamento das Funções

A derivada $f'(x)$ de uma função $f(x)$ nos dá o comportamento da função, mostrando o crescimento e decrescimento, além do valor máximo e mínimo.

> [...] Como $f'(x)$ representa a inclinação da curva $f(x)$ no ponto $(x, f(x))$, ela nos informa a direção segundo a qual a curva segue em cada ponto. Assim, é razoável esperar que a informação sobre $f'(x)$ nos dê informações sobre $f(x)$.(STEWART, 2008, p.296)

Figura 7: Mostra o comportamento do gráfico da função



Fonte:www.biopsychology.org/apuntes/calculo/calculo2.htm

Conforme figura 7, no intervalo $a \leq x < c$ temos que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(b, f(b))$ possui coeficiente angular positivo, logo, *f'(b)>0*, isto é, nas proximidades de *b f* só pode ser crescente.Da mesma forma, no intervalo *d< x<r* temos que a reta tangente ao gráfico de f no ponto *(e, f(e))* possui coeficiente angular negativo, logo, *f'(e)<0*, isto é, nas proximidades de e *f* só pode ser decrescente No ponto *(c, f(c))*, no ponto *(d,f(d))* e no ponto *(r,f(r))* o coeficiente angular é zero,logo, *f'(c)=0, f'(d)=0 e f'(r)=0*, isto é, a reta tangente é horizontal.

Na figura 7, considerando os valores de *x* próximos de c e delimitarmos ao intervalo *(b,d)*, então *f(c)* é o maior desses valores de *f(x)* e é chamado de valor

.

máximo local de f, pois $f(c) \geq f(x)$ quando x estiver nas proximidades de c.Analogamente, f tem um mínimo local em r no intervalo (e,s) se $f(r) \leq f(x)$ quando x estiver próximo de r, então $f(r)$ é o menor desses valores e é chamado de valor mínimo local de f .No entanto no intervalo (c,e) d não é máximo e nem mínimo local pois nas proximidades lado esquerdo de d $f(d) \leq f(x)$ e nas proximidades do lado direito de d $f(d) \geq f(x)$.

4 METODOLOGIA

Esse estudo tem por finalidade realizar uma pesquisa de cunho científico, que para Cervo, Bervian e Silva (2007) pode ser entendida como uma atividade voltada para a investigação de problemas teóricos ou práticos por meio do emprego de processos científicos. Ela parte, pois, de uma dúvida ou problema e, com o uso do método científico, busca uma resposta ou solução.

Neste contexto, Ludke e André (1986) descrevem que para realizar uma pesquisa é preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito dele.

Tem por objetivo a pesquisa descritiva que, segundo Gil (2008), tem como objetivo descrever as caracteristicas de determinadas populações ou fenômenos. Uma de suas peculiaridades está na utilização de técnicas padronizadas de coletas de dados, tais como o questionario e a observação sistematica. Para Barros e Lehfeld, (2007) as pesquisas descritivas “procuram descobrir a frequência com que um fenômeno ocorre, sua natureza, características, causas, relações e conexões com outros fenômenos”.

Para maior enriquecimento deste trabalho com base na pesquisa bibliográfica correlaciona-se assim, de forma muito eficaz as informações científicas já existentes e abordadas por outros autores, com as informações obtidas. Sendo que para garantir o anonimato e assim uma maior liberdade da pessoa na concessão das respostas e garantindo uma menor possibilidade de interferência do pesquisador serão aplicados, questionários que segundo Cervo, Bervian e Silva (2007, p. 53) “é a forma mais usada para coletar dados, possibilita medir com mais exatidão o que se deseja” com perguntas específicas para uma compreensão mais rica do fenômeno.

A abordagem pedagógica deste trabalho esta pautada sobre o conhecimento prévio do aluno, tendo como referência a Teoria da Aprendizagem Significativa, de David Ausubel, que de acordo com Santos (2008, p.52) tenta explicar a aprendizagem e o ensino tendo o aluno como referencial, iniciando o distanciamento das teorias condutistas, que tinham o professor como referencial.

Diante do exposto, Lakomy (2008, p. 61) descreve que a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, apresentada em 1985 prioriza a organização cognitiva dos conteúdos aprendidos de forma ordenada, possibilitando ao aluno uma gama de opções de associações de conceitos de modo a levar à consolidação do aprendizado ou a um novo aprendizado.

Neste contexto, para Santos (2008, p. 53) a aprendizagem é muito mais significativa à medida que o novo conteúdo é incorporado às estruturas de conhecimento de um aluno e adquire significado para ele a partir da relação com seu conhecimento prévio. Este processo segundo Santos (2008, p.53) a nova informação interage em comum à estrutura de conhecimento especifico, que Ausubel chama de conceito "subsunçor".

Para Santos (2008, p. 54), o "subsunçor" é uma estrutura específica por meio da qual uma nova informação pode se integrar ao cérebro humano, que é altamente organizado e detentor de uma hierarquia conceitual que armazena experiências prévias do aprendiz.

Conforme Lakomy (2008, p. 63), a aprendizagem significativa está intimamente relacionada com os pontos de ancoragem – que são formados com a incorporação, à nossa estrutura cognitiva, de conceitos, ideias ou informações que são relevantes para a aquisição de novos conhecimentos, ou seja, para que possamos aprender conceitos novos.

Segundo SANTOS (2008, p. 55), para Ausubel a aprendizagem mecânica é necessária e inevitável no caso de conceitos inteiramente novos para o aprendiz, mas posteriormente ela se transformará em significativa. Para acelerar esse processo, Ausubel propõe os organizadores prévios, âncoras criadas a fim de manipular a estrutura cognitiva, interligando conceitos aparentemente não relacionáveis por meio da abstração. A aprendizagem mecânica é descrita por Moreira (2012, p.12) como armazenamento literal, arbitrário, sem significado, não requer compreensão, resulta em aplicação mecânica a situações conhecidas.

Dessa forma, de acordo com Santos (2008, p.54) a aprendizagem significativa é preferível à aprendizagem mecânica, ou arbitrária, pois constitui um método mais simples e eficiente. Muitas vezes um indivíduo pode aprender algo mecanicamente e só mais tarde percebe que este se relaciona com algum conhecimento anterior já dominado. No caso ocorreu então um esforço e tempo demasiado para assimilar conceitos que seriam mais facilmente compreendidos se encontrassem uma "âncora", ou um conceito "subsunçor" existente na estrutura cognitiva.

Houve ainda a utilização de um vídeo a respeito do tema proposto, sendo que, para Silva e Oliveira (2010, p.94) a utilização da tecnologia na sala de aula tanto possibilita a inovação na prática de ensino e aprendizagem; como viabiliza a circulação de informações de forma atrativa. Neste contexto, para Moran (1995, p.27) o vídeo ajuda a um professor, atrai os alunos, mas não modifica substancialmente a relação pedagógica. Aproxima a sala de aula do cotidiano, das linguagens de aprendizagem e comunicação da sociedade urbana, e também introduz novas questões no processo educacional.

São muitas possibilidades de uso de vídeos em sala de aula. Moran (1995, 30) apresenta algumas situações de uso de vídeos em sala de aula, das quais destaca-se:

> Vídeo como sensibilização: para introduzir um novo assunto, despertar curiosidade e motivar os alunos.
> Vídeo como ilustração: como forma de apresentar cenários desconhecidos do aluno.
> Vídeo como simulação: para mostrar, por meio de simulação, processos químicos, por exemplo.
> Vídeo como conteúdo de ensino: para informar sobre os conteúdos específicos.
> Vídeo como produção: registro do trabalho desenvolvido, intervenção ou expressão.

4.1 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA

O estudo ocorreu na Escola Estadual Professora Maria Iraci Tavares, localizada na zona urbana do município de Ferreira Gomes, Rua duque de Caxias, n° 521, Bairro centro, é a única escola de ensino médio do município.O desenvolvimento do trabalho foi realizado com a turma 1111 do turno da manhã que possui .

A Escola Estadual Professora Maria Iraci Tavares funciona os 3 (três) turnos, sua clientela são alunos do ensino fundamental II (5° ao 9° ano) regular e alunos do ensino médio regular e EJA. Tem sua estrutura composta por: 8 salas de aula, 1 biblioteca, 1 sala de leitura, 1 laboratório de informática, 1 refeitório, 1 sala de atendimento educacional especializado, sala da secretaria escolar, sala da direção escolar, sala da supervisão, sala dos professores, 1 banheiro para os alunos , 1 banheiro para os funcionários, uma quadra esportiva.O quadro de funcionários da escola esta distribuído em : 2 supervisores, 1 diretor escolar, 1 diretor adjunto, 1 secretario escolar, 45 docentes, 5 setor administrativo e 6 setor de apoio (servente e merendeiro).O estabelecimento de ensino dispõe dos seguintes equipamentos :

25 computadores, 2 data show, 1 caixa amplificada e microfone, 2 televisões, 1aparelho de DVD, 3 impressoras.

Figura 8: E.E Profª Maria Iraci Tavares

Fonte: Elaborado pelo autor

5.2 DESCRIÇÃO DA AMOSTRA

A presente pesquisa foi aplicada em uma turma de 1° ano do ensino médio do turno da manhã, que possui 24 alunos, sendo 8 do sexo masculino e 16 do sexo feminino, são alunos com média de idade de 15 anos, sendo a maioria alunos sem distorção de idade/ série, ou seja, composta de alunos que nunca foram reprovados, e que não repetiram o 1° ano do ensino médio.

Figura 9:Turma 1111

Fonte: Elaborado pelo autor

4.3 CRONOLOGIA DAS ATIVIDADES

As atividades foram desenvolvidas em aulas de 50 minutos hora-aula , na turma de 1° ano do ensino médio, do turno da manhã das 7h15min ás 12h25min.

4.4. EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

No primeiro dia foi feito uma sondagem sobre o conteúdo que o professor da turma tinha ministrado até o presente momento, para verificar se havia a possibilidade de logo se iniciar as aulas com conteúdo de calculo diferencial, para poder aproveitar o conhecimento prévio do aluno a respeito de função e taxa de variação da função de 1° e 2° grau.

4.5. DESENVOLVIMENTO DA METODOLOGIA

O objetivo do uso de vídeo – aulas, referente aos conteúdos abordados foi no intuito de tornar a aula mais atrativa e dinâmica para os alunos durante as exposições das vídeo – aulas, pois, é uma linguagem diferente dos livros didáticos, e sempre sofrerá intervenções do professor a partir das duvidas do aluno e alguns casos o professor fará intervenção no intuito de contribuir com ideias e conceitos apresentados nas vídeo – aulas.

- Aula 1(3 horas aula) ministrada no dia 12 de junho

Vídeo aula 1- conceitos básicos de função

Primeiramente foi repassado 3 (três) vídeos com duração de 20 minutos e 57 segundos, que serviram de apoio para resolver as questões da lista 1, estão distribuídos da seguinte forma:

a) O primeiro vídeo de 9 minutos e trinta e oito segundos, abordava noções intuitivas, plano cartesiano, par ordenado.
b) O segundo vídeo de 8 minutos e 10 segundos, abordava produto cartesiano, funções no plano cartesiano, domínio, contradomínio e imagem
c) O terceiro vídeo de 3 minutos e 9 segundos, abordava lei de formação e outros tipos de funções.

Vídeo aula 2 - Função polinomial do 1° grau

O conteúdo foi desenvolvido a partir 2 (dois) vídeos com duração de 16 minutos e 6 segundos, distribuídos da seguinte forma:

a) O primeiro vídeo de 9 minutos e 41 segundos, abordava noções intuitivas, construção do gráfico e estudo da função.
b) O segundo vídeo de 7 minutos e 21 segundos, abordava estudo da função.

Aula 2 (2 hora aula) dia 13 de junho - verificação da aprendizagem

Aplicação da lista 1 do apêndice A, composta de 4 (quatro) questões subjetivas, com objetivo de fazer a verificação da aprendizagem do assunto da aula 1.

A lista 1 é composta de 4 questões subjetivas, sendo que as questões são atividades de função polinomial do 1° grau,distribuída da seguinte maneira: As duas primeiras questões referia-se a identificar os coeficientes angular e linear, raiz da função e classificar se a função polinomial do 1° grau é crescente ou decrescente.Com as informações obtidas das funções das duas primeiras questões, o aluno terá informações suficientes para construir o gráfico das funções referente as duas primeiras questões.Já a quarta questão era um problema contextualizado de matemática financeira.

Aula 3 (3 hora aula) ministrada no dia 19 de junho

Vídeo aula 3- Estudo sobre função polinomial do 2° grau

O conteúdo foi desenvolvido a partir 5 (cinco) vídeos com duração de 45 minutos e 1 segundo, distribuídos da seguinte forma:

a) O primeiro vídeo de 9 minutos e 1 segundo, abordava noções intuitivas, construção do gráfico;
b) O segundo vídeo de 6 minutos e 53 segundos, abordava resolução da equação do 2° grau;
c) O terceiro vídeo de 7 minutos e 53 segundos, abordava exemplos de construção do gráfico, estudo do discriminante e os casos possíveis;
d) O quarto vídeo de 6 minutos e 57 segundos, abordava vértice da parábola;
e) O quinto vídeo de 14 minutos e 16 segundos, abordava resolução de valor máximo e mínimo;

Aula 4 (2 hora aula) dia 20 de junho – verificação da aprendizagem

Aplicação da lista 2 do apêndice B é composta de 5 (cinco) questões subjetivas, com objetivo de fazer a verificação da aprendizagem do assunto da aula 3.

A lista 2 é composta de 5 questões subjetivas, sendo que as questões são atividades de função polinomial do 2° grau,distribuída da seguinte maneira: as três primeiras questões refere-se o local onde corta o eixo das ordenadas, raiz da função, vértice da função e representação gráfica.Com as informações obtidas das funções das três primeiras questões, o aluno terá informações suficientes para construir o gráfico das funções referente as três primeiras questões.Já a quarta questão é um problema contextualizado de geometria plana.

Aula 5 (2 hora aula) ministrada no dia 21 de junho

Vídeo aula 4- Taxa de variação média

O assunto foi desenvolvido a partir 1 (um) vídeo com duração de 12 minutos e 25 segundos, que abordava a taxa de variação media da função polinomial do 1°grau e 2° grau.

Logo após, a vídeo aula 4 foi feita a aplicação da lista 3 do apêndice C é composta de 5 (cinco) questões subjetivas, com objetivo de fazer a verificação da aprendizagem do assunto da aula 5.

A lista 3 é composta de 5 questões subjetivas, sendo que as questões são atividades de taxa de variação média das funções polinomiais do 1º e 2° grau,distribuída da seguinte maneira: as duas primeiras questões calcular a taxa de variação média de $f(x) = a.x + b$ e $f(x)= a.x^2 + b.x + c$. Já a terceira questão é para calcular a taxa de variação média das funções $f(x) = 2.x$ e $g(x) = x^2$ de acordo com intervalo. A quarta é aplicação de taxa de variação média em contexto do tópico de cinemática, e a quinta questão refere-se a taxa de variação média da função $y= 4 - x^2$ de acordo com intervalo.

Aula 6 (3 hora aula) ministrada em 26 de junho

Vídeo aula 5- Noção intuitiva de limite

O assunto foi desenvolvido a partir 1 (um) vídeo com duração de 23 minutos e 35 segundos, que abordava noção intuitiva de limite a partir de um gráfico e de uma tabela de valores.

Vídeo aula 6- derivada de uma função

O conteúdo foi desenvolvido a partir 3 (três) vídeos com duração de 45 minutos e 1 segundo, distribuídos da seguinte forma:

a) O primeiro vídeo de 23 minutos e 00 segundo, que abordava sobre reta tangente;
b) O segundo vídeo de 14 minutos e 00 segundo, que abordava derivada de uma função;
c) O terceiro vídeo de 29 minutos e 25 segundos, que abordava resolução de exercício sobre derivada de uma função;

Aula 7 (2 hora aula) dia 27 de junho-verificação da aprendizagem

A aula 7 trata da resolução de exercício através da derivada das funções das atividades 1,2 e 4 da lista 1 e atividades 2,3 e 5 letra b da lista 2.

Não fizemos uma avaliação quantitativa, mas sim uma avaliação qualitativa do desempenho nas atividades aplicadas com o objetivo de acompanhar o desenvolvimento conceitual de cada participante. Classificamos as respostas dadas aos exercícios contidos nas listas de atividades segundo o ponto de vista da correção matemática. Desta forma, estabelecemos o seguinte critério para classificar estas respostas:

• Satisfatória (S), quando a resposta estava de acordo com o ponto de vista da correção matemática.

• Parcialmente satisfatória (PS), quando a resposta dada satisfazia parcialmente ao padrão estabelecido.

• Não satisfatória (NS), quando a resposta dada não estava de acordo com o ponto de vista da correção matemática.

• Não compareceu (NC), quando o aluno não compareceu, ou seja, faltou no dia da aplicação da lista.

Os alunos serão classificados em A1,A2, A3,...até A24, onde A1 aluno 1, A2 aluno 2, assim por diante, até A24 .

.

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Observou-se nos resultados nitidamente os efeitos positivos de se optar por uma proposta pedagógica de ensino mais intuitiva que conduz o aprendiz a uma diversidade de representações visando ao entendimento claro de um conceito levando em consideração o conhecimento prévio do aluno.

Analisando os resultados da lista 1 , lista 2 e lista 3 podemos concluir que é importante para o aluno saber o conceito de função, em especial conhecer como se comportam as funções polinomiais de 1º e 2º grau, tendo como suporte a taxa de variação média a partir da variação de x, em um intervalo, e principalmente quando a variação de x é muito pequeno, ou seja, tão próximo de zero quanto se queira, mas a variação de x não é zero.

Os alunos conseguiram comparar as funções polinomiais de 1º e 2º grau, a partir da taxa de variação média, concluindo que a função polinomial de 1º grau terá sempre o mesmo valor, independente do intervalo de x. Já a taxa de variação média da função polinomial do 2º grau varia conforme intervalo de variação x.

A aplicação da atividade sobre calcular a derivada de uma função, só apresentou bons resultados, pois se trabalhou anteriormente o conceito de função e taxa de variação media, para que os alunos pudessem ter uma boa fundamentação do conceito de derivada, conforme demonstra Tabela 6.

No caso, em particular da função quadrática, os alunos resolveram problemas que envolveram ponto de máximo ou de mínimo. Tendo como ferramenta principal o uso da derivada, sem a necessidade de usar a expressão do vértice da parábola para resolver problemas que envolvem ponto de máximo ou de mínimo.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou um panorama da história do cálculo diferencial, a partir dos pensamentos de Issac Newton e Leibniz. E um breve relato da história do Cálculo no Brasil , procurando entender se esse tópico já esteve presente no ensino de Matemática no Brasil e as causas do declínio de seu estudo no Ensino Médio. Mostramos que esse conteúdo já esteve presente nas escolas brasileiras. Acredito que, por se tratar de um assunto de extrema importância cultural, não deve deixar de ser ensinado no Ensino Médio. Os argumentos se aproximam do que os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio (PCN) sugerem para o ensino de Matemática em relação ao estudo de funções.

Diante desse pensamento, acredito que o ensino de noções de Cálculo deva fazer parte do programa curricular de matemática, pois os conceitos estudados dá embasamento, no estudo de funções, a busca de soluções de problemas modelados. Assim, o aluno trabalha com funções analisando as suas propriedades principais.

A partir do embasamento histórico deste trabalho, mostrei que esse assunto já fez parte do componente curricular da disciplina de matemática, no ensino médio em escolas brasileiras, e com isso valorizamos a possibilidade da abordagem desse tópico no ensino de matemática. A importância cultural do ensino de Cálculo está relacionada ao fato de que a derivada - um dos tópicos desse assunto - foi uma das maiores descobertas da humanidade em matemática. Já o argumento social envolve pensarmos que muitos problemas da vida cotidiana poderiam ser facilitados usando as ferramentas do Cálculo, além de que a aplicação de conceitos básicos do Cálculo poderia servir para resolver problemas de outras áreas, tendo, assim, um caráter funcional (ANDRÉ, 2008, p. 4).

A fundamentação da proposta didática para o estudo da derivada no ensino médio foi inicialmente, introduzir o conceito de função, a ideia da taxa de variação média, e de taxa de variação instantânea, valorizando a intuição. Acreditamos que, dessa forma, a introdução ao estudo de derivada não se torne um assunto de difícil aprendizagem para estudantes da escola básica. Procurei, nesse trabalho, estruturar as atividades de um modo que fosse possível estudar o tópico de derivada, viabilizando uma possível posterior definição formal.

Analisando a participação dos alunos na atividade e os resultados obtidos nos testes feitos com alunos do ensino médio, considero ser viável a introdução de noções de Cálculo nessa etapa de ensino de matemática.

Conforme os resultados da lista 1, lista 2 e lista 3 podemos concluir que é importante para o aluno saber o conceito de função, em especial conhecer como se comportam as funções polinomiais de 1º e 2º grau, tendo como suporte a taxa de variação média a partir da variação de x, em um intervalo, e principalmente quando a variação de x é muito pequeno, ou seja, tão próximo de zero quanto se queira, mas a variação de x não é zero.

Os alunos conseguiram comparar as funções polinomiais de 1º e 2º grau, a partir da taxa de variação média, concluindo que a função polinomial de 1º grau terá sempre o mesmo valor, independente do intervalo de x. Já a taxa de variação média da função polinomial do 2º grau varia conforme intervalo de variação x.

A aplicação da atividade sobre calcular a derivada de uma função, só apresentou bons resultados, pois se trabalhou anteriormente o conceito de função e taxa de variação media, para que os alunos pudessem ter uma boa fundamentação do conceito de derivada, conforme demonstra Tabela 6.

Assim, as atividades desenvolvidas em sala de aula, que envolveu o conceito de cálculo diferencial a partir de uma abordagem intuitiva, propiciou aos alunos uma visão mais ampla e aprofundada das funções polinomiais de 1º e 2 º grau, podendo observarem propriedades antes que não estavam bem definidas.

Por fim, foi exposto nesse trabalho as regras de derivação sem o uso do rigor de limite. Este trabalho contribuiu para compartilhar ideias sobre a inclusão do tópico de derivada, baseado em uma abordagem intuitiva. Assim, consideramos que um primeiro passo para essa mudança é a consciência da possibilidade e da importância do estudo de noções de cálculo diferencial.

Portanto, espera-se que este trabalho auxilie o docente de matemática a estimular as suas aulas, ou seja para o aluno, uma fonte agradável para adquirir e aprimorar o conhecimento de derivada e outros assuntos abordados ao longo deste trabalho.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, Geraldo.**O ensino do cálculo e da ánalise**.Matemática Universitária, n° 33, pp. 86-89, dezembro/2002.

BARROSO, J.C.D.G.A.**O desenvolvimento dos processos de intuição e argumentação em matemática através de uma atividade investigativa.**IX encontro nacional de educação matemática, Belo Horizonte-MG, 2007. Disponivel em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/posteres.html.

BOYER, Carl Benjamin.**História da matemática**. Sao Paulo:Edgard Blucher,1974.

BRASIL. Decreto n. 981, de 8 de novembro de 1890. **Approva o Regulamento da Instrucção Primaria e Secundaria do Districto Federal**. D.O., Rio de Janeiro, 1890. Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=65346>. Acesso em: 24 mar. 2017.

______. Decreto n. 3.914, de 23 de janeiro de 1901. **Aprova o Regulamento para Gimnasio Nacional**. D.O., Rio de Janeiro, 1901. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1900-1909/decreto-3914-23-janeiro-1901-503356-publicacaooriginal-1-pe.html> Acesso em: 24 mar. 2017.

______ Decreto n. 19.890, de 18 de abril de 1931. **Dispõe sobre a organização do ensino secundário**. D.O., Rio de Janeiro, 1931. Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=40440>. Acesso em: 24 mar. 2017.

______. Decreto n. 21.241, de 4 de abril de 1932. **Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e dá outras providências**. D.O., Rio de Janeiro, 1932. Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=32229>. Acesso em: 25 mar. 2017.

______. Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961. **Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. D.O. Brasília, 1961. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l4024.htm>. Acesso em: 25 mar de 2017

______. Ministério da Educação. **Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.

______. Resolução nº 2, de 30 de janeiro de 2012. **Define Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. D.O. Brasília, 31 de janeiro 2012, Seção 1, p.20.

______.Secretaria de Educação Básica.**Formação de professores do ensino médio**,**Etapa II - Caderno V**: Matemática.Curitiba, 2014.
BÚRIGO, Elizabete Zardo. **O movimento da matemática moderna no Brasil: encontro de certezas e ambiguidades**. Revista Diálogo.Curitiba, v. 6, n°18, pp. 35-47, mai/ago, 2006.

CERVO, Amado. L ; Bervian, Pedro . A; SILVA, Roberto. **Metodologia Cientifica.**Editora: Pearson, 6ª ed, 2007.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Por que se ensina Matemática?** Disciplina à distância, oferecida pela SBEM.http://www.ciadaescola.com. br/eventos/reuniao2004/natureza/pos/por-que-seensina-matematica. pdf, 2013.

DUCLOS, Robert Costallat. **Cálculo do 2º grau**. In: Revista do Professor de Matemática, n.20. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, pp.26-30.

D'AMBROSIO, U. **Por que se ensina matemática?** Disciplina à distância, oferecida pela SBEM. Disponível em: http://apoiolondrina.pbworks.com/f/Por%20que%20que%20ensinar%20Matematica.pdf.Acesso em 13/04/2017.

GODOY, Elenilson Vieira.A Matemática no ensino médio– A trajetória brasileira desde a década de 80 e as organizações curriculares de outros países.**Práxis Educacional.Vitoria da Conquista, v.6,n°9,p.77-100,jul/dez,2010.**

KELLEY, W. Michael. **O guia completo para quem não é C.D.F**. Rio de Janeiro, alta books, 2013.

KLINE, Morris. **O fracasso da matemática moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

LIMA, Elon Lages.et al.**Temas e problemas elementares**.Rio de Janeiro, SBM, 2006.

______, J.J Pedroso.et al.**Biomatemática: Uma introdução para o curso de medicina**.Coimbra, Imprensa da Universidade de Coimbra, 2006.

LAKOMY, Ana Maria. Teorias cognitivas da aprendizagem. 2.ed. Curitiba: Ibpex, 2008.

LOPES, A. C. **Os parametros curriculares nacionais para o ensino médio e a submissão ao mundo produtivo: O caso do conceito de contextualização.** Revista Educação e sociedade.Campinas, v. 23, n° 80, p. 386-400, setembro, 2002.

LUDKE, Menga; ANDRE, Mali E.D.A. **Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas**.São Paulo, Editora Pedagogica e Universitária, 1986.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática.** Belo Horizonte:CAED-UFMG, 2013.

MORAN, José Maciel. O vídeo na sala de aula.Comunicação e Educação, n.2, p. 27-35, 1995. Disponível em <https://w.w.w.revistas.usp.br>

MORRIS, Richard. **Uma breve história do infinito: Dos paradoxos de Zenão ao Universo Quantico**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

SANTOS, Julio César Furtado. Aprendizagem significativa: modalidades de aprendizagem e o papel do professor. Porto Alegre: Mediação,2008.

SILVA, R. V; OLIVEIRA, E. L. **O vídeo como recurso de aprendizagem em salas de aula do 5° ano**. Revista EDAPECI, V.6, p. 93-103, dez, 2010. Disponível em < http://w.w.w.seer.ufs.br/index.php/edaci/article/view/602>

SOARES, F. S.; DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. **Ensino de matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna**. Revista Horizontes. Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7-15, jan./jun., 2004.

STEWART, James. **Cálculo, volume I**.São Paulo:Thomson Learning, 2008.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Lista 1 Atividade Sobre Funções Polinomial Do 1º Grau
Nome: ____
Data: _____/______/_______ **Nº** _______

1 – Segunda A Função f(x) = 2. X + 4, Resposta:

a) Qual O Valor do Coeficiente Angular?
b) Qual O Valor do Coeficiente Linear?
c) Qual O Valor da Raiz da Função?
d) A função é crescente ou decrescente? Justifique
e) Qual a Representação gráfica da função do tipo f (x)= a.x + b?

2 – Segunda a função f (x) = - 4x + 8, responda:

a) Qual O Valor do Coeficiente Angular?
b) Qual O Valor do Coeficiente Linear?
c) Qual O Valor da Raiz da Função?
d) A função é crescente ou decrescente? Justifique
e) Qual a Representação gráfica da função do tipo f (x)= a.x + b?

3 – construa o gráficos das funções 01 e 02 das questões anteriores

4 – (PUC-SP, adaptado) de modo geral, a lei que rege as transações comercias é V = C + L, em que:

V é preço de venda do produto;
C é o preço de custo do produto
L é lucro obtido na transação;

Para produzir um objeto uma firma gasta R$ 1,20 por unidade. Além disso, há uma despesa fixa de R$ 4.000,00, independente da quantidade produzida. O preço de venda é de R$ 2,00 por unidade.

a) Define-se receita R como o produto do numero de elementos vendidos pelo preço de venda. Qual é a receita gerada pela venda de 1000 objeto? E de 2500 objeto?
b) Obtenha a lei que define o lucro L em função da produção de x unidades. Admita que todas as unidade são vendidas.
c) Qual é o numero de unidades a partir do que a firma começar a ter lucro?.

.

APÊNDICE B

Lista 2 -Atividade Sobre Funções Polinomial do 2º grau
Nome: ____
Data: _____/______/_______ **Nº** _______

1 – Segundo a função f (x) = $x^2 - 5x + 6$, determine:

a) O local onde o gráfico da função corta o eixo das ordenadas
b) As raízes da função
c) O vértice da função do 2 ° grau
d) A representação gráfica da função do tipo f (x) = $a.x^2 + bx + c$

2 – Segundo a função f (x) = $-x^2 + 6x – 9$, determine:

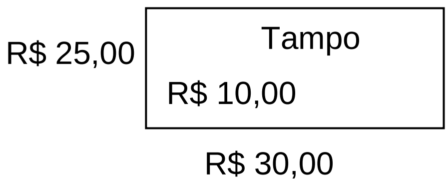
a) O local onde o gráfico da função corta o eixo das ordenadas
b) As raízes da função
c) O vértice da função do 2 ° grau
d) A representação gráfica da função do tipo f (x) = $a.x^2 + bx + c$

3 – Segundo a função f (x) = $3x^2 - 2x + 5$, determine:

a) O local onde o gráfico da função corta o eixo das ordenadas
b) As raízes da função
c) O vértice da função do 2 ° grau
d) A representação gráfica da função do tipo f (x) = $a.x^2 + bx + c$

4 – construa o gráfico das funções 1,2 e 3 das questões anteriores.

5 – (UF-RJ) um fabricante estar lançado a área de mesas “Super 4”. Os tampos das mesas dessa série são retângulos e tem 4 metros de perímetros. A fórmica usada para revestir o tampo custa R$ 10,00 por metro quadrado. Cada metro de ripa usada para revestir as cabeceiras custa R$ 25,00 e as ripas para as outras duas laterais custam R$ 30,00 por metros.



a) Determine o gasto do fabricante para revestir uma mesa dessa serie com cabeceira de medida x.
b) Determine as dimensões da mesa de serie “Super 4” para a qual o gasto com revestimento é o maior possível.

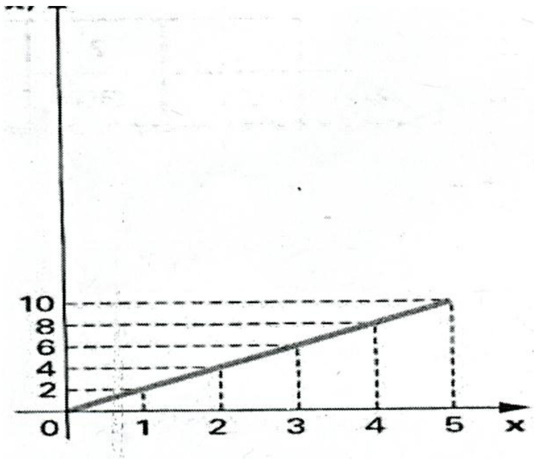
APÊNDICE C

Lista 3- Atividade Sobre Taxa de Variação Média
Nome: ____
Data: _____/______/_______ **Nº** _______

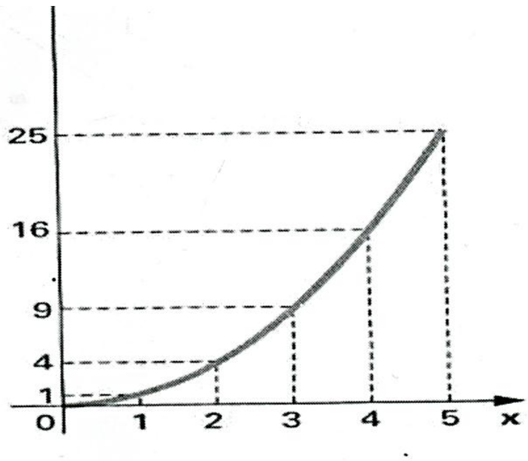
1 – Determine a taxa de variação média da função polinomial do 1º grau $f(x) = a.x. + b$.

2 – Determine a taxa de variação media da função polinomial do 2º grau $f(x) = a.x^2 + b.x + c$.

3 – conforme gráfico das funções complete a tabela abaixo:



f(x) = 2.x



g(x) = x²

x no intervalo	Taxa de variação media de f(x) = 2.x	Taxa de variação média de g (x) – x²
[0,1]		
[1,2]		
[2,3]		
[3,4]		
[4,5]		
[0,5]	A taxa de variação média de f é ____________________	A taxa de variação média de g é _____________________

4 – a posição s em função do instante t de um móvel, que se desloca segundo uma trajetória retilínea, é dada por $s(t) = 2.t^2 + 3$ (para s em metros e t em segundos). Determinar:

a) A posição desse móvel nos instantes t = 2 s e t = 3s.
b) A velocidade media no intervalo de t = 2 s a t = 3s.

.

5 – Esboce o gráfico da função real dada pela equação $Y = 4 - x^2$ e responda:

a) Quando x passa de 0 para 4, de quanto varia y?
b) Qual a taxa de variação media no intervalo [0;4]?
c) Qual é a taxa de variação média dessa função quando x varia de 0 a 2?

.

APENDICE D

Resultado da correção da lista 1 do apêndice A.

Aluno	Questão 1					Questão 1					Questão 3		Questão 4		
	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	Gráfico 1	Gráfico 2	a	b	c
A1	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A2	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	PS	PS
A3	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A4	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A5	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	PS	PS
A6	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A7	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	PS	PS
A8	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A9	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A10	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A11	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A12	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A13	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	PS	PS
A14	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A15	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A16	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A17	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	PS	PS
A18	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A19	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A20	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	PS	PS
A21	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A22	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A23	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A24	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S

Tabela 2-Resultado de correção da lista 1

APENDICE E

Resultado da correção da lista 2 do apêndice B

Aluno	Questão 1				Questão 2				Questão 3				Questão 4			Questão 5	
	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	Gráfico 1	Gráfico 2	Gráfico3	a	b
A1	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A2	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A3	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A4	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A5	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	PS	PS
A6	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A7	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A8	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	PS	PS
A9	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A10	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A11	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A12	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A13	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A14	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	PS	PS
A15	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A16	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A17	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A18	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A19	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A20	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	PS	PS
A21	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	PS	PS
A22	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A23	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A24	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S

Tabela 3-Resultado de correção da lista 2

APENDICE F

Resultado da correção da lista 3 do apêndice C

Aluno	Questão 1	Questão 2	Questão 3		Questão 4		Questão 5		
			$f(x) = 2x$	$g(x) = x^2$	a	b	a	b	c
A1	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A2	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A3	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A4	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A5	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A6	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A7	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A8	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A9	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A10	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A11	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A12	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A13	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A14	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A15	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A16	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A17	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A18	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A19	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A20	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A21	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A22	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A23	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A24	S	S	S	S	S	S	S	S	S

Tabela 4-Resultado de correção da lista 3

APENDICE G

Resultado da correção das derivadas das funções da lista 1 e lista 2

Aluno	lista 1			lista 2		
	Questão 1	Questão 2	Questão 4	Questão 1	Questão 3	Questão 5 letra b
A1	S	S	S	S	S	S
A2	S	S	S	S	S	S
A3	S	S	S	S	S	S
A4	S	S	S	S	S	S
A5	S	S	S	S	S	S
A6	S	S	S	S	S	S
A7	S	S	S	S	S	S
A8	S	S	S	S	S	S
A9	NC	NC	NC	NC	NC	NC
A10	S	S	S	S	S	S
A11	S	S	S	S	S	S
A12	S	S	S	S	S	S
A13	S	S	S	S	S	S
A14	S	S	S	S	S	S
A15	NC	NC	NC	NC	NC	NC
A16	S	S	S	S	S	S
A17	S	S	S	S	S	S
A18	NC	NC	NC	NC	NC	NC
A19	S	S	S	S	S	S
A20	NC	NC	NC	NC	NC	NC
A21	S	S	S	S	S	S
A22	S	S	S	S	S	S
A23	S	S	S	S	S	S
A24	S	S	S	S	S	S

Tabela 5- Resultado da correção das derivadas das funções da lista 1 e lista 2