UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Um passeio pelo pensamento musical de Leonhard Euler: a leitura do mestre e seu uso em sala de aula

Guilherme Augusto Vaz

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:______________________

Guilherme Augusto Vaz

Um passeio pelo pensamento musical de Leonhard Euler: a leitura do mestre e seu uso em sala de aula

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. EXEMPLAR DE DEFESA

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Rogério Monteiro de Siqueira

USP – São Carlos
Dezembro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

Ap

Augusto Vaz, Guilherme
Um passeio pelo pensamento musical de Leonhard Euler: a leitura do mestre e seu uso em sala de aula / Guilherme Augusto Vaz; orientador Rogério Monteiro de Siqueira. -- São Carlos, 2017.
106 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Leonhard Euler. 2. Uso de fontes históricas no ensino. 3. Ensino de matemática. 4. Música. 5. Expoente de um acorde. I. Siqueira, Rogério Monteiro de, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Guilherme Augusto Vaz

A journey through Leonhard Euler's musical thoughts: reading the master and its use in the classroom

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Rogério Monteiro de Siqueira

USP – São Carlos
December 2017

AGRADECIMENTOS & DEDICATÓRIA

É por ser imensamente grato que dedico este trabalho...

À História, à Matemática e à Música, por toda a gama de emoções que dão sentido a vários momentos da minha vida.

Aos autores lidos durante a pesquisa, pela intensa comunicação que a escrita nos proporcionou.

À Leonhard Paul Euler, que com seus trabalhos inspirou tão fortemente o que segue escrito nas páginas abaixo.

Aos colegas e professores do programa, por compartilharem seus conhecimentos.

Aos alunos, objeto do meu trabalho docente e de pesquisa.

À Thiago Feitosa por nosso trabalho a quatro mãos na empreitada de traduzir e revisar um texto original de Euler.

À Rogério Monteiro de Siqueira, professor e orientador, por confiar a mim a escolha do tema que desejava estudar e a descoberta de parte da bibliografia utilizada, demonstrando assim confiança e crença em minhas qualidades como professor e pesquisador.

RESUMO

AUGUSTO VAZ, G. **Um passeio pelo pensamento musical de Leonhard Euler: a leitura do mestre e seu uso em sala de aula.** 2017. 106p. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional – História da Matemática e das Ciências) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Este estudo se dedica a uma parte pouco conhecida dos trabalhos de Leonhard Euler (1707 - 1783) relacionado à música enquanto uma ciência matemática. Tais trabalhos mostram, em certo sentido, um lado pitagórico do pensador e também algumas contribuições do mesmo à teoria musical. O interesse deste matemático pelo assunto permeia várias obras e épocas de sua vida, mas neste trabalho focamos em três delas: um conjunto de nove cartas que compõem a obra *Lettres a une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique e de philosophie* (1768) e dois artigos, *Conjecture sur la raison de quelques dissonances generalement reçues dans la musique* (1766) e *De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis* (1774). Para possibilitar uma melhor compreensão desses textos, faremos uma revisão histórica do tratamento aritmético dado à música desde os tempos clássicos até o Renascimento com enfoque nas principais contribuições que levam à construção da escala da entonação pura ou justa, trabalhada por Euler nos originais estudados. Após a apresentação e análise desses trabalhos eulerianos, especialmente seus diagramas para representar sons e acordes e do seu expoente de um acorde para medir consonâncias, terminaremos essa dissertação refletindo sobre as implicações pedagógicas e históricas, bem como as potencialidades e limitações do uso de fontes originais de determinados mestres do pensamento matemático ocidental, nomeadamente o próprio Euler, na formação de matemáticos, professores e licenciados.

Palavras-chave: Leonhard Euler; Música; Ensino de matemática; História e formação docente; Uso de fontes históricas no ensino; Expoente de um acorde; Diagramas de acordes.

ABSTRACT

AUGUSTO VAZ , G. **A journey through Leonhard Euler's musical thoughts: reading the master and its use in the classroom.** 2017. 106f. Dissertation (Professional Master's in Mathematics) – Institute of Mathematics and Computer Science, University of São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

This present research takes a journey into a little know part of Leonhard Euler's works about music as a mathematical science. Those works show, at certain level, his Pythagorean thoughts and also his contributions to music theory. Euler's interest for this subject permeates many of his works through his lifetime (1707 - 1783), but here we focus on three of them: a set of nine letters from the book *Lettres a une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique e de philosophie* (1768), and two articles, *Conjecture sur la raison de quelques dissonances generalement reçues dans la musique* (1766) and *De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis* (1774). To allow a better understanding of his ideas, first we put on a historical review of the arithmetic treatment of music since the ancient Greece to the Renaissance Era pointing out the main contributions to the development of the pure just intonation scale, the one used by Euler on the works just mentioned. After presenting and analyzing these Euler's contributions, specially his diagrams to represent sounds and chords to the eyes and the concept of exponent of a chord to measure consonances, we conclude this dissertation thinking about the pedagogical and historical impact, and also the potential and limitations concerning the use of historical sources of the masters of mathematics, to the training of future mathematics and teachers.

Keywords: Leonhard Euler; Music; Mathematical education; History and teacher training; Historical sources on teaching; Exponent of a chord; Diagrams for chords.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

– Introdução –
Do caminho até Euler!

Abril de 1727, às vésperas de completar seu vigésimo ano de vida, desce o rio Reno até as proximidades de Frankfurt am Main e daí por carruagens se dirige aos portos do norte germânico, atravessando Hannover e Hamburgo, até a portuária Lübeck. Cruza o Mar Báltico, o Golfo da Finlândia, até Kronstaadt, de onde segue até São Petersburgo, Império Russo. Chega em 17 de maio do mesmo ano, 41 dias após a partida.

Há ideias que surgem quando nos movimentamos. No início, a única certeza era o desejo de que Matemática, História e as Artes – em particular a Música – estivessem presentes e articuladas num estudo que levasse em conta os anseios interdisciplinares em uma época de especialistas. Muitos dos livros, artigos e biografias que subsidiaram esta dissertação viajaram comigo na mochila, sentados ao meu lado, em coletivos e aviões, no pensamento, nessa viagem intelectual ao longo dos últimos quatro anos, maturando as minhas inquietações iniciais, transformando-as. Um processo de aprender e de refletir que, pouco a pouco, se tornou o próprio texto.

Foi estudando a relação entre música e matemática na historiografia do século XIX que me apareceu o personagem que viria a ser o protagonista do meu trabalho. À época, foi uma surpresa encontrar o nome de Leonhard Paul Euler (1707 – 1783) num texto que, entre outras coisas, tratava da história comum entre a Matemática e a Música, suas ligações curriculares e aritméticas, ao lado de nomes mais citados que teriam contribuído a essa questão ou ao menos excursionado pelo tema no contexto ocidental. A referência primeira, de uma única linha com o nome de Euler, perdeu-se no processo e já não a recordo exatamente, mas sua centelha inicial despertou meu interesse, ganhou força e, na busca pelos trabalhos publicados pelo matemático que tivessem ligação com a ciência matemática chamada Música, encontrei uma fonte inesgotável: *The Euler Arquive*[1]. No *Archive* se deu o contato com as mais variadas áreas nas quais Euler produzira e deixara contribuições; com obras originais do matemático, físico, suíço, filósofo, pai, religioso, teólogo, nas línguas que tão bem dominava – alemão, latim,

[1] *http://eulerarchive.maa.org* – Consultado entre 2015 e 2017; Última consulta em dezembro de 2017.

russo, francês – e traduções que davam maior acesso a sua obra, sobretudo as em língua inglesa.

Antes mesmo de transformar sua vida com a mudança para São Petersburgo, Euler tinha produzido interessantes trabalhos sobre o som e sobre as ciências náuticas. Também o meu envolvimento com a relação entre a Matemática e a Música teve início antes da minha entrada no Mestrado. Ao participar de oficinas de medidas e conceitos da Física na construção de instrumentos rústicos, corais, aulas de piano e leitura curiosa sobre o assunto, passo a acreditar que a matemática poderia contribuir ao conhecimento musical e de que a prática criativa proporcionada pelas Artes poderia criar Matemática. Fui das leituras independentes, das palestras, até ministrar uma oficina sobre o assunto em 2008, cobrindo desde o mítico monocórdio dos Pitagóricos à presença do logaritmo na construção do Temperamento, pela Idade Média e pelo Renascimento. Nessa época pouco se sabia de Euler e sua carreira e nada se sabia sobre seus trabalhos que tratavam de Música, da natureza e propagação do som, harmonia e aspectos da teoria e prática musical, e do quão presente foram os mesmos em toda sua vida.

> Com seu trabalho sublimava seus desejos; todavia para entreter-se ele de fato apreciava a Música. Escutá-la era um dos poucos prazeres que ele se permitia e quando sentava ao piano sua natureza científica nunca o abandonava. (DU PASQUIER, 2008, p. 45)[2]

Em um processo de negociações que ultrapassou o período de um ano – todas elas indiretas entre Frederico II (1712 – 1786) e Euler, levadas a cabo por representantes do recém empossado monarca da Prússia e das quais se preservam algumas cartas datadas dos meses de junho e julho de 1740, terminaram bem-sucedidas para os prussianos e Euler, casado e pai, passa por uma segunda longa viagem para estabelecer-se em Berlim. Sua chegada data de 25 de julho de 1741 (FELLMANN, 2007; DU PASQUIER, 2008).

Empreender grandes viagens e mudanças também altera o foco e o olhar dado a qualquer estudo, qualquer pesquisa. Desvela outras realidades e formas – como veremos que fez a Música para Euler – e parece agregar outro nível de sentido a almejar *uma postura interdisciplinar diante da vida* ou *um saber ser interdisciplinar* (FAZENDA,

---

[2] No original: “He had his work which sublimated his desires; however for enjoyment he did favor music. Listening to music was one of the few pleasures that he afforded himself, and when he sat at the piano his scientific nature never abandoned him.”

2002; 2008). Euler foi contemporâneo da gênese do *especialista* (ALFONSO-GOLDFARB, 2004), embora seus interesses e forma de produzir não parecem em nada alinhados com tal processo, especialmente quando lemos os títulos da sua produção científica. Já um trabalho atual inspirado em tal leitura pode, no máximo, almejar à interdisciplinaridade, palavra anacronicamente desconhecida de nosso protagonista suíço. As cartas de Euler mostram o amplo espectro das discussões das quais participava, praticando plenamente a Matemática, mas também outras ciências naturais, o pensamento filosófico, as religiões, e as funções burocráticas nas instituições nas quais trabalhou. Estudar Euler permite acessar essa outra época pré-especialista e sua postura diante do conhecimento e de sua época.

> Euler não se especializou em nenhuma área particular. Ele foi um dos grandes generalistas: tinha conhecimentos que abrangiam as disciplinas. (RICHESON, 2012, p. 10)[3]

As biografias[4] também apontam para uma separação pouco relevante, pouco nítida, entre as pesquisas que Euler elaborava em seu trabalho institucionalizado ou em seus momentos de prazer e ócio. De sua enorme gama de estudos, a *Lettres a une princesse d'Allemagne* de 1768 encanta, passeando entre os mais diversos e ricos assuntos da ciência de sua época com uma fluidez entre uma carta e outra. Por isso, o anacronismo do termo interdisciplinar em suas obras. Devotaremos grande tempo a algumas cartas dessa obra no que se seguirá. Todavia, caminhar ao redor de Euler e de seus interesses musicais leva a seguinte preocupação: o que falar sobre tão celebrado e conhecido matemático, algo que pudesse constituir alguma contribuição relevante? Que história narrar sobre esse homem? Para os matemáticos e demais interessados em Ciências Exatas, o nome Euler é um lugar comum. Com teoremas batizados em sua homenagem e contribuições centrais nas mais diversas áreas – da Análise a Combinatória, da Geometria a Teoria dos Números, Física, Astronomia, etc. – Euler é autor de uma das mais vastas produções das Ciências e das Matemáticas, um mestre, portanto. Fellmann (2007) e Du Pasquier (2008) revelam nuances da formação deste mestre, destacando suas leituras dos textos romanos clássicos e sua clara compreensão e

---

[3] No original: "Euler did not specialize in one particular area. He was one of the great generalists: he had expertise that spanned the disciplines."

[4] Referimo-nos às biografias escritas por FELLMANN (2007) e DU PASQUIER (2008).

emprego tão preciso de um conhecimento universal e vasto. Tratam da relação que ele tinha com a Música: como prática em seu tempo de lazer, socialização com outros músicos e, sobretudo, suas contribuições ao campo da harmonia musical em seus aspectos mais teóricos, que inclui e ultrapassa os exemplos citados. Nessa área, Euler publicou ao longo de toda a vida, mas se o assunto é Música seu nome não é lembrado com mesma facilidade ou entusiasmo. Podemos, afinal, não considerar e principalmente não explorar essa faceta do mestre suíço?

Após 25 anos de serviços prestados, uma insatisfação crescente leva Euler rumo à maior viagem de mudança entre as três que fez durante sua vida, retornar para a Academia Imperial Russa de São Petersburgo. A data de 29 de maio de 1766 consta como a de partida do mestre e seu filho mais velho Johann da Academia de Berlim. No dia seguinte ele celebra o casamento de seu segundo filho Karl e dez dias depois parte da cidade, provavelmente 8 de junho de 1766. Acompanhado por 18 pessoas – esposa, filhos, noras, netos, discípulos – em sua última grande viagem realizou uma visita ao reino da Polônia que durou dez dias. Recebido em audiência pela majestade imperial Catarina II da Rússia (1729 – 1796) em 17 de julho de 1766, o suíço revê São Petersburgo para lá viver e produzir e publicar pelos últimos 17 anos de sua longa vida.

É diante dos rumos introduzidos acima que tal texto se alicerça. Envereda por uma longa história que alcançará Leonhard Euler ao longo do século XVIII. O mais fascinante é descobrir as ideias, os tratados, as intenções, a existência de inúmeros registros em cadernos de anotações pessoais que mostram como o grande homem da Era das Luzes transcendia qualquer título, da sua primeira tentativa em assumir a cadeira de física na Universidade da Basileia até sua contratação para a de anatomia e fisiologia na Rússia, onde na verdade passa cada vez mais a exercer o papel de matemático ou físico (FELLMANN, 2007; DU PASQUIER, 2008), ou mesmo o de teórico musical que aqui será advogado com alguma frequência. Mas iniciemos do início visando alcançar parte dessa riqueza.

No capítulo primeiro, daremos as bases para compreender a música como ciência matemática no Ocidente. Trataremos, sobretudo, das contribuições do pitagorismo à relação histórica da matemática e da música. Tão longo processo claramente transcende os objetivos de um único texto. Assim, faremos um recorte que cobrirá de forma um pouco mais aprofundada a construção da escala que Euler utilizou em vários de seus escritos sobre o assunto, conhecida por escala da entonação justa ou entonação pura. Iremos tratar também do pensamento pitagórico, as ideias de tetraktys, diapason e outros intervalos pitagóricos perfeitos, bem como o ciclo das quintas. Começaremos com a discussão em torno do monocórdio, a escala pitagórica e, mais adiante, apresentaremos a terça de Arquitas de Tarento e as ideias de Gioseffo Zarlino Como os trabalhos de Euler em foco no capítulo seguinte não tocam diretamente nas escalas temperadas, tal parte da história das escalas ocidentais também não será tratada aqui, embora sejam igualmente importantes. As notas de rodapé, descrições detalhadas de processos matemáticos, históricos e musicais, além de vários parágrafos de aprofundamento ao longo do capítulo foram pensados para que o texto possa ser fruído por matemáticos, músicos, historiadores e possivelmente outros interessados. A preocupação também passa por estabelecer o mínimo necessário para preparar o leitor para o que se seguirá, ou seja, fazer um percurso que permita situar minimamente os trabalhos de Euler aqui estudados.

No capítulo segundo, depois de dados os elementos básicos do pensamento ocidental a respeito da música e da harmonia dos sons, parte-se para a discussão de alguns trabalhos do matemático suíço. O foco estará em um pequeno conjunto de cartas que tratam do assunto e duas outras publicações – são elas: o livro *Lettres a une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique e de philosophie*[5] (1768 – E343[6]), particularmente as cartas enumeradas de I a IX e os artigos *Conjecture sur la raison de quelques dissonances generalement reçues dans la musique*[7] (1766 – E314) e *De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis*[8] (1774 – E457). As cartas e os outros dois textos foram estudados utilizando as traduções para o inglês disponíveis no The Euler Archive, feitas por David Brewster em 1823. Quando necessário e possível reproduzimos o trecho de interesse na forma nas notas de rodapé. Eventualmente também faremos referências menores a outros trabalhos, mas estamos

[5] Cartas a uma princesa de Alemanha sobre diversos temas de física e filosofia (PEREIRA, 2014).
[6] O número de Eneström, segundo a catalogação proposta entre 1910 e 1913 pelo matemático sueco Gustav Eneström (1852 – 1923) para as obras de Euler. Ver *http://eulerarchive.maa.org*
[7] Conjectura acerca da razão de algumas dissonâncias geralmente assimiladas na música (Anexo C).
[8] Dos verdadeiros princípios da harmonia como apresentados no *speculum musicum*. Tradução livre de: "On the true principles of harmony as presented through the speculum musicum" (versão em inglês do original, disponível no The Euler Archive).

particularmente interessados nas explicações dadas nestas obras sobre o processamento auditivo no que tange sons graves e agudos, consonantes e dissonantes, também na tentativa que faz Euler de definir um expoente para hierarquizar as consonâncias, o que poderíamos interpretar como uma tentativa de taxonomia das mesmas. Exploraremos os diagramas sugeridos para a representação de tais ideias e como os mesmos estabelecem uma analogia entre os sentidos da audição e da visão. Da mesma maneira que o primeiro capítulo, este foi pensado para profissionais tanto das áreas de Matemática quanto de Música e educadores atuantes nas mesmas, por isso o esforço em clarear certos conceitos e a profusão de notas de rodapé, além de algumas referências bibliográficas visando compreensão e aprofundamento por tão vasto grupo de leitores. Espero que este esforço tenha surtido efeito.

No capítulo terceiro mudaremos de foco e trataremos de analisar a produção de Euler à luz de vieses históricos e pedagógicos, refletindo sobre o papel da leitura de tais originais na formação de matemáticos e educadores matemáticos. Aqueles que virem sentido também podem refletir em suas devidas competências formas de estender tal análise ao campo da música e da educação musical, que aqui não serão tratadas. Abordaremos também nesse capítulo o problema do uso da história em sala de aula, especialmente o da leitura de fontes primárias em Matemática, bem como o paradigma, certas tendências e vantagens da abordagem, sem deixar de pontuar os desafios que tal tentativa implica. Minha experiência pessoal e profissional no uso dessa abordagem será o ponto de partida dessa questão. Para isso, meu texto incluirá um relato de experiências e tentativas que efetuei do uso de fontes originais e dados históricos em oficinas e disciplinas de Matemática do Instituto Federal, Campus Guarulhos, onde lecionei durante o ano de 2017. É importante pontuar que as cartas e o *Conjecture* de Euler, neste terceiro capítulo, foram apresentadas aos alunos e nas atividades em português via as traduções com fins pedagógicos das cartas feitas por PEREIRA (2014) em sua tese de doutorado, e a tradução original do *Conjecture* que consta do anexo C desta dissertação e que foi um trabalho a quatro mãos, de Thiago Feitosa e meu.

Agora que introduzidos estão os leitores, daremos início...

– Capítulo Primeiro –

Montando o cenário de uma longa História: alguns aspectos básicos do pitagorismo e da Música como ciência matemática

Antes de colocar Euler e alguns de seus contemporâneos em cena é preciso *montar o cenário* de um longo processo histórico que relaciona Música e Matemática. É necessário compreender algumas das ideias fundamentais do pensamento musical – teórico e prático – aliado ao pensamento matemático que, na abordagem adotada aqui, evoluem simbioticamente. A construção de *escalas musicais* e a análise de seus significados é um dos objetivos do presente capítulo. Para iniciarmos, podemos dizer que uma **escala é uma sequência finita e ordenada de sons (notas)** que assume caráter organizador e fundamental para a arte da composição musical e que sua construção tem – historicamente – contornos de um problema matemático. Para tratar de tais contornos, destacaremos o pensamento pitagórico e suas contribuições diretas como o tetraktys, a questão do monocórdio, o diapason, o diapente, o diatessaron – estes três últimos conhecidos como intervalos ou razões pitagóricos. Faremos também uma crítica com relação a alguns pontos da historiografia que tratam desse assunto. Em seguida, passaremos às médias de Arquitas de Tarento e seus cálculos chegando finalmente às contribuições de Gioseffo Zarlino onde aparecem as últimas razões que descrevem a escala utilizada no trabalho de Euler evidenciado no próximo capítulo.

A tarefa de (re)escrever essa história de forma alguma é simples. A proposta deste capítulo tem por eixos problematizar alguns dos anacronismos e dúvidas suscitados por textos anteriormente publicados – e que de forma alguma deixam de ser importantes fontes para esta pesquisa - e também de oferecer uma ampla introdução ao assunto que seja acessível tanto aos professores de Matemática quanto aos de Música, tentando fornecer o tanto quanto possível os subsídios para que profissionais destas diferentes áreas possam fruir desse conhecimento. Igualmente importantes são as nuances científicas e artísticas envolvidas no aperfeiçoamento e na escolha ocidentais das escalas e na forma de compor e ouvir. O que precisamos minimamente compreender é como tantas escalas desenvolvidas no Ocidente – desde as mítico-lendárias contribuições da Antiguidade até as propostas que aparecem na Idade Média, no Renascimento e no Iluminismo – foram sistematizadas e utilizadas com diferentes formas e em diferentes momentos até que a Europa passou a priorizar tão nitidamente o Temperamento[9]. É entender o processo que levou a tal grau de *consenso*[10] quanto à escala a ser utilizada, já que a partir da segunda metade do século XVIII, a maior parte das obras musicais europeias já adotava a escala musical derivada dele (CARPEAUX, 1999, p. 133). Logicamente que para tanto nem a língua materna, nem a matemática, são suficientes. Teremos que adentrar na linguagem musical, clareando alguns de seus termos e conceitos no intuito de ter uma visão histórica desse processo, que integre e crie analogias entre as três linguagens. Aqui, a todo o momento, buscaremos relacionar esse universo com diversos filósofos e matemáticos que acompanharam a questão. Claro que nosso objetivo maior aqui é situar Euler, particularmente tratado aqui como teórico musical. Todavia isso seria não só impossível como despropositado sem termos em mente a forma como a Música se desenvolve na Europa e que tipo de escolhas nortearam seu desenvolvimento até o século XVIII, onde nosso protagonista nos aguarda. Com tal exposição, poderemos refletir um pouco a respeito de quais tradições ele segue ou com quais rompe ao escrever os originais estudados.

Diante de um assunto tão antigo (ABDOUNUR, 2003, p. VII) e de tantas escalas, propostas, escolhas, pretendemos partir de uma noção musical básica e suas interpretações matemática e física. Cada escala musical prioriza determinadas notas e certas estruturas entre as notas que constroem no ouvido humano uma referência. É a partir desta referência que ideias musicais como harmonia, consonância e dissonância entre notas ganham sentido, sejam elas executadas simultaneamente ou em sucessão. Estes termos, entendidos modernamente, se referem às sensações de soar mais ou menos agradável, de conforto ou de previsibilidade que os sons de uma escala provocam em nós. Nesse contexto que iniciamos com a referência auditiva que tem destaque em todas as escalas europeias das quais temos registros.

---

[9] Adotaremos aqui o termo Temperamento, com inicial maiúscula, conforme sugerido por Abdounur para se referir ao *temperamento igual* adotado atualmente, por exemplo, na afinação dos pianos (ABDOUNUR, 2003, pp. 2 e 13).

[10] A expressão é usada livremente para se referir ao fato que na transição da música de corte europeia para a profissionalização das casas de concerto, ao longo do século XVIII, a adoção da escala musical Temperada vai se solidificando e sendo praticamente universalizada na arte e ciência composicional europeia do próximo século (CARPEAUX, 1999, p. 190).

1.1 – Do pensamento pitagórico ao *diapason*

O romano Boécio[11] foi uma influência importante na filosofia e currículos da Idade Média, nomeadamente o *Quadrivium* e o *Trivium*, por conta de suas traduções de clássicos gregos e de seus tratados de teoria musical, matemática e lógica.

> A influente tradição de Boécio (480 – 524) na educação se estende por muitos séculos, baseando-se no Pitagorismo e Platonismo, juntou a Música com a Aritmética, a Astronomia e a Geometria no Quadrivium, enquanto que a Gramática, Retórica e Lógica formaram a base da linguagem, no Trivium (WOLLEMBERG, 2003, p.6)[12]

Porém, Boécio também foi influenciado por pensadores greco-romanos que o precederam e transmitiu a teoria musical grega para o Ocidente (HENRIQUE, 2002, p. 951). Só sabemos da existência de alguns trabalhos da Antiguidade devido a citações feitas por ele. Em especial, de algumas das contribuições dadas pelos gregos antigos à teoria musical. Por isso que nestes buscaremos os elementos iniciais para entender as escalas musicais no Ocidente.

1.1.1 – O pensamento pitagórico

A cultura grega é repleta em alegorias e de referências à música: a construção de instrumentos de corda – como a lira[13] –, os mitos de criação da Música, da lira de Apolo e das musas, até o conceito de *mousiké*, que "permitiu uma articulação fértil entre a dimensão perceptiva da música, envolvendo a dança, o canto e a poesia, e a dimensão conceitual, mais ligada ao pensamento e à reflexão." (GRANJA, 2006, p. 27) Foi a

---

[11] Anício Mânlio Torquato Severino Boécio (480 – 525?) foi padre, teólogo, estadista e filósofo. Nasceu em Roma e se notabilizou por suas traduções, comentários e resumos de várias obras dos clássicos gregos. Seu principal trabalho em Teoria Musical é a obra *De institutione musica* do início do século VI.

[12] No original: "Educationally, the influential tradition of Boethius (c. 480 – 524), casting a long shadow over the following centuries, and based in its turn on Pythagoras and Plato, aligned music with arithmetic, astronomy and geometry in the quadrivium, while grammar, rhetoric and logic formed the language-based trivium."

[13] A respeito da lira, instrumento ancestral da harpa, sua origem é anterior à Antiguidade Clássica. Ver Gênesis, Capítulo 4, Versículo 21: *O nome do irmão dele era Jubal, que foi o pai de todos que tocam harpa e flauta*.

partir da escuta e dá experiência com os instrumentos da época que a história da relação entre Música e Matemática tem sido contada. No entanto,

> O sistema é muito anterior a Pitágoras (550 a.E.C.), mas seu nome está associado à justificação teórica, em termos matemáticos, de sua construção. As lendas que chegaram até nós, por intermédio do tardio romano Boécio entre outros, nos contam como Pitágoras "descobriu" a escala: alega-se que Pitágoras percebeu a harmoniosa relação entre os sons que sinos produziam ao bater dos martelos dos ferreiros trabalhando, e investigações posteriores revelaram que as massas desses martelos estavam, extraordinariamente, relacionadas por razões[14] entre pequenos números inteiros[15]! (BIBBY, 2003, p. 15)[16]

É importante pontuar desde já que nenhum documento ou obra de Pitágoras de Samos[17] está ao alcance de nossas mãos. Pensadores gregos e romanos posteriores fazem amplas referências a uma forma de interpretar o universo e os números chamada de Pitagorismo, supostamente iniciado por um grego do século VI a.E.C. e também por seus discípulos ou seguidores, os Pitagóricos (ROQUE, 2012, p. 99).

Assim,

> a obra de Pitágoras é conhecida apenas via os trabalhos de seus discípulos. Os Pitagóricos transmitiam seus conhecimentos oralmente e é possível que seu voto de segredo explique a ausência de documentos. A tradição oral por vezes se comprometia com a escrita, mas saber quantas descobertas "Pitagóricas" foram de fato feitas por Pitágoras é impossível devido à tradição seguida pelos discípulos de atribuir todas ao Mestre (CALTER, 2008, p.4)[18].

---

[14] Formalmente, uma razão é uma divisão entre números inteiros, ou seja, uma fração onde tanto o numerador quanto o denominador são números inteiros.

[15] É importante salientar que para o Pitagorismo – e de forma geral na Matemática Grega Antiga – os números (inteiros) eram apenas os que hoje denotamos no sistema decimal de valor posicional indo-arábico por 1, 2, 3, 4, 5,... Desconsiderando, assim, os de descoberta posterior, como o zero e os números negativos.

[16] No original: "The system is much older than Pythagoras (c. 550BC) but his name is associated with the theoretical justification, in mathematical terms, of its construction. Legends have come down to us, through the late roman Boethius among others, relating how Pythagoras "discovered" this scale: they alleged that Pythagoras noted the harmonious relationships on the sounds produced by the hammers in a blacksmith's forge, and further investigations revealed that the masses of these hammers were, extraordinarily, in simple whole-number ratios to each other!"

[17] Supostamente, Pitágoras de Samos teria sido um filósofo e matemático grego, nascido na Ilha de Samos à época do VI século a.E.C. Comumente associado com a fundação de uma escola filosófico-dogmática conhecida como Escola Pitagórica e a uma concepção do universo, o Pitagorismo.

[18] No original: "The works of Pythagoras are known only through the work of his disciples. The Pythagoreans relied on oral teaching, and perhaps their pledge of secrecy accounts for the lack of documents. The oral teachings were eventually committed to writing, but knowing just how much of the

Ao se adotar como ponto de partida a contribuição do Pitagorismo, torna-se inevitável a associação do nascimento da teoria musical com a Matemática, sobretudo a Aritmética[19], vindo daí a conexão direta entre Música e Aritmética que Boécio irá expor séculos depois no *Quadrivium*, proposta curricular de referência no mundo medieval. Neste sentido, Boécio também é um propagador do Pitagorismo. Mais do que uma associação, esta era a intenção por trás das concepções pitagóricas: uma filosofia que não só tratava da Matemática, mas de uma interpretação do universo e de como este deveria ser explicado, perpassando séculos desde a Grécia Antiga até o Império Romano e que foi supostamente proposta pelo mestre de Samos. É neste sentido que

> a historiografia da matemática costuma analisar, entre as épocas de Tales e de Euclides, as contribuições da escola pitagórica do século V a.E.C. (...) Além disso, é frequente encontrarmos referências a Pitágoras como um dos primeiros matemáticos gregos. Mas ambas as afirmações são hoje largamente questionadas pelos historiadores. (...) A convicção de que o pitagorismo está na fonte da Matemática grega decorre da tradição educacional dos neopitagóricos e neoplatônicos da Antiguidade, durante os primeiros séculos da Era Comum. (ROQUE, 2012, pp. 98 e 99)

Além disso,

> é interessante observar que Eudemo não menciona Pitágoras, mas somente os "pitagóricos". Ou seja, Proclus pode ter sido responsável por uma síntese que mistura as ideias de Eudemo sobre a pureza dos métodos pitagóricos com a atribuição desses feitos a um homem, Pitágoras. (...) A escassez de fontes, somada à convergência interessada dos únicos textos disponíveis, nos permite duvidar até mesmo da existência de um matemático de nome Pitágoras. (ROQUE, 2012, p. 103)

Seguiremos, portanto, a conduta de evitar tanto quanto possível creditar fatos ou ideias a Pitágoras ou à Escola Pitagórica, já que a existência de ambos pode ser questionada. Além dos textos de Boécio, considera-se também os textos de Eudemo[20] e Proclus[21] como fontes à época dos séculos VI e V a.E.C.

"Pythagorean" discoveries were made by Pythagoras himself is impossible because the tradition of later Pythagoreans ascribed everything to the Master."

[19] É importante mencionar que na Antiga Grécia o que se entendia por Aritmética era o estudo dos números (inteiros), suas relações e padrões.

[20] Eudemo de Rodes (370? – 300?) foi filósofo grego, nascido na Ilha de Rodes, discípulo de Aristóteles.

[21] Proclus Lício ou Proclus Diádoco (412 - 485) foi um filósofo neoplatônico grego.

Diante disso, consideraremos aqui como mais pertinente se referir aos Pitagóricos, entendidos amplamente como o grupo de pensadores que seguiram tal filosofia ou outros preceitos fundamentais do Pitagorismo, cuja origem, como já mencionado não é fácil precisar, mas que costuma ser pensado como uma concepção sobre a natureza que

> parte da ideia de que há uma explicação global que permite simbolizar a totalidade do cosmos, e essa explicação é dada pelos números. (...) logo, as coisas do mundo podem ser contadas. (...) Para os pitagóricos todas as coisas que compõem o cosmos gozam dessa propriedade, o que os levou a considerar que as coisas consistem de números. (ROQUE, 2012, p. 104)

Também é comum encontrarmos uma simplificação do Pitagorismo à máxima de que *Tudo é número!* ou *O princípio de tudo é o número*[22]. Um exemplo prático dessa caracterização pode ser visto a partir da ideia do *Tetraktys*[23].

1.1.2 – O *Tetraktys*

Os Pitagóricos atribuíam significados a cada um dos números e havia aspectos hierárquicos envolvidos, que levavam em conta seus saberes geométricos. Os números estavam associados à matéria, à forma. Assim, a Geometria se associa fortemente aos quatro primeiros inteiros, conforme resume a tabela a seguir.

No simbolismo numérico do Pitagorismo, portanto, o *decad* (10) se destacava como a junção das formas adimensionais (1), unidimensionais (2), bidimensionais (3) e tridimensionais (4), ou seja, 10 = 1 + 2 + 3 + 4. Daí decorre que a representação do triângulo sagrado seria aquele formado por 10 pontos.

---

[22] http://super.abril.com.br/ideias/o-principio-de-tudo-e-o-numero-pitagoras (consultado em 30/06/2016).

[23] Do grego τετρακτύς, significa conjunto de quatro coisas e é atribuído ao pitagórico Teón de Smirna (CALTER, 2008, p.7).

Núm.	Sist. Grego	Geometria	Nomenc.	Razoabilidade da associação
1	α′	Ponto	Monad	*Um* ponto.
2	β′	Linha	Dyad	*Dois* pontos distintos permitem traçar uma única reta.
3	γ′	Plano	Triad	*Três* pontos não alinhados permitem traçar um plano.
4	δ′	Sólido	Tetrad	*Quatro* pontos podem ser interpretados como as pontas de um tetraedro[24].

Tabela 1- Síntese das associações pitagóricas com referência ao texto de CALTER (2008).

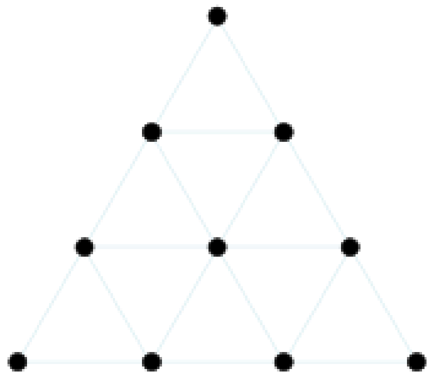


Figura 01 – Possível representação do Tetraktys.

O sistema filosófico dos Pitagóricos considerava, portanto, a relação dos números 1, 2, 3 e 4 com toda a matéria e, ao menos entre as figuras produzidas com pontos, e em parte importante da produção pitagórica, o *Tetraktys* tinha lugar de destaque (CALTER, 2008, p. 7). Tatiana Roque (2012) destaca o estudo de figuras formadas com pontos como a mostrada acima como parte importante da produção pitagórica. Retomaremos este conceito para entender as chamadas *razões musicais* que serão construídas adiante. Por fim, temos associado aos Pitagóricos o uso do monocórdio[25] com fins de evidenciar a contagem e a Aritmética subjacente à Música.

[24] Um tetraedro é uma pirâmide de base triangular, tem 4 faces e 4 vértices (pontas do sólido).
[25] Deriva do grego *monókhordon*, pelo latim *monochordon*; significando literalmente *um fio*. Fonte: https://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa (consultado em 31/10/2017)

1.1.3 – O monocórdio

Há um consenso entre muitos autores[26] de que a primeira associação de grande influência que se fez na Grécia Antiga entre os números e os sons foi alcançada por meio deste instrumento que, como sugere o nome, trata-se de uma única corda cuja medida da parte estimulável é fixa e que será aqui - salvo nos exemplos em que mencionar diferente – genericamente adotada como sendo k, assim que podemos nos referir simplesmente à corda k. Nele pode ser acoplada uma caixa acústica para melhor propagação do som e geralmente é descrito como tendo uma haste móvel que permite escolher a porção da corda que se deixa livre ao estímulo, à vibração. Alguns monocórdios ainda possuem ajustes de tensão da corda em um ou ambos extremos da mesma.

Tal instrumento teria ajudado pensadores pitagóricos em sua descrição da Música, já que permite transformar uma nota musical na medida numérica da corda vibrante que a gera. Tinha um fim específico de corroborar com a tese de que a matéria – neste caso específico as notas musicais – sempre podia ser contada e assim explicada pelos números. Não há fontes suficientes para associar a construção de tal instrumento à Pitágoras, pois, conforme vimos, a própria existência deste filósofo é questionável. No entanto, quando comparamos a lenda dos martelos e sinos à associação do monocórdio aos pitagóricos, esta última permite um nível mais profundo na descrição e entendimento da Música como parte da Aritmética, sendo um salto em direção à abstração do fazer musical. Trata-se, portanto, de um movimento com intuitos de teorização, que se prestava a defender o Pitagorismo. As informações que chegaram até nós, envoltas por mitos e lendas, não permitem precisar uma data para a construção deste instrumento nem mesmo o que de fato o mesmo permitiu descobrir. Logo, também podemos questionar o valor experimental do monocórdio e as reais motivações que levaram a sua suposta construção.

Apesar de tantos questionamentos, o uso prolongado do monocórdio ao longo dos séculos justifica plenamente seu lugar na teoria musical. Além disso, para os interessados na teorização matemática da Música, pode-se mesmo dizer que tal

[26] Ver, por exemplo, ABDOUNUR (2003), GRANJA (2006) e CALTER (2008).

instrumento é uma referência indispensável. É, por exemplo, com grande participação do monocórdio que se concebe plenamente o conceito de *diapason*[27].

1.1.4 – O conceito de *diapason*

Consideremos uma nota musical produzida por um monocórdio, sendo a medida desta corda ao soar livremente o número que tanto nos interessa. Em seguida, podemos analisar a nota produzida ao estimularmos metade desta corda, posicionando a haste móvel de forma a conter a outra metade. Temos com isso dois sons muito familiares, naturais, gerando agrado, soam mesmo encaixados em conjunto ou em sucessão – tais sons podem ser reproduzidos, por exemplo, com auxílio de um violão. O conceito pitagórico de *diapason* traduz essa consonância sentida pelos ouvidos e diz respeito exatamente a um par de sons cujas cordas geradoras se relacionam pela noção matemática de metade.

Por exemplo, imagine que se faz soar um monocórdio de 36 unidades como sugere a figura a seguir e, em seguida, a metade da corda:

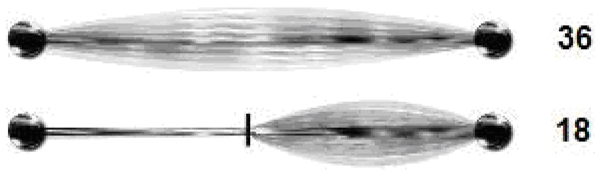


Figura 02 – Cordas soando o diapason.

A consonância do *diapason* está associada à percepção. Para a percepção musical é de grande importância reconhecer as similaridades entre os sons, iniciando com as comparações entre o mais grave e o mais agudo. Por exemplo, a corda de 18 produz um som mais agudo que aquele produzido pela de 36, embora os dois sejam similares. O soar de ambos provoca determinada sensação cuja experiência auditiva permite reconhecer como um padrão, certos intervalos que transmitem harmonia[28].

---

[27] O prefixo *dia* tem significado de *movimento através de* ou *ao longo de*. A palavra diapasão, para além do instrumento usado para afinar, significa também *extensão do som* ou *entre sons*. Fonte: http://brasilescola.uol.com.br/gramatica/radicais-prefixos-gregos.htm (consultado em 31/10/2016).

[28] À época dos Pitagóricos fica difícil saber se consideravam os padrões de dois sons que soavam juntos ou em sucessão, mas há indícios de que seria o segundo caso: como o caráter melódico e horizontal que a

Logo, independente da nota inicialmente dada, sempre podemos encontrar uma segunda nota que combinada a primeira nos dá o diapason. Reconhecer que certos padrões de harmonia se repetem e assumem destaque, que certas consonâncias são reconhecíveis, ajuda a definir o conceito de intervalo na Música. São os intervalos que darão estrutura às escalas e às composições, permitindo reconhecimento e assimilação. O *diapason* é um exemplo de intervalo musical: o intervalo à que subjaz a razão entre a medida da corda e sua metade, seja qual for a corda inicialmente considerada.

A forma de representar tais intervalos precisa respeitar a noção de comparação que inevitavelmente nosso ouvido faz ao ouvir dois sons e, ao mesmo tempo, ser capaz de traduzir o fato que o mesmo intervalo pode ser reconhecido em qualquer região – seja esta mais grave ou mais aguda – do espectro auditivo humano, ou seja, não depende da nota produzida pela corda *k*. Assim, se atribui aos Pitagóricos a definição de que *o intervalo é a razão entre os comprimentos das cordas que são a fonte dos sons comparados*[29]. No caso do *diapason*, $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$ ou, generalizando, teríamos $\frac{\frac{1}{2}k}{k}=\frac{1}{2}.\frac{k}{k}=\frac{1}{2}$. Perceba que o resultado final não leva em consideração as medidas das cordas, apenas a relação entre elas.

Considerando o monocórdio e o conceito de diapason é possível explicar uma ideia que o homem grego trazia da sua experiência auditiva. O uso frequente da lira para acompanhar o canto e a récita na Grécia Antiga corrobora essa tese, já que ao escutar vozes humanas é possível – sobretudo na diferenciação usual que se faz entre as vozes masculinas e femininas – reconhecer o *diapason*. Mas de acordo com os preceitos do Pitagorismo era desejável traduzi-lo em números, entrando aí o monocórdio e a razão $\frac{1}{2}$. Tal associação leva o fenômeno auditivo a ser racionalmente explicado e justificado

Música tinha no Ocidente antes da Idade Média (ABDOUNUR, 2003, p. 22) e mesmo o fato de um monocórdio produzir uma nota por vez.

[29] Em muitos textos básicos de Música e Teoria Musical - inclusive alguns de tradição e de qualidade (Ver LIMA, 2004, p. 92; HENRIQUE, 2002, p. 950) - é comum definir o intervalo como a *distância* entre as alturas das duas notas. Embora se preste a explicar que há uma maneira de comparar a altura de duas notas distintas, na abordagem aqui adotada, não podemos concordar com tal definição, uma vez que a palavra distância remete à operação de subtração. Note que apenas definindo o intervalo a partir da divisão – uma razão é a divisão de um número por outro – podemos entender o caráter estruturador dos mesmos nas escalas e modos musicais e eliminar do sistema a unidade de medida de comprimento.

nos moldes filosóficos da época. É ainda do ponto de vista pitagórico que a razão surpreendentemente simples que traduz o *diapason* não poderia ser interpretada como uma coincidência. Desta relação, os Pitagóricos derivam o caráter de pureza e elevado grau de importância que este intervalo assume: o que se escuta estava de acordo com a Aritmética, já que a razão $\frac{1}{2}$ aparecia na Música. Bastava soar a corda k e sua metade $\frac{1}{2}k$.

Como indicaremos adiante, também se credita aos Pitagóricos a elaboração teórica de uma escala de sete notas distintas onde a oitava nota é justamente aquela que ao soar junto a mais grave de todas elas forma o intervalo de *diapason*. Daí o nome *intervalo de oitava*, utilizado atualmente. Embora seja apenas após a construção de tal escala que o termo *oitava* faz sentido, já o introduziremos aqui para poder apreciar a defesa que teóricos posteriores fazem: segundo eles a consonância da oitava parece ser indiscutível. A seu respeito Descartes já "defendia que nenhuma frequência[30] poderia ser ouvida sem que sua oitava superior, de alguma maneira, também o fosse" (ABDOUNUR, 2003, p. 71). Segundo Abdounur, Rameau, ao considerar o número 1 como a fonte de todos os números e, por consequente, o 2 como o primeiro número advindo do 1, relacionava esse fato à relação de 2 para 1 na produção da oitava, isto é, era a relação entre o primeiro número com a fonte de todos os números. Em todas as escalas de que trataremos neste texto, é o *diapason*, o intervalo de oitava, que dá início a sua construção. Todavia, como um curto espaço de tempo tocando oitavas em um piano pode mostrar, tomar apenas intervalos de oitavas na construção de uma melodia ou de uma escala é extremamente limitador para não dizer entediante. Veremos a seguir que o monocórdio ajuda a entender outros intervalos e consonâncias. Chegaremos, enfim, à chamada escala pitagórica, uma das mais antigas de que temos registro.

[30] Aqui já fazendo referência à natureza ondulatória do som mais disseminada após os trabalhos de Galileu Galilei (1564 – 1642) (ABDOUNUR, 2003). Por hora, entenda-se frequência como nota musical de altura determinada, quanto mais alta (mais aguda) uma nota, maior sua frequência de onda. Já Euler descreve esta ideia, a título de comparação, conforme descreve em suas cartas à princesa, como a quantidade de vibrações do corpo emissor em dado intervalo de tempo. (EULER, 1823, Carta IV, p. 10)

1.2 – Os sons que há entre uma nota e seu diapason

Ao escutar e se familiarizar com o diapason[31] é possível experimentar os sons que se encontram *entre*. No monocórdio, por exemplo, temos a possibilidade de estimular cordas cuja medida se encontra entre k e a metade de k. Seguindo os caminhos do Pitagorismo – como a divisão da corda em duas partes iguais deu origem ao diapason – faremos a divisão da corda k em 3 e em 4 partes iguais, completando assim os inteiros formadores do *tetraktys*.

1.2.1 – O diapente e o diatessaron

A divisão por 3 nos levará ao intervalo de *diapente*. Todavia, como $\frac{1}{3}k$ é menor que $\frac{1}{2}k$, é interessante considerar a nota produzida por $\frac{2}{3}k$, pois esta se encontra na região de alturas entre a nota original k e seu diapason $\frac{1}{2}k$.

A divisão por 4 nos levará ao intervalo de *diatessaron*. Pelo mesmo motivo exposto para o diapente, considera-se a nota produzida por $\frac{3}{4}k$. Assim, temos $\frac{1}{2}k < \frac{2}{3}k < \frac{3}{4}k < k$, ou ainda, desprezando o tamanho da corda[32], $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < 1$.

Novamente, escuta e aritmética sistematizam simbioticamente mais dois intervalos musicais consonantes, embora seja provável que o fator tentativa e erro tenha desempenhado um papel importante historicamente para tal conclusão. Perceba-se ainda a importância que tais frações teriam para um Pitagórico: todas elas envolvem apenas os inteiros formadores do *tetraktys* (GRANJA, 2006, p. 32). É de se conjecturar até que ponto a escuta dessas consonâncias – diapason, diapente e diatessaron – não apenas se justificou pela Aritmética, mas possivelmente se solidifica, intensifica, na prática da Música grega, já que estas estariam de acordo com o que os Pitagóricos criam como

[31] Para tanto recomendamos: https://www.youtube.com/watch?v=RQv4yL61rLE&t=47s (consultado em 31/10/2017).

[32] Meio é menor que dois terços, que é menor que três quartos, que é menor que um. A interpretação musical de tal frase matemática é que o diapason é a mais aguda destas notas, seguida sucessivamente pelo diapente, diatessaron e a nota original do monocórdio sendo a mais grave das quatro.

explicação do universo e dos fenômenos. Instrumento utilizado para descobrir as leis matemáticas da Música ou para comprovar algo idealizado previamente? Qual dos dois papéis atribuir ao monocórdio para a Teoria Musical? De qualquer forma, a partir dessa associação entre aritmética e música que o diapason, o diapente e o diatessaron vão se perpetuar na linguagem musical dos séculos seguintes, permitindo inclusive, considerá-la durante séculos como uma *ciência matemática*. Na terminologia musical atual, estamos nos referindo à oitava, à quinta e à quarta de uma nota dada – tais nomes ficarão justificados adiante quando completarmos a escala pitagórica e estão resumidos na tabela 2.

Figura 03 – Os intervalos de diapente (esquerda) e diatessaron (direita).

Resumo do monocórdio	**Nome grego**	**Medida da corda**	**Fração da corda *k***
Uníssono[33]	-	k	1
Intervalo de oitava	Diapason	$\frac{1}{2}k$	$\frac{1}{2}$
Intervalo de quinta	Diapente	$\frac{2}{3}k$	$\frac{2}{3}$
Intervalo de quarta	Diatessaron	$\frac{3}{4}k$	$\frac{3}{4}$

Tabela 2 – Síntese em torno da discussão envolvendo o monocórdio.

É importante analisar os resultados resumidos acima à luz da época onde estes se deram. Alguns autores[34] costumam colocar a seguinte questão: por que subjazem a frações de pequenos números inteiros às consonâncias pitagóricas? Atribuem a ela um papel central para o desenvolvimento deste episódio em torno das razões pitagóricas e, a partir daí, desenvolvem ideias a respeito do que vai transcorrer nos séculos seguintes, na

[33] Harmonia de várias vozes ou vários instrumentos que fazem ouvir o mesmo som; conjunto de sons cuja entoação é *absolutamente* a mesma. A partir de tais definições para o uníssono, poderíamos afirmar que dois ou mais sons relacionados entre si pelo diapason constituem um conjunto de sons cuja entoação é *relativamente* a mesma.

[34] Ver ABDOUNUR (2003) e GRANJA (2006).

tentativa de resolver os problemas da escala pitagórica. À luz do Pitagorismo, e notem que com isso estamos diante de pensadores que seguiam em menor ou maior grau esse pensamento e davam grande importância à tradução aritmética de fenômenos observáveis e também ao tetraktys, a questão colocada pode ser interpretada de maneira diversa. Se os mesmos autores atribuem aos Pitagóricos tais descobertas, o fato das frações que traduzem as principais consonâncias serem formadas por 1, 2, 3 e 4, não nos parece que suscitaria questionamentos, já que estavam totalmente de acordo com o que previa sua concepção de mundo. Do ponto de vista Pitagórico tal descoberta mais provavelmente gerou grande satisfação. Questionar essa relação entre os pequenos números inteiros e as consonâncias nos parece ser próprio de um período posterior, numa época após a Revolução Científica, quando a forma de explicar o mundo e os sistemas filosóficos sofrem grandes alterações. Já à época de Euler, por exemplo, o Pitagorismo e suas formas quase místicas de explicações eram considerados por muitos filósofos como ultrapassados. Entretanto, as razões musicais propostas pelos Pitagóricos continuaram a ser de grande influência e utilidade, como veremos nos trabalhos do próprio Euler.

1.3 O papel da Aritmética na determinação de uma escala

Na esteira do que já discutimos até aqui é preciso colocar a seguinte questão: quantos e quais sons se podem escolher entre a corda de tamanho *k* e a sua metade?

Primeiramente, importa aos matemáticos, por exemplo, saber que há uma gama infinita de sons entre k e $\frac{1}{2}k$. Porém, do ponto de vista musical, tomar uma infinidade de sons impossibilita a sistematização de uma escala, sua execução e também é preciso levar em conta os limites impostos pela construção de instrumentos a serem afinados. Assim, do ponto de vista prático, torna-se preciso escolher um número finito de sons para compor uma escala. Que critérios seriam adotados para tal escolha?

Pretendemos mostrar que já desde as primeiras escalas ocidentais os critérios transcendem a escuta e foram também altamente influenciados pela Aritmética. A preocupação em escolher sons que possibilitassem a consonância – entendida aritmeticamente, via as razões estudadas – e a construção de melodias de acordo com a estética musical da época irá se traduzir no destaque dado aos intervalos de diapason, diapente, diatessaron.

Num primeiro exemplo, trataremos também de um raciocínio cíclico para escolher as demais notas da escala que ficou batizado de *pitagórico*. Em sua obra *Acústica Musical*, Henrique (2002) chega a afirmar que Boécio se referia ao sistema de afinação pitagórico como o sistema utilizado durante a Idade Média. Baseados em seu próprio misticismo e sistema filosófico, dando conta ainda de utilizar os conhecimentos proporcionados pelo monocórdio, os pitagóricos seguiram a sua própria lógica interna e investiram no intervalo de diapente, já que este dá origem a frações da corda que definem novos tipos de intervalos quando comparados aos três já determinados. Vejamos, a seguir, detalhes deste processo.

1.3.1 – O ciclo das oitavas e o ciclo das quintas

Como a intenção é sistematizar um conjunto de notas organizadas sem extrapolar o diapason, temos sempre que levar em consideração cordas cuja medida está entre k e $\frac{1}{2}k$ e fazer uso do diapason para ajustar as notas obtidas. Isto é, quando a corda obtida não satisfazer tal condição, iremos considerar notas um diapason acima ou um diapason abaixo de forma que todas as notas que considerarmos no final se encontrem entre k e sua metade, nossas referências iniciais.

O que se chama *ciclo de oitavas* é a aplicação iterada e sucessiva de oitavas à corda k – uma sequência de diapason. Assim temos a sequência de notas

$$k > \frac{1}{2}k > \frac{1}{4}k > \frac{1}{8}k > \frac{1}{16}k > ...$$

Em termos musicais: uma sequência de notas onde a próxima é sempre um diapason mais aguda que a anterior. A possibilidade de escutar uma parte desta sequência em sucessão ou, ainda melhor, simultaneamente dá um referencial auditivo para perceber que não se tratam de notas com papéis diferentes, gozando de enorme consonância, de encaixe entre estes sons que de tão grande remete nosso ouvido ao uníssono, ou seja, ao caso onde estamos considerando duas notas exatamente iguais.

Tanto isto é verdade que, em muitas civilizações – ocidentais ou não –, ao darem nomes às notas em uma escala, aquele escolhido para certa nota e suas oitavas acima ou abaixo coincidem[35]. A questão é que em uma escala limitada entre uma nota e seu diapason, o ciclo das oitavas não nos oferece sons novos, apenas suas "cópias" oitavadas. Assim, somos naturalmente levados a considerar o *ciclo das quintas*. O diapente, que para o Pitagorismo era o segundo na hierarquia das consonâncias perfeitas, comporta-se diferente. Para este segundo ciclo obtemos,

$$k > \frac{2}{3}k > \frac{4}{9}k > \frac{8}{27}k > \frac{16}{81}k > \frac{32}{243} > \ldots$$

Usando as propriedades descritas da oitava precisamos analisar quais notas encontramos quando ajustamos a medida das cordas resultantes do ciclo para suas equivalentes entre *k* e $\frac{1}{2}k$. Exemplo: obtemos a nota $\frac{4}{9}k$ como a *quinta da quinta*, ou seja, como $\frac{2}{3}.\frac{2}{3}k = \frac{4}{9}k$. Como já tínhamos a quinta da corda original e esta já media $\frac{2}{3}k$, para tomar $\frac{2}{3}$ desta é que utilizamos a multiplicação entre frações[36]. Note que $\frac{4}{9}k < \frac{1}{2}k$, o que a põe fora do espectro sonoro onde se deseja selecionar sons para construir a escala. Assim, tomando a oitava anterior associada à nota obtida, encontramos $2.\frac{4}{9}k = \frac{8}{9}k$. Perceba que para obter um som equivalente que esteja na oitava que nos interessa, devemos dobrar o tamanho da corda. Como tal processo significa ir de um som mais agudo para um mais grave, também podemos pensar que estamos *voltando uma oitava ou um diapason*. Os primeiros termos do ciclo das quintas, com este ajuste dado pelo diapason, assumem os valores dados pela próxima tabela.

---

[35] A título de exemplo familiar considere a escala de Dó Maior, uma sequência de sons que nos é intuitiva: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó. Perceba que a primeira e a última nota da escala, justamente a oitava com relação ao início da mesma, recebem o mesmo nome, apesar de suas diferentes alturas.

[36] Considere duas frações, com numeradores *a* e *c*, e denominadores *b* e *d*, isto é, as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Calcula-se a multiplicação entre estas da seguinte forma: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$.

Ciclo das quintas **(Resultados originais)**	**Ciclo das quintas** **(Valores oitavados)**	**Ciclo das quintas** **(Valores ajustados)**	**Nomes atuais** **(na escala de DÓ)**
k	Não necessita	k	*DÓ*
$\frac{2}{3}k$	Não necessita	$\frac{2}{3}k$	SOL
$\frac{4}{9}k$	$2.\frac{4}{9}k = \frac{8}{9}k$	$\frac{8}{9}k$	RÉ
$\frac{8}{27}k$	$2.\frac{8}{27}k = \frac{16}{27}k$	$\frac{16}{27}k$	LÁ
$\frac{16}{81}k$	$2.2.\frac{16}{81}k = \frac{64}{81}k$	$\frac{64}{81}k$	MI
$\frac{32}{243}k$	$2.2.\frac{32}{243}k = \frac{128}{243}k$	$\frac{128}{243}k$	SI
...	...	...	...

Tabela 3 – Ajuste do ciclo das quintas para a oitava inicial de referência

Primeiramente é preciso perceber que os dois últimos sons necessitaram de um ajuste de duas oitavas, já que o tamanho da corda já era tal que apenas dobrar não seria suficiente para estarmos na oitava de referência. Foquemos na nota $\frac{16}{81}k$, já que a seguinte seguirá um processo análogo. Ao mudarmos uma vez de oitava, obtemos $2.\frac{16}{81}k = \frac{32}{81}k < \frac{1}{2}k$, o que não resulta em um som na oitava de interesse. Assim, necessitamos repetir mais uma vez a multiplicação, obtendo finalmente $2.2.\frac{16}{81}k = 2.\frac{32}{81}k = \frac{64}{81}k > \frac{1}{2}k$. Note que todos os valores obtidos na coluna da direita estão entre k e $\frac{1}{2}k$, embora não estejam mais em ordem decrescente. Ou seja, os sons equivalentes encontrados na oitava de referência estabelecem uma nova relação de alturas, a saber, em ordem decrescente

$$k > \frac{8}{9}k > \frac{64}{81}k > \frac{2}{3}k > \frac{16}{27}k > \frac{128}{243}k > \frac{1}{2}k.$$

A escala pitagórica foi construída, então, com base no ciclo acima, incluindo também a essas sete razões o diatessaron (intervalo de quarta) de razão $\frac{3}{4}k$ [37], que hoje chamamos de FÁ.

1.3.2 – Um problema aritmético entre os ciclos

Sabendo que a escala pitagórica é dada pelas razões k, $\frac{8}{9}k$, $\frac{64}{81}k$, $\frac{3}{4}k$, $\frac{2}{3}k$, $\frac{16}{27}k$, $\frac{128}{243}k$ e $\frac{1}{2}k$, e que quando organizadas como estão em ordem decrescente estas correspondem ao que conhecemos por DÓ, RÉ, MI, FÁ, SOL, LÁ, SI e DÓ, falta analisar por que a escala dos pitagóricos tem sete notas, ou melhor, por que o ciclo das quintas é interrompido neste ponto?

O ideal seria interromper o ciclo das quintas num ponto onde este coincida com um valor do ciclo das oitavas, nos levando a uma quantidade de quintas que corresponderia a certa quantidade de oitavas no ciclo das oitavas, dando um fechamento ou compatibilidade aos dois ciclos. Todavia, isto não ocorre. A presença do fator 3 no diapente é a chave para entender essa impossibilidade. Nunca geraremos uma fração da corda com fator 3 a partir do fator 2 presente no diapason, já que ambos são números primos[38]. A tabela a seguir exemplifica isso, comparando os resultados em formato fracionário e decimal.

	Ciclo das oitavas (diapason)	**Ciclo das quintas (diapente)**	**Nomes atuais das quintas**
Corda	*K*	*k*	DÓ
1º intervalo	$\frac{1}{2}k$ = *0,5k*	$\frac{2}{3}k \approx 0{,}66667k$	SOL
2º intervalo	$\frac{1}{4}k$ = *0,25k*	$\frac{4}{9}k \approx 0{,}44444k$	RÉ

[37] Perceba que de um ponto de vista aritmético, mesmo o diatessaron pode ser obtido a partir do diapason e do diapente, pois $\frac{1}{2}.\frac{3}{2}k = \frac{3}{4}k$. Musicalmente, tal informação se explica como uma oitava acima da corda necessária para gerar o som cuja quinta pitagórica seja o som gerado por *k*.

[38] Ver anexo A para a demonstração do não fechamento do ciclo das quintas com o das oitavas, impossibilitando assim a construção de uma escala baseada em quintas puras.

3º intervalo	$\frac{1}{8}k = 0{,}125k$	$\frac{8}{27}k \approx 0{,}29629k$	LÁ
4º intervalo	$\frac{1}{16}k = 0{,}0625k$	$\frac{16}{81}k \approx 0{,}19753k$	MI
5º intervalo	$\frac{1}{32}k = 0{,}03125k$	$\frac{32}{243}k \approx 0{,}13169k$	SI
6º intervalo	$\frac{1}{64}k \approx 0{,}01562k$	$\frac{64}{729}k \approx 0{,}08779k$	FÁ#
7º intervalo	$\boxed{\frac{1}{128}k \approx 0{,}00781k}$	$\frac{128}{2187}k \approx 0{,}05853k$	DÓ#
8º intervalo	$\frac{1}{256}k \approx 0{,}00391k$	$\frac{256}{6561}k \approx 0{,}03902k$	SOL#
9º intervalo	$\frac{1}{512}k \approx 0{,}00195k$	$\frac{512}{19683}k \approx 0{,}02601k$	RÉ#
10º intervalo	$\frac{1}{1024}k \approx 0{,}00098k$	$\frac{1024}{59049}k \approx 0{,}01734k$	LÁ#
11º intervalo	$\frac{1}{2048}k \approx 0{,}00049k$	$\frac{2048}{177147}k \approx 0{,}01156k$	MI#
12º intervalo	$\frac{1}{4096}k \approx 0{,}00024k$	$\boxed{\frac{4096}{531441}k \approx 0{,}00771k}$	SI#
13º intervalo	$\frac{1}{8192}k \approx 0{,}00012k$	$\frac{8192}{1594323}k \approx 0{,}00514k$	FÁ##
...	...	...	...

Tabela 4 – Comparação da evolução de ambos os ciclos.

Ambos os ciclos iniciam com a mesma corda *k*. Entretanto, as primeiras iterações parecem mostrar que os ciclos não voltam a exibir valores iguais. A melhor aproximação se dá entre a sétima oitava com a décima segunda quinta, com erro cometido de aproximadamente 0,00781 – 0,00771 ≈ 0,0001. Ou

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx \left(\frac{2}{3}\right)^{12}.$$

Perceba que no contexto da escala pitagórica antiga, mas usando uma terminologia atual, a décima segunda quinta se trata da nota SI# que é próxima, porém distinta, da nota DÓ fornecida pelo ciclo das oitavas. Dessa tabela também é possível conjecturar que o aparecimento dos números 7 e 12, respectivamente nos ciclos da oitava e da quinta, possa ter influenciado na adoção de escalas com essa quantidade de notas – as escalas hoje conhecidas como diatônicas e cromáticas. Diante da aproximação acima, o que foi tomado como razoável na época foi considerar todas as quintas com valor pitagórico exato de $\frac{2}{3}$ e somente a última quinta com uma razão alterada e que diferencia do valor correto por um erro que ficou batizado de *coma pitagórica,* ou seja, a diferença intervalar entre sete oitavas e doze quintas. Adotando essa *quinta da loba*, uma quinta impura por ser um pouco mais grave que as demais, evita-se que a iteração sucessiva das quintas gere um número infinito de notas a serem *encaixadas* na escala. Aparentemente, com tal aproximação, o problema estaria resolvido e teríamos um primeiro modelo matemático de escala com sete notas. Todavia, no decorrer da Idade Média o problema ganha maior complexidade, já que a música passa a utilizar mais recursos e um espectro maior de notas. O aparecimento recorrente do fator 3 em todas as demais notas da escala impossibilita o ajuste perfeito de qualquer outro intervalo com o diapason. Longe de limitar o desenvolvimento da Música como ciência matemática, tal fato disparou novas contribuições e novas propostas de aproximação. Cada forma de interpretar tal desencontro dos ciclos, em cada época, dará origens a formas diferentes de equalizar esse erro cometido matematicamente – fator de muita riqueza histórico científica.

1.4 Médias e a introdução de novos fatores na escala

A primeira tentativa registrada no Ocidente para compatibilizar os ciclos de intervalos é também associada aos pitagóricos e ficou conhecida como *quinta da loba*[39]. Ao se verificar a *coma pitagórica* – a pequena diferença que há entre 12 quintas e 7 oitavas – a décima segunda quinta foi tomada impura, de forma a produzir um fechamento para o ciclo. Assim, ao invés da fração 2/3, a quinta do lobo fica associada à fração 177147/262144, geradora de um som um pouco mais grave, mas que se aproxima da razão pitagórica perfeita[40].

Num entendimento amplo do termo temperar, uma vez que o recurso da quinta da loba constitui uma forma de aproximar intervalos gerando maior compatibilidade entre as razões básicas do pitagorismo, Sadie considera esse um tipo preliminar de

[39] Talvez devido ao "ruído" ou "uivo" que esta provoca quando utilizada, já que se trata de uma aproximação.

[40] $\frac{177147}{262144} \approx 0{,}67576$, logo $\frac{177147}{262144} - \frac{2}{3} \approx 0{,}00909$, um erro de ordem menor que 1%.

temperamento (ABDOUNUR, 2003), embora este termo só vá adquirir sentido completo em outra época, já muito próxima dos trabalhos de Euler. Em termos filosóficos, essa forma de aproximação pode ser entendida como pitagórica no sentido que priorizou o não abandono do ciclo das quintas, ou seja, da construção de uma escala fortemente amparada nas consonâncias pitagóricas perfeitas. Aritmeticamente falando, construiu-se uma escala com base nos números 1, 2, 3 e 4, ou ainda, com base nos fatores primos 2 e 3. Todavia, o fator 5 se faz presente na escala com a qual Euler trabalha.

1.4.1 – A construção com médias de Arquitas

A construção de Arquitas de Tarento (428 a.E.C. – 347 a.E.C) parece ser um interessante ponto de partida para pensar essa questão. Ela está fundamentada na seguinte peculiaridade: se tomarmos duas cordas que se relacionam por uma oitava, ou seja, de medidas *k* e metade de *k* e calcularmos para esses números a média aritmética e a média subcontrária, temos

$$\frac{k+\frac{k}{2}}{2}=\frac{\frac{2k+k}{2}}{2}=\frac{\frac{3k}{2}}{2}=\frac{3k}{2}.\frac{1}{2}=\frac{3k}{4} \quad \text{e} \quad \frac{2}{\frac{1}{k}+\frac{1}{\frac{k}{2}}}=\frac{2}{\frac{1}{k}+\frac{2}{k}}=\frac{2}{\frac{3}{k}}=2.\frac{k}{3}=\frac{2k}{3}.$$

Ou seja, a aritmética $\frac{3k}{4}$ e a subcontrária $\frac{2k}{3}$. Sua analogia aposta na generalização dessa constatação: se as médias calculadas entre uma altura e sua oitava geravam os intervalos pitagóricos perfeitos de quarta (média aritmética) e quinta (média subcontrária), os outros intervalos consonantes da escala deveriam ser encontrados de forma semelhante. Uma vez que a quinta pitagórica possui um caráter mais consonante que a quarta na estética musical da Antiguidade, será dada prioridade à segunda média. Com isso, calculando a média subcontrária entre *k* e sua quinta, temos

$$\frac{2}{\frac{1}{k}+\frac{1}{\frac{2k}{3}}}=\frac{2}{\frac{1}{k}+\frac{3}{2k}}=\frac{2}{\frac{2+3}{2k}}=\frac{2}{1}.\frac{2k}{5}=\frac{4k}{5}.$$

Tal analogia implica adotar o novo intervalo obtido como a divisão mais harmônica de uma nota e sua quinta, já que a quinta pitagórica é amplamente adotada como a divisão mais harmônica entre uma nota e sua oitava. A fração $\frac{64}{81} \approx 0{,}79012$ presente na escala pitagórica é bastante próxima de $\frac{4}{5} = 0{,}8$. O intervalo tarentino introduz assim a terça que passaria a vigorar em muitas escalas ocidentais, inclusive a *entonação justa* com a qual Euler trabalha nos documentos que analisaremos nos capítulos seguintes. É também interessante pontuar e admirar que a terça tarentina dê continuidade natural à sequência de razões pitagóricas $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Aritmeticamente, o cálculo do pensador introduz o fator primo 5 que não aparece no pitagorismo e nem é formador do *tetraktys*[41]. Neste sentido é possível discordar da afirmação de ser este um pensador pitagórico, a despeito do uso das razões pitagóricas perfeitas que parece corroborar tal qualificação. Diante disso, escolhemos tratar Arquitas separadamente e se referir às suas contribuições como o pensamento e a escala tarentinos ou de Arquitas. Veja ainda que $\dfrac{2}{\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{\frac{4k}{5}}} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{k}+\dfrac{5}{4k}} = \dfrac{2}{\dfrac{4+5}{4k}} = \dfrac{2}{1}.\dfrac{4k}{9} = \dfrac{8k}{9}$, que é a nota Ré.

Isto é, pela média subcontrária acima vemos que uma nova aplicação do raciocínio tarentino nos leva a outra constatação surpreendente: obtemos uma nota que já havia aparecido no ciclo pitagórico das quintas. A divisão mais harmônica entre uma nota e sua terça tarentina gera a segunda nota da escala pitagórica, que também se expressa por uma razão da forma $\frac{n}{n+1}$. Uma média que produz resultados tão harmoniosos realmente parece merecer o adjetivo de harmônica[42].

---

41 Assim como se obtém uma terça pelo cálculo da média subcontrária, temos um segundo tipo de terça que se calcula pela média aritmética entre uma corda e sua quinta pitagórica: $\dfrac{k+\frac{2k}{3}}{2} = \dfrac{\frac{3k+2k}{3}}{2} = \dfrac{5k}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}k$. Isso introduzirá os modos maiores e menores, mais bem trabalhos pelo teórico G. Zarlino, onde o primeiro modo utiliza a terça maior calculada via média subcontrária e o segundo modo utiliza a terça menor calculada via média aritmética.

42 Há fontes que indicam que foi devido a esse cálculo e o seu significado aritmético-musical que Arquitas teria rebatizado a média subcontrária como média harmônica (Ver ABDOUNUR, 2003, p. 15). De forma geral são poucos documentos e fragmentos que chegaram até nós sobre o tarentino.

1.4.2 – A gama de Zarlino: entonação pura ou justa

A alteração da terça pode ser pensada ao lado do questionamento dos intervalos de sexta e sétima, respectivamente associados às frações pitagóricas $\frac{16}{27}$ e $\frac{128}{243}$. Isso por vários motivos: em parte porque a sexta e a sétima são a composição da terça com os intervalos de quarta e de quinta, respectivamente; a sexta também aparece como inversão da terça – o que num sentido intuitivo significa o intervalo que falta para a terça completar uma oitava[43]; no ciclo das quintas, a sexta e a sétima aparecem ao redor da terça – ver tabela 4. Para abordar tais questões analisaremos algumas das contribuições do italiano Gioseffo Zarlino (1517 – 1590) que, além de considerar a terça tarentina, concebe o *Senário*, isto é, um conjunto com os seis primeiros números para explicar racionalmente o fato de que em sua época renascentista as terças e sextas passaram a ter caráter consonante. Considerando a quarta de uma terça e a quinta de uma terça, temos por superposição de intervalos as seguintes frações:

$$\frac{3}{4}.\frac{4}{5}=\frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \frac{2}{3}.\frac{4}{5}=\frac{8}{15}.$$

É a fração obtida da composição da terça com a quarta que Zarlino toma como o intervalo de sexta em sua gama, ou seja, a razão $\frac{3}{5}$; sendo a composição da terça com a quinta o intervalo de sétima, ou seja, a razão $\frac{8}{15}$. Assim, temos a escala dada pelas seguintes frações:

[43] Considerando os resultados aritméticos a cerca da terça maior e da terça menor tarentinas, introduzidas aqui via médias, a sexta maior é o intervalo inverso da terça menor e a sexta menor é o intervalo inverso da terça maior, isto é, $x.\frac{5}{6}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}.\frac{6}{5}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ e $x.\frac{4}{5}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}.\frac{5}{4}=\frac{5}{8}$. É importante frisar que com isso visamos apenas argumentar porque a terça se relaciona com a sexta e a sétima, mas que não constam registros suficientes de que Arquitas ou mesmo Zarlino tenham encontrado tais razões por inversões.

Dominante	Segunda pitagórica	Terça tarentina	Quarta pitagórica	Quinta pitagórica	Sexta de Zarlino	Sétima de Zarlino	Oitava pitagórica
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

Tabela 5 – A gama de Zarlino.

Para conceber uma explicação aritmética para a consonância dos intervalos de terça, quarta, quinta, sexta e oitava, Zarlino usa explicitamente os números 1, 2, 3, 4 e 5, conforme se observa nas razões presentes da tabela 5. A importância atribuída ao número 6 – que faz parte do *Senário* de Zarlino – deve-se a terça menor resultante da média aritmética entre uma corda e sua quinta: terça de razão $\frac{5}{6}$. Zarlino inicia toda sua construção apoiando-se na ideia de que a oitava é a fonte de todas as consonâncias. Via divisão por médias, aplicando o raciocínio tarentino, retoma-se as demais consonâncias perfeitas dos pitagóricos, o intervalo de segunda pitagórico e a terça de Arquitas. É importante frisar que as ideias de inversão de intervalos não são explícitas em Zarlino, já que o teórico alcançava as razões de sua gama dividindo, somando e subtraindo intervalos. Considera tanto a terça maior quanto a terça menor: o que levará aos modos maiores e menores explorados nos séculos posteriores. A inspiração para o Senário estaria relacionada com o fato de ser o número 6 o primeiro número amigo[44]. Abdounur sintetiza as ideias do italiano da seguinte maneira:

> Observando que os intervalos de terças e de sextas não se apresentavam consonantes quando produzidos pelas razões pitagóricas, Zarlino concebeu o Senário, conjunto dos primeiros seis números inteiros – “número sonoro” ou “número harmônico” –, que possuía o poder para gerar todas as consonâncias musicais, incluindo as imperfeitas, componentes essenciais dos escritos da época. Segundo a concepção pitagórica, as quatro primeiras divisões da corda produziam os intervalos consonantes. Zarlino estendeu o limite superior de tal procedimento para 6, o que permitiu a inclusão de sextas e terças no quadro de consonâncias – terça maior $\frac{4}{5}$, terça menor $\frac{5}{6}$, sexta maior $\frac{3}{5}$.Cabe ressaltar que o teórico italiano

[44] Nos escritos clássicos se define *número amigo* como o número (inteiro positivo) que equivale à soma de todos os seus divisores próprios, no exemplo considerado, temos $6 = 1 + 2 + 3$. Note que os demais números formadores do *Senário* não satisfazem tal propriedade.

> instituí o acorde perfeito maior e menor, sistema dualista baseado respectivamente nas divisões harmônica e aritmética do comprimento gerador do intervalo de quinta. À luz de Zarlino, as consonâncias eram obtidas pelas seis primeiras divisões da corda segundo o número sonoro. (ABDOUNUR, 2003, p. 45)

Neste trajeto aritmético-sonoro de muitos séculos, chegamos a uma gama de sons segundo Zarlino, também referida como *entonação pura ou justa*. A partir dela podemos explorar algumas ideias que Euler formula em seus trabalhos. Faremos agora uma pausa, cientes de que com os temas abordados até o presente momento, em nada esgotamos as possibilidades de análise da constituição das escalas ocidentais como ciência aritmética. Temos o suficiente para tentar estabelecer uma ponte entre o momento renascentista de Zarlino e o iluminismo de Euler por um viés aritmético, tomando as razões musicais que constam da tabela 5. Assim, o próximo capítulo trata de algumas contribuições de Euler a respeito dos temas da consonância, harmonia, escalas, percepção do fenômeno sonoro e sua forma analógica, hermética e heurística de raciocinar a respeito.

– Capítulo Segundo –
As cartas e ideias eulerianas: algumas das contribuições de Euler para a aritmética da harmonia musical

Após (re)construir parte das ideias que levam até algumas escalas ocidentais por um viés aritmético, nos interessa expor e analisar algumas das ideias que aparecem no pensamento de Euler e que traduzem a continuação da tradição dos estudos musicais como ciência matemática no século XVIII.

As contribuições de Euler para a teoria musical fora muitas nas primeiras cartas da conhecida obra *Cartas a uma princesa germânica sobre vários assuntos de Física e de Filosofia* (*Lettres a une Princesse d'Allemagne sur diver sujets de physique et de philophie*) (1768 – 1772), que será fonte constante ao longo deste capítulo. Nelas aparecem ideias importantes de como Euler entendia o som e sua propagação, suas analogias para entender as propriedades do som e a questão de sons mais ou menos consonantes e harmônicos. Tais cartas são de grande riqueza e importância no que se pretende aqui, não só pelo tema que abordam, mas também pela forma como o fazem.

Anos antes, com 19 anos de idade e tentando uma carreira na Universidade da Basiléia, sua cidade natal, o jovem Euler submeteu um panfleto de 16 páginas intitulado *Dissertatio physica de sono* (*Dissertação sobre a física do som* - 1727). Este é apenas um exemplo dos trabalhos publicados a respeito do som, acústica, consonâncias e outros aspectos que relacionam matemática, física e música. Também escreveu um tratado a respeito de Teoria Musical – *Tentamen novae theoriae musicae* (*Attempt of a new theory o music - 1739*) – que, a partir dos princípios pitagóricos da harmonia dos sons, trata da razão entre as frequências dos sons envolvidos, dando sequência à tradição pitagórica e ao pensamento de Mersenne, Descartes e Leibniz.

Algumas das ideias de Euler questionam o teórico musical e compositor Jean Philippe Rameau (1683 – 1764), referência para a harmonia da época e contemporâneo do nosso matemático, a partir da consideração de outros sistemas para compor e desenvolver a Música (GERTSMAN, 2007, p. 336). As relações entre matemáticos e música nos costumam trazer à mente nomes como Pitágoras, Descartes, Fourier. O que é realmente surpreende não é isso, mas sim que a Música teve um papel protagonista durante toda a vida de Euler, sendo possível elencar obras suas a esse respeito em muitas épocas de sua carreira e também indicar episódios biográficos que confirmam que Euler tinha grande estima pela Música como atividade fora da academia (FELLMANN, 2007; DU PASQUIER, 2008).

2.1 – Analogias entre os sentidos: cartas III e IV à princesa germânica

Entre 1760 e 1762 nosso pensador manteve intensa correspondência com a princesa Friederike Charlotte of Brandenburg-Schwedt (1745 – 1808), desenvolvendo com ela uma relação pedagógica de mestria. Tal processo se deu devido às relações com o rei Frederik II da Prússia (1712 – 1786), patrono da Academia de Berlim, que contou com as contribuições acadêmicas, científicas e administrativas de Euler durante aproximadamente 25 anos – época mesma em que Euler e sua família residiram em Berlim. A compilação de tal correspondência totaliza 234 cartas, que tratam de variados temas sobre física, matemática, filosofia, álgebra, entre outros. Ainda em vida a obra *Cartas a uma princesa da Alemanha* foi editada e publicada em Francês, língua que Frederik II exigiu que fosse adotada na Academia, seguindo as influências da Academia de Paris e de seu amigo Voltaire (1694 – 1778). Hoje uma obra de valor histórico, foi em sua época uma importante obra didática e de difusão científica, de princípios Iluministas e que ganhou edições nas mais variadas línguas europeias (FELLMANN, 2007; DU PASQUIER, 2008; PEREIRA, 2014).

Ao iniciar a leitura das cartas, curiosamente, dos primeiros assuntos que surgem é a natureza do som e uma discussão sobre o pensamento acústico e musical. Haveria uma forma mais rica para explicar o sentido da audição e a natureza do som do que compará-lo com outros sentidos? É por analogias que Euler descreve o fenômeno sonoro numa carta de Abril de 1760. A partir da experiência auditiva da explosão de um canhão ou da queda de um trovão, somos convencidos da diferença de velocidade existente entre o som e a luz. Todavia, é ao comparar o sentido da audição com os do olfato e da visão que fica evidente que Euler tinha plena consciência da natureza ondulatória do som – conhecimento que já havia sido proposto por Arquitas e que se solidificou após, sobretudo, os trabalhos experimentais de Galileu. Diferentemente do cheiro, que carrega consigo partículas do corpo produtor, o som não acarreta perdas de nenhuma parte ou substância do corpo que o produz. Logo, sob a ótica analógica, esses dois sentidos se distanciam. Antes o que se verifica é o fenômeno vibratório de sinos, cordas e outros corpos que geram sons. Já com a visão a analogia é outra, abordando comparativamente as limitações de ambos os sentidos a partir de uma referência comum.

Nossa escuta está relacionada com a vibração do corpo que o gera e, conforme explica Euler à princesa, a chave está na quantidade e regularidade das vibrações que chegam aos nossos ouvidos por meio do ar para diferenciar ruídos de sons e, neste último caso, sons mais agudos de sons mais graves (EULER, 1823, Carta III, pp. 8 e 9). Para melhorar a compreensão desse conceito, nosso pensador faz uso de um diagrama de grande apelo visual composto por pontos alinhados. Tais diagramas permitem comparar a altura do som – relação de grave e agudo – entre outras coisas. Assim, a depender do som que se deseja representar visualmente, da frequência de vibração de seu corpo gerador, que Euler entende como a quantidade de oscilações por segundo, será representada por pontos alinhados exibindo maior ou menor frequência ou, respectivamente, menor ou maior espaçamento. Nas palavras do próprio, "assim somos capazes de representar aos olhos aquilo que os ouvidos percebem ao ouvir sons."[45] (EULER, 1823, Carta IV, p. 10)

2.1.1 – Os diagramas

Tomando-se um intervalo de tempo fixado, uma maior quantidade de pontos igualmente espaçados seria equivalente a uma frequência de vibração maior e consequentemente um som mais agudo, sendo os contrários igualmente equivalentes. Mas vamos usar nossa intuição visual para iniciar o estudo de tais *diagramas de pontos*. Coloquemos a seguinte pergunta, para ajudar a introduzir esta ideia: das duas sequências de pontos representadas abaixo, qual associaríamos a um som musical, agradável e estável, do tipo que se deseja para compor e para a criação de escalas musicais?

[45] Na tradução utilizada consta: "(…) we are enabled thus to represent to the eye what the ear perceives on hearing sounds." No original: "(…) & par ce moyen on peut representer aux yeux la même chose que les oreilles sentent en entendant un son." (p. 12)

Figura 04 – Duas sequências de pontos (diagramas de pontos) inspiradas nas ideias de Euler.

Perceba que num mesmo intervalo de espaço (tempo), cada diagrama exibe um comportamento bastante distinto do outro e a resposta da pergunta acima parece muito intuitiva. Assim, um som musical seria aquele cujas vibrações provocadas pelo corpo gerador atingiriam nossos ouvidos de forma igualmente espaçada, uniformemente regular. Inspirados nesta ideia, o primeiro diagrama da figura 4 representa o tipo de som que se preza na harmonia musical, enquanto o segundo representa o ruído sonoro instável que, muito embora também possa ser usado para a composição, sobretudo a partir do século XX, não participa das escalas musicais estudadas à época. Segundo Euler, este segundo tipo, seria “inconsistente com a harmonia.”[46] (EULER, 1823, Carta IV, p. 10)

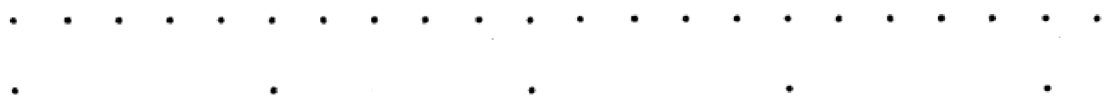


Figura 05 – Diagramas inspirados em Euler para representar notas de distintas vibrações por segundo.

A quantidade de vibrações que atingem nossos ouvidos ficaria, segundo Euler, nitidamente representada pelas séries de pontos. Logo, a nota musical de cima tem uma frequência de vibração mais alta que a nota representada abaixo, nos levando ao importante conceito de *altura* de uma nota musical, modernamente descrita via frequência de onda e aqui aliada a uma poderosa representação visual. Em resumo, o diagrama representa claramente que a nota de cima é mais aguda que a de baixo. Representar ideias matemáticas por pontos espaçados ou geometricamente organizados parece uma tradição no ocidente. Desde as figuras introduzidas pelos pitagóricos na Grécia Antiga, sobretudo a representação dos números e do *Tetraktys* (ROQUE, 2012,

[46] Na tradução utilizada consta: “If the distances between the dots were not equal, or were these dots scattered about confusedly, they would be a representation of a confused noise, inconsistent with harmony.” No original: “Si les distances entre les points n’etoient pas égales, & que les points fussent rangés confusément, ce feroit la répresentation d’un bruit confus contraire à l’harmonie.” (pp. 12 e 13)

p. 104), representações do gênero aparecem também nos textos de Boécio e até mesmo em Descartes (1596 – 1650), pensadores que antecederam Euler.

Os diagramas são ainda mais interessantes quando utilizados para representar acordes. É preciso pontuar que para Euler, acorde é a “mistura de dois ou mais sons ouvidos simultaneamente”[47] (EULER, 1823, Carta IV, p. 10). Vamos iniciar a análise com duas notas, ou seja, teremos duas linhas de pontos representadas simultaneamente. O encaixe de ambos, o reconhecimento de regularidades simples de serem descritas visualmente, maior quantidade de pontos que se encontram um em baixo do outro; todas essas características desempenharão um papel importante.

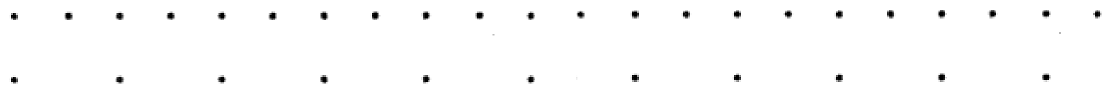


Figura 06 – Exemplo de representação de um acorde de duas notas, reproduzido da carta IV de Euler.

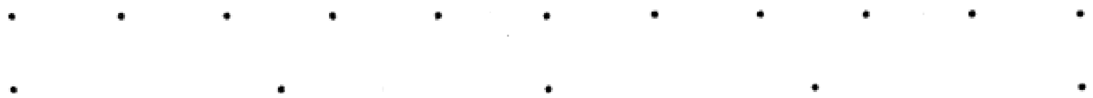


Figura 07 – Um segundo exemplo inspirado na carta de Euler para um acorde de duas notas.

Como cada linha representa um dos sons do acorde, observe nas figuras 06 e 07 que em ambas a nota musical mais aguda aparece representada na linha superior. A primeira foi reproduzida da carta IV de Euler e a segunda foi feita inspirada na ideia dele, para analisarmos outros acordes. Pensemos na regularidade presente em cada representação. Pontos que aparecem exatamente um em baixo do outro, favorecem uma ideia de encaixe entre as notas. Extrapolando a descrição dada à princesa, podemos mesmo imaginar que os pontos da linha de baixo são projetados perpendicularmente na linha de cima, permitindo contar quantos pontos e com que frequência há *sobreposição*. Embora Euler não represente a sobreposição das linhas do acorde, interpretamos dessa forma já que Euler chega a redigir que “se dois sons diferem em respeito ao grave e agudo, devemos perceber uma mistura das duas séries de golpes”[48] (EULER, 1823, Carta IV, p. 10). Note que esse recurso de sobreposição deve ser apenas imaginado já

[47] Na tradução utilizada consta: “we mean by the term *accord* the blending of two or more sounds heard at once.” No original: “un accord étant nommé le mêlange de deux ou plusiers sons qu’on entend à la fois.” (p. 13)

[48] Na tradução utilizada consta: “But if two sounds differs in respect of low and high, we shall perceive a mixture of two series of strokes (…).” No original: “ Mais si les deux sons sont differents par rapport au grave ou à l’aigu, on apprencevra un mélange de deux suites de coups (…)” (p. 13)

que segundo a representação proposta pelo mestre, há necessidade de pelo menos duas séries de pontos equidistantes para se representar um acorde. Com isto em mente, o diagrama deixa claro qual dos intervalos é o mais consonante?

Obviamente essa representação do acorde não deve ser tomada isoladamente. Acordes são para serem ouvidos e compreendidos auditivamente. Todavia ao expor os conceitos musicais de forma textual, o impacto gerado por tal representação visual e a possibilidade de analogia com outro sentido são muito interessantes.

> Uma analogia ou metáfora usada com sensibilidade e discernimento pode reconfigurar a rede de pensamentos de um aluno em face de uma situação de aprendizagem problemática, permitindo um melhor entendimento das questões que escaparam à intuição imediata, ou que lhe pareceram demasiadamente abstratas. (ABDOUNUR, 1997, p. 18)[49]

A princesa é nossa aluna e Euler nosso mestre. Assim, explorando o nível pedagógico das cartas, é possível descrever padrões de diagramas mais assimiláveis e regulares do que outros, o ouvido faria uma transposição similar das vibrações que o atingem e isso se traduziria na ideia de maior ou menor consonância, harmonia, prazer, inteligibilidade.

Embora se detenha no intervalo de uma oitava, Euler apresenta ainda os outros intervalos pitagóricos a partir dos diagramas. Refere-se à dupla oitava, da composição da oitava com uma quinta, da quinta e da quarta. Observe as representações via os diagramas de pontos na próxima figura.

De acordo com a tradição pitagórica e o pensamento de Zarlino, todos os intervalos apresentados abaixo são considerados consonantes. Os diagramas de pontos que Euler apresenta nas cartas à sua aluna apenas somam mais um argumento aos estudos do primeiro capítulo, diferente e desta vez de caráter analógico.

[49] No original: "An analogy or metaphor used in a sensible and discerning way may reconfigure student's thought in a problematic situation of learning, enabling a better understanding of matters that escape immediate intuition, or that seem to abstract to him/her."

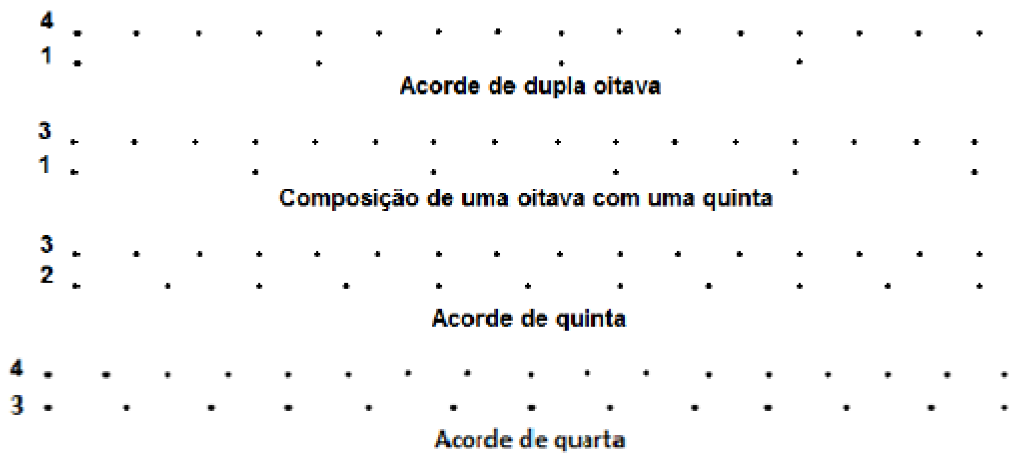


Figura 08 – Representação de alguns acordes (intervalos) consonantes inspirados em Euler.

A figura 08, inspirada na carta de Euler, ainda permite notar que mesmo para o intervalo de quarta, sabidamente menos consonante entre os representados, percebe-se uma correlação de quatro para três pontos no que tange a contagem de espaços entre pontos até o aparecimento de uma sobreposição. Note que a fração registrada ao lado de cada diagrama de ponto auxilia na verificação do padrão de regularidade em cada um deles.

2.2 – Dos diagramas ao expoente: dissonâncias e aproximações sonoras

Dando continuidade à análise dos diagramas, há mais um aspecto deles que vale pontuar. Euler o descreve brevemente a partir de um exemplo que reproduzimos na figura 09. Em nossa interpretação esse exemplo não deixa de se interligar com outro trabalho do mestre publicado em época próxima às *Cartas*, onde ele discorre a respeito de como se daria o processamento auditivo: levantando uma hipótese a respeito das aproximações de frequências que os ouvidos conduziriam com a finalidade de facilitar a escuta de certos acordes. Este outro trabalho é o texto, já mencionado na introdução, *Conjecture sur la raison de quelques dissonances generalement reçues dans la musique*, que por vezes abreviaremos por *Conjecture.*

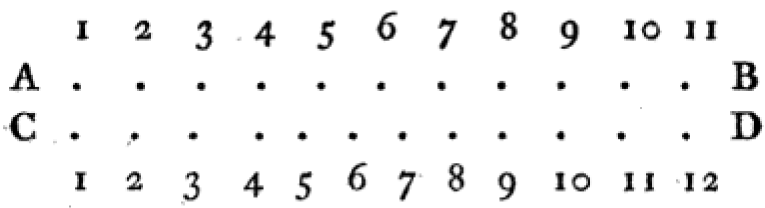


Figura 09 – Reprodução do exemplo dado à princesa na carta IV.

A partir da consideração dos dois sons representados pelo diagrama da Figura 9, qual dos dois é mais agudo? Seriam consonantes? A percepção da diferença entre ambos é imediata como nos diagramas anteriores? E qual papel cumpre a enumeração de 1 a 11 para a série de pontos da linha AB e de 1 a 12 para a série de pontos da linha CD? A maior complexidade do diagrama de fato retarda sua leitura e a configuração dos pontos é tal que pede contagem, já que o espaçamento entre eles é visualmente semelhante. Poderíamos descrever esse intervalo como $\frac{10}{11}$, dado o padrão de espaços para os quais os pontos de ambas as séries voltam a coincidir no tempo – dez espaços na linha AB e onze espaços na linha CD. Certamente estamos falando de um acorde dissonante – tanto pela analogia visual quanto pela fração nada convencional que o representa. Todavia, Euler se pergunta ainda se a semelhança de ambos os sons quanto ao diagrama de pontos que os representa também seria ou não transferível para o sentido da audição? Ou seja, se os diagramas são semelhantes, também não seriam os sons percebíveis? O ponto fulcral é: se há uma analogia bilateral entre os diagramas e nossa percepção auditiva, uma vez que visualmente o diagrama já não é suficientemente claro em diferenciar ambos os sons, faria tal distinção nossos ouvidos? Segundo o mestre,

> Mas se não se escrevesse os números, os olhos dificilmente descobririam esta ordem; e o mesmo sucede com o ouvido, que também dificilmente rastrearia os dois sons que representei pelas duas séries de pontos. (EULER, 1823, Carta IV, p. 11)[50]

Se o exemplo contido na carta ainda deixa dúvidas, podemos extrapolá-lo numericamente. Imagine duas séries de pontos: a primeira com 33 e a segunda com 34.

[50] Na tradução utilizada consta: “If we had not affixed the figures, the eye would hardly have perceived this order: it is the same with the ear, which would with much difficulty have traced it in the two notes which I have represented by two rows of dots.” No original: “Mais sans y ecriré les nombres, les yeux n’y decouvroient presque point cet ordre, y il en est de même des oreil les, qui decouvriroient aussi difficilement l’ordre parmi les deux sons que j’ai representés par les deux rangs des points.” (p. 14)

Mas o faça de forma que o primeiro e o último ponto em cada série fiquem exibidos exatamente um em baixo do outro, ou seja, verticalmente alinhados de forma a representar a quantidade de vibrações de um som e de outro em um mesmo espaço de tempo.

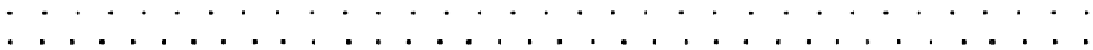


Figura 10 – Extrapolação visual do argumento de Euler.

Euler assim introduz uma questão anatômica que trata dos limites da percepção nos nossos sentidos. A partir da consciência de que nossa visão tem limites para diferenciar distâncias muito pequenas, analogamente teria nossa audição para perceber frequências muito próximas. É preciso notar que tal limitação desempenha papel importante em alguns acordes e escalas, consequentemente na questão harmônica à qual o matemático deseja contribuir[51], estando o mesmo ciente disso (EULER, 1823, Carta VIII). Para formular sua hipótese de forma mais precisa, Euler recorre a um conceito aritmético. Tal intento dá em certa medida continuidade à forma pitagórica de analisar a música, tratando-a como uma ciência matemática, pois usa das relações pitagóricas clássicas transpostas para o contexto das frequências e também por recorrer a ferramentas aritméticas para propor a sistematização das ideias (PESIC, 2013).

Euler tinha por intenção não só sistematizar e formular uma hipótese, mas também estruturar hierarquicamente os acordes sobre o qual a harmonia tonal se sustenta. Assim se aproxima dos Pitagóricos como antes nos referimos, embora já tivesse abandonado as medidas de cordas em detrimento dos valores das frequências e também o misticismo numérico do pitagorismo devido ao contexto racionalista e iluminista, próprios de sua época. Também utiliza para as terças, sextas e sétimas frações que foram introduzidas em outros períodos, nomeadamente as provenientes de Arquitas e Zarlino, mas que também são em certa medida o transcorrer e o desenvolvimento do que os pitagóricos iniciaram na Antiguidade. Pesic (2013) chega

---

[51] A esse respeito é interessante notar que o processo de desenvolvimento do temperamento igual, iniciado no século anterior e ainda contemporâneo à vida e obra de Euler no século XVIII, aproxima a quinta perfeita entre outros intervalos importantes por frequências de valores irracionais, a partir da noção de que raríssimos ouvidos podem perceber tão sutil diferença entre, a título de exemplo, a quinta perfeita pitagórica e a quinta temperada (ABDOUNUR, 2003).

mesmo a afirmar que Euler seria o primeiro matemático a dar seguimento ao trabalho dos pitagóricos desde a Antiguidade greco-romana. Para nós, tal diferença da proposta euleriana estaria, por exemplo, na insistência em utilizar as frações entre inteiros a despeito de outros teóricos musicais que, no contexto do Temperamento, passaram a incorporam quocientes irracionais.

2.2.1 – O expoente de um acorde

A formulação dada pelo mestre aparece fortemente no texto *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* de 1766, onde o mesmo considera a tabela de números a seguir para representar as notas musicais do acorde que estuda.

SOL	SI	RÉ	FÁ
G	*B*[52]	*d*	*f*
36	45	54	64

Tabela 6 – Reprodução da tabela de números de Euler para o acorde de quinta com sétima.[53]

Euler não esclarece o porquê dos números escolhidos. No entanto, da leitura da tradução para o inglês feita por Scaramazza e levando em conta que, para Euler, uma nota esta diretamente associada à quantidade de vibrações feita em um intervalo de tempo (EULER, 1823, Carta IV, p. 10), acreditamos que tais números podem, sem nenhum erro matemático, ser entendidos como as frequências simplificadas com as quais nosso mestre irá trabalhar ao longo do seu texto. Ao observar os valores dados na tabela 7 para a oitava completa somos levados a crer que Euler escolheu tais valores para trabalhar com números inteiros menores já que, do ponto de vista de uma escala, o que importa é preservar as razões entre os números. Assim, daqui em diante, chamaremos esses valores também de frequência das notas.

[52] No original consta a notação H para o que hoje chamamos a nota SI. A partir desse momento passaremos a adotar a notação B ou b em lugar de H ou h para esta nota. Observe que as minúsculas são utilizadas para representar sons uma oitava acima.
[53] A primeira linha não consta do original e foi adicionada para facilitar a leitura da notação musical.

DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI	DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI	DÓ
C	*D*	*E*	*F*	*G*	*A*	*B*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*	*c'*
24	27	30	32	36	40	45	48	54	60	64	72	80	90	96

Tabela 7 - Ampliação de valores da tabela 6 de Euler, permitindo o cálculo do MMC, segundo introdução dada por Scaramazza em sua tradução para o inglês.

Note que a quarta e a quinta estão de acordo com o Pitagorismo, uma vez que $\frac{48}{36}=\frac{4}{3}$ e $\frac{54}{36}=\frac{3}{2}$. As frações aparecem invertidas uma vez que Euler trabalha com a frequência, que é inversamente proporcional ao tamanho da corda vibrante de tradição pitagórica. Já as demais notas – LÁ, SI, MI e FÁ que fazem respectivamente os papeis de segunda, terça, sexta e sétima – seguem outras relações fracionárias não advindas do ciclo das quintas, mas sim de contribuições posteriores como a de Arquitas de Tarento para a terça e da gama de Zarlino para a sexta[54]. Os valores para as frequências do intervalo de segunda (40) e de sétima (64) envolvem aproximações com relação ao que deduzimos na gama de Zarlino e tais aproximações podem mesmo estar sujeitas à hipótese do processamento auditivo de Euler e serem percebidas por muitos ouvidos como corretas. Os valores de frequências precisos seriam, respectivamente, os racionais 40,5 e 67,5[55].

A cada unidade de tempo que transcorre, certa nota é representada por sua frequência ou a quantidade de pontos na analogia euleriana dos diagramas. Ao lidar com duas ou mais notas seria natural considerar os pontos de coincidência entre as respectivas frequências, isto é, múltiplos comuns entre os valores das frequências. De acordo com o pensamento pitagórico e as frações derivadas do monocórdio, se propunha a seguinte hierarquia entre as três principais consonâncias: a oitava, a quinta e a quarta. De maneira a confirmar tal hierarquia, procedemos com o cálculo do mínimo múltiplo comum (MMC).

Usando a nota C por referência, têm-se os seguintes cálculos dentro de uma mesma oitava:

[54] No anexo C, onde consta a tradução deste original de Euler, também incluímos a introdução dada pelo responsável da versão em inglês do documento, J. A. Scaramazza, cuja leitura se recomenda para elucidar esta ideia.
[55] Note que 36 x (9/8) = 40,5 e 36 x (15/8) = 67,5.

- Para a oitava: MMC (24, 48) = 48;
- Para a quinta: MMC (24, 36) = 72;
- Para a quarta: MMC (24, 32) = 96.

O cálculo do MMC aponta para interpretarmos seu valor crescente como indicativo de que é mais complexa a relação entre as notas envolvidas e, sendo este o caso, tal cálculo estaria de acordo com o pitagorismo musical. Observe ainda que a mesma ideia aplicada para os intervalos de segunda e sétima geram valores ainda mais altos, caracterizando-os como dissonâncias:

- Para a segunda: MMC (24, 27) = 216;
- Para a sétima: MMC (24, 45) = 360.

Assim, parece sugestivo esse método de comparar acordes de mesma ordem a partir do MMC. Claramente que os valores encontrados para acordes de duas notas tendem a ter menor MMC que acordes de três ou mais notas, sendo justamente nesse sentido que falamos em comparar acordes de mesma ordem. Euler define o conceito de *expoente de um acorde* como o MMC das frequências das notas formadoras do acorde. É importante notar que aqui fizemos uma ponte entre as *Cartas* e o texto *Conjecture*, publicações da mesma época; Euler introduz o conceito de *expoente* por um caminho mais aritmético e diretamente relacionado à escala de entonação justa cujas frequências aproximadas constam da tabela 6. Não consta dos originais de Euler esta comparação dos intervalos pitagóricos perfeitos a partir do MMC, embora seja natural considerá-la.

Antes de analisar outros acordes vamos problematizar a definição dada por nosso teórico musical. Note pelos valores fornecidos na tabela 7 que podemos considerar muitos intervalos de oitavas diferentes: 24 e 48, 48 e 96, 36 e 72, entre outros que seguem a razão de 1 para 2; todavia como o cálculo do MMC depende dos valores das frequências, temos os seguintes resultados: MMC (24, 48) = 48; MMC (48, 96) = 96; MMC (36, 72) = 72. O que esses valores distintos querem dizer? Se todos os pares representam intervalos de oitava e o expoente traduz o nível de consonância e harmonia, não deveriam os resultados coincidir?

Euler sugere no *Conjecture*, a partir de um exemplo mais complexo, que com um ajuste é possível mostrar que sim. Vejamos sua ideia a partir de alguns exemplos mais simples: note que 24 e 48 têm 24 como divisor comum, 48 e 96 têm 48, 36 e 72 têm 36. Ao utilizarmos esses números para simplificarmos as frequências, todos os exemplos passam a envolver o MMC (1, 2) = 2. Dividir pelo MDC não é uma proposta absurda. Do contrário, a medida de dissonância entre uma nota e suas oitavas seria sempre um múltiplo da frequência original.

Assim, sempre podemos simplificar as frequências entre *f* e sua oitava 2*f* por *f*. Já as quintas e quartas pitagóricas perfeitas têm as seguintes simplificações:

- Para a quinta perfeita temos o MMC$\left(f, \frac{3f}{2}\right)$ e utilizando o divisor $\frac{f}{2}$ obtemos MMC (2,3) = 6;
- Para a quarta perfeita temos o MMC$\left(f, \frac{4f}{3}\right)$ e utilizando o divisor $\frac{f}{3}$ obtemos MMC (3,4) = 12.

Tais simplificações livram o expoente de sua dependência direta dos valores das frequências, devolvendo o foco às razões as quais subjazem os intervalos e embora estejam relacionadas com divisores comuns e MDC, existe a preocupação com a possibilidade das frequências assumirem valores reais. Sem aprofundar nas características, Euler trabalha com uma escala conhecida na literatura como *just intonation* ou *entonação justa*, na qual as notas da escala assumem valores fracionários e logo é possível utilizar um múltiplo comum para deixar todas as frequências com valores inteiros – sendo daí resultante os valores dados pelo mestre e que aqui reproduzimos na tabela 6.

Passemos para um segundo exemplo, agora envolvendo acordes de três notas. São bastante conhecidas as tríades formadas pela primeira, terceira e quinta notas da escala, que podem ser do tipo *maior* ou *menor* – introduzimos esta ideia no capítulo anterior ao abordar as médias harmônicas e aritméticas calculadas por Arquitas. As figuras que seguem, embora anacrônicas no sentido que sua plena utilização é posterior à produção do século XVIII, podem ser úteis para esclarecer de quais acordes estamos tratando, sobretudo para os iniciantes nas questões musicais, já que são facilmente executados e apreciados num piano.

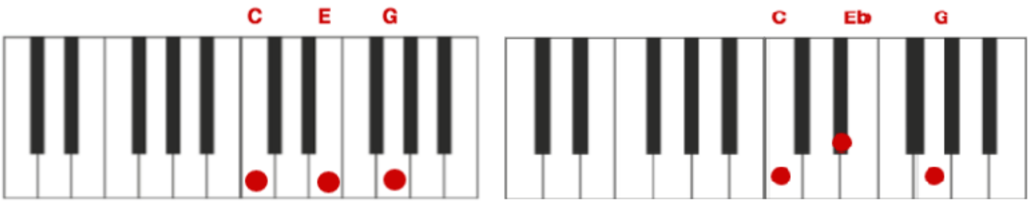


Figura 11 – Representação das tríades maior (esquerda) e menor (direita) em um piano[56].

Embora ambas as tríades tenham o status de consonância, a tríade maior ilustrada na figura 11 à esquerda aparece com mais frequência e costuma ser introduzida antes nos estudos musicais de harmonia e composição. Vejamos como se comportam os valores para o expoente dos acordes representados na figura 11:

- Para a tríade (de DÓ) maior: tomando as frequências mais graves.

$$\text{MMC}(DÓ, MI, SOL)^{57} = \text{MMC}(24, 30, 36) = 2.2.2.3.3.5 = 360;$$

- Para a tríade menor notemos primeiramente que este acorde utiliza uma nota que não consta da tabela 7, embora fosse utilizado à época de Euler. Por hora podemos supor que a nota *Mi bemol* (*Eb*) tem frequência entre 27 e 30. Considerando as aproximações inteiras, só temos duas alternativas: MMC(24,28,36) = 2.2.2.3.3.7 = 504 ou MMC(24,29,36) = 2.2.2.3.3.29 = 2088.

Assim, em qualquer das duas possibilidades o expoente da tríade maior resulta mais simples que o expoente da tríade menor – composições em modo maior e modo menor geralmente confirmam tal resultado aritmético. Todavia, uma vez que a tríade menor é amplamente utilizada como uma consonância, o valor 2088 para o expoente calculado com *Mi bemol* valendo 29 pode parecer estranhamente elevado. Voltaremos a essa questão adiante. Fizemos exemplos de forma a compreender o que Euler chama de expoente de um acorde, a definição dada por ele. Aqui aplicamos tal conceito para

---

[56] Os acordes estão exemplificados na escala de DÓ Maior, fato secundário para a análise do MMC. Figuras extraídas de *http://julia-musicasemlimite.blogspot.com.br/2011/04/curso-basico-de-teclado.html* (consultado em 30/11/2016).
[57] Constitui um abuso de linguagem, mas que intuitivamente mostra a natureza do expoente como o encontro simultâneo das frequências envolvidas.

confirmar fatos previamente conhecidos: que a oitava é mais consonante do que a quinta, que a quinta é mais consonante do que a quarta, que a tríade maior é mais consonante do que a tríade menor. Vamos, agora, avançar para o ponto fulcral da hipótese do processamento auditivo que aparece no *Conjecture*, já que neste o mestre utiliza o expoente para explicar a ideia.

2.2.2 – Uma hipótese de Euler para o processamento auditivo

Para desenvolvê-la devidamente nosso teórico toma como exemplo o acorde da tríade maior com sétima - a ilustração que segue tenta apenas facilitar a compreensão –, Euler trata a questão aritmeticamente sem se referir a qualquer instrumento.

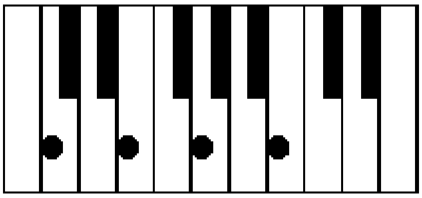


Figura 12 – Representação do acorde maior com sétima na escala de Dó Maior.

Acima temos o acorde conforme ele ocorre na conhecida escala de DÓ Maior. Ao conter a sétima nota da escala, conhecida atualmente por *sensível*, cria uma tensão característica da música tonal europeia e que pede por um desenvolvimento e uma resolução, geralmente dada ao fim da ideia musical ou do trecho musical onde ocorre. Apesar da dissonância do intervalo de sétima, sabe-se que dentro de um contexto harmônico mais amplo e na presença da tríade tal acorde é consonante e de fácil percepção auditiva, o que nos levaria a conjecturar que seu expoente resultaria em um valor relativamente baixo. Em seu texto, todavia, além de mencionar o amplo uso deste acorde em sua época, Euler destaca o acorde de sétima na escala de Sol, que apresenta sutil diferença, pois sua sétima é menor[58]. Ainda assim ele adverte que este acorde é “utilizado na música com tanto sucesso que ninguém questionaria sua harmonia ou

[58] Isso pode ser notado em um piano, observando que entre FÁ e SOL existe uma tecla preta, enquanto que entre SI e DÓ isso não acontece.

encaixe" *(EULER, 1766, p. 165)*[59]. Após a figura, temos o cálculo do expoente para ambos:

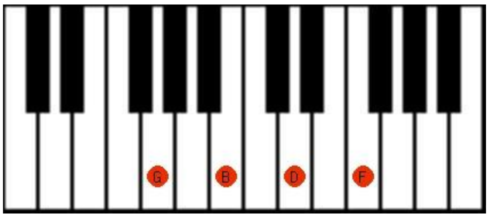


Figura 13 – Representação do acorde maior com sétima menor na escala de SOL[60].

- MMC (DÓ, MI, SOL, SI) = MMC (24, 30, 36, 45) = 2.2.2.3.3.5 = 360;

- MMC (SOL, SI, RÉ, FÁ) = MMC (36, 45, 54, 64) = 2.2.2.2.2.2.3.3.3.5 = 8640.

Como as frequências envolvidas são valores inteiros, podemos utilizar o MDC para encontrar um divisor comum e assim simplificar os valores acima. Note que os máximos divisores comuns são respectivamente: MDC (24, 30, 36, 45) = 3 e que MDC (36, 45, 54, 64) = 1. Assim o expoente do acorde de sétima na escala de SOL não pode ser reduzido, o que estaria em desacordo com a afirmação anterior de que este acorde é uma consonância e que é utilizado com sucesso na Música tonal da época. Estaria o expoente em desacordo com a prática musical de seu tempo? Euler tenta formular uma explicação para tal desacordo entre seu conceito aritmético e o papel do acorde de sétima. Expomos a ideia euleriana a respeito a seguir.

Perceba que devido ao divisor comum 9, o expoente do acorde SOL-SI-RÉ simplifica-se no MMC (4, 5, 6) = 60, cabendo ao número 64, que não é múltiplo de 9, a dificuldade em simplificar o acorde de sétima. Todavia, um matemático atento como Euler reconhece no número 63 outro múltiplo de 9. Conforme já vimos com a analogia das séries de pontos, a visão e o ouvido não teriam grandes dificuldades para reconhecer 63 e 64 como uma mesma nota musical. Logo, pela hipótese de Euler a respeito do

---

[59] Na tradução de Scaramazza consta: "(...) are used in music with such success that we do not question their harmony or agreement." No original de 1766 consta: "(...) sont employés dans la musique avec tant de succès, qu'on ne sauroit douter de leur harmonie ou de leur agrément." Observe que embora Euler conhecesse o temperamento igual e a escala cromática de 12 notas, o mesmo adota no texto *Conjecture* uma escala diatônica de 7 notas afinadas segundo a entonação justa (*just intonation*).

[60] Figuras 13 e 14 extraídas do website *http://www.musica-e-acordes.com/acorde_piano.php?ch=G7* (consultado em 30/11/2016).

processo auditivo, o mestre defende que seria em casos como este que o ouvido reconheceria as frequências 36 – 45 – 54 – 63, permitindo interpretar tal acorde de forma mais consonante. (EULER, 1766, pp. 171 e 172) Baseado nas limitações do sentido da audição em diferenciar pequenas alterações na frequência, o ouvido processaria aquela que torna o acorde mais simples, mais assimilável ao ouvido. Com o divisor comum 9, o expoente de acorde da tríade com sétima simplificado seria aproximadamente MMC (4, 5, 6, 7) = 2.2.3.5.7 = 420.

Se a hipótese que Euler levanta é aceita, a contradição entre a consonância do acorde de sétima e o seu expoente original que resultou 8640, resolve-se. Em seu processo de convencer o leitor, escreve que, de fato, se nos são apresentados esses dois acordes, um contendo as frequências 36, 45, 54, 64 e o outro as frequências 36, 45, 54, 63, teríamos que ter um ouvido poderoso para distingui-los, ao menos do caso quando são tocados simultaneamente. A respeito de tais ideias eulerianas, temos que

> Euler realmente dá às consonâncias e dissonâncias um caráter hierárquico, em oposição à tendência tradicional de distingui-las fortemente. Ele é levado a esse notável passo inovador por sua matemática. (...) Mas ele nunca investigou a fundo o problema fundamental que seu sistema aponta quando atribui a mesma hierarquia ao acorde dissonante de sétima C-E-G-B e à tríade consonante C-E-G.[61] (PESIC, 2013, p. 38)

Vemos acima que Peter Pesic (2013) aponta os méritos de Euler, mas também alerta para uma limitação para seu conceito já que este resultaria igual para um acorde de três notas e outro de quatro notas. Vale pontuar que no século de Euler o acorde de sétima não era visto como uma dissonância *stricto sensu.*, tinha seu espaço na composição.

Dando continuidade, podemos analisar o que acontece com as frequências da tríade menor à luz da hipótese de aproximação. Havíamos calculado o expoente para este acorde de duas formas, uma com a frequência 28 e a outra com 29. Como 29 é primo, não existe divisor comum para simplificar o expoente. Diante disso e da hipótese de Euler, somos levados a concluir que, independente do valor real da frequência nosso

[61] No original: "(…) Euler makes consonance and dissonance really a matter of degree, as opposed to the traditional tendency to distinguish sharply between them. He is led to this notably innovative step by his mathematics (…) But he never really addressed the fundamental problem that his system assigns the same degree to the dissonant major seventh chord C-E-G-B as it does to the consonant triad C-E-G."

ouvido aproximaria esse valor para 28, procedendo à simplificação da relação entre as notas envolvidas e, assim, apreciar sua consonância. Note que as frequências 24, 28 e 36 tem o fator 4 por divisor comum, logo o expoente que representaria aritmeticamente a consonância passa a ser MMC (6, 7, 9) = 2.3.3.7 = 126, resultado mais próximo ao do expoente do acorde da tríade maior quando simplificado pelo MDC 6, já que MMC (4, 5, 6) = 2.2.3.5 = 60 < 126, como esperado. Assim, considerando a simplificação do acorde dada pelo MDC e a hipótese de que nossos ouvidos aproximam algumas frequências, temos valores do expoente para os importantes acordes dos modos maiores e menores numa faixa que, segundo as concepções eulerianas, nos permitem classificar os mesmos como consonâncias.

2.3 – O pensamento aritmético se manifesta: números primos e escalas

Das Cartas que Euler escreve a sua discípula à distância, há ainda outra ideia que nos parece valiosa de ser extraída. Nela, Euler tratará de generalizar um fato observável a respeito da presença de fatores primos[62] no desenvolvimento das escalas ocidentais, recorrendo a analogias e, ao mesmo tempo, implicitamente retomando os trabalhos pelos quais nosso texto já passou: a escala pitagórica, as contribuições tarentinas e a gama de Zarlino, além de suas próprias ideias. Fator por fator, com detalhes, retoma o papel do primo par na obtenção da oitava e do fator 3 na obtenção da quinta perfeita. Retomando o ciclo das quintas, que foi explanado no capítulo anterior, sabemos que a gama pitagórica é obtida em função apenas destes dois fatores primos. Com Arquitas e as médias, chegamos ao intervalo de terça natural que evidencia o próximo fator primo. Ao retomarmos a tabela 5, concluímos que as frações que nela constam envolvem apenas estes três fatores primos mais simples. O que nosso mestre colocará em jogo é qual o papel que incluir o próximo fator primo pode desempenhar na melhoria, ou nível de complexidade, ou mesmo riqueza da harmonia musical da escala a ser obtida. A gama de Zarlino, conhecida como natural ou entonação justa, conforme vimos, está amparada nos fatores primos 2, 3 e 5. Assim, se considerarmos f como o valor da frequência fundamental sobre a qual se irá construir a escala, encontramos até o momento as seguintes notas, não necessariamente numa mesma oitava,

---

[62] Nas cartas em questão Euler não utiliza os termos primo e composto, mas tais ideias aparecem implicitamente ao longo da redação, nomeadamente, fatores primos e a decomposição em fatores primos.

f 2f 3f 4f 5f 6f 8f 9f 10f 12f 15f 16f 18f 20f 24f 25f 27f 30f 32f.

Conforme o próprio Euler faz para exemplificar o espectro de notas que tais frequências representam, acrescentando-se uma segunda linha, obtemos

f	*2f*	*3f*	*4f*	*5f*	*6f*	*8f*	*9f*	*10f*	*12f*	*15f*	*16f*	*18f*	*20f*	*24f*	*25f*	*27f*	*30f*	*32f*
C	c	g	c’	e’	g’	c’’	d’’	e’’	g’’	h’’	c’’’	d’’’	e’’’	g’’’	g’’’*s**	a’’’	h’’’	c’’’’
DÓ	DÓ	SOL	DÓ	MI	SOL	DÓ	RÉ	MI	SOL	SI	DÓ	RÉ	MI	SOL	SOL#	LÁ	SI	DÓ

Tabela 8 –Espectro de notas que os fatores primos representam: a 2ª linha foi mantida com a notação que utiliza Euler enquanto a 3ª foi acrescentada para permitir um paralelo com a nomenclatura mais disseminada atualmente. Quanto à 1ª linha, na Carta VI, Euler adota o valor f = 24, mas na carta seguinte altera este valor para simplificar suas explicações.

O que é matematicamente interessante nessa forma de apresentar a escala – forma que aqui se inspira naquela empregada por nosso teórico em duas das cartas que escreve à princesa Anhalt-Dessau – é como ela explicita a relação das escalas com os números primos. Os números que constam como múltiplos da sequência de frequências na tabela acima são todos os que podem ser gerados por produto dos fatores primos 2, 3 e 5. A primeira lacuna acontece para o fator primo seguinte, segundo Euler à sua discípula,

> Se se quisesse seguir adiante e introduzir o número 7, a quantidade de tons de uma oitava cresceria, e a Música seria elevada a um grau mais alto de perfeição. Mas aqui os matemáticos dão lugar aos músicos e a direção de seus ouvidos. (EULER, 1823, Carta VII, p. 23)[63]

É curioso que esta curta e precisa frase do mestre, no fim de umas das cartas, não é levada a cabo nem em seu século nem no seguinte, períodos que alcançam elevada produção musical associadas às escalas temperadas. A introdução de novos tons dentro do espectro de uma oitava é um fenômeno na Música ligado já ao século XX e também aos instrumentos elétricos e computadorizados (SETHARES, 2005, pp. 4 e 7). Neste

[63] Na tradução utilizada consta: “Were we farther to introduce number 7, that of the tones of an octave would be increased, and the art of music carried to a higher degree of perfection. But here the mathematician gives up the musician to the direction of his ear.” No original: “Si l’on vouloit encore introduire le nombre 7, les nombres des tons d’une octave deviendroit plus grand, & toute la musique en feroit portée à un plus haut dégré. Mais c’est ici que la Mathematique abandonne l’harmonie à la musique” (p. 28)

sentido, Euler parece afirmar que a construção de escalas mais complexas em termos aritméticos levaria a Música por um caminho completamente diferente do que de fato ocorreu no século seguinte. Notadamente é também no século XVIII que a música vai lenta, mas, reconhecidamente perdendo seu caráter matemático e o século XIX assiste a sua afirmação como elevada linguagem artística, tanto no nível composicional quanto dos intérpretes que produz.

2.4 – Por que os trabalhos teórico-musicais de Euler são pouco conhecidos?

Tratar da obra do nosso mestre não é fácil. Um primeiro motivo natural relaciona-se ao tamanho dela, conhecido prolífero matemático do século XVIII. Na escola básica o resultado que mais se apresenta parece ser o Teorema de Euler para os sólidos convexos do espaço – a conhecida relação de Euler. Já na graduação, suas inúmeras contribuições ao Cálculo, teoria das probabilidades e os conhecidos resultados em aritmética e Teoria dos Números são presentes, além de seus trabalhos hoje alocados em vários ramos da Física. Diante de tão vasta produção, não é raro lidar com bons matemáticos que desconhecem que Euler também foi um profundo conhecedor de Música e teórico musical. Seria o caso de dizer que os trabalhos aqui abordados e outros que fugiram ao escopo deste texto caíram no esquecimento? Teriam tais trabalhos sidos eclipsados pelos demais, certamente mais conhecidos e discutidos?

É especialmente interessante durante a leitura de seus trabalhos associados à música e também nas biografias estudadas notar que Euler congregava algumas características de um pitagórico, mas ao mesmo tempo perspicaz conhecer da Música que se produzia e dos instrumentos utilizados na Europa de seu tempo. Produzindo em um século em que a Música vai se separando da Matemática após longos períodos de influência de currículos como o *Quadrivium* de Boécio, a forma essencialmente pitagórica de preservar a pureza dos principais intervalos pode ser um dos caminhos para entender por que os trabalhos em harmonia musical de nosso suíço não se popularizaram e não podem ser considerados influentes do século em questão, nem do seguinte. Para muitos contemporâneos, Euler não abrir mão da aritmética perfeita dos intervalos puros significava também negar o processo de temperamento que se construía em várias escalas à época. Segundo o mestre,

> E a todos os interessados em utilizar as regras aqui dadas é imprescindível ter cuidado com a exata afinação do instrumento musical às notas que a harmonia demanda e como tais notas estão representadas em nosso Speculum Musicum. (...) Então com toda razão que somos levados a assumir todas as consonâncias aqui discutidas a serem tão exatamente postas nos instrumentos de forma a evitar mesmo o menor desvio perceptível. Assim mesmo, muitos músicos se distanciaram enormemente destas regras, tão caras à produção da harmonia, ao pensarem que o intervalo de oitava deveria ser dividido em doze partes iguais, já que desta forma o conjunto da música pode ser transposto em todos os tons. (EULER, 1773, pp. 352 e 353)[64]

O trecho acima dá também forte indício que Euler não apenas fazia teoria musical, mas se preocupava com a prática musical. FELLMANN (2007) e DU PASQUIER (2008), em suas biografias, apresentam particularidades interessantes sobre a relação dele com a música em seu tempo de ócio. Todavia, muitos de seus estudos e publicações sobre música parecem ter caído no esquecimento completo ou são pouquíssimo conhecidos. Tal fato se deu, aparentemente, devido as suas diferenças em relação ao processo que inculcou o Temperamento na musicologia europeia ao longo do século XVIII, tendo muitos de seus escritos um posicionamento bastante distinto do principal teórico musical do período, Jean-Philippe Rameau. Herdeiro do pitagorismo no sentido que Euler prezava pelos intervalos pitagóricos perfeitos e estes são apenas aproximados no temperamento igual, nosso teórico considerava o abandono das razões um problema. Na escala temperada, o intervalo de quinta é tomado por aproximadamente $\frac{2}{3}$ e não exatamente esta razão, para dar apenas um exemplo. Também,

> do ponto de vista euleriano, ele não conseguia aceitar o temperamento uniforme porque envolvia a uniformização dos intervalos que, embora oferecesse certas conveniências, resultava –

[64] Na tradução utilizada consta: "And whoever wishes to use the rules given here must above all take care that a musical instrument be tuned exactly to the tones that harmony demands, and how those tones are represented in our *Speculum Musicum*. (…) With all reason, then, we are sent to assume all consonances discusses here to be displayed in musical instruments so exactly that it should not be possible for even the least aberration to be sensed. Therefore, those musicians have greatly withdrawn from this rule, which is so greatly necessary for the production of harmony, who have thought that an interval of one octave should be divided into twelve equal parts, because in such a way musical ensemble may be transposed into all keys." Esta versão esta disponível no endereço eletrônico: http://eulerarchive.maa.org/docs/translations/E457en.pdf (Consultado em Novembro de 2017). O Euler Archive disponibiliza o original em latim em http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E457.pdf

> como ele pensava – em um empobrecimento da variedade de tons para a composição musical. (...) Relacionado a isso também é de se lembrar a atitude de desprezo de muitos dos teóricos musicais nos últimos dois séculos quanto ao uso da Matemática na Musicologia. (GERSTMAN, 2007, p. 336)[65]

Por hora tais ideias ajudam a clarear esta questão. Daremos continuidade a esse tema no capítulo que segue quando outros aspectos dessa questão serão levantados na tentativa de analisar os valores formativos e pedagógicos de alguns desses trabalhos de Euler num contexto de graduandos em matemática e formação de professores.

---

[65] No original: "Judging by Euler's views, he was unable to go along with uniform temperament because it involved uniformization of the intervals which, although it offered certain conveniences, resulted – so he felt – in an impoverishment of the intonational variety of music-making. (…) In this connection one should also recall the negative attitude of many of the leading musical theorists of the last two centuries to the application of mathematics to musicology."

– Capítulo Terceiro –
A concepção desta pesquisa como processo histórico de seu autor e as implicações pedagógicas de ler Euler na formação docente

De que forma o interesse e a abordagem que foram dados nos capítulos anteriores podem ser vistos como históricos? Uma das respostas está contida claramente no próprio texto, quando retomo o processo histórico das relações entre as escalas musicais no Ocidente e a Matemática, evidenciando o forte caráter de ciência matemática que a Música teve durante séculos. Foram abordados pensadores, escolas, formas de entender as ciências matemáticas, formas matemáticas de conceber as escalas. Mas há outro aspecto histórico que se relaciona com o que foi apresentado anteriormente: a história do autor do texto, nomeadamente, os percursos pedagógico-acadêmico e pessoal daquele que vos escreve.

Alguns aspectos são centrais para entender esse processo pessoal: 1- Uma perspectiva interdisciplinar diante da vida e do conhecimento, fator este que com ressalvas feitas às diferentes épocas, também é notável na vida e obra de Euler; 2 - O interesse pelas artes e humanidades em intercâmbio mútuo com as ciências matemáticas e o raciocínio lógico-dedutivo; 3 - O acesso à literatura matemática de excelência, nomeadamente a leitura das obras clássicas e de referência e aos mestres da produção e do desenvolvimento da Matemática. Neste caso, o nosso já íntimo matemático e físico Leonhard Euler em primeiro plano, outros ao longo do processo e ainda outros no âmbito da prática docente.

Ao longo do processo de construção das ideias e do texto, foi recorrente o seguinte incômodo: mesmo em uma graduação com inúmeros méritos e envolta em uma cena de pesquisa acadêmica de qualidade, durante a qual os nomes de importantes matemáticos e suas contribuições foram introduzidos, era praticamente inexistente a leitura da obra e das contribuições dos mesmos, sobretudo as fontes originais, de suas biografias, de suas matemáticas, com baixa inserção e apropriação do universo literário da Matemática. O acesso à diversidade de ramos da Matemática e seus resultados se dava quase que exclusivamente via textos didáticos escritos posteriormente à época de afloramento das mesmas e que em sua maioria constituem exemplos de obras que passaram por um processo de *suavização* e *polimento* (AVITAL, 1995).

> Uma questão básica ao ler os artigos publicados na área de Matemática é que em uma maioria deles o autor ignora o pano de fundo, os dilemas e as falhas que levaram às ideias a respeito das quais, ele ou ela, escrevem. (...) Matemáticos gregos, particularmente Euclides e Arquimedes, usam formulações suaves e polidas que escondem os dilemas e questões em torno do material.[66] (AVITAL, 1995, p. 6)

Não seria o caso de estender a séria crítica que faz Avital a matemáticos e suas publicações também aos vários livros didáticos que constam das bibliografias dos cursos superiores de matemática? A obra *Elementos* teve durante séculos um caráter didático. Em nome da clareza, perfeição e estilo, em nome de se ensinar o que há de mais correto e preciso em ciências matemáticas, perdemos todo o valor humano e histórico de sua produção, criando nos estudantes, alguns futuros matemáticos e professores a sensação tão bem descrita por Jonathan Golan, quando conclui que

> (...) como todos nós sabemos, o processo de *fazer matemática* envolve, no fim, apagar as pegadas feitas no percurso.[67] (JONATHAN GOLAN apud JONES, 1995, p. 13)

Conclui também Avital, de forma igualmente preocupante, que

> O estilo polido das publicações elimina o lado humano da luta, da perseverança, dos altos e baixos que se experimenta ao longo do caminho até alcançar o resultado final.[68] (AVITAL, 1995, p. 10)

Se tais constatações ressoam nas publicações e na prática da Matemática em centros de ensino e pesquisa, temos aí um excelente indicativo de que é relevante refletir a esse respeito. Certamente tal questão assume contornos pedagógicos, mas transpassa tais contornos tocando em questões epistemológicas e históricas de sua produção e desenvolvimento. De acordo com a biografia e os trabalhos de Euler que

---

[66] No original: "A basic problem with reading published articles in mathematics is that in almost all publications the author ignores the background, the grappling, and the failures that led to the ideas he or she writes about. (...) Greek mathematicians particularly Euclid and Archimedes, use smooth and polished formulations in which the initial grappling with the material has been obliterated."
[67] No original: "(...) as we all know the process of *doing mathematics* involves, in the end, concealment of one's track."
[68] No original: "The polished style of publications eliminates the human side of grappling, of the perseverance, of the ups and downs experienced on the way to final achievement."

foram focados anteriormente podemos visitar um recorte para tal questão, inserindo ambos – autor e sua produção – no contexto desta reflexão.

A carreira de Euler, enquanto pesquisa e atividades administrativas nas Academias de São Petersburgo e Berlim, diferente da ideia acadêmica atual, não passou pela função de professor *stricto sensu*. Verdade que isso não impediu Euler de ter sido um mestre no sentido daquele que detém grande conhecimento acerca das questões do seu tempo, que conduz e guia e que reúne ao seu redor um grupo de discípulos ou pupilos, como por exemplo, a própria princesa Anhalt-Dessau, destinatária das *Cartas e* seu auxiliar nos últimos anos de vida, Nikolas Fuss (1755 – 1826). É importante também recordar a relação enquanto discípulo que nosso mestre teve com Johann Bernoulli (1667 – 1748) durante os primeiros anos de carreira ainda na Basiléia suíça. O que parece natural afirmar – a partir das biografias consultadas – é que Euler nutriu grande estima à forma como foi orientado pelo pai Bernoulli, sendo que nos últimos anos de sua vida se referia ao mesmo como seu tutor, seu mestre (FELLMANN, 2007; DU PASQUIER, 2008).

Já em suas publicações – aqui, sobretudo, as *Cartas* – nosso mestre explora outras formas de construir o conhecimento matemático: por meio de analogias, validação de conjecturas a partir da realidade e da repetição, pensamento hermético, indutivo, sem jamais deixar de considerar o rigor característico das áreas matemáticas; todas tornam o adjetivo mestre mais e mais pertinente. Se não chega exercer propriamente uma carreira docente, certamente sua didática e preocupações pedagógicas com a divulgação de suas ideias são nítidas e defendidas por muitos.

> Euler me parece quase incomparável com respeito a um ponto: o enorme esforço em apresentar as evidências relevantes da indução cuidadosamente, detalhadamente e na ordem certa. (...) Sua apresentação é “a mais cândida exposição de ideias que o levaram a suas descobertas” e tem um charme único.[69] (PÓLYA apud ALEXANDERSON, 2007, p. 61)

[69] No original: “Yet Euler seems to me almost unique in one respect: he takes pains to present the relevant inductive evidence carefully, in detail, in good order. (…) His presentation is “the candid exposition of the ideas that led him to those discoveries” and has a distinctive charm.”

O elogio acima foi extraído da obra *Matemática e raciocínio plausível, indução e analogia na Matemática Volume I*[70] de George Pólya (1887 – 1985) e representa perfeitamente o que se pretende aqui defender. Euler pode ser um caminho frutífero para iniciar nossos estudantes e nós mesmos na leitura de grandes textos da literatura matemática e a partir delas iniciar um processo histórico e epistemológico para superar o quadro exibido acima. A favor das *Cartas*, certamente, potencialidades pedagógicas dos escritos à princesa já haviam sido pontuadas com o mestre ainda em vida, sendo característico o primeiro tomo das mesmas.

> Este conjunto de volumes que aparece em 1768 em São Petersburgo foi sucesso imediato por toda Europa, mesmo que escrito a um nível bem além de uma pessoa de 15 anos de idade. Foi traduzido para o russo, tendo quatro edições. Em Paris, Leipzig e Berna, Du Pasquier nos conta que também foi publicado em francês, 12 edições ao todo. Foram lançados em inglês nove vezes, em alemão seis vezes, em holandês duas, em sueco duas e também traduções em italiano, dinamarquês e espanhol.[71] (ALEXANDERSON, 2007, p. 63)

As *Cartas*, levando em conta a destinatária e o século em que foram escritas, certamente constituem um exemplo do que Alfonso-Goldfarb menciona como *ciência para damas* (ALFONSO-GOLDFARB, 2004, p. 47) motivo importante para entender a didática utilizada por Euler já que teria fins de propagar o conhecimento de seu tempo entre um público mais amplo e de aportes culturais e políticos suficientes para apoiar a ciência em construção que alcançaria grande repercussão no século seguinte, quando se estabeleceu o modelo de ciência como conhecemos hoje. Segundo Condorcet,

> ele preferia instruir seus discípulos à pequena satisfação de surpreendê-los. Ele pensaria não ter feito o suficiente pela ciência se tivesse falhado em acrescentar às descobertas, com as quais enriqueceu a ciência, a exposição mais cândida das ideias que o

---

[70] Nome original: “Mathematics and plausible reasoning,, induction and analogy in Mathematics Volume I” (1954).

[71] No original: “This set of volumes which appeared in 1768 in St. Petersburg was an immediate success throughout Europe, though it may have been written at a level quite beyond that of a 15 year-old. It was translated into Russian, and appeared in four editions. In Paris, in Leipzig, and in Bern, du Pasquier tells us, there were French editions, twelve in all. They were issued in English nine times, in German six times, in Dutch twice, in Swedish twice, and there were also translations into Italian, Danish and Spanish.”

> levaram a tais descobertas.[72] (CONDORCET apud SIU, 1995, p. 147)

Tais comentários valorizam a escrita de Euler e evidenciam que seu processo de construção de ideias científicas se encontra associado a alguma preocupação ou forma de expressão didática das mesmas. A leitura de algumas das cartas enviadas por ele à princesa germânica – para citar apenas um exemplo da rica história das correspondências como veiculação e construção coletiva de conhecimento (PEREIRA, 2014) – podem agregar novos valores históricos e epistemológicos à formação de matemáticos e, sobretudo, de professores desta disciplina. São estes últimos que detém um papel relevante na mudança da forma como a cultura em torno do conhecimento matemático é percebida e apropriada. Nesta perspectiva que veremos a seguir algumas possibilidades de uso dos originais para conceber outras formas de aquisição do conhecimento matemático, com destaque para os trabalhos de Euler já mencionados, mas não nos limitando à sua obra.

3.1 – Comentários sobre as possibilidades didáticas do *Conjecture*

Na 5ª Semana de Ciência e Tecnologia de Guarulhos (SEMCITEC) oferecida pelo Instituto Federal de São Paulo (IFSP – Campus Guarulhos) – em parceria com a Secretaria de Educação da Prefeitura do município propus em outubro de 2016 uma oficina intitulada *Analisando sons, ritmos e escalas musicais matematicamente* (ver anexo D). Na ocasião, apresentei uma conferência e propus atividades que dialogassem com a aritmética da escala pitagórica, de Arquitas, da gama de Zarlino e também do conceito de expoente de um acorde que aparece no *Conjecture* de Euler[73]. Os assuntos abordados deram origem a 10 exercícios autorais apresentados aos participantes em diferentes graus de profundidade. Tal evento com temática mais flexível e abrangente permitiu levar o conteúdo dos trabalhos originais de Euler que constituem o cerne desse texto para um contexto educativo, mesmo que não o formal de cursos superiores em

[72] No original: "He [Euler] preferred instructing his pupils to the little satisfaction of amazing them. He would have thought not to have done enough for science if he should have failed to add to the discoveries, with which he enriched science, the candid exposition of the ideas that led him to those discoveries."

[73] Junto com as cartas de I a IX do primeiro tomo de correspondências publicadas na obra *Lettres a une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique & de philosophie*, o texto *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* foram as fontes originais de Euler que serviram de base para o segundo capítulo da presente dissertação.

matemática embora seja válido mencionar que a maioria dos participantes desta oficina eram licenciandos em matemática do IFSP. Aqui – e de acordo com o que antes fora realçado sobre a qualidade pedagógica de alguns escritos do suíço – focaremos nas atividades e discussões de tal oficina diretamente inspiradas na leitura do *Conjecture* – ver figura 15.

Anacronicamente, mas de forma um tanto necessária já que quase nenhum conhecimento prévio de música foi exigido dos participantes, os acordes em torno dos quais se calculou o expoente definido por Euler foram escutados com auxílio de um teclado moderno. Foi possível introduzir os participantes às sonoridades da oitava, da quinta e da quarta, mesmo que estas últimas não estivessem afinadas de acordo com a relação de frequência dada no texto do mestre[74]. De todo modo, foi possível analisar com efetivos cálculos de MMC as relações propostas no *Conjecture*, tendo como ponto de partida a consonância dos intervalos pitagóricos perfeitos. O fato dos valores aritméticos obtidos estarem em sintonia com a percepção auditiva dos intervalos causou uma sensação positiva entre os participantes, uma sensação de apropriação a múltiplos níveis de representação e sentido – nomeadamente o visual, o auditivo, o aritmético e o histórico. Alguns outros acordes foram executados e explorados de forma similar, questionando o que cada aluno entendia por soar mais ou menos consonante, mais ou menos harmônico e, em seguida, tentava-se calcular o MMC e analisar do ponto de vista euleriano. O conhecido MMC ganhou um novo aspecto ao ser aplicado a uma questão diferente das usualmente exploradas em livros didáticos ou em cursos iniciais de Teoria dos Números.

Além da já mencionada desvantagem anacrônica da abordagem escolhida na ocasião, devido ao uso de um instrumento afinado segundo outra ótica, outras questões foram objeto de reflexão posterior a realização da oficina: quais conhecimentos precisam ser investigados e trabalhados para reduzir o anacronismo mencionado, equacionar melhor o tempo de duração de uma atividade deste tipo, especificar melhor os objetivos de tal abordagem dentro de um contexto maior de formação que poderia

[74] Explico: enquanto que em seu texto Euler trabalha com a escala afinada segundo a entonação justa, um teclado moderno esta afinado segundo outra escala, a escala temperada, que aqui não foi tratada e que possui doze notas – pense nas sete teclas brancas e as cinco pretas da oitava de um instrumento de tecla moderno. Ainda que diferentes, com relação aos principais intervalos tratados no texto, como a quinta, a quarta e a terça, ambas as escalas possuem valores bastante próximos que apenas ouvidos treinados poderiam diferenciar.

estar associado à teoria dos números elementar, sobretudo dos licenciandos em Matemática, que foram maioria na ocasião. No nível dos conteúdos, temos ainda: recursos do MMC e do MDC para explorar as hipóteses eulerianas quanto às aproximações executadas no processamento auditivo, comparações entre as tríades maiores e menores e modos musicais correspondentes, as tríades com sétima, a análise dos fatores primos, as possibilidades históricas e até mesmo interdisciplinares do *Conjecture* na Educação Básica e a leitura e apropriação deste original por parte dos participantes. Em especial este último motivou a tradução que é oferecida no Anexo C deste trabalho, na esperança não só de que tais questões possam ser amplamente socializadas, como também de incentivar e dar acesso a leitura de originais de interesse histórico-pedagógico e ainda, de forma mais específica, trazer à tona a faceta teórico-musical de Euler. É necessário pontuar que a abordagem dos conceitos presentes no *Conjecture* foi dada de forma expositiva e isso em parte resolve a questão do tempo já que dos participantes não era esperado a leitura deste original, nem em francês, nem em sua tradução para o inglês. Todavia, a leitura do original ou partes dele pelos participantes é de grande interesse formativo, embora passe por questões de acesso e de compreensão de línguas estrangeiras.

Finalmente, ainda na mesma ocasião, foi possível problematizar o acorde com sétima que é o cerne do texto original de Euler, explicando sua hipótese auditiva em torno da simplificação do MMC calculado, onde os participantes calcularam duas vezes o expoente do acorde com os mesmos valores que Euler usa para justificar sua hipótese, verificando a significativa diferença numérica obtida, mas sem adentrar o assunto em toda sua profundidade, já que para tanto aspectos anatômicos, acústicos, aritméticos, métricos e possivelmente de outras naturezas teriam que ser desenvolvidos. Diante de todo o exposto, mas sem querer esgotar a questão, parece correto concluir que para esta oficina dispor de outros materiais – como as afinações utilizadas por Euler – e outro tempo de duração, além de ideias mais elaboradas tanto de conceitos matemáticos quanto musicais são valiosos para uma exposição que vise reduzir o anacronismo da abordagem e respeitar o original utilizado. Tal oficina foi uma primeira tentativa de dar uma formatação pedagógica e formativa para o *Conjecture*, trazendo-o para um âmbito educacional, mesmo que informal, e lançando mão de certo nível de *transposição didática*[75].

8 - Usando os conhecimentos proporcionados pela Lei de Ohm e as respostas dadas no exercício anterior, calcule as frequências pedidas de forma a completar a tabela que segue:

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
24	27				40	45	

9 - De acordo com Leonhard Euler (1707 – 1783) seria possível atribuir uma hierarquia entre os intervalos e acordes musicais a partir de um coeficiente numérico que o mesmo batizou de *expoente de um acorde*. Euler propôs que tal coeficiente se calcularia tirando o MMC das frequências das notas envolvidas. Quanto menor o resultado do expoente, maior a harmonia, maior a consonância, percebida pelos nossos ouvidos. Vamos utilizar a ideia de Euler para comprovar a hierarquia pitagórica proposta para os intervalos de oitava, quinta e quarta. Utilize os valores de frequência dados pela tabela do exercício anterior.

a) Calcule o expoente para as notas dó e dó (oitava acima).
b) Calcule o expoente para as notas dó e sol.
c) Calcule o expoente para as notas dó e fá.
d) O que podemos dizer sobre a hierarquia dos três intervalos baseados nesses cálculos.

10 – Calcule o expoente das tríadas maior e menor e do acorde Dó – Fá – Lá. Utilize os valores da tabela do exercício 8 e considere 29 como frequência para a nota Mi bemol.

Figura 14 – Reprodução do 8º, 9º e 10º exercícios da Oficina, concernentes ao Conjecture.

Na edição 2017 da SEMCITEC tais reflexões e questionamentos voltaram a ser alvo da pesquisa em torno das vantagens e desvantagens de fazer tal aproximação com o original de Euler e uma abordagem histórica dos temas desta dissertação. Nesta ocasião, devido ao tempo oferecido de 1 hora e 30 minutos, o formato oficina foi descartado e uma palestra centrada nos aspectos da Música enquanto ciência matemática permitiu uma maior precisão histórica e respeito às fontes, abordando e avançando quanto ao anacronismo, todavia sofrendo de um distanciamento dos participantes colocados na posição de espectadores.

Certamente que outras ideias e considerações, para além das expostas aqui, podem se agregar à formação de professores a depender do objetivo proposto – inclusive podem atingir professores da disciplina de Música e Artes.

[75] Referimo-nos ao conceito de transposição didática de Yves Chevallard (1946–), cuja obra de referência é *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné* (1985).

3.2 – Uso de originais no 1º semestre da formação docente: carta I à princesa

Levando em consideração que as disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática do IFSP, ministradas por mim ao longo do ano de 2017, foram em sua maioria na grande área de Geometria, desenvolvi também uma proposta de leitura da carta I do primeiro tomo de Euler à princesa para uma turma de ingressantes.

Escrita em abril de 1760, os assuntos de que trata esta primeira correspondência são a extensão das dimensões e as distâncias. A leitura fora proposta imediatamente após a abordagem sintética e analítica da noção euclidiana de distância entre dois pontos, com a dedução do cálculo via coordenadas cartesianas do plano. É necessário mencionar que a turma teve acesso à tradução com fins pedagógicos realizada por Pereira (2014) em sua tese de doutoramento[76]. A tradução foi disponibilizada à turma acompanhada de um questionário que visava avaliar a interpretação do documento e também associar ao conteúdo do mesmo aos tópicos em estudo nas aulas da disciplina FGOM1 – Fundamentos da Geometria Analítica. Tínhamos assim constituído um trabalho pedagógico em cima do referido original.

O tema desta carta é a extensão, entendida como o tamanho de objetos e superfícies, ou mesmo como a distância entre estes, onde Euler trabalha as maiores e as menores extensões conhecidas na sua época. Ao longo da explicação procura levantar exemplos interessantes e concretos dando a ideia de relatividade na comparação entre os tamanhos e também alguns exemplos de unidades de medidas adequadas para descrever cada um dos dois tipos de extensão, as maiores e as menores. Os exemplos perpassam diferentes conhecimentos científicos, embora Euler evite uma grande quantidade de termos demasiadamente específicos de cada área do conhecimento.

[76] Em sua tese de doutoramento – intitulada *Correspondências científicas como uma relação didática entre história e ensino de Matemática: o exemplo das cartas de Euler a uma princesa da Alemanha* – Pereira faz traduções com fins pedagógicos de todo o primeiro volume (tomo) das *Cartas* diretamente do francês para o português, tendo como aporte de tradução a edição em espanhol de Pérez (1990).

QUESTIONÁRIO BASE NA CARTA I – SOBRE A EXTENSÃO (L. P. EULER)

1 – Qual o sentido do título dado à carta e que relação você faz entre os termos *extensão* e *distância* ao longo da carta?

2 – Compare o que seria uma "grande distância" na Ciência atual com os exemplos dados de "grandes distâncias" na carta de Euler?

3 – Compare o que seria uma "pequena distância" na Ciência atual com os exemplos dados de "pequenas distâncias" na carta de Euler?

4 – Destaque um trecho da carta que comprove que à época de sua redação já se tinha a ideia que medir é uma ação de comparar com base em alguma referência previamente estabelecida ou combinada.

5 – A distância estudada na Geometria Analítica pode calcular distâncias infinitamente pequenas quanto grandes. Use pares ordenados para exemplificar isso com o cálculo de distância estudado no curso, dando exemplos de pares ordenados infinitamente próximos bem como infinitamente distantes.

Figura 15 – Reprodução do questionário que compôs a proposta pedagógica em torno da carta I.

Faremos a análise de tal proposta com base nas cinco primeiras perguntas – ver figura 15 - já que a sexta e última cumpria outro papel no contexto da disciplina, o da verificação de coordenadas no plano. A adesão ao trabalho foi alta, sendo que a carta e o questionário foram disponibilizados na plataforma SUAP de acompanhamento pedagógico da instituição, onde os próprios alunos acessaram este material e, na data combinada, aproximadamente 80% dos mesmos entregaram suas respostas. O trabalho foi realizado extraclasse e respostas foram compartilhadas entre os alunos, o que pode ser entendido como natural e enriquecedor, ao longo do processo cuja duração foi de duas semanas.

A leitura das respostas aponta para o fato que a maioria dos alunos leu a carta e o questionário, mesmo que eventualmente enfrentando dificuldades na interpretação ou registro escrito de suas ideias. Positivamente, o grupo demonstrou pouca resistência a uma atividade de caráter de leitura, escrita e de questões dissertativas, numa disciplina que geralmente é abordada com exercícios modelos e um conjunto de fórmulas e receitas para resolver um conjunto de problemas sobre distâncias, retas e circunferências. Como contrapartida se identificou respostas e trabalhos que apenas cumpriam a rotina de avaliações da disciplina, já que o questionário foi tomado como um instrumento de avaliação e consequente aprovação.

Entre as dificuldades detectadas se sobressaem: 1 – respostas que demandem comparações; 2 – confundir os tempos envolvidos no questionário, atualidade e a época em que a carta foi escrita; 3 – dificuldade com as noções geométricas de *infinitamente próximo* e *infinitamente distante*; 4 – interpretação e dificuldade de expressão escrita de forma a criar uma resposta coerente ao que efetivamente foi perguntado. Tratamos de detalhar cada uma delas a seguir:

1 – Nas respostas que demandavam comparações – nomeadamente a segunda e terceira questões – o mais usual foi um processo de pesquisa de extensões e unidades de medida conhecidas atualmente. As respostas mais satisfatórias apontaram para um conhecimento de caráter interdisciplinar, desde a moderna astronomia para as grandes extensões e unidades como o ano-luz, por outro lado a biologia molecular e a constituição físico-química de minerais e seres vivos, além de unidades como o nanômetro e yoctômetro, citando as unidades da época de Euler e seus exemplos dados na carta para fins de comparação. As respostas menos satisfatórias tiveram em comum a ausência de comparação entre as duas épocas, citando exemplos apenas de uma delas ou mesmo misturando ambas, gerando respostas incompletas ou mesmo incoerentes.

2 – No caso das respostas que apontavam para uma mistura entre as épocas envolvidas no questionário, os alunos davam a entender que não havia diferenças quanto às maiores e menores extensões conhecidas apesar dos quase 250 anos que separam a carta da atualidade.

3 – Poucos alunos chegaram a propor dois pares de pontos de forma a produzir uma resposta completa, sendo que muitas delas foram de difícil compreensão ou continham erros graves de cálculo. Outro ponto interessante foi que a quinta questão não foi associada às anteriores e vários exemplos de pontos próximos ou pontos afastados eram incoerentes com as extensões exemplificadas, sobretudo, nas questões 2 e 3. Apesar de não ser esperado um domínio do conceito de infinito ou de questões infinitesimais em alunos ingressantes, respostas satisfatórias incluíram o cálculo de distâncias menores que 1 e maiores que 10000, além do uso de notação científica.

4 – Tal aspecto atravessou as cinco questões analisadas, constituindo um fator importante e que se articula com todo o curso de formação de professores, inclusive pela disciplina obrigatória Leitura, Interpretação e Produção de Textos[77]. Várias

[77] A disciplina LIPM1 – Leitura, Interpretação e Produção de Textos, que consta da grade obrigatória do primeiro semestre da atual matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática do IFSP e trabalha questões concernentes a leitura, a técnica e estilo de textos e apresentação de trabalhos escritos, além de

respostas apontavam para a dificuldade de compreensão da pergunta, da própria carta, de forma a criar uma resposta coerente e significativa. Um comportamento geral da turma, que se configura preocupante, é que os alunos não buscaram apoio do professor e das monitoras para lerem e interpretarem – à exceção de uma única aluna que realizou uma consulta por e-mail a respeito de uma das perguntas e de uma fonte que havia encontrado na internet – e por vezes pesquisaram aspectos que embora verdadeiros em si não se articulavam com a questão proposta, gerando outro tipo de resposta incoerente.

Analisadas as dificuldades e desafios da atividade proposta, também se identificam ganhos e aspectos positivos, sobretudo quando se pensa em formas de dar continuidade a mesma: interlocução com a disciplina de Leitura, Interpretação e Produção de Textos, início de um diálogo pedagógico com a docente responsável pela mesma, a leitura de uma fonte original de valor histórico articulada com parte importante da Geometria e da Geometria Analítica, fortalecimento de ideias matemáticas a partir da leitura na tentativa de superar o estudo baseado apenas em listas de exercícios, inserção da produção literária e histórica da Matemática no primeiro semestre da formação inicial de professores.

3.3 – Outras experiências com fontes originais na formação docente

O uso de determinadas fontes de maneira sincronizada com uma disciplina específica não é uma tarefa de fácil execução. É sempre preciso encontrar nas ementas das disciplinas os devidos temas mobilizados nas fontes. A aritmética não se encaixava não disciplinas que foram atribuídas nos últimos semestres. Por isso, procurei expandir minhas preocupações com o uso de fontes às disciplinas que eu trabalhei sem necessariamente utilizar os trabalhos de Euler sobre música.

Foi assim que comecei a pensar as disciplinas GEOM3 - Geometria III (Espacial) e GNEM8 - Geometrias Não-Euclidianas. Em ambas destacarei o uso de

---

discutir problemas concernentes a dificuldades instrumentais com a Língua Portuguesa. Em conversa com docentes do IF e a professora responsável pela mesma, há um consenso quanto às enormes dificuldades em leitura e escrita por parte de percentual significativo de ingressantes, defasagens em conteúdos do gênero e uma necessidade constante de trabalhar com as mesmas em todas as disciplinas.

originais de Euclides e Hilbert, no contexto da formalização axiomática da Geometria Euclidiana e do estudo moderno da independência do quinto postulado de Euclides.

Para a obra de Euclides, a tradução de Irineu Bicudo publicada pela Editora da UNESP, incluso o excelente prefácio escrito pelo tradutor, sanaram qualquer dificuldade de acesso às línguas estrangeiras. Quanto à obra Fundamentos de Matemática de David Hilbert, sobretudo o primeiro capítulo onde o conjunto de axiomas é apresentado, foi necessário contar com as versões em inglês e em espanhol e trabalhar traduções livres dos axiomas e das ideias construídas pelo autor.

O salto epistemológico e qualitativo foi grande. As disciplinas anteriores da grande área de Geometria costumam ser trabalhadas de um ponto de vista elementar, realizando a importante ponte com a Educação Básica, revisando e revisitando os resultados básicos da Geometria Plana e cumprindo simultaneamente o papel de recuperar e sanar defasagens. A construção histórica, axiomática, apareceu pela primeira, de acordo com os relatos de alguns participantes do curso, nas disciplinas onde Euclides e Hilbert foram introduzidos. Todavia, isso poderia ter sido feito apenas como dados históricos, como motivações de caráter histórico. Ao lerem a redação dos axiomas em ambos os pensadores, ao analisarem ideias, definições, demonstrações originais, ao compararem o teor dos mesmos em cada época, qual geometria estava em construção, as perguntas e as reflexões ultrapassaram as contas ou aplicações dos principais resultados. Alguns trechos foram oferecidos em inglês, incentivando um trabalho com línguas estrangeiras e com a tradução visando à compreensão das ideias. Entretanto foram poucos os trechos utilizados, já que este fator não podia prejudicar o andamento da avaliação do curso.

A linguagem diferente desses pensadores mostrou que o apoio docente na interpretação das informações é de grande importância, provavelmente maior do que com textos didáticos usuais. A questão das traduções livres como forma de permitir construir o curso em cima dessas fontes originais, embora uma conquista, também levantou a necessidade das línguas estrangeiras e do acesso da obra de determinados matemáticos a partir de traduções de excelência, justificando uma vez mais a tradução do original de Euler que consta dos anexos.

Finalmente, a título de exemplificação na Educação Básica, realizei em 2015 com turmas de 6º ano do Ensino Fundamental do Sistema Municipal de Educação de

São Paulo um pequeno trabalho que também tomou por base a tradução de Bicudo. A partir de uma roda de conversa, o grupo foi introduzido à obra *Elementos*, sua importância histórica e às tentativas de Euclides de definir pontos, retas e planos. Em seguida foi introduzido a ideia atual de conceito primitivo. Ao fim da conversa o grupo foi orientado a fazer um registro coletivo daquela aula, no centro da roda e usando cartolinas, colocando o que haviam compreendido da conversa, manipulando o livro na tradução já referida e também em outras línguas, como o inglês e o italiano, já que a quantidade de edições existentes da mesma foi destacada durante a aula. Considerei o processo muito válido, mesmo que reduzido a um par de aulas, já que a unidade onde tal atividade se deu tinha um histórico exacerbado de registro escrito individual e ausência do formato de aulas em roda. As turmas foram participativas apesar de não estarem acostumadas ao formato e, sobretudo, as edições em diferentes línguas despertou interesse geral das crianças.

3.4 – Pedras no caminho: dificuldades e desilusões com o uso de originais

> Um historiador da ciência deve saber línguas. As modernas, para ter acesso à vasta bibliografia que deve percorrer. E de preferência uma ou mais línguas clássicas, para quem pretende se embrenhar nos documentos antigos (ALFONSO-GOLDFARB, 2004, p. 90).

Se tal orientação perpassa a pesquisa na área, ela certamente também tem impactado o trabalho daqueles que pretendem refletir sobre o uso da História da Ciência em processos pedagógicos, do uso de originais e a leitura de mestres como Euclides, Euler ou Hilbert, para citar apenas os utilizados nos tópicos anteriores. A questão em torno da apropriação de línguas estrangeiras permeia a academia brasileira e se mostrou constante durante todas as propostas descritas: da preparação de traduções-livres durante os momentos de uso das obras, a tentativa de fazer os licenciandos lerem trechos em outras línguas – sobretudo em espanhol e inglês –, a carência de edições em português de um conjunto significativo de obras que traduzam o legado de séculos da produção humana na Matemática foi evidente.

Outro aspecto a se refletir é o papel da leitura na formação de matemáticos e professores de matemática. Escutei de praticamente todas as turmas que era a primeira atividade do tipo no curso ou em aulas de matemática, os alunos reconheciam também que não estavam acostumados a trabalhar daquela forma. A conclusão advinda de minhas experiências é que a leitura, a tradução, a análise de um texto costumam sofrer alguma resistência, tanto por alguns grupos de estudantes como de professores, que costumam preferir exercícios padrões e de fácil reprodução. Também não descarto que a dificuldade de interpretação advém, dentre outros fatores, da falta de oportunidades de lerem e interpretarem, de trabalharem com textos nas disciplinas matemáticas do curso ou nas aulas de matemática.

É importante superar a lista de exercícios como único meio ou meio privilegiado da aquisição do legado matemático e das obras de alguns mestres: as fontes originais podem ser um caminho para tanto. Lidar com tais obras também pode apontar uma nova direção quanto à aquisição coletiva deste legado, em detrimento do individualismo que a associação de nomes aos resultados mais famosos pode erroneamente transparecer. Com a tabela que segue, sintetizo tais questões para presentes e futuras reflexões, lembrando que a mesma foi fruto das inquietações apresentadas ao longo deste capítulo e das minhas práticas em sala de aula.

Pontos a considerar ao adotar tal perspectiva nos cursos de Matemática:	
Alguns avanços a se perseguir:	**Os desafios para se implementar:**
• Articular uma perspectiva histórica na formação; • Usar as obras clássicas para considerações interdisciplinares; • Analisar anacronismos na História da Matemática; • Analisar a construção coletiva do conhecimento matemático em detrimento da valorização do gênio individual; • Colocar os mestres ao nível de pares com os quais dialogamos, retomando seu legado escrito e nos colocando como herdeiros desse saber acumulado e reinterpretado.	• Superar o mote da lista de exercício como método privilegiado de acesso às ideias matemáticas; • Formar para a leitura de textos clássicos e históricos da área; • Acesso à traduções e boas edições dos clássicos, preferencialmente as edições comentadas; • Superar a resistência à leitura que por vezes se estabelece como inerente aos cursos da área de exatas; • Convencer dos ganhos que tais leituras acarretam em detrimento da linguagem vista como mais clara, correta e atual dos livros didáticos.

Tabela 9 – Síntese dos pontos a considerar quanto ao uso de fontes originais.

Quanto aos avanços que considero possíveis de alcançar, ao incluirmos fontes originais e as obras de legado importante nas disciplinas de formação, estamos aumentando também o uso da perspectiva histórica ao longo do curso, na tentativa de evitar que esta fique reduzida apenas à disciplina de História da Matemática. A história dessas obras, sua publicação e seus autores bem como o contexto em que elas se deram já propiciam uma maior interdisciplinaridade: no caso de Euclides, a história e a cultura grega, no caso de Euler, o século das luzes e a Física construída a sua época, e quanto a Hilbert, todo o trabalho científico de formalização, axiomatização e matematização de outras ciências que caracteriza a época onde sua obra *Fundamentos de Geometria* foi publicada. Estes são apenas exemplos limitados e que de fato apareceram durante as aulas ministradas, pois estavam historicamente associados ao conhecimento matemático diretamente estudado. Outro exemplo importante foram os outros estudos que influenciaram Hilbert em sua obra: Pasch, Moore, Veronese, matemáticos que são citados nas notas do texto de Hilbert e que durante as aulas foram aprofundados. Moore mostrou que o conjunto de axiomas originais de Hilbert era dependente, demonstrando o quarto axioma do grupo de axiomas de ordem, sendo que este grupo Hilbert aproveitou das contribuições de Pasch – uma das turmas realizou uma pesquisa sobre este último matemático. Sugeriu-se também a leitura complementar de um artigo sobre as contribuições italianas à generalização e axiomatização da Geometria, onde Veronese se destacou. Para maiores detalhes sobre tais exemplos sugerimos a leitura do primeiro capítulo do texto de Hilbert em suas edições em inglês e em espanhol.

Finalmente, a leitura dos mestres, pelo menos para mim, propiciou maior proximidade com estes matemáticos, pensadores ou cientistas. Com Euler, onde foquei minhas leituras durante os últimos semestres, pude depreender sua forma de pensar, certas atitudes diante dos conceitos ou a forma como os explora e, por exemplo, diferenciar estilos matemáticos entre ele e Hilbert. Entre estes dois e Euclides. Por mais que tais diferenças sejam esperadas, ao lidar com seus textos originais, as mesmas alcançaram outro nível de compreensão e de discernimento. Considerei este tipo de aprendizado e de relação com o texto algo de grande valor formativo e a partir daí, acredito, passei a refletir como levar tal formação aos meus alunos.

Quanto aos desafios que se impõe, além da contribuição dada pelas ideias discorridas neste capítulo, considero que talvez a melhor contribuição deste trabalho seja a tradução que consta do anexo C. O que se oferece ali é a experiência de ler diretamente o mestre, a partir de uma tradução feita do original, permitindo experimentar em algum nível o que acabo de descrever.

– Conclusão –

De certa forma, desde os últimos parágrafos do capítulo anterior, já estava em processo de arriscar algumas conclusões sobre a pesquisa que discorri neste trabalho. Por exemplo, alguns aspectos desse texto quanto aos avanços e desafios com a leitura dos originais dos mestres foram sintetizados na tabela 9.

Meu processo pessoal e minhas etapas de leitura, de docência, de amadurecimento das ideias históricas, de tentativas pedagógicas, de releitura e de reflexão, transformaram minha visão do fazer matemático e da prática docente e de pesquisa. Esta seria uma primeira conclusão. As mudanças em minhas práticas atingem o objeto pedagógico do meu trabalho, nos cursos lecionados e nas demais atividades descritas e, com isso, acredito que possa ter impactado alunos, técnicos e licenciandos – embora o tamanho e de que forma tal impacto aconteça esteja além do escopo deste trabalho examinar. Com isso em mente, me indago sobre os caminhos possíveis para alterar de algum modo o estado atual de apropriação da cultura matemática, criando outra impressão em nossos estudantes, uma impressão diferente das apontadas por Avital (1995) e Jones (1995) no início do terceiro capítulo.

E a respeito de Leonhard Paul Euler? Recordo que estava numa viagem, contemplando uma paisagem tranquila quando admirei pela primeira vez as qualidades daquelas *Cartas à princesa*, que tratavam de temas aritméticos, musicais, acústicos, físicos, todos tão intrincadamente como na realidade o são e com uma fluência textual inspiradora. Ao ter essa sensação e percepção, concluí que tinha encontrado algo que gostaria de estudar, aprofundar e discorrer a respeito. Foi a partir daí que um estudo biográfico, levantamento de trabalhos publicados e a leitura de alguns originais do mestre permitiram atribuir-lhe mais um adjetivo: para além do matemático, físico e filósofo, era pertinente sim considerar Euler um teórico musical. Todavia parece que a universalização do Temperamento eclipsou parte das contribuições de Euler que viveu um século que viu a Música perder suas origens de ciência matemática e se aproximar das belas-artes. O desenvolvimento do cravo, passando pelo pianoforte até o piano da era romântica apontou para a necessidade da transposição de notas sem alterações harmônicas e para a engenharia de instrumentos de teclas com menos notas por oitava, Euler não pensava a música assim. Nesse sentido, era um pitagórico que tentava manter vivas as razões básicas perfeitas. Ainda mantinha o interesse nas possibilidades diversas da escala musical, insistindo na introdução de outros fatores primos e de uma quantidade diferente de 12 notas por oitava. É curioso pensar como o século XX retoma esta ideia de alguma forma, quando considera uma pluralidade enorme de escalas, o movimento modernista na música e também eleva as possibilidades a outro nível com os recursos tecnológicos que lhe são característicos.

Esta pesquisa também alertou para a necessidade de buscar fontes originais, boas traduções dos trabalhos de matemáticos proeminentes e de se apropriar dos mesmos para alcançarmos um conhecimento histórico, que leve em conta a história nos contextos formais e não formais de educação.

O que esta pesquisa fez foi olhar de perto um trecho de uma extensa circunferência, tão de perto que se a pode confundir por um momento com um segmento de uma reta tangente, porém dentro da construção coletiva que marca a História e a Matemática, com mais tempo e novos caminhos, o trajeto não-linear dará suas voltas para refletir uma vez mais sobre todos esses aspectos e assumirá seu caráter cíclico. O conhecimento histórico é necessariamente circular, pois conforme a história é recontada, novos documentos são estudados, análises e fontes são incluídas pela historiografia e assim esta reformula o todo em estudo e aponta mesmo para a superação de uma matemática pronta e bem acabada, colocando em cheque a visão de uma matemática única. A introdução da Música enquanto ciência matemática é rica neste sentido, pois valoriza as mudanças pelas quais passaram os agentes artísticos, sociais e estéticos.

– Referências Bibliográficas –

ABDOUNUR, O. J.; BOTTURA, C. B. *From mathematics to music: a numerical journey through sounds*. (RT-MAT 97-01) São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, Fevereiro de 1997.

ABDOUNUR, O. J. *Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados*. São Paulo: Escrituras Editora, 2003.

ALEXANDERSON, G. L. *Ars Expositionis: Euler as writer and teacher*. In: *The genius of Euler: reflections on his life and work*. Dunham, William, ed. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2007.

ALFONSO-GOLDFARB, A. M. *O que é História da Ciência?* Coleção Primeiros Passos. São Paulo: Ed. Brasiliense, 2004.

AVITAL, S. *History of Mathematics can help improve instruction and learning*. In: *Learn from the masters*. Swetz, Frank *et al,* ed. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1995. pp. -.

BIBBY, N. *Tuning and temperament: closing the spiral*. In: *Music and Mathematics: from Pythagoras to fractals*. Fauvel, John *et al,* ed. New York: Oxford University Press, 2003.

BROMBERG, C. *O monocórdio na complexa relação entre Aritmética, Geometria e Física na música*. Anais eletrônicos do 15º Seminário de História da Ciência e da Tecnologia. Florianópolis: 2016.

CALTER, P. A. *Squaring the circle: Geometry in Art and Architecture*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2008.

CARPEAUX, O. M.. *O livro de ouro da história da música: da Idade Média ao século XX*. Rio de Janeiro: Ediouro, 2005.

DU PASQUIER, L. *Leonhard Euler and his friends*. Maine Press Publishing Company, 2008.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Bicudo, Irineu, trad. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EULER, L. *Conjecture sur la raison de quelques dissonances generalement reçues dans la musique*. Scaramazza, Jasen, trad. E314, 1766. Disponível em: http://eulerarchive.maa.org//index.html

EULER, L. *De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis*. Blaine, Larry; Kendall, Douglas, trad. E457, 1773. Disponível em: http://eulerarchive.maa.org//index.html

EULER, L. *Dissertatio physica de sono*. Bruce, Ian, trad. E2, 1727. Disponível em: http://eulerarchive.maa.org//index.html

EULER, L. *Letters of Euler on different subjects in natural philosophy addressed to a german princess, Vol. 1*. Brewster, David, trad. Edinburgh: 1823 (E343). Disponível em: http://eulerarchive.maa.org//index.html

FAZENDA, I. C. A. *Construindo aspectos teórico-metodológicos sobre interdisciplinaridade*. In: *Dicionário em construção: Interdisciplinaridade*. Fazenda, Ivani, org. São Paulo: Cortez Editora, 2ª edição, 2002.

FAZENDA, I C. A. *Interdisciplinaridade-transdisciplinaridade: visões culturais e epistemológicas*. In: *O que é interdisciplinaridade?* Fazenda, Ivani, org. São Paulo: Cortez Editora, 2008.

FELLMANN, E. A. *Leonhard Euler*. Gautschi, E *et al*, trad. Basileia: Birkhauser Verlag, 2007.

GERSTMAN, E.V. *Euler and the history of a certain Musical-Mathematical idea*. In: *Euler and modern science*. Bogoliubov, Nikolai Nikolaevich, *et al*, ed. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2007.

GRANJA, C. E. S. C. *Musicalizando a escola: música, conhecimento e educação*. São Paulo: Escrituras Editora, 2006.

HENRIQUE, L.L. *Acústica Musical*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.

HILBERT, D. *The Foundations of Geometry*. Townsend, E. J., trad. La Salle, Illinous: The Open Court Publishing Co, 1938.

JONES, P. S, The role in the history of Mathematics of algorithms and analogies. In: *Learn from the masters*. Swetz, Frank *et al*, ed. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1995.

LIMA, M. R.; FIGUEIREDO, S. *Exercícios de teoria musical: uma abordagem prática, ampliada e com CD*. São Paulo: Embraform, 2004.

MILIES, C.P.; COELHO, S.P. *Números: uma introdução à Matemática*. São Paulo: EDUSP, 2003.

PEREIRA, D. E. *Correspondências Científicas como uma relação didática entre história e ensino de Matemática: o exemplo das cartas de Euler a uma princesa da Alemanha*. Tese de doutorado (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Rio Grande do Norte, 2014.

PESIC, P. *Euler's Musical Mathematics*. In: *Years Ago, Volume 35, No. 2*. Rowe, David, ed. New York: Springer Science + Business Media New York, 2013.

POLYA, G. *Mathematics and plausible reasoning: induction and analogy in Mathematics, Vol. 1*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1954.

SETHARES, W. A. *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*. Springer Science & Business Media, 2nd Edition, 2005.

SIU, M. *Euler and Heuristic Reasoning*. In: *Learn from the masters*. Swetz, Frank *et al*, ed. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1995.

RICHESON, D. S. *Euler's Gem: the polyhedron formula and the birth of topology*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2008.

ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

WOLLEMBERG, S. Music and mathematics: an overview. In: *Music and Mathematics: from Pythagoras to fractals*. Fauvel, John *et al*, ed. New York: Oxford University Press, 2003.

– ANEXO A –

A incompatibilidade entre os ciclos

Na tabela 4 da seção 1.3 do primeiro capítulo foram sintetizadas as frações da corda que geram os sons do ciclo das oitavas quanto ao ciclo das quintas, calculados em função de uma medida genérica k da corda. A tabela exibia uma quantidade finita de valores fracionários e decimais para ambos os ciclos e visava convencer que os mesmos eram *incompatíveis*, no sentido que não existe uma fração da corda original k comum a ambos os ciclos. Tal percepção pelos antigos e medievais levou a definição da coma pitagórica e subsequentes desenvolvimentos nas escalas e na harmonia ocidental. De um ponto de vista matemático, os ciclos se traduzem como:

- o ciclo das oitavas é uma PG (Progressão Geométrica) de primeiro termo $x_1 = k$ e de razão $r_o = \frac{1}{2}$;
- o ciclo das quintas é uma PG de primeiro termo $y_1 = k$ e de razão $r_q = \frac{2}{3}$.

Assim, a referida incompatibilidade pode ser reescrita da seguinte forma: considerando os ciclos como as progressões $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, ..., x_m, ...)$ e $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, ..., y_n, ...)$, as mesmas têm um único termo em comum $k = x_1 = y_1$. Para formalizar tal afirmação necessitamos da unicidade da decomposição em fatores primos que é garantida pelo Teorema Fundamental da Aritmética (TFA), cujo enunciado é

> Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou pode ser escrito de forma única, a menos da ordem dos fatores, como um produto de primos.[78]

Vejamos como tal resultado da teoria dos números pode ser utilizado para demonstrar a incompatibilidade dos ciclos. O argumento é feito supondo por absurdo que existam índices m e n inteiros tais que $x_m = y_n$. Isto é, o termo na posição m do ciclo

---

[78] Conforme o endereço eletrônico http://clubes.obmep.org.br/blog/teorema-fundamental-da-aritmetica/ (consultado em 31/10/2017). Uma formulação mais precisa desse resultado se encontra em MILIES & COELHO, 2003.

das oitavas é igual ao termo na posição *n* do ciclo das quintas: musicalmente significa que a nota alcançada após *m* oitavas e a nota alcançada após *n* quintas seriam exatamente as mesmas, na mesma altura, mesmo comprimento de corda. Logo, temos a seguinte sequência de equações equivalentes:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m .k = \left(\frac{2}{3}\right)^n .k$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{1^m}{2^m} = \frac{2^n}{3^n}$$

$$1^m.3^n = 2^m.2^n$$

$$3^n = 2^{m+n}$$

Essa última igualdade se interpreta como a existência de algum número inteiro que possui duas decomposições em fatores primos, 3^n e 2^{m+n}. Tal fato contradiz a unicidade afirmada no TFA. Logo a hipótese acrescentada de que existiria algum outro termo em comum às PGs está equivocada e os ciclos são incompatíveis – podemos observar ainda que a sentença $3^n = 2^{m+n}$ só se torna verdadeira se tomarmos tanto *m* quanto *n* valendo zero, o que resultaria no primeiro termo *k* de ambas as progressões, valor que para o fechamento dos ciclos não nos interessa.

De forma análoga o TFA justifica que os demais ciclos – das quartas, das terças, das sextas – também são incompatíveis com o ciclo das oitavas, o que leva ao fato de que qualquer escala (finita) deverá abrir mão de algum intervalo puro.

– ANEXO B –

A média subcontrária é menor que a média aritmética?

Como complemento ao tópico que tratou de Arquitas e seus cálculos musicais utilizando médias aritméticas e subcontrárias (harmônica), mostraremos que a primeira resulta sempre maior que a segunda quando calculadas para os mesmos valores positivos x_1 e x_2. Uma vez que no contexto da construção aritmética do intervalo de terça as medidas das cordas são valores positivos, podemos assumir que $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$. Assim, chamando de

A: média aritmética de x_1 e x_2; e

H: média subcontrária (harmônica) de x_1 e x_2.

Onde, tais médias estão definidas como os seguintes cálculos:

$$A = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2} \Rightarrow H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}.$$

Observe que H, após o cálculo do denominador comum e o quociente entre as frações, também pode ser calculado como

$$H = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}.$$

No que segue demonstramos que $A \geq H$ a partir do fato conhecido que qualquer número real elevado ao quadrado é maior ou igual a zero.

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0$$

$$x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} \geq 2x_1x_2$$

$$x_1^{\ 2} + 2x_1x_2 + x_2^{\ 2} \geq 4x_1x_2$$

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2$$

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \geq x_1x_2 \qquad \text{(já que 4 > 0)}$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \geq x_1x_2$$

$$A^2 \geq x_1x_2$$

$$\frac{1}{A}A^2 \geq \frac{1}{A}x_1x_2 \ \text{(sendo A positivo, também o é o inverso } \frac{1}{A}\text{)}$$

$$A \geq \frac{2}{x_1 + x_2}x_1x_2$$

$$A \geq \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}$$

$$A \geq H$$

– ANEXO C –

Tradução do *Conjecture*

Durante a análise das atividades que surgiram como produto da leitura dos originais de Euler ou mesmo de outros matemáticos, foi constante a questão do acesso a tais originais para serem fruídos diretamente, sejam por alunos, licenciandos ou mesmo outro tipo de público. A maior dificuldade observada quanto ao acesso é o domínio de línguas estrangeiras nas quais o original foi publicado ou para as quais o mesmo dispõe de uma boa tradução. Diante da carência deste tipo de fonte na língua portuguesa e visando contribuir para tal questão, oferecemos, neste terceiro anexo, uma tradução, feita diretamente do original em francês, com apoio na tradução feita para o inglês, por Jason A. Scaramazza – do *Conjecture* de Euler. Tanto o original quanto a tradução para o inglês estão publicamente disponibilizada no *The Euler Archive*, que ainda nos informa que o *Conjecture* está catalogado como E314 e foi originalmente publicado nas *Mémoires de l'academie des sciences de Berlin* 20, 1766, pp. 165-173.

A seguir a tradução feita a quatro mãos, onde Thiago Feitosa trabalhou em cima do original de Euler em francês e este que vos escreve trabalhou em cima da versão em inglês e como revisor técnico da versão final. Assim sendo, faz-se correto dar os créditos da tradução a Feitosa e a mim os créditos de revisor técnico.

Introdução à tradução (de Jasen A. Scaramazza):

Neste *paper*, Euler se refere ao estudo das notas por “números”. Poderia ser ambíguo ao menos que faça saber que a afinação com a qual ele trabalha é conhecida por “entonação justa” em uma escala diatônica. Este tipo de afinação força que as frequências das notas ocorra em razões entre pequenos números inteiros. Esta forma específica de entonação justa empregada por Euler toma C com o a frequência mais baixa, logo que pode ser pensada como sendo 1. Além disso, toma F-A-c, C-E-G e G-B-d como “terças maiores justas”. Em uma terça maior justa, a razão da frequência da segunda nota para a da primeira é 5:4 (terça maior), e da terceira para a primeira 3:2 (uma quinta perfeita). Quando os números são trabalhados, as duas primeiras oitavas de notas expressas como a razão para o C mais baixo (ignorando sustenidos e bemóis) são as seguintes:

C	*D*	*E*	*F*	*G*	*A*	*B*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*
1	*9/8*	*5/4*	*4/3*	*3/2*	*5/3*	*15/8*	*2*	*9/4*	*5/2*	*8/3*	*3*	*10/3*	*15/4*

Presumivelmente para evitar lidar com frações, ele dá um passo adiante e multiplica todas as razões por 24 visando obter os números inteiros:

C	*D*	*E*	*F*	*G*	*A*	*B*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*
24	*27*	*30*	*32*	*36*	*40*	*45*	*48*	*54*	*60*	*64*	*72*	*80*	*90*

Há também um tipo de afinação que ele compara à entonação justa chamada “temperamento igual de 12 notas”. Nesta afinação, todas as 12 notas de uma oitava estão uniformemente espaçadas. Uma oitava apareceria como:

C	*C#*	*D*	*D#*	*E*	*F*	*F#*	*G*	*G#*	*A*	*A#*	*B*	*C*
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2^2}$	$\sqrt[12]{2^3}$	$\sqrt[12]{2^4}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^6}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[12]{2^8}$	$\sqrt[12]{2^9}$	$\sqrt[12]{2^{10}}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	*2*

Neste tipo de afinação, todos os intervalos estão tecnicamente um pouco desafinados, mas se aproximam muito ao que os intervalos deveriam ser e são percebidos pelos ouvidos como tais. Esta afinação tem a vantagem de modular entre diferentes tons sem perder o som preciso da música. Imperfeições em entonações justas (como o inevitável problema na terça menor mencionado por Euler) são eliminadas. A maioria dos instrumentos ocidentais atuais é afinada desta forma, inclusive aqueles de grupos orquestrais e pianos residenciais.

São estas razões que Euler considera ao discutir afinações. Neste *paper*, ele foca sua atenção na oitava iniciando em *G* de razão 36 até o próximo *g* de razão 72. Antes de ler, é importante saber que nos escritos de Euler, quando razões são expressas em frações, a frequência mais baixa divide a mais alta, mas quando estão escritos explicitamente o menor número vem antes. Por exemplo, “9/4” é equivalente a “4:9” ou “4 para 9”.

Ao traduzir este pequeno *paper* sobre dissonâncias musicais, eu tentei preservar o tom original (castigo não pretendido, mas desfrutado) de Euler ao mesmo tempo em que fazê-lo compreensível em linguagem moderna. Qualquer ambiguidades, hipóteses não explicadas, ou termos e frases que necessitam de um conhecimento musical prévio são esclarecidas em notas de rodapé em itálico ao fim de cada seção[79]. Bom proveito!

[79] Nota do revisor: nesta tradução as próximas 22 notas de rodapé feitas por Jasen A. Scaramazza.

CONJECTURA

ACERCA

DA RAZÃO DE ALGUMAS DISSONÂNCIAS

GERALMENTE ASSIMILADAS NA MÚSICA,

PELO SR. EULER.

I.

O acorde de sétima, e aquele que resulta da sexta junto à quinta, são empregados na música com tanto êxito, que não se ousaria duvidar de sua harmonia ou de sua capacidade em agradar. É verdade que os classificamos junto à classe das dissonâncias, mas é necessário convir, que essas não diferem das consonâncias que pelo fato dessas últimas serem contidas em proporções mais simples que se apresentam mais facilmente ao entendimento; enquanto, que as dissonâncias são contidas em proporções mais complicadas e, portanto, mais difíceis de compreender. Não é senão pelo grau[80] que as dissonâncias se diferenciam das consonâncias e é necessário, que essas e aquelas sejam perceptíveis ao espírito. Numerosos sons, que não teriam qualquer relação perceptível entre si, fariam um barulho confuso e absolutamente intolerante na música. Por isso, é certo que as dissonâncias que eu tenho visto contêm proporções perceptíveis, sem as quais não seriam admitidas na música.

2. Ora, exprimindo em números os sons que formam o acorde de sétima ou da sexta com a quinta, nós obtemos proporções tão complicadas que parece praticamente impossível que o ouvido possa apreciá-los: em todo caso, há acordes bem menos complicados que foram banidos da música pela razão de que o espírito não saberia perceber-lhes as proporções. Aqui tendes o acorde de sétima expresso em números[81]:

G,	H,	*d*,	*f*,
36	45	54	64

[80] Isto é, por (intervalos de) tons. (SCARAMAZZA: degree)

[81] Neste texto, Euler se utiliza da notação germânica para notas. Usa *H* em lugar do nosso *B* e *B* em lugar do nosso B^b (B bemol).

Ora o menor número divisível por esses é 8640, ou em fatores $2^6 \times 3^3 \times 5$, que eu nomeio o expoente de tal acorde, e é pelo qual é possível julgar a facilidade com que o ouvido pode compreender este acorde. O outro acorde[82] é representado assim:

H,	*d*,	*f*,	*g*,
45	54	64	72

Cujo expoente é o mesmo.

3. É difícil de acreditar que o ouvido possa distinguir as proporções entre esses dois grandes números, e a dissonância não aparenta ser tão forte para exigir tão alto grau de habilidade. De fato, se o ouvido percebe tal expoente tão composto, ao se adicionar ainda outros sons compreendidos no mesmo expoente, a percepção não deveria tornar-se mais difícil. Pois bem, sem sair desta oitava, o expoente $2^6 \times 3^3 \times 5$ contem ainda os fatores 40, 85, 60, aos quais correspondem os sons A, *c*, *e*, de sorte que nós temos o acorde

G	A	H	*c*	*d*	*e*	*f*
36	40	45	48	54	60	64

que deveria ser igualmente agradável ao ouvido, qual o proposto. Entretanto, todos os músicos concordaram que essa dissonância seria insuportável; seria necessário, portanto, ter o mesmo julgamento da dissonância proposta, ou bem se dizer que ela se desvia das regras da harmonia, estabelecidas na Teoria da Música.

4. É o som *f* que perturba tais acordes tornando seus expoentes tão complicados e é ele também que faz da dissonância o pecado dos músicos. E só é preciso omitir esse som, sendo os números dos demais divisíveis por 9, e o acorde

G	H	d
4	5	6

dá a consonância agradável e perfeita, conhecida sob o nome de tríade harmônica[83], cujo expoente é $2^2 \times 3 \times 5 = 60$, e, portanto, 144 vezes menor que o anterior. Do que parece que a adição do som *f* arruína excessivamente a bela harmonia dessa consonância para que possamos conceder-lhe um lugar na música. Contudo, ao julgamento do ouvido essa consonância não é desagradável e dela nos servimos na

[82] Trata-se do acorde com a quinta e a sexta juntas, conhecido como a *tríade com sexta*. Euler trata, especificamente, da tríade de B menor com sexta.

[83] Comumente conhecida como a tríade maior, neste caso a de G Maior.

música com grande sucesso; parece mesmo que a composição musical adquire certa força, sem a qual seria muito uniforme. Atentai então a este grande paradoxo, no qual a teoria aparenta estar em contradição com a prática, dele eu tentarei vos dar uma explicação.

5. O Sr. d'Alembert[84], em seu tratado à cerca da composição musical, aparenta ser de mesmo sentimento a respeito dessa dissonância, que lhe parecia exageradamente grosseira em si mesma e em segundo os princípios da harmonia, entretanto, ele crê que se trata de outra circunstância totalmente particular que a faz ser tolerada na música. Ele observa que não empregamos este acorde G, H, *d*, *f* exceto quando a composição se relaciona no tom C e ele acredita que lhe adicionamos o som *f* para deter a atenção dos ouvintes a este tom, a fim de que eles não imaginem que a composição teria passado ao tom G, no qual o acorde G, H, *d* é a consonância principal. Seguindo essa explicação, não é, portanto, por nenhum princípio da harmonia que utilizamos a dissonância G, H, *d*, *f*, mas unicamente para advertir aos ouvintes, que a peça que tocamos deve ser relacionada ao tom C. Sem essa preocupação, poderíamos nos enganar e acreditar que a harmonia deveria ser relacionada ao tom G. Pela mesma razão, ele diz, que ao empregarmos o acorde F, A, *c* nós a ele adicionamos o som *d*, que é a sexta em F, intencionando que os ouvintes não pensem que a peça teria passado ao som F.

6. Eu duvido fortemente que essa explicação seja apreciada por todos; ela me parece demasiadamente arbitrária e afastada dos verdadeiros princípios da harmonia. Se fosse absolutamente necessário que cada acorde representasse o sistema inteiro de sons que o tom que tocamos engloba, teríamos que empregá-los todos de uma só vez; mas, isso seria sem oposição um efeito horrível na música. Contudo, a dúvida continua em sua inteira força, visto que o acorde G, H, *d*, *f* escutado isolado, sem estar ligado a outros, não choca tanto os ouvidos, como seria de se esperar em função dos grandes números que em si ele encerra[85]. É certo que a maior parte dos ouvidos não é capaz de perceber proporções tão complicadas, não obstante, vemos que praticamente todos têm

---

[84] Trata-se do matemático e físico francês Jean le Rond d'Alembert.
[85] Tais razões dão origem ao elevado expoente 8640.

esse acorde por suficientemente agradável. Trata-se, portanto, de se descobrir a causa física deste fenômeno paradoxal.

7. Para tal efeito, faço observar de início a necessidade de distinguir as proporções que nossos ouvidos percebem efetivamente daquelas que os sons expressos em números encerram. Nada acontece com mais frequência na música que do ouvido sentir uma proporção bem diferente daquela que subsiste com efeito entre os sons. No temperamento igual, no qual todos os 12 intervalos de uma oitava são iguais, não existem consonâncias exatas, excetuadas, elas sozinhas, as oitavas[86]; a quinta é expressa pela proporção irracional de 1 a $\sqrt[12]{2^7}$, que é um pouco diferente daquela de 2 a 3. No entanto, ainda que um instrumento seja tocado segundo essa regra, o ouvido não é ferido por essa proporção irracional[87] e ao escutar o intervalo C: G não deixa de perceber uma quinta cuja proporção é de 2 a 3. E se fosse possível ao ouvido sentir a verdadeira proporção dos sons, ele disso ficaria muito mais perturbado que ao escutar a mais forte dissonância, como a da falsa quinta[88].

8. Por essa razão fazemos que no temperamento harmônico[89], onde os sons de uma oitava são expressos por números junto a algumas quintas não perfeitas, o ouvido as tome como sendo. Assim, o intervalo[90] de B a *f*, estando contido na proporção de 675 a 1024, ultrapassa a proporção de uma verdadeira quinta de 2 a 3, do intervalo[91] $\frac{2048}{2025}$, contudo, o ouvido o distingue dificilmente de uma quinta exata. De mesma forma, o intervalo de A a *d* contem a proporção de 20 a 27, que o ouvido confunde com aquela

[86] Isto quer dizer que apenas todos os intervalos de oitava se expressam por razões entre inteiros. Quando Euler escreve “temperamento igual” está a discutir o que se conhece como “temperamento igual de 12 tons” (12 TET), atualmente a mais difundida afinação da música ocidental, em detrimento da entonação justa de sua época.

[87] Apenas no sentido matemático da palavra. Na verdade, há uma explicação muito racional para as estranhas razões presentes na afinação 12 TET.

[88] Em termos modernos, o “trítono”, um intervalo extremamente dissonante obtido ao fazer soar junto a tônica uma quinta diminuta.

[89] “Temperamento harmônico” parece ser usado como sinônimo de “temperamento justo”.

[90] Lembre-se que B, para Euler, corresponde à nota B*b*.

[91] Tais pequenas proporções (quase iguais a 1) são apenas razões entre as proporções das notas executadas e aquelas percebidas pelo ouvido. Aqui temos a expressão 1024/675 dividido por 3/2 = 2048/2025. Porque essa razão é quase igual a um, dificilmente se percebe a diferença entre as entonações.

de 3 a 4, embora a diferença seja uma *Comma*[92], expresso pela proporção 80:81. Peguemos também o intervalo[93] de G*s* a *c*, cuja proporção é 25: 32, por uma terça maior ou a proporção 4: 5, não obstante a diferença de 125 a 128. E eu duvido fortemente que ao escutar o acorde *d: f*, o ouvido perceba a proporção de 27 a 32 antes que aquela de 5 a 6, que é sem questão mais simples.

Tendes abaixo o sistema ordinário[94]:

F	- -	2^9	=	512
F*s*	- -	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$	=	540
G	- -	$2^6 \cdot 3^2$	=	576
G*s*	- -	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$	=	600
A	- -	$2^7 \cdot 5$	=	640
B	- -	$3^3 \cdot 5^2$	=	675
H	- -	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	=	720
c	- -	$2^8 \cdot 3$	=	768
cs	- -	$2^9 \cdot 5^2$	=	800
d	- -	$2^5 \cdot 3^3$	=	864
ds	- -	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	=	900
e	- -	$2^6 \cdot 3 \cdot 5$	=	960
f	- -	2^{10}	=	1024

9. Está, portanto, suficientemente provado que a proporção percebida pelos sentidos é frequentemente diferente daquela que subsiste verdadeiramente entre os sons. Todas as vezes em que isso acontece, a proporção percebida é mais simples que a real e a diferença entre elas é tão pequena que escapa à percepção. O aparelho auditivo está acostumado de tomar por uma proporção simples todas as proporções que dela não diferenciem que um pouco, de tal maneira que a diferença seja quase imperceptível. Ora, quanto mais uma proporção é simples, mais nosso sentimento é sensível e mais distingue pequenas aberrações: é a razão pela qual não suportaríamos quase que nenhuma aberração nas oitavas, pela qual pretendemos que todas as oitavas sejam exatas e que elas não se afastam sequer ligeiramente da razão dupla. Todavia, mesmo se em um concerto algumas oitavas fossem aproximadamente a centésima parte de um

---

[92] Aqui Euler se refere a *comma* conhecida como *"comma sintótica"*, que se trata em realidade de um intervalo perceptível de razão 81/80.

[93] Nos escritos de Euler G*s* equivale ao atual G#, pronunciado "G-sustenido".

[94] Este "sistema" é a afinação das notas na entonação justa à época de Euler. Com o C baixo não listado com frequência de 384 se pode associar tais frequências com as frações do prefácio.

tom[95] muito altas ou muito baixas, eu duvido fortemente que o mais delicado ouvido disso se apercebesse, parece antes que sofremos ainda uma maior aberração sem que os ouvidos se sintam feridos.

10. Nas quintas podemos sofrer com uma maior aberração; os músicos convêm que essa aberração, que o temperamento igual encerra, é absolutamente imperceptível: ora o erro nela ascende à centésima parte de um tom[96]. No temperamento harmônico há quintas que diferem de um *comma* da razão dupla, e o *comma* vale aproximadamente a décima parte de um tom[97] expresso pela razão de 8 a 9. Por esse motivo essa diferença é sensível, e parece ter determinado a maior parte dos músicos a escolher o temperamento igual, no qual o erro é 10 vezes menor. Talvez a metade ou o terço de um *Comma* ainda seria suportável nas quintas. Nas terças maiores, cuja precisa medida é a razão de 4 a 5, o temperamento igual se distancia de dois terços de um *comma*, e nas terças menores não distinguimos por um *comma* inteiro; visto que o temperamento harmônico contem duas espécies dessa terça, uma expressa pela razão 5 a 6 e a outra por 27 a 32, confundimos comumente na prática, embora a diferença seja um *comma*.

11. Contudo, não poderíamos aqui firmar limites; a coisa depende da sensibilidade dos ouvidos e bem verdade é que ouvidos aguçados e delicados distinguem diferenças menores que ouvidos grosseiros. Se os homens tivessem a audição tão exata que lhes fosse permitido distinguir as menores aberrações, o que seria feito de toda a música? Pois, onde encontraríamos músicos capazes de executar todos os sons com tanta exatidão, de modo a não haver qualquer aberração? Praticamente todos os acordes pareceriam a esses homens como as mais insuportáveis dissonâncias, ao passo que ouvidos menos delicados os tomariam perfeitamente por bem harmonizados. Portanto, é uma grande vantagem para a música prática que o sentido da audição não se eleve ao mais alto grau de perfeição e que perdoe generosamente os pequenos defeitos

---

[95] Parece-me que uma “centésima par de um tom” refere a quanto a razão entre a verdadeira proporção e a proporção percebida desvia de 1. Se o desvio é 0,01, isto é a razão é 1,01, então a diferença entre ambos é de uma centésima parte de um tom.

[96] O cálculo aqui é 1027/675 dividido por 3/2 = 2048/2025 = 1,011358... Note a aproximação 0,01 ou um centésimo de tom.

[97] O cálculo aqui é 9/8 dividido por 81/80 = 1,11111... Note a aproximação 0,1 ou a décima parte de um tom.

na execução. É igualmente certo que quanto mais o gosto dos ouvintes é esmerado, mais também deve ser exata a execução; enquanto que ouvintes cujo gosto é menos delicado se contentam de uma execução mais grosseira.

12. Quando a proporção real entre os sons que ouvimos é suficientemente simples, como 2: 3, ou 3: 4, ou 4: 5, a proporção percebida é também a mesma para todos os ouvidos. Mas, quando a proporção real é muito complicada, de modo que se aproxime bastante de uma proporção simples, então, o ouvido perceberá essa proporção simples sem se dar conta da pequena aberração da real. Assim, escutando dois sons na razão de 1000 a 2001, os tomaremos por uma oitava, ou então a proporção percebida será 1 a 2 exatamente. De mesma forma, dois sons na razão de 200 a 301, ou de 200 a 299, provocarão o sentimento de uma quinta perfeita e, geralmente, para quaisquer números que os sons sejam expressos, se as proporções são demasiadamente complicadas, o ouvido os substituirá por outros muito próximos cujas proporções são mais simples. É dessa maneira que as proporções percebidas são diferentes das reais, e é por aquelas que se deve julgar a verdadeira harmonia e não por estas.

13. Portanto, quando escutamos este acorde G, H, *d*, *f* expresso por estes números 36, 45, 54, 64, um ouvido perfeito compreenderá bem as proporções contidas nesses números; mas, ouvidos menos perfeitos, aos quais a percepção dessas proporções é muito difícil, tratarão de substituir por outros números que dêem proporções mais simples. Nada será alterado nos três primeiros sons G, H, *d*, já que eles encerram uma consonância perfeita; mas, eu sou levado a crer que os ouvidos substituirão no lugar do último 64 aquele de 63, intencionando que todos os números sejam divisíveis por 9, que as relações de nossos quatro sons sejam agora expressas por esses números 4, 5, 6, 7 cuja percepção é sem dúvida menos dificultosa. De fato, se nos apresentassem esses dois acordes, um contido nos números 36, 45, 54, 64 e o outro nestes 36, 45, 54, 63, seria necessário um ouvido extremamente delicado para distingui-los, a menos que ele os escute de uma só vez, mas, afora esse caso, esses dois acordes causariam a mesma impressão.

14. Acredito, então, que ao ouvirmos os sons 36, 45, 54, 64, pensamos ouvir os sons 36, 45, 54, 63 ou mesmo 4, 5, 6, 7, considerando que o efeito é absolutamente o mesmo[98]. Desconheço se a razão exposta a seguir é suficiente para provar minha intuição: se o ouvido percebesse os primeiros números[99], o acorde não deveria ser perturbado, ainda que nós lhe ajuntemos outros sons contidos no mesmo expoente, como 40, 48 e 60. Ora é seguro que por essa adição o acorde alteraria completamente sua natureza e tornar-se-ia insuportável. Disso eu concluo que o ouvido percebe efetivamente os sons expressos por estes pequenos números 4, 5, 6, 7 cujo expoente não permite qualquer interpolação. Assim, quando ouvimos este acorde de sétima G, H, *d*, *f*, substituímos no lugar do som *f* outro um tanto mais grave, cuja relação para o real é como a de 63 a 64. É verdade que esse intervalo é um pouco maior que um *comma*, mas, negligenciamos frequentemente tão grandes erros, sobretudo, em acordes tão compostos.

15. Parece, portanto, que um acorde tal qual G, H, *d*, *f* não é admitido na música exceto se corresponde aos números 4, 5, 6, 7 e se o ouvido substitui no lugar do som *f* outro um pouco mais baixo na razão de 64 a 63. É o julgamento feito pelo ouvido que atribui a esse som outro valor que ele na verdade não possui; e se em um instrumento musical esse som *f* fosse um pouco mais baixo que segundo as regras da harmonia, eu não duvido que esse mesmo acorde não produziria ainda um melhor efeito. Mas, os demais acordes que precedem, ou seguem, pressupõem a esse som *f* seu valor natural e assim seguirá de modo igual se tivéssemos empregado dois sons diferentes correspondentes aos números 64 e 63, ainda que não seja o mesmo som, mas que seja diferentemente reportado pelo julgamento do sentido[100]. Pode ser que está aqui fundada a regra sobre a preparação e resolução das dissonâncias para advertir aos ouvintes que se trata do mesmo som, ainda que usemos como dois diferentes, afim de que não imaginem que introduzimos um som completamente estranho.

---

[98] Assumo que ele se refere ao efeito de 36, 45, 54, 63 como o mesmo de 4, 5, 6, 7.
[99] Os “primeiros números” são 36, 45, 54, 64, que são os números das verdadeiras notas.
[100] Refere-se que os ouvidos assumem o valor natural de f, 64, em todos os outros acordes exceto o de sétima, mesmo que sua entonação hipotética contenha em realidade 63 para fazê-lo soar melhor.

16. Apoiamos comumente que não nos servimos na música das proporções compostas destes três primeiros números 2, 3 e 5[101]; e o grande Leibnitz já observou que na música não aprendemos ainda a contar para além de 5, o que é tão incontestavelmente verdade nos instrumentos acordados segundo os princípios da harmonia. Mas, se minha conjectura tem espaço, podemos dizer que na composição contamos já até 7, e que o ouvido a isso está já acostumado: trata-se de um novo gênero de música que começamos a utilizar e que permaneceu desconhecido aos antigos. Nesse gênero, o acorde 4, 5, 6, 7 é a mais completa harmonia, já que contem em si os números 2, 3, 5 e 7; mas, é tão mais complicado que o acorde perfeito no gênero comum, o qual não contem que os números 2, 3 e 5. Se for uma melhora na composição, trataremos, é provável, de elevar os instrumentos ao mesmo grau.

DU

[101] Uma afirmação estranha na qual passei grande parte de tempo pensando. Não estou certo do que ela signifique, mas caso alguém tenha sugestões entre em contato. Eu acredito que seu significado seja que os intervalos não estão exatamente afinados.

– Anexo D –

Oficina *Analisando sons, ritmos e escalas musicais matematicamente*

A seguir reproduzimos a oficina *Analisando sons, ritmos e escalas musicais matematicamente*. Proposta para a 5ª Semana de Ciência e Tecnologia de Guarulhos (SEMCITEC) em outubro de 2016, aos interessados, autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste material por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

OFICINA: Analisando sons, ritmos e escalas musicais matematicamente

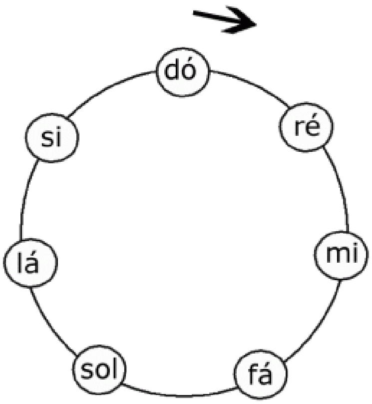
Resumo: Monocórdio	**Nome antigo**	**Medida da Corda**	**Fração da corda k**	**Nome da Nota[102]**
Uníssono[103]	-	k	1	Dó
Intervalo de oitava	Diapason	$\frac{1}{2}k$	$\frac{1}{2}$	Dó
Intervalo de quinta	Diapente	$\frac{2}{3}k$	$\frac{2}{3}$	Sol
Intervalo de quarta	Diatessaron	$\frac{3}{4}k$	$\frac{3}{4}$	Fá

1 - Considerando que é possível atribuir um número a cada nota musical a partir da medida da corda que gera tal nota, calcule:

a) a medida da corda que gera a *quinta* (*diapente*) de uma nota que mede 51 cm. Que fração foi utilizada neste cálculo?

b) a medida da corda que gera a *quarta* (*diatessaron*) de uma nota que mede 12 cm. Que fração foi utilizada neste cálculo?

2 - Completando a escala pitagórica: sabendo que é possível obter o intervalo de quinta tomando dois terços da corda, calcule o *ciclo das quintas* e preencha a tabela abaixo. Use o círculo das notas musicais no sentido horário para descobrir o nome da nota (conte de 5 em 5).



Nota	**Fração da corda**
Dó	1
Sol	$\frac{2}{3}$
Ré	

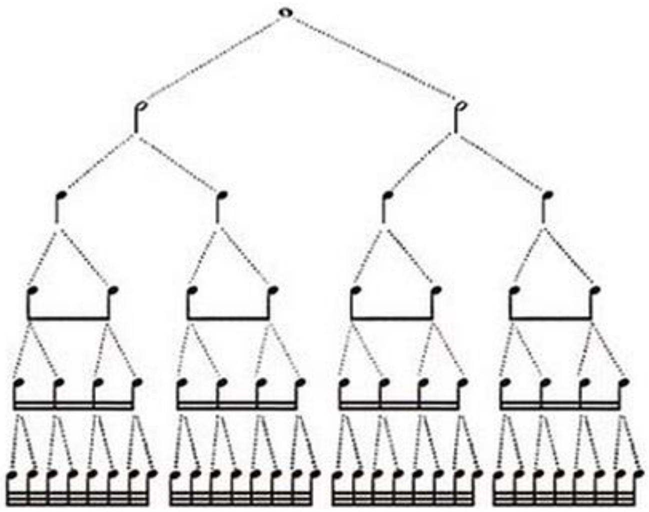
Note que várias das notas obtidas no ciclo da quinta são mais agudas que o diapason (oitava). Uma vez obtida determinada nota musical é possível tomar notas com

102 Nomenclatura moderna de acordo com a escala de Dó.

103 Harmonia de várias vozes ou vários instrumentos que fazem ouvir o mesmo som; conjunto de sons cuja entoação é *absolutamente* a mesma. A partir de tal definição para o uníssono, podemos afirmar que dois ou mais sons relacionados entre si por intervalos de oitavas constituem um conjunto de sons cuja entoação é *relativamente* a mesma.

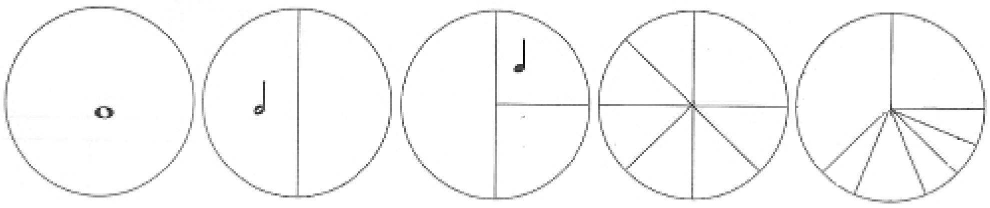
o mesmo nome utilizando a fração meio. Multiplicar por meio nos leva à nota oitava mais aguda e dividir por meio volta uma oitava mais grave.

3 - Acompanhe o raciocínio dado pela subdivisão das figuras musicais abaixo:



a) Qual fração melhor se associa com o tipo de subdivisão sugerida pela figura ao lado?
b) Quantas figuras do tipo ♩ são necessárias para termos uma figura do tipo 𝅝 ? Expresse essa situação também na forma de fração.
c) Um ponto na frente de uma figura musical aumenta em 50% sua duração. Assim, quantas figuras do tipo ♪ são necessárias para termos uma figura do tipo ♩. ?

4 - Utilizando as relações estabelecidas acima, complete cada fatia de pizza (setor circular) com a figura musical correta:



5 - Sabendo que dados os números *a* e *b*, as médias aritmética *A* e harmônica *H* se calculam, respectivamente, por

$$A = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

a) Calcule a **média harmônica** entre a nota *k* e sua oitava.
b) Calcule **a média aritmética** entre a nota *k* e sua oitava.
c) O que é possível concluir a partir dos cálculos anteriores?

6 - Descobrindo a terça de Arquitas de Tarento (428 a.C – 347 a.C) e as tríades:

a) Calcule a média harmônica entre a nota *k* e sua quinta.
b) Calcule a média aritmética entre a nota *k* e sua quinta.

7 - Umas das principais consequências da *Lei de Ohm* – em homenagem a George S. Ohm (1789 - 1854) – é a possibilidade de relacionar o tamanho da corda vibrante com a frequência do som gerado como grandezas inversamente proporcionais.

a) Explique com suas palavras ou algebricamente o que o enunciado acima quer dizer em termos da relação existente entre tamanho da corda e frequência.
b) O que ocorre com a frequência de uma nota quando tomamos sua oitava?
c) O que ocorre com a frequência de uma nota quando tomamos sua quinta?
d) O que ocorre com a frequência de uma nota quando tomamos sua quarta?
e) O que ocorre com a frequência de uma nota quando tomamos a sua *terça maior de Arquitas*?

8 - Usando os conhecimentos proporcionados pela Lei de Ohm e as respostas dadas no exercício anterior, calcule as frequências pedidas de forma a completar a tabela que segue:

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
24	27				40	45	

9 - De acordo com Leonhard Euler (1707 – 1783) seria possível atribuir uma hierarquia entre os intervalos e acordes musicais a partir de um coeficiente numérico que o mesmo batizou de *expoente de um acorde*. Euler propôs que tal coeficiente se calcularia tirando o MMC das frequências das notas envolvidas. Quanto menor o resultado do expoente, maior a harmonia, maior a consonância, percebida pelos nossos ouvidos. Vamos utilizar a ideia de Euler para comprovar a hierarquia pitagórica proposta para os intervalos de oitava, quinta e quarta. Utilize os valores de frequência dados pela tabela do exercício anterior.

a) Calcule o expoente para as notas dó e dó (oitava acima).
b) Calcule o expoente para as notas dó e sol.
c) Calcule o expoente para as notas dó e fá.
d) O que podemos dizer sobre a hierarquia dos três intervalos baseados nesses cálculos.

10 – Calcule o expoente das tríades maior e menor e do acorde Dó – Fá – Lá. Utilize os valores da tabela do exercício 8 e considere 29 como frequência para a nota Mi bemol.

Oficina Analisando sons, ritmos e escalas musicais matematicamente.
Autor: Guilherme Augusto Vaz
Guarulhos, 18 de Outubro de 2016.