

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT**

REGINA CÁSSIA DE SOUZA ORTEGA

**PROVAS SEM PALAVRAS: UMA PONTE ENTRE A INTUIÇÃO E A LINGUAGEM
MATEMÁTICA**

CURITIBA

2018

REGINA CÁSSIA DE SOUZA ORTEGA

**PROVAS SEM PALAVRAS: UMA PONTE ENTRE A INTUIÇÃO E A LINGUAGEM
MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional da Universidade Tec-
nológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-
UTCT como requisito parcial para obtenção do grau
de Mestre.

Orientador: Profa. Dra. Mari Sano

CURITIBA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

077p Ortega, Regina Cássia de Souza
2018 Provas sem palavras : uma ponte entre a intuição e a
linguagem matemática / Regina Cássia de Souza Ortega.-- 2018.
122 p.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.
Texto em português com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal
do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional, Curitiba, 2018.
Bibliografia: p. 121-122.

1. Matemática - Cartas, diagramas, etc. 2. Matemática -
Estudo e ensino (Ensino fundamental). 3. Matemática - Estudo
e ensino (Ensino médio). 4. Matemática - Linguagem. 5.
Percepção visual. 6. Professores de matemática - Formação.
7. Prática de ensino. 8. Matemática - Dissertações. I. Sano,
Mari, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 22 - 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba - UTFPR
Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 50

A Dissertação de Mestrado intitulada Provas sem palavras: uma ponte entre a intuição e a linguagem matemática, defendida em sessão pública pelo(a) candidato(a) Regina Cássia de Souza Ortega, no dia 18 de abril de 2018, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). Mari Sano - Presidente - UTFPR

Prof(a). Dr(a). André Fabiano Steklain Lisbôa - UTFPR

Prof(a). Dr(a). Diego Mano Otero - UFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 18 de Abril de 2018.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

AGRADECIMENTOS

A Deus, por minha vida e por estar sempre junto de mim nessa caminhada.

Aos meus pais, pelos ensinamentos dados com muito esforço e carinho.

Ao meu irmão, pela amizade.

Ao meu marido Rubens e meus filhos Rubinho e Raíssa, que estiveram sempre ao meu lado incentivando e abdicando de muitos momentos de convívio, com muita compreensão.

Aos colegas e professores do PROFMAT pelo convívio, amizade, companheirismo e colaboração em todos os momentos.

À Sociedade Brasileira de Matemática, que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À minha orientadora, excelente pessoa e professora, por sua didática, paciência, delicadeza, sinceridade, competência e apoio.

RESUMO

de SOUZA ORTEGA, Regina Cássia. Provas sem palavras: uma ponte entre a intuição e a linguagem matemática. 122 p. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018

O presente trabalho tem por objetivo divulgar e explorar as *Provas sem Palavras* no âmbito do Ensino Fundamental e Médio para, posteriormente, servir de possível material de consulta por parte de professores, na busca de melhores métodos de explicação sobre importantes assuntos desenvolvidos em sala. Dessa forma, imagina-se que a compreensão dos alunos através da visualização fortalecerá de maneira significativa a aquisição do conhecimento. Para tanto, são sugeridos diversos temas onde a visualização é desenvolvida e explicada, seja através de relato, seja através de demonstrações matemáticas.

Palavras-chave: Provas sem Palavras. Ensino Fundamental. Ensino Médio.

ABSTRACT

de SOUZA ORTEGA, Regina Cássia. Proofs without words: a bridge between intuition and mathematical language. 122 p. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018

The aim of the present work is to disseminate and explore the *Proof Without Words* in the scope of elementary and high school to be used later as a possible reference material for teachers in the search for better methods of explanation on important subjects developed in the classroom. In this way, it is imagined that students' comprehension through visualization will significantly strengthen the acquisition of knowledge. In order to do so, several themes are suggested where the visualization is developed and explained, either through storytelling or through mathematical demonstrations.

Keywords: Proofs Without Words. Elementary School. High School.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Teorema de Pitágoras	23
Figura 2 – Teorema de Pitágoras I	24
Figura 3 – Teorema de Pitágoras II: Quadrado de Lado $a + b$	25
Figura 4 – Teorema de Pitágoras II: Quadrado Interno de Área c^2	25
Figura 5 – Teorema de Pitágoras III	26
Figura 6 – Soma dos ângulos Internos de um Triângulo	27
Figura 7 – Teorema dos Ângulos Externos de um Triângulo	28
Figura 8 – Soma dos Ângulos dos Vértices de uma Estrela	28
Figura 9 – Soma dos Ângulos dos Vértices de uma Estrela: Triângulo ABF	29
Figura 10 – Soma dos Ângulos dos Vértices de uma Estrela: Triângulo DEG	29
Figura 11 – Soma dos Ângulos dos Vértices de uma Estrela: Triângulo CFG	30
Figura 12 – Quadrado da Soma de Dois Termos	30
Figura 13 – Quadrado da Diferença de Dois Termos	31
Figura 14 – Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos	32
Figura 15 – Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos - <i>GeoGebra</i> I	33
Figura 16 – Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos - <i>GeoGebra</i> II	33
Figura 17 – Completando Quadrados	34
Figura 18 – Áreas Algébricas	35
Figura 19 – Médias	36
Figura 20 – Média Aritmética	37
Figura 21 – Média Geométrica	37
Figura 22 – Média Quadrática	38
Figura 23 – Média Harmônica	39
Figura 24 – Médias através do <i>GeoGebra</i>	40
Figura 25 – Desigualdades Proporcionais	41
Figura 26 – Desigualdades Proporcionais: Prolongamento do segmento CE	41
Figura 27 – Desigualdades Proporcionais: Triângulos BCG e DCE	42
Figura 28 – Desigualdades Proporcionais: Prolongamento do segmento AE	42
Figura 29 – Desigualdades Proporcionais: Triângulos AEF e AHB	43
Figura 30 – Apresentação da Lei dos Senos	46
Figura 31 – Lei dos Senos	46
Figura 32 – Lei dos Senos - <i>GeoGebra</i>	48
Figura 33 – Apresentação da Lei dos Cossenos	48
Figura 34 – Lei dos Cossenos I	49
Figura 35 – Lei dos Cossenos I - <i>GeoGebra</i>	50
Figura 36 – Potência de Ponto	51

Figura 37 – Lei dos Cossenos II	52
Figura 38 – Teorema de Ptolomeu	53
Figura 39 – Lei dos Cossenos III	54
Figura 40 – Lei dos Cossenos III: Trapézio Isósceles $ABCD$	54
Figura 41 – Seno e Cosseno da Soma de Dois Arcos	56
Figura 42 – Seno da Soma de Dois Arcos II - Área do Triângulo	57
Figura 43 – Seno da Soma de Dois Arcos II -	58
Figura 44 – Seno da Soma de Dois Arcos II - Triângulo AEH	59
Figura 45 – Seno da Soma de Dois Arcos II - Triângulo GDH	59
Figura 46 – Seno e Cosseno da Diferença de Dois Arcos	60
Figura 47 – Seno da Diferença de Dois Arcos II	61
Figura 48 – Cosseno da Diferença de Dois Arcos II	62
Figura 49 – Cosseno da Diferença de Dois Arcos II - Triângulos PQR e PQS	63
Figura 50 – Ângulo Inscrito	65
Figura 51 – Arco Duplo	65
Figura 52 – Arco Duplo: Triângulo ACD	66
Figura 53 – Arco Metade	67
Figura 54 – Outras Relações Trigonométricas	70
Figura 55 – Outras Relações Trigonométricas: Triângulos DEF e DGH	71
Figura 56 – Outras Relações Trigonométricas: Triângulos ABD e DFE	71
Figura 57 – Outras Relações Trigonométricas: Triângulos ACE , ABD e DFE	72
Figura 58 – Distância de Ponto a Reta	73
Figura 59 – Funções Crescentes	74
Figura 60 – Funções Decrescentes	74
Figura 61 – Função Inversa - Funções Crescentes	75
Figura 62 – Função Inversa - Funções Decrescentes	75
Figura 63 – Progressão Aritmética - Soma de Inteiros I	77
Figura 64 – Progressão Aritmética - Soma de Inteiros I - <i>GeoGebra</i> I	78
Figura 65 – Progressão Aritmética - Soma de Inteiros I - <i>GeoGebra</i> II	78
Figura 66 – Progressão Aritmética - Soma de Inteiros I - <i>GeoGebra</i> III	79
Figura 67 – Progressão Aritmética - Soma de Inteiros II	79
Figura 68 – Soma de Inteiros Ímpares I	81
Figura 69 – Soma de Inteiros Ímpares I - <i>GeoGebra</i> I	81
Figura 70 – Soma de Inteiros Ímpares I - <i>GeoGebra</i> II	82
Figura 71 – Soma de Inteiros Ímpares II	82
Figura 72 – Soma de Inteiros Ímpares III	83
Figura 73 – Quadrados e Somas de Inteiros I	84
Figura 74 – Quadrados e Somas de Inteiros II	85
Figura 75 – Progressão Geométrica - Soma Infinita I	87

Figura 76 – Progressão Geométrica - Soma Infinita II	88
Figura 77 – Progressão Geométrica - Triângulo EFG	88
Figura 78 – Progressão Geométrica - Soma Infinita II - <i>GeoGebra</i>	89
Figura 79 – Volume de Tronco de Pirâmide de Base Quadrada	89
Figura 80 – Volume de Tronco de Pirâmide de Base Quadrada - <i>GeoGebra</i>	90
Figura 81 – Volume de Pirâmide e de Cubo	91
Figura 82 – Princípio de Cavalieri - Volume de Esfera	92
Figura 83 – Princípio de Cavalieri - Volume de Esfera: Secção de um Hemisfério e da Metade de uma Anticlépsidra	92
Figura 84 – Princípio de Cavalieri - Volume de Esfera: Áreas das Secções	93
Figura 85 – Princípio de Cavalieri - Volume de Esfera: Volume de Semiesfera	93
Figura 86 – Princípio de Cavalieri - Volume de Semiesfera	95
Figura 87 – Princípio de Cavalieri - Volume de Semiesfera: A Secção da Pirâmide é um Quadrado	95
Figura 88 – Princípio de Cavalieri - Volume de Semiesfera: Pirâmide	96
Figura 89 – Princípio de Cavalieri - Volume de Semiesfera: Secção da Pirâmide	96
Figura 90 – Princípio de Cavalieri - Volume de Semiesfera: Secção da Semiesfera	97
Figura 91 – Anel de Guardanapo	98
Figura 92 – Anel de Guardanapo - Coroa Circular	98
Figura 93 – Anel de Guardanapo - Princípio de Cavalieri	99
Figura 94 – Anel de Guardanapo - Triângulos	99
Figura 95 – Atividade - Área de Paralelogramo e Retângulo	101
Figura 96 – Atividade - Área de Retângulo e Triângulo Retângulo - 1º Caso	102
Figura 97 – Atividade - Área de Retângulo e Triângulo Qualquer - 2º Caso	102
Figura 98 – Atividade - Área de Paralelogramo e Triângulo Obtusângulo	103
Figura 99 – Atividade - Área de Trapézio e Triângulo - 1º Caso	103
Figura 100 – Atividade - Área de Trapézio e Triângulo - 2º Caso	104
Figura 101 – Área de Trapézio e Triângulo - <i>GeoGebra</i> I	105
Figura 102 – Área de Trapézio e Triângulo - <i>GeoGebra</i> II	105
Figura 103 – Atividade - Área de Losango, Retângulo e Triângulo - 1º Caso	106
Figura 104 – Atividade - Área de Losango, Retângulo e Triângulo - 2º Caso	106
Figura 105 – Atividade - Área de Coroa Circular	107
Figura 106 – Atividade - Teorema de Pitágoras	108
Figura 107 – Atividade - Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo	109
Figura 108 – Atividade - Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo - <i>GeoGebra</i> I	110
Figura 109 – Atividade - Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo - <i>GeoGebra</i> II	110
Figura 110 – Atividade - Soma dos Ângulos Externos de um Triângulo - <i>GeoGebra</i> I	111
Figura 111 – Atividade - Soma dos Ângulos Externos de um Triângulo - <i>GeoGebra</i> II	111
Figura 112 – Atividade - Ângulos Internos de uma Estrela	112

Figura 113– Atividade - Triângulo ABF de uma Estrela	112
Figura 114– Atividade - Triângulo DEG de uma Estrela	113
Figura 115– Atividade - Triângulo CFG de uma Estrela	113
Figura 116– Atividades - Relações Métricas no Triângulo Retângulo	114
Figura 117– Atividade - Triângulos Retângulos ABC e ABD	115
Figura 118– Atividade - Triângulos Retângulos ABC e DAC	115
Figura 119– Atividade - Triângulos Retângulos ABD e CAD	116
Figura 120– Atividade - Área do Paralelogramo através de Determinantes	117

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	17
1	REPRESENTAÇÕES VISUAIS ATRAVÉS DO TEMPO	19
2	PROVAS SEM PALAVRAS PARA O ENSINO FUNDAMENTAL	23
2.1	Teorema de Pitágoras I	24
2.2	Teorema de Pitágoras II	25
2.3	Teorema de Pitágoras III	26
2.4	Soma dos Ângulos dos Vértices de uma Estrela é 180°	27
2.5	Quadrado da Soma de Dois Termos	30
2.6	Quadrado da Diferença de Dois Termos	31
2.7	Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos	32
2.8	Completando Quadrados	34
2.9	Áreas Algébricas	35
2.10	Médias Aritmética, Geométrica, Quadrática e Harmônica	36
2.10.1	Média Aritmética	37
2.10.2	Média Geométrica	37
2.10.3	Média Quadrática	38
2.10.4	Média Harmônica	38
2.11	Desigualdades Proporcionais	40
3	PROVAS SEM PALAVRAS PARA O ENSINO MÉDIO	45
3.1	Lei dos Senos	45
3.2	Lei dos Cossenos	48
3.2.1	Lei dos Cossenos I	49
3.2.2	Lei dos Cossenos II	51
3.2.3	Lei dos Cossenos III	53
3.3	Senos e Cossenos de Dois Arcos	55
3.3.1	Senos e Cossenos da Soma de Dois Arcos	56
3.3.2	Senos da Soma de Dois Arcos II	57
3.3.3	Senos e Cossenos da Diferença de Dois Arcos	59
3.3.4	Senos da Diferença de Dois Arcos II	61
3.3.5	Cossenos da Diferença de Dois Arcos II	62
3.4	Fórmulas do Arco Duplo	64
3.5	Fórmulas do Arco Metade	66
3.6	Outras Relações Trigonométricas	69

3.7	Distância Entre Ponto e Reta	72
3.8	Monotonicidade de uma Função	73
3.9	Gráficos de Funções Inversas	74
3.10	Progressão Aritmética - Soma de Inteiros	76
3.10.1	Progressão Aritmética - Soma de Inteiros I	76
3.10.2	Progressão Aritmética - Soma de Inteiros II	79
3.11	Progressão Aritmética - Soma de Inteiros Ímpares	80
3.11.1	Progressão Aritmética - Soma de Inteiros Ímpares I	81
3.11.2	Progressão Aritmética - Soma de Inteiros Ímpares II	82
3.11.3	Progressão Aritmética - Soma de Inteiros Ímpares III	83
3.12	Quadrados e Somas de Inteiros I	83
3.13	Quadrados e Somas de Inteiros II	84
3.14	Progressão Geométrica - Soma Infinita	86
3.14.1	Progressão Geométrica - Soma Infinita I	87
3.14.2	Progressão Geométrica - Soma Infinita II	88
3.15	Volume de Tronco de Pirâmide de Base Quadrada	89
3.16	Princípio de Cavalieri	91
3.16.1	Volume de Esfera	92
3.16.2	Volume de Semiesfera	94
3.16.3	Problema do Anel de Guardanapo	98
4	ATIVIDADES PROPOSTAS PARA SALA DE AULA	101
4.1	Atividade (1): Áreas de Figuras Planas	101
4.1.1	Paralelogramo e Retângulo	101
4.1.2	Retângulo e Triângulo	102
4.1.3	Paralelogramo e Triângulo Obtusângulo	103
4.1.4	Trapézio, Triângulo e Retângulo	103
4.1.5	Losango, Retângulo e Triângulo	106
4.1.6	Coroa Circular	107
4.2	Atividade (2): Teorema de Pitágoras	107
4.3	Atividade (3): Ângulos Internos e Externos de um Triângulo	108
4.4	Atividade (4): Soma dos Ângulos Internos de uma Estrela é 180°	111
4.5	Atividade (5): Relações Métricas no Triângulo Retângulo	114
4.6	Atividade (6): Área do Paralelogramo	117
5	CONCLUSÃO	119
	REFERÊNCIAS	121

INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática é uma tarefa difícil na maioria das vezes. Por ser uma matéria altamente abstrata, nem sempre os alunos conseguem compreendê-la. Há vezes que o professor se esforça tentando ensinar através de exemplos do cotidiano, o que mostra que a aplicabilidade ocorre. Não obstante, nem sempre a Matemática a ser ensinada mostra a sua aplicação de imediato. Isso ocorre muitas vezes, principalmente nas etapas de "algebrismo" do Ensino Fundamental, muito embora toda essa álgebra seja de extrema importância e necessidade para todo o desenrolar da Matemática que vem pela frente. Talvez seja nesse ponto que a corrente de estudos sobre *Provas sem Palavras* venha a se desenvolver e tentar se fazer presente.

As *Provas sem Palavras* surgiram da necessidade de mostrar, de uma maneira mais clara, o que determinado conceito, teorema ou fórmula quer dizer, seja através de diagramas, figuras ou animações que, com frequência, têm o poder do convencimento. O seu objetivo é auxiliar o leitor a compreender determinado tema, convencer sobre seus resultados e, por vezes, dar ideia de como provar a sua veracidade. É através da visualização que torna o caminho menos tortuoso e mais elucidativo.

Na realidade, a prática de tentar resolver um problema, seja através de um simples desenho realizado por quem queria se convencer sobre determinado resultado, seja por algum diagrama testado, existe há centenas de anos. Contudo, a expressão *Provas sem Palavras* começou muito mais recentemente, vindo da necessidade da busca de melhor explicação e convencimento visual, além do crescente acesso a computadores, por parte de estudiosos, que criaram melhores visualizações de diagramas e tabelas. O seu precursor foi Roger Nelsen, professor de Matemática desde 1969 no *Lewis and Clark College*, que cresceu em Indiana e recebeu seu título de graduação em Matemática pela *DePauw University*. Roger Nelsen obteve o Ph.D. na *Duke University*, desenvolveu várias *Provas sem Palavras*, publicou mais de 100 artigos, muitos deles na revista *Mathematical Association of America*, e é autor de alguns livros sobre esse tema (NELSEN, 1993), (NELSEN, 2000) e (NELSEN, 2016).

O presente trabalho propõe fazer um estudo intuitivo-pedagógico de algumas *Provas sem Palavras*, de forma a explorar exemplos, mostrar a importância da visualização e melhorar o entendimento na obtenção de resultados. Imagina-se com isso que poderá servir aos professores como material de consulta e preparo antes de trabalhar com seus alunos.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos:

- Representações Visuais Através do Tempo
- *Provas sem Palavras* para o Ensino Fundamental
- *Provas sem Palavras* para o Ensino Médio

- Atividades Propostas para Sala de Aula

O Capítulo 1 trata sobre a visualização matemática ao longo dos anos. Nele também são apresentados diversos pensamentos de pesquisadores que trabalham sobre o assunto.

No Capítulo 2 são abordados 9 diferentes temas com 14 *Provas sem Palavras* aplicados para o Ensino Fundamental. Dentre os conteúdos estão o Teorema de Pitágoras, parte da Álgebra aprendida no 7º ano (como o quadrado da soma e da diferença de dois termos e o produto da soma pela diferença de dois termos), cálculo de áreas e de médias, desigualdades proporcionais, soma de ângulos internos de uma estrela e completamento de quadrados.

No Capítulo 3 são abordados 19 diferentes assuntos com 28 *Provas sem Palavras* aplicados para o Ensino Médio. Dentre esses conteúdos estão vários tópicos da Trigonometria, distância de ponto e reta, funções, progressão aritmética e geométrica e o Princípio de Cavalieri.

No Capítulo 4 são propostas atividades sobre áreas de figuras planas, relações métricas no triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras e ângulos internos e externos de triângulos através do uso de papel colorido ou do *software GeoGebra*.

Em vários momentos são sugeridos *links* onde o leitor terá condições de acompanhar, através de movimento, a prova em questão. Com esses *links*, espera-se que a visualização seja, na medida do possível, aplicada em sala de aula.

Finalmente, a maioria das figuras desse trabalho foram desenvolvidas usando o *software GeoGebra*, como forma de melhor compreensão.

1 REPRESENTAÇÕES VISUAIS ATRAVÉS DO TEMPO

Antes do século XVI a Matemática grega era bastante rigorosa, sendo considerada um obstáculo para o desenvolvimento de novos métodos científicos. A partir da Revolução Científica até, aproximadamente, o início da segunda fase da Revolução Industrial, ou seja, do princípio do século XVI até o início do século XIX, houve uma mudança de pensamento e o interesse passou a ser a resolução de problemas práticos necessários para a época, relacionados ao comércio, à Mecânica e à Astronomia. Essa fase foi marcada por imensa produtividade dentro da Matemática, principalmente na área do Cálculo Diferencial e Integral. Contudo, com a falta de rigor, muitos estudiosos do Cálculo, a começar pelos próprios Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716), tinham dificuldades para explicar certos fundamentos de procedimentos importantes criados por eles próprios (CALAZANS, 2010).

Cabe ressaltar que neste período se fez grandes avanços em estudos que, na Idade Média, ainda estavam sem compreensão. De fato, com a Revolução Científica dos séculos XVI e XVII, a Matemática passou a se interessar com questões práticas e em suas aplicações. Nessa linha de pensamento, não havia muita preocupação com o rigor matemático até o ano de 1780, sendo que entre 1780 e 1800 começaram a surgir algumas publicações neste sentido. Nesse momento da história alguns matemáticos, como Lagrange (1736-1813), começaram a perceber a necessidade de eliminar das suas demonstrações o recurso à visualização de propriedades geométricas (CLÍMACO H.A.; OTTE, 2013).

Já no início do século XIX, os matemáticos tiveram consciência de que a fundamentação matemática passava a ser uma necessidade, caso quisessem realmente que houvesse progresso da área. Assim, a Matemática passou a ter uma forma completamente nova. Neste sentido, Bolzano foi o precursor, pois possuía conhecimento matemático e filosófico. Nenhum outro estudioso da época compreendeu tanto a necessidade de provar analiticamente as afirmações geométricas (CLÍMACO H.A.; OTTE, 2013).

Desta maneira, ocorreu uma notável mudança: a Matemática deixou de servir apenas ao estudo de medidas e cálculos para serem aplicados em outras ciências. Ela se tornou uma ciência independente, com conceitos próprios, fazendo com que a lógica pura ganhasse seu espaço. Devido, em grande parte, a Bolzano, a partir do século XIX a Matemática passou a provar rigorosamente todas as suas afirmações. Passaram a realizar demonstrações analíticas sem o uso da geometria, do espaço ou do tempo, apenas usando como ferramenta a linguagem aritmética, a lógica e a teoria dos conjuntos, tornando-se um padrão, de uma maneira mais formal. Graças a essa mudança, a Matemática se difundiu em todo o mundo e ocorreu um aumento de sua capacidade de generalização, que acabou abrindo as portas para uma série de novas aplicações nas ciências naturais e na indústria (CLÍMACO H.A.; OTTE, 2013).

No entanto, se por um lado se pensava em facilitar a comunicação através da linguagem analítica e das demonstrações rigorosas, tornando-se mundialmente compreensível, por outro ocorreu um distanciamento da linguagem matemática natural, tornando-se uma das maiores dificuldades por parte de professores e de alunos nos tempos atuais.

A partir de 1980, com o surgimento do Construtivismo ¹, a Educação Matemática ganhou espaço. Novas metodologias de pesquisa qualitativa passaram a ser aceitas como importantes ferramentas dentro da Educação Matemática. O pensamento visual, juntamente com a pesquisa qualitativa, passaram a desempenhar um importante papel para a investigação de novos processos de pensamento e no uso de imagens e formas de expressão dentro do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Pouco a pouco, esse processo foi se desenvolvendo e a utilização de diagramas e tabelas passou a ser mais frequente (PRESMEG, 2006).

Nas últimas décadas, com o crescente acesso a computadores, mais pesquisas dentro desta área passaram a ocorrer, principalmente devido à facilidade de desenvolver computacionalmente uma melhor visualização de diagramas e tabelas. Vários trabalhos começaram a ser realizados focando uma dinamização e novas formas de interpretação e de pensamento. Um novo papel surge para a Matemática, onde a visualização se faz presente como uma forma adequada para investigar processos de pensamento de difícil acesso, ligadas ao uso de imagens mentais e formas de expressão associadas na aprendizagem da Matemática. Diante disso, departamentos de Filosofia, Matemática, Informática e Ciência Cognitiva passaram a trabalhar em projetos de pesquisa dedicados ao desenvolvimento de ferramentas visuais para facilitar o entendimento.

Algo importante a considerar a partir deste estudo, que ganha cada vez mais espaço nas pesquisas dessa área, é que representações visuais possam ser usadas não apenas para obter maior facilidade de visualização na Matemática, mas também na sua justificação. Um número cada vez maior de matemáticos e lógicos têm trabalhado com o uso de diagramas e representações visuais que, em geral, facilitam a compreensão de um teorema e sua demonstração, além de inspirar o teorema a ser provado, apontando, por vezes, caminhos para a construção da própria prova. Há um debate em torno de se uma *Prova sem Palavras* realmente se qualifica como uma prova. Hoje há ainda muita controvérsia sobre o papel da representação visual numa demonstração e são muitos os pesquisadores que opinam sobre o tema. Por um lado se colocam os que pensam que as representações visuais são meros facilitadores da compreensão matemática do que se quer provar e, por outro, há os que defendem que as representações visuais têm papel essencial numa demonstração e que podem constituir provas, tornando desnecessária qualquer outra prova tradicional.

Bill Casselman acredita que uma imagem desempenha um papel crucial na demonstração lógica. Segundo ele, "uma *Prova sem Palavras* pode ser pensada como uma "prova" que faz

¹ O Construtivismo é uma corrente de pensamento baseado nos mecanismos de funcionamento da inteligência e a construção do sujeito a partir de sua interação com o meio, ou seja, as estruturas cognitivas do sujeito não nascem prontas, cabendo ao professor a tarefa de criar possibilidades enquanto sujeito mediador da aprendizagem.

uso de representações visuais, ou seja, imagens ou outros meios visuais para mostrar uma ideia matemática, equação ou teorema" (CASSELMAN, 2000).

Peter Borwein e Loki Jørgenson do *Centre for Experimental and Constructive Mathematics*, no Canadá, acreditam que a representação visual possui um papel muito importante na Matemática e que algumas representações visuais podem constituir provas. Por outro lado, eles também afirmam que "as provas visuais bem-sucedidas são raras e tendem a ser limitadas em seu escopo e generalização" (BORWEIN P.; JÖRGENSON, 2001).

Philip J. Davis defende a utilização de imagens, figuras e computação gráfica como parte integrante da prova. Ele muitas vezes vê uma figura como sendo suficientemente explicativa de tal maneira que fazer outra prova seria redundante (DAVIS, 1993).

Jon Barwise e John Etchemendy reconhecem que provas formadas por uma sequência de etapas que chegam a um raciocínio correto contribuem com o desenvolvimento da Matemática, porém acreditam que outras formas do pensamento matemático, como diagramas, gráficos, mapas e imagens, que não se encaixam no modelo tradicional de prova, são negligenciados. Segundo eles, "é possível construir um argumento logicamente sólido e até mesmo rigoroso sobre tais representações visuais". Além disso, afirmam que se a prova utilizando representações visuais contiver de maneira clara as informações apresentadas na conclusão, então a prova é válida. Eles dizem ainda que uma representação visual bem estruturada pode conter informação muito eficiente. Esses autores desenvolveram um programa interativo chamado *Hyperproof* (Hiper-Prova) ², que facilita o raciocínio com objetos e ensina o aluno a trabalhar numa prova manipulando a informação visual e a informação (BARWISE J.; ETCHEMENDY, 1991).

George K. Francis, da Universidade de Illinois, afirma que "o aumento do uso de computação gráfica à pesquisa matemática não elimina a necessidade de rigor na verificação do conhecimento através da visualização" (HANNA G.; SIDOLI, 2006).

Apesar de tudo, alguns poucos filósofos da Matemática dizem que representações visuais podem constituir um método de justificação. James Robert Brown, por exemplo, defende que "figuras isoladas constituem provas do mesmo nível que argumentos tradicionais" (BROWN, 1997) e (BROWN, 1999).

Segundo Richard Palais, professor emérito da Universidade de Brandeis, "a visualização pode mostrar o caminho a uma prova rigorosa", deixando claro que as representações visuais podem ser aceitas como provas legítimas em si mesmas (PALAIS, 1999).

Existe uma discussão sobre provas que "provam", ou seja, que verificam um teorema, que convencem o leitor de que aquilo está certo, e as provas que "mostram", ou seja, que tentam explicar determinada afirmação. Segundo Gila Hanna:

² Disponível em: <https://web.stanford.edu/group/cslipublications/cslipublications/site/1881526119.shtml>. Acesso em: 04/02/2018.

Há contrastes entre provas que provam e provas que explicam no caso da referida afirmação matemática. Na prova inteira que prova através de indução matemática não há tradução para frente e para trás entre diferentes representações. Somente uma representação numérica ou analítica é usada. Em contraste, a prova que explica usa muito mais matemática com a esperança de trazer a compreensão (HANNA G.; SIDOLI, 1998).

De acordo com M. Faaiz Gierdien "interpretar uma *Prova sem Palavras* requer explicações que se baseiam em várias ideias matemáticas e que nem sempre são evidentes". E ainda: "explicar uma *Prova sem Palavras* pode apresentar oportunidades de *insights* e conexões entre várias ideias matemáticas" (GIERDIEN, 2007).

Ao se sugerir uma atividade que envolva uma *Prova sem Palavras* aos alunos, espera-se que eles sejam capazes de analisar criticamente e comparar argumentos matemáticos. O professor deve incentivá-los a fazer a explicação do que foi entendido para, desta forma, poderem ver como as ideias matemáticas estão relacionadas através de diferentes representações.

Para terminar, é importante citar que as *Provas sem Palavras* obtiveram um maior reconhecimento a partir do momento em que a *Mathematical Association of America* começou a publicá-los regularmente na *Mathematics Magazine*, sendo seu precursor Roger Nelsen, que tem interesse no processo de visualização em Matemática, mais especificamente em figuras que ajudam os alunos a entender ideias matemáticas, provas e argumentos, tendo publicado mais de uma centena de pesquisas a respeito.

2 PROVAS SEM PALAVRAS PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Neste capítulo será feita a apresentação de alguns casos de *Provas sem Palavras*, seguida de uma explanação de como ocorreu cada prova e, em vários casos, a demonstração formal do que se está propondo. Também fará parte desse trabalho a apresentação de *links* cujas atividades terão como objetivo chamar a atenção do leitor para a importância de se trabalhar com outras tecnologias de forma mais dinâmica e aplicada. Dessa forma, acredita-se que será mais fácil para o professor que eventualmente consultar este material.

A Matemática do Ensino Fundamental é rica em situações problemas que trazem aos alunos diversas aplicações e, conseqüentemente, visualizações de exemplos em forma de *Provas sem Palavras*. Aqui, longe de esgotar os casos, serão citadas algumas situações que poderão ter alguma importância.

A primeira abordagem será o Teorema de Pitágoras ¹(582-497 a.C.), que é estudado no 9º ano do Ensino Fundamental, sendo que esse tema é abordado durante todo o Ensino Médio. Devido a sua importância, serão explicadas três formas diferentes de *Provas sem Palavras*.

O teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo.

Teorema 2.1. (*Teorema de Pitágoras*) *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Ou seja, se ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c , conforme a Figura 1, tem-se que:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

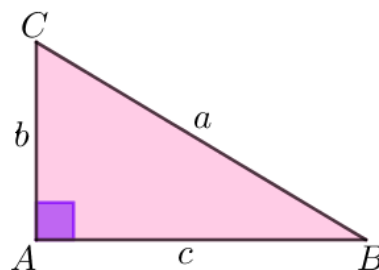


Figura 1 – Teorema de Pitágoras

¹ Pitágoras era grego. Foi matemático e filósofo e desenvolveu trabalhos na área da música, moral, geografia e medicina.

2.1 TEOREMA DE PITÁGORAS I

Este Teorema foi mostrado através de *Provas sem Palavras*, em 1876, por James Abram Garfield, que foi o 20º Presidente dos Estados Unidos, e foi publicado no *New England Journal of Education*.

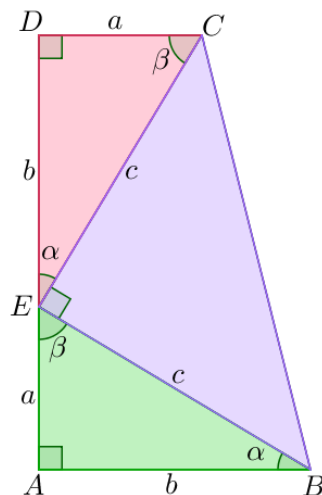


Figura 2 – Teorema de Pitágoras I

James Garfield desenhou dois triângulos retângulos: $\triangle ABE$ e $\triangle CDE$, conforme a Figura 2. Depois uniu os pontos B e C, formando o trapézio retângulo $ABCD$, de bases a e b e altura $a + b$. Importante observar que o $\triangle BCE$ é retângulo isósceles, pois os lados \overline{CE} e \overline{BE} medem c e o ângulo \widehat{BEC} é retângulo pois, conforme a Figura 2, tem-se que $\alpha + \beta$ vale 90° , ou seja

$$\widehat{CED} + \widehat{BEC} + \widehat{BEA} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \widehat{BEC} + \beta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ.$$

Ao calcular a área desse trapézio, de duas formas diferentes, tem-se:

(a) Pela área do trapézio:

$$\frac{(a + b)(a + b)}{2}.$$

(b) Pela soma das áreas dos três triângulos retângulos:

$$\frac{2ab}{2} + \frac{c^2}{2}.$$

Igualando as expressões das áreas obtidas acima, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{c^2}{2} + \frac{2ab}{2} &= \frac{(a+b)^2}{2} \\ \Rightarrow c^2 + 2ab &= a^2 + 2ab + b^2 \\ \Rightarrow c^2 &= a^2 + b^2.\end{aligned}$$

Sabe-se que existem centenas de formas diferentes de demonstrar o Teorema de Pitágoras, e muitas delas através de *Provas sem Palavras*. Devido à grande importância e variedade em demonstrações desse teorema, serão vistas outras maneiras de prová-lo de forma visual.

Como curiosidade para o leitor, o seguinte *link* contém 120 formas diferentes de demonstrar visualmente o Teorema de Pitágoras:

- <http://gurmeet.net/computer-science/mathematical-recreations-proofs-without-words/>.

2.2 TEOREMA DE PITÁGORAS II

Civilizações das margens dos rios Iang-tse e Amarelo foram responsáveis pela composição de um dos mais antigos clássicos matemáticos, o *Chou Pei Suan Ching*, que trata sobre cálculos astronômicos, propriedades do triângulo retângulo e frações. O *Chou Pei* pode datar de 1200 a.C., segundo estudos, e já continha trabalhos algébricos tratando do Teorema de Pitágoras.

Essa segunda maneira de demonstrar este importante teorema é bastante direta e foi adaptada em *Chou Pei Suan Ching* (NELSEN, 1993).

Sejam as Figuras 3 e 4:

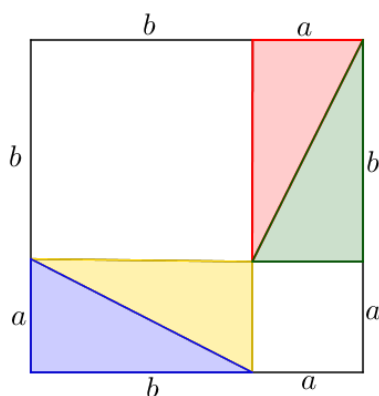


Figura 3 – Quadrado de Lado $a + b$

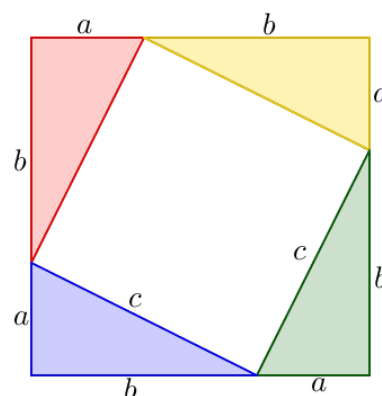


Figura 4 – Quadrado Interno de Área c^2

Na Figura 3 tem-se que a área do quadrado de lado $a + b$ será $(a + b)^2$. Na Figura 4, a área de cada triângulo retângulo vale $\frac{ab}{2}$ e a área do quadrado interno vale c^2 . Logo, como a área da Figura 3 é igual a área da Figura 4, tem-se:

$$\begin{aligned}
 c^2 + 4\frac{ab}{2} &= (a+b)^2 \\
 \Rightarrow c^2 + 2ab &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 \Rightarrow c^2 &= a^2 + b^2.
 \end{aligned}$$

Assim, fica provado o que havia sido proposto inicialmente.

Esse mesmo exemplo de visualização do Teorema de Pitágoras está representado no *link* abaixo. Nele pode-se ver, dinamicamente, exatamente o que foi descrito aqui.

- <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond-proofs-without-words-20>.

2.3 TEOREMA DE PITÁGORAS III

Nessa última abordagem do Teorema de Pitágoras, na imagem que está ao lado esquerdo da Figura 5 há um quadrado de lado c , portanto de área c^2 . Nessa mesma imagem, esse quadrado é formado pelas áreas de quatro triângulos retângulos de catetos a e b , além da área de um quadrado de lado $b - a$, ou seja, $c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (b - a)^2 = a^2 + b^2$.

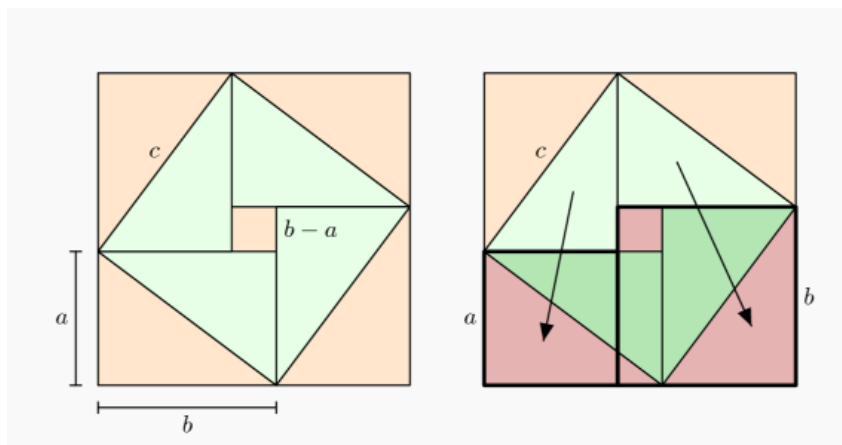


Figura 5 – Teorema de Pitágoras III

Fonte: http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Proofs_without_words. Acesso em: 19/09/2017.

A imagem do lado direito mostra uma ideia um pouco diferente: apenas o desmembramento de figuras geométricas que formam o quadrado de lado c . Leva-se o triângulo retângulo do lado superior esquerdo do quadrado de lado c para baixo, conforme a indicação da seta. Depois, da mesma maneira, leva-se o triângulo retângulo do lado superior direito desse mesmo quadrado para baixo. Dessa forma, obtém-se dois retângulos de lados a e b , além do quadrado de lado $b - a$, que em nada foi mudado. Percebe-se, com essa nova disposição de figuras geométricas,

que se obtém dois quadrados, ambos delineados por uma cor mais forte, um de lado a e o outro de lado b , cujas áreas serão a^2 e b^2 , respectivamente. O que significa que a área c^2 do quadrado de lado c foi transformado em dois quadrados de área a^2 e b^2 .

O link <https://www.geogebra.org/m/jFFERBdd> apresenta alguns trabalhos realizados no *GeoGebra* onde se pode ver a demonstração visual de 30 maneiras diferentes do Teorema de Pitágoras de forma dinâmica.

2.4 SOMA DOS ÂNGULOS DOS VÉRTICES DE UMA ESTRELA É 180°

Nessa *Prova sem Palavras* serão utilizados dois importantes resultados da Geometria que serão demonstrados a seguir.

Teorema 2.2. (Lei angular de Tales) *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .*

Essa demonstração será realizada por etapas e, para isso, serão necessárias as seguintes proposições:

- Se uma reta transversal corta duas retas paralelas, teremos a formação de ângulos alternos internos, que são congruentes.
- As semirretas que definem um ângulo raso (de 180°) formam uma reta.

Demonstração. Desenha-se um triângulo ABC de base BC .

Sobre o vértice A traça-se uma reta paralela ao lado BC , e escreve-se os ângulos internos α , β e γ , além dos ângulos θ e λ , conforme a Figura 6.

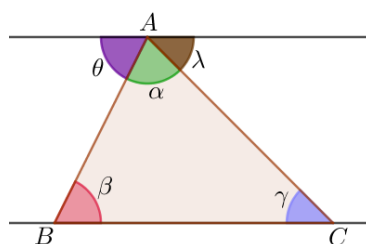


Figura 6 – Soma dos ângulos Internos de um Triângulo

Os ângulos θ , α e λ formam juntos um ângulo raso, logo a soma deles vale 180° . Como os ângulos θ e β são alternos internos, então são congruentes. O mesmo ocorre com os ângulos γ e λ . Portanto $\alpha + \beta + \lambda = 180^\circ$. \square

Teorema 2.3. (Teorema dos ângulos externos de um triângulo) *Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Desenha-se um triângulo ABC de base BC .

Por C conduzimos a reta \overleftrightarrow{CD} paralela à reta \overleftrightarrow{AB} , determinando os ângulos α e β , com $\alpha + \beta = \hat{e}$, conforme a Figura 7.

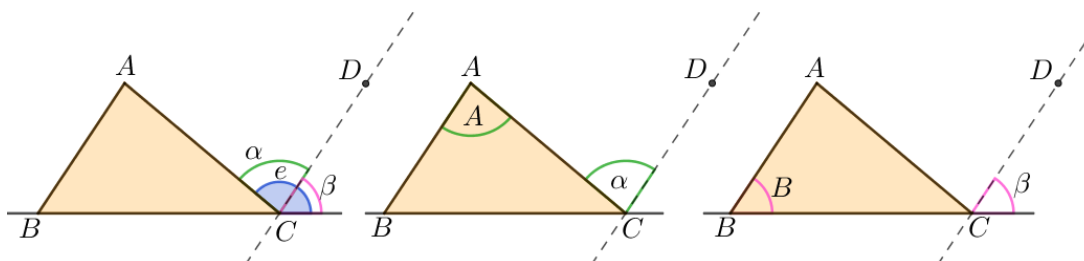


Figura 7 – Teorema dos Ângulos Externos de um Triângulo

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow \alpha \equiv \hat{A} \text{ (alternos).} \\ \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow \beta \equiv \hat{B} \text{ (correspondentes).} \end{cases}$$

Somando as duas relações anteriores, tem-se: $\alpha + \beta = \hat{A} + \hat{B} \Rightarrow \hat{e} = \hat{A} + \hat{B}$. \square

O objetivo é chegar à conclusão de que a soma dos ângulos internos dos vértices de uma estrela de cinco pontas vale 180° , de acordo com a Figura 8.

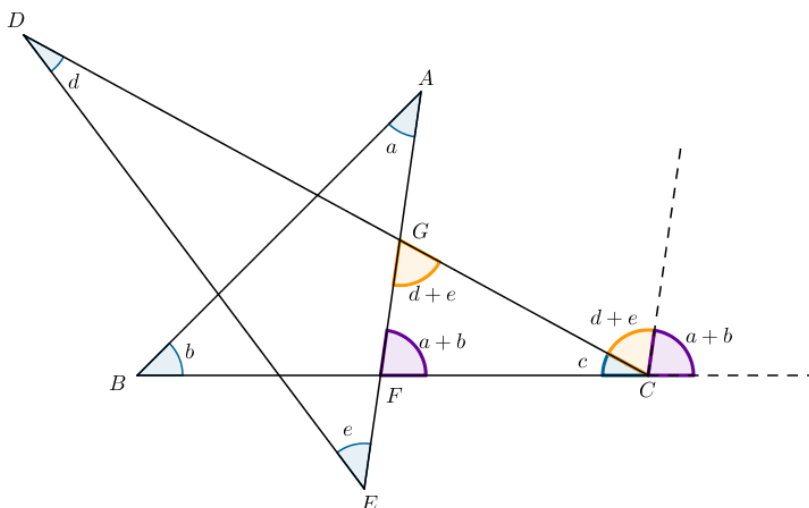


Figura 8 – Soma dos Ângulos dos Vértices de uma Estrela

Primeiramente observando o $\triangle ABF$ da Figura 9. Pelo Teorema 2.3, segue que $\widehat{AFC} = a + b$.

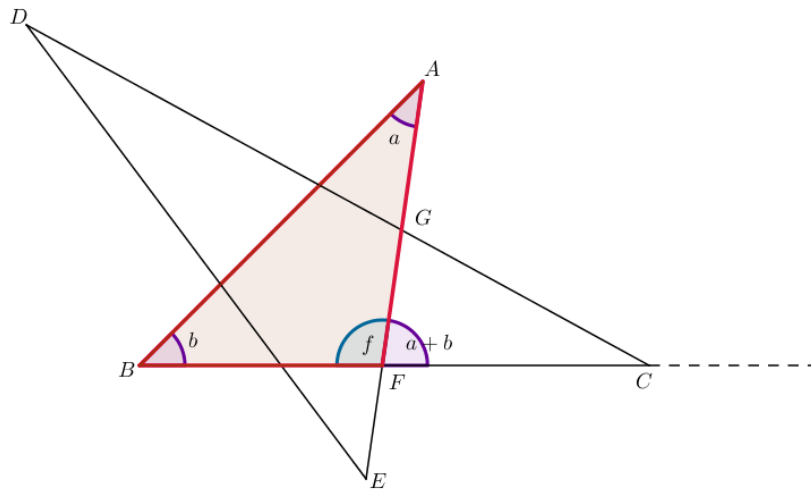


Figura 9 – Triângulo ABF da Estrela

Observando agora o $\triangle DEG$ da Figura 10, tem-se que $\widehat{CGF} = d + e$ pelo Teorema 2.3.

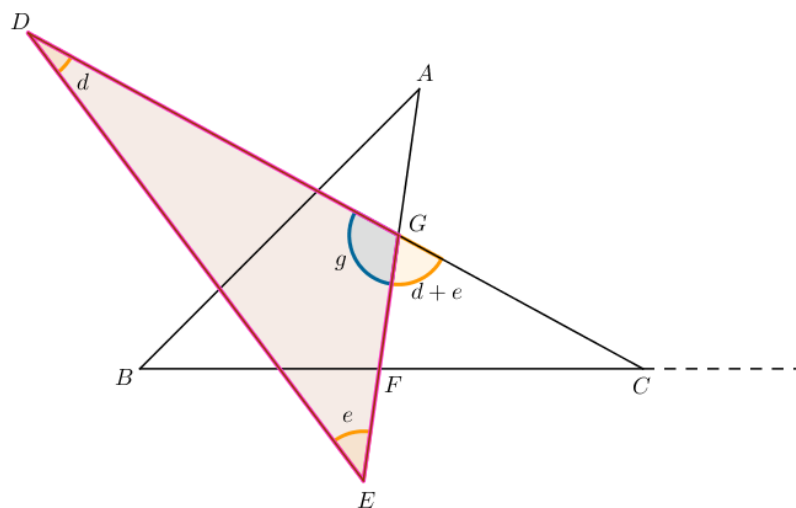


Figura 10 – Triângulo DEG da Estrela

Finalmente, pode-se concluir o resultado de duas maneiras diferentes: no $\triangle CFG$ da Figura 11, através do Teorema 2.2, tem-se que $a + b + d + e + c = 180^\circ$, e pelo Teorema 2.3, na mesma figura, obtém-se que $\alpha = a + b + d + e$ e, portanto, $c + \alpha = 180^\circ$.

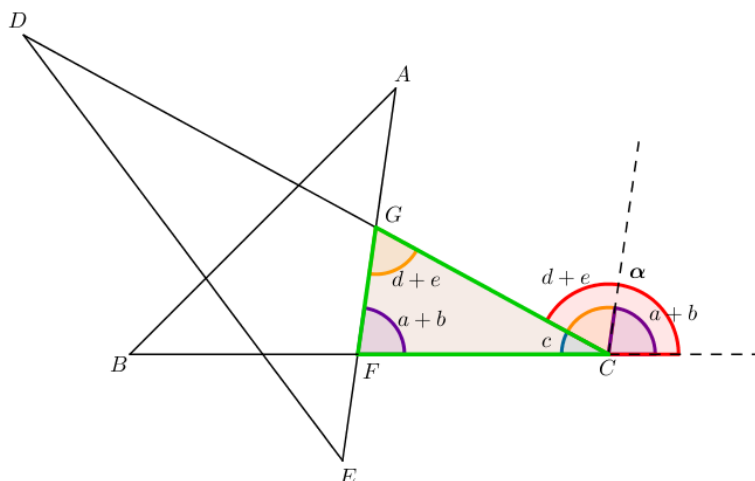


Figura 11 – Triângulo CFG da Estrela

Uma maneira de ver esse resultado de forma dinâmica se apresenta em:

- <https://www.geogebra.org/m/wfAZgTWs>.

Os próximos três temas fazem parte do conteúdo sobre Produtos Notáveis, que é visto no 8º ano do Ensino Fundamental. A aprendizagem desses assuntos representa uma maior praticidade e rapidez no desenvolvimento dos cálculos na Matemática.

2.5 QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

Nessa seção a *Prova sem Palavras* irá mostrar que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Para interpretar geometricamente esse produto, considere-se o quadrado de lado $(a + b)$, como na Figura 12.

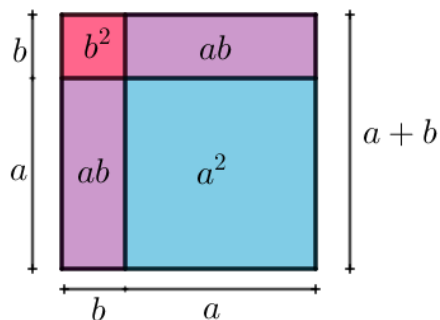


Figura 12 – Quadrado da Soma de Dois Termos

Observa-se que a área do quadrado maior será $(a + b)^2$. Esse quadrado é composto por dois quadrados menores, um de área a^2 e outro de área b^2 , e também por dois retângulos, ambos de área ab . Somando-se as áreas dessas quatro regiões, se obterá $a^2 + 2ab + b^2$. E finalmente,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Existem vários materiais prontos e disponíveis no *GeoGebra* onde se pode acompanhar esse resultado através de movimento. Seguem duas sugestões:

- <https://www.geogebra.org/m/rbmzq7Dh> e
- <https://www.geogebra.org/m/E39u4Cq6>.

Na demonstração algébrica desse resultado usa-se, entre outros, o fato de que, $(a + b)^2$, é o mesmo que o produto de $(a + b)$ por $(a + b)$.

Importante comentar que se o professor desenvolver em sala de aula esse raciocínio visual, o aluno poderá ter maior facilidade de compreensão do que ocorre.

2.6 QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

Nessa seção a *Prova sem Palavras* mostrará que:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

A interpretação geométrica desse produto será feita por meio das áreas dos quadrados de lado a e b , conforme a Figura 13.

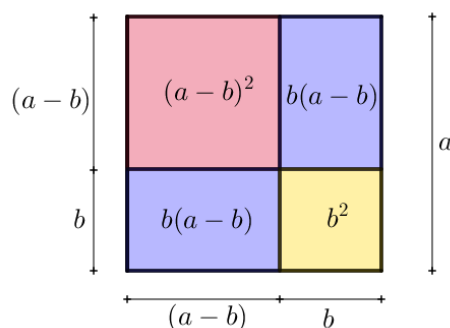


Figura 13 – Quadrado da Diferença de Dois Termos

Observa-se que, ao tomar a área do quadrado maior, que tem lado a , e dele subtrair a área dos dois retângulos de lados b e $a - b$, assim como a área do quadrado de lado b , sobrar a área do quadrado de lado $(a - b)$, dessa forma:

$$\begin{aligned}
 (a - b)^2 &= a^2 - b(a - b) - b(a - b) - b^2 \\
 \Rightarrow (a - b)^2 &= a^2 - 2b(a - b) - b^2 \\
 \Rightarrow (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 \\
 \Rightarrow (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2.
 \end{aligned}$$

Na demonstração algébrica do quadrado da diferença de dois termos utiliza-se o fato de que $(a - b)^2$ é o produto de $(a - b)$ por $(a - b)$.

Uma vez que o aluno, com o auxílio do professor, esteja engajado e acostumado às representações visuais, pouco a pouco irá obter outros resultados de maneira mais rápida e significativa.

Segue como sugestão de visualização dinâmica sobre o quadrado da diferença de dois termos o *link* <https://www.geogebra.org/m/fm67dzqy>.

2.7 PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

Nesta seção se verá que a demonstração da igualdade $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ é bastante simples.

Será interpretado geometricamente esse resultado por meio das áreas dos quadrados de lados a e b , conforme a Figura 14.

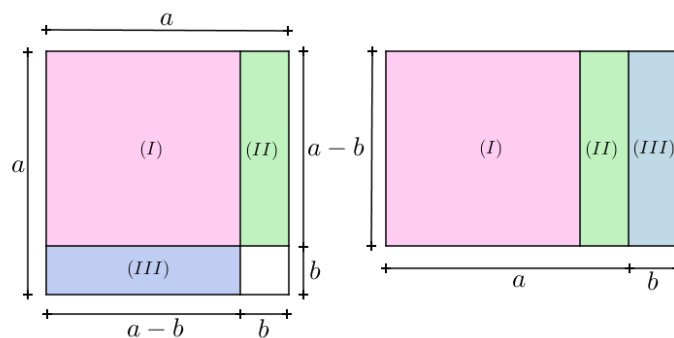


Figura 14 – **Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos**

A Figura 14 mostra um quadrado maior de lado a formado por um quadrado de lado $(a - b)$ e outro de lado b , além de dois retângulos de lados b e $a - b$. Calculando a área do quadrado de lado a e dele retirando a área do quadrado de lado b , sobrarão as regiões I , II e III , cujas áreas são $(a - b)^2$, $b(a - b)$ e $b(a - b)$, respectivamente. Colocando essas regiões lado a lado, será formado um retângulo de lados $a + b$ e $a - b$. A área desse retângulo é $(a + b)(a - b)$. Portanto: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Através dos seguintes *links*, tem-se duas formas diferentes de como visualizar no *GeoGebra* esse produto notável:

- Em <https://www.geogebra.org/m/P5CGdcpZ> percebe-se de forma criativa este resultado, conforme pode-se ver na Figura 15.

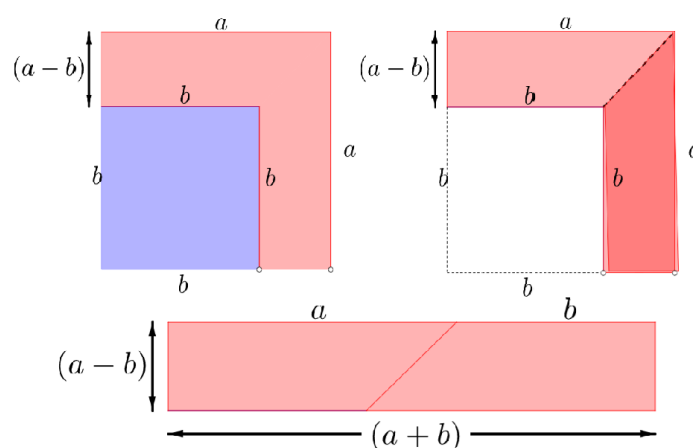


Figura 15 – Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos - *GeoGebra I*

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/P5CGdcpZ>. Acesso em: 08/01/2018.

- Em <https://www.geogebra.org/m/R4vQsjfr> mostra-se com os valores de a e b , de forma a conseguir a sequência das formas geométricas da Figura 16.

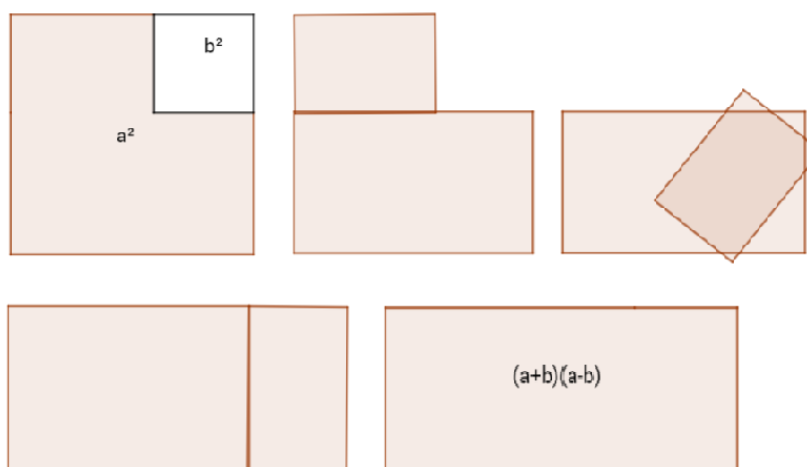


Figura 16 – Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos - *GeoGebra II*

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/R4vQsjfr>. Acesso em: 08/01/2018.

2.8 COMPLETANDO QUADRADOS

Para se resolver equações polinomiais do 2º grau, da forma $ax^2 + bx + c = 0$, quando ainda não existia a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, usava-se o método de completar quadrados, criado pelo matemático árabe Abu Abdullah Mohammed ben Musa Al-Khwarizmi ² (780-850) que baseia-se em

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Para entender a *Prova sem Palavras* dessa igualdade, trabalha-se com a área do quadrado de lado x somada à área do retângulo de lados b e x . Para isso, o retângulo é dividido em duas partes iguais, de tal modo que seus lados são x e $\frac{b}{2}$. Depois, constrói-se um novo quadrado de lado $x + \frac{b}{2}$, sendo que o quadrado pequeno de lado $\frac{b}{2}$ não faz parte dessa construção, conforme pode-se ver na Figura 17.

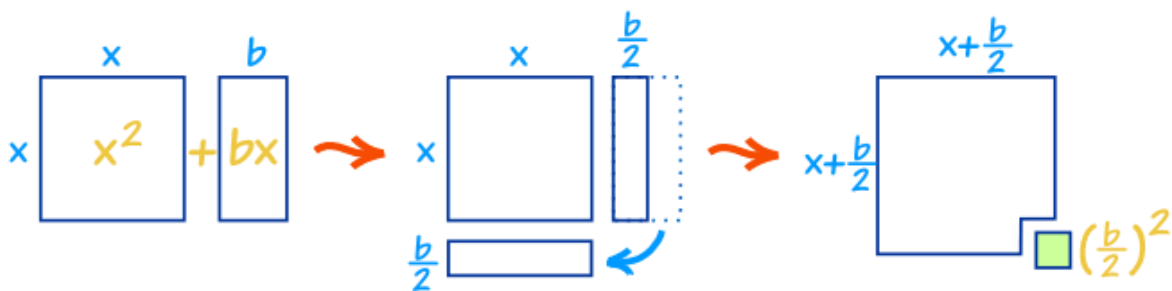


Figura 17 – Completando Quadrados

Fonte: <https://www.mathsisfun.com/algebra/completing-square.html>. Acesso em: 16/06/2017.

Algebricamente, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 &= x^2 + 2x\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= x^2 + bx. \end{aligned}$$

Introduzido no 9º ano do Ensino Fundamental, esse assunto é normalmente considerado de difícil entendimento por parte dos estudantes. A parte visual é de fundamental importância

² Al-Khwarizmi foi um matemático que escreveu tratados sobre Aritmética, Álgebra, Astronomia, Geografia e sobre o calendário.

para sua elucidação. Uma vez desenvolvido esse tema através das representações visuais, espera-se que o aluno desempenhe melhor suas habilidades dentro do cálculo algébrico. Para tanto, aconselha-se ver o *link* <https://www.geogebra.org/m/ytsdsfyH>, onde o estudante poderá interagir com a proposta através do *GeoGebra*.

2.9 ÁREAS ALGÉBRICAS

Há determinados resultados que chamam a atenção, como a igualdade

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2).$$

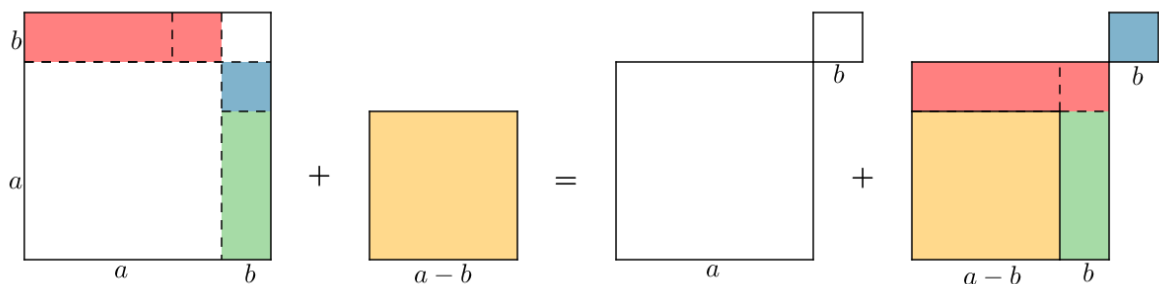


Figura 18 – Áreas Algébricas

A *Prova sem Palavras* desenhada na Figura 18 confirma esse resultado. Tem-se primeiramente a área $(a + b)^2$ do primeiro quadrado de lado $a + b$ somada à área $(a - b)^2$ do quadrado de lado $a - b$. Observa-se que essa soma representa a área de um quadrado de lado a com outro de lado b , somada à área de um quadrado de lado $a - b$ adicionada à área de um retângulo de lados a e b (retângulo vermelho) e outro retângulo de lados $a - b$ e b (retângulo verde), e finalmente um quadrado de lado b (em azul). Contudo, ao dispor o quadrado de lado $a - b$ seguido do retângulo de lados b e $a - b$, tem-se um quadrado de lado $a - b + b$, ou seja, este último quadrado tem como lado a . Portanto, essa soma será composta de dois quadrados de lado a e dois quadrados de lado b , resultando em $2(a^2 + b^2)$.

2.10 MÉDIAS ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA, QUADRÁTICA E HARMÔNICA

As médias Aritmética (MA), Geométrica (MG), Quadrática (MQ) e Harmônica (MH) entre dois valores a e b , são estudadas inicialmente no Ensino Fundamental, e aprofundadas no Ensino Médio.

Elas são dadas por:

$$\begin{aligned} \bullet \quad MA &= \frac{a+b}{2}. & \bullet \quad MQ &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \\ \bullet \quad MG &= \sqrt{ab}, a > 0 \text{ e } b > 0. & \bullet \quad MH &= \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}, a, b \neq 0. \end{aligned}$$

Nessa seção serão mostradas as representações geométricas das médias, que servirão para *Provar sem Palavras* as desigualdades entre elas, conforme a Figura 19. Uma demonstração das desigualdades pode ser consultada em (PEREIRA, 2014).

$$MH < MG < MA < MQ,$$

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

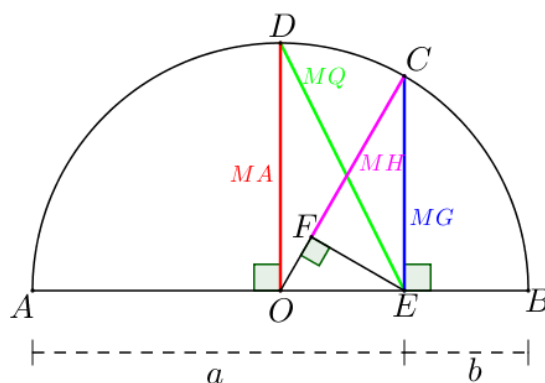


Figura 19 – Médias

2.10.1 MÉDIA ARITMÉTICA

Das quatro médias citadas aqui, a Média Aritmética é a mais utilizada.

Tem-se o $\triangle BOD$, da Figura 20, onde \overline{OB} e \overline{OD} são iguais ao raio da semicircunferência. Logo, $\overline{OD} = \frac{\overline{AB}}{2}$, o que é o mesmo que $\overline{OD} = \frac{a+b}{2}$.

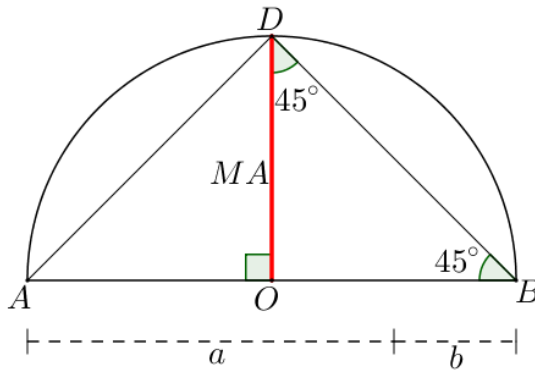


Figura 20 – Média Aritmética

2.10.2 MÉDIA GEOMÉTRICA

Através do conteúdo de Proporções, pode-se chegar na Média Geométrica, que é aplicada principalmente na Geometria Plana e Espacial, além da Matemática Financeira.

Para a Média Geométrica de dois segmentos, seja a Figura 21. Nela tem-se que $\triangle ACE$ é semelhante ao $\triangle CBE$, logo:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\overline{CE}} &= \frac{\overline{CE}}{b} \\ \Rightarrow (\overline{CE})^2 &= ab \\ \Rightarrow \overline{CE} &= \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

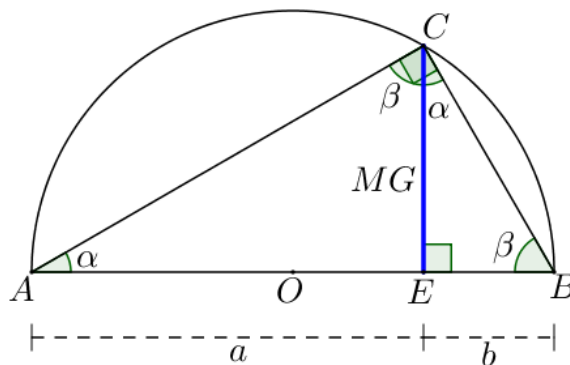


Figura 21 – Média Geométrica

2.10.3 MÉDIA QUADRÁTICA

Seja o triângulo da Figura 22.

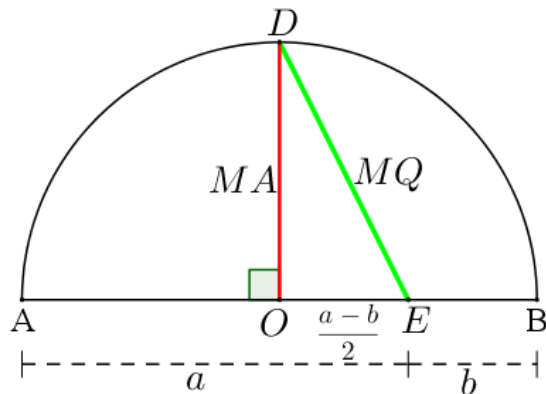


Figura 22 – Média Quadrática

O $\triangle ODE$, retângulo em O , cujos catetos medem $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{a-b}{2}$. Quer se mostrar que $\overline{DE} = x$ é a Média Quadrática. Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4} \\
 \Rightarrow x^2 &= \frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2}{4} \\
 \Rightarrow x^2 &= \frac{2a^2 + 2b^2}{4} \\
 \Rightarrow x^2 &= \frac{2(a^2 + b^2)}{4} \\
 \Rightarrow x &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.
 \end{aligned}$$

2.10.4 MÉDIA HARMÔNICA

A Média Harmônica tem sido aplicada nos vestibulares de algumas Universidades para calcular a nota do aluno, com o intuito de valorizar aquele que tem um desempenho uniforme, ou seja, que apresenta aproveitamento semelhante em todas as disciplinas, e não os alunos que são excelentes em uma disciplina e têm desempenho fraco em outra (GAUCHAZH, 2012).

Aqui se irá demonstrar a média harmônica através do $\triangle OCE$ da Figura 23. Esse triângulo está dividido em dois triângulos: $\triangle OFE$ e $\triangle FCE$.

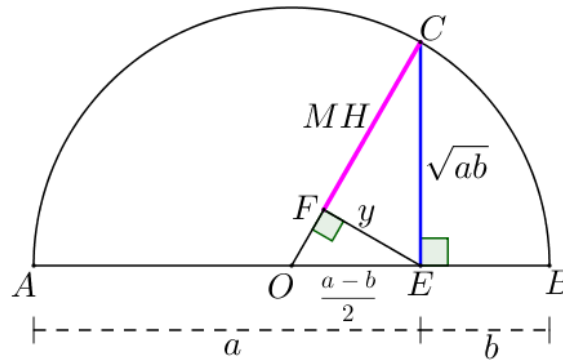


Figura 23 – Média Harmônica

No triângulo retângulo $\triangle OFE$, seus catetos medem y e $\frac{a+b}{2} - z$, sendo $z = \overline{FC}$, e a hipotenusa mede $\frac{a-b}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 &= y^2 + \left(\frac{a+b}{2} - z\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{4} &= y^2 + \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{2z(a+b)}{2} + z^2 \\ \Rightarrow y^2 + z^2 &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} + (a+b)z \\ \Rightarrow y^2 + z^2 &= -\frac{4ab}{4} + (a+b)z \\ \Rightarrow y^2 + z^2 &= (a+b)z - ab. \end{aligned} \quad (1)$$

No triângulo retângulo $\triangle FCE$, os catetos medem y e z , e a hipotenusa é a Média Geométrica entre a e b , ou seja, \sqrt{ab} .

Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$(\sqrt{ab})^2 = y^2 + z^2. \quad (2)$$

De (1) e (2), tem-se:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = (a+b)z - ab \\ ab = y^2 + z^2 \end{cases} \Rightarrow ab = (a+b)z - ab$$

$$\Rightarrow (a+b)z = 2ab \Rightarrow z = \frac{2ab}{a+b}.$$

Outras formas de aplicar a Média Harmônica seriam no cálculo da velocidade média, no custo médio de compras com uma taxa fixa de juros e em resistências elétricas em paralelo.

Como forma de esclarecer melhor o assunto aos alunos, pode-se acessar o *link* abaixo, onde de forma dinâmica se poderá observar melhor as desigualdades entre as médias, conforme Figura 24:

- <https://www.geogebra.org/m/qrp2tecd>.

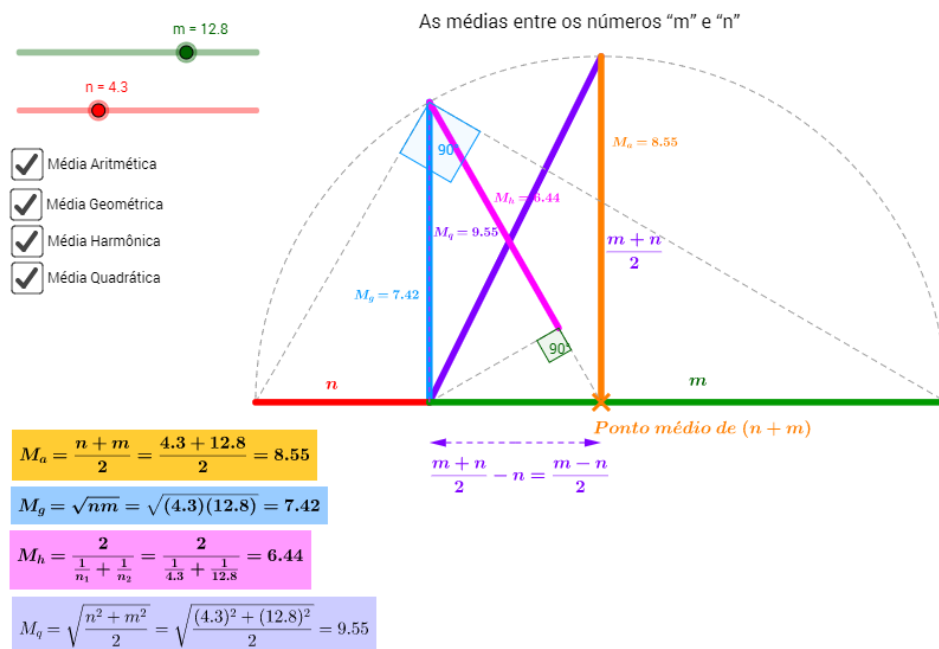


Figura 24 – Médias através do GeoGebra

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/qrp2tecd>. Acesso em: 08/01/2018.

2.11 DESIGUALDADES PROPORCIONAIS

Para esse próximo tópico, existem como pré-requisitos os conteúdos sobre razões e proporções. Será trabalhado com desigualdades proporcionais e mostrado que, dados os segmentos a, b, c e d , conforme a Figura 25, tem-se:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

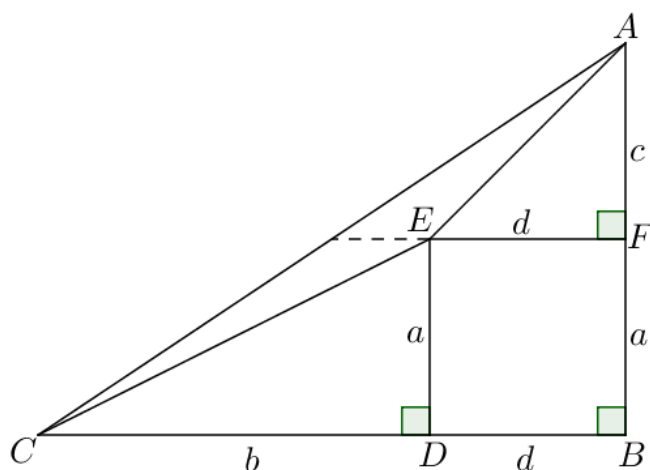


Figura 25 – **Desigualdades Proporcionais**

Será mostrado primeiramente que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$.

Conforme a Figura 26, com o prolongamento de \overline{CE} até \overline{AF} , será encontrado G . Chamando \overline{GF} de x , sabe-se que:

$$x < c \quad \Rightarrow \quad a + x < a + c.$$

Portanto, pode-se escrever a desigualdade seguinte:

$$\frac{a+x}{b+d} < \frac{a+c}{b+d}. \quad (1)$$

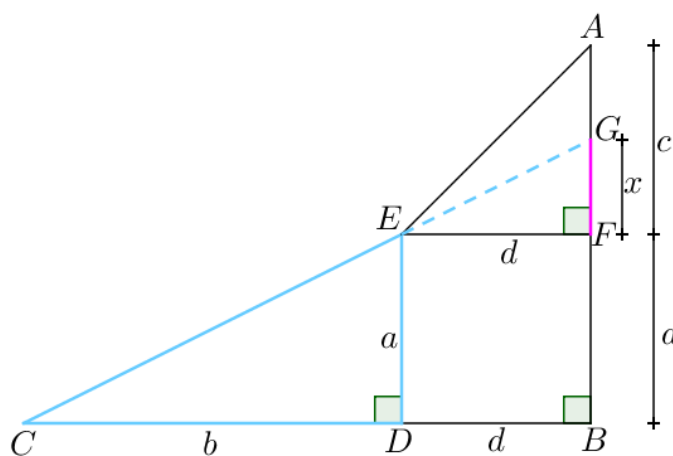


Figura 26 – **Prolongamento do segmento CE**

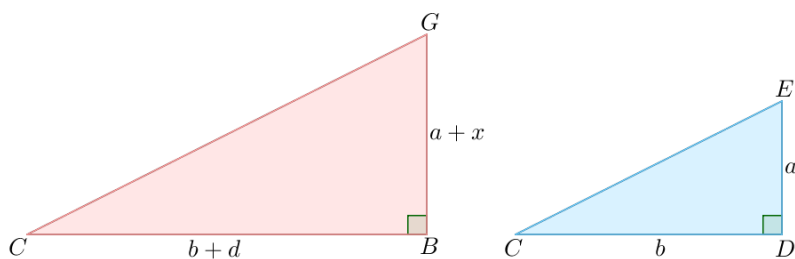


Figura 27 – Triângulos BCG e DCE

Considerando os triângulos CDE e CBG da Figura 26, percebe-se que são semelhantes, pois ambos são triângulos retângulos com o ângulo \widehat{DCE} em comum.

Na Figura 27, tem-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{a + x}{b + d}. \quad (2)$$

De (1) e (2), segue:

$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d}. \quad (3)$$

Agora será mostrada a relação $\frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$. Para isso se prolongará \overline{AE} , encontrando H em \overline{CD} , conforme a Figura 28.

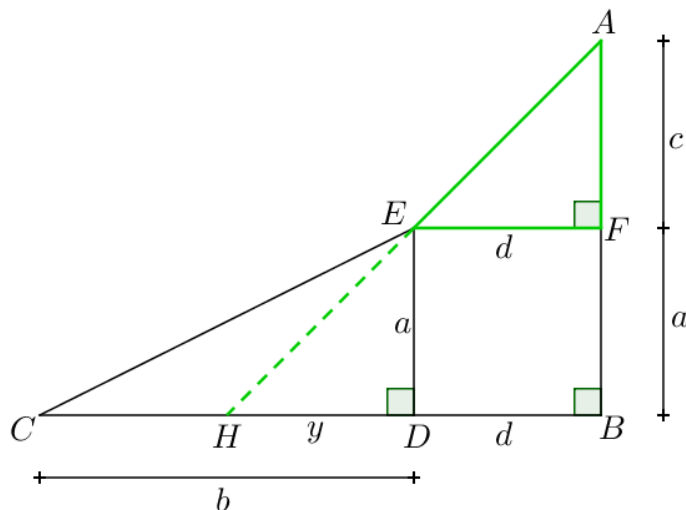


Figura 28 – Prolongamento do segmento AE

Pelo fato de haver duas frações de mesmo numerador, com um denominador menor que o outro, tem-se que a fração de menor denominador será maior que a fração de maior denominador. Portanto:

$$y < b \Rightarrow d + y < b + d \Rightarrow \frac{a + c}{d + y} > \frac{a + c}{b + d}. \quad (4)$$

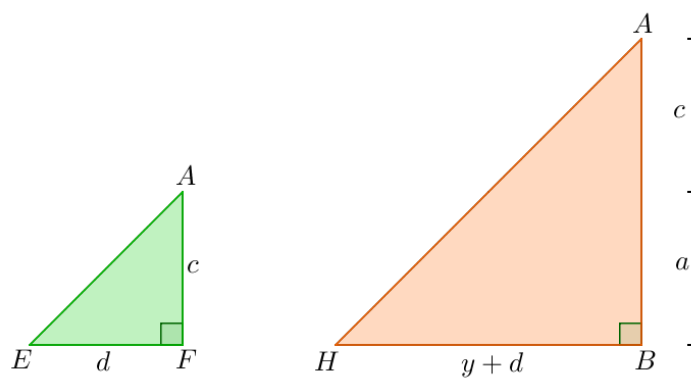


Figura 29 – Triângulos AEF e AHB

Baseando-se na Figura 29, pode-se perceber que $\triangle HBA$ é semelhante ao $\triangle EFA$, logo vale a proporção:

$$\frac{c}{d} = \frac{a+c}{d+y}. \quad (5)$$

De (4) e (5) tem-se:

$$\frac{c}{d} > \frac{a+c}{d+b}. \quad (6)$$

E de (3) e (6) tem-se:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

3 PROVAS SEM PALAVRAS PARA O ENSINO MÉDIO

Nesse terceiro capítulo serão apresentados mais exemplos de *Provas sem Palavras*, conforme realizado no Capítulo 2, porém com assuntos próprios do Ensino Médio. Será dada uma ênfase especial à Trigonometria, um importante assunto onde muitos alunos têm dificuldades.

Trigonometria significa medida das partes de um triângulo. Os gregos realizaram estudos sobre as relações entre ângulos - ou arcos - numa circunferência e os comprimentos de suas cordas.

A necessidade de medir ângulos e distâncias inacessíveis nos problemas relacionados à Astronomia, Agrimensura e Navegações, contribuiu para o uso da Trigonometria como ferramenta auxiliar por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios (PERFEITOS, 2012).

3.1 LEI DOS SENOS

O matemático árabe al-Battani ¹ (858-929), introduziu o círculo de raio unitário, surgindo então o nome da função seno. A palavra hindu *jiva*, que significa "meia corda", dada ao seno foi traduzida para o árabe como *jiba*, que significa "a corda de um arco", uma palavra que tem o mesmo som que *jiva*. Depois, *jiba* se tornou *jaib* nos escritos árabes, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta. Mais tarde, *jaib* foi traduzido no latim para *sinus*, e seno vem do latim. Na realidade foi uma tradução equivocada que dura até os tempos de hoje, muito embora *sinus* signifique seio, volta, curva, cavidade (PERFEITOS, 2012).

O matemático italiano Leonardo Fibonacci ² (1170-1250) passou a usar o termo *sinus rectus arcus*, o que incentivou o uso universal do termo seno. Entretanto, esse termo não foi aceito de imediato por todos os estudiosos. O inglês Edmund Gunter ³ (1581-1626) foi o primeiro a usar em um desenho a abreviação *sen*, em 1624. O francês Pierre Hérigone ⁴ (1580-1643) foi o primeiro a usar *sen* em um livro, em 1634, o italiano Bonaventura Cavalieri ⁵ (1598-1647) usava *Si* e o matemático inglês William Oughtred ⁶ (1574-1660) usava *S* (PERFEITOS, 2012).

¹ Al-Battani estudou Geometria, Astronomia e Astrologia. Um dos principais trabalhos foi determinar de forma precisa o ano solar e as estações da ano.

² Fibonacci introduziu os algarismos arábicos na Europa e descobriu a sequência de Fibonacci, que tem relação com os fenômenos da natureza e o valor aproximado da constante 1,6, quociente da divisão entre um número e seu antecessor na sequência, a partir do número 3.

³ Gunter foi matemático, geômetra e astrônomo. Foi inventor de vários instrumentos usados para navegação.

⁴ Hérigone foi matemático e astrônomo. Foi responsável pela introdução de um sistema de notação matemática e lógica que são usados atualmente.

⁵ Cavalieri foi matemático e astrônomo. Estudou Geometria, Trigonometria, Cálculo Integral, Ótica e Astrologia.

⁶ Oughtred publicou sobre Aritmética, Álgebra e Trigonometria, contribuindo com muitos símbolos matemáticos.

Dado um triângulo ABC qualquer, de lados a , b e c , inscrito numa circunferência de centro O e raio R , segundo a Figura 30.

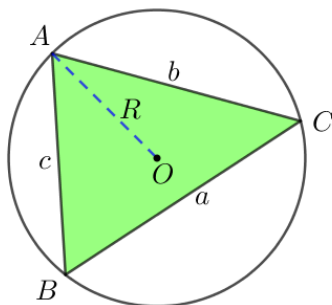


Figura 30 – Apresentação da Lei dos Senos

A Lei dos Senos é dada por:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R.$$

Ou seja:

Em um triângulo qualquer, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. A razão de proporção é igual a $2R$, onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

A ideia dessa *Prova sem Palavras* é procurar um triângulo retângulo inscrito na mesma circunferência do triângulo ABC , de tal forma que os dois triângulos tenham um mesmo ângulo e o lado em comum, como forma de facilitar a visualização ao se aplicar a relação trigonométrica do seno deste ângulo, conforme é explicado na demonstração a seguir.

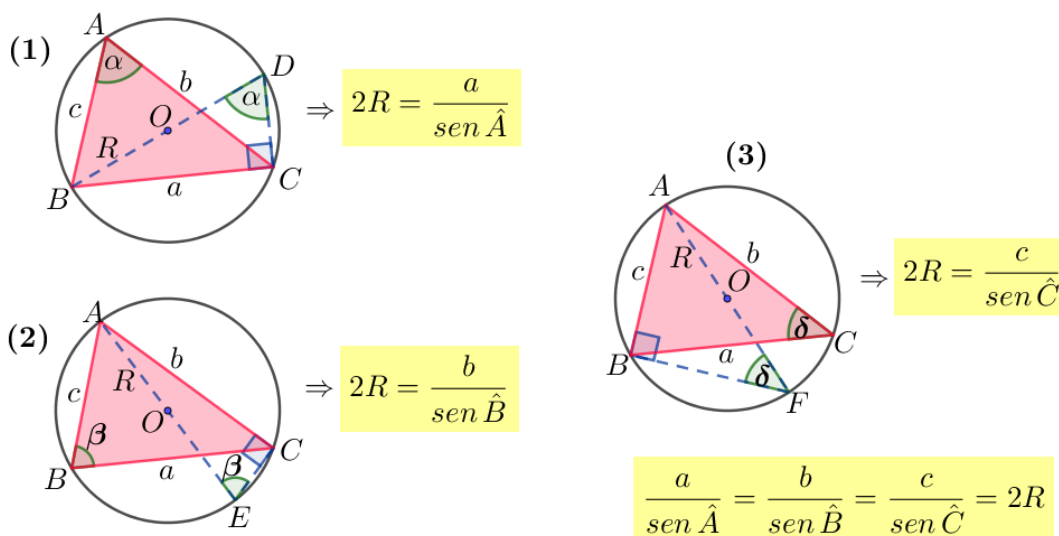


Figura 31 – Lei dos Senos

Considere-se o $\triangle ABC$ inscrito na circunferência. Baseando-se na Figura 31, item (1), tem-se:

- O $\triangle BCD$ é retângulo em C pois sua hipotenusa coincide com o diâmetro da circunferência.
- $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$ e $\hat{D} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \hat{D}$.
- No $\triangle BCD$ tem-se que $\text{sen } \hat{D} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \text{sen } \hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}}$.

No item (2) da mesma figura, tem-se:

- O $\triangle ACE$ é retângulo em C , pois sua hipotenusa coincide com o diâmetro da circunferência.
- $\hat{B} = \frac{\widehat{CA}}{2}$ e $\hat{E} = \frac{\widehat{CA}}{2} \Rightarrow \hat{B} = \hat{E}$.
- No $\triangle ACE$ tem-se que $\text{sen } \hat{E} = \frac{b}{2R} \Rightarrow \text{sen } \hat{B} = \frac{b}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$.

No item (3) da mesma figura, tem-se:

- O $\triangle ABF$ é retângulo em B , pois sua hipotenusa coincide com o diâmetro da circunferência.
- $\hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2}$ e $\hat{F} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \hat{C} = \hat{F}$.
- No $\triangle ABF$ tem-se que $\text{sen } \hat{F} = \frac{c}{2R} \Rightarrow \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$.

Comparando as relações obtidas dos itens (1), (2) e (3), conclui-se:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R.$$

Uma forma bastante parecida de se trabalhar de maneira interativa é apresentada no *link* <https://www.geogebra.org/m/AkZCurMe>. Nele se poderá movimentar vértices e observar que o ângulo é constante, conforme a Figura 32.

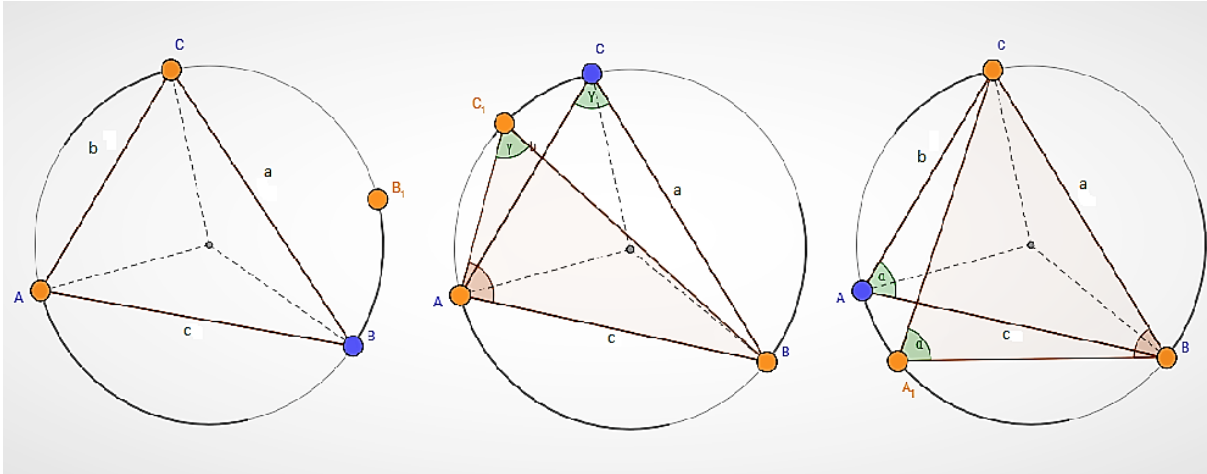


Figura 32 – Lei dos Senos - *GeoGebra*

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/AkZCurMe>. Acesso em: 08/01/2018.

3.2 LEI DOS COSSENOS

A palavra cosseno surgiu no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo.

O matemático francês François Viète ⁷ (1540-1603) usou o termo *sinus residuae*, Gunter sugeriu *co-sinus* em 1620. A notação *Si.2* foi usada por Cavalieri, *s co arc* por Oughtred e *S* por John Wallis ⁸ (1616-1703). Mas foi o inglês Jonas Moore ⁹ (1617-1679), que utilizou pela primeira vez a notação abreviada *cos* para o cosseno trigonométrico (PERFEITTOS, 2012).

Dado um triângulo ABC qualquer, de lados a , b e c , conforme a Figura 33.

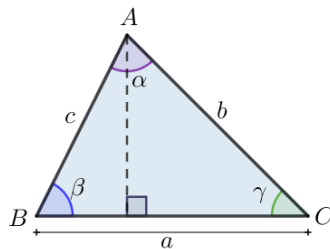


Figura 33 – Apresentação da Lei dos Cossenos

⁷ Viète foi responsável pela introdução da primeira notação algébrica sistematizada e contribuiu para a teoria das equações. Ficou conhecido como o Pai da Álgebra.

⁸ Wallis publicou sobre Geometria Analítica e foi o primeiro a usar o símbolo para o infinito, que é utilizado hoje.

⁹ Moore foi matemático, topógrafo, oficial de artilharia e patrono da Astronomia.

A Lei dos Cossenos é dada por:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Ou seja:

Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Aqui serão apresentadas três formas distintas de *Provas sem Palavras* que mostra a Lei dos Cossenos.

3.2.1 LEI DOS COSSENOS I

Esta primeira maneira de visualização sobre esse assunto será feita através de equivalência de áreas e da aplicação do Teorema de Pitágoras.

Pode-se observar, pela Figura 34, que no $\triangle ABD$ o lado $\overline{AD} = h = b \operatorname{sen} \theta$, $\overline{BD} = b \cos \theta$ e $\overline{CD} = a - b \cos \theta$.

Retirando o quadrado azul, de área $(b \operatorname{sen} \theta)^2$, o quadrado rosa de área c^2 e o quadrado verde, de área $(a - b \cos \theta)^2$, e dispondo adequadamente, conforme o lado direito da mesma figura, pode-se aplicar o Teorema de Pitágoras e obter a lei procurada.

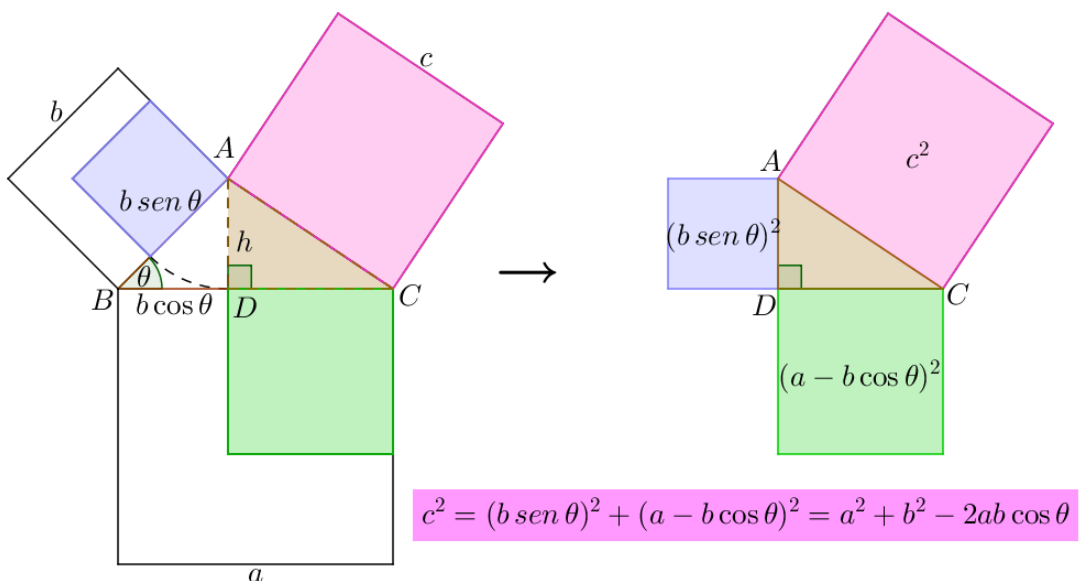


Figura 34 – Lei dos Cossenos I

Para esclarecer melhor, considere-se o $\triangle ADC$, reto em D . Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\begin{aligned} c^2 &= (b \operatorname{sen} \theta)^2 + (a - b \operatorname{cos} \theta)^2 \\ \Rightarrow c^2 &= b^2 \operatorname{sen}^2 \theta + a^2 - 2ab \operatorname{cos} \theta + b^2 \operatorname{cos}^2 \theta \\ \Rightarrow c^2 &= a^2 - 2ab \operatorname{cos} \theta + b^2(\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta). \end{aligned}$$

Portanto:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{cos} \theta.$$

Há vários materiais do *GeoGebra* prontos para serem aplicados em sala. O *link* abaixo, em particular, desenvolve uma ideia bastante parecida com a que foi feita aqui:

- <https://www.geogebra.org/m/KnRvuPaR>.

Segue a Figura 35 para comprovar:

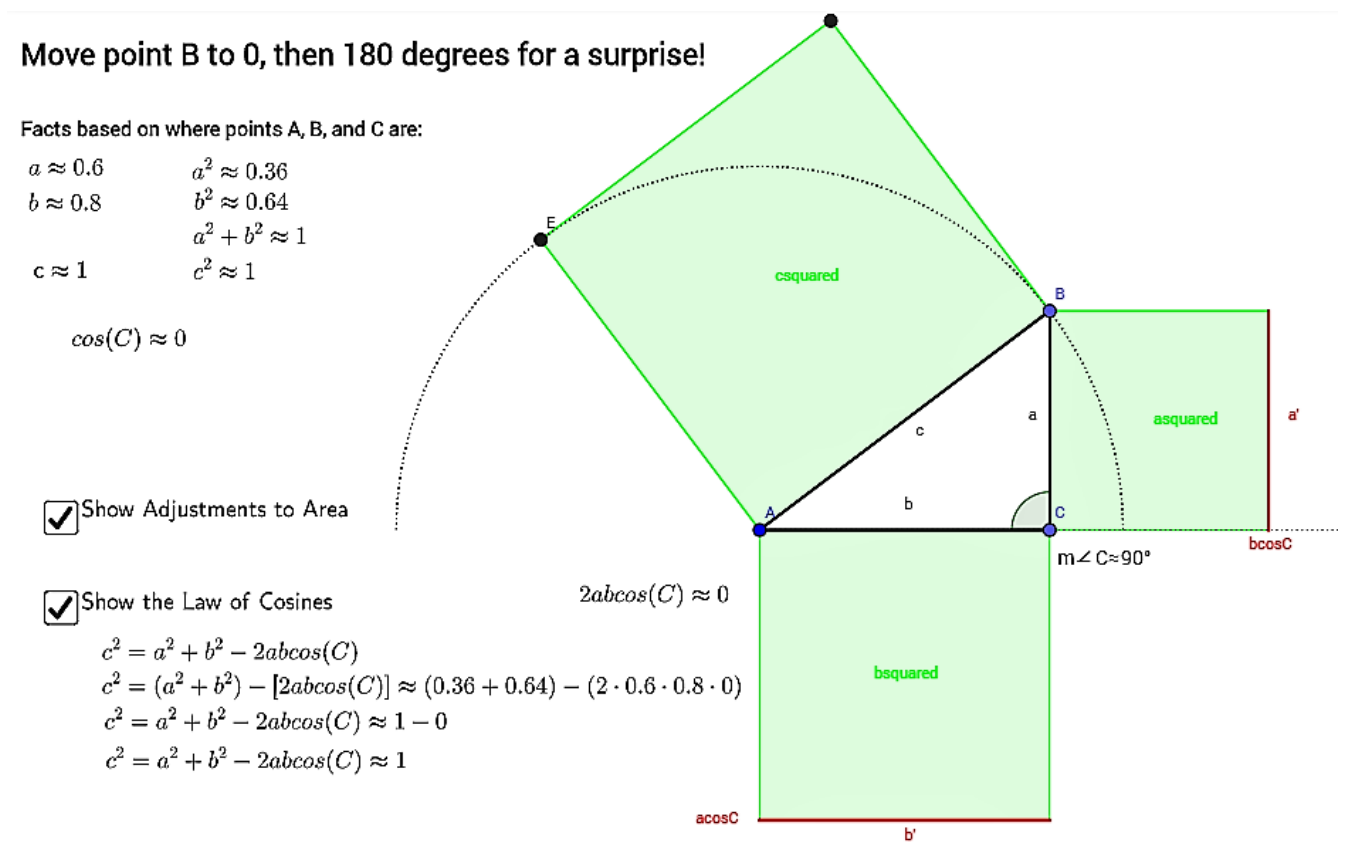


Figura 35 – Lei dos Cossenos I - *GeoGebra*

3.2.2 LEI DOS COSSENOS II

Para a próxima prova será utilizado o conceito de Potência de Ponto da Geometria Plana.

Potência de Ponto

Se por P passam duas retas concorrentes que intersectam a circunferência em A, B, C e D , respectivamente, tem-se:

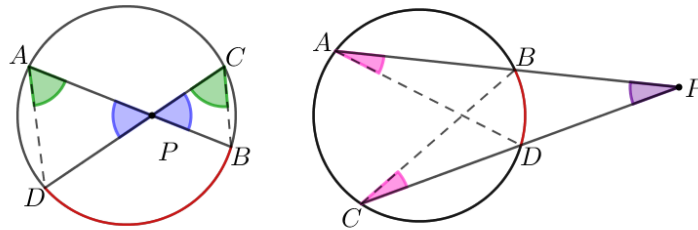


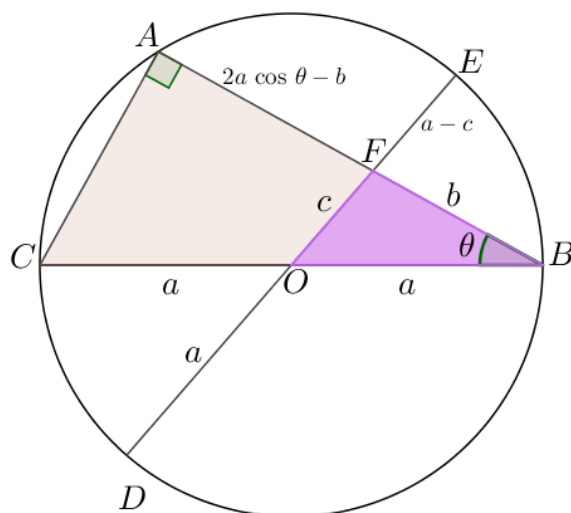
Figura 36 – Potência de Ponto

Considerando os triângulos PAD e PCB da Figura 36:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{P} \text{ comum (ou o.p.v.)} \\ \hat{A} = \hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta PAD \sim \Delta PCB \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

$$\Rightarrow (PA) \cdot (PB) = (PC) \cdot (PD).$$

Nessa *Prova sem Palavras* o objetivo é chegar na Lei dos Cossenos. Para isso, considere-se o triângulo retângulo ABC , inscrito na circunferência de raio a , cuja hipotenusa BC é o diâmetro desta circunferência, conforme a Figura 37. Considere-se também o ΔOBF .



$$(2a \cos \theta - b) \cdot b = (a - c)(a + c)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Figura 37 – Lei dos Cossenos II

Tem-se que:

- $\overline{AB} = 2a \cos \theta$.
- $\overline{FB} = b$.
- $\overline{FA} = 2a \cos \theta - b$.
- $\overline{OF} = c$.
- $\overline{FD} = a + c$.
- $\overline{FE} = a - c$.

Pela propriedade de Potência de Ponto, sabe-se que:

$$\overline{FA} \cdot \overline{FB} = \overline{FD} \cdot \overline{FE}$$

$$\Rightarrow (2a \cos \theta - b) \cdot b = (a + c) \cdot (a - c)$$

$$\Rightarrow 2ab \cos \theta - b^2 = a^2 - c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$

Também para esse tópico sugere-se acessar o *link* <https://www.geogebra.org/m/AbpUfamD>, onde se mostra a Lei dos Cossenos no *GeoGebra* dessa mesma forma.

3.2.3 LEI DOS COSSENOS III

O astrônomo Hiparco de Nicéia ¹⁰ (161-126 a.C.) fez um tratado em doze livros ocupando-se da construção do que possivelmente foi a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. Na realidade, Hiparco fez a transição entre a astronomia babilônica e a obra de Cláudio Ptolomeu ¹¹(85-165) (COSTA, 2003).

Nesse último caso da Lei dos Cossenos, será utilizado o Teorema de Ptolomeu.

Considere-se um quadrilátero ABCD inscrito em uma circunferência, como mostra a Figura 38.

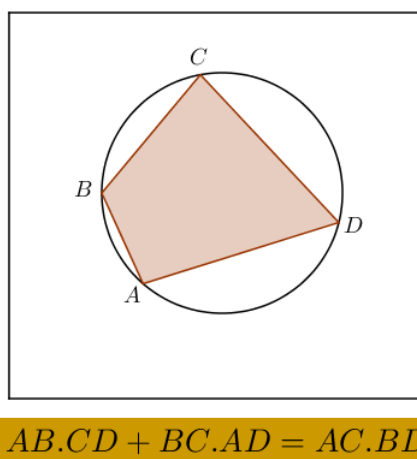


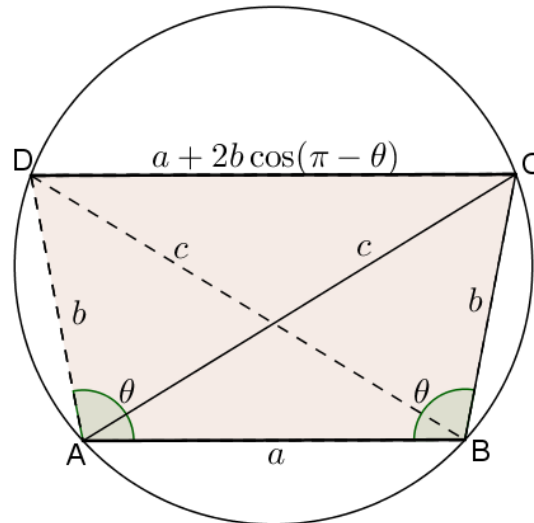
Figura 38 – Teorema de Ptolomeu

Teorema 3.1. (Teorema de Ptolomeu) *O produto das diagonais AC e BD é igual à soma dos produtos dos lados opostos.*

¹⁰ Hiparco foi astrônomo, matemático e geógrafo. Elaborou o primeiro catálogo de estrelas, calculou a distância entre a Terra e a Lua, determinou a duração do ano terrestre, realizou várias descobertas sobre os movimentos e a órbita do Sol, determinou períodos de ocorrência de eclipses lunares e solares e realizou trabalhos na Trigonometria.

¹¹ Cláudio Ptolomeu foi cientista, astrônomo, geógrafo, estudou Física e foi autor dos estudos de Astronomia mais importantes produzidos antes de Copérnico e Galileu. Ptolomeu influenciou a Matemática (em particular, a Trigonometria) propondo um teorema que leva seu nome: Teorema de Ptolomeu.

A *Prova sem Palavras* desta seção se baseia na Figura 39, onde há um trapézio isósceles $ABCD$, inscrito na circunferência. Dela se obtém a relação da Lei dos Cossenos.



$$c \cdot c = b \cdot b + (a + 2b \cos(\pi - \theta)) \cdot a$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Figura 39 – Lei dos Cossenos III

Para explicar essa Prova, será considerado de forma isolada o trapézio isósceles $ABCD$, conforme a Figura 40, e será observado primeiramente o $\triangle ADE$, retângulo em E :

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cos(\pi - \theta).$$

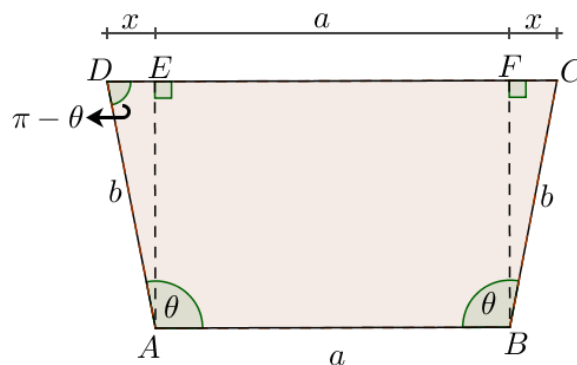


Figura 40 – Trapézio Isósceles ABCD

Baseando-se ainda na mesma figura, tem-se que $\overline{DC} = \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FC}$. Como $\overline{DE} = \overline{FC}$, por ser um trapézio isósceles, e $\overline{EF} = a$ (pelo retângulo $ABFE$), tem-se que:

$$\overline{DC} = x + a + x \Rightarrow \overline{DC} = a + 2x \Rightarrow \overline{DC} = a + 2b \cos(\pi - \theta).$$

Pelo Teorema de Ptolomeu, segue:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$\Rightarrow a[a + 2b \cos(\pi - \theta)] + b \cdot b = c \cdot c$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab \cos(\pi - \theta) + b^2 = c^2.$$

Como $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$, e organizando adequadamente a igualdade, chega-se ao que era proposto:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$

3.3 SENO E COSSENO DE DOIS ARCOS

A mais importante obra trigonométrica da Antiguidade, que contém 13 livros, foi a *Syntaxis Mathematica*, de Ptolomeu de Alexandria. Ele dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120 partes. Usou $\frac{377}{120}$ como aproximação para o número π . Apesar de não fazer uso dos termos seno e cosseno, utilizou a ideia da conhecida relação fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Da mesma forma, Ptolomeu conhecia as propriedades do que hoje chamamos de seno e cosseno da soma e seno e cosseno da diferença (COSTA, 2003).

O Almagesto, como ficou conhecida a grande obra de Ptolomeu, foi a mais importante fonte de consulta para os astrônomos de todo o mundo durante seis séculos. No século VIII os cientistas voltaram a sua atenção para as obras trigonométricas dos Hindus (COSTA, 2003).

Com o tempo, veio a necessidade de uma nova unidade de medida para os ângulos, surgindo o radiano, que primeiramente foi chamado de *p-medida*, *circular* ou *medida arcual*. Seu uso simplificou várias fórmulas matemáticas e físicas (PERFEITOS, 2012).

3.3.1 SENO E COSSENO DA SOMA DE DOIS ARCOS

A expressão do seno da soma de dois arcos α e β é dada por:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha.$$

E a expressão do cosseno da soma de dois arcos α e β é dada por:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta.$$

Nessa *Prova sem Palavras* serão desenvolvidas as duas expressões baseadas na mesma Figura 41.

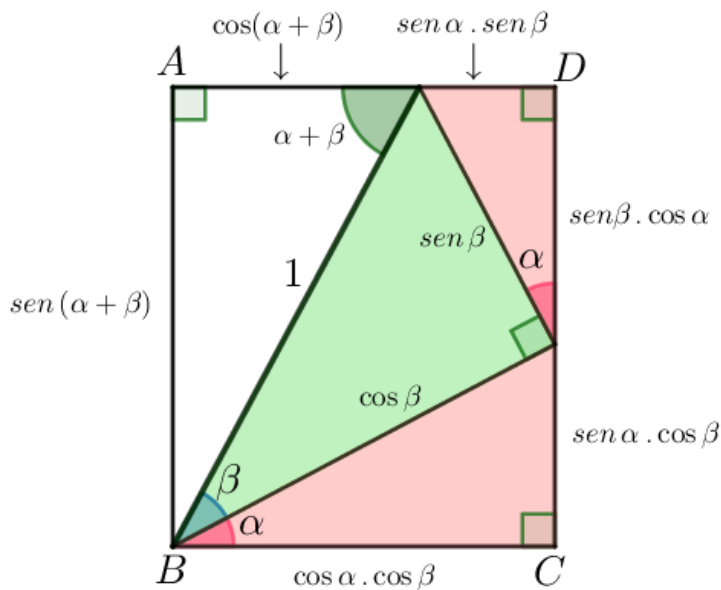


Figura 41 – Seno e Cosseno da Soma de Dois Arcos

Considere-se o retângulo $ABCD$, formado pelos triângulos retângulos ABF , BEF , BCE e DEF .

A hipotenusa do $\triangle BEF$ mede 1 e o ângulo $\widehat{FBE} = \beta$, logo seus catetos medem $\cos \beta$ e $\text{sen } \beta$.

O triângulo retângulo BCE , cuja hipotenusa mede $\cos \beta$, tem $\widehat{EBC} = \alpha$. Logo, os catetos medem $\text{sen } \alpha \cdot \cos \beta$ e $\cos \alpha \cdot \cos \beta$.

No $\triangle ABF$, retângulo em A , $\widehat{AFB} = \alpha + \beta$, pois é alterno interno de $F\widehat{BC}$. Como a hipotenusa vale 1, seus catetos medirão $\text{sen}(\alpha + \beta)$ e $\text{cos}(\alpha + \beta)$.

Finalmente, no $\triangle EFD$, $\widehat{ED} = \alpha$ pelo Teorema 2.3 no $\triangle BCE$. Com isso, seus catetos medem $\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$ e $\text{sen } \beta \cdot \text{cos } \alpha$.

Determinado cada segmento, coloca-se em prática a *Prova sem Palavras*, comparando os lados do retângulo $ABCD$:

$$\bullet \overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta + \text{sen } \beta \cdot \text{cos } \alpha.$$

$$\bullet \overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow \text{cos}(\alpha + \beta) + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta = \text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta$$

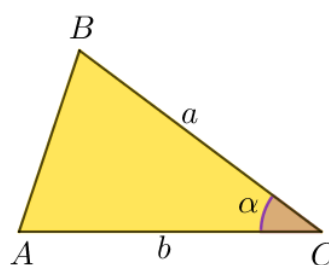
$$\Rightarrow \text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta.$$

3.3.2 SENOS DA SOMA DE DOIS ARCOS II

Para essa seção será utilizada a fórmula da área de um triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido.

Dado um $\triangle ABC$ de lados a e b e ângulo α , conforme a Figura 42. A expressão que representa a área desse triângulo é:

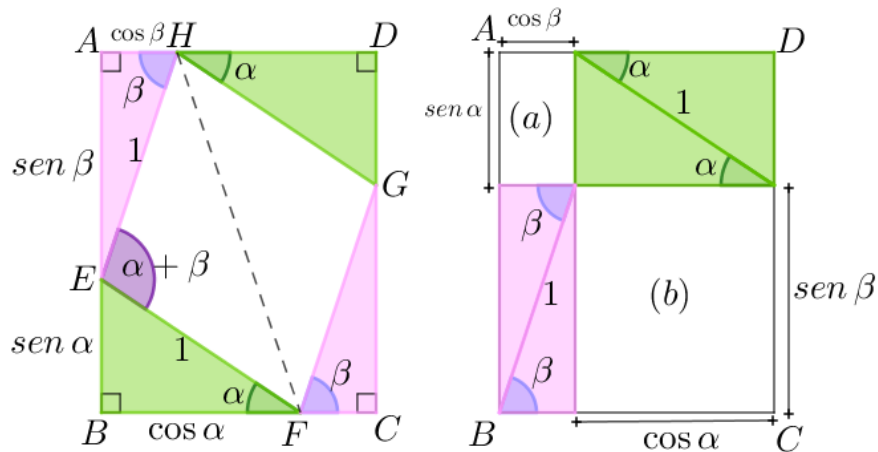
$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{ab \cdot \text{sen } \alpha}{2}.$$



$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{ab \cdot \text{sen } \alpha}{2}$$

Figura 42 – Seno da Soma de Dois Arcos II - Área do Triângulo

Nessa *Prova sem Palavras* tem-se dois triângulos retângulos rosas e dois verdes em torno do losango $EFGH$. O losango tem lado de medida 1 e possui um ângulo obtuso de medida $\alpha + \beta$. Esses triângulos retângulos, juntamente com o losango, formam o retângulo $ABCD$, de acordo com o lado esquerdo da Figura 43.



$$S_{\text{Losango}} = 2 \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{2} = \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha$$

Figura 43 – Seno da Soma de Dois Arcos II

Ao dividir o losango $EFGH$ em dois triângulos para calcular a sua área, obtém-se:

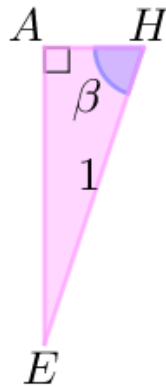
$$S_{\text{Losango}} = 2 \cdot S_{\text{Triângulo}} = 2 \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{2} \Rightarrow S_{\text{Losango}} = \text{sen}(\alpha + \beta).$$

Unindo os dois triângulos retângulos rosas e os dois verdes adequadamente dentro do mesmo retângulo $ABCD$, sobram as áreas dos retângulos (a) e (b), de acordo com o lado direito da Figura 43, que são equivalentes à área do losango $EFGH$.

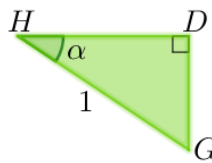
Observando particularmente o triângulo retângulo rosa, de hipotenusa 1 e ângulo β dado, segundo a Figura 44, concluímos que seus catetos medem $\text{sen} \beta$ e $\cos \beta$ pois:

$$\bullet \text{sen} \beta = \frac{\overline{AE}}{\overline{EH}} \Rightarrow \text{sen} \beta = \frac{\overline{AE}}{1} \Rightarrow \overline{AE} = \text{sen} \beta.$$

$$\bullet \cos \beta = \frac{\overline{AH}}{\overline{EH}} \Rightarrow \cos \beta = \frac{\overline{AH}}{1} \Rightarrow \overline{AH} = \cos \beta.$$

Figura 44 – **Triângulo AEH**

De maneira similar, ao observar o triângulo retângulo verde, de hipotenusa 1 e ângulo α dado, seus catetos medirão $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$, conforme a Figura 45.

Figura 45 – **Triângulo GDH**

$$\begin{aligned} \bullet \text{ sen } \alpha &= \frac{\overline{DG}}{\overline{GH}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\overline{DG}}{1} \Rightarrow \overline{DG} = \text{sen } \alpha. \\ \bullet \text{ cos } \alpha &= \frac{\overline{HD}}{\overline{GH}} \Rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{\overline{HD}}{1} \Rightarrow \overline{HD} = \text{cos } \alpha. \end{aligned}$$

Logo, os lados do retângulo (a) são $\text{sen } \alpha$ e $\text{cos } \beta$, e sua área é $\text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta$.

Da mesma forma, os lados do retângulo (b) são $\text{cos } \alpha$ e $\text{sen } \beta$, e sua área é $\text{sen } \beta \cdot \text{cos } \alpha$.

Finalmente, como a área do losango $EFGH$ é equivalente às áreas dos retângulos (a) e (b), conclui-se que:

$$S_{\text{Losango}} = S_{\text{Retângulo (a)}} + S_{\text{Retângulo (b)}} \Rightarrow \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta + \text{sen } \beta \cdot \text{cos } \alpha.$$

3.3.3 SENO E COSSENO DA DIFERENÇA DE DOIS ARCOS

A expressão do seno da diferença de dois arcos α e β é:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta - \text{sen } \beta \cdot \text{cos } \alpha.$$

A expressão do cosseno da diferença de dois arcos α e β é:

$$\text{cos}(\alpha - \beta) = \text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta.$$

Para esta *Prova sem Palavras* serão desenvolvidas as duas expressões baseadas na mesma Figura 46.

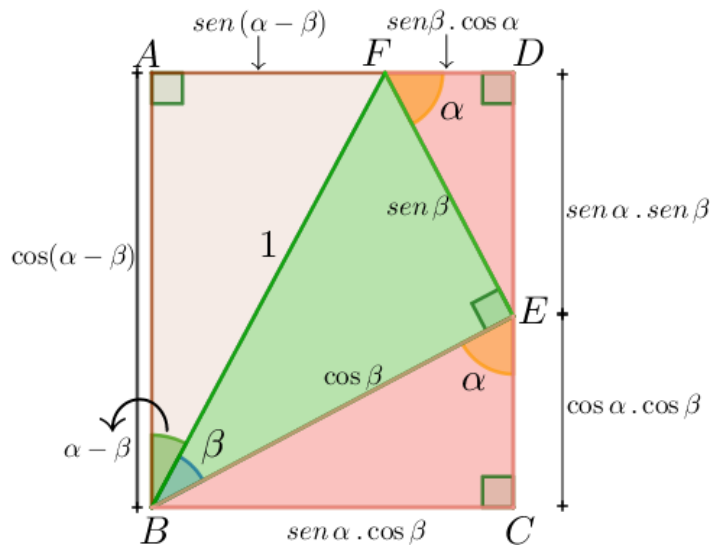


Figura 46 – Seno e Cosseno da Diferença de Dois Arcos

Considere-se o retângulo $ABCD$, formado pelos triângulos retângulos ABF , BEF , BCE e DEF .

A hipotenusa do $\triangle BEF$ mede 1 e o ângulo $F\hat{B}E = \beta$, logo seus catetos medem $\cos \beta$ e $\sin \beta$.

O triângulo retângulo BCE , cuja hipotenusa mede $\cos \beta$, tem $B\hat{E}C = \alpha$. Logo, os catetos medem $\sin \alpha \cdot \cos \beta$ e $\cos \alpha \cdot \cos \beta$.

No $\triangle ABF$, retângulo em A , $A\hat{B}E$ é alterno interno a $B\hat{E}C$, logo $A\hat{B}E = \alpha$. Como $A\hat{B}E = A\hat{B}F + F\hat{B}E$, isso implica que $\alpha = A\hat{B}F + \beta$, ou seja, $A\hat{B}F = \alpha - \beta$. Dessa forma, os catetos do $\triangle ABF$ são $\sin(\alpha - \beta)$ e $\cos(\alpha - \beta)$.

Finalmente, no $\triangle EFD$, tem-se que $E\hat{F}D = \alpha$ pelo Teorema 2.3 no $\triangle BCE$. Com isso, seus catetos medem $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ e $\sin \beta \cdot \cos \alpha$.

Uma vez conhecido cada segmento, comparam-se os lados do retângulo $ABCD$:

- $\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta.$
- $\overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow \sin(\alpha - \beta) + \sin \beta \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \beta$
 $\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha.$

3.3.4 SENO DA DIFERENÇA DE DOIS ARCOS II

Com o cálculo de áreas de triângulos, consegue-se chegar na relação do seno da diferença de dois arcos. Para isso, tem-se a seguinte *Prova sem Palavras*:

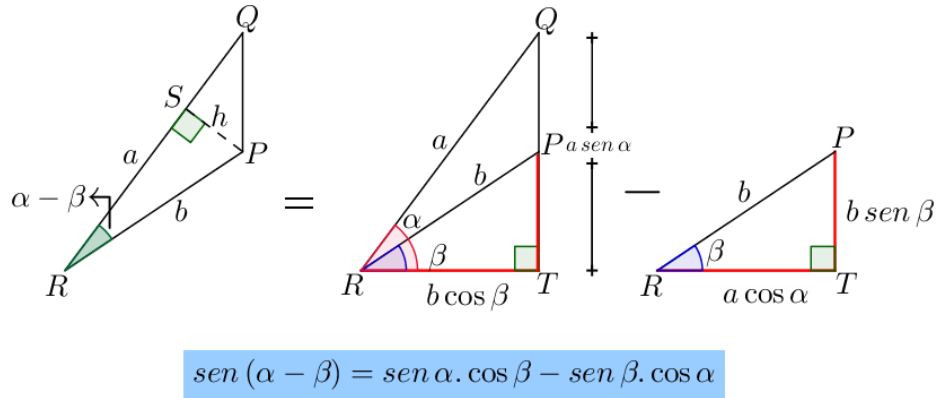


Figura 47 – Seno da Diferença de Dois Arcos II

A área do ΔPQR é a mesma da área do ΔQRT menos a área do ΔPRT . Visualmente pode-se observar que da área do ΔQRT foi retirada a área do ΔPRT , resultando na área do ΔQRP .

Algebricamente, tem-se:

- $S_{\Delta PQR} = \frac{ah}{2}$.
- $S_{\Delta QRT} = \frac{b \cos \beta \cdot a \text{sen} \alpha}{2}$.
- $S_{\Delta PRT} = \frac{a \cos \alpha \cdot b \text{sen} \beta}{2}$.

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{ah}{2} &= \frac{b \cos \beta \cdot a \text{sen} \alpha}{2} - \frac{a \cos \alpha \cdot b \text{sen} \beta}{2} \\ \Rightarrow h &= b \cos \beta \cdot \text{sen} \alpha - b \cos \alpha \cdot \text{sen} \beta. \end{aligned} \quad (1)$$

No ΔPSR :

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha - \beta) &= \frac{h}{b} \\ \Rightarrow h &= b \text{sen}(\alpha - \beta). \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) e (2) tem-se:

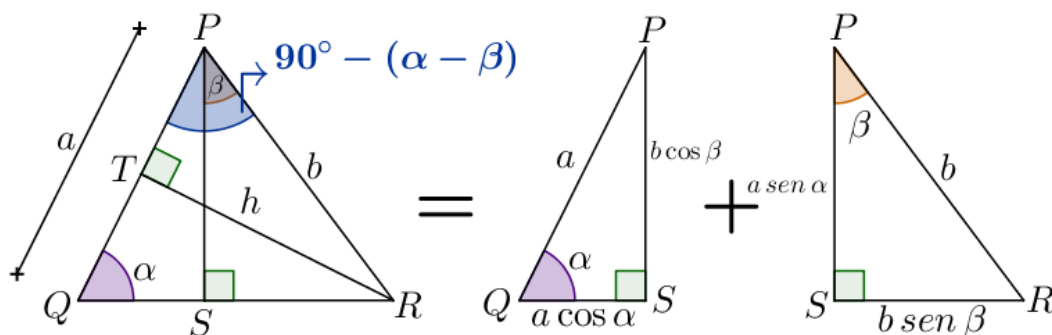
$$\begin{aligned} b \text{sen}(\alpha - \beta) &= b \cos \beta \cdot \text{sen} \alpha - b \cos \alpha \cdot \text{sen} \beta \\ \Rightarrow \text{sen}(\alpha - \beta) &= \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

A mais antiga tábua de senos foi descoberta na Índia, cujos inventores, desconhecidos, conheciam as ideias matemáticas gregas e babilônias.

O matemático hindu Aryabhata ¹² foi o primeiro a trabalhar com o seno de um ângulo, em torno do ano 500. Ele elaborou tabelas que envolviam metade de cordas, que atualmente são tabelas de senos, e usou *jiva* no lugar de seno. Esta tabela foi reproduzida por Brahmagupta ¹³, em 628 e, em 1150, um método para construir uma tabela de senos para qualquer ângulo foi dado por Bhaskara (PERFEITOS, 2012).

3.3.5 COSSENO DA DIFERENÇA DE DOIS ARCOS II

Para este caso, calculando a área de cada triângulo da Figura 48, e comparando a área do ΔPQR com a soma das áreas dos triângulos PQS e PSR , obtém-se a relação procurada.



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

Figura 48 – Cosseno da Diferença de Dois Arcos II

¹² Aryabhata foi o primeiro e maior matemático indiano (476 a 550). Escreveu sobre Aritmética, Álgebra, Trigonometria plana e Trigonometria esférica. Ele adotou um sistema de numeração posicional que é a mesma que adotamos atualmente porém, com outros símbolos.

¹³ Brahmagupta nasceu no ano de 598. Foi matemático e astrônomo da Índia. Demonstrou a solução geral para a equação do segundo grau em números inteiros (diofantinas), desenvolveu métodos algébricos gerais para aplicação na Astronomia e chegou na generalização natural da fórmula de Heron para os quadriláteros cíclicos.

Cabe esclarecer primeiramente a medida do ângulo $Q\hat{P}R$, do triângulo PQR . Para isso, considere-se a Figura 49:

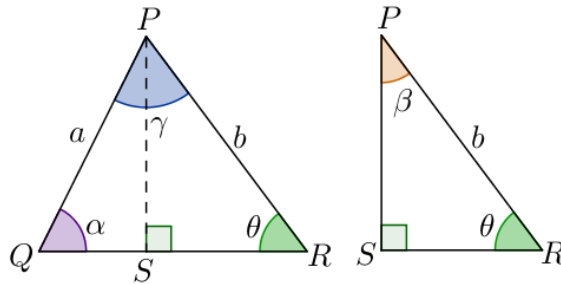


Figura 49 – Cosseno da Diferença de Dois Arcos II - Triângulos PQR e PQS

No ΔPQR tem-se que $\alpha + \theta + \gamma = 180^\circ$, pelo Teorema 2.2, ou seja,

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \theta. \quad (1)$$

Do ΔPSR se obtém $\beta + \theta = 90^\circ$, ou seja,

$$\theta = 90^\circ - \beta. \quad (2)$$

De (1) e (2) tem-se que:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \beta \Rightarrow \gamma = 90^\circ - \alpha + \beta \Rightarrow \gamma = 90^\circ - (\alpha - \beta).$$

E para melhor compreensão algébrica, tem-se:

- $S_{\Delta PQR} = \frac{ah}{2}$.
- $S_{\Delta PQS} = \frac{a \cos \alpha \cdot b \cos \beta}{2}$.
- $S_{\Delta PRS} = \frac{b \operatorname{sen} \beta \cdot a \operatorname{sen} \alpha}{2}$.

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{ah}{2} &= \frac{a \cos \alpha \cdot b \cos \beta}{2} + \frac{b \operatorname{sen} \beta \cdot a \operatorname{sen} \alpha}{2} \\ \Rightarrow h &= b \cos \alpha \cdot \cos \beta + b \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta. \end{aligned} \quad (3)$$

No ΔPRT :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta) \right) &= \frac{h}{b} \\ \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) &= \frac{h}{b} \\ \Rightarrow h &= b \cos(\alpha - \beta). \end{aligned} \quad (4)$$

De (3) e (4) tem-se:

$$b \cos(\alpha - \beta) = b \cos \alpha \cdot \cos \beta + b \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Para contribuir com a seção de materiais do *GeoGebra* no assunto de seno e cosseno da soma e da diferença, destacam-se os *links*:

- <https://www.geogebra.org/m/S2kDAbre> e
- <https://www.geogebra.org/m/tw8Da7zg>.

Neles são vistas as duas funções se movimentarem à medida em que os ângulos vão sendo modificados.

3.4 FÓRMULAS DO ARCO DUPLO

Os árabes trabalharam com senos e cossenos e, em 980, Abu'l - Wafa ¹⁴ já sabia que $\text{sen } 2x = 2 \text{sen } x \cdot \cos x$, apesar de que podia ser deduzido pela fórmula de Ptolomeu $\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cdot \cos y + \text{sen } y \cdot \cos x$, fazendo $x = y$. Assim surgiu a fórmula do seno do arco duplo (PERFEITOS, 2012).

A expressão do seno do arco duplo é dada por:

$$\text{sen } 2\theta = 2 \text{sen } \theta \cdot \cos \theta.$$

E a expressão do cosseno do arco duplo é dada por:

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta.$$

Para a próxima *Prova sem Palavras* será utilizado um importante resultado da Geometria, que está representado na Figura 50 (DOLCE OSVALDO; POMPEO, 2005).

¹⁴ Abú al-Wafá Buzjani (940-998) foi matemático e astrônomo persa. Na Matemática contribuiu principalmente na trigonometria. Introduziu a função tangente e criou um método para calcular tábuas do seno. Ele estabeleceu as seguintes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha + \beta) &= \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha. \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2 \text{sen}^2 \alpha. \\ \text{sen } 2\alpha &= 2 \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Proposição 3.2. *Um ângulo inscrito é metade do ângulo central correspondente ou a medida de um ângulo inscrito é igual a metade da medida do arco correspondente.*

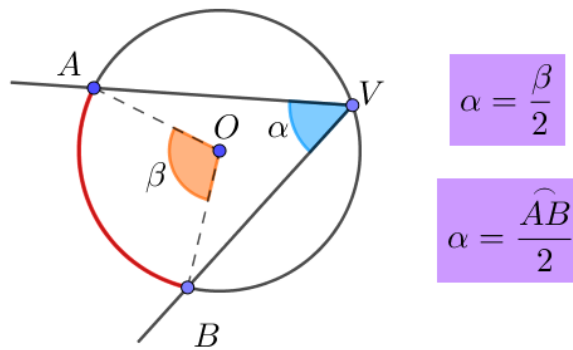


Figura 50 – **Ângulo Inscrito**

A *Prova sem Palavras* apresentada na Figura 51 mostra um triângulo retângulo inscrito na semicircunferência de raio 1. Como \widehat{CAB} e \widehat{COB} possuem o mesmo arco \widehat{BC} , $\widehat{CAB} = \theta$, pois é um ângulo inscrito e $\widehat{COB} = 2\theta$, por se tratar de um ângulo central.

Também faz parte dessa figura um triângulo retângulo OCD , de ângulo $\widehat{COD} = 2\theta$, hipotenusa 1 (pois é o raio da semicircunferência) e catetos $\sin 2\theta$ e $\cos 2\theta$. E o triângulo retângulo ACB , de ângulo $\widehat{CAB} = \theta$, de hipotenusa 2 e catetos $2 \sin \theta$ e $2 \cos \theta$.

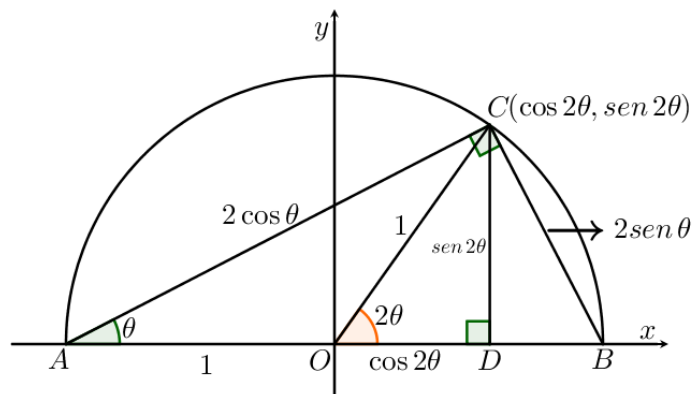


Figura 51 – **Arco Duplo**

Para a demonstração da fórmula do seno e do cosseno do arco duplo, seja o triângulo da Figura 52.

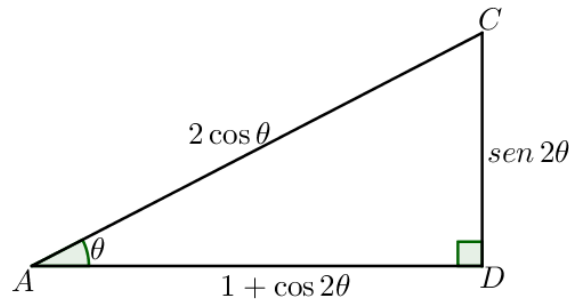


Figura 52 – Triângulo ACD

Nela se pode aplicar as relações trigonométricas do seno e do cosseno:

- $\text{sen } \theta = \frac{\text{sen } 2\theta}{2 \cos \theta} \Rightarrow \text{sen } 2\theta = 2 \text{sen } \theta \cdot \cos \theta.$
- $\cos \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2 \cos \theta} \Rightarrow 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$
 $\Rightarrow \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - (\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)$
 $\Rightarrow \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta.$

Através do link <https://www.geogebra.org/m/joLKGc3a> pode-se perceber como os valores de $\text{sen } 2\theta$ e de $\cos 2\theta$ variam, bastando para isso mover o vértice D na figura.

3.5 FÓRMULAS DO ARCO METADE

Hiparco escreveu sobre o cálculo de comprimentos das cordas. Conhecido o comprimento de um arco, pode-se calcular o seno da metade desse arco, pois a metade do comprimento da corda dividido pelo comprimento do raio do círculo é exatamente esse valor, ou seja, para um círculo de raio unitário, o comprimento da corda subtendida por um ângulo x é $2 \text{sen } \frac{x}{2}$ (PERFEITOS, 2012).

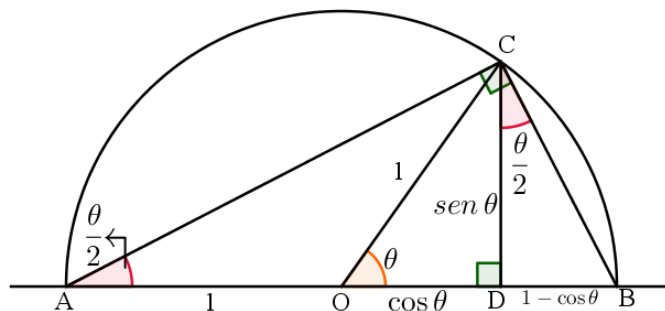
Sobre esse mesmo assunto (PERFEITOS, 2012), Ptolomeu descobriu um método para encontrar a corda subtendida pela metade do arco de uma corda conhecida, ou seja,

$$\text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Considere-se a Figura 53. Percebe-se que no $\triangle ABC$, inscrito na semicircunferência de raio 1, $B\hat{O}C = \theta$ é um ângulo central e $B\hat{A}C$ é um ângulo inscrito, logo $B\hat{A}C = \frac{\theta}{2}$.

Também nessa figura, tem-se o $\triangle OCD$, de hipotenusa 1 e ângulo $C\hat{O}D = \theta$, logo seus catetos são $\text{sen } \theta$ e $\text{cos } \theta$.

Tem-se que $\triangle BCD \sim \triangle BAC$, pois $A\hat{B}C$ pertence a ambos, além dos dois terem um ângulo reto, logo $D\hat{C}B = \frac{\theta}{2}$.



$$\text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{\text{sen } \theta}{1 + \text{cos } \theta} = \frac{1 - \text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}$$

Figura 53 – Arco Metade

No triângulo retângulo BCD , conforme proposto, tem-se:

$$\text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 - \text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}. \quad (1)$$

É costume ver a fórmula da $\text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)$ de outra forma, ou seja,

$$\text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } \theta}{1 + \text{cos } \theta}}.$$

Será demonstrada agora, outra maneira de obter a $\text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)$. Depois, será mostrado que os dois resultados são equivalentes, ou seja,

$$\text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 - \text{cos } \theta}{\text{sen } \theta} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } \theta}{1 + \text{cos } \theta}}.$$

- $\triangle ABC$:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\overline{BC}}{2} \Rightarrow \overline{BC} = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (2)$$

- $\triangle BCD$:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (3)$$

- De (2) e (3), tem-se:

$$2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}.$$

- $\triangle ABC$:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\overline{AC}}{2} \Rightarrow \overline{AC} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (4)$$

- $\triangle ACD$:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos \theta}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{1 + \cos \theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (5)$$

- De (4) e (5), tem-se:

$$2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos \theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos \theta}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}.$$

- Sabe-se que:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \pm \sqrt{\frac{\frac{1 - \cos \theta}{2}}{\frac{1 + \cos \theta}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}.$$

- De (1) tem-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} \\ \Rightarrow \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta) \cdot (1 + \cos \theta)} \\ \Rightarrow \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}. \end{aligned}$$

Com relação a tangente e a cotangente, foram desenvolvidas juntas e inicialmente não foram associadas a ângulos. Elas foram importantes para calcular o comprimento da sombra de um objeto (PERFEITOS, 2012).

Al-Battani foi responsável pelas relações $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ e $\sec \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ (PERFEITOS, 2012).

3.6 OUTRAS RELAÇÕES TRIGONÔMÉTRICAS

Os árabes, em torno do ano 860, desenvolveram as primeiras tabelas de sombras. O nome tangente foi usado pelo dinamarquês Thomas Fincke¹⁵ (1561-1656), em 1583. O termo cotangente foi usado por Edmund Gunter, em 1620. Cavalieri usou Ta e $Ta.2$, Oughtred usou $t \operatorname{arc}$ e $co \operatorname{arc}$, enquanto Wallis usou T e t (PERFEITOS, 2012).

Atualmente é usado \tan ou tg , tendo sido adotada por primeira vez pelo francês Albert Girard¹⁶ (1590–1633) em 1626, com \tan escrito por cima do ângulo, e \cot foi usada por primeira vez por Jonas Moore, em 1674 (PERFEITOS, 2012).

¹⁵ Fincke foi físico, matemático e médico. Sua obra principal é um tratado de funções trigonométricas.

¹⁶ Girard estudou Álgebra, Trigonometria e Aritmética. Publicou um tratado contendo as primeiras abreviaturas sen , \cos , tag . Forneceu fórmulas para o cálculo da área do triângulo e demonstrou que as equações podiam ter raízes negativas e imaginárias.

Primeiramente, será mostrado que $\overline{DE} = \sec \theta$. Para isso, considere a Figura 55.

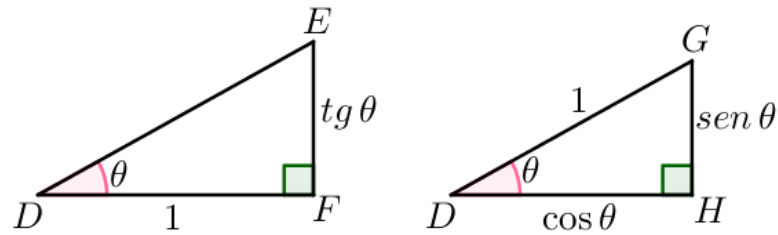


Figura 55 – Triângulos DEF e DGH

Tem-se que $\triangle DHG \sim \triangle DFE$. Logo,

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} \Rightarrow \frac{\cos \theta}{1} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{tg } \theta} = \frac{1}{\overline{DE}}$$

$$\Rightarrow \overline{DE} \cdot \cos \theta = 1 \Rightarrow \overline{DE} = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \overline{DE} = \sec \theta.$$

Agora será mostrado que $\overline{AD} = \text{cossec } \theta$, através da Figura 56.

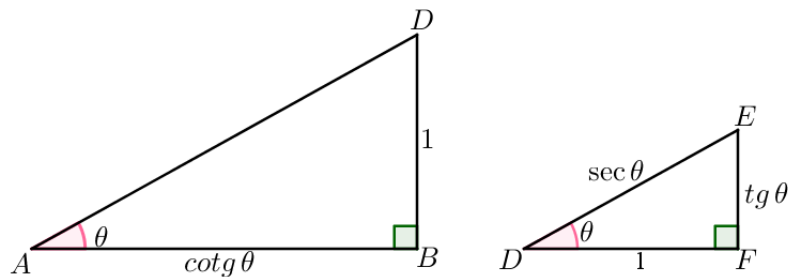


Figura 56 – Triângulos ABD e DFE

Observa-se que $\triangle ABD \sim \triangle DFE$. Logo,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{EF}} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\sec \theta} = \frac{\text{cotg } \theta}{1} = \frac{1}{\text{tg } \theta}$$

$$\Rightarrow \overline{AD} = \text{cotg } \theta \cdot \sec \theta \Rightarrow \overline{AD} = \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{1}{\text{sen } \theta} \Rightarrow \overline{AD} = \text{cossec } \theta.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $\triangle ABD$, $\triangle DFE$ e $\triangle ACE$, conforme a Figura 57, obtém-se:

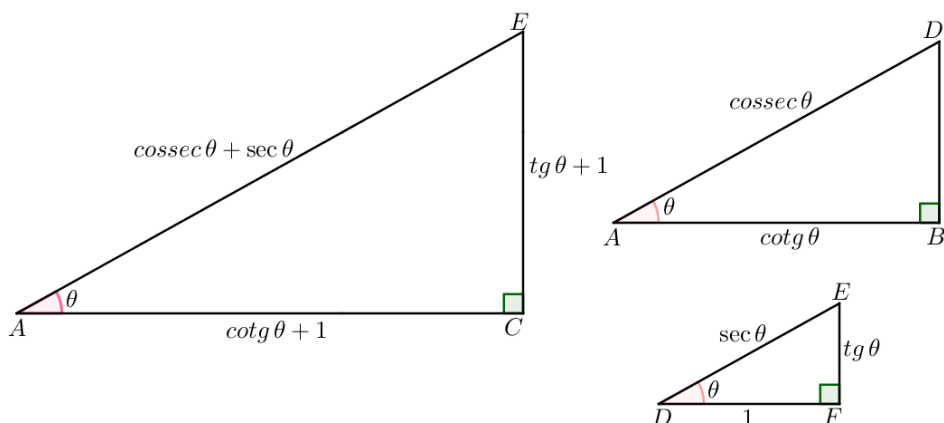


Figura 57 – Triângulos ACE, ABD e DFE

- $\text{cossec}^2 \theta = 1 + \text{cotg}^2 \theta$.
- $\text{sec}^2 \theta = 1 + \text{tg}^2 \theta$.
- $(\text{cossec} \theta + \text{sec} \theta)^2 = (1 + \text{tg} \theta)^2 + (1 + \text{cotg} \theta)^2$.

Quando se trabalha na busca de outras relações trigonométricas normalmente encontra-se mais de uma maneira de representá-las geometricamente. Aqui são sugeridos dois *links* de materiais realizados no *GeoGebra* onde algumas funções estão dispostas de forma diferente. Para comprovação das funções basta trabalhar com a congruência de triângulos.

- <https://www.geogebra.org/m/YGVtBC9y> e
- <https://www.geogebra.org/m/ZdVM7NeM>.

3.7 DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

O estudo da Geometria Analítica é uma parte de grande importância do Ensino Médio. Foi criada pelo matemático francês René Descartes¹⁷ (1596-1650) e estabelece conexões entre Geometria e Álgebra, de modo que os conceitos da Geometria são analisados por meio de processos algébricos.

¹⁷ Descartes foi filósofo, físico e matemático. Sua principal obra foi *O Discurso Sobre o Método*, na qual apresenta o seu método de raciocínio, "Penso, logo existo".

Considere-se um ponto $F(a, b)$, uma reta $r : y = mx + c$ e a distância d entre um ponto e uma reta. A distância entre o ponto F e a reta r é dada por:

$$d(F, r) = \frac{|ma + c - b|}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Dentro do estudo da Geometria Analítica, será mostrada essa *Prova sem Palavras* através de semelhança de triângulos. Baseando-se na Figura 58, tem-se o $\triangle ABC$, de catetos 1 e m , logo a hipotenusa é $\sqrt{1 + m^2}$ e a distância entre F e E é $|ma + c - b|$.

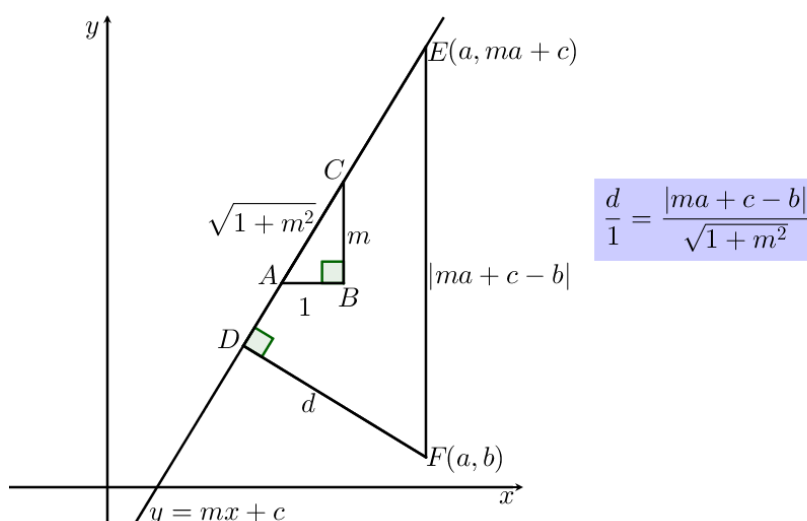


Figura 58 – Distância de Ponto a Reta

Observando que $\triangle FDE$ e $\triangle ABC$ são semelhantes, chega-se à seguinte proporção:

$$\frac{\overline{FD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{AC}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{1} = \frac{|ma + c - b|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

No link <https://www.geogebra.org/m/GppRF3vH> pode-se acompanhar exatamente o que foi realizado nessa seção.

3.8 MONOTONICIDADE DE UMA FUNÇÃO

Nessa seção será dada a definição das funções crescente e decrescente e feita a visualização em cada um dos casos.

Função Crescente A função $f : A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é *crescente* no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1 , com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

Função Decrescente A função $f : A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é *decrecente* no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1 , com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

Quando se ensina sobre o crescimento e decrescimento de uma função, é conveniente traçar os seus gráficos para melhor compreensão do assunto por parte dos alunos. Dessa forma, será mostrado aqui como a simples visualização desses gráficos é uma *Prova sem Palavras*. Para isso, considere-se a Figura 59. Pode-se ver que à medida que x cresce, a imagem $f(x)$ também cresce, enquanto que na Figura 60, à medida que x cresce, a imagem $f(x)$ decresce.

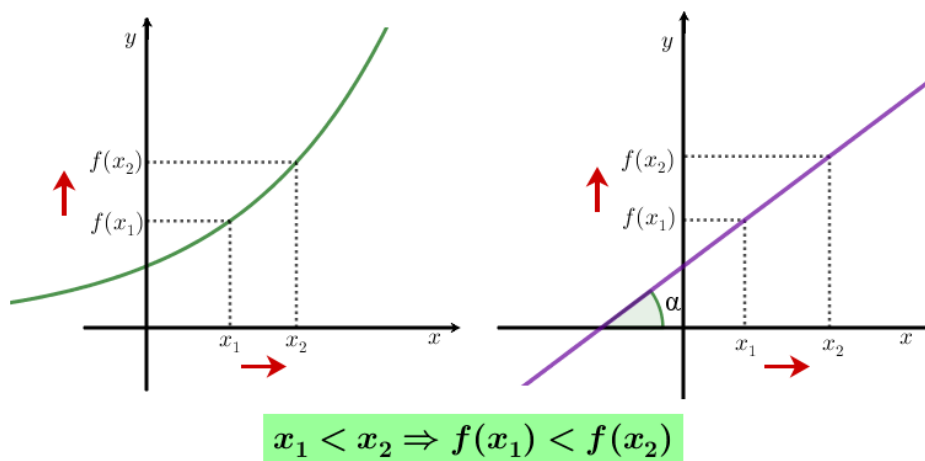


Figura 59 – Funções Crescentes

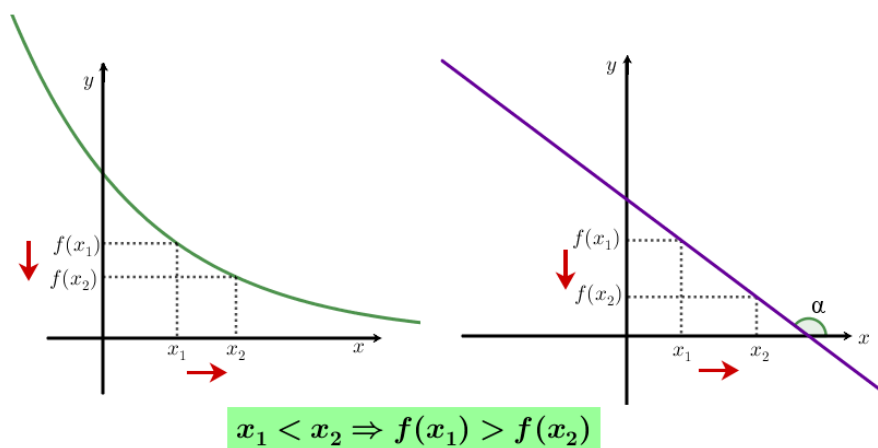


Figura 60 – Funções Decrescentes

3.9 GRÁFICOS DE FUNÇÕES INVERSAS

O assunto sobre Funções, um dos mais extensos abordados no Ensino Médio, envolve gráficos de funções polinomial do 1º e 2º graus, exponencial, modular e logarítmica e das funções inversas. As Figuras abaixo mostram como ocorre o comportamento dessas funções.

Na Figura 61 foi utilizado o caso de duas funções crescentes. Pode-se notar que a reta $y = x$, que é a bissetriz do primeiro quadrante, serve de "espelho", pois reflete a curva $y = f(x)$, que passa por (a, b) . Na imagem oposta se encontra a curva $y = f^{-1}(x)$, que passa pelo ponto (b, a) . Inclusive, nota-se por essa figura que a distância entre esses pontos citados é a diagonal de um quadrado de lado $a - b$, cujos outros dois vértices são (a, a) e (b, b) , que são os pontos pertencentes à bissetriz citada. Dessa forma, fica clara a simetria entre as curvas.

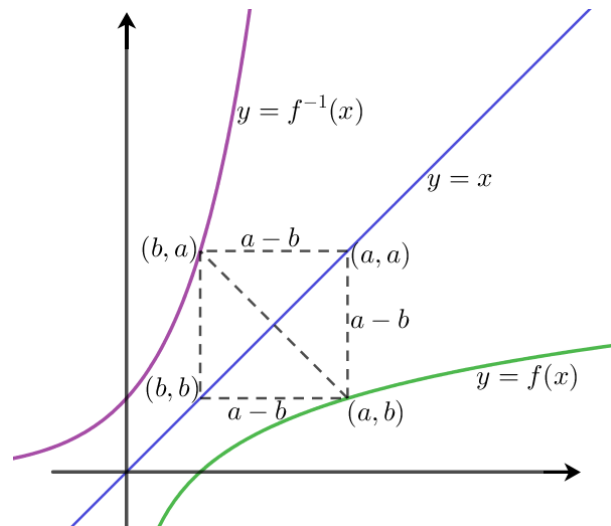


Figura 61 – Função Inversa - Funções Crescentes

Passando para a Figura 62, que mostra duas funções decrescentes, percebe-se que o mesmo ocorre com relação à reta $y = x$, refletindo a curva $y = f(x)$, que passa pelos pontos (a, b) e (c, d) , formando o mesmo quadrado de lado $a - b$ e vértices conforme citado acima, e a sua inversa, que passa pelos pontos (b, a) e (d, c) , formando um quadrado de lado $d - c$, cujos outros vértices são (c, c) e (d, d) .

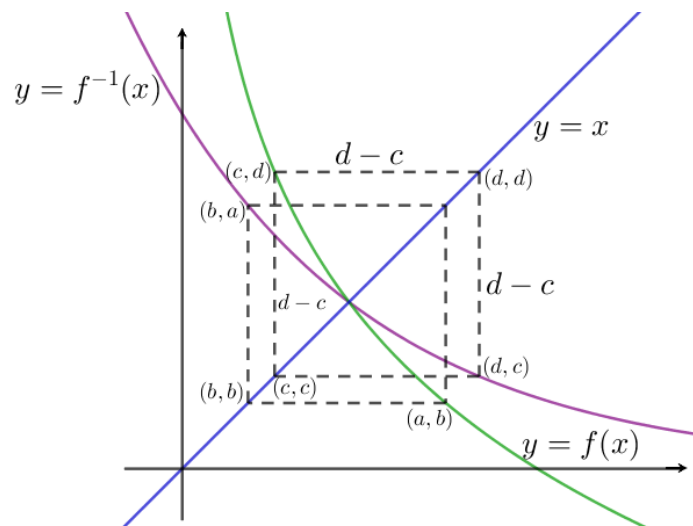


Figura 62 – Função Inversa - Funções Decrescentes

3.10 PROGRESSÃO ARITMÉTICA - SOMA DE INTEIROS

A fórmula para a soma dos primeiros n inteiros positivos é uma das fórmulas mais elementares envolvendo números inteiros. Nesta seção, será provada a fórmula por indução e, em seguida, serão exibidas duas *Provas sem Palavras*.

Proposição 3.3. A identidade $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vale para $n = 1$, pois $\frac{1}{2} \cdot 1(1+1) = 1$.

Supondo que a identidade é válida para $n = k$. Deve-se mostrar que vale para $n = k + 1$, ou seja:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2).$$

Sabe-se, pela hipótese de indução, que $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k + 1)$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{1}{2}k(k + 1) + (k + 1) \\ &= (k + 1) \left(\frac{1}{2}k + 1 \right) \\ &= (k + 1) \left(\frac{1}{2}k + \frac{2}{2} \right) \\ &= (k + 1) \frac{1}{2} (k + 2) \\ &= \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2). \end{aligned}$$

Logo vale para $k + 1$. Então, pelo Princípio da Indução Finita, vale para todo $n > 0$. \square

A seguir serão apresentadas as *Provas sem Palavras* sobre esta identidade.

3.10.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA - SOMA DE INTEIROS I

Nessa seção será mostrado que a soma $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$ dos primeiros n inteiros positivos é igual à metade de $n^2 + n$.

Considere-se a Figura 63:

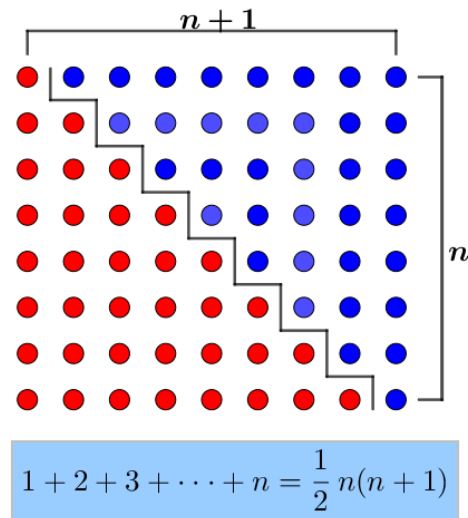


Figura 63 – Progressão Aritmética - Soma de Inteiros

Observa-se que há duas somas: uma representada por bolinhas vermelhas e outra representada por bolinhas azuis, que se pode escrever da seguinte forma:

$$\begin{cases} S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n. \\ S_n = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1. \end{cases}$$

Somando ambas as equações, tem-se:

$$\begin{aligned} 2S_n &= (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \dots + (n + 1) \\ &= \underbrace{(n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1)}_{n \text{ vezes}} \\ &= n(n + 1). \end{aligned}$$

Ou seja:

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Para acompanhar a soma gradativamente (Figura 64) o *link* abaixo oferece essa possibilidade, inclusive envolvendo simetria:

- <https://www.geogebra.org/m/czUQweag>.

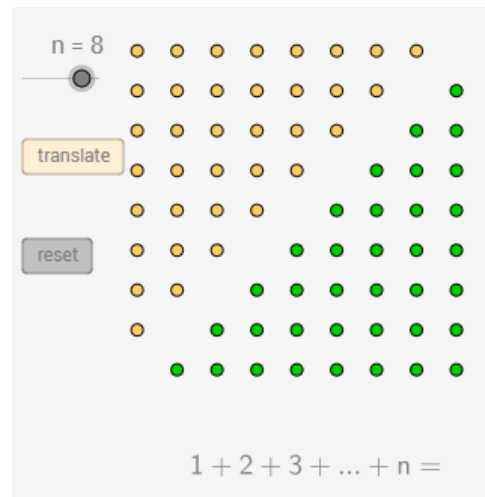


Figura 64 – **Progressão Aritmética - Soma de Inteiros I - GeoGebra I**

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/czUQweag>. Acesso em: 08/01/2018.

Também nos *links* abaixo pode-se perceber essa soma, representadas nas Figuras 65 e 66:

- <https://www.geogebra.org/m/ufxG9eHn> e
- <https://www.geogebra.org/m/C5Bgyeh5>.

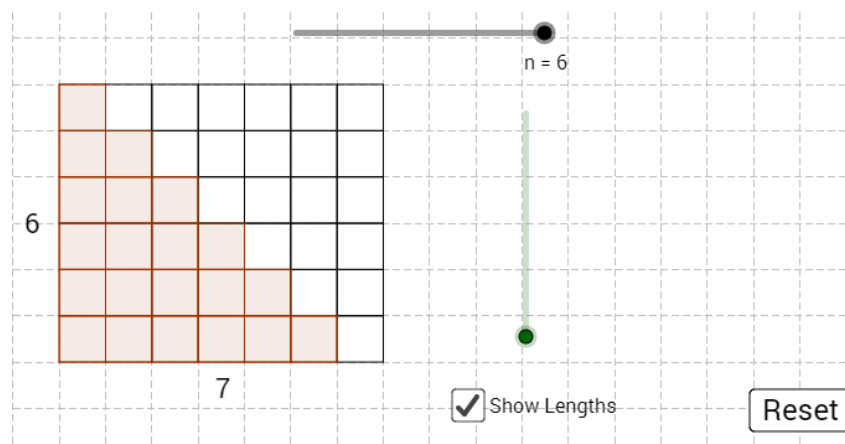


Figura 65 – **Progressão Aritmética - Soma de Inteiros I - GeoGebra II**

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/ufxG9eHn>. Acesso em: 08/01/2018.

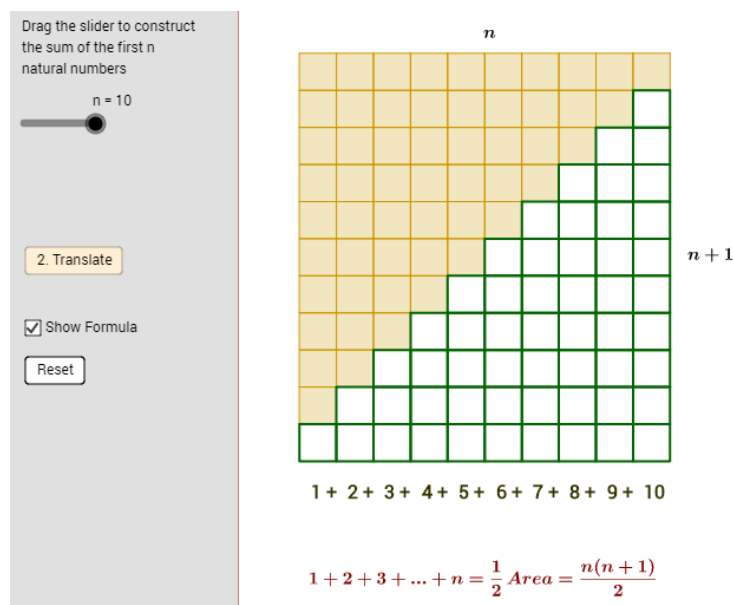


Figura 66 – Progressão Aritmética - Soma de Inteiros I - GeoGebra III

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/C5Bgveh5>. Acesso em: 08/01/2018.

3.10.2 PROGRESSÃO ARITMÉTICA - SOMA DE INTEIROS II

A segunda *Prova sem Palavras* para essa soma está representada na Figura 67:

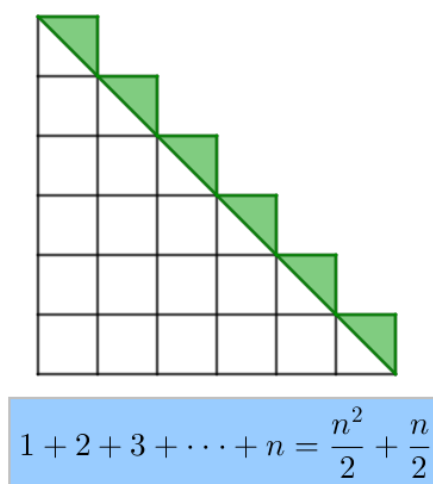


Figura 67 – Progressão Aritmética - Soma de Inteiros II

Nela pode-se observar que a área do triângulo de lado 6 e altura também 6 será 18 unidades; depois, somando a área de 6 quadrados e dividindo por 2, obtém-se o total de quadrados da figura, que é 21. Generalizando, tem-se portanto a área de um triângulo com uma altura de comprimento n unidades e uma base de comprimento n unidades, que resulta $\frac{n^2}{2}$. A área que falta a ser adicionada é $\frac{1}{2}$ multiplicada por n , sendo n o número de unidades quadradas. Estas

são as metades dos quadrados sombreados, $\frac{n}{2}$.

Como sugestão de animação pode-se acessar os *links*:

- <http://www.math.utah.edu/palais/sums.html> e
- <https://www.geogebra.org/m/YYdPDUqS>.

Esse último transmite exatamente o que foi exposto nessa seção.

3.11 PROGRESSÃO ARITMÉTICA - SOMA DE INTEIROS ÍMPARES

A Progressão Aritmética é comumente ensinada citando a história de Gauss ¹⁸ que, quando criança, para surpresa de seu professor, realizou em poucos instantes a tarefa pedida, ou seja, somar os números de 1 a 100. Dessa forma, tornou conhecida a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Nesta seção será provada essa identidade por indução e na sequência serão mostradas três *Provas sem Palavras*.

Proposição 3.4. *A identidade $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Vale para $n = 1$, pois $(2 \cdot 1 - 1) = 1 = 1^2$.

Supondo que a identidade é válida para $n = k$. Deve-se mostrar que vale para $n = k + 1$, ou seja:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + 2(k + 1) - 1 = (k + 1)^2.$$

Sabe-se, pela hipótese de indução, que $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + 2(k + 1) - 1 &= k^2 + 2(k + 1) - 1 \\ &= k^2 + 2k + 2 - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

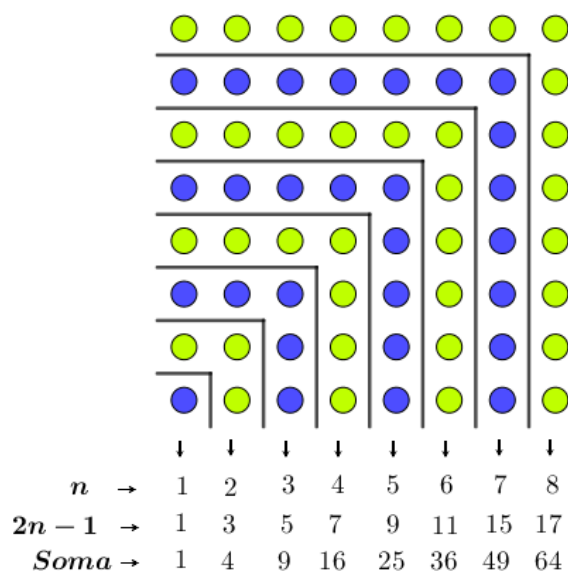
Logo, vale para $k + 1$. Então, pelo Princípio da Indução Finita, vale para todo $n > 0$. \square

Segue a apresentação das *Provas sem Palavras* para esta identidade.

¹⁸ Carl Friedrich Gauss (1777-1855) iniciou seus estudos de aritmética aos dez anos e aos 15 anos estudou as obras mais notáveis de Euler, Lagrange e Newton, quando começa com suas pesquisas sobre Aritmética superior e recebe o título de "Príncipe da Matemática". Também se dedicou à Astronomia e à Geodésia. Foi o inventor de números inteiros complexos e está considerado, ao lado de Arquimedes e Newton, como um dos três gênios da Matemática de todos os tempos.

3.11.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA - SOMA DE INTEIROS ÍMPARES I

A primeira *Prova sem Palavras* sobre esse tema se refere à Figura 68, que indica o número ímpar de bolinhas, alternando entre azuis e verdes, e mostrando a soma total de bolinhas, conforme tabela abaixo da própria figura.



$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Figura 68 – Soma de Inteiros Ímpares I

Ao desenvolver essa soma, o [link](https://www.geogebra.org/m/zq8vnzhf) <https://www.geogebra.org/m/zq8vnzhf> propõe interagir a visualização com a soma numérica, unido ao movimento. Pode-se acompanhar a situação nas Figuras 69 e 70.

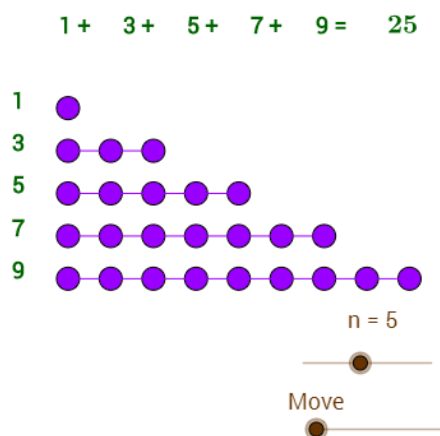


Figura 69 – Soma de Inteiros Ímpares I - GeoGebra I

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

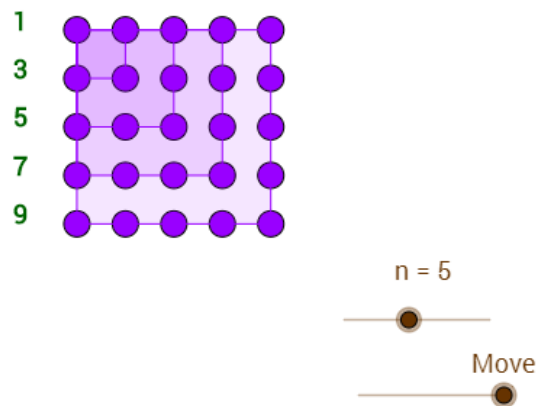


Figura 70 – Soma de Inteiros Ímpares I - GeoGebra II

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/zq8vznzhf>. Acesso em: 08/01/2018.

3.11.2 PROGRESSÃO ARITMÉTICA - SOMA DE INTEIROS ÍMPARES II

Baseando-se na Figura 71, tem-se para essa segunda forma de prova visual um triângulo isósceles de base contendo 11 bolinhas, cuja soma, generalizando para qualquer $n \in \mathbb{N}$, é

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

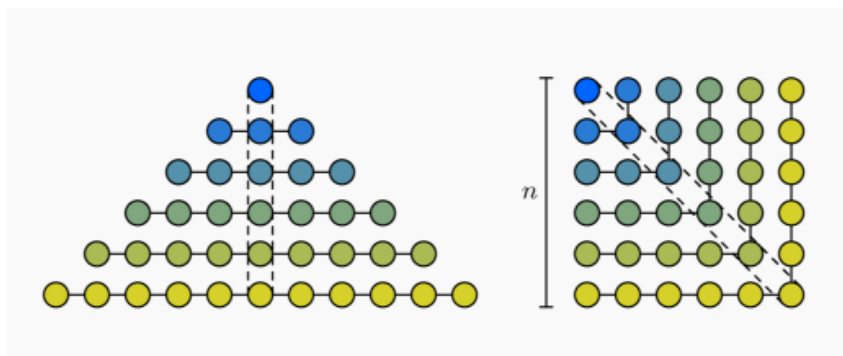


Figura 71 – Soma de Inteiros Ímpares II

Fonte: <https://math.stackexchange.com/questions/1561570/easy-way-of-memorizing-or-quickly-deriving-summation-formulas>. Acesso em: 04/12/2017.

Nota-se que no triângulo há uma bolinha na primeira linha, três na segunda linha, cinco bolinhas na terceira, e assim por diante, sempre um número ímpar de bolinhas. Colocando a coluna do meio do triângulo como sendo a diagonal do quadrado, ficarão dois triângulos menores e iguais, os quais serão encaixados um acima da diagonal do quadrado e o outro abaixo dessa diagonal, obtendo-se, assim, a representação visual da soma total de bolinhas do triângulo, na

forma geral $(1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1))$, agora dispostos na formação do quadrado. Tendo cada lado do quadrado um número n de bolinhas, a soma total será, portanto, n^2 .

3.11.3 PROGRESSÃO ARITMÉTICA - SOMA DE INTEIROS ÍMPARES III

Finalmente, será apresentada a terceira forma de *Prova sem Palavras* referente à soma de números ímpares. Para isso, considere-se a Figura 72:

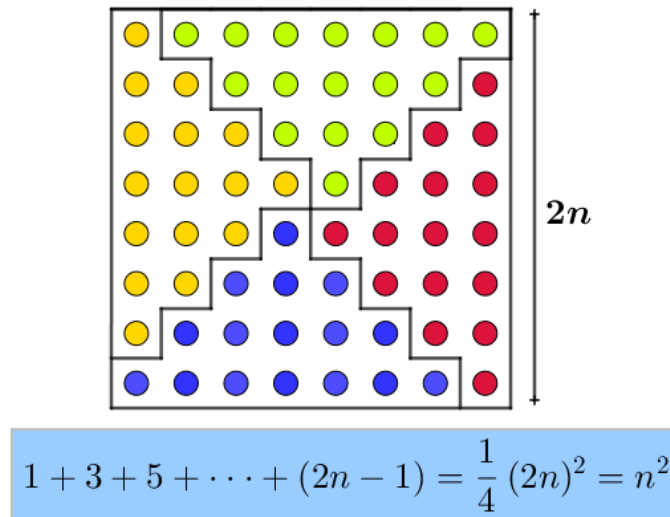


Figura 72 – Soma de Inteiros Ímpares III

Observa-se que, tomando apenas como exemplo as bolinhas azuis do quadrado cujo lado é formado por 8 bolinhas, tem-se, assim como no caso da Soma de Inteiros Ímpares II, uma bolinha na primeira linha, três na segunda linha, cinco bolinhas na terceira, e assim por diante, sempre um número ímpar de bolinhas. Isso representará, na forma geral, $[1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)]$. Como se repete quatro vezes essa situação (bolinhas azuis, verdes, amarelas e vermelhas), em relação ao quadrado todo, cada soma dessas será a quarta parte do total de bolinhas. Considerando cada lado do quadrado com $2n$ bolinhas se terá $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{1}{4}(2n)^2 = n^2$.

3.12 QUADRADOS E SOMAS DE INTEIROS I

Nesta seção será desenvolvida uma forma diferente de soma de números inteiros que resulta em quadrados perfeitos, será provada a identidade por indução e mostradas duas *Provas sem Palavras* abordando este tema.

Proposição 3.5. A identidade $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = n^2$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vale para $n = 1$, pois $1^2 = 1$.

Supondo que a identidade é válida para $n = k$. Deve-se mostrar que vale para $n = k + 1$, ou seja:

$$1 + 2 + \dots + (k - 1) + k + (k + 1) + k + (k - 1) + \dots + 2 + 1 = (k + 1)^2.$$

Sabe-se, pela hipótese de indução, que $1 + 2 + \dots + (k - 1) + k + (k - 1) + \dots + 2 + 1 = k^2$

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + \dots + (k - 1) + k}_{k^2} + (k + 1) + k + \underbrace{(k - 1) + \dots + 2 + 1}_{k^2} &= \underbrace{k^2}_{k^2} + (k + 1) + k \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Logo, vale para $k + 1$. Então, pelo Princípio da Indução Finita, vale para todo $n > 0$. \square

A soma citada se visualiza através da *Prova sem Palavras* da Figura 73.

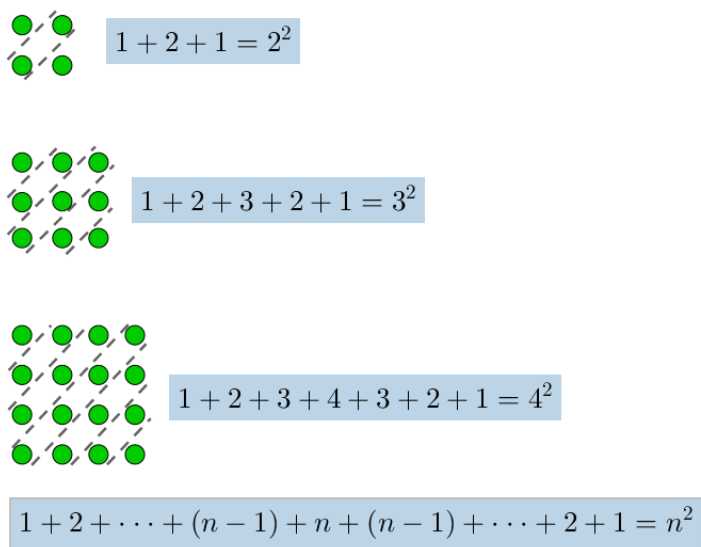


Figura 73 – Quadrados e Somas de Inteiros I

Nela pode-se ver que, ao somar as bolinhas das diagonais, tem-se o total de bolinhas que representa sempre um número quadrado perfeito, chegando finalmente na identidade procurada.

3.13 QUADRADOS E SOMAS DE INTEIROS II

A representação visual a seguir apresenta uma soma de inteiros ímpares resultando em soma de quadrados perfeitos.

Proposição 3.6. A identidade $1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) + \dots + 3 + 1 = n^2 + (n + 1)^2$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vale para $n = 1$, pois $(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 1 - 1) = 1 + 3 + 1 = 1 + 4 = 1^2 + (1 + 1)^2$.

Supondo que a identidade é válida para $n = k$. Deve-se mostrar que vale para $n = k + 1$, ou seja:

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) + [2(k + 1) + 1] + (2k + 1) + (2k - 1) + \dots + 3 + 1 = (k + 1)^2 + (k + 2)^2.$$

Sabe-se, pela hipótese de indução, que

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) + (2k - 1) + \dots + 3 + 1 = k^2 + (k + 1)^2.$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1)} + [2(k + 1) + 1] + (2k + 1) + \underbrace{(2k - 1) + \dots + 3 + 1} = \\ & = \underbrace{k^2 + (k + 1)^2}_{+ (2k + 3) + (2k + 1)} \\ & = (k + 1)^2 + k^2 + 4k + 4 \\ & = (k + 1)^2 + (k + 2)^2. \end{aligned}$$

Logo, vale para $k + 1$. Então, pelo Princípio da Indução Finita, vale para todo $n > 0$. \square

Na Figura 74 é possível observar a soma através da *Prova sem Palavras*.

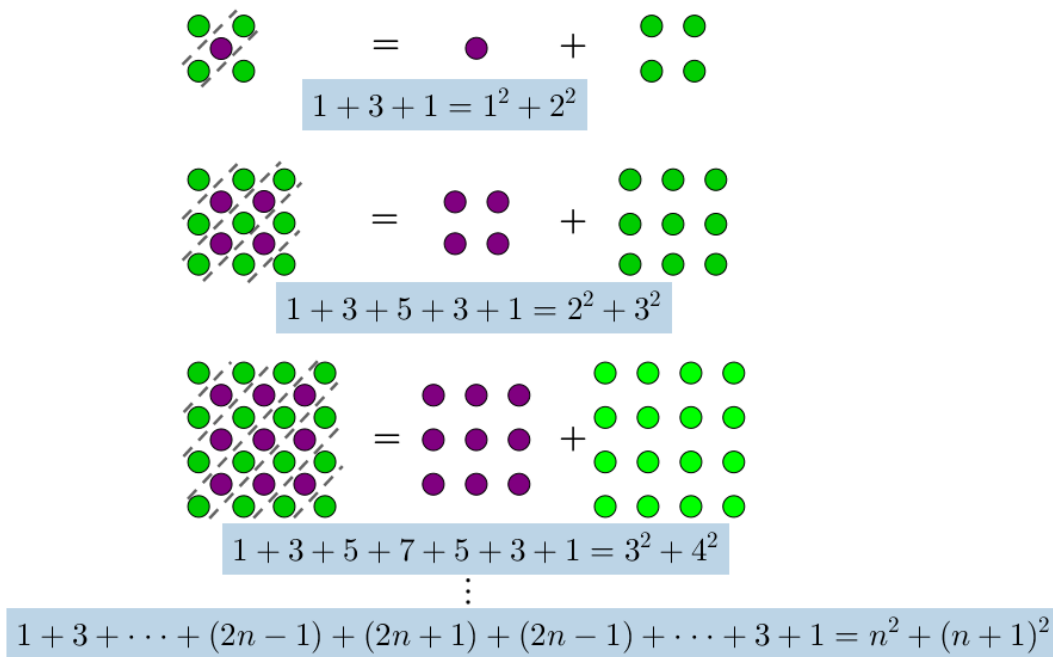


Figura 74 – Quadrados e Somas de Inteiros II

Para o primeiro caso, tomando as bolinhas em diagonal tem-se a mesma ideia do item anterior, porém com uma bola no centro, representada aqui pela cor roxa. Isolando essa bola, tem-se a representação de um quadrado de uma única bola (portanto lado um), somada ao quadrado de duas bolas de lado, ou seja, de área quatro. Para o segundo caso, novamente com a ideia de somar o número de bolinhas em diagonal, obtém-se $1 + 3 + 5 + 3 + 1$. Ao isolar as bolas de cor roxa se terá a figura de um quadrado de lado dois (área de quatro bolinhas) somado ao quadrado de lado três (área de nove bolinhas), o que resulta em $2^2 + 3^2$. Dessa forma, continuando a realizar essa sequência será obtida a fórmula geral.

3.14 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA - SOMA INFINITA

O conteúdo de Progressões Geométricas, estudado no Ensino Médio, também é explorado em *Provas sem Palavras*. Aqui será provada a fórmula para a soma dos primeiros n termos de uma PG e, em seguida, será feita a dedução da fórmula da soma infinita usando o conceito de limite. Também serão exibidas três *Provas sem Palavras* sobre esse tema.

Proposição 3.7. *Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma Progressão Geométrica de razão $q \neq 1$ e*

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

$$\text{Então } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Demonstração. Será feita por indução sobre n .

Vale para $n = 1$, pois

$$\frac{a_1(q^1 - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(q - 1)}{q - 1} = a_1 = S_1.$$

Supondo que a fórmula é válida para $n = k$, isto é, $S_k = \frac{a_1(q^k - 1)}{q - 1}$. Deve-se mostrar que também é válida para $n = k + 1$, ou seja:

$$S_{k+1} = \frac{a_1(q^{k+1} - 1)}{q - 1}.$$

$$\begin{aligned} S_{k+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} &= S_k + a_{k+1} \\ &= \frac{a_1(q^k - 1)}{q - 1} + a_{k+1} \\ &= \frac{a_1q^k - a_1 + a_1q^{k+1} - a_1q^k}{q - 1} \\ &= \frac{a_1(q^{k+1} - 1)}{q - 1}. \end{aligned}$$

Pelo Princípio da Indução Finita, a fórmula é válida para todo $n > 0$. □

Agora, se $|q| < 1$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. Logo $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$.

3.14.1 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA - SOMA INFINITA I

Considere-se a Figura 75, onde se apresenta a soma geométrica.

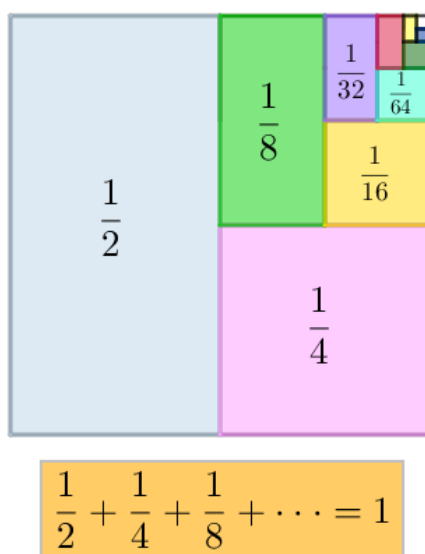


Figura 75 – **Progressão Geométrica - Soma Infinita I**

Nessa prova visual tem-se um quadrado de lado 1 que foi dividido ao meio e tomado uma dessas metades. Da metade que sobrou divide-se ao meio novamente e toma-se a metade (que é a metade da metade), ou seja, $\frac{1}{4}$. Do que sobrou toma-se novamente a metade ($\frac{1}{8}$ do total), e assim sucessivamente. A ideia é que se continuar realizando essa ação e for somando cada área tomada indefinidamente, chegará ao quadrado de lado 1.

Observa-se que a sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ é uma PG que tem como primeiro termo $a_1 = \frac{1}{2}$ e razão $q = \frac{1}{2}$. Logo, a soma infinita dos termos dessa PG será $\frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

3.14.2 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA - SOMA INFINITA II

Uma maneira de mostrar a soma infinita de uma PG de primeiro termo 1 e razão r é baseada na Figura 76.

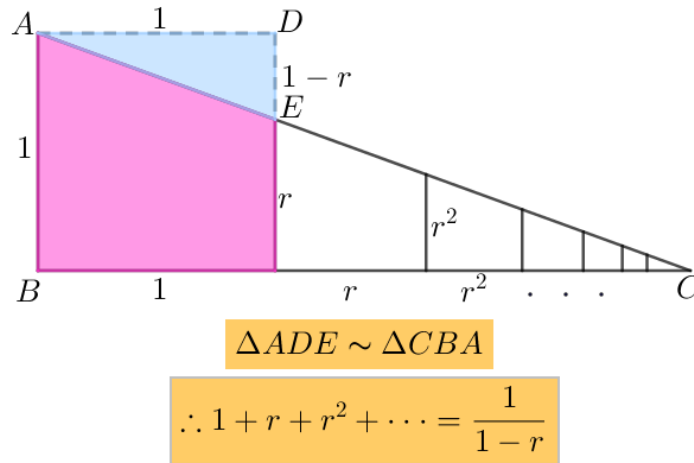


Figura 76 – Progressão Geométrica - Soma Infinita II

A justificativa para $\overline{GH} = r^2$ é dada a seguir, conforme a Figura 77:

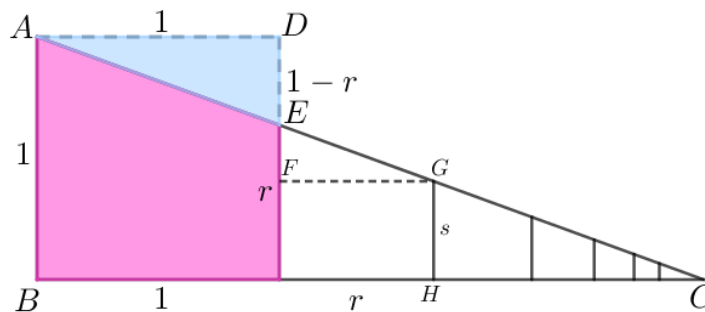


Figura 77 – Progressão Geométrica - Triângulo EFG

$$\Delta EFG \sim \Delta EDA \Rightarrow \frac{\overline{FG}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \Rightarrow s = r^2$$

Para os demais segmentos traçados paralelos a \overline{GH} , faz-se de maneira análoga, obtendo assim $\overline{BC} = 1 + r + r^2 + \dots$

Baseada na Figura 76, tem-se que o $\Delta ADE \sim \Delta CBA$, logo: $\frac{\overline{CB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{DE}}$

$$\Rightarrow 1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1 - r}.$$

Para a visualização desse caso, ao acessar o *link* da Figura 78, poderá ser observado que a fórmula da soma infinita da PG se obtém através da semelhança de triângulos.

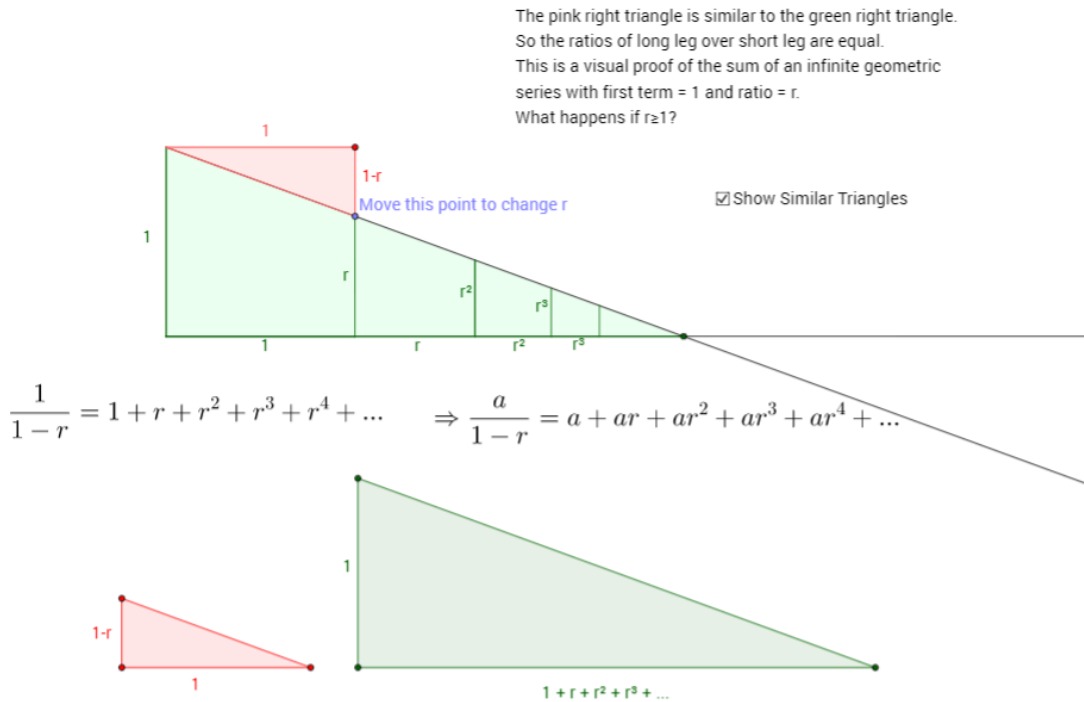


Figura 78 – **Progressão Geométrica - Soma Infinita II - GeoGebra**

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/Wej6dqm8>. Acesso em: 08/01/2018.

3.15 VOLUME DE TRONCO DE PIRÂMIDE DE BASE QUADRADA

O volume do tronco de uma pirâmide quadrada costuma ser visto com muita frequência no Ensino Médio. A próxima *Prova sem Palavras* retrata uma maneira diferente de ser desenvolvida, para chegar à fórmula desse volume.

Na Figura 79 há um tronco de pirâmide de base maior b e base menor a , cuja altura é h .

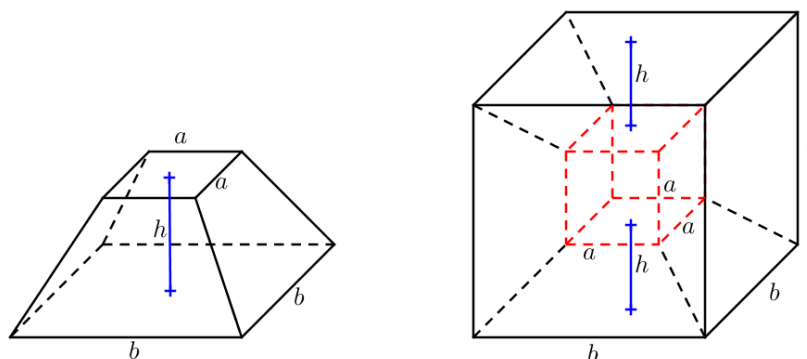


Figura 79 – **Volume de Tronco de Pirâmide de Base Quadrada**

Se forem colocados nesse tronco de pirâmide outros quatro troncos iguais nas laterais (um em cada face), e outro tronco na parte superior, pode-se perceber que será formado um cubo grande de aresta b , porém com um cubo não preenchido internamente de aresta a . Isso significa que o volume de cada tronco de pirâmide colocado terá $\frac{1}{6}$ do volume do cubo maior menos o volume do cubo menor. Escrito de outra forma:

$$V_{Tronco} = \frac{1}{6}(b^3 - a^3).$$

Como também se pode observar, a aresta b do cubo maior terá a mesma medida de duas alturas h do tronco inicial mais a aresta a do cubo menor. Escrito de outra maneira,

$$b = 2h + a \quad \Rightarrow \quad b - a = 2h. \quad (1)$$

Desenvolvendo $V_{Tronco} = \frac{1}{6}(b^3 - a^3)$ se terá:

$$V_{Tronco} = \frac{1}{6}(b^3 - a^3) = \frac{1}{6}(b - a)(a^2 + b^2 + ab). \quad (2)$$

De (1) e (2), tem-se:

$$V_{Tronco} = \frac{1}{6}2h(a^2 + b^2 + ab) = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab),$$

que é a fórmula do tronco de uma pirâmide de base quadrada.

Segue, como sugestão, o link <https://www.geogebra.org/m/JWMSFnW8>, sobre tronco de pirâmide. A Figura 80 mostra partes da animação.

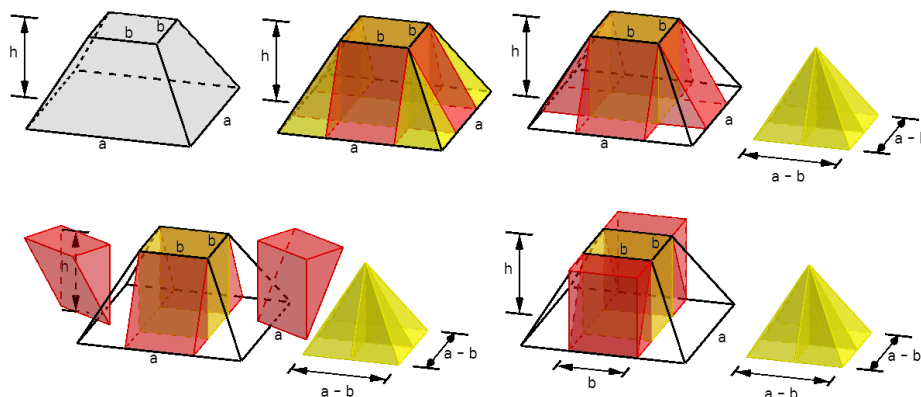


Figura 80 – Volume de Tronco de Pirâmide de Base Quadrada - *GeoGebra*

No link <https://www.geogebra.org/m/qXuz2q3q>, a título de curiosidade, há um excelente trabalho visual em três dimensões, onde se pode observar o volume de um cubo comparativamente ao de seis pirâmides de base quadrada. Pode-se acompanhar parte da animação pela Figura 81.

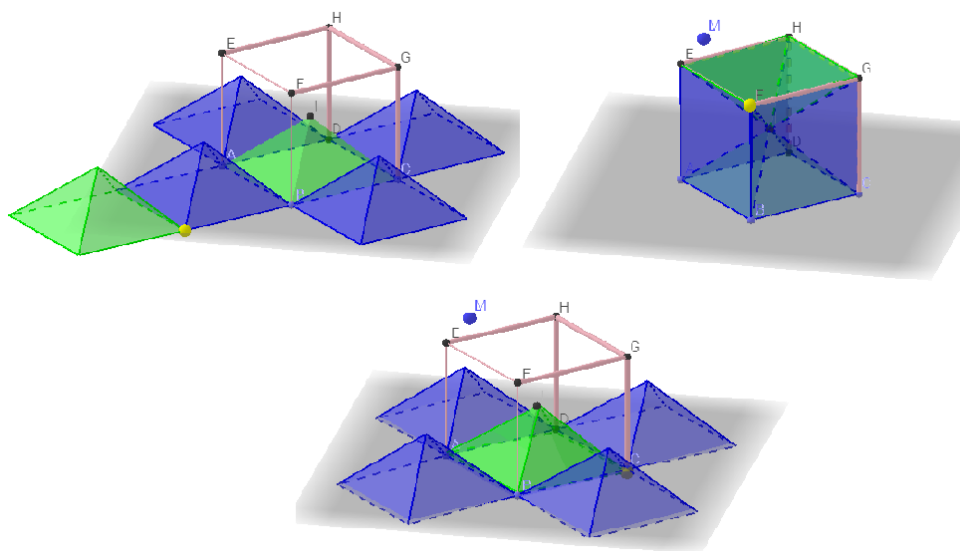


Figura 81 – Volume de Pirâmide e de Cubo

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/qXuz2q3q>. Acesso em: 08/01/2018.

3.16 PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Cavalieri foi precursor do cálculo infinitesimal. Ele, juntamente com o alemão Johannes Kepler¹⁹ (1571-1630) e outros matemáticos, inventaram e usaram métodos intuitivos infinitesimais para resolver problemas de área e volume. Vinte anos após a publicação da *Stereometria Doliorum* de Kepler, Cavalieri escreveu um livro muito popular: *Geometria indivisibilibus* (1635). Nele, o matemático italiano usou o que agora é conhecido como o Princípio de Cavalieri (VISUALES, 2018).

Princípio de Cavalieri:

Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes) (DOLCE OSVALDO; POMPEO, 2005).

O chinês Zu Geng²⁰ (450-520) foi um matemático que usava o que agora é conhecido como o Princípio de Liu Hui e Zu Geng para calcular o volume de uma esfera. A teoria de

¹⁹ Kepler foi um importante matemático e astrônomo, responsável pela elaboração das *Leis do Movimento Planetário*. Aperfeiçoou invenções de Galileu Galilei e deixou importantes trabalhos que influenciaram nas futuras descobertas de Isaac Newton.

²⁰ foi um matemático que veio de uma família famosa que, há muitas gerações, produziu excelentes matemáticos. Calculou como encontrar o diâmetro de uma esfera de um determinado volume.

Liu-Zu é equivalente ao Princípio de Cavalieri, que foi usada pelos matemáticos chineses por mais de um milênio antes de Cavalieri (VISUALES, 2018).

Nas seguintes subseções serão apresentadas algumas aplicações do Princípio de Cavalieri.

3.16.1 VOLUME DE ESFERA

O cálculo do volume de uma esfera é um exemplo de aplicação do Princípio de Cavalieri. Com base na Figura 82 será comparado o volume de uma semiesfera de raio R com o volume da metade de uma anticlépsidra. É importante lembrar que uma anticlépsidra é um sólido resultante quando se retiram dois cones de um cilindro equilátero²¹ de raio R .

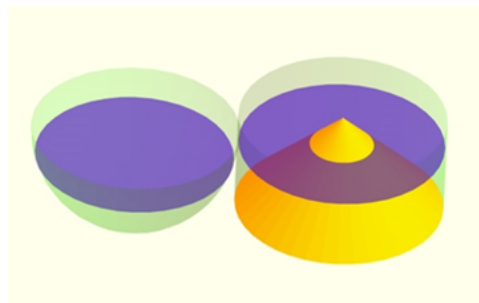


Figura 82 – Volume de Esfera

Fonte: <http://www.matematicasvisuales.com/english/html/history/cavalieri/cavalierisphere.html>. Acesso em: 11/12/2017.

Usando o Princípio de Cavalieri, primeiramente serão seccionados os sólidos da Figura 83 por um plano horizontal e será mostrado que a área da secção de um hemisfério e a área de uma secção da metade de uma anticlépsidra são iguais.

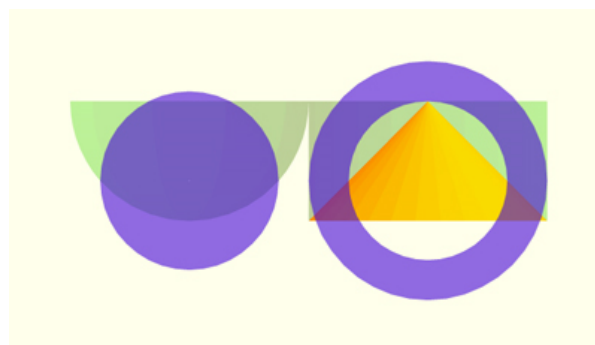


Figura 83 – Secção de um Hemisfério e da Metade de uma Anticlépsidra

Fonte: <http://www.matematicasvisuales.com/english/html/history/cavalieri/cavalierisphere.html>. Acesso em: 11/12/2017.

Através da secção do hemisfério, que é um círculo, tem-se o triângulo retângulo de hipotenusa R , que é o raio da esfera, e catetos h e r , sendo h a distância entre o centro da esfera

²¹ Um cilindro é chamado equilátero quando a sua altura equivale ao diâmetro da base.

e a secção hemisférica, e r o raio dessa secção, segundo a Figura 84.

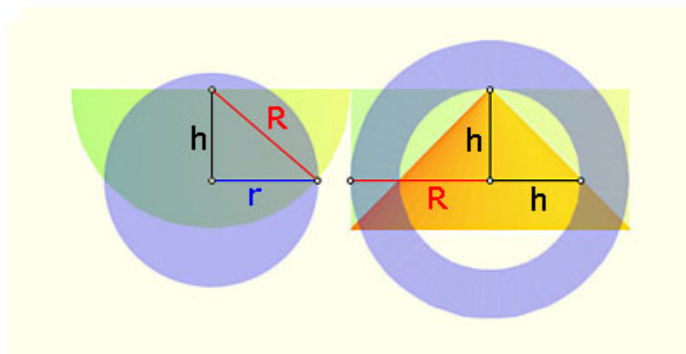


Figura 84 – Áreas das Secções

Fonte: <http://www.matematicasvisuales.com/english/html/history/cavalieri/cavalierisphere.html>. Acesso em: 11/12/2017.

Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se $R^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - h^2$.

Para cada altura h , a área desse círculo será:

$$S_{\text{Círculo}} = \pi(R^2 - h^2).$$

A coroa circular, formada pela secção da metade da anticlépsidra, terá um círculo grande de raio R , de mesmo raio da esfera, e um círculo pequeno de raio h . Calculando a área da coroa circular, tem-se:

$$S_{\text{Coroa circular}} = \pi R^2 - \pi h^2 = \pi(R^2 - h^2).$$

Ou seja, foi mostrado que de fato o círculo e a coroa circular possuem a mesma área.

Com esse resultado, e sabendo que o raio da semiesfera é a mesma medida da altura do cilindro e do cone, pelo Princípio de Cavalieri, percebe-se pela Figura 85 que os dois sólidos têm o mesmo volume.

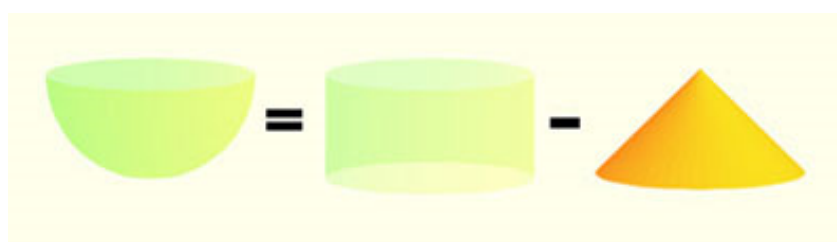


Figura 85 – Volume de Semiesfera

Fonte: <http://www.matematicasvisuales.com/english/html/history/cavalieri/cavalierisphere.html>. Acesso em: 11/12/2017.

Algebricamente, tem-se:

$$V_{Semiesfera} = V_{Cilindro} - V_{Cone}$$

$$V_{Semiesfera} = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Logo, o volume da esfera de raio R será:

$$V_{Esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Importante citar que Arquimedes ²² (287–212 a.C), há 1800 anos, já era conhecedor desse resultado.

Além do *link* de onde se baseou essa seção, pode-se acessar os *links* seguintes que oferecem uma visualização dinâmica comparativa entre a esfera e a anticlépsidra:

- <https://www.geogebra.org/m/GxSqfeAV>,
- <https://www.geogebra.org/m/bVvwsMXN> e
- <https://www.geogebra.org/m/CF5nRDVu>.

3.16.2 VOLUME DE SEMIESFERA

Nesta seção será mostrada outra *Prova sem Palavras* realizada no século V por Tzu Geng, filho do matemático mais célebre da antiga China, Tzu Chung Chih. Acredita-se que ele tenha sido o primeiro a desenvolver a ideia do princípio que Cavalieri, muito tempo depois, veio a estudar. O objetivo é chegar na fórmula do volume da esfera, para isso, serão comparadas as secções de uma pirâmide de base quadrada e de uma semiesfera para, posteriormente, utilizar o Princípio de Cavalieri e comparar os seus respectivos volumes.

²² Arquimedes foi físico, matemático e inventor grego. Inventou a *Espiral de Arquimedes* e a alavanca. Desenvolveu as fórmulas da área da superfície e do volume da esfera, como também as fórmulas para os cilindros nos quais a esfera pudesse se ajustar.

Partindo de uma pirâmide de base quadrada de lado r , de altura $2\pi r$, cujo vértice tem projeção num dos vértices desse quadrado, formando portanto duas faces na forma de triângulos retângulos, traça-se um plano, a uma altura h , conforme a Figura 86.

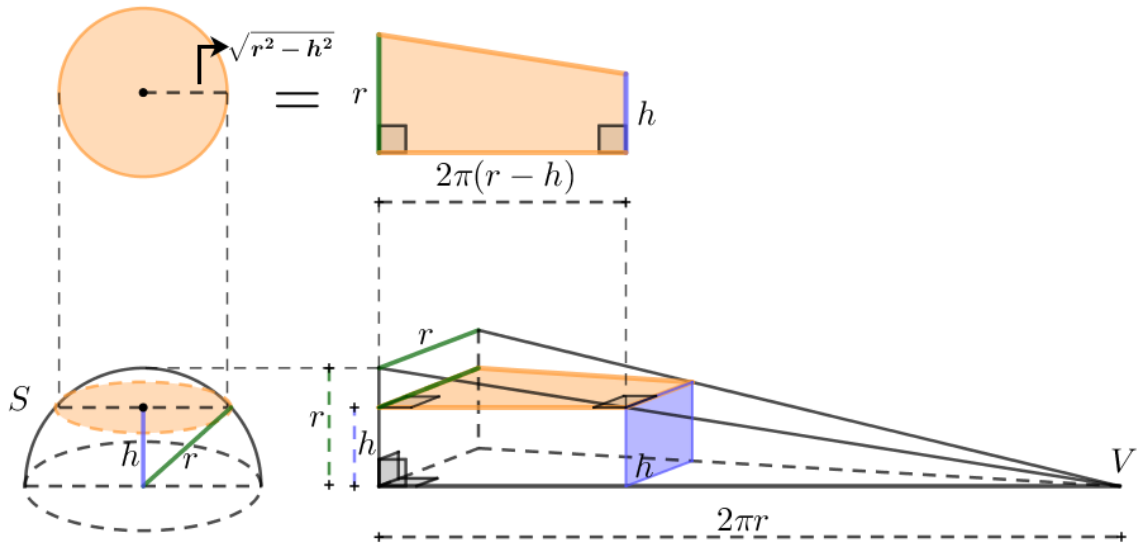


Figura 86 – Volume de Semiesfera

A secção paralela à base desta pirâmide será um quadrado de lado h pela propriedade: se a base da pirâmide de vértice V é um quadrado, então todo corte paralelo à base será um quadrado, independentemente da posição de V , conforme a Figura 87.

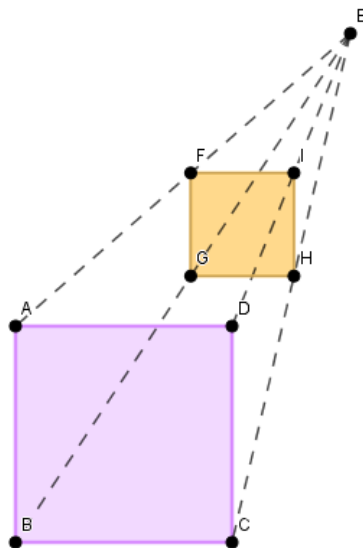


Figura 87 – A Secção da Pirâmide é um Quadrado

Desta forma, pode-se comparar a base da pirâmide e desta secção, para encontrar a medida H da altura do tronco da pirâmide, aplicando proporções, segundo a Figura 88.

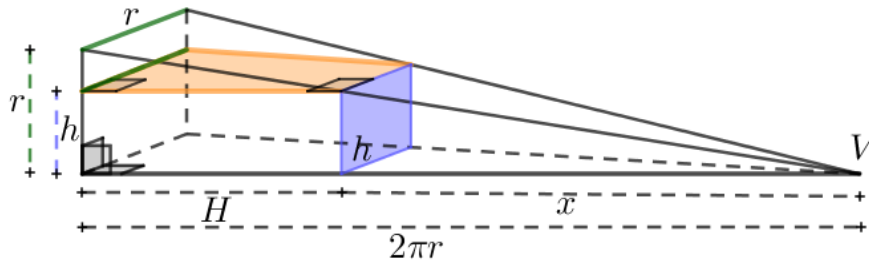


Figura 88 – Pirâmide

$$\frac{x}{h} = \frac{2\pi r}{r} \Rightarrow x = 2\pi h.$$

Como $H = 2\pi r - x$, tem-se:

$$H = 2\pi r - 2\pi h \Rightarrow H = 2\pi(r - h).$$

Tomando a secção formada pelo plano traçado inicialmente, a uma altura h , vertical à base da pirâmide, e calculando a sua área, de acordo com a Figura 89, obtém-se:

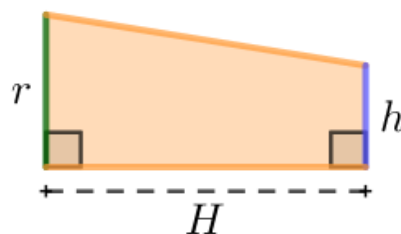


Figura 89 – Secção da Pirâmide

$$S_{\text{Trapezoidal}} = \frac{(r + h)2\pi(r - h)}{2} \Rightarrow S_{\text{Trapezoidal}} = \pi(r^2 - h^2).$$

Seja agora a semiesfera de raio r , cuja secção dista h do centro da mesma, e seja r' o raio desta secção. Tem-se que r , h , e r' formam um triângulo retângulo de hipotenusa r , de acordo com a Figura 90.

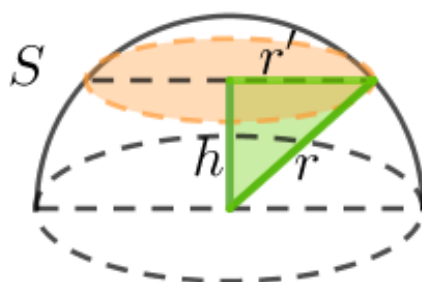


Figura 90 – Secção da Semiesfera

Aplicando o Teorema de Pitágoras para calcular a medida do raio dessa secção, obtém-se:

$$r^2 = r'^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad r' = \sqrt{r^2 - h^2}.$$

O cálculo da área desta secção será:

$$A_{\text{círculo}} = \pi r'^2 \quad \Rightarrow \quad A_{\text{círculo}} = \pi(r^2 - h^2).$$

Logo, as áreas das secções da pirâmide e da semiesfera são iguais, qualquer que seja o plano secante paralelo a um plano dado, assim como seus volumes são iguais, de acordo com o Princípio de Cavalieri:

$$V_{\text{Semiesfera}} = V_{\text{Pirâmide}} = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

3.16.3 PROBLEMA DO ANEL DE GUARDANAPO

A forma do anel de guardanapo origina-se de uma esfera. Ao passar um cilindro cortante através do centro da esfera, obtém-se o anel de guardanapo, conforme a Figura 91.

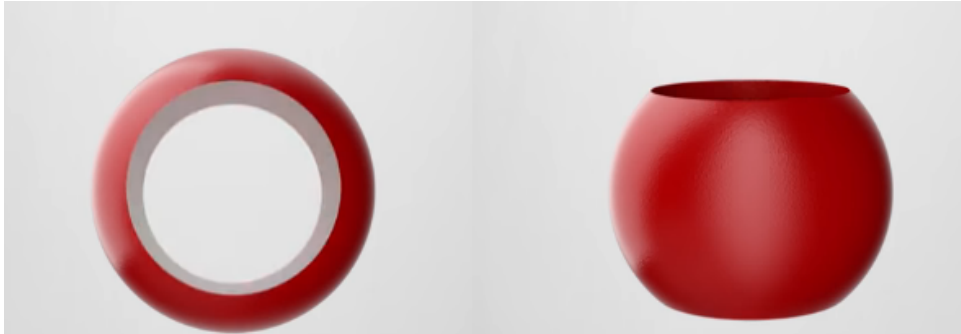


Figura 91 – Anel de Guardanapo

Fonte: <https://steemit.com/steemstem/@mcfarhat/the-napkin-ring-paradox>. Acesso em: 28/02/2018.

Surpreendentemente, o volume do anel de guardanapo não depende do raio da esfera original, apenas da altura.

Usando o Princípio de Cavalieri, será mostrado que:

Quaisquer dois anéis de guardanapo, com a mesma altura, terão o mesmo volume, independentemente do tamanho de suas esferas originais.

Ou seja, se houver uma esfera do tamanho de uma bola de tênis e outra do tamanho de uma bola de basquete, por exemplo, cortando anéis de guardanapos de mesma altura, ambos terão exatamente o mesmo volume, sendo que o menor teria um anel mais grosso, conforme se pode constatar na Figura 92. É nesta figura que se baseia a *Prova sem Palavras* desta seção.

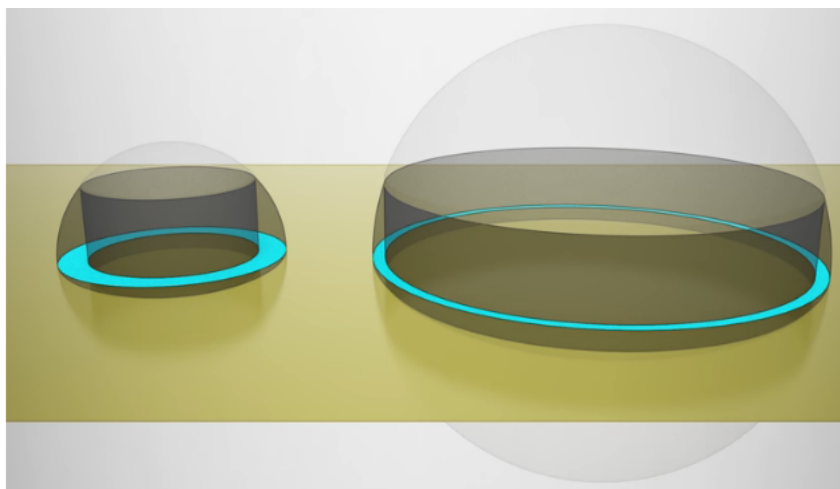


Figura 92 – Anel de Guardanapo - Coroa Circular

Fonte: <https://steemit.com/steemstem/@mcfarhat/the-napkin-ring-paradox>. Acesso em: 28/02/2018.

Neste problema será mostrado que a área da coroa circular independe do raio R da esfera. Para isso, considere-se uma semiesfera de raio R e um plano paralelo a sua base, a uma distância h . Este plano determina, na semiesfera, uma secção de raio r_1 e área πr_1^2 , conforme a Figura 93. Esta secção é a do cilindro cortante que determina o anel de guardanapo de altura $2h$, considerando as duas semiesferas.

Ao traçar outro plano paralelo à base, a uma distância qualquer x , $0 \leq x \leq h$, tem-se outra secção, de raio r_2 e área πr_2^2 .

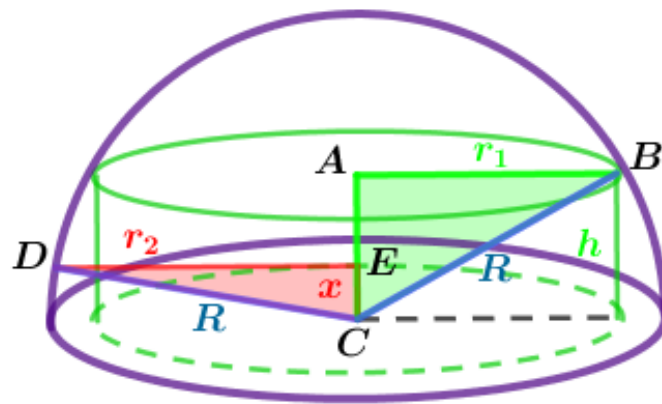


Figura 93 – Anel de Guardanapo - Princípio de Cavalieri

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ABC e CDE , conforme a Figura 94, tem-se:

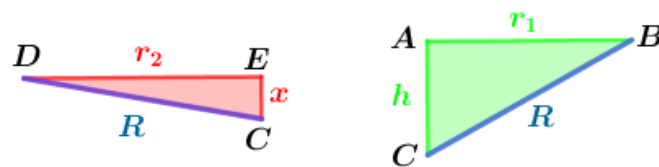


Figura 94 – Anel de Guardanapo - Triângulos

$$\triangle ABC : \quad R^2 = r_1^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad r_1^2 = R^2 - h^2.$$

$$\triangle CDE : \quad R^2 = r_2^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad r_2^2 = R^2 - x^2.$$

Considerando-se a coroa circular formada pelas duas secções citadas, tem-se:

$$S_{Coroa\ circular} = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 \quad \Rightarrow \quad S_{Coroa\ circular} = \pi(R^2 - x^2 - R^2 + h^2)$$

$$\Rightarrow \quad S_{Coroa\ circular} = \pi(h^2 - x^2).$$

Como os cálculos anteriores valem para todo x , $0 \leq x \leq h$, pode-se aplicar o Princípio de Cavalieri e concluir que os volumes de dois anéis de guardanapo que possuem a mesma altura $2h$ são iguais.

4 ATIVIDADES PROPOSTAS PARA SALA DE AULA

Para esse capítulo foram propostas algumas atividades para serem realizadas em sala de aula pelos professores e alunos. Tratam-se de atividades que deverão ser aplicadas em grupo, com orientações por parte do professor que deverá, na medida do possível, encaminhá-las pouco a pouco para que os estudantes cheguem às conclusões desejadas.

4.1 ATIVIDADE (1): ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

A Geometria Plana é um conteúdo que possibilita ser desenvolvido de forma diversificada com os alunos. Com base nisso, essa próxima atividade foi desenvolvida com o intuito dos estudantes manipularem as formas geométricas de diferentes maneiras, até chegar à superfícies equivalentes.

Para realizar essa atividade é necessário saber de antemão os conceitos de algumas formas geométricas, tais como paralelogramo, triângulo retângulo, triângulo acutângulo e obtusângulo, trapézio, losango, e saber calcular as áreas do retângulo e do círculo.

4.1.1 PARALELOGRAMO E RETÂNGULO

Serão distribuídos aos alunos as formas geométricas que formam o paralelogramo. O objetivo dessa atividade é que cheguem, com essas duas formas geométricas, a um retângulo, conforme a Figura 95.

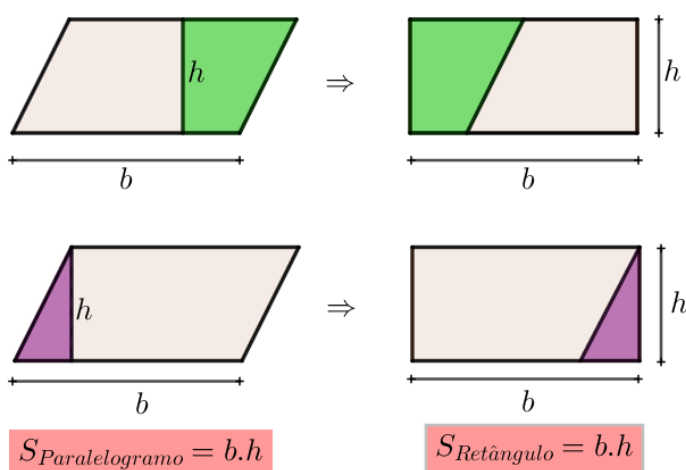


Figura 95 – Atividade - Área de Paralelogramo e Retângulo

Dessa maneira eles perceberão que a área dos dois polígonos são equivalentes quando se tem a mesma base e a mesma altura.

Através do *link* <https://www.geogebra.org/m/rV5zXnbB> pode-se acompanhar com os alunos a realização da atividade proposta, através de animação.

4.1.2 RETÂNGULO E TRIÂNGULO

1º Caso:

Dados dois triângulos retângulos aos alunos, eles deverão montar uma figura única, o retângulo, descobrindo que a área do triângulo retângulo é a metade da área do retângulo, de mesma base e mesma altura.

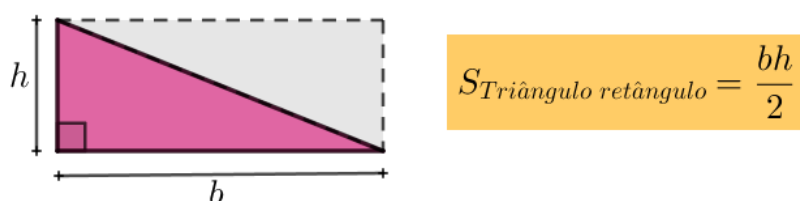


Figura 96 – Atividade - Área de Retângulo e Triângulo Retângulo - 1º Caso

2º Caso:

Nessa atividade os estudantes receberão dois pares de triângulos retângulos, numerados, segundo a Figura 97, de 1 e 2. Eles deverão montar um retângulo com essas peças e chegar à conclusão que a área do triângulo ABC , formado pelos triângulos 1 e 2, será a metade da área do retângulo.

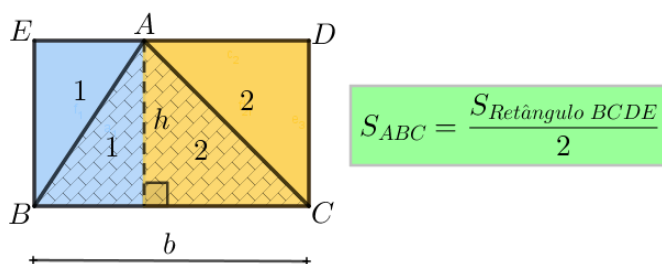


Figura 97 – Atividade - Área de Retângulo e Triângulo Qualquer - 2º Caso

Após a realização dessa atividade, sugere-se que o professor apresente a arte do *link* <https://www.geogebra.org/m/SPDFW6Pn>.

4.1.3 PARALELOGRAMO E TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO

Aqui os alunos receberão dois triângulos obtusângulos iguais e serão orientados a montarem um paralelogramo, de acordo com a Figura 98.

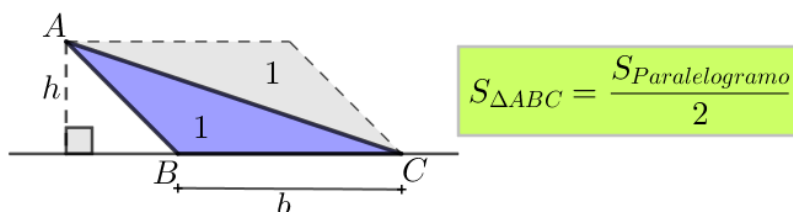


Figura 98 – Atividade - Área de Paralelogramo e Triângulo Obtusângulo

A ideia é que percebam que a área de um triângulo obtusângulo é a metade da área do paralelogramo, com mesma base e mesma altura.

4.1.4 TRAPÉZIO, TRIÂNGULO E RETÂNGULO

Para a área do trapézio serão desenvolvidos dois casos.

1º Caso:

Serão distribuídos dois triângulos que deverão formar um trapézio, conforme a Figura 99. Cabe observar que a base maior do trapézio possui a mesma medida da base do triângulo 1 e que a base menor do trapézio possui a mesma medida da base do triângulo 2. Além disso, a altura do trapézio é a mesma para os dois triângulos citados. Dessa forma, tem-se:

$$S_{\text{Trapézio}} = S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2} = \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{(B + b)h}{2}.$$

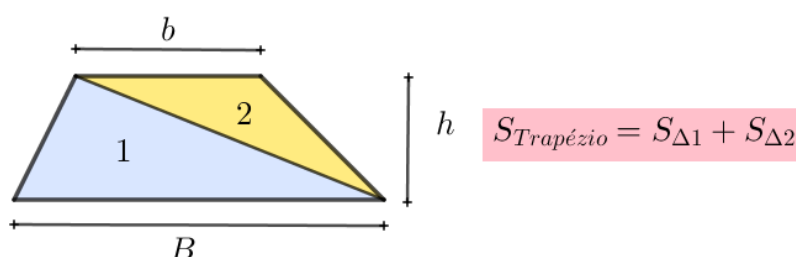


Figura 99 – Atividade - Área de Trapézio e Triângulo - 1º Caso

2º Caso:

Serão distribuídos um retângulo e dois triângulos retângulos. Com esses polígonos será pedido que montem um trapézio, conforme a Figura 100, de tal forma que se terá $S_{Trapézio} = S_1 + S_2 + S_3$.

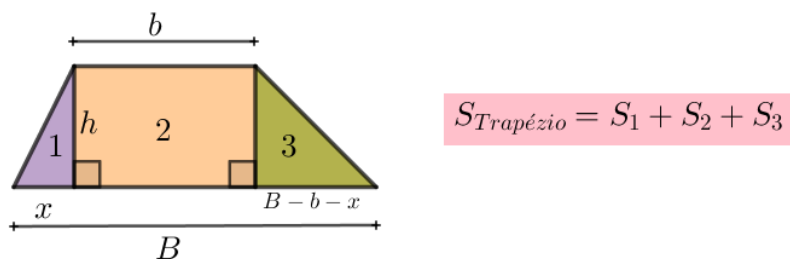


Figura 100 – Atividade - Área de Trapézio e Triângulo - 2º Caso

Baseado nesse último exemplo, segue a justificativa algébrica para se chegar à fórmula da área de um trapézio:

- $S_1 = \frac{xh}{2}$.
- $S_2 = bh$.
- $S_3 = \frac{(B - b - x)h}{2}$.

Então:

$$S_{Trapézio} = \frac{xh}{2} + bh + \frac{(B - b - x)h}{2} = bh + \frac{Bh - bh + hx - hx}{2}$$

$$\Rightarrow S_{Trapézio} = \frac{2bh + Bh - bh}{2} = \frac{bh + Bh}{2} = \frac{(B + b)h}{2}$$

Como curiosidade, pode-se colocar a situação do *link* <https://www.geogebra.org/m/n3yGF2ag>, onde a área do trapézio é comparada à área de um triângulo, como se vê nas Figuras 101 e 102.

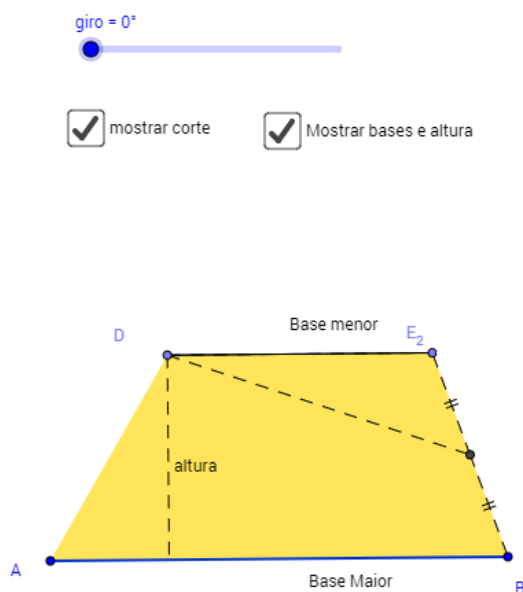


Figura 101 – Área de Trapézio e Triângulo - *GeoGebra I*

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/n3yGF2ag>. Acesso em: 10/01/2018.

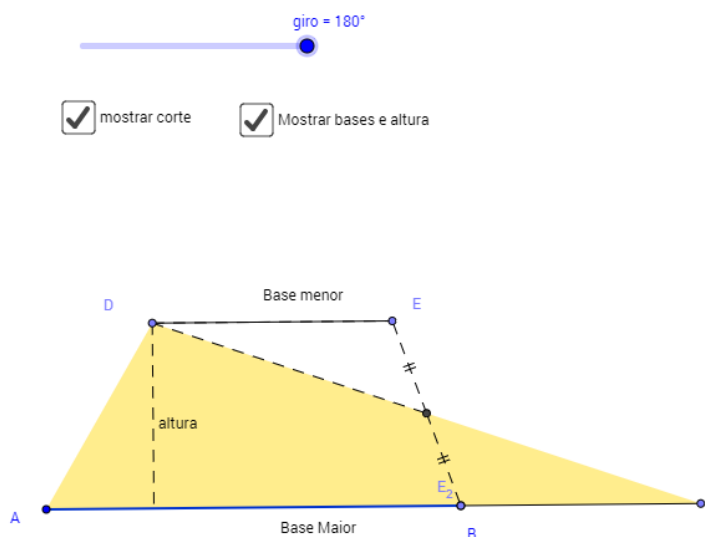


Figura 102 – Área de Trapézio e Triângulo - *GeoGebra II*

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/n3yGF2ag>. Acesso em: 10/01/2018.

4.1.5 LOSANGO, RETÂNGULO E TRIÂNGULO

Nessa atividade também serão apresentadas duas resoluções.

1º Caso:

Será feita a comparação entre um losango e um retângulo, onde os alunos receberão oito triângulos iguais e deverão formar um retângulo de modo que haja um losango no seu interior, conforme a parte 1 da Figura 103. Percebe-se assim que a área do losango será a metade da área do retângulo, cujas dimensões são D e d .

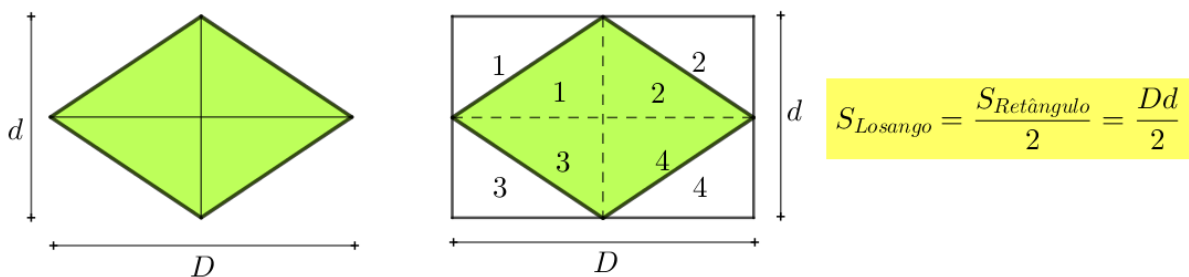


Figura 103 – Atividade - Área de Losango, Retângulo e Triângulo - 1º Caso

2º Caso:

Neste segundo caso, que está baseado na Figura 104, serão comparadas as áreas entre um losango e dois triângulos.

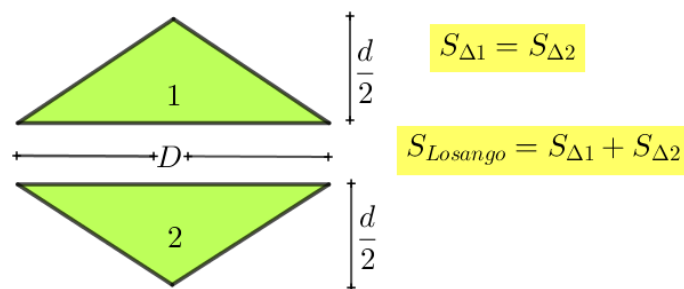


Figura 104 – Atividade - Área de Losango, Retângulo e Triângulo - 2º Caso

Os estudantes receberão dois triângulos iguais, de base D e altura $\frac{d}{2}$. Juntando os dois triângulos, obtém-se um losango, logo a área deles será a mesma, ou seja:

$$S_{Losango} = S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2}.$$

Sabe-se que:

$$S_{\Delta 1} = S_{\Delta 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Dd}{2} = \frac{Dd}{4} \Rightarrow S_{Losango} = \frac{Dd}{4} \cdot 2 = \frac{Dd}{2}.$$

A ideia da primeira resolução está apresentada em uma arte do *GeoGebra* no *link* <https://www.geogebra.org/m/ggpaFhA4>.

4.1.6 COROA CIRCULAR

Para o último item dessa atividade sobre áreas será feita a comparação entre a superfície da coroa circular e a do círculo. Serão distribuídos dois círculos de cores e raios diferentes, marcados os centros. O professor pedirá para que coloquem o círculo menor sobre o maior, coincidindo os seus centros, de forma que os estudantes percebam que a superfície colorida externamente é a de uma coroa circular. Para a pergunta sobre como calcular a área da coroa circular, eles deverão comparar os dois círculos e tentar chegar no que está na Figura 105.

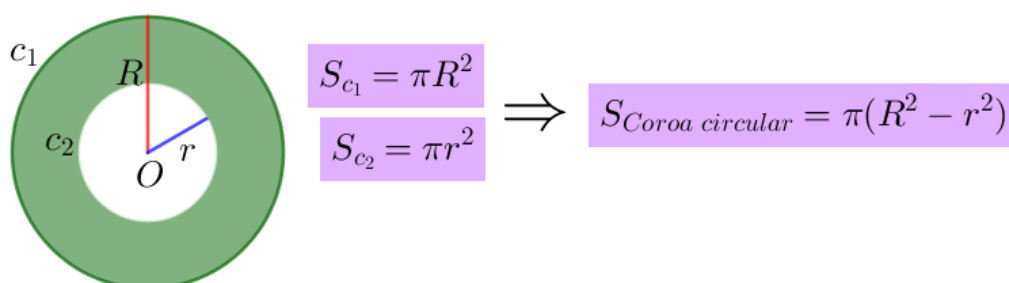


Figura 105 – Atividade - Área de Coroa Circular

Ou seja,

$$S_{Coroa\ circular} = S_{c_1} - S_{c_2} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2).$$

Caso o professor queira apresentar algum tipo de exercício de cálculo de área de coroa circular através de movimento, pode usar como apoio o *link* <https://www.geogebra.org/m/T6Thghzg>.

E para terminar, indica-se o blog <http://janelasdamatematica.blogspot.com.br/2012/07/provas-sem-palavras-areas.html>, onde há quatro pequenos vídeos que apresentam a transformação de polígonos mantendo a área.

4.2 ATIVIDADE (2): TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras possui mais de uma centena de formas diferentes de visualização. A que será apresentada nessa atividade data do século XII, e foi realizada por Bháskara. O objetivo dessa atividade é fazer com que os alunos comparem as áreas dos polígonos que foram dados, cheguem à igualdade de superfícies e deduzam o Teorema de Pitágoras. Para tanto, eles deverão ter como pré requisito o cálculo de áreas de triângulo, retângulo e quadrado.

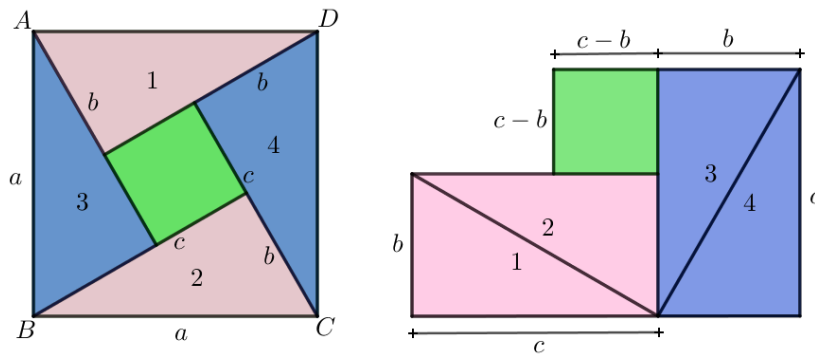


Figura 106 – Atividade - Teorema de Pitágoras

Os alunos receberão quatro triângulos retângulos iguais e um quadrado. Com essas peças deverão montar primeiramente um quadrado maior, conforme a Figura 106, descobrir a medida do lado do quadrado menor, entregue inicialmente, e calcular a área do quadrado montado. Com a orientação do professor, será solicitado que reúnam esses triângulos, dois a dois, formando um retângulo, e calculem as suas áreas, juntamente com a área do quadrado pequeno, cujo lado foi descoberto. Comparando-se então os resultados, espera-se que cheguem às seguintes conclusões:

- $S_{ABCD} = a^2$.
- $S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2} = bc$. (1)
- $S_{\Delta 3} + S_{\Delta 4} = bc$. (2)
- $S_{\text{Quadrado pequeno}} = (c - b)^2 = c^2 - 2bc + b^2$. (3)

Somando as áreas (1), (2) e (3), obtém-se:

$$2bc - 2bc + b^2 + c^2 = b^2 + c^2.$$

Como a área do quadrado $ABCD$ é equivalente às áreas de (1) + (2) + (3), conclui-se que:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

4.3 ATIVIDADE (3): ÂNGULOS INTERNOS E EXTERNOS DE UM TRI-ÂNGULO

Um dos assuntos muito utilizados da Geometria, e portanto de grande importância, é a Lei angular de Tales. Nessa seção será realizada uma atividade sobre a soma dos ângulos internos e externos de um triângulo.

Lei angular de Tales:

A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180° .

É de conhecimento como o estudante de hoje habilmente lida com as diversas tecnologias ofertadas. Devido a isso, propõe-se aqui que o aluno trabalhe com o *software* de Geometria Dinâmica *GeoGebra*, uma vez que se trata de um aplicativo gratuito e, portanto, de fácil acesso ao público em geral. O professor deverá guiá-los por essa tecnologia, explicando pausadamente e com detalhes cada passo da atividade para que consiga atingir seu objetivo.

Primeiramente pede-se para que desenhe um triângulo qualquer, nomeando seus vértices por A , B e C . Depois por C será traçada uma paralela à sua base \overline{AB} . Então serão nomeados cada ângulo interno do triângulo e também os ângulos formados pela paralela e pelo triângulo, conforme a Figura 107.

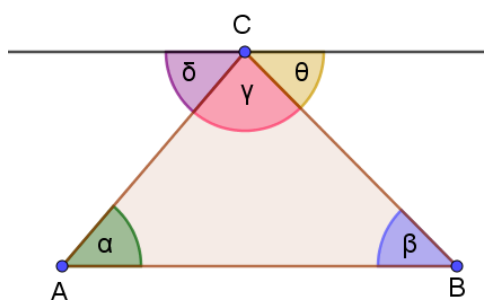


Figura 107 – Atividade - Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo

Como α e δ são alternos internos, assim como β e θ , então tem-se que $\alpha = \delta$ e $\beta = \theta$.

Pede-se então para os estudantes medirem $\theta + \gamma + \theta$ e verificarem que a soma é 180° .

Para tornar mais dinâmica a atividade, pode-se pedir que movam os vértices do triângulo de tal forma que a soma seguirá sendo a mesma.

Na sequência o professor poderá passar a seguinte animação, onde se percebe mais facilmente a soma dos ângulos internos de um triângulo, conforme se vê nas Figuras 108 e 109.

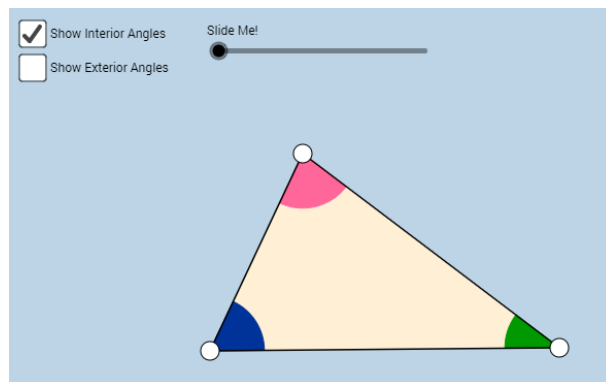


Figura 108 – Atividade - Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo - *GeoGebra I*

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/FAhtKpR5>. Acesso em: 10/01/2018.

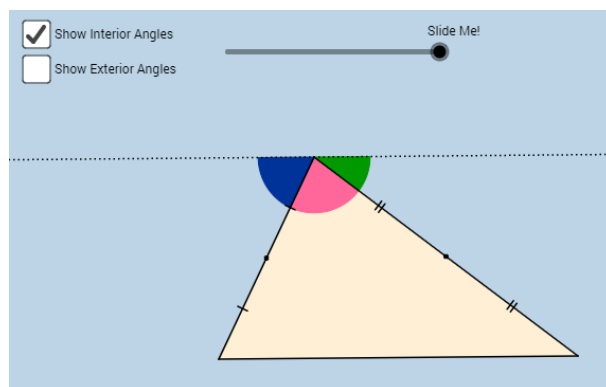


Figura 109 – Atividade - Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo - *GeoGebra II*

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/FAhtKpR5>. Acesso em: 10/01/2018.

Na mesma animação é possível exercitar a soma dos ângulos externos do triângulo, conforme as Figuras 110 e 111.

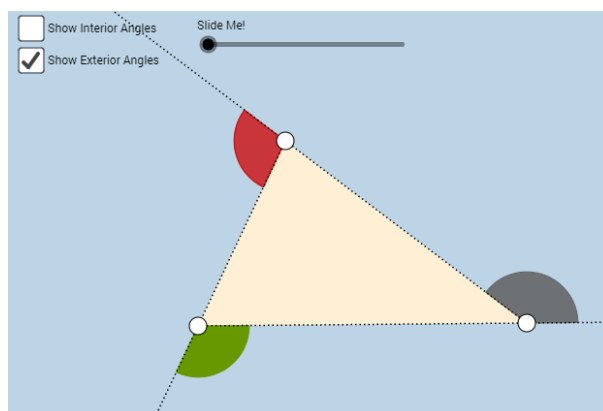


Figura 110 – **Atividade - Soma dos Ângulos Externos de um Triângulo - GeoGebra I**

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/FAhtKpR5>. Acesso em: 10/01/2018.

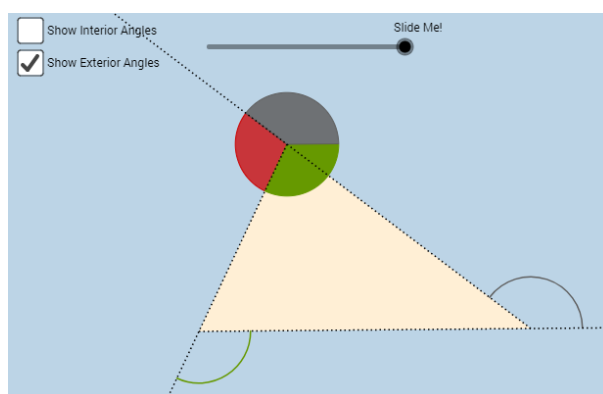


Figura 111 – **Atividade - Soma dos Ângulos Externos de um Triângulo - GeoGebra II**

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/FAhtKpR5>. Acesso em: 10/01/2018.

4.4 **ATIVIDADE (4): SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UMA ESTRELA É 180°**

Essa atividade foi apresentada no Capítulo 2 como sendo um conhecimento para o Ensino Fundamental, desenvolvida de maneira teórica para o professor. Agora será apresentada como uma atividade para os estudantes. O objetivo é chegar à conclusão de que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes a ele e, na sequência, que a soma dos ângulos internos dos vértices de uma estrela de 5 pontas é 180°. Para tanto, o aluno deverá saber que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Sugere-se aos estudantes que façam o desenho aproximado da Figura 112 no *GeoGebra*, colocando corretamente seus vértices e ângulos. Cabe ressaltar que seria mais fácil para a realização dessa atividade se a figura já estivesse pronta para o aluno. Não obstante, ao deixá-lo desenhar, ele perceberá ao final que o resultado obtido vale sempre, e não somente para uma figura específica.

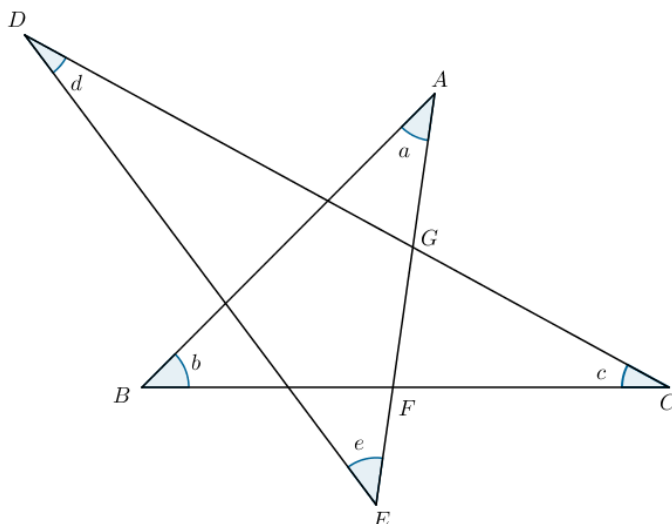


Figura 112 – Atividade - Ângulos Internos de uma Estrela

Primeiramente os estudantes serão orientados a medir o ângulo $\widehat{ABF} = b$ e $\widehat{BAF} = a$ do $\triangle ABF$, conforme a Figura 113. Depois poderão medir o ângulo \widehat{AFC} , com a ajuda da ferramenta própria para isso. Espera-se que eles cheguem à conclusão de que $\widehat{BAF} + \widehat{ABF} = \widehat{AFC}$, ou seja, $\widehat{AFC} = a + b$.

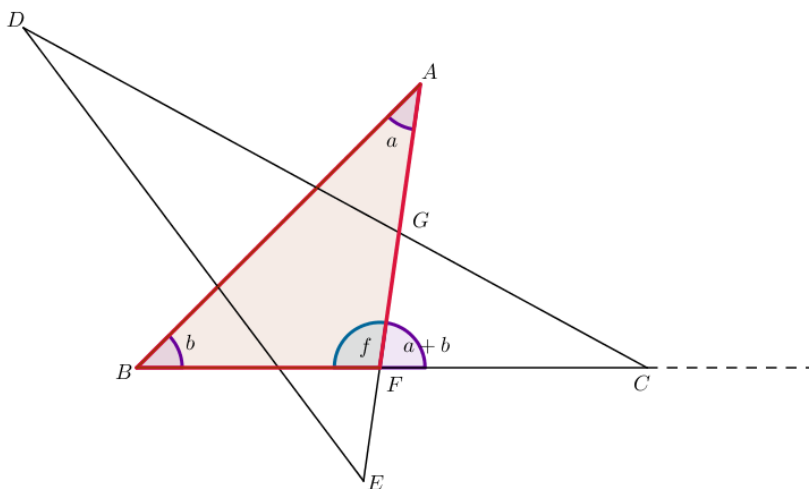


Figura 113 – Atividade - Triângulo ABF de uma Estrela

Na sequência, o professor poderá pedir para que meçam os ângulos $G\hat{D}E = d$ e $D\hat{E}G = e$, do $\triangle DEG$, e façam a soma deles, de acordo com a Figura 114. Poderão medir então $F\hat{G}C$ e comparar o resultado, chegando a $G\hat{D}E + D\hat{E}G = F\hat{G}C$, ou seja, $F\hat{G}C = d + e$.

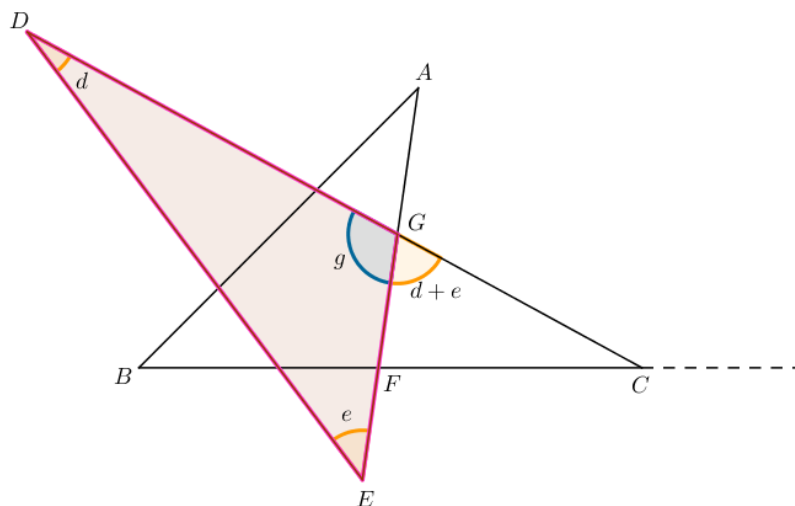
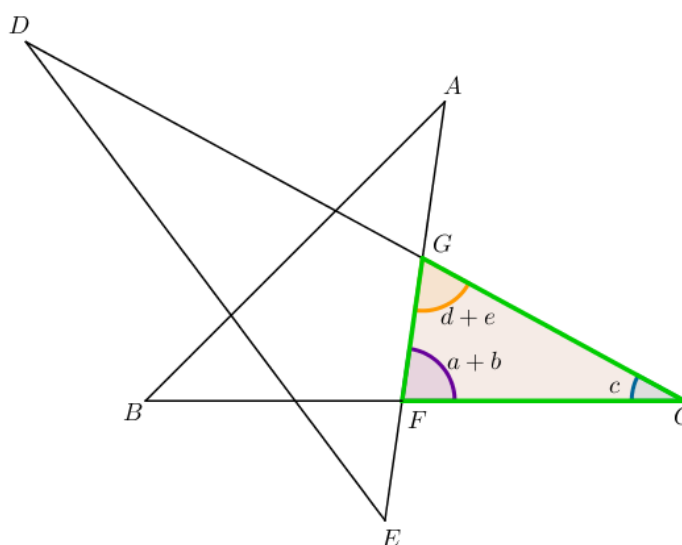


Figura 114 – Atividade - Triângulo DEG de uma Estrela

Poderá ser perguntado a que conclusão se pode chegar, com o objetivo de que os alunos percebam que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Uma vez de posse desse resultado, o professor poderá focar no $\triangle GFC$ da Figura 115. Como eles já calcularam $C\hat{F}G = d + e$ e $F\hat{G}C = a + b$, pela Lei Angular de Tales, espera-se que eles concluam que $a + b + c + d + e = 180^\circ$.



$$a + b + c + d + e = 180^\circ$$

Figura 115 – Atividade - Triângulo CFG de uma Estrela

E para terminar, como a , b , c , d e e são os ângulos internos dos vértices da estrela, os estudantes deveriam chegar à conclusão de que a soma dos ângulos internos dos vértices de uma estrela de 5 pontas é 180° , como havia sido proposto. Ao final desta atividade será importante salientar que cada aluno desenhou a sua própria estrela de cinco pontas, portanto com ângulos diferentes, porém o resultado da soma será sempre o mesmo. Também seria interessante que o professor retomasse com a classe a demonstração dada, no capítulo 2, sobre esse assunto.

4.5 ATIVIDADE (5): RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

O assunto sobre relações métricas no triângulo retângulo é desenvolvido no 9º ano do Ensino Fundamental. A maneira como se chega nas relações nem sempre são abordadas, o que faz com que o assunto acabe se tornando uma simples aplicação de fórmulas, sem a devida compreensão do que se está fazendo.

Essa atividade propõe justamente evitar tal processo mecânico e desenvolver a habilidade da observação e da comparação, através da semelhança de triângulos.

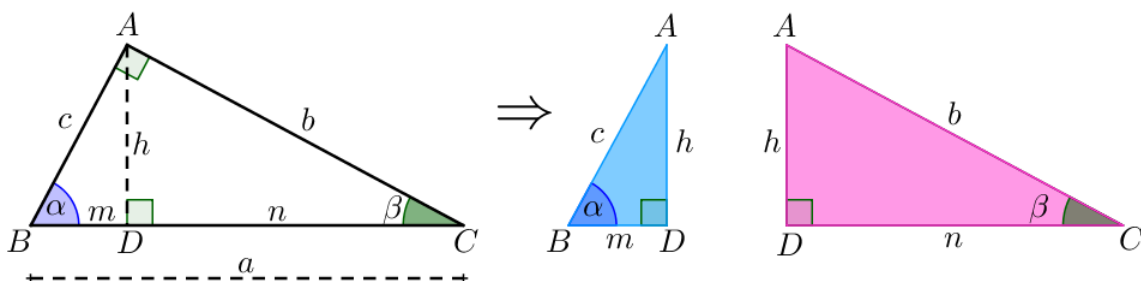


Figura 116 – Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Para trabalhar com os alunos antes é necessário fazer alguns esclarecimentos. Primeiramente, baseado na Figura 116, tem-se que no $\triangle ABC$, $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$. Logo, no $\triangle ABD$, retângulo em D , como $\hat{A}BD = \alpha$, conclui-se que $\hat{B}AD = \beta$ e no $\triangle ACD$, retângulo em D , como $\hat{A}CD = \beta$, conclui-se que $\hat{C}AD = \alpha$.

Dessa forma, serão distribuídos aos alunos e comparados os triângulos ABC , ABD e ACD em cartolina colorida.

Parte (1): Comparação entre os triângulos ABC e ABD.

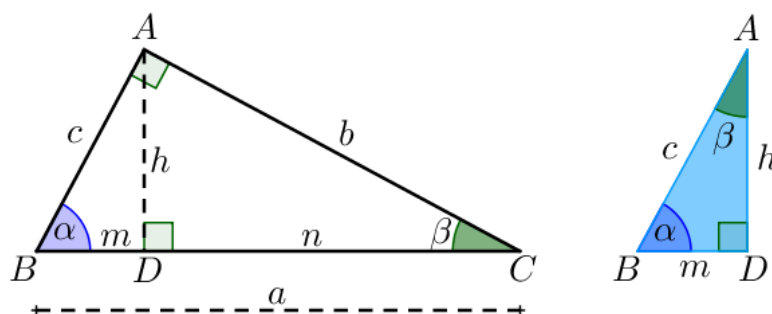


Figura 117 – Triângulos Retângulos ABC e ABD

Sugere-se que os estudantes comparem os dois triângulos da Figura 117, observando cada ângulo e chegando à conclusão de que eles são semelhantes. Posteriormente, que analisem quais são os lados homólogos correspondentes e montem as proporções, chegando finalmente às fórmulas. Todo o processo deverá ser realizado pelos alunos com a correta orientação e encaminhamento por parte do professor.

Espera-se que eles cheguem ao que se segue:

$$\triangle ABC \sim \triangle ABD \quad \text{pois} \quad \begin{cases} \widehat{BAC} \equiv \widehat{BDA} \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{DBA} \end{cases}$$

Logo, tem-se as seguintes proporções:

$$\bullet \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow ah = bc. \quad \bullet \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am. \quad \bullet \frac{c}{m} = \frac{b}{h} \Rightarrow ch = bm.$$

Parte (2): Comparação entre os triângulos ABC e DAC.

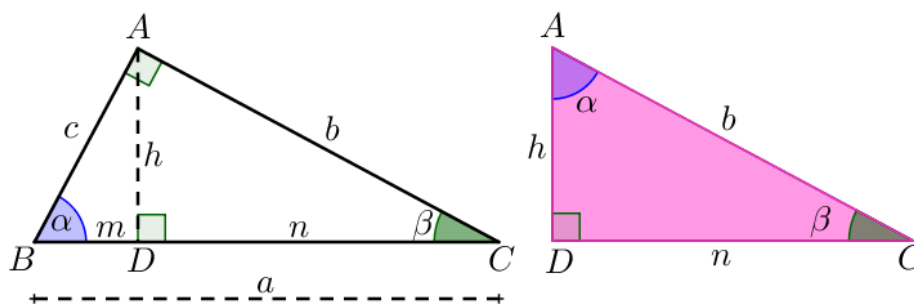


Figura 118 – Triângulos Retângulos ABC e DAC

Realizando o mesmo raciocínio da parte 1 dessa atividade, através da Figura 118, espera-se que os estudantes concluam que:

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \quad \text{pois} \quad \begin{cases} \widehat{BAC} \equiv \widehat{ADC} \\ \widehat{ACB} \equiv \widehat{ACD} \end{cases}$$

Obtendo, assim, as seguintes proporções:

$$\bullet \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow ah = bc. \quad \bullet \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an. \quad \bullet \frac{c}{h} = \frac{b}{n} \Rightarrow cn = bh.$$

Parte (3): Comparação entre os triângulos ABD e CAD.

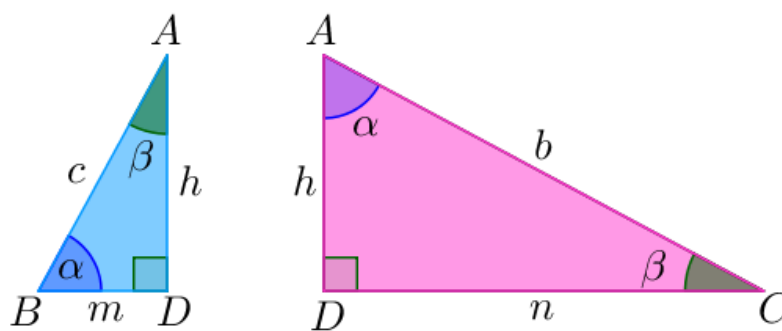


Figura 119 – Triângulos Retângulos ABD e CAD

Novamente, através da comparação entre os triângulos da Figura 119, obtém-se:

$$\Delta ABD \sim \Delta CAD \quad \text{pois} \quad \begin{cases} \widehat{BDA} \equiv \widehat{ADC} \\ \widehat{ABD} \equiv \widehat{CAD} \end{cases}$$

Seguido das proporções:

$$\bullet \frac{c}{b} = \frac{h}{n} \Rightarrow cn = bh. \quad \bullet \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn. \quad \bullet \frac{c}{b} = \frac{m}{h} \Rightarrow ch = bm.$$

Há alguns materiais prontos no *GeoGebra* onde professores poderão aproveitar para desenvolver essas semelhanças e chegar nas respectivas proporções. Como sugestão estão os *links* abaixo:

- <https://www.geogebra.org/m/NfFXdN9R>
- <https://www.geogebra.org/m/NqpHBQHX> e
- <https://www.geogebra.org/m/tqrmeUzJ>.

4.6 ATIVIDADE (6): ÁREA DO PARALELOGRAMO

No Ensino Médio aborda-se a área de um paralelogramo utilizando o conhecimento de determinante de 2ª ordem. Aqui será mostrada uma visualização de como a simples distribuição de pequenas áreas de dois quadriláteros chegam à área do paralelogramo.

O aluno receberá em papel colorido um quadrilátero subdividido em sete polígonos menores numerados de 1 ao 7, conforme a Figura 120.

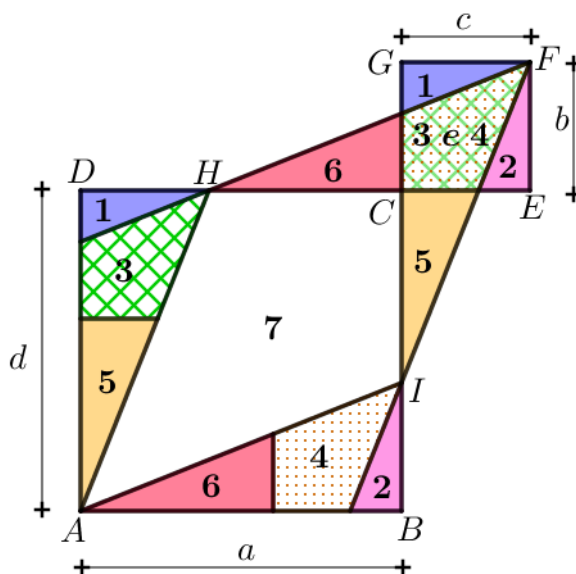


Figura 120 – Atividade - Área do Paralelogramo através de Determinantes

Pede-se aos estudantes que montem um quadrado $CEFG$ com os polígonos 1, 2, 3 e 4, com 3 e 4 sobrepostos. Depois que desloquem os polígonos 5 e 6 de modo a montar um paralelogramo $AIFH$. Com isso, tem-se os seguintes resultados:

- Área do quadrilátero $ABCD = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$.
- Área do quadrilátero de lados $CEFG = 1 + 2 + 3 = 1 + 2 + 4$.
- Área do paralelogramo $AIFH = 3 + 5 + 6 + 7 = 4 + 5 + 6 + 7$.
- Logo a área do paralelogramo $AIFH$ será a área do quadrilátero $ABCD$ menos a área do quadrilátero $CEFG$.

Ao se observar por outro ângulo as medidas de cada quadrilátero, percebe-se que:

- O quadrilátero $ABCD$ tem lados medindo a e d , logo sua área será ad .
- O quadrilátero $CEFG$ tem lados medindo b e c , logo sua área será bc .

- Ao calcular $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \text{área do quadrilátero } ABCD \text{ menos área do quadrilátero } CEFG.$

A ideia é que percebam que a área do paralelogramo $AIFH$ é a mesma área do quadrilátero $ABCD$ menos a área do quadrilátero $CEFG$.

5 CONCLUSÃO

Ao se propor este trabalho, pretende-se divulgar e explorar as *Provas sem Palavras*, metodologia esta que, desde a década de 70, vem sendo alvo de estudo e publicação, principalmente nos Estados Unidos e em Portugal. No Brasil ainda há muito pouco material, ou quase nada, sobre o assunto, sendo que alguns livros didáticos já começam a trabalhar um pouco com essa abordagem, instigando professores a buscar uma maneira diferente de ensinar. Nesse sentido, espera-se que esse trabalho possa auxiliar professores de Ensino Fundamental e Médio como forma de consulta, podendo ser aplicado em sala de aula na medida do possível.

Acredita-se que, através das atividades sugeridas e dos temas propostos, o estudante tenha um melhor entendimento na resolução de exercícios. Trabalhar com *Provas sem Palavras* poderá ajudá-lo a perceber, mais facilmente, o caminho pelo qual ele será levado, compreendendo a teoria, de onde surgem as fórmulas, de como resolver questões, não ficando simplesmente no abstrato, e chegando a conclusões importantes. Dessa forma, a inserção dessa proposta metodológica na escola poderá dar mais condições ao aluno na aquisição de uma base sólida, de maneira que assuntos subsequentes sejam melhor entendidos, fazendo com que a aprendizagem seja mais eficiente, significativa e duradoura.

REFERÊNCIAS

BARWISE J.; ETCHEMENDY, J. **Visual Information and Valid Reasoning**. Washington DC: The Mathematics Association of America, p. 9-24, 1991.

BORWEIN P.; JÖRGENSON, L. **Visible Structures in Number Theory**. The American Mathematical Monthly, v. 108, n° 10, p. 897-910, 2001. Disponível em: <http://www.cecm.sfu.ca/personal/pborwein/PAPERS/P162.pdf>. Acesso em: 09/06/2017.

BROWN, J. R. **Proof and Pictures**. British Journal for the Philosophy of Science, v. 48, p. 161-180, 1997. Disponível em: <https://faculty.unlv.edu/jwood/unlv/Articles/Brown.pdf>. Acesso em: 09/06/2017.

BROWN, J. R. **Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures**. New York and London, Routledge Taylor & Francis Group, 1999.

CALAZANS, A. **Um Panfleto de Berkeley Contra as Práticas Matemáticas de Newton e de Leibniz**. Scientiae Studia: Revista Latino-americana de Filosofia e História da Ciência. São Paulo-SP. v. 8, n. 4, p. 623-632, 2010. Disponível em http://www.scielo.br/scielo.phpscript=sci_arttext&pid=S1678-31662010000400006. Acesso em: 04/02/2018.

CASSELMAN, B. **Pictures and Proofs**. The American Mathematical Monthly, v. 47, p. 1257-1266, 2000. Disponível em <http://www.ams.org/notices/200010/fea-casselman.pdf>. Acesso em: 09/06/2017.

CLÍMACO H.A.; OTTE, M. **Bolzano, A Formação da Matemática Pura e a Aritmetização da Matemática**. Goiânia: 36ª Reunião Nacional da ANPEd, 2013. Disponível em: http://www.anped.org.br/sites/default/files/gt19_2988_texto.pdf. Acesso em: 09/06/2017.

COSTA, N. M. Lobo da. **A História da Trigonometria**. Educação Matemática em Revista - Revista da SBEM, v. 10, p. 60-68, 2003. Disponível em http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf. Acesso em: 29/06/2017.

DAVIS, P. J. **Visual Theorems**. Educational Studies in Mathematics, v. 24, p. 333-334, 1993.

DOLCE OSVALDO; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo-SP. Atual Editora v. 9, 2005.

DOLCE OSVALDO; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo-SP. Atual Editora v. 10, 2005.

GAUCHAZH. **Veja como a média harmônica influencia na aprovação para a UFRGS**. Disponível em: <https://gauchazh.clicrbs.com.br/educacao-e-emprego/vestibular/noticia/2012/12/veja-como-a-media-harmonica-influencia-na-aprovacao-para-a-ufrgs-3997138.html>, 2012, Acesso em: 26/03/2018.

GIERDIEN, M. F. **From ‘Proofs Without Words’ to ‘Proofs that Explain’ in Secondary Mathematics**. Pythagoras, v. 65, p. 53-62, 2007. Disponível em <https://www.researchgate.net/publication/307828301>. Acesso em: 09/06/2017.

HANNA G.; SIDOLI, N. **Proofs that Prove and Proofs that Explain**. Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education, p. 45-51. Paris: PME, 1998.

HANNA G.; SIDOLI, N. **Visualisation and Proof: A Brief Survey**. Retirement as Process and Concept, p. 101-108, 2006. Disponível em <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/festschrift.pdf#page=109>. Acesso em: 09/06/2017.

NELSEN, R. **Proofs Without Words - Exercices in Visual Thinking**. Washington DC: The Mathematical Association of America, 1993.

NELSEN, R. **Proofs Without Words II**. Washington DC: The Mathematical Association of America, 2000.

NELSEN, R. **Proofs Without Words III**. Washington DC: The Mathematical Association of America, 2016.

PALAIS, R. **The Visualization of Mathematics: Toward a Mathematical Exploratorium**. Notices of the AMS, v. 46, p. 647-658, 1999. Disponível em: <http://3d-xplormath.org/DocumentationPages/VisOfMath.pdf>. Acesso em: 09/06/2017.

PEREIRA, J. D. C. **Médias: Aritmética, Geométrica e Harmônica**. Dissertação de Mestrado - Unicamp - Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306330/1/Pereira_JaksonDaCruz_M.pdf, 2014, Acesso em: 26/03/2018.

PERFEITOS, T. **Origens da Trigonometria**. Disponível em <https://teoremasperfeitos.wordpress.com/origens/>. Acesso em: 23/08/2017, 2012.

PRESMEG, N. C. **Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics**. [S.l.], 2006. Disponível em <http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/symcog/bib/pmeVisualizationFinalAPA.pdf>. Acesso em: 09/06/2017.

VISUALES, M. **Cavalieri: el Volumen de la Esfera**. Disponível em: <http://www.matematicasvisuales.com/html/historia/cavalieri/cavalieriesfera.html>, 2018, Acesso em: 26/02/2018.