UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA - UEPG
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL - PROFMAT

ELISEMARE VIAPIANA PELENZ

# MATRIZES E SISTEMAS LINEARES NAS QUESTÕES DE MATEMÁTICA DO ENEM: ANÁLISES DE COMPETÊNCIAS E HABILIDADES

PONTA GROSSA

2018

ELISEMARE VIAPIANA PELENZ

# MATRIZES E SISTEMAS LINEARES NAS QUESTÕES DE MATEMÁTICA DO ENEM: ANÁLISES DE COMPETÊNCIAS E HABILIDADES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT - UEPG como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Scheila Valechenski Biehl

PONTA GROSSA

2018

**Ficha Catalográfica**
**Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG**

Pelenz, Elisemare Viapiana
P381 Matrizes e sistemas lineares nas questões de matemática do ENEM: análise de competências e habilidades/ Elisemare Viapiana Pelenz. Ponta Grossa, 2018.
100f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientadora: Profª Drª Scheila Valechenski Biehl.

1.Matrizes. 2.Sistemas lineares. 3.Competências. 4.Habilidades. I.Biehl, Scheila Valechenski. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 512.943

**TERMO DE APROVAÇÃO**

# Elisemare Viapiana Pelenz

**"Matrizes e sistemas lineares nas questões de matemática do ENEM: análise de competências e habilidades"**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Scheila V. Biehl

Orientador: Prof. Dra. Scheila Valechenski Biehl
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

Cleber de Medeira

Prof. Dr. Cleber de Medeira
Departamento de Matemática, UFPR/PR

Fabiane de Oliveira

Prof. Dra. Fabiane de Oliveira
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

**Ponta Grossa, 20 de Fevereiro de 2018.**

Dedico esse trabalho a todas aquelas pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização do mesmo, e em especial aos meus avós Carolina (in memoria) e Rovílio (in memoria) que sempre estiveram presentes em minhas orações e que com certeza me guiam em todos os meus passos, em especial os da realização desse trabalho.

# Agradecimentos

Agradecer é reconhecer que esse trabalho que por muitas vezes pareceu tão solitário, só se tornou possível pela força coletiva de apoio, incentivo, amizade e amor. Infelizmente não há espaço para agradecer nominalmente a todos pelas contribuições diretas ou indiretas, mas com certeza estão no meu coração.

Primeiramente, agradeço a Deus, pela minha vida, e por estar sempre comigo, mostrando que tudo é possível para aqueles que nele creem.

Ao meu marido Juliano Pelenz, meus pais Nereu e Teresinha e aos meus irmãos Edineu e Caroline pelo apoio, incentivo e compreensão durante todo o trabalho. Enfim, à toda minha família, pelo imenso carinho.

A minha orientadora Professora Doutora Scheila Valechenski Biehl pela confiança conferida a mim, pelo incentivo ao meu crescimento pessoal e acadêmico, pelo apoio e principalmente pela paciência e dedicação durante a elaboração deste trabalho.

Aos Membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Fabiane de Oliveira e Professor Doutor Cleber de Medeira, por terem aceitado o convite e pelas consideráveis contribuições para o meu trabalho.

Aos demais professores do PROFMAT, que muito contribuíram para a minha formação ao longo desta jornada de aprendizagem.

Aos amigos e colegas do PROFMAT, pelo apoio e troca de experiências. Cada um deixou uma marca, à sua maneira; e a todos, mencionados ou não, sou imensamente grata!

MUITO OBRIGADA!

> Educar não é transferir conhecimento mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.
>
> — Paulo Freire

# Resumo

Essa pesquisa tem por objetivo subsidiar os docentes nas atividades de matemática relacionadas aos conteúdos de matrizes e sistemas lineares, tendo em vista as habilidades e competências estabelecidas pela Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Para isso, foram realizadas pesquisas bibliográficas e análises documentais com o intuito de caracterizar o estudo de matrizes e sistemas lineares no âmbito escolar, considerando tais competências e habilidades. Em seguida foram selecionadas algumas questões que compuseram o ENEM no período de 2009 a 2017 para aplicação da atividade com 1 turma da 2ª série e 1 turma da 3ª série do ensino médio, de uma escola do campo no município de São Miguel do Iguaçu - Paraná. Este processo foi categorizado em um estudo de caso, abrangendo a competência de área 5 da Matriz de Referência do ENEM, "Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico científicas, usando representações algébricas". A partir da aplicação dessa atividade foram feitas as análises das diferentes estratégias de resolução e os tipos de erros envolvidos, buscando oferecer um suporte didático ao trabalho do docente no sentido de desenvolver nos alunos as competências e habilidades requeridas.

**Palavras-chave**: Matrizes, sistemas lineares, competências, habilidades.

# Abstract

This research aims to subsidize mathematics educators towards matrices and linear systems, given the competences and abilities established by the Reference Matrix of The National Exam of High School (ENEM). For those purposes, bibliographical studies and documentary analyzes were carried out with the goal of characterizing the study of matrices and linear systems within the school environment attending to compentences and abilities. Next, some questions featured in ENEM from 2009 to 2017 were selected to be resolved by one class taking the 2nd grade and one taking the 3rd year of a rural high school in the municipality of São Miguel do Iguaçu – Paraná. This process was categorized as a study of case, reaching the competence of area 5 from the ENEM's Reference Matrix, "Modeling and solving problems that involve socioeconomic or scientific variables, using algebraic representations". From the application of this activity analyzes were made on the different strategies to resolving the kinds of mistakes involved, seeking to offer didactic support to the work of the teacher in the sense of developing in students the skills and abilities required.

**Keywords**: Matrices, linear systems, competences, abilities.

# Lista de ilustrações


Figura 1 – Questão 138 (ENEM 2017) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
Figura 2 – Resolução 1 da questão 138 (ENEM 2017) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
Figura 3 – Resolução 2 da questão 138 (ENEM 2017) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
Figura 4 – Resolução 3 da questão 138 (ENEM 2017) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
Figura 5 – Resolução 4 da questão 138 (ENEM 2017) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
Figura 6 – Resolução errada da questão 138 (ENEM 2017) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
Figura 7 – Questão 175 (ENEM 2009) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
Figura 8 – Resolução 1 da questão 175 (ENEM 2009) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68
Figura 9 – Questão 151 (ENEM 2009) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68
Figura 10 – Resolução 1 da questão 151 (ENEM 2009) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
Figura 11 – Resolução 2 da questão 151 (ENEM 2009) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
Figura 12 – Resolução 3 da questão 151 (ENEM 2009) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72
Figura 13 – Resolução 4 da questão 151 (ENEM 2009) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72
Figura 14 – Questão 166 (ENEM 2012) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 73
Figura 15 – Resolução 1 da questão 166 (ENEM 2012) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 76
Figura 16 – Resolução 2 da questão 166 (ENEM 2012) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 76
Figura 17 – Resolução errada 1 da questão 166 (ENEM 2012) . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77
Figura 18 – Resolução errada 2 da questão 166 (ENEM 2012) . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77
Figura 19 – Questão 171 (ENEM 2013) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 78
Figura 20 – Resolução errada da questão 171 (ENEM 2013) . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80

# Lista de tabelas


Tabela 1 – Eixos cognitivos do ENEM (comuns a todas as áreas) . . . . . . . . . . 20
Tabela 2 – Áreas de conhecimento do ENEM . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
Tabela 3 – Competências que compõem a Matriz de Referência 'Matemática e suas Tecnologias' . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22
Tabela 4 – Descrição das Competências que compõem a Matriz de Referência 'Matemática e suas Tecnologias' . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
Tabela 5 – Habilidades compreendidas na competência 5 da Matriz de Referência 'Matemática e suas Tecnologias' . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24
Tabela 6 – Descrição das habilidades compreendidas na competência 5 da Matriz de Referência 'Matemática e suas Tecnologias' . . . . . . . . . . . . . 24
Tabela 7 – Relação entre competências, habilidades e eixos cognitivos - Matemática e suas Tecnologias . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
Tabela 8 – Competências gerais da área 'Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias' . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
Tabela 9 – Competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática segundo os PCNEM . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
Tabela 10 – Conteúdos e habilidades da unidade temática Tema 1 – 'Álgebra: números e funções . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30
Tabela 11 – Venda de livros de Matemática, Física e Química no primeiro trimestre de um ano . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
Tabela 12 – Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o ano de 1976 . 37
Tabela 13 – Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o ano de 1977 . 37
Tabela 14 – Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante os anos de 1976 e 1977 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38
Tabela 15 – Previsão da produção de grãos (em milhares de toneladas) para o ano de 1978 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38
Tabela 16 – Resultados dos times do grupo C na copa do Mundo de 2002 . . . . . . 40
Tabela 17 – Pontuação conforme os resultados (Vitórias, Empates e Derrotas) . . . 41
Tabela 21 – Análise das questões apresentadas (quantidade de erros e acertos dos alunos) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 81
Tabela 22 – Habilidades presentes em cada questão . . . . . . . . . . . . . . . . . 81
Tabela 23 – Análise das competências que estão em defasagens . . . . . . . . . . . 82

# Lista de Abreviaturas e Siglas

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio
IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IFES - Instituições Federais do Ensino Superior
INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação
MEC - Ministério da Educação
PCN+Ensino Médio - Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)
PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica
SI - Sistema Impossível
SPD - Sistema Possível e Determinado
SPI - Sistema Possível e Indeterminado
UEPG - Universidade Estadual de Ponta Grossa

# Sumário


**Introdução** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **14**

**1 MATRIZES E SISTEMAS LINEARES NO CONTEXTO DO ENEM E DOS PCNEM** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **18**
**1.1 Matrizes e sistemas lineares no ensino médio** . . . . . . . . . . . . **18**
**1.2 O ENEM e sua Matriz de Referência** . . . . . . . . . . . . . . . . . **19**
**1.3 'Matemática e suas Tecnologias' na Matriz de Referência do ENEM** **22**
1.3.1 Competência de área 5 - Matriz de Referência 'Matemática e suas Tecnologias' 24
**1.4 'Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias' segundo os PCNEM** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **27**
1.4.1 Matemática no contexto dos PCNEM . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

**2 MATRIZES** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **32**
**2.1 Definição** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **33**
**2.2 Tipos especiais de matrizes** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **33**
2.2.1 Matriz quadrada . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
2.2.2 Matriz nula . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
2.2.3 Matriz-coluna . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35
2.2.4 Matriz-linha . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35
2.2.5 Matriz diagonal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35
2.2.6 Matriz identidade . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36
2.2.7 Matriz triangular superior . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36
2.2.8 Matriz triangular inferior . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36
2.2.9 Matriz simétrica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
**2.3 Operações com matrizes** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **37**
2.3.1 Adição/Subtração de Matrizes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38
2.3.2 Multiplicação por escalar . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39
2.3.3 Transposição de Matrizes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39
2.3.4 Multiplicação de Matrizes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40
**2.4 Determinante** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **42**

**3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES** . . . . . . . . . . . . . . . . **47**
**3.1 Definição de sistemas lineares** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **47**
3.1.1 Existência e Unicidade . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48
3.1.2 A equação matricial $Ax = B$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
**3.2 Métodos de resolução de sistemas lineares com 2 equações** . . . . . **51**

3.2.1 Método da Adição . . . . . . . . . 51
3.2.2 Método da substituição . . . . . . . . . 52
**3.3 Métodos de resolução de sistemas lineares com 3 ou mais equações e incógnitas . . . . . . . . . 53**
3.3.1 Método da eliminação de Gauss . . . . . . . . . 53

**4 ANÁLISE DO TEMA MATRIZES E SISTEMAS LINEARES EM QUESTÕES DO ENEM COM ALUNOS DA 2ª E 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO . . . . . . . . . 59**
**4.1 Aplicação da atividade . . . . . . . . . 59**
4.1.1 Questão 138 (ENEM 2017) . . . . . . . . . 60
4.1.2 Questão 175 (ENEM 2009) . . . . . . . . . 64
4.1.3 Questão 151 (ENEM 2009) . . . . . . . . . 68
4.1.4 Questão 166 (ENEM 2012) . . . . . . . . . 73
4.1.5 Questão 171 (ENEM 2013) . . . . . . . . . 78
**4.2 Análise das habilidades utilizadas nas questões da seção 4.1 . . . . . 80**

**5 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . . . . . . 84**

**REFERÊNCIAS . . . . . . . . . 86**

**ANEXOS 91**

**ANEXO A – MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS DO ENEM . . . . . . . . . 92**

**ANEXO B – AS COMPETÊNCIAS EM MATEMÁTICA - PCN+ ENSINO MÉDIO . . . . . . . . . 95**

# Introdução

O presente trabalho abrangerá sobre o tema: Matrizes e sistemas lineares nas questões de matemática do ENEM: análise de competências e habilidades.

A escolha desse tema foi motivada pela importância atual da concepção do ENEM e por ser um exame de grande impacto e interesse na sociedade brasileira. Buscamos com esse trabalho, oferecer uma base que norteia o ensino de matrizes e sistemas lineares aos docentes de matemática.

A importância do estudo das matrizes e dos sistemas lineares está na utilização da resolução de diversos problemas. Esses problemas vão desde os mais simples métodos de resolução até os mais abrangentes, envolvendo um grande número de variáveis e necessitando de métodos mais elaborados de resolução.

Para Panciera e Ferreira (2007),

> Os conteúdos de matrizes podem ser utilizados nas mais diversas situações reais e constitui-se em tabelas que designam com clareza certas situações, representando um grupo ordenado de números que se apresentam em linhas e colunas. As matrizes ordenam e simplificam os problemas, contribuindo para a resolução de vários tipos de questões, sendo utilizadas na Estatística, na Física Atômica, na Engenharia, na Administração, na Economia, enfim, na Matemática Pura e Aplicada. Os sistemas lineares aparecem também em aplicações de diversas áreas, como Administração, Economia, Sociologia, Ecologia, Demografia, Genética, Eletrônica, Engenharia e Física. As situações problemas propostas envolvem perca de peso em um programa de dieta e com exercícios pré-estabelecidos, determinando as calorias que se vai queimar e, também, o controle do fluxo de veículos nas ruas de mão única no horário de rush no centro de uma cidade (PANCIERA; FERREIRA, 2007, p. 1).

Uma metodologia bastante enriquecedora no ensino do conteúdo de matrizes e sistemas linear é o uso de recursos computacionais, como por exemplo: Maxima, Winplot e Geogebra devido a sua praticidade e facilidade. Ferreira (2013) apresenta algumas breves explicações sobre cada um dos recursos:

> O Maxima é um programa que realiza de cálculos matemáticos, numéricos e simbólicos, manipula expressões algébricas, deriva e integra funções e monta diversos tipos de gráfico. Além de outros procedimentos disponíveis, possui uma ferramenta para resolução de sistemas lineares e outra de representação de objetos no espaço tridimensional (FERREIRA, 2013, p. 60).

O Winplot "é um software para plotar gráficos de uma ou duas variáveis utilizando o Windows" (FERREIRA, 2013, p. 60).

Ferreira (2013) ainda destaca o Geogebra:

> um software de geometria dinâmica com duas janelas simultâneas, uma para a parte algébrica e outra para as construções geométricas, podendo representar graficamente equações de duas variáveis. Realiza também

> construções com característica de construção com régua e compasso (FERREIRA, 2013, p. 60).

Outra metodologia interessante para o ensino de matrizes e sistemas lineares é a utilização de jogos, pois, como afirma Gomes e Macedo (2015, p.1), "Esta proposta didática propõe um método de ensino do conteúdo de Matrizes de forma mais dinâmica, onde o aluno poderá testar seus conhecimentos e construir sua própria atividade brincando, de forma que haja possibilidade do aluno aprender interagindo com os colegas".

Alguns trabalhos que também podem ser encontrados na literatura envolvem a apresentação e utilização de exemplos contextualizados que envolvem toda a modelagem do problema e sua resolução por meio de matrizes e/ou sistemas lineares, como é o caso de Levorato (2017, p. 9) que relata da necessidade de apresentação dos conceitos de matrizes e sistemas lineares de forma mais simples daquela apresentada nos livros didáticos. Em seu trabalho, o autor faz um estudo sobre tópicos da Álgebra Linear, como Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares e mostrar a interdisciplinaridade e algumas aplicações de tais tópicos.

De acordo com Paraná (2008), matrizes e sistemas lineares são conteúdos que se desdobram do ensino médio do conteúdo estruturante "Números e Álgebra". Ainda sobre Paraná (2008), no ensino médio, o estudo dos números deve ser aprofundado para ampliar o conhecimento e domínio desses conteúdos, para que o aluno tenha condições de conceituar e interpretar matrizes e suas operações, além de conhecer e dominar o conceito e as soluções de problemas que se realizam por meio de determinantes.

A realização deste trabalho se configura no aprofundamento do tema, garantindo um estudo mais aprimorado voltado principalmente na resolução de questões do ENEM. Desejamos investigar os conceitos sobre matrizes e sistemas lineares procurando algumas ferramentas que dão suporte a esse estudo. Pretendemos também com este trabalho ampliar as sugestões de atividades, recursos, e enfoques das matrizes e dos sistemas lineares no ensino médio, aprofundando assim, a visão dos alunos na hora de realizar o ENEM.

Para isso, foi feito o levantamento da Matriz de Referência do ENEM, abordando suas competências e habilidades, com enfoque nos conteúdos de matrizes e sistemas lineares, para assim, entender melhor os objetivos das mesmas e a direção que devemos tomar para trabalhar com os alunos do ensino médio.

Nesse trabalho será abordado uma metodologia de estudo de caso, que segundo Ponte (2006),

> Um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. O seu objetivo é compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador (PONTE, 2006, p. 2).

Nesta perspectiva, o estudo de caso favorecerá para conseguir atingir o objetivo geral do presente trabalho.

Buscamos nesse trabalho responder à seguinte questão: como as competências e habilidades discriminadas na Matriz de Referência do ENEM, referentes aos conteúdos de matrizes e sistemas lineares, podem ser trabalhadas pelo docente da disciplina de matemática de modo à auxiliar seus alunos na hora de realizar o ENEM?

Para responder a essa questão, foi escolhido como objetivo geral dessa pesquisa:

## Objetivo Geral

- Subsidiar os docentes nas atividades de matemática relacionadas aos conteúdos de matrizes e sistemas lineares, nas questões das provas do ENEM de 2009 a 2017, tendo em vista as habilidades e competências estabelecidas pela Matriz de Referência do ENEM.

Esse objetivo geral foi desdobrado nos seguintes objetivos específicos.

## Objetivos específicos

- Identificar a competência de área e as habilidades avaliadas sobre matrizes e sistemas lineares da área de conhecimento de Matemática e suas Tecnologias das provas do ENEM.
- Propor ações didáticas para orientar o alcance dessas habilidades.
- Discutir os erros e acertos dos alunos nas questões, a fim de orientar os professores para o alcance dessas habilidades.

Como forma de auxiliar os docentes de matemática no desenvolvimento de suas atividades, foram selecionadas e resolvidas questões que envolvem matrizes e sistemas lineares, retiradas das provas do ENEM no período de 2009 a 2017.

As questões foram aplicadas e desenvolvidas com alunos de uma turma da 2ª série e uma turma da 3ª série do ensino médio, de uma escola do campo[1] no município de São Miguel do Iguaçu - Paraná, onde foram analisadas as diferenças dos métodos de resolução entre os alunos e os erros cometidos por eles nas resoluções.

Foi realizado levantamento bibliográfico e análise documental e de conteúdo, com intuito de caracterizar o estudo de matrizes e sistemas lineares no contexto escolar. Foi feito também, o estudo da Matriz de Referência do ENEM, à qual, contempla competências e habilidades essenciais à etapa do ensino médio, norteadas pelos eixos cognitivos, classificando cada competência e habilidade trabalhada. Além disso, foram organizados esses dados em tabelas, fazendo suas análises e as análises das resoluções das questões que foram realizadas com as turmas da 2ª e 3ª série do ensino médio, verificando as competências e

[1] Segundo o Decreto nº 7.352, escola do campo é aquela situada em área rural (IBGE) ou em área urbana, desde que atenda predominantemente a populações do campo.

habilidades designadas para cada questão.

O presente trabalho foi organizado em quatro capítulos: Matrizes e sistemas lineares no contexto do ENEM e dos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEM); Matrizes; Sistemas de equações lineares; Análise do tema matrizes e sistemas lineares em questões do ENEM com alunos da 2ª e 3ª série do ensino médio, além da introdução, das considerações finais e da apresentação das referências bibliográficas.

No primeiro capítulo, 'Matrizes e sistemas lineares no contexto do ENEM e dos PCNEM', foram apresentadas algumas considerações acerca do ensino de matrizes e sistemas lineares no âmbito da educação escolar, ressaltando a importância e os desafios do trabalho com esses conteúdos, bem como as dimensões e unidades temáticas que o constitui. Também foi feita uma análise do ENEM e sua Matriz de Referência, e, no contexto do referido documento, foi abordado a competência de área 5 da Matriz de Referência 'Matemática e suas Tecnologias'. Além disso, foram apresentadas as competências, habilidades e temas estruturadores de matemática no contexto dos PCNEM e PCN+ Ensino Médio, ressaltando especificamente o tema estruturador 'Álgebra: números e funções' (Tema 1).

No segundo e terceiro capítulos, 'Matrizes' e 'Sistemas de equações lineares', respectivamente, foram apresentados os conceitos e definições sobre tais conteúdos, bem como suas operações. Além disso, foram discutidos os métodos de resolução de sistemas lineares com duas ou mais equações lineares.

No quarto capítulo, 'Análise do tema matrizes e sistemas lineares em questões do ENEM com alunos da 2ª e 3ª série do ensino médio', foram selecionadas e analisadas algumas questões que compuseram o ENEM no período de 2009 a 2017. Essas questões abrangem a competência de área 5 - 'Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas', da Matriz de Referência do ENEM. Com a análise das questões, discutimos meios de resolução para cada questão, bem como as discussões de alguns erros apresentados pelos alunos em suas resoluções, analisando também as competências e habilidades requeridas em cada uma delas.

Por fim, foi apresentado as considerações finais que permeiam um suporte didático como resposta à questão norteadora do trabalho e apontam para perspectivas de estudos futuros sobre o tema, além da apresentação das referências e anexos.

# 1 Matrizes e sistemas lineares no contexto do ENEM e dos PCNEM

A Matriz de Referência do ENEM consiste de um instrumento para orientação e elaboração dos itens das provas do ENEM, com um formato onde são requeridos uma maior capacidade de raciocínio e compreensão do que a de memorização.

Os PCNEM apresentam habilidades básicas e competências específicas a serem trabalhadas e desenvolvidas pelos alunos na disciplina de matemática até o término do ensino médio. Essas competências e habilidades são de fundamental importância, pois, norteiam as atividades do professor.

Dentro dos conteúdos abordados pelos PCN+ Ensino Médio, Brasil (2002) traz o estudo de matrizes e sistemas lineares, o qual, deve receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, ou seja, estender os conhecimentos que os alunos possuem aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento.

Diante disso, a análise desses conteúdos é de suma importância, pois remete o aluno à resolução de problemas simples do dia a dia e até mesmo de mais elaborados.

## 1.1 Matrizes e sistemas lineares no ensino médio

A disciplina de matemática, segundo Brasil (2002), está dividida em três temas estruturadores, a serem divididos nas três séries do ensino médio. Esses temas possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural. Os três eixos são:

1. Álgebra: números e funções.
2. Geometria e medidas.
3. Análise de dados.

Cada um desses temas estruturantes foi dividido em diversos conteúdos que o abrangem. Dentre eles, há os conteúdos de matrizes e sistemas lineares que se inserem no eixo: "Álgebra: números e funções".

Brasil (2000a), remete que a presença desses conteúdos como parte da disciplina de matemática no ensino médio é justificada pela capacidade de transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica.

Sobre os objetivos desses conteúdos no contexto da matemática, Paraná (2008) ressalta que:

> No Ensino Médio, há necessidade de aprofundar o estudo dos números, de modo a ampliar o conhecimento e domínio deste conteúdo para que o

> aluno:
> • [...]
> • conceitue e interprete matrizes e suas operações;
> • conheça e domine o conceito e as soluções de problemas que se realizam por meio de determinante;
> • [...]
> • identifique e resolva equações, sistemas de equações [...] (PARANÁ, 2008, p. 52).

Em suma, as atividades relacionadas ao ensino de matrizes e sistemas de equações lineares, assim como todos os outros conteúdos do ensino médio, devem ser norteadas pelas finalidades desse nível de ensino estabelecidas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9394/96), nos quais se incluem a possibilidade de relacionar a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina (BRASIL, 1996, p. 12).

De acordo com Gomes (2017),

> O ENEM se insere nesse contexto como um mecanismo que pode contribuir para a qualidade do Ensino Médio. Baseia-se em uma Matriz de Referência que compreende grandes áreas do conhecimento, dentre elas Matemática e suas Tecnologias, que, juntamente com as competências estabelecidas pelos PCNEM para essa área, devem ser tomadas como base para o desenvolvimento das atividades dos professores[...] (GOMES, 2017, p. 28).

Dentre as atividades desenvolvidas no contexto do ENEM, encontramos atividades relacionadas aos conteúdos de matrizes e sistemas lineares.

## 1.2 O ENEM e sua Matriz de Referência

O ENEM foi instituído através da Portaria do Ministério da Educação (MEC) nº 438, de 28 de maio de 1998, com os seguintes objetivos:

> I – conferir ao cidadão parâmetro para autoavaliação, com vistas à continuidade de sua formação e à sua inserção no mercado de trabalho;
> II – criar referência nacional para os egressos de qualquer das modalidades do ensino médio;
> III – fornecer subsídios às diferentes modalidades de acesso à educação superior;
> IV – constituir-se em modalidade de acesso a cursos profissionalizantes pós-médio.
> (BRASIL, 1998).

De modo geral, Brasil (2005, p. 7) apresenta como objetivo principal do ENEM: “possibilitar uma referência para autoavaliação, a partir das competências e habilidades que o estruturam”. De acordo com o Relatório Pedagógico do ENEM 2011-2012, trata-se de um exame individual e de caráter voluntário, oferecido anualmente aos concluintes do ensino médio. É estruturado por competências e habilidades, as quais são desenvolvidas e fortalecidas com a mediação da escola.

De acordo com Brasil (2015, p. 63), o ENEM tem como referência a LDB 9.394/96, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), as Orientações Curriculares para o Ensino

Médio, a Reforma do Ensino Médio, os textos que sustentam sua organização curricular em áreas de conhecimento e, ainda, as Matrizes Curriculares de Referência para o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB).

Durante os anos 1998-2008, o ENEM era composto por 63 (sessenta e três) questões de múltipla escolha. Brasil (2015) destaca que:

> Sem uma ligação estrita com o currículo do Ensino Médio, a intenção do Exame residia sobre a avaliação de competências e habilidades desenvolvidas ao longo da escolarização básica, com ênfase na resolução de situações-problema, e não na memorização de conteúdos escolares específicos do nível médio (BRASIL, 2015, p. 18).

A partir de 2009, o ENEM passou a ser utilizado como um dos principais mecanismos para a seleção de alunos para o ingresso no ensino superior. Passou a abranger as quatro áreas do conhecimento, relacionadas aos componentes curriculares da educação básica, visando contribuir para a democratização das oportunidades de acesso às vagas oferecidas pelas Instituições Federais do Ensino Superior (IFES), sendo composto por quatro provas independentes entre si, cada uma contendo 45 (quarenta e cinco) itens objetivos, totalizando assim 180 (cento e oitenta) itens, além de um teste de escrita (redação).

O ENEM é estruturado por uma Matriz de Referência, concebido pelo MEC e pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), que indica a associação entre os conteúdos, as competências e habilidades básicas do participante correspondente ao término da escolaridade básica.

A Matriz de Referência do ENEM apresenta inicialmente os eixos cognitivos comuns a todas as áreas do conhecimento, conforme mostra a tabela 1. Cada um desses cinco eixos cognitivos que se encontram na Matriz de Referência se referem a conteúdos normalmente veiculados no ensino básico.

Tabela 1 – Eixos cognitivos do ENEM (comuns a todas as áreas)

| | |
|---|---|
| Dominar linguagens (DL) | Dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa. |
| Compreender fenômenos (CF) | Construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas. |
| Enfrentar situações problema (SP) | Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações problemas. |

(Continua)

(Conclusão)

| | |
|---|---|
| Construir argumentação (CA) | Relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente. |
| Elaborar propostas (EP) | Recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural. |

Fonte: BRASIL, 2009, p. 1. Adaptado.

Ainda na Matriz de Referência do ENEM, o conhecimento é dividido em quatro grandes áreas e cada uma compreende disciplinas que compõem o currículo escolar, conforme mostra a tabela 2.

Tabela 2 – Áreas de conhecimento do ENEM

| **Áreas do Conhecimento** | **Componentes Curriculares** |
|---|---|
| Linguagens, códigos e suas Tecnologias | Língua Portuguesa, Literatura, Língua Estrangeira (Inglês ou Espanhol), Artes, Educação Física e Tecnologias da Informação e Comunicação |
| Matemática e suas Tecnologias | Matemática |
| Ciências da Natureza e suas Tecnologias | Química, Física e Biologia |
| Ciências Humanas e suas Tecnologias | História, Geografia, Filosofia e Sociologia |

Fonte: GOMES, 2017, p. 30.

Cada uma dessa áreas é composta por um conjunto de competências e habilidades, as quais são utilizadas como base para a elaboração das questões do ENEM. O exame objetiva aferir se o participante, ao final do ensino médio, “demonstra domínio dos princípios científicos e tecnológicos que embasam a produção moderna, conhecimento das formas contemporâneas de linguagem, bem como conhecimentos de ciências humanas necessários ao exercício da cidadania.”(BRASIL, 2015, p. 63).

Considerando que o objeto maior desse estudo se baseia na abordagem do conteúdo de matrizes e sistemas lineares no contexto do ENEM, será analisada especificamente a área de conhecimento ‘Matemática e suas Tecnologias’, com foco principal na competência de área 5 ‘Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas’, juntamente com as habilidades que ela compreende.

Moretto (2010), afirma que:

> As habilidades estão associadas ao saber fazer: ação física ou mental que indica a capacidade adquirida. Assim, identificar variáveis, compreender fenômenos, relacionar informações, analisar situações problema, sintetizar, julgar, correlacionar e manipular são exemplos de habilidades. Já as competências são um conjunto de habilidades harmonicamente desenvolvidas e que caracterizam por exemplo uma função/profissão específica: ser arquiteto, médico ou professor de química (MORETTO, 2010).

Dessa forma, fica claro que possuir habilidades é saber fazer as atividades propostas dentro dos conteúdos apresentados, e ainda, 'as habilidades devem ser desenvolvidas na busca das competências', ou seja, quando se tem todas as habilidades propostas nas atividades, fica evidente que se tem a competência da mesma, alcançando resultado positivo.

## 1.3 'Matemática e suas Tecnologias' na Matriz de Referência do ENEM

A área do conhecimento 'Matemática e suas Tecnologias' no contexto da Matriz de Referência do ENEM apresenta 7 (sete) competências, as quais serão apresentadas na tabela 3.

Tabela 3 – Competências que compõem a Matriz de Referência 'Matemática e suas Tecnologias'

| | |
|---|---|
| Competência de área 1 | Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais. |
| Competência de área 2 | Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela. |
| Competência de área 3 | Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. |
| Competência de área 4 | Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. |
| Competência de área 5 | Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas. |
| Competência de área 6 | Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação. |
| Competência de área 7 | Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos ade- |

(Continua)

(Conclusão)

| | |
|---|---|
| | quados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística. |

Fonte: BRASIL, 2009, p. 5-7. Adaptado.

Essas competências se referem normalmente a conteúdos do ensino básico. De acordo com Brasil (2015, p. 64), "(...) elas estão organizadas por temas matemáticos: números, geometria, álgebra, grandezas e medidas, modelagem, tratamento da informação e conhecimentos de estatística e probabilidade."

Na tabela 4 será apresentado uma descrição geral da Matriz de Referência da área de 'Matemática e suas Tecnologias' abordadas no ENEM. No anexo A deste trabalho será apresentada a tabela completa da Matriz de Referência de 'Matemática e suas Tecnologias' com suas respectivas habilidades.

Tabela 4 – Descrição das Competências que compõem a Matriz de Referência 'Matemática e suas Tecnologias'

| | |
|---|---|
| Competência 1 | Composta por cinco habilidades e se refere ao pensamento numérico que permite relacionar situações do contexto social analisando situações da realidade. Refere-se ainda à capacidade de analisar as diferentes representações numéricas. |
| Competência 2 | É formada por quatro habilidades que permitem estudar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade. |
| Competência 3 | Possui cinco habilidades, as quais constroem noções de grandezas e medidas para a compreensão de problemas do cotidiano. |
| Competência 4 | É formada por quatro habilidades as quais permitem identificar, resolver, analisar e avaliar a variação de grandezas para a compreensão da realidade. |
| Competência 5 | Possui cinco habilidades e trata do desenvolvimento do pensamento algébrico/geométrico para a resolução de situações problemas. |
| Competência 6 | Possui três habilidades, trata da interpretação de informações através de gráficos e tabelas para a resolução de problemas. |
| Competência 7 | Possui quatro habilidades, explora a compreensão dos fenômenos naturais e sociais, utilizando conhecimentos de probabilidade e estatística para a resolução de situações da realidade. |

Fonte: BRASIL, 2015, p. 65. Adaptado.

Para Gomes (2017, p. 32) "As questões de Matemática que compõem o ENEM são baseadas na aferição dessas habilidades e buscam avaliar a qualidade do pensamento lógico-matemático básico dos participantes."

### 1.3.1 Competência de área 5 - Matriz de Referência 'Matemática e suas Tecnologias'

'Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas' se refere à competência de área 5 da Matriz de Referência 'Matemática e suas tecnologias', e é composta por 05 (cinco) habilidades, as quais serão apresentadas na tabela 5.

Tabela 5 – Habilidades compreendidas na competência 5 da Matriz de Referência 'Matemática e suas Tecnologias'

| | |
|---|---|
| H19 | Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas. |
| H20 | Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas. |
| H21 | Resolver situação problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos. |
| H22 | Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação. |
| H23 | Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos. |

BRASIL, 2009, p. 6. Adaptado.

De acordo com Brasil (2000b), essas habilidades são verificadas com bases em questões que demandam raciocínio lógico, poder de argumentação, leitura e representação da realidade para a resolução de situações problemas, dentre outras.

A tabela 6 apresenta a descrição de cada uma das habilidades citadas na tabela 5.

Tabela 6 – Descrição das habilidades compreendidas na competência 5 da Matriz de Referência 'Matemática e suas Tecnologias'

| | |
|---|---|
| H19 | Verifica-se nessa habilidade a presença da capacidade de identificação. Trata-se de uma competência que implica tomar decisões, interpretar, representar e ilustrar. Verifica-se que o trabalho com situações problemas diversificados e contextualizados, e a possibilidade de que o aluno possa interagir no processo de resolução, também pode ser uma alternativa que contribua para o ensino aprendizado do mesmo. |
| H20 | Verifica-se que a mesma se baseia na capacidade de interpretação. A situação problema recorta, organiza, destaca, etc., um aspecto da experiência e propõe uma reflexão sobre a experiência recortada. Descreve como algo que aconteceu, apresentando o contexto que encaixa e dá sentido e autonomia ao acontecimen- |

(Continua)

(Conclusão)

| | |
|---|---|
| | to. A interpretação questiona o porquê isso aconteceu e se apoia nos dados das experiências. É possível verificar ainda que a capacidade de interpretação requer oportunizar o contato com experiências e a possibilidade de poder refletir sobre elas. |
| H21 | Essa habilidade requer a capacidade de calcular. Para a resolução de uma situação problema é necessário que se recorra as habilidades de ler, comparar, interpretar, dentre outras para que se tome uma decisão. Diante disso, é preciso ressaltar a importância e a necessidade do trabalho constante, a fim de proporcionar o desenvolvimento dessas habilidades no âmbito escolar. |
| H22 | Reque o poder de argumentação. "A capacidade de argumentar de modo consistente é elemento fundamental tanto na ordenação do pensamento, quanto na construção da própria ideia de cidadania". Para a construção do conhecimento, é preciso relacionar informações, interconectá-las, tecer teias de significações. O fato de utilizar os conhecimentos algébricos/geométricos para a construção da argumentação se deve ao fato de convencer a nós mesmos e aos outros sobre a razoabilidade das conexões estabelecidas. |
| H23 | Requer a capacidade de analisar/avaliar. Analisar "consiste em decompor um texto em seus elementos essenciais, para apreender suas relações e dar um esquema de conjunto". Analisar é uma tarefa fundamental para a tomada de decisão sobre a alternativa a ser indicada como correta. |

MACEDO, et al., 2005, p. 30 e p. 79-88. Adaptado.

Com base nas articulações apresentadas na tabela 6, podemos enfatizar que o ensino de matrizes e sistemas lineares deve ser pautado no oferecimento de oportunidades de desenvolvimento das habilidades que compõem as competências relacionadas à área, em particular da competência de área 5, que modelam e resolvem problemas usando representações algébricas. Desse modo, o ensino desse conteúdo deve ir muito além do desenvolvimento da capacidade de representação, deve objetivar também, a capacidade de raciocinar, argumentar e criticar. Além desses, deve objetivar também, a capacidade de interpretar, calcular e raciocinar para a construção de argumentação a fim de agir sobre as situações do cotidiano.

Para esclarecer melhor podemos relacionar as competências, habilidades e eixos cognitivos conforme mostra a tabela 7.

Tabela 7 – Relação entre competências, habilidades e eixos cognitivos - Matemática e suas Tecnologias

| **Competências de matemática e suas Tecnologias** | **Dominar Linguagens (DL)** | **Compreender fenômenos (CF)** | **Enfrentar situações problemas (SP)** | **Construir argumentação (CA)** | **Elaborar propostas (EP)** |
|---|---|---|---|---|---|
| C1 - Contruir significado para os números naturais, inteiros, racionais e reais. | H1 | H2 | H3 | H4 | H5 |
| C2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela. | H6 | H7 | H8 | H9 | |
| C3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. | H10 | H11 | H12 | H13 | H14 |
| C4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. | | H15 | H16 | H17 | H18 |
| C5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas. | H19 | H20 | H21 | H22 | H23 |
| C6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação. | | | H24 | H25 | H26 |
| C7 - Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística. | | H27 | H28 | H29 | H30 |

Fonte: Rabelo, 2013, p. 63. Adaptado.

Essa tabela, adaptada de Rabelo (2013, p. 63), mostra como os eixos cognitivos, estão relacionados com as competências e as habilidades requeridas. Podemos observar que o enfrentamento de situações problemas e a construção de argumentação estão presentes em todas as competências.

## 1.4 'Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias' segundo os PCNEM

De acordo com Brasil (2000a), os PCNEM constituem o principal referencial para a elaboração da Matriz de Referência dos conteúdos que compõem o currículo do ensino médio. Nesse documento são abordadas as competências e habilidades que se espera dos alunos desse nível de ensino, as quais servem de parâmetro para a avaliação da educação básica em nível nacional.

Segundo os PCNEM, o conhecimento escolar é dividido em três grandes áreas: Linguagens, códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Essa divisão se baseia na reunião de conteúdos que compartilham objetos de estudo, criando a possibilidade para que a prática escolar se desenvolva numa perspectiva de interdisciplinaridade.

> A estruturação por área de conhecimento justifica-se por assegurar uma educação de base científica e tecnológica, na qual conceito, aplicação e solução de problemas concretos são combinados com uma revisão dos componentes socioculturais orientados por uma visão epistemológica que concilie humanismo e tecnologia ou humanismo numa sociedade tecnológica (BRASIL, 2000a, p. 19).

A área de 'Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias', abrange as disciplinas de Biologia, Física, Química e Matemática, as quais elencam competências gerais dessa área de conhecimento, conforme mostra a tabela 8.

Tabela 8 – Competências gerais da área 'Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias'

| | |
|---|---|
| Competência 1<br>Representação e comunicação | Envolve a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento. |
| Competência 2<br>Investigação e compreensão | Capacidade de enfrentamento e resolução de situações problema, utilizando dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências. |
| Competência 3<br>Contextualização sociocultural | Análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico. |

Fonte: GOMES, 2017, p. 35.

Para Brasil (2000b, p. 6), "os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo".

Nesse contexto, a matemática é essencial, tendo fundamental importância para a formação de cidadãos, visando nesses a capacidade de raciocínio lógico, poder de argumentação, com possibilidade de interpretação dos fatos e capazes de intervir na sociedade em que estão inseridos.

### 1.4.1 Matemática no contexto dos PCNEM

Os PCNEM estabelecem um conjunto de parâmetros para a organização do ensino de matemática no ensino médio pretendendo de acordo com Brasil (2000b),

> [...] contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional (BRASIL, 2000b, p. 40).

Nesse documento são estabelecidas as finalidades do ensino de matemática no ensino médio. Além disso, apresenta as competências e habilidades esperadas pelos alunos, conforme tabela 9.

Tabela 9 – Competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática segundo os PCNEM

| Competências | Habilidades |
|---|---|
| Representação e comunicação | Ler e interpretar textos de Matemática.<br>Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.).<br>Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc.) e vice-versa.<br>Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.<br>Produzir textos matemáticos adequados.<br>Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.<br>Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho. |
| Investigação e compreensão | Identificar o problema (compreender enunciados, for mular questões, etc.).<br>Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.<br>Formular hipóteses e prever resultados. |

(Continua)

(Conclusão)

| | |
|---|---|
| | Selecionar estratégias de resolução de problemas.<br>Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.<br>Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.<br>Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.<br>Discutir ideias e produzir argumentos convincentes. |
| Contextualização sociocultural | Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.<br>Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.<br>Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.<br>Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades. |

Fonte: BRASIL, 2000b, p. 46. Adaptado.

Com relação as competências gerais da área 'Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias', apresentadas na tabela 8, os PCN+ Ensino Médio apontam e detalham o sentido das mesmas no âmbito da matemática e explicita o que se espera do aluno em cada uma delas, além de fornecer exemplos de modo a auxiliar a compreensão de como é possível desenvolvê-las no contexto da referida disciplina.

Para os temas estruturadores (álgebra, geometria, análise de dados), Brasil (2002, p. 120) relata que, "Cada tema estruturador é um campo de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo". Esses temas estruturados são divididos em conteúdos específicos, que podem ser organizados dentro do projeto pedagógico da escola, "considerando características de seus alunos e dos tempos e espaços para seu desenvolvimento" (GOMES, 2017, p. 37).

Considerando os objetivos previstos para esse estudo, será abordado especificamente o tema estruturador 'Álgebra: números e funções' (Tema 1), para o qual são propostas, dentro dos PCN+ Ensino Médio, duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria. Cada unidade contempla um conjunto de conteúdos e habilidades, conforme mostra a tabela 10.

Tabela 10 – Conteúdos e habilidades da unidade temática Tema 1 – 'Álgebra: números e funções

| | |
|---|---|
| **1. Variação de grandezas:** noção de função; funções analíticas e não-analíticas; representação e análise gráfica; seqüências numéricas: progressões e noção de infinito; variações exponenciais ou logarítmicas; funções seno, cosseno e tangente; taxa de variação de grandezas. | Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e fazendo conexões dentro e fora da Matemática. Compreender o conceito de função, associando-o a exemplos da vida cotidiana. Associar diferentes funções a seus gráficos correspondentes. Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas. Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis. |
| **2. Trigonometria:** do triângulo retângulo; do triângulo qualquer; da primeira volta. | Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais. |

Fonte: BRASIL, 2002, p. 122-123. Adaptado.

De acordo com Brasil (2002), esse tema estruturador e suas unidades temáticas podem desenvolver no aluno todas as habilidades relativas a interpretação de modelos, percepção do sentido de transformações, busca da regularidade, conhecimento do desenvolvimento histórico e tecnológico de parte de nossa cultura e adquirir uma visão sistematizada de parte do conhecimento matemático.

Para Gomes (2017, p. 39), "o processo de escolha de um conteúdo para ser desenvolvido junto aos alunos em uma sala de aula não encerra em si próprio a organização de um trabalho pedagógico". Desse modo, devemos pensar em diferentes formas de abordagem desses conteúdos a fim de despertar o interesse pelo aprendizado e de inserir o aluno como sujeito ativo no processo. Assim, para Brasil (2002),

> Os temas específicos não são suficientes para o desenvolvimento de todas as competências pretendidas, mas a cuidadosa articulação entre conteúdo e forma pode organizar o ensino para que ele se aperfeiçoe e constitua de

> fato uma proposta de formação dos jovens do ensino médio (BRASIL, 2002, p. 132).

Nesse contexto, esse trabalho contribui com uma reflexão acerca da abrangência da Matriz de Referência do ENEM com relação às competências e habilidades relacionadas aos conteúdos de matrizes e sistemas lineares no ensino médio. Além disso, contribui também para as análises das respostas dos alunos em relação as questões do ENEM, as quais serão abordadas no capítulo 4.

# 2 Matrizes

Nesse capítulo será apresentado os conceitos e definições sobre matrizes, bem como suas operações. Esses conceitos são utilizados para a resolução de diversos tipos de problemas e são essenciais para a organização de dados e informações.

Para apresentar as definições, conceitos e operações de matrizes utilizamos como referência Boldrini (1978) e Dante (2008a).

As matrizes são estruturas matemáticas organizadas na forma de tabela, com uma distribuição cartesiana de $m$ linhas e $n$ colunas, e são amplamente usadas na resolução de sistemas lineares. Observe o exemplo 1:

1. Em uma editora, as vendas de livros de Matemática, Física e Química, no primeiro trimestre de um ano podem ser expressas pela tabela 11.

Tabela 11 – Venda de livros de Matemática, Física e Química no primeiro trimestre de um ano

| | Janeiro | Fevereiro | Março |
|---|---|---|---|
| Matemática | 20000 | 32000 | 45000 |
| Física | 15000 | 18000 | 25000 |
| Química | 16000 | 17000 | 23000 |

Fonte: DANTE, 2008a, p. 240.

Observando a tabela 11 podemos tirar algumas informações, como por exemplo:

- Para sabermos quantos livros de matemática foram vendidos em fevereiro, basta olharmos o número que está na primeira linha e na segunda coluna;
- Para sabermos quantos livros de física foram vendidos em janeiro, basta olharmos o número que está na segunda linha e na primeira coluna;

Esse tipo de tabela pode ser representado como uma matriz de ordem $3 \times 3$ (lemos: três por três), pois possui três linhas e três colunas, e é expressada por:

$$\begin{pmatrix} 20000 & 32000 & 45000 \\ 15000 & 18000 & 25000 \\ 16000 & 17000 & 23000 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, podemos expressar vários tipos de tabela como uma matriz.

## 2.1 Definição

Denomina-se matriz $m \times n$ (lemos: $m$ por $n$) uma tabela retangular formada por $m.n$ números reais, dispostos em $m$ linhas e $n$ colunas, onde $m$ e $n$ são dois números naturais maiores ou iguais a 1.

Seguem alguns exemplos de matrizes:

1.

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz $A_{3\times 2}$ tem ordem $3 \times 2$, pois tem 3 linhas e 2 colunas.

2.

$$B_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

A matriz $B_{2\times 1}$ tem ordem $2 \times 1$, pois tem 2 linhas e 1 coluna.

3.

$$C_{1\times 4} = \begin{pmatrix} -8 & \frac{3}{4} & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A matriz $C_{1\times 4}$ tem ordem $1 \times 4$, pois tem 1 linha e 4 colunas.

Genericamente representamos uma matriz $m \times n$ ($m$ linhas por $n$ colunas) da seguinte forma:

$$X_{m\times n} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} = [x_{ij}]_{m\times n},$$

onde $[x_{ij}]_{m\times n}$ representa um elemento em sua forma geral, com $i$ representando a posição que o elemento se encontra em relação a linha e $j$ a posição que o elemento se encontra em relação a coluna.

## 2.2 Tipos especiais de matrizes

A seguir são apresentadas algumas matrizes especiais, e recebem essa nomenclatura devido ao fato de apresentarem algumas características específicas.

### 2.2.1 Matriz quadrada

Matriz quadrada é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, $m = n$, e temos que esse tipo de matriz é de ordem $n \times n$ ou simplesmente de ordem $n$. Observe os exemplos:

1.
$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$
A matriz é quadrada de ordem 2, pois $m = n = 2$.

2.
$$B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \\ -1 & -4 & 6 \\ \sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
A matriz é quadrada de ordem 3, pois $m = n = 3$.

Uma matriz quadrada de ordem $n$ possui duas diagonais: a diagonal principal e a diagonal secundária.

A diagonal principal é formada pelos elementos $x_{11}$, $x_{22}$, $x_{33}$, ..., $x_{nn}$, ou seja, são os elementos $x_{ij}$, com $i = j$. Veja os exemplos:

1.
$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$
A diagonal principal da matriz $A_{2\times 2}$ é formada pelos elementos $a_{11} = 3$ e $a_{22} = 6$.

2.
$$B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -3 & 0 & 8 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$
A diagonal principal da matriz $B_{3\times 3}$ é formada pelos elementos $b_{11} = 1$, $b_{22} = 0$ e $b_{33} = 6$.

A diagonal secundária é formada pelos elementos $x_{1n}$, $x_{2(n-1)}$, $x_{3(n-2)}$, ..., $x_{(n-1)2}$, $x_{n1}$, ou seja, são os elementos $x_{ij}$, com $i + j = n + 1$. Veja os exemplos:

1.
$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$
A diagonal secundária da matriz $A_{2\times 2}$ é formada pelos elementos $a_{12} = 2$ e $a_{21} = -1$.

2.
$$B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -3 & 0 & 8 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$
A diagonal secundária da matriz $B_{3\times 3}$ é formada pelos elementos $b_{13} = 10$, $b_{22} = 0$ e $b_{31} = 5$.

### 2.2.2 Matriz nula

A matriz nula é aquela que $a_{ij} = 0$ para todo $i$ e $j$.

É simbolizada por $O_{m\times n}$, se for uma matriz de ordem $m \times n$ e por $O_n$ se for uma matriz de ordem $n$.

### 2.2.3 Matriz-coluna

Uma matriz-coluna possui apenas 1 coluna, ou seja, $n = 1$. Por exemplo:

1.
$$A_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2.
$$B_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

### 2.2.4 Matriz-linha

De maneira análoga a matriz-coluna, existe também a matriz-linha, que é aquela que possui apenas 1 linha, ou seja, $m = 1$.

1.
$$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.
$$B_{1\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### 2.2.5 Matriz diagonal

Matriz diagonal é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, ou seja, os elementos que não estão na diagonal principal são zero, como mostram os exemplos:

1.
$$A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.
$$B_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

### 2.2.6 Matriz identidade

É uma matriz diagonal com os elementos da diagonal principal todos iguais a 1, ou seja, $a_{ij} = 1$, para $i = j$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Veja os exemplos:

1.
$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.
$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 2.2.7 Matriz triangular superior

A matriz triangular superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$. Seguem alguns exemplos:

1.
$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.
$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

### 2.2.8 Matriz triangular inferior

A matriz triangular inferior, ao contrário da triangular superior, é aquela em que todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, ou seja, é também uma matriz quadrada $(m = n)$, com $a_{ij} = 0$, para $i < j$. Veja os exemplos:

1.
$$A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.
$$B_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

### 2.2.9 Matriz simétrica

Matriz simétrica é uma matriz quadrada ($m = n$), onde $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i$ e $j$. Observe o exemplo a seguir:

1.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Observe que no exemplo 1, temos:
$a_{12} = a_{21} =$ 3,
$a_{13} = a_{31} =$ -1,
$a_{23} = a_{32} =$ 0.

**Obs.:** No caso de uma matriz simétrica, a parte superior é uma "reflexão" da parte inferior, em relação à diagonal principal da matriz.

## 2.3 Operações com matrizes

Considere as tabelas 12 e 13:

Tabela 12 – Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o ano de 1976

| | soja | feijão | arroz | milho |
|---|---|---|---|---|
| Região A | 3000 | 200 | 400 | 600 |
| Região B | 700 | 350 | 700 | 100 |
| Região C | 1000 | 100 | 500 | 800 |

Fonte: BOLDRINI, 1978, p. 5.

e,

Tabela 13 – Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o ano de 1977

| | soja | feijão | arroz | milho |
|---|---|---|---|---|
| Região A | 5000 | 50 | 200 | 0 |
| Região B | 2000 | 100 | 300 | 300 |
| Região C | 2000 | 100 | 600 | 600 |

Fonte: BOLDRINI, 1978, p. 5.

Para montar uma tabela que dê a produção por produto e por região, nos anos

1976 e 1977 conjuntamente, por exemplo, devemos somar os elementos correspondentes das tabelas 12 e 13, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 3000 & 200 & 400 & 600 \\ 700 & 350 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5000 & 50 & 200 & 0 \\ 2000 & 100 & 300 & 300 \\ 2000 & 100 & 600 & 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 & 250 & 600 & 600 \\ 2700 & 450 & 1000 & 400 \\ 3000 & 200 & 1100 & 1400 \end{pmatrix}.$$

Assim,

Tabela 14 – Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante os anos de 1976 e 1977

| | soja | feijão | arroz | milho |
|---|---|---|---|---|
| Região A | 8000 | 250 | 600 | 600 |
| Região B | 2700 | 450 | 1000 | 400 |
| Região C | 3000 | 200 | 1100 | 1400 |

Fonte: BOLDRINI, 1978, p. 6.

Tendo por exemplo a informação sobre a previsão para o ano de 1978, em que a produção será o triplo da produção de 1976, podemos realizar a seguinte operação:

$$3.\begin{pmatrix} 3000 & 200 & 400 & 600 \\ 700 & 350 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9000 & 600 & 1200 & 1800 \\ 2100 & 1050 & 2100 & 300 \\ 3000 & 300 & 1500 & 2400 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, a produção prevista seria:

Tabela 15 – Previsão da produção de grãos (em milhares de toneladas) para o ano de 1978

| | soja | feijão | arroz | milho |
|---|---|---|---|---|
| Região A | 9000 | 600 | 1200 | 1800 |
| Região B | 2100 | 1050 | 2100 | 300 |
| Região C | 3000 | 300 | 1500 | 2400 |

Fonte: BOLDRINI, 1978, p. 6.

Os exemplos acimas citados se referem à operações com matrizes, onde efetuamos a soma e a multiplicação por um número, as quais serão definidas em 2.3.1 e 2.3.2.

### 2.3.1 Adição/Subtração de Matrizes

#### Adição

A adição de matrizes é definida como a soma de duas matrizes de mesma ordem $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]$, denotada por $A + B$ de ordem $m \times n$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de $A$ e $B$. Isto é,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}.$$

Veja o exemplo abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Subtração

Da mesma forma que a adição, a subtração é a diferença entre duas matrizes de mesma ordem $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]$, denotada por $A - B$ de ordem $m \times n$, cujos elementos são as diferenças dos elementos correspondentes de $A$ e $B$. Isto é,

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}.$$

Veja o exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 10 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 14 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.2 Multiplicação por escalar

Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $k$ um número real qualquer, então $kA$ é uma nova matriz $m \times n$ cujos elementos são $[ka_{ij}]_{m\times n}$.

Veja o exemplo:

$$-2.\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.3 Transposição de Matrizes

Seja uma matriz $A$ de ordem $m \times n$.

A matriz transposta de $A$, indicada por $A^t$, é denominada como a matriz $n \times m$ cujas linhas são, ordenadamente, as colunas de $A$, isto é, $b_{ij} = a_{ij}$.

Exemplo:

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.4 Multiplicação de Matrizes

As operações com matrizes citadas e explicadas em 2.3.1 e 2.3.2 são relativamente fáceis e de manipulação direta, porém, o mesmo não acontece com multiplicação de matrizes, pois não basta multiplicar os elementos correspondentes.

A operação de multiplicação apresenta dois cenários: a multiplicação de um escalar por uma matriz, ou o produto entre duas matrizes. No primeiro caso basta multiplicar cada elemento da matriz pela constante, conforme apresentado em 2.3.2. O segundo caso tem um processo mais algébrico e deve obedecer uma importante restrição, em que a multiplicação só é possível se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz, ou seja,

$$A_{m\times n}.B_{n\times p} = AB_{m\times p}.$$

Como resultado dessa multiplicação obtemos uma matriz de ordem igual ao número de linhas da primeira matriz pelo número de colunas da segunda matriz.

Veja o exemplo 1:

1. Durante a primeira fase da Copa do Mundo de futebol, realizada no Japão e na Coréia do Sul em 2002, o grupo C era formado por quatro países: Brasil, Turquia, Costa Rica e China. Observe os resultados (números de vitórias, empates e derrotas) de cada um, registrados em uma tabela e em sua matriz correspondente ($A_{4\times 3}$).

Tabela 16 – Resultados dos times do grupo C na copa do Mundo de 2002

| | Vitórias | Empates | Derrotas |
|---|---|---|---|
| Brasil | 3 | 0 | 0 |
| Turquia | 1 | 1 | 1 |
| Costa Rica | 1 | 1 | 1 |
| China | 0 | 0 | 3 |

Fonte: DANTE, 2008a, p. 247.

ou

$$A_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pelo regulamento da Copa, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem pontuação correspondente conforme o que está registrado na tabela 17:

Tabela 17 – Pontuação conforme os resultados (Vitórias, Empates e Derrotas)

| | Número de pontos |
|---|---|
| Vitória | 3 |
| Empate | 1 |
| Derrota | 0 |

Fonte: DANTE, 2008a, p. 247.

ou, como na matriz $B_{3\times1}$ a seguir:

$$B_{3\times1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Terminada a primeira fase, foi verificado o total de pontos obtidos por cada país. Essa pontuação pode ser registrada numa matriz que é representada por $AB$ (produto de $A$ por $B$). Veja como é obtida a matriz da pontuação de cada país:

Brasil: $3.3 + 0.1 + 0.0 = 9$,
Turquia: $1.3 + 1.1 + 1.0 = 4$,
Costa Rica: $1.3 + 1.1 + 1.0 = 4$,
China: $0.3 + 0.1 + 3.0 = 0$.

Assim,

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esse exemplo, sugere como deve ser feita a multiplicação de matrizes. Observe a relação que existe entre as ordens das matrizes:

$$A_{4\times3}.B_{3\times1} = AB_{4\times1}.$$

Dessa forma, como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, a multiplicação de A por B é possível e obtemos como resultado uma matriz de ordem igual ao número de linhas da matriz A e número colunas da matriz B.

Com isso, a multiplicação de matrizes é definida da seguinte forma:

**Definição:** Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ matrizes. O produto $AB = [c_{ij}]_{m\times p}$ é definido por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{in}b_{nj}.$$

## 2.4 Determinante

Toda matriz quadrada tem associada a ela um número chamado *determinante da matriz*, obtido por meio de operações que envolvam todos os elementos da matriz. Os determinantes, juntamente com as matrizes, são uma importante ferramenta matemática, para a resolução de sistemas lineares, a qual será abordado no Capítulo 3.

### Determinante de matriz quadrada de ordem 1

Seja a matriz quadrada de ordem 1, indicada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}.$$

Por definição, o determinante de $A$ é igual ao número $a_{11}$.
Indicamos por: $det(A) = a_{11}$.

### Determinante de matriz quadrada de ordem 2

Se $A$ é uma matriz quadrada de ordem 2, seu determinante é calculado fazendo o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

seu determinante é indicado assim:

$$det(A) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21},$$

ou

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}.$$

Veja o exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = 6.(-4) - 3.2 = -24 - 6 = -30.$$

## Determinante de matriz quadrada de ordem 3

Dada a matriz genérica de ordem 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

O determinante da matriz de ordem 3 é definido pelo número:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32}.$$

Podemos obter esses seis produtos de uma forma prática, conhecida como regra de Sarrus, fazendo o seguinte:

- Repetimos as duas primeiras colunas à direita da matriz:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

- Os resultados dos produtos obtidos na direção da diagonal principal permanecem com o mesmo sinal;

$$a_{11}.a_{22}.a_{33};$$
$$a_{12}.a_{23}.a_{31};$$
$$a_{13}.a_{21}.a_{32}.$$

- Os resultados dos produtos obtidos na direção da diagonal secundária mudam de sinal;

$$-a_{13}.a_{22}.a_{31};$$
$$-a_{12}.a_{21}.a_{33};$$
$$-a_{11}.a_{23}.a_{32}.$$

- O determinante é a soma dos valores assim obtidos.

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32}.$$

Veja o exemplo:

1. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

O determinante de A é dado por

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3.0.(-3) + 1.(-2).(-1) + 5.2.4 - 1.2.(-3) - 3.(-2).4 - 5.0.(-1)$$
$$= 0 + 2 + 40 + 6 + 24 - 0 = 72.$$

## Desenvolvimento de Laplace

O desenvolvimento de Laplace é uma fórmula que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem $n$, a partir dos determinantes das submatrizes quadradas de ordem $n-1$. Em muitos casos, o desenvolvimento de Laplace simplifica o cálculo do determinante.

Pela regra de Sarrus temos que:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32},$$

o qual pode ser manipulado algebricamente e escrito como:

$$a_{11}.(a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}) - a_{12}.(a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31}) + a_{13}.(a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31}),$$

ou ainda:

$$a_{11}.\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}.\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}.\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Assim, o determinante da matriz $A_{3\times 3}$ pode ser expresso em função dos determinantes das submatrizes 2x2, isto é,

$$det(A) = a_{11}.\begin{pmatrix} A_{11} \end{pmatrix} - a_{12}.\begin{pmatrix} A_{12} \end{pmatrix} + a_{13}.\begin{pmatrix} A_{13} \end{pmatrix},$$

onde $A_{ij}$ é a submatriz da matriz $A_{3\times 3}$, de onde a i-ésima linha e a j-ésima coluna foram retiradas. Além disso, escrevemos

$$\triangle_{ij} = (-1)^{i+j}.\begin{pmatrix} A_{ij} \end{pmatrix},$$

e obtemos a expressão:

$$det(A) = a_{11} \triangle_{11} + a_{12} \triangle_{12} + a_{13}\triangle_{13}.$$

Esta definição continua sendo válida para matrizes de ordem $n$, e assim expressamos por:

$$\begin{aligned} det(A_{n\times n}) &= a_{i1} \triangle_{i1} + ... + a_{in}\triangle_{in} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(A_{ij}) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\triangle_{ij}. \end{aligned}$$

Observe que na fórmula dada o determinante foi "desenvolvido" pela i-ésima linha. De maneira análoga é válida para as colunas.

Veja o exemplo:

1. Calcule o determinante da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Retirando a segunda coluna, temos que:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = a_{12}\triangle_{12} + a_{22}\triangle_{22} + a_{32}\triangle_{32} = (-2)\triangle_{12} + 1\triangle_{22} + (-1)\triangle_{32},$$

onde,

$$\triangle_{12} = (-1)^{1+2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -(2.2-(-1).(-2)) = -(4-2) = -2,$$

$$\triangle_{22} = (-1)^{2+2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = (1.2 - 3.(-2)) = 2+6 = 8,$$

$$\triangle_{32} = (-1)^{3+2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -(1.(-1)-3.2) = -(-1-6) = -(-7) = 7.$$

Portanto, $det(A) = (-2).(-2) + 1.8 + (-1).7 = 4 + 8 - 7 = 5.$

As definições, operações e conceitos apresentados nesse capítulo podem ser utilizados para a resolução de diversos problemas, bem como, os que serão apresentados no Capítulo 4.

# 3 Sistemas de equações lineares

Nesse capítulo será apresentado os conceitos e definições sobre sistemas de equações lineares, bem como alguns métodos de resolução de sistemas lineares com duas ou mais equações lineares. Para apresentar as definições, conceitos e métodos de resolução de sistemas lineares desse capítulo será utilizado como referência Boldrini (1978), Dante (2008b) e Leonardo (2013).

## 3.1 Definição de sistemas lineares

### Equações lineares

Para entender sistemas lineares, precisamos compreender o que são equações lineares e de que forma ela é aplicada nos problemas do cotidiano. Veja a seguinte situação:

1. Luísa foi ao caixa eletrônico sacar $R\$100,00$ de sua conta. Se no caixa havia apenas notas de $R\$10,00$, $R\$20,00$ e $R\$50,00$, de quantas maneiras ela pode ter efetuado o saque?"

Esse tipo de problema pode ser expresso por meio de uma equação linear. Para isso, chamemos de $x$ o número de cédulas de $R\$10,00$, $y$ o número de cédulas de $R\$20,00$ e $z$ o número de cédulas de $R\$50,00$. Podemos associar essa situação à equação $10x+20y+50z = 100$.

A equação $10x + 20y + 50z = 100$ é um exemplo de equação linear, e nesse caso, as variáveis $x$, $y$ e $z$ devem ser inteiras, pois trata-se de cédulas.

Algumas das soluções do exemplo 1 são:

1. $x = 10, y = 0, z = 0 \Rightarrow (10, 0, 0)$;

2. $x = 6, y = 2, z = 0 \Rightarrow (6, 2, 0)$;

3. $x = 1, y = 2, z = 1 \Rightarrow (1, 2, 1)$.

### Definição de equações lineares

**Equação linear** é toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, n$\in \mathbb{N}$ em que $x_1, x_2, ..., x_n$ são incógnitas, os números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ são coeficientes das incógnitas; e o número real $b$ é o termo independente.

## Definição de sistemas de equações lineares (sistemas lineares)

Um sistema $S$ de equações lineares de $m$ equações com $n$ incógnitas é um conjunto de equações lineares do tipo:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{3.1}$$

com $a_{ij}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, números reais.

**Definição:** $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de um sistema linear quando satisfazem simultaneamente cada uma das $m$ equações do sistema.

Veja alguns exemplos:

1. (5,1) é solução do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 2.5 + 3.1 = 13 \\ 3.5 - 5.1 = 10 \end{cases}$.

2. (2,3) não é solução do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 2.2 + 3.3 = 13 \\ 3.2 - 5.3 \neq 10 \end{cases}$.

### 3.1.1 Existência e Unicidade

O sistema dado pela equação 3.1 pode ou não ter soluções, e é classificado abaixo conforme esse número de soluções.

1. Sistema possível e determinado (SPD): quando possui uma única solução;

2. Sistema possível e indeterminado (SPI): quando possui infinitas soluções;

3. Sistema impossível (SI): quando não possui solução.

#### Discussão de um sistema linear por meio do determinante

Para discutir a existência e unicidade de um sistema $n \times n$, é conveniente utilizar o cálculo do determinante da matriz dos coeficientes aliado ao escalonamento, o qual será apresentado em 3.3.1.

Primeiramente calculamos o determinante de modo que seu valor não seja nulo, obtendo então as condições dos parâmetros para que o sistema seja SPD. Depois, com o mesmo determinante, impõe-se que seu valor seja nulo para então substituirmos no sistema os valores obtidos a partir dessa condição.

Veja o exemplo:

1. Vamos discutir o sistema: $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases}$.

Temos que :

$$D = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 2.$$

Se $D \neq 0 \Rightarrow a - 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$. Logo, o sistema será SPD.

Para $D = 0 \Rightarrow a = 2$, é preciso observar as duas equações.

Substituindo $a = 2$ temos $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases}$.

Note que os coeficientes da primeira equação são o dobro dos da segunda equação. Então, para ter equações equivalentes, $b = \frac{1}{2}$, e para serem incompatíveis, $b \neq \frac{1}{2}$.

Portanto:

- $a \neq 2 \rightarrow SPD$;
- $a = 2$ e $b = \frac{1}{2} \rightarrow SPI$;
- $a = 2$ e $b \neq \frac{1}{2} \rightarrow SI$.

### 3.1.2 A equação matricial $Ax = B$

Qualquer sistema linear, pode ser expresso numa forma matricial $Ax = B$, conforme apresentado a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

onde,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ é a matriz dos coeficientes,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ é a matriz das incógnitas,

e,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ é a matriz dos termos independentes.

Podemos associar ao sistema de equações lineares uma matriz ampliada do sistema, dada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Cada linha dessa matriz é simplesmente uma representação abreviada da equação correspondente no sistema. Essa representação de sistema, serve para encontrar a resolução de um sistema de forma mais prática, através do escalonamento (método da eliminação de Gauss), o qual será estudado em 3.3.1.

Veja o exemplo:

1.
$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}. \tag{3.2}$$

O sistema de equação 3.2 pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

ou na forma de matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

## 3.2 Métodos de resolução de sistemas lineares com 2 equações

Para sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas, há métodos de resolução como o método da adição e o método da substituição, os quais serão apresentados em 3.2.1 e em 3.2.2.

### 3.2.1 Método da Adição

O **método da adição**[1] visa a eliminar uma das incógnitas de um sistema pela soma dos termos semelhantes das equações que o compõem.

Observe o exemplo:

1. $\begin{cases} 2x + 8y = 16 \\ 4x - 8y = 8 \end{cases}.$

Note que as equações apresentam os termos opostos $8y$ e $-8y$. Adicionando as equações membro a membro, a incógnita $y$ será eliminada.

$$\begin{array}{c} 2x + 8y = 16 \\ \underline{4x - 8y = 8} \\ 6x + 0y = 24 \\ 6x = 24 \end{array}$$

Resolvendo a equação $6x = 24$, temos $x = 4$.

Agora, substituindo $x$ por 4 em qualquer uma das equações do sistema obtemos $y = 1$.

Portanto, a solução do sistema é $x = 4$ e $y = 1$, ou seja, $S = \{4, 1\}$.

Alguns sistemas não apresentam termos opostos nas equações. Nesses casos, multiplicamos uma ou as duas equações por números escolhidos convenientemente, a fim de obter termos opostos. Observe o exemplo:

1. $\begin{cases} 2x - y = 23 \\ x + 3y = 22 \end{cases}.$

Para resolver esse sistema pelo método da adição, podemos multiplicar inicialmente por (-2) a equação $x + 3y = 22$, a fim de obter termos opostos.

$$\begin{cases} 2x - y = 23 \\ x + 3y = 22.(-2) \end{cases}.$$

[1] Fonte: SOUZA e PATARO (2015)

Assim,

$$\begin{cases} 2x - y = 23 \\ -2x - 6y = -44 \end{cases}.$$

Temos agora termos opostos $2x$ e $-2x$.
Agora, podemos resolver o sistema obtido pelo método da adição:

$$\begin{array}{c} 2x - y = 23 \\ \underline{-2x - 6y = -44} \\ 0x - 7y = -21 \\ -7y = -21 \\ y = 3. \end{array}$$

Agora, substituindo $y$ por 3 em qualquer uma das equações do sistema obtemos $x = 13$.

Portanto, a solução do sistema é $x = 13$ e $y = 3$, ou seja, $S = \{13, 3\}$.

### 3.2.2 Método da substituição

O **método da substituição**[2] é muito conhecido para resolver sistemas lineares.

Para calcular um sistema linear pelo método da substituição há alguns passos a serem seguidos.

1. Escolher uma incógnita e calcular seu valor algébrico;
2. Substituir o valor algébrico da incógnita na outra equação;
3. Calcular o valor numérico de uma das incógnitas;
4. Substituir o valor numérico da incógnita encontrada em (3) em qualquer uma das duas equações e encontrar o valor numérico da outra incógnita.

Observe o exemplo abaixo:

1. $\begin{cases} 2x + y = 40 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}.$

Seguindo os passos anteriores, temos:

1. Para resolver esse sistema pelo método da substituição, escolhemos inicialmente uma das equações e isolamos uma das incógnitas, obtendo seu valor algébrico.

[2] Fonte: SOUZA e PATARO (2015)

$$2x + y = 40$$
$$y = 40 - 2x.$$

2. Substituímos $y$ por $40 - 2x$ na outra equação e resolvemos a equação obtida, que possui agora apenas uma incógnita.

$$2x - 2y = 10$$
$$2x - 2(40 - 2x) = 10$$
$$2x - 80 + 4x = 10$$
$$6x = 90$$
$$x = 15.$$

3. Para determinar o valor de $y$, substituir $x$ por 15 em qualquer uma das equações do sistema.

$$2x + y = 40$$
$$2.15 + y = 40$$
$$30 + y = 40$$
$$y = 10.$$

Portanto, a solução do sistema é $x = 15$ e $y = 10$, ou seja, $S = \{15, 10\}$.

## 3.3 Métodos de resolução de sistemas lineares com 3 ou mais equações e incógnitas

Para resolução de sistemas com três equações e três incógnitas é possível ainda usar os métodos apresentados em 3.2, porém, o nível de dificuldade já se torna maior. Além dos métodos já citados, existem outros métodos de resolução de sistemas lineares que podem ser usados para sistemas com $n$ equações ($n \geq 3$), como o apresentado em 3.3.1.

### 3.3.1 Método da eliminação de Gauss

De acordo com Justo (2017), a eliminação Gaussiana, também conhecida como escalonamento é um método para resolver sistemas lineares. Para Justo (2017, p. 93) "Este método consiste em manipular o sistema através de determinadas operações elementares, transformando a matriz ampliada do sistema em uma matriz triangular (chamada de matriz escalonada do sistema)".

Essas operações de escalonamento são apresentadas a seguir:

## Operações elementares

Dada uma matriz, são três as operações elementares sobre as linhas dessa matriz. São elas:

1. Permuta das i-ésima e j-ésima linhas ($L_i \longleftrightarrow L_j$).
   Veja o exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Fazendo $L_2 \longleftrightarrow L_3$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo ($L_i \longleftrightarrow kL_i$).
   Veja o exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Fazendo $L_2 \longleftrightarrow -3L_2$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha ($L_i \longleftrightarrow L_i + kL_j$).
   Veja o exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Fazendo $L_3 \longleftrightarrow L_3 + 2L_1$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é equivalente a A, se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A. Sistemas equivalentes possuem mesmas soluções.

### Escalonamento

O escalonamento é um dos métodos para se chegar as soluções de um sistema de equações lineares.

Uma matriz $m \times n$ está na forma escalonada se:

1. O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1;
2. Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;
3. Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo);
4. Se as linhas 1,...,r são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna $k_i$, então $k_2 < k_2 < ... < k_r$.

Veja o exemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz acima está na forma escalonada pois todas as condições anteriores foram satisfeitas.

Veja alguns exemplos de matrizes não escalonadas:

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   A matriz não está na forma escalonada pois a segunda condição não é satisfeita, ou seja, no elemento $a_{33} = 1$, temos que ele é o primeiro elemento não nulo da terceira linha, porém, os demais elementos da terceira coluna não são todos iguais a zero.

2.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz não está na forma escalonada pois a primeira e quarta condições não são satisfeitas, ou seja, o primeiro elemento não nulo da primeira linha é diferente de 1 e não atende a condição de que $k_1 < k_2$ pois na primeira linha o primeiro elemento não nulo está na coluna 2 e na segunda linha o primeiro elemento não nulo está na coluna 1.

3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A matriz não está na forma escalonada pois a primeira e terceira condições não são satisfeitas, ou seja, o primeiro elemento não nulo da terceira linha é diferente de 1 e não atende a condição de que toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

Considerando o método de eliminação de Gauss para um dado sistema de equações lineares S (equação 3.1), os seguintes passos podem ser efetuados[3]:

1. Escrever a matriz ampliada do sistema;
2. Usar operações elementares com linhas para reduzir a matriz ampliada à forma escalonada reduzida;
3. Se o sistema resultante for possível, resolvê-lo. O conjunto solução obtido, é o conjunto solução do sistema S (equação 3.1).

Portanto, matrizes e sistemas lineares são conteúdos da matemática que estão interligados. Veja um exemplo, o qual será resolvido usando os passos acima:

1. Resolva o sistema linear abaixo:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 4x + 4y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}.$$

Resolução:

Para iniciar a resolução mais facilmente, precisamos primeiramente colocar o sistema na forma de matriz ampliada.

Dessa forma temos:

[3] Fonte: RUFATO (2014).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Onde os elementos da primeira coluna representam o $x$, os elementos da segunda coluna representam o $y$, os elementos da terceira coluna representam o $z$ e os elementos da quarta coluna representam os termos independentes.

Agora aplicamos à matriz acima, as operações elementares apresentadas anteriormente.

Operações:
$L_2 \longrightarrow 4L_1 - L_2$
$L_3 \longrightarrow 2L_1 - L_3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Operações:
$L_2 \longrightarrow L_3$
$L_3 \longrightarrow L_2$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nesse momento, a matriz já se encontra na forma de matriz triangular e já seria possível determinar os valores de $x$, $y$ e $z$ usando substituição regressiva, porém, a matriz ainda não se encontra na forma escalonada, o qual será feito agora:

Operações:
$L_1 \longrightarrow L_1 - L_2$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Operações:
$L_3 \longrightarrow \frac{L_3}{2}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operações:
$L_1 \longrightarrow L_1 + 2L_3$
$L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos, que essa última matriz está na forma escalonada.

Há ainda que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz inicial e a matriz escalonada são semelhantes, sem que seja necessário realizar mais cálculos temos que $z = 1$, $y = -1$ e $x = 1$, resultados esses que tiramos apenas observando a matriz na forma escalonada.

As operações, definições e conceitos desse capítulo serão utilizadas para a resolução de diversas questões, dentre elas, as apresentadas no Capítulo 4.

# 4 Análise do tema matrizes e sistemas lineares em questões do ENEM com alunos da 2ª e 3ª série do ensino médio

Para a elaboração desse capítulo foram selecionadas algumas questões das provas do ENEM do período de 2009 a 2017 pertencentes à competência de área 5 (Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas) da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias. Essas questões foram aplicadas em uma turma da 2ª série do ensino médio, composta por 7 alunos e em uma turma da 3ª série do ensino médio, composta por 10 alunos, a fim de verificar as habilidades referentes a Matriz de Referência do ENEM.

Escolhemos essas turmas para a realização da atividade pelo fato de que a 2ª série iria ver tal conteúdo no decorrer do ano da aplicação da atividade e a 3ª série pois já havia estudado sobre o mesmo, e, também, pelo fato de que ambas estavam prestes a realizar o exame do ENEM.

Em cada uma das questões, foram descritas no trabalho, as competências e habilidades abrangidas por cada uma delas de acordo com os PCNEM. Quanto aos conteúdos e habilidades previstos no PCN+ Ensino Médio, o tema estruturador que as questões selecionadas abrangem é o tema 1: 'Álgebra: número e funções'.

Para cada questão, apresentamos inicialmente a resolução por meio dos conhecimentos de álgebra, envolvendo matrizes e sistemas lineares, e, posteriormente, apresentamos os métodos de resolução utilizados pelos alunos, procurando entender o raciocínio em caso de acerto e discutindo os possíveis erros.

Após apresentar todas as questões, foram feitas as análises das competências e habilidades abordadas nas questões, identificando também quais os alunos possuem mais dificuldades.

## 4.1 Aplicação da atividade

Nessa seção será feita a análise das questões que foram aplicadas e desenvolvidas com os alunos, englobando as competências e habilidades requeridas, discutindo os meios de resolução e os possíveis erros das mesmas.

### 4.1.1 Questão 138 (ENEM 2017)

Figura 1 – Questão 138 (ENEM 2017)

**QUESTÃO 138**

Em uma cantina, o sucesso de venda no verão são sucos preparados à base de polpa de frutas. Um dos sucos mais vendidos é o de morango com acerola, que é preparado com $\frac{2}{3}$ de polpa de morango e $\frac{1}{3}$ de polpa de acerola.

Para o comerciante, as polpas são vendidas em embalagens de igual volume. Atualmente, a embalagem da polpa de morango custa R$ 18,00 e a de acerola, R$ 14,70. Porém, está prevista uma alta no preço da embalagem da polpa de acerola no próximo mês, passando a custar R$ 15,30.

Para não aumentar o preço do suco, o comerciante negociou com o fornecedor uma redução no preço da embalagem da polpa de morango.

A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de

Ⓐ 1,20.
Ⓑ 0,90.
Ⓒ 0,60.
Ⓓ 0,40.
Ⓔ 0,30.

Fonte: INEP, 2017, p. 16.

De acordo com as habilidades compreendidas na competência 5 da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias do ENEM, apresentadas na tabela 5, a questão trabalha com a habilidade H21 (Resolver situação problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos).

Segundo os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, as questões trabalham as seguintes competências e habilidades (Tabela 9):

Representação e comunicação

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.).

- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc.) e vice-versa.

Investigação e compreensão

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc.).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.

Contextualização sociocultural

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

Resolução:

Usando a multiplicação de matrizes apresentada em 2.3.4 e sendo que a embalagem da polpa de morango custa $R\$18,00$ e a embalagem da polpa de acerola $R\$14,70$, o custo atual para a preparação do suco é:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 18 \\ 14,7 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.18 + \frac{1}{3}.14,7 = 12 + 4,9 = 16,9.$$

Agora, se a polpa de acerola passará a custar $R\$15,30$, para não aumentar o custo do suco, devemos ter que a embalagem da polpa de morango $x$ deverá passar a custar:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ 15,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16,9 \end{pmatrix}.$$

Assim, usando a multiplicação de matrizes apresentada em 2.3.4 e, posteriormente, resolução de equações lineares, temos:

$$\frac{2}{3}.x + \frac{1}{3}.15,3 = 16,9$$
$$\frac{2}{3}.x = 11,8$$
$$x = 17,7.$$

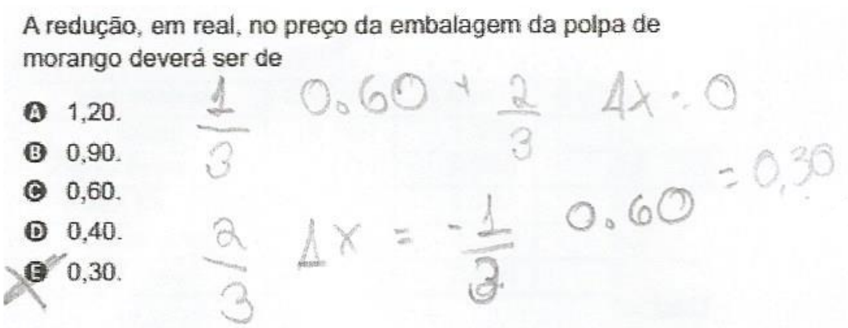
o que representa uma redução, em reais, de: $18 - 17,7 = 0,3$.

Logo, a alternativa correta é a letra E.

Dos alunos que resolveram a essa questão, 12 alunos acertaram a mesma, sendo 5 da 2ª série e 7 da 3ª série. Além disso, dos 12 que acertaram a mesma, apenas 3 alunos, sendo eles da 2ª série responderam à questão usando conhecimentos da álgebra, mais precisamente equações, os demais, utilizaram outros métodos envolvendo desenhos ou diagramas indicando as frações e os descontos, mostrando a lógica do processo.

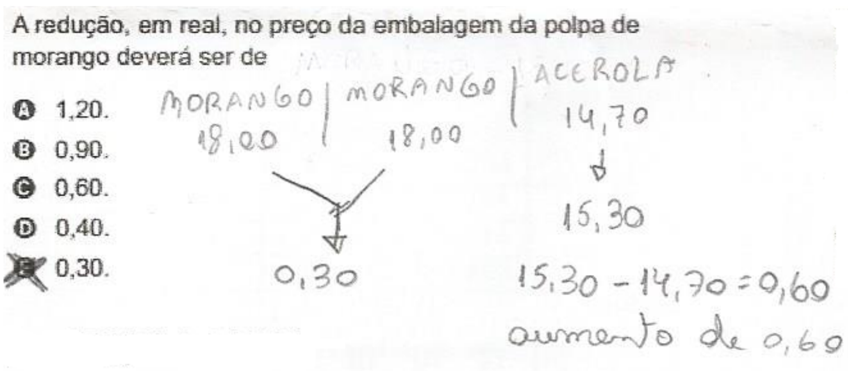
Seguem algumas resoluções:

Figura 2 – Resolução 1 da questão 138 (ENEM 2017)



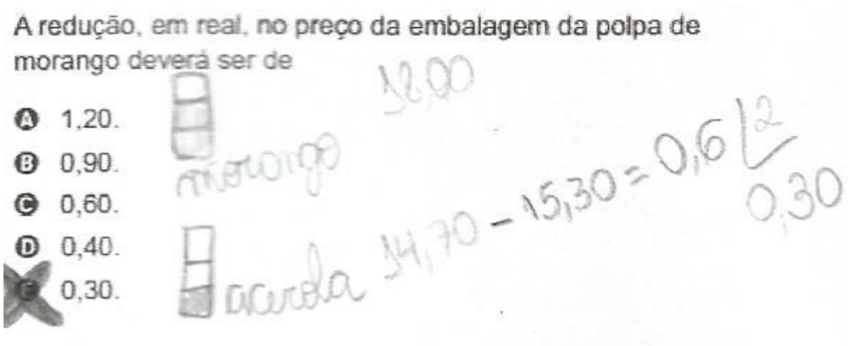

A primeira resolução que apresentamos, é a resolução através da álgebra (equações lineares), onde a aluna multiplica $\frac{1}{3}$ de polpa de acerola por $R\$0,60$, onde $R\$0,60$ é o valor do desconto da polpa de acerola, somando com $\frac{2}{3}$ de polpa de morango por $x$, onde $x$ é o valor que queremos descobrir, no caso, o desconto que será dado a polpa de morango, e por fim iguala a 0, pois como não se quer aumentar o valor do suco, devemos ter igualdade 0. Resolvendo a equação montada, ela resolve e encontra $x = R\$0,30$, o qual será o valor do desconto procurado.

Figura 3 – Resolução 2 da questão 138 (ENEM 2017)



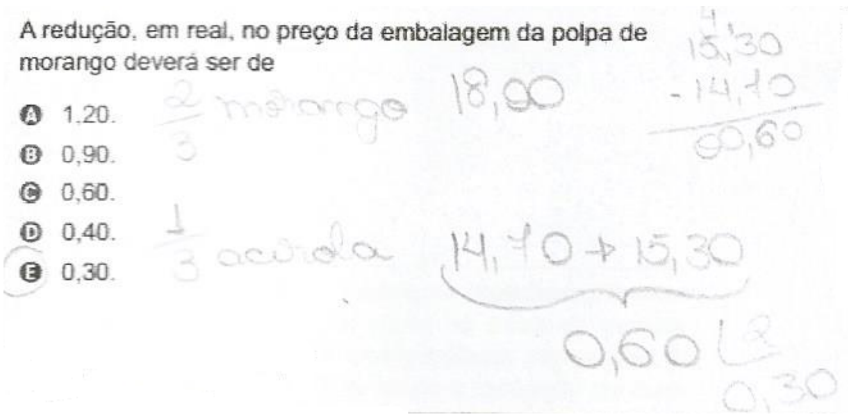

O autor da resolução 2, apresentado pela figura 3, montou um esquema através de desenhos. Como são $\frac{2}{3}$ para a polpa de morando e $\frac{1}{3}$ para a polpa de acerola, então numa barra dividida em três pedaços, tomamos 2 para os morangos e 1 para as acerolas, assim da mesma forma que a resolução da figura 2, o aluno calculou o desconto dado a polpa de acerola cujo resultado obteve $R\$0,60$. Como são 2 pedaços para os morangos, o aluno dividiu o desconto de $R\$0,60$ por 2, obtendo como resposta o desejado, $R\$0,30$.

Figura 4 – Resolução 3 da questão 138 (ENEM 2017)




Na resolução da figura 4, a aluna realizou através do mesmo raciocínio que os alunos da resolução da figura 3, porém, com o desenho de forma diferenciada, desenhando uma barra para os morangos, marcando $\frac{2}{3}$ e uma para a acerola, marcando $\frac{1}{3}$. Fez o procedimento de calcular o desconto da acerola de $R\$0,60$, e por fim dividiu por 2, pois há 2 pedaços do morando de um total de 3, e obteve a mesma resposta: $R\$0,30$.

Figura 5 – Resolução 4 da questão 138 (ENEM 2017)




Essa resolução foi feita de forma parecida com as das figuras 3 e 4, porém sem os desenhos. Foi calculado o desconto de $R\$0,60$ e dividido por 2, obtendo $R\$0,30$ como resposta. Outra aluna que resolveu da mesma forma, ainda complementa que divide por 2 porque são 2 partes, como já citado nas outras resoluções.

Dos alunos que resolveram corretamente a essa questão, abordamos apenas esses 4 métodos de resolução, pois os demais tiveram raciocínio equivalente de resolução, dessa forma optamos por não expor. Para os demais alunos, os que não tiveram êxito em suas resoluções, apenas 1 apresentou resolução, porém incompleta e por isso não acertou a questão. Segue sua resolução:

Figura 6 – Resolução errada da questão 138 (ENEM 2017)

A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de

Ⓐ 1,20.
Ⓑ 0,90.
Ⓒ 0,60.
Ⓓ 0,40.
Ⓔ 0,30.

15,30
− 14,70
00,60

0,60 centavos

O aluno calculou o desconto dado a polpa de acerola, porém ao final não dividiu por 2 (partes da polpa de morango) e por isso obteve uma resposta errada, marcando a alternativa C ao invés da alternativa E.

### 4.1.2 Questão 175 (ENEM 2009)

Figura 7 – Questão 175 (ENEM 2009)

**Questão 175**

O Indicador do CadÚnico (ICadÚnico), que compõe o cálculo do Índice de Gestão Descentralizada do Programa Bolsa Família (IGD), é obtido por meio da **média aritmética** entre a taxa de cobertura qualificada de cadastros ($TC$) e a taxa de atualização de cadastros ($TA$), em que $TC = \frac{NV}{NF}$, $TA = \frac{NA}{NV}$, $NV$ é o número de cadastros domiciliares válidos no perfil do CadÚnico, $NF$ é o número de famílias estimadas como público alvo do CadÚnico e $NA$ é o número de cadastros domiciliares atualizados no perfil do CadÚnico.

**Portaria nº 148 de 27 de abril de 2006 (adaptado).**

Suponha que o IcadÚnico de um município específico é 0,6. Porém, dobrando $NF$ o IcadÚnico cairá para 0,5. Se $NA + NV = 3.600$, então $NF$ é igual a

Ⓐ 10.000.
Ⓑ 7.500.
Ⓒ 5.000.
Ⓓ 4.500.
Ⓔ 3.000.

Fonte: INEP, 2009, p. 29.

De acordo com as habilidades compreendidas na competência 5 da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias do ENEM, apresentadas na tabela 5, a questão trabalha com a habilidade H21 (Resolver situação problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos) e H22 (Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação).

Segundo os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, as questões trabalham as seguintes competências e habilidades (Tabela 9):

<u>Representação e comunicação</u>

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.).
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc.) e vice-versa.
- Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.

<u>Investigação e compreensão</u>

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc.).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.

<u>Contextualização sociocultural</u>

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

<u>Resolução:</u>

Como o IcadÚnico ($Icad$) é a média aritmética do $TC$ com o $TA$, então

$$Icad = \tfrac{TC+TA}{2} \Rightarrow TC + TA = 2.Icad.$$

Usando a informação de que o $Icad$ de um município é $0,6$, temos que

$$TC + TA = 2.0,6$$
$$TC + TA = 1,2.$$

Assim,

$$\frac{NV}{NF} + \frac{NA}{NV} = 1,2. \tag{4.1}$$

Se $NF$ dobrar, $Icad = 0,5$, assim:

$$\frac{NV}{2NF} + \frac{NA}{NV} = 2.0,5 = 1. \tag{4.2}$$

Das equações 4.1 e 4.2 obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{NV}{NF} + \dfrac{NA}{NV} = 1,2 \\ \dfrac{NV}{2NF} + \dfrac{NA}{NV} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{NV^2 + NA.NF}{NF.NV} = 1,2 \\ \dfrac{NV^2 + 2NA.NF}{2NF.NV} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} NV^2 + NA.NF = 1,2NF.NV \\ NV^2 + 2NA.NF = 2NF.NV \end{cases} \tag{4.3}$$

Antes de resolver o sistema, será feita a verificação da existência e unicidade do mesmo por meio do determinante conforme apresentado na seção 3.1.1. Dessa forma, note que temos associado ao sistema de equação 4.3 à matriz dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

O determinante dessa matriz será

$$det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - 1.1 = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Logo, o sistema de equação 4.3 é SPD e será resolvido usando os métodos de resolução apresentados na seção 3.2.

Como $NA + NV = 3600 \Rightarrow NA = 3600 - NV$. Assim,

$$\begin{cases} NV^2 + (3600 - NV).NF = 1,2NF.NV \\ NV^2 + 2(3600 - NV).NF = 2NF.NV \end{cases}$$

$$\begin{cases} NV^2 + 3600NF - NV.NF - 1,2NF.NV = 0 \\ NV^2 + 7200NF - 2NV.NF - 2NF.NV = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} NV^2 + 3600NF - 2,2NV.NF = 0 \\ NV^2 + 7200NF - 4NV.NF = 0 \end{cases}$$

Agora, igualando as duas equações, obtemos:

$$3600NF - 1,8NV.NF = 0$$
$$1,8NV.NF = 3600NF$$
$$NV = \frac{3600NF}{1,8NF}$$
$$NV = 2000.$$

Logo, $NA = 3600 - 2000 = 1600$. Assim,

$$\frac{NV}{NF} + \frac{NA}{NV} = 1,2$$
$$\frac{2000}{NF} + \frac{1600}{2000} = 1,2$$
$$\frac{2000}{NF} = 0,4$$
$$NF = \frac{2000}{0,4}$$
$$NF = 5000.$$

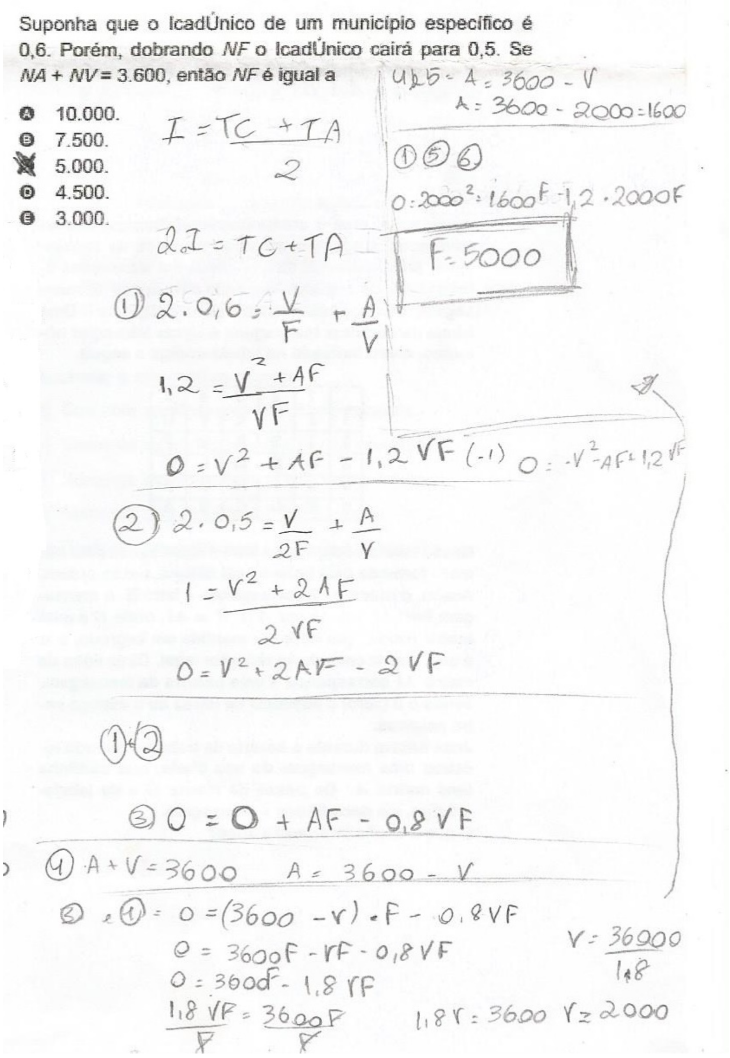
Logo, a alternativa correta é a letra C.

Nessa questão apenas 6 alunos acertaram a mesma, sendo todos da 2ª série. Os alunos da 3ª série, por terem visto o conteúdo no ano anterior relaram que não lembravam do conteúdo, e por isso, não conseguiram realizar a atividade. Fica aqui um alerta aos professores sobre a necessidade de trabalhar o conteúdo de modo eficiente e significativo com os alunos da 2ª série, para que na 3ª série e próximos a realizar o ENEM, o aluno tenha compreendido o tema.

Essa questão envolve muito a competência de representação de comunicação, além das demais já apresentadas, porém, a maior parte da atividade é compreender o enunciado e interpretá-lo, o qual não está compreendido pelos alunos da 3ª série e por isso, deve ser retomado.

No caso dos alunos da 2ª série, todos os que resolveram, fizeram de forma semelhante ao apresentado na figura 8:

Figura 8 – Resolução 1 da questão 175 (ENEM 2009)


Suponha que o IcadÚnico de um município específico é 0,6. Porém, dobrando *NF* o IcadÚnico cairá para 0,5. Se *NA* + *NV* = 3.600, então *NF* é igual a

A 10.000.
B 7.500.
C 5.000.
D 4.500.
E 3.000.



## 4.1.3 Questão 151 (ENEM 2009)

Figura 9 – Questão 151 (ENEM 2009)

**Questão 151**

Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

(A) R$ 14,00.
(B) R$ 17,00.
(C) R$ 22,00.
(D) R$ 32,00.
(E) R$ 57,00.

Fonte: INEP, 2009, p. 23.

De acordo com as habilidades compreendidas na competência 5 da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias do ENEM, apresentadas na tabela 5, a questão trabalha com a habilidade H21 (Resolver situação problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos).

Segundo os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, as questões trabalham as seguintes competências e habilidades (Tabela 9):

Representação e comunicação

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.).
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc.) e vice-versa.

Investigação e compreensão

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc.).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.

Contextualização sociocultural

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

Resolução:

Podemos chamar as despesas totais de $D$. Assim, como a despesa total seria dividida igualmente entre 55 pessoas, tome $x$ sendo a parte de cada pessoa e lembre que no acerto inicial, cada uma das 50 pessoas estava pagando $(x - 7)$ reais e estava faltando 510 reais para completar o valor da despesa. Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} D = 55x \\ D - 510 = 50(x - 7) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} D = 55x \\ D = 50x + 160 \end{cases} \tag{4.4}$$

Antes de resolver o sistema, será feita a verificação da existência e unicidade do mesmo por meio do determinante conforme apresentado na seção 3.1.1. Dessa forma, note que temos associado ao sistema de equação 4.4 à matriz dada por:

$$\begin{pmatrix} 55 & 0 \\ 50 & 160 \end{pmatrix}.$$

O determinante dessa matriz será

$$det \begin{vmatrix} 55 & 0 \\ 50 & 160 \end{vmatrix} = 55.160 - 0.50 = 8800 - 0 = 8800 \neq 0.$$

Logo, o sistema de equação 4.4 é SPD e será resolvido usando os métodos de resolução apresentados na seção 3.2.

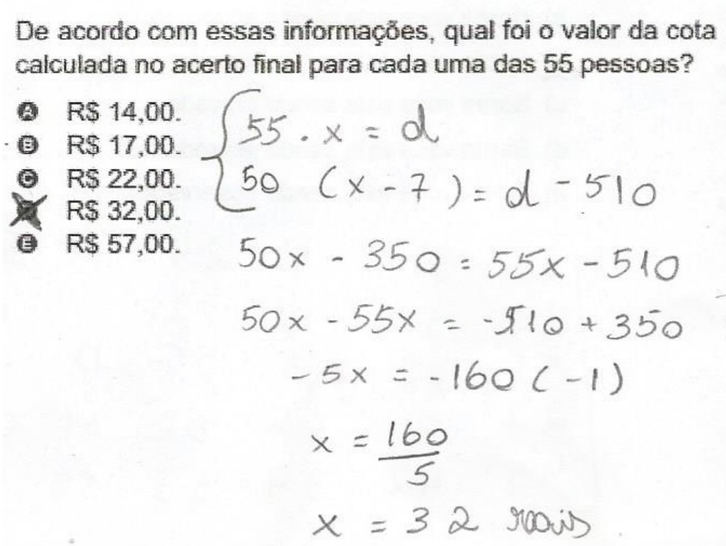
Assim,

$$\begin{aligned} D - D &= 55x - (50x + 160) \\ 0 &= 5x - 160 \\ x &= 32. \end{aligned}$$

Logo, a alternativa correta é a letra D.

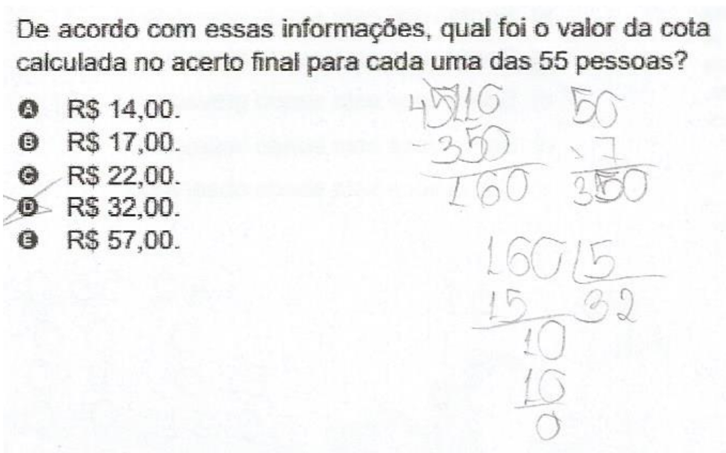
Dos alunos que resolveram a essa questão, apenas 1 aluno que não respondeu a mesma. Os demais, todos responderam corretamente, porém, desses, 3 alunos marcaram a alternativa correta, mas apresentou método de resolução errado. Dos que resolveram corretamente, apenas 3 utilizaram conhecimentos envolvendo o conteúdo, os demais abordaram outros métodos de resolução. Seguem algumas resoluções:

Figura 10 – Resolução 1 da questão 151 (ENEM 2009)



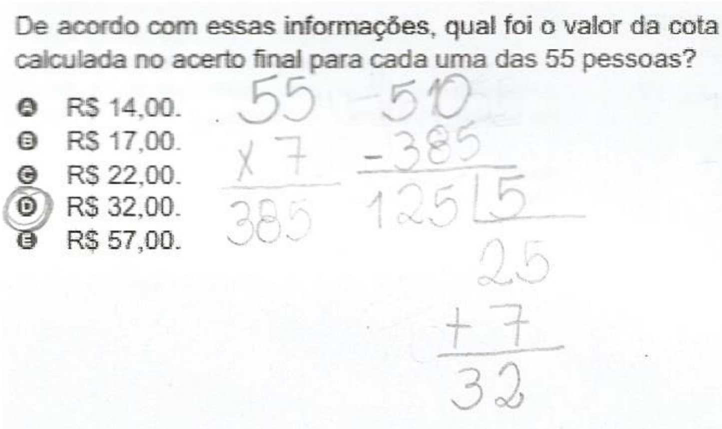

Nessa resolução o aluno utilizou os conhecimentos de álgebra: sistemas de equações lineares, e resolveu de forma parecida com a resolução da figura 10.

Figura 11 – Resolução 2 da questão 151 (ENEM 2009)




A resolução 2 (figura 11) desse aluno nos mostra que multiplicou os R$ 7,00 a mais pelas 50 pessoas que pagariam totalizando R$ 350,00. Na sequência, diminuiu os R$510,00 que estava faltando a ser pago com os R$ 350,00 a mais que as primeiras 50 pessoas estavam pagando, totalizando R$160,00, o qual seria dividido entre as 5 pessoas que ingressaram no grupo, obtendo como resposta R$ 32,00 a ser pago por cada uma das 55 pessoas.

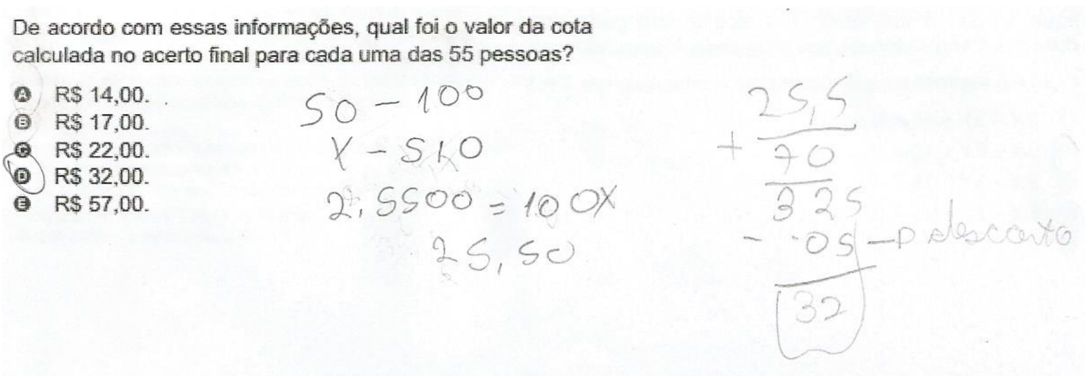
Figura 12 – Resolução 3 da questão 151 (ENEM 2009)




De forma semelhante a resolução 2 (figura 11), na resolução da figura 12 o aluno multiplicou 55 pessoas por R$ 7,00, obtendo R$ 385,00. A partir daí subtraiu R$ 510,00 que faltava para fechar a conta com os R$ 385,00 que era os R$ 7,00 a mais de cada pessoa, totalizando R$ 125,00. Porém, na primeira conta foram contados R$ 7,00 a mais também das 5 pessoas que ingressaram no grupo depois. Dividiu R$ 125,00 pelas 5 novas pessoas e soma R$ 7,00 que havia sido tirado anteriormente, obtendo como resposta R$ 32,00.

Dos alunos que resolveram corretamente a essa questão, abordei apenas esses 3 métodos de resolução pois os demais tiveram raciocínio equivalente de resolução. Para os demais alunos, os que acertaram, porém com resoluções erradas, utilizaram o método da regra de três como se 50 pessoas fosse equivalente a 100% e x reais por pessoa equivalente a R$ 510,00, mas, como sabemos, na regra de três devemos ter porcentagem com porcentagem, pessoas com pessoas, reais com reais, etc., por isso a resolução está errada, mas como o resultado ficou próximo, o aluno assinalou a alternativa mais próxima. Segue sua resolução:

Figura 13 – Resolução 4 da questão 151 (ENEM 2009)




Deve ficar claro aqui que essa resolução não é considerada correta, mesmo o aluno tendo acertado a questão.

### 4.1.4 Questão 166 (ENEM 2012)

Figura 14 – Questão 166 (ENEM 2012)

**QUESTÃO 166**

Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4x4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

| | 1º bimestre | 2º bimestre | 3º bimestre | 4º bimestre |
|---|---|---|---|---|
| Matemática | 5,9 | 6,2 | 4,5 | 5,5 |
| Português | 6,6 | 7,1 | 6,5 | 8,4 |
| Geografia | 8,6 | 6,8 | 7,8 | 9,0 |
| História | 6,2 | 5,6 | 5,9 | 7,7 |

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Fonte: INEP, 2012, p. 27.

De acordo com as habilidades compreendidas na competência 5 da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias do ENEM, apresentadas na tabela 5, a questão trabalha com a habilidade H22 (Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação) e H23 (Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos).

Segundo os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, as questões trabalham as seguintes competências e habilidades (Tabela 9):

Representação e comunicação

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.).
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc.) e vice-versa.

Investigação e compreensão

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc.).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Contextualização sociocultural

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Resolução:

Leve em consideração que a média de cada matéria deverá ser:

| | |
|---|---|
| Matemática | $\frac{5,9+6,2+4,5+5,5}{4}$ |
| Português | $\frac{6,6+7,1+6,5+8,4}{4}$ |
| Geografia | $\frac{8,6+6,8+7,8+9,0}{4}$ |
| História | $\frac{6,2+5,6+5,9+7,7}{4}$ |

Sendo assim, para determinar as médias anuais de cada uma dessas disciplinas usamos os conceitos apresentados na seção 2.3.4 de multiplicação de matrizes. Assim:

$$\begin{pmatrix} 5,9 & 6,2 & 4,5 & 5,5 \\ 6,6 & 7,1 & 6,5 & 8,4 \\ 8,6 & 6,8 & 7,8 & 9,0 \\ 6,2 & 5,6 & 5,9 & 7,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5,9+6,2+4,5+5,5}{4} \\ \frac{6,6+7,1+6,5+8,4}{4} \\ \frac{8,6+6,8+7,8+9,0}{4} \\ \frac{6,2+5,6+5,9+7,7}{4} \end{pmatrix},$$

onde,

$$\begin{pmatrix} 5,9 & 6,2 & 4,5 & 5,5 \\ 6,6 & 7,1 & 6,5 & 8,4 \\ 8,6 & 6,8 & 7,8 & 9,0 \\ 6,2 & 5,6 & 5,9 & 7,7 \end{pmatrix}$$

indica a matriz das notas de cada matéria em cada bimestre, como indicado na tabela do problema.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

indica que a média de cada matéria será no final dividida por 4, pois temos 4 bimestres.

e

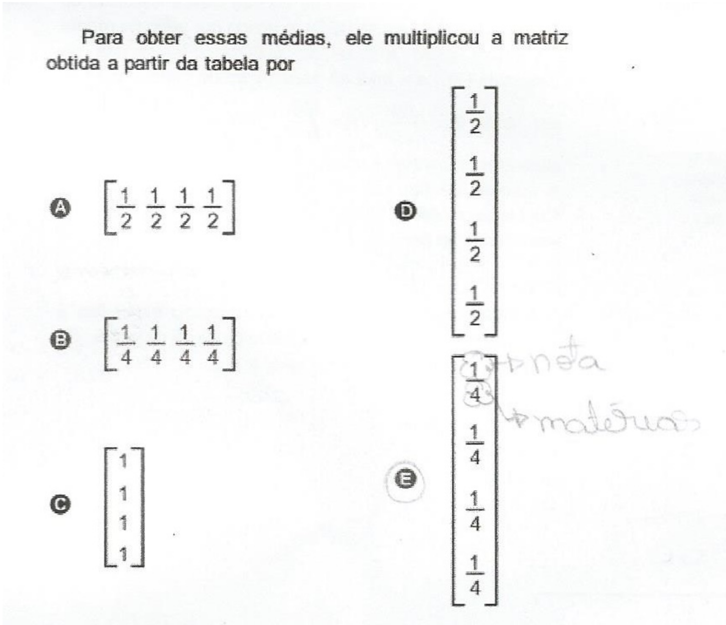
$$\begin{pmatrix} \frac{5,9+6,2+4,5+5,5}{4} \\ \frac{6,6+7,1+6,5+8,4}{4} \\ \frac{8,6+6,8+7,8+9,0}{4} \\ \frac{6,2+5,6+5,9+7,7}{4} \end{pmatrix}$$

indica o cálculo da média de cada matéria, que é encontrado através da multiplicação das duas matrizes anteriores.

Logo, a alternativa correta é a letra E.

Dos 17 alunos que participaram da atividade 13 acertaram a mesma, sendo 6 da 2ª série e 7 da 3ª série. Destes, muitos apenas marcaram a alternativa correta, sem dar melhores explicações. Alguns, porém, trazem anexado à questão algumas explicações por terem marcado a alternativa E (correta). Segue algumas delas:

Figura 15 – Resolução 1 da questão 166 (ENEM 2012)


Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

A $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

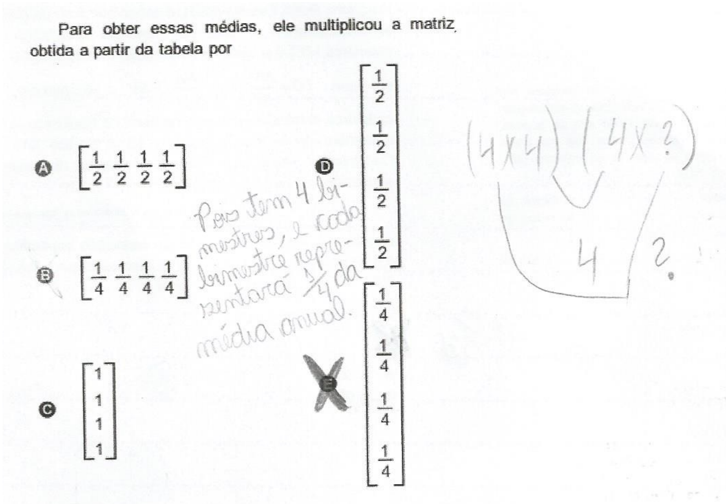
D $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

E $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$



Na resolução da aluna, ela afirma que o numerador da fração $\frac{1}{4}$ é o que será multiplicado pelas notas e que o denominador é a quantidade de matérias, por isso dividimos por 4.

Figura 16 – Resolução 2 da questão 166 (ENEM 2012)


Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

A $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

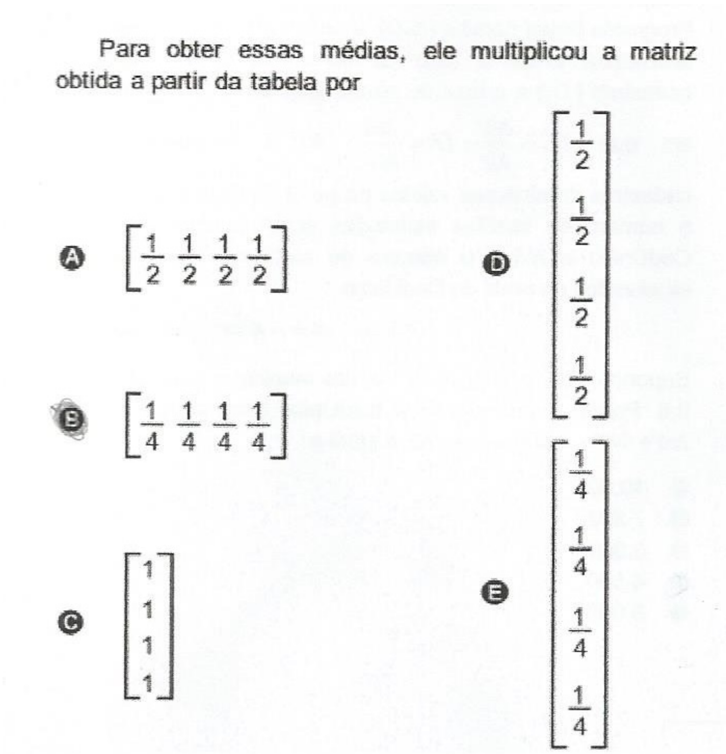
E $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$



Na resolução 2 (figura 16), a aluna faz um esquema de como deve ser a ordem da matriz a se multiplicar. Temos que a ordem da matriz que apresenta as notas é $4 \times 4$, logo a matriz que irá multiplicar para obter as médias deverá ser $4 \times \diamond$, e a matriz resultado é de ordem $4 \times 1$, assim, a matriz multiplicada deve ser $4 \times 1$. Complementa ainda que tem 4 bimestres e cada bimestre representa $\frac{1}{4}$ da média anual. Por isso, a alternativa correta é a E.

Apresentamos agora os erros dos alunos:

Figura 17 – Resolução errada 1 da questão 166 (ENEM 2012)


Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

A $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

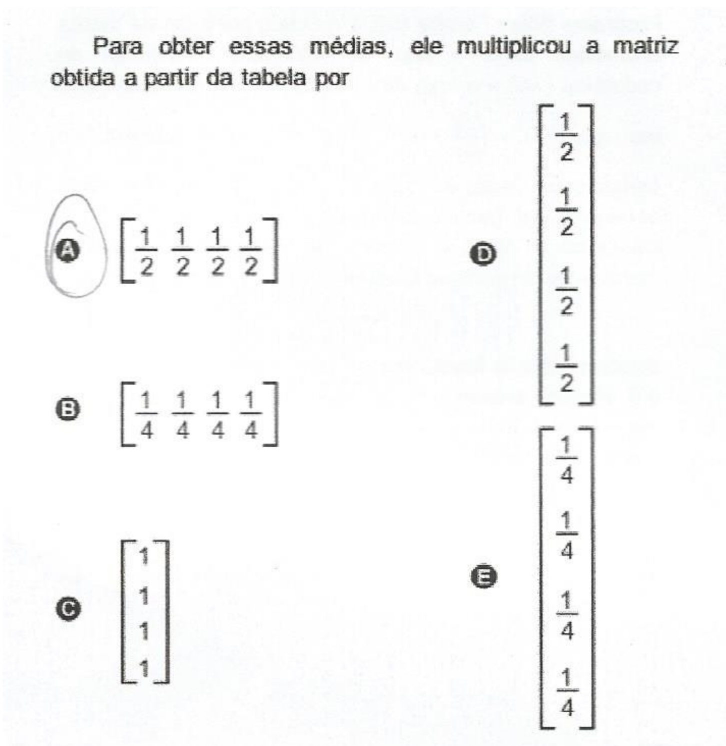
C $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

E $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Nessa resolução percebemos que o aluno tem claro o significado de médias, porém não fez a comparação igual a resolução da aluna da figura 16, para verificar a ordem da matriz, e por isso não obteve êxito na resolução.

Figura 18 – Resolução errada 2 da questão 166 (ENEM 2012)


Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

A $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

E $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Diferente da resolução apresentada na figura 15 e 16, para esse aluno ainda não está clara a definição de médias. Para ele, para se calcular média basta apenas dividir o resultado por 2, sem verificar quantos elementos estão somados. Além disso, também não está clara a definição de multiplicação de matrizes, em que só devemos multiplicar se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda. Esse conceito deve ser focado com bastante ênfase, para que erros como esse não aconteçam na hora em que o aluno for prestar o ENEM.

### 4.1.5 Questão 171 (ENEM 2013)

Figura 19 – Questão 171 (ENEM 2013)

**QUESTÃO 171**

Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante $X$ segundos e cada ciclo dura $Y$ segundos.

Qual é a expressão que representa a relação entre $X$ e $Y$?

A) $5X - 3Y + 15 = 0$
B) $5X - 2Y + 10 = 0$
C) $3X - 3Y + 15 = 0$
D) $3X - 2Y + 15 = 0$
E) $3X - 2Y + 10 = 0$

Fonte: INEP, 2013, p. 29.

De acordo com as habilidades compreendidas na competência 5 da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias do ENEM, apresentadas na tabela 5, a questão trabalha com a habilidade H19 (Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas), H21 (Resolver situação problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos) e H22 (Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação).

Segundo os PCNEM, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, as questões trabalham as seguintes competências e habilidades (Tabela 9):

Representação e comunicação

- Ler e interpretar textos de Matemática.

- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.).
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc.) e vice-versa.

Investigação e compreensão

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc.).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Contextualização sociocultural

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

Resolução:

Como a luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante $x$ segundos, e o tempo em que a luz verde fica acesa é igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fica acesa, então podemos relacioná-la como

$x = \frac{2}{3}w$, com $w$ sendo o tempo em que a luz vermelha fica acesa

Assim,

$$w = \frac{3}{2}x \tag{4.5}$$

Temos que o tempo que a luz amarela fica acesa é 5 segundos e que cada ciclo tem duração de $y$ segundos. Assim,

$$x + w + 5 = y \tag{4.6}$$

Das equações 4.5 e 4.6, podemos montar o sistema:

$$\begin{cases} w = \dfrac{3}{2}x \\ x + w + 5 = y \end{cases} \tag{4.7}$$

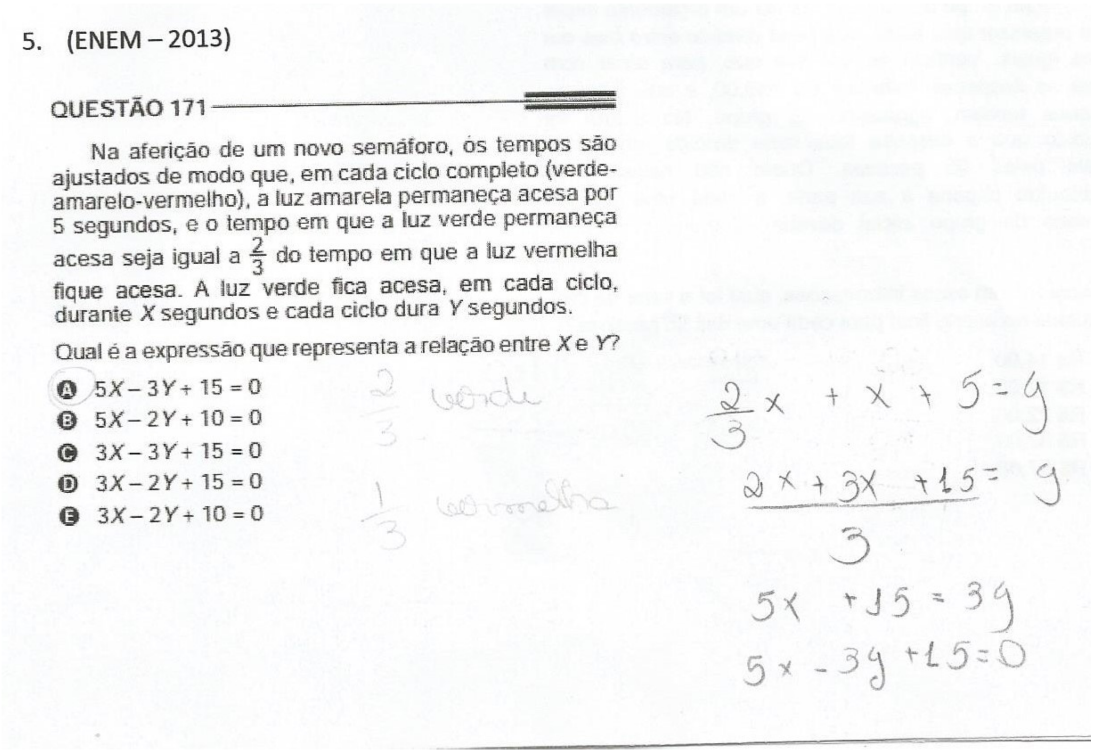
Agora, resolvendo o sistema de equação 4.7 pelo método da substituição apresentado em 3.2.2, temos:

$$x + \frac{3}{2}x + 5 = y$$
$$\frac{2x+3x+10}{2} = y$$
$$5x + 10 = 2y$$
$$5x - 2y + 10 = 0$$

Portanto, a alternativa correta é a letra B.

Para essa questão, apenas 4 alunos da 3ª série acertaram a mesma. Dos alunos que acertaram a questão, todos resolverem de forma semelhante à apresentada acima. Já, para as resoluções erradas, o erro mais comum foi o de ter usado para a luz verde um tempo equivalente à $\frac{2}{3}x$, ao invés de usar a igualdade de que a luz verde fica acessa $\frac{2}{3}$ do tempo da luz vermelha, acreditando que a luz vermelha fica acessa x segundos, como mostra a figura 20.

Figura 20 – Resolução errada da questão 171 (ENEM 2013)


5. (ENEM – 2013)

QUESTÃO 171

Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante $X$ segundos e cada ciclo dura $Y$ segundos.

Qual é a expressão que representa a relação entre $X$ e $Y$?

A) $5X - 3Y + 15 = 0$
B) $5X - 2Y + 10 = 0$
C) $3X - 3Y + 15 = 0$
D) $3X - 2Y + 15 = 0$
E) $3X - 2Y + 10 = 0$

$\frac{2}{3}$ verde

$\frac{1}{3}$ vermelha

$$\frac{2}{3}x + x + 5 = y$$
$$\frac{2x + 3x + 15}{3} = y$$
$$5x + 15 = 3y$$
$$5x - 3y + 15 = 0$$

## 4.2 Análise das habilidades utilizadas nas questões da seção 4.1

Nessa seção será feita uma análise das habilidades esperadas nas questões apresentadas na seção 4.1 para auxiliar os professores a entender e perceber quais as principais dificuldades encontradas pelos alunos, a fim de perceber quais habilidades e competências devem ser retomadas para um melhor desempenho de seus alunos no ENEM.

Inicialmente será apresentado uma tabela com a quantidade de erros e acertos em cada questão:

Tabela 21 – Análise das questões apresentadas (quantidade de erros e acertos dos alunos)

| Série | Nº de alunos | Questão 138 (ENEM 2017) | | Questão 175 (ENEM 2009) | | Questão 151 (ENEM 2009) | | Questão 166 (ENEM 2012) | | Questão 171 (ENEM 2013) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Acertos | Erros | Acertos | Erros | Acertos | Erros | Acertos | Erros | Acertos | Erros |
| 2ª série | 7 | 5 | 2 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 0 | 7 |
| 3ª série | 10 | 7 | 3 | 0 | 10 | 10 | 0 | 7 | 3 | 4 | 6 |

Pela tabela 21 podemos perceber que a maioria das questões teve um número de acertos significativos, exceto na questão 175 (ENEM 2009) para os alunos da 3ª série e na questão 171 (ENEM 2013) para os alunos da 2ª série. Mais adiante será discutido as habilidades e competências esperadas para a resolução dessas questões.

Será apresentado agora uma tabela com as habilidades competentes a cada questão, a fim de perceber quais as habilidades que faltaram, apresentando também a porcentagem de erros e acertos de cada questão baseado nas informações da tabela 21. Essa porcentagem irá nos ajudar a perceber quais as habilidades pertencentes a competência de área 5 estão em defasagem no ensino dos conteúdos.

Tabela 22 – Habilidades presentes em cada questão

| | H19 | H20 | H21 | H22 | H23 | % Acertos | % Erros |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Questão 138 (ENEM 2017) | | | X | | | 70,6% | 29,4% |
| Questão 175 (ENEM 2009) | | | X | X | | 35,3% | 64,7% |
| Questão 151 (ENEM 2009) | | | X | | | 94,1% | 5,9% |
| Questão 166 (ENEM 2012) | | | | X | X | 76,5% | 23,5% |
| Questão 171 (ENEM 2013) | X | | X | X | | 23,5% | 76,5% |

A habilidade H19 (Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas) aparece nas questões 171 (ENEM 2013). Temos que através da tabela 22 a habilidade 19 está em defasagem, pois o percentual apresentado nessa questão foi muito baixo. Devemos focar e buscar outras atividades que envolvam essa habilidade para trabalhar com os alunos a fim de que compreendam a mesma.

A habilidade H20 (Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas) não apareceu em nenhuma questão e podemos concluir que essa habilidade é cobrada raramente ou não é cobrada no ENEM dentro de problemas relacionados com matrizes e sistemas lineares.

A habilidade H21 (Resolver situação problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos) aparece na questão 138 (ENEM 2017), na questão 175 (ENEM 2009), na questão 151 (ENEM 2009) e na questão 171 (ENEM 2013). Através da tabela 22, podemos perceber que quando se trata da habilidade H21 sozinha na questão, a grande maioria dos alunos acertam a mesma, que foi o caso da questão 138 (ENEM 2017) e da questão 151 (ENEM 2017). Para as questões que envolvem outras habilidades junto com a H21, os alunos não obtêm o mesmo êxito, errando a mesma, que foi o caso da questão 175 (ENEM 2009) e da questão 171 (ENEM 2013). Podemos tirar como conclusão, que, no geral, a habilidade H21 não está em defasagem, desde que as demais também não estejam.

A habilidade H22 (Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação) foi abordada nas questões 175 (ENEM 2009), 166 (ENEM 2012) e 171 (ENEM 2013). Pela tabela 22 percebemos que apenas a questão 166 (ENEM 2012) teve um percentual considerado alto de acerto, as demais obtiveram percentual mais baixo, o que indica uma possível defasagem nessa habilidade.

Por fim, a habilidade H23 (Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos), apresentada apenas na questão 166 (ENEM 2012), obteve um percentual de acertos acima de 75%, o que podemos concluir que não há defasagem na habilidade H23.

Com essas análises podemos perceber quais são os conteúdos e habilidades com os quais os alunos tem maior dificuldades e a partir daí trabalhar em cima disso para uma maior aprovação de seus alunos no ENEM.

A tabela 23 apresenta uma análise das competências que estão em defasagens para os alunos que erraram à questão:

Tabela 23 – Análise das competências que estão em defasagens

| | Questão 138 (ENEM 2017) | Questão 175 (ENEM 2009) | Questão 151 (ENEM 2009) | Questão 166 (ENEM 2012) | Questão 171 (ENEM 2013) |
|---|---|---|---|---|---|
| Representação e comunicação | | X | X | | X |
| Investigação e compreenção | X | X | X | X | |
| Contextualização sociocultural | X | X | X | X | X |

Percebemos, de uma maneira geral, que para aqueles alunos que erraram a questão há uma defasagem de todas as competências elencadas e, quanto as habilidades, a defasagem maior está nas habilidades H19 e H22, que estavam presentes nas questões em que os alunos mais tiveram dificuldades.

Já percebemos que os erros indicam dificuldades na aprendizagem, mas para Chott (et al., 2014) “sua ocorrência não deve ser apenas apontada ou penalizada; é preciso utilizá-los para promover a aprendizagem, a partir de estudos e pesquisas e da elaboração de estratégias de ensino baseadas nas dificuldades detectadas."

Cury (2007, p. 49) apresenta classificações para erros com o propósito de desenvolver estratégias a fim de auxiliar os alunos a suprir suas deficiências e dificuldades. As classificações são distribuídas em classes, conforme segue:

- Classe A: essa categoria contempla às resoluções corretas.
- Classe B: caracteriza os exercícios de alunos que desenvolvem grande parte do raciocínio que é esperado para uma determinada questão, mas ao final respondem de forma não satisfatória, pelo fato de não compreenderem o raciocínio que estão desenvolvendo.
- Classe C: corresponde aos exercícios de alunos que cometem "erros coerentes", são erros de alunos que, quando não entendem o processo que deve ser realizado, partem das informações que possuem para deduzir o que deveria ser feito no exercício em questão.
- Classe D: engloba as questões de alunos que erraram por não entenderem o conteúdo que está sendo abordado.
- Classe E: caracteriza-se pelos erros originados pela falta de atenção ou dificuldade em conteúdos anteriores ao que está sendo trabalhado.

Com base nas análises das habilidade e da classificação quanto aos erros, é possível verificar com maior ênfase quais as maiores dificuldades dos alunos e quais os erros mais comuns (o porquê daqueles erros) - se é o fato de não saber o conteúdo ou apenas de não ter conseguido desenvolver o raciocínio - e com isso podemos buscar meios a fim de ajudar a compreendê-los, seja através de software, de jogos, ou até mesmo outros meios diversificados.

# 5 Considerações Finais

Esta pesquisa teve como objetivo subsidiar os docentes nas atividades de matemática relacionadas aos conteúdos de matrizes e sistemas lineares, nas questões das provas do ENEM de 2009 a 2017, tendo em vista as habilidades e competências estabelecidas pela Matriz de Referência do ENEM.

Propomos responder à seguinte questão: como as competências e habilidades discriminadas nos documentos citados, referentes aos conteúdos de matrizes e sistemas lineares, podem ser trabalhadas pelo docente da disciplina de matemática de modo à auxiliar seus alunos na hora de prestar o Enem?

Para isso, foi realizado levantamento bibliográfico e análise documental e de conteúdo, a fim de caracterizar o estudo de matrizes e sistemas lineares no âmbito escolar. Foi possível destacar a importância e a necessidade de que o trabalho com esse conteúdo seja bem planejado, buscando outros meios de ensino que auxiliem na busca das competências e habilidades requeridas pelos PCNEM, a fim de se alcançar sucesso no exame.

A fim de conhecer as competências e habilidades esperadas dos alunos e que precisam ser consideradas pelos docentes no planejamento e execução de suas atividades, procedemos com um estudo dos PCNEM, dos PCN+ Ensino Médio e da Matriz de Referência do ENEM. Como resultado foram expostas as competências e habilidades relacionadas ao estudo de matrizes e sistemas lineares.

Após apresentar todas as definições, conceitos, operações e métodos de resolução sobre matrizes e sistemas lineares, foram levadas para a sala de aula algumas questões do ENEM para alunos da 2ª série e 3ª série do ensino médio. A partir da aplicação desta atividade foram feitas algumas análises de cada questão, buscando as habilidades e competências presentes em cada uma delas e identificando se os alunos dominam essas habilidades.

Pudemos perceber também que dentre todas as habilidades sobre matrizes e sistemas lineares, as que aparecem frequentemente nas questões do ENEM são as habilidades H21 (Resolver situação problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos) e H22 (Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação), as quais, consequentemente, devem ser bastante trabalhadas e devido a um maior índice de erros na habilidade H19 (Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas) e H22 (Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação) se faz necessário também uma maior ênfase nessas habilidades, utilizando diferentes metodologias, como tecnologias, jogos, aplicações, etc.

Vemos também na apresentação e resolução das questões do ENEM, que além dos conteúdos de matrizes e sistemas lineares abordados durante a atividade, podem haver também outros conteúdos envolvidos nas questões como por exemplo: frações, média, etc., os quais não menos importantes, que devem ser trabalhados diariamente em sala de aula para um melhor desempenho dos alunos no ENEM.

A etapa desta pesquisa que consistiu na seleção e resolução de questões do ENEM, apresentou como resultado a possibilidade de os docentes terem à disposição o conhecimento de quais competências e habilidades estão sendo trabalhadas, bem como alguns possíveis erros e discussões dos mesmos para que no planejamento e preparação das aulas sobre matrizes e sistemas lineares já se tenha um horizonte norteador sobre os diversos processos de ensino que podem ser utilizados, observando qual se adapta melhor ao perfil da turma, procurando tornar o processo de aprendizagem mais significativo.

Convém ressaltar que as questões aqui resolvidas e apresentadas, representam apenas um ponto de partida para os docentes na busca pela inserção dessa metodologia no contexto da sala de aula, servindo como uma referência de metodologia a ser trabalhada. Cada docente deve analisar seu ambiemte e o perfil de seus alunos, a fim de buscar situações problemas adequadas, bem como outras formas de utilizá-las no planejamento e desenvolvimento de suas atividades.

Enfim, como resposta à questão proposta para esta pesquisa, é possível afirmar que a metodologia apresentada pode servir de auxílio ao trabalho do docente, de modo a proporcionar aos alunos o desenvolvimento das competências e habilidades deles esperadas, bem como garantir que esse processo ocorra de modo eficaz, oferecendo também algumas ideias e propostas de trabalhos referenciados para o ensino deste conteúdo.

Como proposta para futuras pesquisas está a análise de recursos computacionais e jogos para o ensino aprendizagem do conteúdo de matrizes e sistemas lineares, e, através de realização de pesquisa de campo, mensurar as contribuições oferecidas ao desenvolvimento do trabalho docente junto aos alunos, bem como prever novas formas de abordagem dessa metodologia nas aulas de Matemática.

# Referências


BOLDRINI, J.L., et al., **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra & Row de Brasil, 1978. Depto. de Matemática da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

BRASIL. Decreto nº 7352, de 4 de novembro de 2010. Dispõe sobre a política de educação do campo e o Programa Nacional de Educação na Reforma Agrária - PRONERA. Brasília, 04 de nov. 2010. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/marco-2012-pdf/10199-8-decreto-7352-de4-de-novembro-de-2010/file>. Acesso em 27 fev. 2018.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **ENEM 2011-2012: Relatório Pedagógico**. Brasília, DF: 2015. Disponível em: <http://www.publicacoes.inep.gov.br/portal/download/1401>.pdf. Acesso em: 24 set. 2017.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio(ENEM): Fundamentação Teórico Metodológica**. Brasília, DF: 2005. Disponível em: <http://www.publicacoes.inep.gov.br/portal/download/407>. Acesso em: 23 set. 2017.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Matriz de Referência para o ENEM 2009.** Brasília, DF: 2009. Disponível em: <http://ensinomediodigital.fgv.br/resources/pdf/matriz_novoenem.pdf>. Acesso em 26 set. 2017.

BRASIL. Lei nº. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Brasília, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 23 set. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Parte I - Bases Legais.** Brasília: MEC, 2000a. Disponível em: <https://cptstatic.s3.amazonaws.com/pdf/cpt/pcn/bases-legais.pdf>. Acesso em: 19 out. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Portaria nº438, de 28 de maio de 1998. **Institui o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)**. Diário Oficial da União, Brasília,DF, 01 jun. 1998. Seção1, p. 5. Disponível em: <http://www.editoramagister.com/doc_348638_PORTARIA_N_438_DE_28_DE_MAIO_DE_1998.aspx> Acesso em: 23 set. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC/Semtec, 2000b. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 21 set. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/Semtec,2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2017.

CHOTT, V. C., et al., **Análise de erros de questões da prova da obmep resolvidas por alunos do 8º ano e 8ª série**. XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul. Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé - RS, Brasil. 13-16 nov. 2014. Disponível em: <https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/RE_Chott_07194369907.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2017.

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.** Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DANTE, L.R. Matrizes. In: DANTE, L.R. **Matemática**. Volume único, São Paulo: Ática, 2008a, cap. 21.

DANTE, L.R. Sistemas Lineares. In: DANTE, L.R. **Matemática**. Volume único, São Paulo: Ática, 2008b, cap. 23.

FERREIRA, A.E.G., **A importância dos sistemas lineares no ensino médio e a contribuição para a matemática e suas aplicações**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa - PR.

GOMES, M.G. **Geometria nas questões do Enem sob a ótica da resolução de problemas: um auxílio ao trabalho docente**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM), Teófilo Otoni - MG.

GOMES, E.F.; MACEDO, A.D.R. **Jogo 'Qual é a matriz?': Construa matrizes brincando**. II Conedu (Congresso Nacional de Educação). 2015, Campina Grande - PB. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV045_MD1_SA8_ID3207_09092015104440.pdf>. Acesso em 18 dez. 2017.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). Enem 2009, 2º Dia: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, Caderno7 – Azul, 2009. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2009/dia2_caderno7.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2017.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). Enem 2012, 2º Dia: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, Caderno6 – Cinza, 2012. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2012/caderno_enem2012_dom_cinza.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2017.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA(INEP). Enem 2013, 2º Dia: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, Caderno7 – Azul, 2013. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/caderno_enem2013_dom_azul.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2017.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA(INEP). Enem 2017, 2º Dia: Prova de Matemática e Suas Tecnologias, Caderno5 – Amarelo, 2017. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/cad_5_prova_amarelo_12112017.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2017.

JUSTO, D.A.R., et al. **Cálculo Numérico**. Um livro colaborativo. Versão Scilab. 2017. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/numerico/livro/main.pdf>. Acesso em: 12 set. 2017.

LEONARDO, F.M. de, **Conexões com a matemática**. 2ª ed., São Paulo: Moderna, 2013.

LEVORATO, G.B.P. **Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares: Aplicações na Engenharia e Economia**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro - SP.

MACEDO, L. de; et al. Competência III: Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema. In: BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM): Fundamentação Teórico Metodológica**. Brasília, DF: 2005. p. 79-88. Disponível em: <http://www.publicacoes.inep.gov.br/portal/download/407>. Acesso em: 23 set. 2017.

MORETTO, Vasco Pedro. **Planejamento: planejando a educação para o desenvolvimento de competências**. 5ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

PANCIERA, L.M.; FERREIRA, M.V. **A modelagem matemática no ensino de matrizes e sistemas lineares**. Jan/2007, Florianópolis - SC. 9p. Artigo. Disponível em: < http://www.mtm.ufsc.br/d̃aniel/7105/A%20MODELAGEM%20MATEM%C3%81TICA %20NO%20ENSINO%20DE%20MATRIZES.pdf>. Acesso em: 07 mar. 2018.

PARANÁ. Secretaria de Estado de Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 23 set. 2017.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, Faculdade de Ciências da Universidade Lisboa, v.25, p. 02-23, 2006.

RABELO, M. L. **Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

RUFATTO, S.A.C. **Sistemas Lineares, aplicações e uma sequência didática**. 2014. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de São

Paulo (USP), São Paulo.

SOUZA, J.R.; PATARO, P.R.M. Equações, sistemas de equações e inequações. In: SOUZA, J.R.; PATARO, P.R.M. **Vontade de Saber Matemática, 8º ano**. 3ª ed., São Paulo: FTD, 2015, cap.7.

# Anexos

# ANEXO A – Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias do ENEM

## Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias

**Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.**

**H1** - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
**H2** - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
**H3** - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
**H4** - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
**H5** - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

**Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.**

**H6** - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
**H7** - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
**H8** - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
**H9** - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

**Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**

**H10** - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
**H11** - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
**H12** - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
**H13** - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
**H14** - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

**Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**

**H15** - Identificar a relação de dependência entre grandezas.
**H16** - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
**H17** - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
**H18** - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

**Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.**

**H19** - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
**H20** - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
**H21** - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
**H22** - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
**H23** - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

**Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.**

**H24** - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
**H25** - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
**H26** - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

**Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.**

**H27** - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de freqüências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

**H28** - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

**H29** - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

**H30** - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Fonte: BRASIL, 2009, p. 5-7.

# ANEXO B – As Competências em Matemática - PCN+ Ensino Médio

| Representação e comunicação | |
|---|---|
| **Na área** | **Em Matemática** |
| **Símbolos, códigos e nomenclaturas de ciência e tecnologia** | |
| Reconhecer e utilizar adequadamente, na forma oral e escrita, símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica. | • Reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática; por exemplo, ao ler embalagens de produtos, manuais técnicos, textos de jornais ou outras comunicações, compreender o significado de dados apresentados por meio de porcentagens, escritas numéricas, potências de dez, variáveis em fórmulas.<br>• Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentados sob diferentes formas como decimais em frações ou potências de dez, litros em metros cúbicos, quilômetros em metros, ângulos em graus e radianos. |
| **Articulação dos símbolos e códigos de ciência e tecnologia** | |
| Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas. | • Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas.<br>• Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações.<br>• Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas; por exemplo, escolher entre uma equação, uma tabela ou um gráfico para representar uma dada variação ao longo do tempo, como a distribuição do consumo de energia elétrica em uma residência ou a classificação de equipes em um campeonato esportivo. |
| **Análise e interpretação de textos e outras comunicações de ciência e tecnologia** | |
| Consultar, analisar e interpretar textos e comunicações de ciência e tecnologia veiculados em diferentes meios. | • Ler e interpretar diferentes tipos de textos com informações apresentadas em linguagem matemática, desde livros didáticos até artigos de conteúdo econômico, social ou cultural, manuais técnicos, contratos comerciais, folhetos com propostas de vendas ou com plantas de imóveis, indicações em bulas de medicamentos, artigos de jornais e revistas.<br>• Acompanhar e analisar os noticiários e artigos relativos à ciência em diferentes meios de comunicação, como jornais, revistas e televisão, identificando o tema em questão e interpretando, com objetividade, seus significados e implicações para, dessa forma, ter independência para adquirir informações e estar a par do que se passa no mundo em que vive. |
| **Elaboração de comunicações** | |
| Elaborar comunicações orais ou escritas para | • Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática, elaborando textos, desenhos, gráficos, tabelas, equações, expressões e escritas numéricas – |

| | |
|---|---|
| relatar, analisar e sistematizar eventos, fenômenos, experimentos, questões, entrevistas, visitas, correspondências. | para comunicar-se via internet, jornais ou outros meios, enviando ou solicitando informações, apresentando idéias, solucionando problemas.<br>• Produzir textos analíticos para discutir, sintetizar e sistematizar formas de pensar, fazendo uso, sempre que necessário, da linguagem matemática. Redigir resumos, justificar raciocínios, propor situações-problema, sistematizar as idéias principais sobre dado tema matemático com exemplos e comentários próprios.<br>• Expressar-se da forma oral para comunicar idéias, aprendizagens e dificuldades de compreensão; por exemplo, explicando a solução dada a um problema, expondo dúvidas sobre um conteúdo ou procedimento, propondo e debatendo questões de interesse. |
| **Discussão e argumentação de temas de interesse de ciência e tecnologia** | |
| Analisar, argumentar e posicionar-se criticamente em relação a temas de ciência e tecnologia. | • Compreender e emitir juízos próprios sobre informações relativas à ciência e tecnologia, de forma analítica e crítica, posicionando-se com argumentação clara e consistente sempre que necessário, identificar corretamente o âmbito da questão e buscar fontes onde possa obter novas informações e conhecimentos. Por exemplo, ser capaz de analisar e julgar cálculos efetuados sobre dados econômicos ou sociais, propagandas de vendas a prazo, probabilidades de receber determinado prêmio em sorteios ou loterias, ou ainda apresentadas em um dado problema ou diferentes sínteses e conclusões extraídas a partir de um mesmo texto ou conjunto de informações. |

| **Investigação e compreensão** | |
|---|---|
| **Na área** | **Em Matemática** |
| **Estratégias para enfrentamento de situações-problema** | |
| Identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolvê-la. | • Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções; por exemplo, em situações com uma diversidade de dados apresentados por meio de tabelas, gráficos, especificações técnicas, reconhecer as informações relevantes para uma dada questão que se busca resolver.<br>• Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica.<br>• Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias ou efetuar medições em sólidos, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas, enquanto para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto, optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas. |

| Interações, relações e funções; invariantes e transformações | |
|---|---|
| Identificar fenômenos naturais ou grandezas em dado domínio do conhecimento científico, estabelecer relações, identificar regularidades, invariantes e transformações. | • Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades; por exemplo, perceber que todas as funções do segundo grau possuem o mesmo tipo de gráfico, o que implica propriedades de sinal, crescimento e decrescimento. Da mesma forma, ao identificar a regularidade de que é constante a soma dos termos eqüidistantes de uma progressão aritmética finita, estender essa propriedade a toda situação envolvendo progressões aritméticas e daí deduzir a soma de seus termos.<br>• Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, estabelecer identidades ou relações como aquelas existentes entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, os volumes de um cilindro e de um cone que tenham a mesma base e a mesma altura, a relação entre catetos e hipotenusa em qualquer triângulo retângulo; ou ainda a identidade fundamental da trigonometria.<br>• Identificar transformações entre grandezas ou figuras para relacionar variáveis e dados, fazer quantificações, previsões e identificar desvios. As ampliações e reduções de figuras são exemplos que devem ser entendidos como transformações de uma situação inicial em outra final.<br>• Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto, como as relações entre representações planas nos desenhos, mapas e telas de computador com os objetos que lhes deram origem.<br>• Reconhecer a conservação contida em toda igualdade, congruência ou equivalência para calcular, resolver ou provar novos fatos. Por exemplo, ao resolver uma equação ou um sistema linear, compreender que as operações realizadas a cada etapa transformam a situação inicial em outra que lhe é equivalente, com as mesmas soluções. |
| **Medidas, quantificações, grandezas e escalas** | |
| Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados. | • Identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular comprimentos e distâncias, ângulos, volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica. Usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos.<br>• Identificar diferentes formas de quantificar dados numéricos para decidir se a resolução de um problema requer cálculo exato, aproximado, probabilístico ou análise de médias. Por exemplo, de acordo com uma dada situação, escolher número de algarismos apropriado ou fazer aproximações adequadas, optar pelo uso de fração, porcentagem, potências de dez; escolher melhor unidade para representar uma grandeza.<br>• Fazer previsões e estimativas de ordens de grandeza, de quantidades ou intervalos esperados para os resultados de cálculos ou medições e, com isso, saber avaliar erros ou imprecisões nos dados obtidos na solução de uma dada situação-problema.<br>• Compreender a necessidade e fazer uso apropriado de escalas; por exemplo, na construção de gráficos ou em representações de plantas e mapas. |

| Modelos explicativos e representativos | |
|---|---|
| Reconhecer, utilizar, interpretar e propor modelos para situações-problema, fenômenos ou sistemas naturais ou tecnológicos. | • Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações; por exemplo, utilizar funções ou gráficos para modelar situações envolvendo cálculos de lucro máximo ou prejuízo mínimo; utilizar ferramentas da estatística e probabilidade para compreender e avaliar as intenções de votos em uma campanha eleitoral ou, ainda, optar entre modelos algébricos ou geométricos para obter determinadas medições de sólidos. |
| **Relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas** | |
| Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas do conhecimento. | • Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada.<br>• Compreender a Matemática como ciência autônoma, que investiga relações, formas e eventos e desenvolve maneiras próprias de descrever e interpretar o mundo. A forma lógica dedutiva que a Geometria utiliza para interpretar as formas geométricas e deduzir propriedades dessas formas é um exemplo de como a Matemática lê e interpreta o mundo à nossa volta.<br>• Adquirir uma compreensão do mundo da qual a Matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações.<br>• Reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como a Física, Química e Biologia, seja nas ciências humanas e sociais, como a Geografia ou a Economia, ou ainda nos mais diversos setores da sociedade, como na agricultura, na saúde, nos transportes e na moradia. |

| Contextualização sócio-cultural | |
|---|---|
| **Na área** | **Em Matemática** |
| **Ciência e tecnologia na história** | |
| Compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social. | • Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas. Por exemplo, o uso da geometria clássica ou da analítica para resolver um mesmo problema pode mostrar duas formas distintas de pensar e representar realidades comparáveis em momentos históricos diferentes.<br>• Compreender o desenvolvimento histórico da |

| | |
|---|---|
| | tecnologia associada a campos diversos da Matemática, reconhecendo sua presença e implicações no mundo cotidiano, nas relações sociais de cada época, nas transformações e na criação de novas necessidades, nas condições de vida. Por exemplo, ao se perceber a origem do uso dos logaritmos ou das razões trigonométricas como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações do século 16, pode-se conceber a Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de idéias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas.<br>• Perceber o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia e a complexa relação entre ciência e tecnologia ao longo da história. A exigência de rapidez e complexidade dos cálculos fez com que a Matemática se desenvolvesse e, por outro lado, as pesquisas e avanços teóricos da Matemática e demais ciências permitiram o aperfeiçoamento de máquinas como o computador, que vêm tornando os cálculos cada vez mais rápidos. |
| **Ciência e tecnologia na cultura contemporânea** | |
| Compreender a ciência e a tecnologia como partes integrantes da cultura humana contemporânea. | • Compreender a Matemática como parte integrante da cultura contemporânea, sendo capaz de identificar sua presença nas manifestações artísticas ou literárias, teatrais ou musicais, nas construções arquitetônicas ou na publicidade.<br>• Perceber a dimensão da Matemática e da ciência em espaços específicos de difusão e mostras culturais, como museus científicos ou tecnológicos, planetários, exposições.<br>• Compreender formas pelas quais a Matemática influencia nossa interpretação do mundo atual, condicionando formas de pensar e interagir. Por exemplo, comparando os cálculos feitos pelas máquinas com aqueles feitos "com lápis e papel", e identificando a função, especificidades e valores de cada um desses meios na construção do conhecimento. |
| **Ciência e tecnologia na atualidade** | |
| Reconhecer e avaliar o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, suas relações com as ciências, seu papel na vida humana, sua presença no mundo cotidiano e seus impactos na vida social. | • Acompanhar criticamente o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, tomando contato com os avanços das novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento para se posicionar frente às questões de nossa atualidade. Utilizar o conhecimento matemático como apoio para compreender e julgar as aplicações tecnológicas dos diferentes campos científicos. Por exemplo, o uso de satélites e radares nos rastreamentos e localizações, ou dos diferentes tipos de transmissão e detecção de informações, as formas de manipulação genética ou de obtenção e utilização de recursos naturais. |
| **Ciência e tecnologia, ética e cidadania** | |
| Reconhecer e avaliar o caráter ético do conhecimento científico e tecnológico e utilizar | • Compreender a responsabilidade social associada à aquisição e uso do conhecimento matemático, sentindo-se mobilizado para diferentes ações, seja em defesa de seus direitos como consumidor, dos espaços e |

| | |
|---|---|
| esse conhecimento no exercício da cidadania. | equipamentos coletivos ou da qualidade de vida.<br>• Conhecer recursos, instrumentos e procedimentos econômicos e sociais para posicionar-se, argumentar e julgar sobre questões de interesse da comunidade, como problemas de abastecimento, educação, saúde e lazer, percebendo que podem ser muitas vezes quantificados e descritos através do instrumental da Matemática e dos procedimentos da ciência.<br>• Promover situações que contribuam para a melhoria das condições de vida da cidade onde vive ou da preservação responsável do ambiente. Utilizar as ferramentas matemáticas para analisar situações de seu entorno real e propor soluções, por exemplo, analisando as dificuldades de transporte coletivo em seu bairro por meio de levantamento estatístico, manuais técnicos de aparelhos e equipamentos, ou a melhor forma de plantio de lavoura para subsistência de uma comunidade. |

Fonte: Brasil, 2002, p. 114-119.