UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

PRÓ-REITORIA DE PÓS- GRADUAÇÃO E PESQUISA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

REDE NACIONAL - PROFMAT

Itálo Guimarães

Diagonalização de operadores com aplicações à sistemas de equações diferenciais e identificação de cônicas

São Cristóvão - SE

2018

Itálo Guimarães

Diagonalização de operadores com aplicações à sistemas de equações diferenciais e identificação de cônicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Naldisson dos Santos

São Cristóvão - SE
2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Guimarães, Itálo

G963d Diagonalização de operadores com aplicações a sistemas de equações diferenciais e identificação de cônicas / Itálo Guimarães ; orientador Naldisson dos Santos. - São Cristóvão, 2018.
74 f.; il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2018.

1. Curvas. 2. Operadores lineares. 3. Equações diferenciais. I. Santos, Naldisson dos orient. II. Título.

CDU 517.983

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Diagonalização de operadores com aplicação à sistemas de equações diferenciais e identificação de cônicas

por

Ítalo Guimarães

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Naldisson dos Santos - UFS
Orientador

Prof. Bruno Luis de Andrade Santos - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Filipe Dantas dos Santos - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 04 de Maio de 2018

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Agradecimentos

Ao meu Deus, pelo dom da vida, por me conceder saúde e sabedoria para enfrentar os desafios dessa caminhada.

Aos meus pais, Itamar e Vera, por tudo que me ensinaram, por todo o amor e cuidado que sempre dedicaram a mim e por serem os meus exemplos de vida.

À minha esposa Bárbara, por todo amor, carinho, dedicação e por entender a minha ausência em vários momentos. Sem você nada disso seria possível. Te amo!

Aos meus irmãos, Sávio e Verinha, que sempre manifestaram sua torcida e seu carinho durante toda essa trajetória. Especialmente, a minha irmã Cláudia, por me receber em sua casa por todo esse tempo de curso, me tendo como um dos seus filhos. Obrigado por tudo!

Aos professores do departamento de Matemática da UFS, agradeço a todos que foram meus professores durante o curso: Prof. Dr. Almir, Prof. Dra. Giovana, Prof. Dr. André, Prof. Dr. Zaqueu, Prof. Dr. Alysson, Prof. Dr. Bruno, Prof. Dr. Gérson e, especialmente, ao meu orientador Prof. Dr. Naldisson, por ter acreditado nas minhas ideias, pelas sugestões, contribuições e paciência durante este árduo período. Não esquecerei seus ensinamentos e sua confiança. Meu muito obrigado a todos vocês!

Aos colegas do PROFMAT, pela amizade, companheirismo, e troca de experiências em todos os momentos dessa caminhada.

Por fim, agradeço àqueles que passaram por minha vida durante o mestrado e contribuíram na realização de mais um sonho.

Resumo

A presente dissertação tem como objetivo discorrer sobre diagonalização de operadores lineares, de modo que possamos explorar esses conceitos na solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias e na identificação de cônicas. Um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita, pode ser representado por uma matriz. Sendo as matrizes diagonais as mais simples do ponto de vista das operações matriciais, mostraremos sob que condições, dado um operador linear é possível representá-lo por uma matriz diagonal. Dessa forma, este trabalho apresenta o processo de diagonalização de operadores, introduz conceitos básicos sobre sistemas de equações diferenciais ordinárias e aplicações.

Palavras-chave: Cônicas; Diagonalização de operadores; Sistemas de equações diferenciais.

Abstract

The present dissertation aims to discuss diagonalization of linear operators, so that we can explore these concepts in the solution of systems of ordinary differential equations and in the identification of conics. A linear operator in a vector space of finite dimension can be represented by a matrix. Since diagonal arrays are the simplest from the point of view of matrix operations, we will show under what conditions, given a linear operator it is possible to represent it by a diagonal matrix. Thus, this paper presents the process of operator diagonalization, introduces basic concepts about systems of ordinary differential equations and applications.

Keywords: Conical; Diagonalization of operators; Systems of differential equations.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como objetivo discorrer sobre Diagonalização de Operadores Lineares, assim como sua aplicação em algumas áreas, especialmente na solução de problemas que envolvem Equações e Sistemas de Equações Diferencias.

Um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita, pode ser representado por uma matriz. Sendo as matrizes diagonais as mais simples do ponto de vista das operações matriciais, nos perguntamos se dado um operador linear, é sempre possível representá-lo por uma matriz diagonal? Mais precisamente, queremos saber se para todo operador existe uma base do espaço vetorial tal que a matriz do operador na base seja uma matriz diagonal.

Como todo conhecimento científico, as ideias matemáticas passam por um processo evolutivo incorporando mudanças, sendo tratadas com novas ferramentas e métodos os quais, muitas vezes, lhes permitem um incremento no seu desenvolvimento. Uma seção cônica é uma curva cuja equação cartesiana é do segundo grau, e inversamente, toda curva cuja equação é do segundo grau pode ser obtida a partir da interseção de um cone circular reto de duas folhas com um plano. Por essa razão, as curvas cujas equações são do segundo grau são chamadas de seções cônicas, ou simplesmente de cônicas. Exposições gerais sobre as seções cônicas são conhecidas antes da época de Euclides, e existe uma diversidade de definições para elas, cuja equivalência é mostrada na Geometria Elementar. As cônicas desempenham um papel importante em vários domínios da física, incluindo a astronomia, a economia, a engenharia e em muitas outras situações, pelo que não é de estranhar que o interesse pelo seu estudo seja tão antigo. Neste trabalho, veremos como a diagonalização de matrizes simétricas pode ser usada na identificação de cônicas.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo, traremos algumas definições e resultados necessários para o desenvolvimento do texto, mais claramente, falamos sobre Matrizes, Sistemas lineares, Espaços Vetoriais, Transformações Lineares o sobre o Teorema do ponto fixo de Banach.

No segundo capítulo, iniciamos com uma breve motivação para o estudo do processo de diagonalização e, em seguida, tratamos das importantes noções de autovalor e autovetor de um operador linear, noções estas centrais na teoria das equações diferenciais ordinárias, de polinômio característico e, encerramos, com uma versão de um teorema chamado Teorema Espectral para operadores simétricos, que garante que todo operador simétrico é diagonalizável.

No terceiro capítulo, faremos um breve histórico sobre o estudo das equações diferenciais, também apresentaremos algumas definições sobre as equações diferenciais ordinárias, e principalmente, falaremos sobre sistemas de equações diferenciais de primeira ordem.

Já no quarto e último capítulo, traremos um método alternativo de resolução de sistemas de equações diferencias através da diagonalização, também são resolvidos alguns problemas de aplicação utilizando os sistemas de equações diferenciais como modelos matemáticos e finalizamos falando sobre identificação de cônicas, também utilizando diagonalização.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Apresentaremos neste capítulo algumas definições e resultados necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Resultados Básicos de Álgebra Linear

1.1.1 Matrizes

As matrizes são ferramentas básicas, pois além de fornecerem meios para a resolução de sistemas lineares, também representarão as transformações lineares entre espaços vetoriais.

Definição 1.1.1. *Uma matriz $m \times n$ A sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ é uma tabela retangular com m linhas e n colunas da forma*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde $a_{ij}, \in \mathbb{R}, i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$. Usamos, também, a notação $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

O símbolo a_{ij} significa o elemento da matriz A que está na *i*-ésima linha e *j*-ésima coluna e será chamado de *entrada* da matriz A. O conjunto de todas as matrizes A do tipo $m \times n$ será denotado por $M(m,n)$. Uma matriz $A \in M(m,n)$ é chamada de *matriz quadrada* se $m = n$.

Dizemos que uma matriz quadrada A é uma *matriz diagonal* se

$$a_{ij} = 0,\ i \neq j.$$

Em particular, dizemos que a matriz diagonal A é uma *matriz identidade* se

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \ se\ i = j \\ 0 \ se\ i \neq j \end{cases},$$

e será denotada por I_n. A matriz $A = [a_{ij}] \in M(m,n)$ com $a_{ij} = 0,\ 1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, é chamada de *matriz nula* e será denotada por 0.

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, chamamos de *transposta* de A, e denotamos por A^t, a matriz $[b_{ij}]_{n\times m}$, onde

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para todo $1 \leq i \leq n$ e para todo $1 \leq j \leq m$.

Definição 1.1.2. *A soma de duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ é a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ tal que*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Observação 1.1.1. A diferença $A - B$ de duas matrizes do tipo $m \times n$ é a matriz C tal que

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Exemplo 1.1.1. Uma matriz quadrada A se diz *simétrica* se $A^t = A$ e *anti-simétrica* se $A^t = -A$. Mostrar que a soma de duas matrizes simétricas é também simétrica. Mostrar que o mesmo vale para matrizes anti-simétricas.

Solução. Sejam A e B as matrizes. Então $(A+B)^t = A^t+B^t = A+B$. Logo $A+B$ é simétrica. Analogamente, se A e B são anti-simétricas, $(A+B)^t = A^t+B^t = -A+(-B) = -(A+B)$.

Definição 1.1.3. *O produto de uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ por um número real α, denotado por αA é a matriz obtida multiplicando cada elemento de A por α, e é,*

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}.$$

Definição 1.1.4. *O produto de duas matrizes está definido da seguinte forma. Sejam as matrizes* $A = [a_{ij}]_{m\times r}$ *e* $B = [b_{ij}]_{r\times n}$*. Então* $AB = C$*, onde* $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ *é uma matriz e cada elemento* c_{ij} *é dado por*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Observação 1.1.2. A multiplicação de matrizes não é comutativa, pois existem matrizes A e B tais que $AB \neq BA$.

Exemplo 1.1.2. Para cada número real α consideremos a matriz:

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Mostrar que $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.

Solução.

$$T_\alpha T_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T_\alpha T_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}.$$

Em matemática, determinante é uma função matricial que associa a cada matriz quadrada um escalar; ela transforma essa matriz em um número real. Esta função permite saber se a matriz tem ou não inversa. A seguir mostraremos como encontar o determinante de uma matriz quadrada.

Definição 1.1.5. *Seja* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz quadrada:*

(i) *do tipo* 1×1. *Definimos o determinante da matriz* A*, sendo* $\det A = a_{11}$.

(ii) *do tipo* 2×2. *Definimos o determinante de* A*, sendo* $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

(iii) *do tipo* $n \times n$. *O ij-ésimo menor de* A *é o determinante da submatriz* M_{ij} *do tipo* $(n-1) \times (n-1)$ *obtida quando suprimimos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de* A*. O ij-ésimo cofator* C_{ij} *de* A *é definido como* $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$*. Definimos o determinante da matriz* A*, sendo* $\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + ... + a_{1n}C_{1n}$.

Definição 1.1.6. *Uma matriz quadrada A é dita não-singular ou invertível se existe uma outra matriz B do mesmo tipo $n \times n$ tal que $AB = BA = I_n$ e denota-se $B = A^{-1}$. Caso contrário diz-se que A é uma matriz singular ou não-invertível.*

Existem várias maneiras de se encontrar a inversa A^{-1} de uma matriz A. Supondo que a matriz A possui inversa, um método que envolve o uso de determinantes é associar a cada elemento a_{ij} com o determinante da matriz M_{ij} que é obtida através da eliminação da linha e da coluna onde a_{ij} se encontra. Além disso, associa-se a_{ij} com o cofator C_{ij}.

Se $B = [b_{ij}]$, tal que $B = A^{-1}$, então podemos definir

$$b_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det A}.$$

1.1.2 Sistemas de Equações Lineares

Desde a antiguidade, em diversas áreas do conhecimento, muitos problemas são modelados matematicamente por sistemas de equações lineares.

Definição 1.1.7. *Um sistema de equações lineares com m equações e n incognitas é um conjunto de equações da forma:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

onde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Uma *solução* do sistema de equações lineares é uma *n*-upla

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

que satisfaz cada uma das m equações.

Observação 1.1.3. Se $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, dizemos que o sistema de equações lineares é um sistema homogêneo. Note que a *n*-upla $(0, 0, \dots, 0)$ é sempre uma solução do sistema homogêneo.

O sistema de equações lineares pode ser escrito sob a forma matricial

$$AX = B$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é a matriz das incógnitas e

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é a matriz dos termos independentes.

Se a matriz A for uma matriz quadrada do tipo $n \times n$ e invertível, ou seja, se $\det A \neq 0$ e assim existe A^{-1} que é a inversa de A, temos que

$$AX = B \Rightarrow$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow$$

$$I_n X = A^{-1}B \Rightarrow$$

$$X = A^{-1}B.$$

Isto significa que se $\det A \neq 0$ o sistema de equações terá uma única solução. Caso tenhamos $\det A = 0$ temos que A^{-1} não existe e assim a igualdade $X = A^{-1}B$ não é válida.

Exemplo 1.1.3. Resolver o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Solução. Note que a matriz dos coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

possui $\det A = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -6 - 1 = -7 \neq 0$. Logo, A possui inversa. Note também, que sua inversa é dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix}.$$

Portanto, usando a equação $X = A^{-1}B$, onde

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

é a matriz dos termos independentes, temos que a solução do sistema é dada por

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1.1.3 Espaços Vetoriais

Os espaços vetoriais são conjuntos com uma estrutura algébrica específica, seus elementos podem ser somados e multiplicados por elementos de um corpo, estes elementos serão chamados de vetores.

Definição 1.1.8. *Um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio V munido com duas operações: adição*

$$\begin{aligned} + \; : \; V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto u + v \end{aligned}$$

e multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} \cdot \; : \; \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V \\ (a, u) &\longmapsto au \end{aligned}$$

tal que as seguintes propriedades valem:

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$, *para todos* $u, v, w \in V$.

2. *Existe* $0 \in V$ *tal que* $u + 0 = u$, *para todo* $u \in V$.

3. *Para cada* $u \in V$, *existe* $-u \in V$ *tal que* $u + (-u) = 0$.

4. $u + v = v + u$, *para todos* $u, v \in V$.

5. $a(bu) = (ab)u$, *para todos* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$.

6. $(a + b)u = au + bu$, *para todos* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$.

7. $a(u + v) = au + av$, *para todos* $u, v \in V$ *e* $a \in \mathbb{R}$.

8. $1 \cdot u = u$, *para todo* $u \in V$.

Definição 1.1.9. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *e* W *um subconjunto de* V. *Dizemos que* W *é um subespaço (vetorial) de* V *se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $W \neq \emptyset$.

2. $u + v \in W$, *para todos* $u, v \in W$.

3. $au \in W$, *para todo* $a \in \mathbb{R}$ *e* $u \in W$.

Exemplo 1.1.4. Sejam $V = M(n, n)$ e

$$W = \{A \in V; A^t = A\}$$

o conjunto das matrizes simétricas. Então W é um subespaço de V.

Solução. É claro que $W \neq \emptyset$, pois

$$0^t = 0 \Rightarrow 0 \in W.$$

Dados $A, B \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $A, B \in W$ temos que $A^t = A$ e $B^t = B$. Logo,

$$(A + B)^t = A^t + B^t = A + B \Rightarrow A + B \in W$$

e

$$(aA)^t = aA^t = aA \Rightarrow aA \in W.$$

Portanto, W é um subespaço de V.

Definição 1.1.10. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um vetor u em V é uma combinação linear dos vetores $u_1, u_2, ..., u_n$ em V se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que*

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n.$$

Além disso, sendo V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $u_1, u_2, ..., u_n \in V$, dizemos que os vetores $u_1, u_2, ..., u_n$ são *linearmente dependentes (LD)* se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ não todos iguais a 0, tais que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0.$$

Ou, equivalentemente, a equação vetorial acima admite uma solução não-nula. Caso contrário, dizemos que os vetores $u_1, u_2, ..., u_n$ são *linearmente independentes (LI)*, ou, equivalentemente, a equação vetorial admite apenas a solução nula.

Teorema 1.1.1. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $u_1, u_2, ..., u_n$ vetores fixados em V. Então o conjunto*

$$W = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n;\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço de V.

Demonstração. Note que $W \neq \emptyset$, pois

$$0 = 0u_1 + 0u_2 + ... + 0u_n \in W$$

Dados $u, v \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $u, v \in W$ temos que existem

$$x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$$

tais que

$$u = x_1 u_1 + ... + x_n u_n$$

e

$$v = y_1u_1 + ... + y_nu_n.$$

Logo,

$$u + v = (x_1u_1 + ... + x_nu_n) + (y_1u_1 + ... + y_nu_n) = (x_1 + y_1)u_1 + ... + (x_n + y_n)u_n \in W$$

e

$$au = a(x_1u_1 + ... + x_nu_n) = (ax_1)u_1 + ... + (ax_n)u_n \in W$$

Portanto, W é um subespaço de V.

$\blacksquare$

O subespaço

$$W = \{\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + ... + \alpha_nu_n;\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

de V é chamado o *subespaço gerado* por $u_1, u_2, ..., u_n$.

Mais geralmente, seja β um subconjunto não-vazio de V. Então

$$W = \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_iu_i;\ \alpha_i \in \mathbb{R}\ ,\ u_i \in \beta\ e\ k \in \mathbb{N}\}$$

é o subespaço de V *gerado* por β, onde β é o conjunto de *geradores* de V.

Definição 1.1.11. *Um subconjunto β de um espaço vetorial V é uma base de V, se*

1. *β é um conjunto de geradores de V e*

2. *β é um conjunto linearmente independente.*

Dizemos que um espaço vetorial V tem *dimensão finita* se ele tem uma base consistindo de um número finito de vetores. O número de elementos de uma de suas bases é chamado de *dimensão* de V. Quando um espaço não tem dimensão finita, dizemos que ele tem *dimensão infinita*.

Exemplo 1.1.5. Seja $n \in \mathbb{N}$. Para cada $1 \leq i \leq n$, denotemos por e_i o vetor

$$(\delta_{i1}, \delta_{i2}, ..., \delta_{in}) = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$$

em $\mathbb{R}^n$, onde a componente 1 encontra-se na *i*-ésima posição. O conjunto $\alpha = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é linearmente independente, pois a equação

$$k_1e_1 + k_2e_2 + ... + k_ne_n = 0$$

é satisfeita somente de $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$. Além disto, este conjunto também gera $\mathbb{R}^n$, pois qualquer vetor $v = (a_1, a_2, ..., a_n)$ em $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como

$$v = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n.$$

Assim, α, com a ordenação dada pelos índices dos e_i é uma base do $\mathbb{R}^n$, chamada *base canônica* de $\mathbb{R}^n$.

1.1.4 Transformações Lineares

Lembramos que uma *função* f de um conjunto A em um conjunto B, $f : A \to B$, é uma regra que associa a cada elemento do conjunto A, um único elemento do conjunto B. O conjunto A é chamado *domínio* e o conjunto B é chamado *contradomínio*. O subconjunto de B formado por elementos $b \in B$ tais que $f(a) = b$ para algum $a \in A$ é chamado *(conjunto) imagem* de f. Para todo elemento $a \in A$, $f(a)$ é chamado a *imagem de* a por f.

Definição 1.1.12. *Sejam V e W espaços vetoriais. Uma transformação linear de V em W é uma função $T : V \to W$ que possui as seguintes propriedades:*

1. $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, *para quaisquer v_1 e v_2 em V;*
2. $T(av) = aT(v)$, *para quaisquer v em V e a em $\mathbb{R}$.*

Observação 1.1.4. As duas propriedades anteriores são equivalentes à seguinte propriedade:

$$T(v_1 + av_2) = T(v_1) + aT(v_2),$$

para quaisquer v_1 e v_2 em V e a em $\mathbb{R}$.

Quando a transformação linear for de um espaço vetorial V nele mesmo, ela será chamada de *operador* em V.

Exemplo 1.1.6. Seja $f(x)$ um polinômio arbitrariamente fixado em $\mathbb{R}[x]$. A função $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, dada por $T(p(x)) = p(f(x))$, é uma transformação linear.

De fato, se $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $a \in \mathbb{R}$, temos que

$$T(p_1(x) + ap_2(x)) = p_1(f(x)) + ap_2(f(x)) = T(p_1(x)) + aT(p_2(x)),$$

mostrando que T é uma transformação linear.

Definição 1.1.13. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O núcleo de T, denotado por $N(T)$, é definido pelo conjunto*

$$N(T) = \{v \in V;\ T(v) = 0\}.$$

E, a imagem de T é o conjunto

$$Im(T) = T(V).$$

O estudo de transformações lineares em espaços vetoriais de dimensão finita pode ser reduzido ao estudo de matrizes. Para tal, considere V , W espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e

$$\alpha = \{u_1, ..., u_n\},\ \beta = \{w_1, ..., w_m\}$$

bases de V e W, respectivamente. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então

$$T(u_1), ..., T(u_n) \in W.$$

Como β é uma base de W temos que existem únicos $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i,\ j = 1, ..., n.$$

A transposta da matriz dos coeficientes deste sistema será chamada a *representação matricial* de T em relação as bases α e β e denotada por

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Agora, definiremos um importante operador em espaços vetoriais com produto interno. Mais precisamente, mostraremos a existência do operador adjunto de um operador linear e, a partir deste, a noção de operador simétrico.

Definição 1.1.14. *Um produto interno em um espaço vetorial V é uma função que a cada par de vetores u e v em V associa o número real, denotado por $\langle u, v\rangle$, que satizfaz as seguintes propriedades:*

Para quaisquer vetores u, v e w de V e qualquer número real k,

1. $\langle v, v\rangle \geq 0$;
2. $\langle v, v\rangle = 0$ *se, e somente se* $v = 0$;
3. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;
4. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;
5. $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$.

Observação 1.1.5. A *norma* do vetor v de V, denotada por $\|v\|$, é o número real

$$\|v\| = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Se $\|v\| = 1$, dizemos que v é um *vetor unitário*.

Definição 1.1.15. *Dois vetores u e v em V são ortogonais quando $\langle u, v\rangle = 0$.*

Definição 1.1.16. *Um conjunto de vetores em V é chamado conjunto ortogonal se quaisquer dois vetores distintos do conjunto são ortogonais. Um conjunto ortogonal no qual cada vetor é unitário é chamado conjunto ortonormal.*

Teorema 1.1.2. *Dado um operador linear T em V, existe um único operador linear T^* em V tal que*

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle,$$

para quaisquer $v, w \in V$.

Demonstração. Tome $w \in V$. Como a função definida por $v \mapsto \langle T(v), w\rangle$ é linear em V segue que existe um único vetor $w' \in V$ tal que

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, w'\rangle,$$

para todo $v \in V$. Basta definir $T^*(w) = w'$ e sendo $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de V, então

$$T^*(w) = w' = \langle T(v_1), w\rangle v_1 + ... + \langle T(v_n), w\rangle v_n.$$

Daí, vê-se que T^* é linear.

∎

O operador T^* é chamado de *operador adjunto* de T. Podemos obter T^* a partir de uma representação matricial de T, tendo em vista que para toda base ortonormal α de V, temos que

$$[T^*]^\alpha_\alpha = ([T]^\alpha_\alpha)^t.$$

Definição 1.1.17. *Um operador linear $T : V \to V$ é dito ser um operador simétrico quando $T^* = T$.*

Assim, $T : V \to V$ é simétrico se, e somente se, $[T]^\alpha_\alpha$ é uma matriz simétrica.

Exemplo 1.1.7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x, y, z) = (2x - y + z, -x + y + 3z, x + 3y)$. Verificar se T é um operador simétrico.

Solução. Se α é a base canônica de $\mathbb{R}^3$, então

$$[T]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica e, portanto, T é um operador simétrico.

1.2 O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Definição 1.2.1. *Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

1. $d(x, x) = 0$;
2. *se* $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$;

3. $d(x, y) = d(y, x)$;

4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 1.2.2. *Um espaço métrico é um par* (M, d)*, onde* M *é um conjunto e* d *é uma métrica em* M.

Diremos, salvo quando houver possibilidade de dúvida, simplesmente "o espaço métrico M", deixando subentendida qual a métrica d que está sendo considerada. Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc. Mas é comum chamarmos sempre os pontos de M.

Definição 1.2.3. *Uma sequência* (x_n) *num espaço métrico* M *chama-se sequência de Cauchy quando, para todo* $\varepsilon > 0$ *dado, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Definição 1.2.4. *Diz-se que o espaço métrico* M *é completo quando toda sequência de Cauchy em* M *é convergente.*

Definição 1.2.5. *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Um ponto fixo de uma aplicação* $f : X \to X$ *é um ponto* $x \in X$ *tal que* $f(x) = x$.

Definição 1.2.6. *Sejam* X, Y *espaços métricos. Uma aplicação* $f : X \to Y$ *chama-se uma contração quando existe uma constante* c*, com* $0 < c < 1$*, tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq c.d(x, y),$$

para quaisquer $x, y \in X$.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Banach)**.** *Se* X *é um espaço métrico completo, toda contração* $f : X \to X$ *possui um único ponto fixo em* X*. Mais precisamente, se escolhermos um ponto qualquer* $x_0 \in X$ *e pusermos*

$$x_1 = f(x_0), \;\; x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots,$$

a sequência (x_n) *converge em* X *e* $a = \lim x_n$ *é o único ponto fixo de* f.

Demonstração. Provemos inicialmente a unicidade. Se $f(a) = a$ e $f(b) = b$, como f é uma contração, temos

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq c.d(a, b),$$

ou seja,

$$(1-c)d(a,b) \leq 0.$$

Como $1-c>0$, concluímos que $d(a,b)=0$, isto é, $a=b$. Provemos agora a existência, para isso, provemos que (x_n) é uma sequência de Cauchy em X. Ora

$$d(x_1,x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq c.d(x_0,x_1),$$

$$d(x_2,x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq c.d(x_1,x_2) \leq c^2.d(x_0,x_1),$$

e, por recorrência, temos

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n.d(x_0,x_1), \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então para $n, p \in \mathbb{N}$ quaisquer, segue que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \\ &\leq [c^n(1+c+\cdots+c^{p-1})].d(x_0,x_1) \\ &\leq \frac{c^n}{1-c}.d(x_0,x_1). \end{aligned}$$

Calculando o limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0,$$

concluindo que (x_n) é uma sequência de Cauchy em X. Logo existe $a \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Provemos que a é ponto Fixo de f. De fato, como f é contínua, temos

$$\begin{aligned} f(a) &= f(\lim_{n\to\infty} x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= a, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

■

Corolário 1.2.1. *Seja X um espaço métrico completo. Se $F : X \to X$ é contínua e, para algum m, F^m é uma contração, então existe um único ponto p fixo por F. Mais ainda, p é um atrator de F, isto é, $F^m(x) \to p$ quando $n \to \infty$, onde $F^m(x)$ é definido por $F(F^{m-1}(x))$.*

CAPÍTULO 2

Diagonalização de Operadores

Motivação. Vamos considerar o problema de encontrar as funções que dão a evolução das populações de duas espécies, S_1 e S_2, convivendo em um mesmo ecossistema no tempo $t > 0$. Vamos denotar as populações das espécies S_1 e S_2 em um instante t por $x_1(t)$ e $x_2(t)$, respectivamente. Inicialmente vamos supor que a taxa de crescimento da população de uma espécie não depende do que ocorre com a outra espécie e que esta taxa é proporcional a sua população existente (ou equivalentemente que a taxa de crescimento relativa é constante), ou seja, vamos supor que

$$\frac{dx_1}{dt}(t) = ax_1(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt}(t) = dx_2(t)$$

em que $a, d \in \mathbb{R}$. Temos aqui um sistema de equações diferenciais, ou seja, um sistema de equações que envolvem derivadas das funções que são incógnitas. Neste caso as duas equações são desacopladas, isto é, podem ser resolvidas independentemente. A solução do sistema é $x_1(t) = x_1(0)e^{at}$ e $x_2(t) = x_2(0)e^{dt}$, para $t \geq 0$.

Vamos supor, agora, que as duas populações interagem de forma que a taxa de crescimento da população de uma espécie depende de forma linear não somente da sua população existente, mas também da população existente da outra espécie. Ou seja, vamos supor que

$$\frac{dx_1}{dt}(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt}(t) = cx_1(t) + dx_2(t).$$

Por exemplo, se os individuos de uma espécie competem com os da outra por alimento $(a, d > 0)$ e $(b, c < 0)$, ou os indivíduos da espécie S_1 são predadores dos da outra $(a, b, d > 0$ e $c < 0)$. Neste caso a solução de uma equação depende da outra. Podemos escrever este sistema na forma de uma equação diferencial matricial

$$X'(t) = AX(t),$$

em que $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. Vamos supor que existam matrizes P e D tais que

$$A = PDP^{-1},$$

em que $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Substituindo-se $A = PDP^{-1}$ em $X'(t) = AX(t)$ obtemos

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por P^{-1} e fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, obtemos a equação

$$Y'(t) = DY(t),$$

que pode ser escrita na forma de um sistema de equações desacopladas

$$y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t)$$

$$y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t)$$

que tem solução dada por $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$. Assim, da mudança de variáveis

$Y(t) = P^{-1}X(t)$, a solução de $X'(t) = AX(t)$ é

$$X(t) = PY(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Vamos mostrar como podemos determinar matrizes P e D, quando elas existem, tais que $A = PDP^{-1}$, ou multiplicando à esquerda por P^{-1} e à direita por P, $D = P^{-1}AP$, com D sendo uma matriz diagonal. Chamamos *diagonalização* ao processo de encontrar as matrizes P e D.

2.1 Autovalores e Autovetores

Definição 2.1.1. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to V$ um operador linear. Um número real λ será dito um autovalor de T se existir um vetor não-nulo v em V tal que*

$$T(v) = \lambda v.$$

O vetor v é chamado de autovetor de T associado a λ.

Observação 2.1.1. Se v é um autovetor de um operador T associado a um autovalor λ, então todo múltiplo por escalar de v é também um autovetor de T associado a λ. Mais ainda, se $A(\lambda) = \{v \in V;\ T(v) = \lambda v\}$, então $A(\lambda)$ é um subespaço vetorial de V, chamado *autoespaço* de T associado a λ.

O seguinte teorema mostra que autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Teorema 2.1.1. *Sejam $T : V \to V$ um operador linear e $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ autovalores distintos de T. Se $v_1, v_2, ..., v_n$ são autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, então o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é linearmente independente.*

Demonstração. (Indução sobre n). Sejam $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = 0.$$

Se $n = 1$, então $x_1v_1 = 0$. Logo, $x_1 = 0$, pois $v_1 \neq 0$. Agora, suponhamos que $n \geq 2$ e que o resultado seja válido para todo k com $1 \leq k \leq n - 1$. Aplicando T a equação

$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = 0$. e usando que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, temos que

$$x_1\lambda_1v_1 + x_2\lambda_2v_2 + ... + x_n\lambda_nv_n = 0.$$

Agora, multiplicando a equação $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = 0$ por λ_n e subtraindo da equação $x_1\lambda_1v_1 + x_2\lambda_2v_2 + ... + x_n\lambda_nv_n = 0$, temos que

$$(\lambda_n - \lambda_1)x_1v_1 + (\lambda_n - \lambda_2)x_2v_2 + ... + (\lambda_n - \lambda_{n-1})x_{n-1}v_{n-1} = 0.$$

Logo, pela hipótese de indução,

$$(\lambda_n - \lambda_i)x_i = 0,\ i = 1, ..., n-1.$$

Como $\lambda_n - \lambda_i \neq 0,\ i = 1, ..., n-1$, temos que $x_i = 0,\ i = 1, ..., n-1$. Assim,

$$x_nv_n = 0$$

mas isto implica que $x_n = 0$. Portanto, o conjunto

$$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

é linearmente independente.

■

Corolário 2.1.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear. se $\dim V = n$ e T possui n autovalores distintos, então V possui uma base formada por autovetores de T.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, n autovalores distintos implicam na existência de um conjunto de autovetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ linearmente independente. Considere W um subespaço gerado por $v_1, v_2, ..., v_n$. Como $W \subset V$ e $\dim W = n = \dim V$, temos que $W = V$, logo $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base de V.

■

Veremos que a existência de uma base de V formada por autovetores de um operador linear $T : V \to V$ é equivalente à existência de uma representação deste operador por uma matriz diagonal.

2.2 Polinômio Característico

Definição 2.2.1. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz $tI_n - A$, onde t é uma indeterminada, é chamada matriz característica de A. O determinante dessa matriz é um polinômio em t, chamado polinômio característico de A e denotado por $P_A(t)$.*

Existe uma relação entre os autovalores de um operador e as raízes do polinômio característico de alguma matriz associada a ele. Essa relação é dada pelo resultado a seguir.

Teorema 2.2.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear e seja $\alpha = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V. Então:*

(i) *v é um autovetor de T associado a t_0 se, e somente se, $[v]_\alpha$ é uma solução não trivial do sistema linear $AX = 0$, onde $A = t_0 I_n - [T]_\alpha^\alpha$;*

(ii) *$t_0 \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se, e somente se, t_0 é uma raiz do polinômio característico da matriz $[T]_\alpha^\alpha$, ou seja, $P_{[T]_\alpha^\alpha}(t_0) = 0$.*

Demonstração.

(i) Seja t_0 um autovalor de T e v um autovetor de T associado a t_0. Como $[T(v)]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha [v]_\alpha$ e $T(v) = t_0 v$, temos

$$[t_0 v]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha [v]_\alpha,$$

ou seja, $t_0 I_n [v]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha [v]_\alpha$. Equivalentemente,

$$(t_0 I_n - [T]_\alpha^\alpha)[v]_\alpha = 0.$$

(ii) Consideremos o sistema linear $AX = 0$, onde $A = t_0 I_n - [T]_\alpha^\alpha$. De, $(t_0 I_n - [T]_\alpha^\alpha)[v]_\alpha = 0$, segue que $AX = 0$ tem uma soluçao não trivial, a saber $[v]_\alpha$, já que v não é o vetor nulo. Como A não é invertível, temos $P_{[T]_\alpha^\alpha}(t_0) = 0$, provando que t_0 é uma raiz de $P_{[T]_\alpha^\alpha}$. Reciprocamente, se $t_0 \in \mathbb{R}$ é uma raiz de $P_{[T]_\alpha^\alpha}$, então $P_{[T]_\alpha^\alpha}(t_0) = 0$. Portanto, o sistema linear $AX = 0$, onde $A = t_0 I_n - [T]_\alpha^\alpha$, tem uma solução $X_1 = [x_1\ x_2\ ...\ x_n]$ não nula, pois $\det A = 0$. Vamos provar que t_0 é um autovalor de T e que $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n$ é um autovetor de T associado a t_0. De fato, como X_1 é uma solução do sistema $AX = 0$, temos $AX_1 = 0$. Equivalentemente,

$$(t_0 I_n - [T]_\alpha^\alpha) X_1 = t_0 X_1 - [T]_\alpha^\alpha X_1 = 0,$$

ou seja,

$$[t_0v]_\alpha = t_0[v]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha[v]_\alpha = [T(v)]_\alpha,$$

pois, pela construção de v, $X_1 = [v]_\alpha$. De $[t_0v]_\alpha = t_0[v]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha[v]_\alpha = [T(v)]_\alpha$, obtemos que $[T(v)]_\alpha = [t_0v]_\alpha$, isto é, as coordenadas dos vetores $T(v)$ e t_0v na base α são iguais. Consequentemente, estes vetores são iguais, ou seja, $T(v) = t_0v$. Como por construção $v \neq 0$, segue-se que t_0 é um autovalor de T e v é um autovetor de T associado a t_0.

■

Exemplo 2.2.1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e autovetores de T.

Solução. O polinômio característico é

$$P_A(t) = \det(tI_2 - A) = \det \begin{bmatrix} t-4 & 1 \\ -2 & t-1 \end{bmatrix} = t^2 - 5t + 6.$$

Como $t^2 - 5t + 6 = 0$ somente para $t_1 = 2$ e $t_2 = 3$, o teorema anterior nos mostra que t_1 e t_2 são os únicos autovalores de T. Para determinarmos os autovetores de T associados a t_1, devemos resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} t_1-4 & 1 \\ -2 & t_1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que equivale à equação linear $-2x_1 + x_2 = 0$. Assim, o autoespaço de T associado a t_1 é $\{(x, 2x);\ x \in \mathbb{R}\}$. Agora, para determinarmos os autovetores de T associados a t_2, devemos resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} t_2-4 & 1 \\ -2 & t_2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que equivale à equação linear $-x_1 + x_2 = 0$. Assim, o autoespaço de T associado a t_2 é $\{(x, x);\ x \in \mathbb{R}\}$.

2.3 Processo de Diagonalização

Definição 2.3.1. *Dizemos que uma matriz A, $n \times n$, é semelhante a uma matriz B, $n \times n$, se existir uma matriz invertível P tal que*

$$A = PBP^{-1}.$$

A relação de semelhança satisfaz as seguintes propriedades:

- toda matriz quadrada é semelhante a si mesma;
- se a matriz A é semelhante a B, então B é semelhante a A e
- se A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C.

Definição 2.3.2. *Dizemos que uma matriz A, $n \times n$, é diagonalizável, se ela é semelhante a uma matriz diagonal. Ou seja, se existem matrizes Q e D tais que $A = QDQ^{-1}$, em que D é uma matriz diagonal.*

Definição 2.3.3. *Dizemos também que uma operador $T : V \to V$ de um espaço vetorial de dimensão finita V é diagonalizável, se existir uma base β de V tal que $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal.*

Exemplo 2.3.1. Toda matriz diagonal A é diagonalizável, pois $A = (I_n)^{-1}AI_n$.

Teorema 2.3.1. *Um operador linear $T : V \to V$ admite uma base β em relação à qual a matriz $[T]_\beta^\beta$ é diagonal se, e somente se, essa base β for formada por autovetores de T.*

Demonstração. Suponhamos que $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base de V tal que $[T]_\beta^\beta$ é diagonal, digamos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

Como, para cada $i \leq j \leq n$,

$$T(v_j) = 0v_1 + ... + 0v_{j-1} + a_j v_j + 0v_{j+1} + ... + 0v_n = a_j v_j,$$

segue que a_j é um auto valor de T e v_j é um auto vetor de T associado a a_j. Portanto, β é uma base formada por autovetores de T.

Suponhamos agora que $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ é uma base de V formada por autovetores de T. Existem, então, números reais $b_1, b_2, ..., b_n$ tais que, para cada $i \leq j \leq n$, $T(u_j) = b_j u_j$. Observamos que os $b_j\,'s$ não são necessariamente todos distintos. Pela definição de $[T]_\beta^\beta$, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix},$$

ou seja, $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal.

■

Na demonstração do teorema anterior fica claro que, se um operador T tem uma representação por uma matriz diagonal $[T]_\beta^\beta$, então as entradas da diagonal principal de $[T]_\beta^\beta$ são dadas pelos autovalores de T. Mais ainda, se T é um operador linear em um espaço V de dimensão n, o teorema anterior nos diz que T é diagonalizável se, e somente se, T tem n autovetores linearmente independentes. Em particular, se T tem n autovalores distintos, então T é diagonalizável.

Veremos agora que se V é um espaço com produto interno e se $T : V \to V$ é um operador simétrico, então existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T. Em particular, todo operador simétrico é diagonalizável. Este resultado é conhecido como *Teorema Espectral*.

Teorema 2.3.2 (Teorema Espectral). *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Se $T : V \to V$ é um operador simétrico, então existe uma base ortonormal β de V tal que $[T]_{\beta}^{\beta}$ é diagonal.*

Demonstração. A prova será feita por indução sobre a dimensão de V. Chamaremos a matriz $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ de A. Se $\dim V = 1$, o resultado é óbvio. Suponhamos que $n \geq 1$ e que o resultado é válido para espaços de dimensão n. Seja V um espaço vetorial tal que $\dim V = n + 1$. Seja α uma base de V e seja λ uma raiz complexa do polinômio P_A. No entanto, sabemos que todas as raízes do polinômio característico $P_{[T]_{\alpha}^{\alpha}}$ em $\mathbb{C}$ são números reais. Portanto, λ é um autovalor de T. Seja v um vetor unitário de T associado a λ. Consideremos o subespaço

$$W = \{w \in V; \langle w, v \rangle = 0\}.$$

Note que $W = G(v)^{\perp}$, onde $G(v)$ é o subespaço gerado por v. Afirmamos que $T(W) \subset W$. De fato, seja $w \in W$. Como T é um operador simétrico, temos que

$$\langle T(w), v \rangle = \langle w, T(v) \rangle = \langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle = \lambda 0 = 0,$$

donde $T(w) \in W$. Assim, podemos considerar o operador restrição

$$S = T|_W,$$

que é também um operador simétrico. Além disso, como $\dim G(v) = 1$, segue que $\dim W = n$. Assim, podemos aplicar a hipótese de indução ao operador S para garantir a existência de uma base ortonormal $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de W formada por autovetores de S (logo de T). Consequentemente, $\beta = \{v, v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base ortonormal de V formada por autovetores de T. Daí, $[T]_{\beta}^{\beta}$ é diagonal.

■

Observação 2.3.1. Uma outra versão (matricial) do Teorema Espectral, nos diz que se $A \in M(n, n)$ é uma matriz simétrica, então existe uma matriz ortogonal $P \in M(n, n)$ tal que $P^{-1}AP (= P^t AP)$ é diagonal. Neste caso, dizemos que A é *ortogonalmente diagonalizável* e que P diagonaliza A ortogonalmente.

Exemplo 2.3.2. Considere o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x + y, -y, z)$ e a base canônica α do $\mathbb{R}^3$. A matriz que representa T com relação a base α é:

$$A = [T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o polinômio característico de T é:

$$P_A(t) = \det(tI_3 - A) = \det \begin{bmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{bmatrix} = (t-1)(t+1)(t-1).$$

As raízes do polinômio característico de T são:

$$P_A(t) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Assim, os autovalores de T são $t_1 = 1$ com multiplicidade 2 e $t_2 = -1$ com multiplicidade 1. E, para determinar os autovetores de T resolvemos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $t_1 = 1$, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que implica em $y = 0$. Assim o autoespaço de T associado a t_1 é $\{(x, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$. Observe que $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base para o autoespaço de T associado a t_1.

Para $t_2 = -1$, temos:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que equivale à equação linear $-2x - y = 0$ e à $z = 0$. Assim o autoespaço de T associado a t_2 é $\{(x, -2x, 0); x \in \mathbb{R}\}$. Observe que $\{(1, -2, 0)\}$ é uma base para o autoespaço de T associado a t_2.

Considere então o conjunto $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, -2, 0)\}$. Esse conjunto é linearmente independente, e como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, temos que β é uma base para $\mathbb{R}^3$, formada por autovetores de T. Portanto, T é um operador diagonalizável. Escrevendo as imagens dos elementos da base β, pela transformação T, como combinações lineares dos elementos de β, temos:

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) + 0(0, 0, 1) + 0(1, -2, 0)$$

$$T(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 0, 1) + 0(1, -2, 0)$$

$$T(1, -2, 0) = (-1, 2, 0) = 0(1, 0, 0) + 0(0, 0, 1) + -1(1, -2, 0)$$

Portanto, a matriz que representa T com relação a base β de autovetores é:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz diagonal.

Exemplo 2.3.3. Considere a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é dado por

$$P_A(t) = \det(tI_2 - A) = \det \begin{bmatrix} t-1 & -2 \\ 0 & t+2 \end{bmatrix} = (t-1)(t+2).$$

As raízes do polinômio característico são $P_A(t) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t = -2$. Portanto, A possui dois autovalores $t_1 = 1$ e $t_2 = -2$.

Para $t_1 = 1$, temos que:

$$AX = t_1X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = 0.$$

Assim, os autovetores da matriz A associados ao autovalor $t_1 = 1$ são da forma:

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $t_2 = -2$, temos que:

$$AX = t_2X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-3}{2}x_1.$$

Assim, os autovetores da matriz A associados ao autovalor $t_2 = -2$ são da forma:

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{-3}{2}x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-3}{2} \end{bmatrix}.$$

Observe que $(1,0)$ e $(1, \frac{-3}{2})$ são linearmente independentes, portanto A possui 2 autovetores linearmente independentes, o que implica que a matriz A é diagonalizável. De fato, basta tomar a matriz diagonalizante

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

e a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Observe que as colunas de Q são os autovetores de A e a matriz diagonal D foi construída com os autovalores de A. Temos que A é semelhante a matriz D, ou seja, $A = QDQ^{-1}$, de fato, podemos verificar que:

$$QDQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = A.$$

Assim, A é uma matriz diagonalizável.

CAPÍTULO 3

Equações Diferenciais

3.1 Um Breve Histórico

A teoria das equações diferenciais foi aplicada primeiramente as ciências físicas, posteriormente a outras atividades humanas, envolvendo desde a engenharia e a biologia até a medicina, os esportes e as artes. Elas associam uma função a uma ou mais de suas derivadas, e resolvê-las significa encontrar todas as suas soluções, isto é, todas as funções que satisfazem a equação.

O estudo das equações diferenciais iniciou-se com o estudo do Cálculo durante o século XVII, pelos matemáticos Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). No entanto, além de Newton e Leibniz, podemos citar matemáticos de grande relevância para o desenvolvimento desta teoria, como Bernoulli, Cauchy, Euler, Lagrange, Laplace e Gauss.

O avanço do Cálculo proporcionou a resolução de inúmeros problemas, os quais puderam ser modelados matematicamente na forma de equações diferenciais e vários desses problemas, como por exemplo, a resolução da braquistócrona, um problema que se destinava a determinar a forma de uma curva ligando dois pontos distintos sobre um plano vertical, foram resolvidos explicitamente por grandes matemáticos como os da família Bernoulli e Leonhard Euler.

Leonhard Euler(1707-1783), o maior matemático do século XVIII, foi um dos matemá-

Figura 3.1: Leonhard Euler

ticos que mais contribuiram no desenvolvimento da teoria das equações diferenciais, embora, seus interesses incluissem todas as áreas da matemática e muitos campos de aplicação. Euler identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas, desenvolveu o método de variação de parâmetros, demonstrou a teoria de fatores integrantes, encontrou a solução geral de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes. Nas equações diferenciais parciais fez, também, importantes contibuições.

No final do século XVIII, já haviam sido descobertos diversos métodos elementares para solucionar equações diferenciais ordinárias. Já no começo do século XIX, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) contribuíram no desenvolvimento das teorias e conceitos de funções de variáveis complexas. O desenvolvimento das soluções de determinadas equações diferenciais ainda continua como objeto de pesquisa, com problemas atrativos e importantes ainda não resolvidos.

3.2 Equações Diferenciais Ordinárias

De uma maneira geral, podemos dizer que temos uma equação diferencial se na equação estão envolvidas funções incógnitas e suas derivadas.

Uma equação diferencial é dita ordinária (EDO) se a função incógnita depender apenas de uma variável. Se depender de mais de uma variável será denominada equação diferencial parcial.

A ordem de uma equação diferencial é indicada pela maior ordem de derivação que aparece na equação. Uma EDO de ordem n tem como expressão geral

$$F\Big(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\Big) = 0, \tag{3.2.1}$$

onde F é uma função de $n+1$ variáveis.

A equação (3.2.1) representa a relação entre a variável independente x e os valores da função incógnita y e suas n primeiras derivadas. Quando pudermos explicitar $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ na equação (3.2.1) teremos uma forma normal da EDO de ordem n, isto é,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\Big(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\Big). \tag{3.2.2}$$

As equações na forma normal podem sempre ser escritas na forma da equação 3.2.1, basta considerar

$$F\Big(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\Big) = \frac{d^n y}{dx^n} - f\Big(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\Big) = 0. \tag{3.2.3}$$

Entretanto, uma equação na forma geral (3.2.1) pode acarretar mais de uma equação na forma normal (3.2.2). Por exemplo,

$$\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 - x = 0$$

leva às duas equações na forma normal:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{x}.$$

A equação diferencial (3.2.2) é chamada linear se a função f for linear nas variáveis $y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2 y}{dx^2}, \cdots, \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$. Sendo assim, a forma geral de uma EDO linear de ordem n é

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{3.2.4}$$

onde a_n não é identicamente nula.

Uma solução de uma EDO, no intervalo $I = (a, b)$, é uma função $y = \phi(x)$ que, juntamente com suas derivadas, satisfaz a equação 3.2.2. Assim, resolver uma EDO (3.2.2) é encontrar uma função $y = \phi(x)$, definida e derivável até a ordem n no intervalo I, que satisfaz a equação (3.2.2).

Solução geral de uma EDO é o conjunto de todas as suas soluções. Nas aplicações, geralmente estamos interessados em soluções particulares que satisfaçam uma dada condição inicial, ou condições complementares.

Para uma equação diferencial de orem n, o problema

$$\begin{cases} \text{Resolver}: \dfrac{d^n y}{dx^n} = f\Big(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2 y}{dx^2}, \cdots, \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big) \\ \text{Sujeito a}: y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{3.2.5}$$

em que $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ são constantes arbitrárias, é chamado de um problema de valor inicial (PVI) de ordem n. Os valores específicos $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ são chamados de condições iniciais. Em particular,

$$\begin{cases} a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{3.2.6}$$

é um PVI linear de ordem n.

Teorema 3.2.1 (Existência e Unicidade)**.** *Sejam $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em um intervalo I com $a_n(x) \neq 0$ para todo x neste intervalo. Se x_0 é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução $y(x)$ para o PVI* 4.1.2 *neste intervalo.*

Para o nosso propósito, precisamos da seguinte proposição.

Proposição 3.2.1. *Se f é uma função contínua em um intervalo I, então o conjunto de todas soluções da EDO linear de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} = ay + f(x), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \tag{3.2.7}$$

é o conjunto $\mathcal{W} = \{y(x) = e^{ax}\displaystyle\int f(x)e^{-ax}dx + ce^{ax} : c \in \mathbb{R}\}$ em I.

Demonstração. Em primeiro lugar, mostraremos que qualquer função de $\mathcal{W}$ é uma solução de 3.2.7. De fato, seja $y(x) = e^{ax}\displaystyle\int f(x)e^{-ax}dx + ce^{ax}$, $x \in I$. Então,

$$\begin{aligned} y' &= ae^{ax}\int f(x)e^{-ax}dx + e^{ax}e^{-ax}f(x) + ace^{ax} \\ &= a(e^{ax}\int f(x)e^{-ax}dx + ce^{ax}) + f(x) \\ &= ay + f(x). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que toda solução é desta forma. Seja $\phi(x)$ uma solução qualquer de

(3.2.7) em I. Então
$$\frac{d\phi}{dx} = a\phi + f(x), \;\; x \in I.$$
Multiplicando esta equação por e^{-ax}, obtemos

$$e^{-ax}\frac{d\phi}{dx} - ae^{-ax}\phi = e^{-ax}\phi f(x), \;\; x \in I,$$

ou
$$\frac{d}{dx}[e^{-ax}\phi] = e^{-ax}f(x), \;\; x \in I.$$
Integrando membro a membro, obtemos

$$e^{-ax}\phi = \int e^{-ax}f(x)dx + c, \;\; x \in I,$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Finalmente,

$$\phi = e^{ax}\int e^{-ax}f(x)dx + ce^{ax}, \;\; x \in I,$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

■

Observação 3.2.1. Note que a solução geral da equação (3.2.7 é dada por $y = y_c + y_p$, onde $y_c = ce^{ax}$ é a solução geral da equação homogênea $y' = ay$ e $y_p = e^{ax}\displaystyle\int e^{-ax}f(x)dx$ é uma solução particular da equação não homogênea (3.2.7.

Observação 3.2.2. Segue da proposição anterior juntamente com o Teoreme de existência e unicidade que $y = y_0e^{a(x-x_0)}$, $x \in \mathbb{R}$, é a única solução do Problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = ay(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

3.3 Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira ordem

Nos concentraremos somente em sistemas de equações diferenciais de primeira ordem lineares. Desenvolveremos uma teoria para esse tipo de sistema e, no caso de sistemas com coeficientes constantes, um método de solução que utiliza alguns conceitos básicos de álgebra matricial.

Definição 3.3.1. *Um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem é um conjunto de equações da forma:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots & \\ \dfrac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Quando cada uma das funções $g_1, g_2, ..., g_n$, do sistema de equações anterior, for linear nas variáveis dependentes $x_1, x_2, ..., x_n$, obtemos a *forma normal* de um sistema de primeira ordem de equações lineares:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots & \\ \dfrac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Consideramos que os coeficientes $a_{ij}(t)$ bem como as funções $f_i(t)$ sejam contínuos em um intervalo comum I. Quando $f_i(t) = 0, i = 1, 2, ..., n$, o sistema linear é dito ser homogêneo; caso contrário, ele é não homogêneo.

Se X, $A(t)$ e $F(t)$ representarem as respectivas matrizes

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

então o sistema de equações diferenciais de primeira ordem lineares pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

ou simplesmente

$$X' = AX + F. \tag{3.3.3}$$

Se o sistema for homogêneo, sua forma matricial é então

$$X' = AX. \tag{3.3.4}$$

Uma das motivações para o estudo de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem é que toda equação diferencial linear de ordem n pode ser reduzida a um sistema linear com a forma normal $(3.3.2)$.

Suponhamos uma equação diferencial linear de ordem n dada por

$$\frac{d^n y}{dt^n} = a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y + f(t). \tag{3.3.5}$$

Introduzindo as variáveis

$$y = x_1,\ \ y' = x_2,\ \ y'' = x_3,\ \ldots\ , y^{(n-1)} = x_n, \tag{3.3.6}$$

decorre que $y' = x_1' = x_2,\ y'' = x_2' = x_3, \ldots, y^{(n-1)} = x_{n-1}' = x_n$ e $y^{(n)} = x_n'$. Logo, de $(3.3.5)$ e $(3.3.6)$, verificamos que uma equação diferencial linear de ordem n pode ser expressa como um sistema de equações lineares de primeira ordem:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = a_{n-1}(t)x_n + \cdots + a_1(t)x_2 + a_0(t)x_1 + f(t). \end{cases}$$

Exemplo 3.3.1. Se $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, então a forma matricial do sistema não homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= & 6x + y + z + t \\ \dfrac{dy}{dt} &= & 8x + 7y - z + 10t \\ \dfrac{dz}{dt} &= & 2x + 9y - z + 6t \end{cases}$$

é

$$X' = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & -1 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ 10t \\ 6t \end{pmatrix}.$$

Definição 3.3.2. *Um vetor solução em um intervalo é qualquer matriz coluna*

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

cujas entradas são funções diferenciáveis que satizfazem o sistema (3.3.3) *no intervalo.*

Exemplo 3.3.2. Verifique que no intervalo $(-\infty, \infty)$, as matrizes $X_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$ e $X_2 = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$ são soluções de $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X$.

Solução. A partir de $X_1' = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}$ e $X_2' = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix}$, temos que

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = X_1'$$

e

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} + 15e^{6t} \\ 15e^{6t} + 15e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix} = X_2'.$$

Definição 3.3.3 (Problema de valor inicial)**.** *Seja t_0 um ponto em um intervalo I e*

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix},$$

onde $\gamma_i, i = 1, 2, ..., n$, são constantes dadas. Assim, o problema

$$\begin{cases} \textit{Resolver}: X' = A(t)X + F(t) \\ \textit{Sujeito a}: X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{3.3.7}$$

é um problema de valor inicial em I.

Observação 3.3.1. Note que o sistema $(3.3.1)$ pode ser escrito como

$$X' = f(t, X),$$

onde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Esse fato motiva a seguinte definição.

Definição 3.3.4. *Dada uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida em cada ponto (t, X) de um aberto de U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n+1}$, dizemos que*

$$X' = f(t, X)$$

é a equação diferencial ordinária em $\mathbb{R}^n$ definida por f.

Uma solução dessa equação diferencial ordinária, às vezes denominada curva integral da equação, é um caminho $X : I \to \mathbb{R}^n$ definido e derivável num intervalo I de $\mathbb{R}$, com gráfico inteiramente contido em U e velocidade determinada por f, ou seja, para cada $t \in I$

$$(t, X(t)) \in U \text{ e } X' = f(t, X(t)).$$

Definição 3.3.5. *O problema*

$$\begin{cases} \textit{Resolver}: X' = f(t, X) \\ \textit{Sujeito a}: X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{3.3.8}$$

é um problema de valor inicial em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3.1 (Teorema de Picard)**.** *Seja f contínua e lipschitziana em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x; |t - x_0| \leq b\}$. Se $|f| < M$ em Ω, então existe uma única solução do PVI* (3.3.8) *em I_α, onde $\alpha = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$.*

Demonstração. Seja $X = \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$ o espaço métrico completo das funções contínuas $\phi : I_\alpha \to B_b$, com a métrica da convergência uniforme

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sup_{t \in I_\alpha}\{\phi_1(t) - \phi_2(t)\}.$$

Para $\phi \in X$, seja $F(\phi) : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(\phi)(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi)(s))ds.$$

Destacamos as seguintes propriedades de F:

(i) $F(X) \subset X$;

(ii) F^n é uma contração, para n suficientemente grande.

De fato, para todo $t \in I_\alpha$,

$$\begin{aligned}
|F(\phi)(t) - x_0| &= \Big|\int_{t_0}^{t} f(s, \phi)(s))ds\Big| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, \phi)(s))|ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} Mds \\
&\leq M(t - t_0) \\
&\leq M\alpha \\
&\leq b.
\end{aligned}$$

Logo, $F(X) \subset X$. Quanto a (ii), para todo par $\phi_1, \phi_2 \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|F^n(\phi_1)(t) - F^n(\phi_2)(t)| \leq \frac{K^n|t - t_0|^n}{n!}.d(\phi_1, \phi_2),\ t \in I_\alpha. \tag{3.3.9}$$

onde K é a constante de Lipschitz de f. Verificamos esta desigualdade por indução em n. Para $n = 0$ é válida. Suponha que seja válida para $n = l$, isto é,

$$|F^l(\phi_1)(t) - F^l(\phi_2)(t)| \leq \frac{K^l|t-t_0|^l}{l!}.d(\phi_1, \phi_2),\ t \in I_\alpha.$$

Então,

$$\begin{aligned} |F^{l+1}(\phi_1)(t) - F^{l+1}(\phi_2)(t)| &= F(F^l(\phi_1))(t) - F(F^l(\phi_2))(t)| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t f(s, F^l(\phi_1)(s)) - f(s, F^l(\phi_2)(s))ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t K|F^l(\phi_1)(s) - F^l(\phi_2)(s)|ds. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} |F^{l+1}(\phi_1)(t) - F^{l+1}(\phi_2)(t)| &\leq K\int_{t_0}^t \frac{K^l|t-t_0|^l}{l!}.d(\phi_1, \phi_2)ds. \\ &= \frac{K^{l+1}|t-t_0|^{l+1}}{(l+1)!}.d(\phi_1, \phi_2). \end{aligned}$$

Portanto a desigualdade $(3.3.9)$ é válida. Calculando o supremo, segue que

$$d(F^n(\phi_1) - F^n(\phi_2)) \leq \frac{K^n\alpha^n}{n!}d(\phi_1, \phi_2).$$

E para n grande

$$\frac{K^n\alpha^n}{n!} < 1$$

pois é o termo geral de uma série cuja soma é $e^{K\alpha}$. Portanto F^n é uma contração em X. Pelo Corolário $(1.2.1)$, existe uma única $\phi \in X$ tal que $F(\phi) = \phi$, e isto, prova o teorema.

■

Proposição 3.3.1. *Seja f contínua e Lipschitziana em $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}^n$. Então, para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução do PVI $(3.3.8)$ em $I = [a, b]$.*

Demonstração. Considere $X = \mathcal{C}(I, E)$ e $F : X \to X$ definida por

$$F(\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi)(s))ds.$$

Seguindo os passos da demostração do Teorema $(3.3.1)$, obtemos que F tem um único ponto fixo pois, para n grande, F^n é uma contração.

■

Corolário 3.3.1 (Equações Lineares)**.** *Considere as entradas das matrizes $A(t)$ e $F(t)$ como sendo funções contínuas em um intervalo comum I que contenha o ponto t_0. Logo, existe uma única solução do problema de valor inicial* $(3.3.7)$ *neste intervalo.*

Demonstração. Seja $I = \cup_n I_n$, onde $I_n \subseteq I_{n+1}$ são intervalos compactos que contém t_0. $f(t, x) = A(t)x + F(t)$ satisfaz as hipóteses da Proposição $(3.3.1)$ em cada intervalo I_n. Seja ϕ_n a única solução neste intervalo passando por (t_0, x_0). É claro que $\phi_{n+1} \mid_{I_n} = \phi_n$. Logo $\phi(t) = \phi_n(t)$, $t \in I_n$ está bem definida em I. É claro também que ϕ é a única solução em I passando por (t_0, x_0).

■

O seguinte Teorema diz que o conjunto de todas as soluções de um sistema linear homogêneo é um espaço vetorial sobre os reais.

Teorema 3.3.2 (Princípio da Superposição)**.** *Considere $X_1, X_2, ..., X_k$ um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo $X' = AX$ em um intervalo I. Então a combinação linear*

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_kX_k,$$

onde os $c_i, i = 1, 2, ..., k$, são constantes arbitrárias, é também uma solução neste intervalo.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
X' &= c_1X_1' + c_2X_2' + \ldots + c_kX_k' \\
&= c_1A(t)X_1 + c_2A(t)X_2 + \ldots + c_kA(t)X_n \\
&= A(t)(c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_kX_n) \\
&= A(t)X.
\end{aligned}$$

■

Definição 3.3.6 (Dependência/independência linear)**.** *Considere* $X_1, X_2, ..., X_k$ *como sendo um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo* $X' = AX$ *em um intervalo* I*. Dizemos que o conjunto é linearmente dependente no intervalo se existirem constantes* $c_1, c_2, ..., c_k$*, nem todas nulas, de modo que*

$$c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_kX_k = 0$$

para todo t *no intervalo. Se o conjunto de vetores não for linearmente dependente no intervalo, ele será linearmente independente.*

Definição 3.3.7. *Qualquer conjunto* $X_1, X_2, ..., X_n$ *de* n *vetores solução linearmente independentes do sistema homogêneo* $X' = AX$ *em um intervalo* I *é dito ser um conjunto fundamental de soluções no intervalo.*

Teorema 3.3.3 (Existência de um conjunto fundamental)**.** *Existe um conjunto fundamental de soluções para o sistema homogêneo* $(3.3.4)$ *em um intervalo I.*

Demonstração. Seja t_0 um ponto qualquer de I e seja $x_1, x_2, \cdots, x_n$ quaisquer n vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$. Pelo Corolário $(3.3.1)$, o sistema $(3.3.4)$ possuem n soluções $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$, cada uma definida no intervalo I e satisfazendo a condição inicial

$$\phi_j(t_0) = x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3.10}$$

Mostraremos que as soluções $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ são linearmente independentes em I. Para isso, suponha que não são. Então existem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nem todos nulos, tais que

$$a_1\phi_1(t) + a_2\phi_2(t) + \cdots + a_n\phi_n(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Em particular, pondo $t = t_0$, e usando as condições iniciais $(3.3.10)$, temos

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Porém, isto é impossível pois $x_1, x_2, \ldots, x_n$ foram escolhidos para serem linearmente independentes.

■

Teorema 3.3.4. *Se $A(t)$ é contínua em algum intervalo I, então o conjunto de todas as soluções do sistema* $(3.3.4)$ *forma um espaço vetorial de dimensão n sobre o conjunto dos números reais.*

Demonstração. Seja t_0 um ponto qualquer de I e seja $x_1, x_2, \cdots, x_n$ quaisquer n vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$. Pelo Teorema $(3.3.3)$ existe um conjunto fundamental de soluções $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ satisfazendo

$$\phi_j(t_0) = x_j, \;\; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Seja ψ uma solução qualquer do sistema $(3.3.4)$ em I. Dessa forma existem únicas constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tais que

$$\psi(t_0) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \delta.$$

Agora considere

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots + c_n\phi_n(t).$$

Claramente, $\phi(t)$ é uma solução de $(3.3.4)$ em I. Além disso,

$$\phi(t_0) = c_1\phi_1(t_0) + c_2\phi_2(t_0) + \cdots + c_n\phi_n(0) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \psi(t_0).$$

Portanto, $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são ambas soluções de $(3.3.4)$ em I com $\phi(t_0) = \psi(t_0) = \delta$. Portanto, pelo Corolário $(3.3.1)$, $\phi(t) = \psi(t), \forall t \in I$.

■

Corolário 3.3.2 (Solução geral de sistemas homogêneos)**.** *Considere $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ como sendo um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo* $(3.3.4)$ *em um intervalo I. Assim, a solução geral do sistema no intervalo é*

$$\psi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + ... + c_n\phi_n,$$

onde os $c_i, i = 1, 2, \ldots, n$, são constantes arbitrárias.

Demonstração. É uma consequência imediata do Teorema anterior.

■

Exemplo 3.3.3. A partir do exemplo anterior, sabemos que $X_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$ e $X_2 = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$

são soluções linearmente independentes do sistema $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X$ em $(-\infty, \infty)$. Portanto, X_1 e X_2 formam um conjunto fundamental de soluções no intervalo. A solução geral do sistema no intervalo é então

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

Definição 3.3.8. *Para sistemas não homogêneos, uma solução particular X_p em um intervalo I é qualquer vetor, livre de parâmetros arbitrários, cujas entradas são funções que satisfazem o sistema* (3.3.3).

Teorema 3.3.5 (Solução geral de sistemas não homogêneos)**.** *Considerando x_p uma solução dada do sistema não homogêneo* (3.3.3) *em um intervalo I, e sendo $x_c = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + ... + c_n\phi_n$ a solução geral no mesmo intervalo do sistema homogêneo associado* (3.3.4)*, temos que a solução geral do sistema não homogêneo no intervalo é*

$$x = x_c + x_p. \tag{3.3.11}$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} x' &= x'_c + x'_p \\ &= Ax_c + Ax_p + f(t) \\ &= A(x_c + x_p) + f(t) \\ &= Ax + f(t). \end{aligned}$$

Logo, toda função da forma (3.3.11) é solução do sistema linear não homogêneo. Suponha agora que ψ é uma solução qualquer do sistema não homogêneo (3.3.3). Então, desde que

$$(\psi - x_p)' = \psi' - x'_p = A\psi + f(t) - Ax'_p - f(t) = A(\psi - x'_P),$$

segue que $\psi - x_p$ é solução do sistema linear homogêneo (3.3.4). Dessa forma, existem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tais que $\psi - x_p = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \cdots + c_n\phi_n = x_c$. Segue daí que $\psi = x_c + x_p$.

■

Observação 3.3.2. A solução geral x_c do sistema homogêneo é chamada de *função complementar* do sistema não homogêneo.

CAPÍTULO 4

Aplicações

4.1 Solução de Sistemas de Equações Diferenciais por Diagonalização

4.1.1 Sistemas Lineares Homogêneos

Nessa seção, consideraremos um método alternativo para resolver um sistema homogêneo de equações diferenciais de primeira ordem lineares. Esse método pode ser aplicado a um sistema $X' = AX$ sempre que a matriz dos coeficientes A for diagonalizável.

Definição 4.1.1. *Um sistema de equações diferenciais linear homogêneo $X' = AX$,*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

no qual cada x_i' é escrito como uma combinação linear de $x_1, x_2, ..., x_n$ é dito ser acoplado.

Observação 4.1.1. Se a matriz dos coeficientes A for diagonalizável, então o sistema pode ser desacoplado de modo que cada x_i' possa ser expresso somente em termos de x_i.

Em um dos exemplos apresentados anteriormente, vimos que a solução geral do sistema homogêneo $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X$ é $X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$. Como ambos os vetores da solução têm a forma $X_i = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_i t}$, $i = 1, 2$, onde k_1, k_2, λ_1 e λ_2 são constantes, somos solicitados a dizer se podemos sempre obter uma solução da forma

$$X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = Ke^{\lambda t}$$

para o sistema de primeira ordem linear homogêneo $X' = AX$, onde a matriz de coeficientes A é uma matriz de constantes $n \times n$.

Se $X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = Ke^{\lambda t}$ for um vetor solução do sistema , então $X' = K\lambda e^{\lambda t}$ de modo que $X' = AX$ se escreve $K\lambda e^{\lambda t} = AKe^{\lambda t}$. Após cancelar $e^{\lambda t}$ e rearranjando, obtemos $AK - \lambda K = 0$. Como $K = IK$, a última equação é o mesmo que $(A - \lambda I)K = 0$. Para obter uma solução não trivial X de $X' = AX$, temos que calcular um vetor não trivial K que satisfaça $(A - \lambda I)K = 0$. Porém, para que $(A - \lambda I)K = 0$ tenha outras soluções que não apenas a solução trivial, temos que ter

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Essa equação polinomial em λ é chamada de *equação característica* da matriz A; as soluções dessa equação são os autovalores de A. Uma solução $K \neq 0$ de $(A - \lambda I)K = 0$ que corresponde a um autovalor λ é denominada um *autovetor* de A. Uma solução do sistema homogêneo $X' = AX$ é então $X = Ke^{\lambda t}$.

Quando a matriz A tem autovalores reais e distintos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, então um conjunto de n autovetores linearmente independentes $K_1, K_2, ..., K_n$ pode sempre ser obtido e

$$X_1 = K_1 e^{\lambda_1 t}, X_2 = K_2 e^{\lambda_2 t}, ..., X_n = K_n e^{\lambda_n t}$$

é um conjunto fundamental de soluções de $X' = AX$ em $(-\infty, \infty)$. Sendo assim a solução geral de $X' = AX$ no intervalo $(-\infty, \infty)$ é definida como

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n K_n e^{\lambda_n t}.$$

Se a matriz A tiver n autovetores linearmente independentes, então sabemos que podemos obter uma matriz P tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal. Se fizermos a substituição $X = PY$ no sistema $X' = AX$, então $PY' = APY$ ou $Y' = P^{-1}APY$ ou $Y' = DY$.

A equação $Y' = DY$ é igual a

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Como D é diagonal, a inspeção de $Y' = DY$ revela que esse novo sistema é desacoplado; cada equação diferencial no sistema é da forma $y_i' = \lambda_i y_i, i = 1, 2, ..., n$. A solução de cada uma dessas equações lineares é $y_i = c_i e^{\lambda_i t}, i = 1, 2, ..., n$. Logo, a solução geral de $Y' = DY$ pode ser escrita como o vetor coluna

$$Y = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Como agora conhecemos Y e como a matriz P pode ser construída a partir dos autovetores de A, a solução geral do sistema original $X' = AX$ é obtida a partir de $X = PY$.

Exemplo 4.1.1. Resolva $X' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix} X$ por diagonalização.

Solução. Inicialmente calculamos os autovalores e os autovetores correspondentes da matriz dos coeficientes. A partir de

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+2 & 1 & -8 \\ 0 & \lambda+3 & -8 \\ 0 & 4 & \lambda-9 \end{pmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-5),$$

obtemos $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 5$. Como os autovalores são distintos, os autovetores são linearmente independentes. Resolvendo $(\lambda_i I - A)K = 0$ para $i = 1, 2, 3$, temos, respectivamente,

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, uma matriz que diagonaliza a matriz de coeficientes é

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

As entradas na diagonal principal de D são os autovalores de A que correspondem à ordem na qual os autovetores aparecem em P:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Conforme vimos anteriormente, a substituição $X = PY$ em $X' = AX$ resulta no sistema desacoplado $Y' = DY$. A solução geral desse último sistema é imediata:

$$Y = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 e^{t} \\ c_3 e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Logo, a solução do sistema dado é

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 e^{t} \\ c_3 e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^{t} + c_3 e^{5t} \\ 2c_2 e^{t} + c_3 e^{5t} \\ c_2 e^{t} + c_3 e^{5t} \end{pmatrix}.$$

A solução por diagonalização sempre funcionará desde que possamos determinar n autovetores linearmente independentes de uma matriz A $n \times n$; o método falha quando A tem autovalores repetidos e n autovetores linearmente independentes não podem ser obtidos. É claro que nessa última situação A não é diagonalizável.

No entanto, caso a matriz dos coeficientes tenha autovalores repetidos, ainda assim, podemos solucionar o sistema utilizando conceitos apresentados anteriormente, como veremos no exemplo seguinte.

Exemplo 4.1.2. Resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_2(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) + 3x_3(t) \end{cases}$$

satisfazendo a condição inicial $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ e $x_3(0) = 1$.

Solução. Note que o sistema pode ser escrito da forma

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} X.$$

Inicialmente calculamos os autovalores e os autovetores correspondentes da matriz dos coeficientes. A partir de

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4).$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 2$ (multiplicidade 2) e $\lambda_2 = 4$ (simples). Sendo assim, o autoespaço associado a $\lambda_1 = 2$ é $\{(x, y, -x); x, y \in \mathbb{R}\}$ de dimensão 2, do qual $\{(1, 0, -1); (0, 1, 0)\}$ é base e o autoespaço associado a $\lambda_2 = 4$ e $\{(x, 0, x); x \in \mathbb{R}\}$, de dimensão 1, cuja base mais natural é $(1, 0, 1)$. Assim, a matriz A é diagonalizável e, se

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, de $X(t) = c_1k_1e^{2t} + c_2k_2e^{2t} + c_3k_3e^{4t}$, onde k_1, k_2 e k_3 são os vetores das bases dos autoespaços, segue que

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1e^{2t} + c_3e^{4t} \\ x_2(t) = c_2e^{2t} \\ x_3(t) = -c_1e^{2t} + c_3e^{4t} \end{cases}$$

A fim de que $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ e $x_3(0) = 1$, deveremos ter

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

cuja solução é $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ e $c_3 = 1$. Logo, a solução que satisfaz a condição inicial dada é $x_1(t) = e^{4t}, x_2(t) = 0$ e $x_3(t) = e^{4t}$.

4.1.2 Sistemas Lineares Não Homogêneos

Seja o sistema não homogêneo

$$X' = AX + f(t), \tag{4.1.1}$$

onde A é uma matriz e $f(t)$ um vetor. Pelo Teorema $(3.3.5)$ a solução geral é dada por

$$X = X_c + X_p,$$

onde X_c é a solução geral do sistema homogêneo e X_p uma solução particular do sistema não homogêneo. Utilizaremos o método de diagonalização de matrizes para achar uma solução particular.

Suponhamos que a matriz A seja diagonalizável, isto é, que existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = D$ com D diagonal. Fazendo a mudança de variáveis $X = PY$ e substituindo na equação $(4.1.1)$, temos

$$PY' = APY + f(t) \Rightarrow Y' = P^{-1}APY + P^{-1}f(t) \Rightarrow Y' = DY + P^{-1}f(t).$$

Dessa forma, $Y' = DY + g(t)$, onde $g(t) = P^{-1}f(t)$.

Com a diagonalização obtemos n equações lineares de primeira ordem da forma

$$y_i' = \lambda_i y_i + g_i(t) \tag{4.1.2}$$

com $i = 1, 2, \ldots, n$. Pela Proposição $(3.2.1)$, $y_i(t) = e^{\lambda_i t}\displaystyle\int g_i(t)e^{-\lambda_i t}dt + c_i e^{\lambda_i t}$ é a solução geral de cada equação em $(4.1.2)$. Finalmente a solução da equação $(4.1.1)$ é obtida através da equação $X = PY$, onde

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Exemplo 4.1.3. Resolva $X' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ por diagonalização.

Solução. Os autovalores e autovetores correspondentes da matriz de coeficientes são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, $K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $K_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Assim, obtemos $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Aplicando-se a substituição $X = PY$ e

$$P^{-1}f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^t \\ \frac{7}{5}e^t \end{pmatrix}$$

o sistema desacoplado é

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^t \\ \frac{7}{5}e^t \end{pmatrix}.$$

As soluções das duas equações diferenciais $y_1' = \frac{1}{5}e^t$ e $y_2' = 5y_2 + \frac{7}{5}e^t$ são, respectivamente, $y_1 = \frac{1}{5}e^t + c_1$ e $y_2 = \frac{-7}{20}e^t + c_2e^{5t}$. Portanto, a solução do sistema original é

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^t + c_1 \\ \frac{-7}{20}e^t + c_2e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}e^t + c_1 + 2c_2e^{5t} \\ \frac{-3}{4}e^t - 2c_1 + c_2e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Escrevendo de maneira usual utilizando-se vetores colunas, temos

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} e^t.$$

4.1.3 Sistemas de Equações Diferenciais como Modelos Matemáticos

É natural tentar descrever fenômenos reais através de expressões matemáticas, esses fenômenos reais podem ser da Física, Química, Biologia, Economia, entre outros. Tais descrições são chamadas de modelos matemáticos.

Problema 1. Considere inicialmente três tanques A, B e C cada um com 100 galões de salmoura. Os líquidos bem misturados são bombeados entre os tanques conforme a figura seguinte. Sejam $x_1(t), x_2(t)$ e $x_3(t)$ a quantidade de sal (medida em libras) nos tanques A, B e C

Figura 4.1: Tanques com galões de salmoura

no instante t, respectivamente. A taxa a qual $x_1(t), x_2(t)$ e $x_3(t)$ varia é dada por,

$$\frac{d(x_i)}{dt} = T_e - T_s$$

para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

A taxa de entrada de sal T_e (em libras por min) é igual a taxa de entrada de salmoura de sal (em galão por min) multiplicado pela concentração de sal no fluxo de entrada (em libras por galão).

Já a taxa de saída de sal T_s (em libras por min) é igual a taxa de saída de salmoura (em galão por min) multiplicado pela concentração de sal no fluxo de saída (em libras por galão).

Dos galões A, B e C obtemos as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dx_1}{dt} = (4\ gal/min)(0\ lb/gal) + (2\ gal/min)(\frac{x_2}{100}\ lb/gal) - (6\ gal/min)(\frac{x_1}{100}\ lb/gal)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{50}x_2 - \frac{3}{50}x_1; \tag{4.1.3}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (6\ gal/min)(\frac{x_1}{100}\ lb/gal) + (1\ gal/min)(\frac{x_3}{100}\ lb/gal) - (7\ gal/min)(\frac{x_2}{100}\ lb/gal)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{3}{50}x_1 + \frac{1}{100}x_3 - \frac{7}{100}x_2; \tag{4.1.4}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = (5\ gal/min)(\frac{x_2}{100}\ lb/gal) - (1\ gal/min)(\frac{x_3}{100}\ lb/gal) - (4\ gal/min)(\frac{x_3}{100}\ lb/gal)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{20}x_2 - \frac{1}{20}x_3. \tag{4.1.5}$$

Das equações anteriores temos,

$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{50}x_2 - \frac{3}{50}x_1 \\ x_2' = \frac{3}{50}x_1 + \frac{1}{100}x_3 - \frac{7}{100}x_2 \\ x_3' = \frac{1}{20}x_2 - \frac{1}{20}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{50} & \frac{1}{50} & 0 \\ \frac{3}{50} & \frac{-7}{100} & \frac{1}{100} \\ 0 & \frac{1}{20} & \frac{-1}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Para achar as soluções da equação $x' = Ax$ devemos primeiramente encontrar os autovalores e autovetores. Sendo assim, encontramos $\lambda_1 = \frac{-1}{10}, \lambda_2 = \frac{-1}{20}$ e $\lambda_3 = \frac{-1}{50}$ e, também, os autovetores associados

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{48}{100} \\ \frac{-11}{10} \\ 1 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-18}{100} \\ \frac{-6}{10} \\ 1 \end{pmatrix}; v_3 = \begin{pmatrix} \frac{29}{100} \\ \frac{57}{100} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Segue,

$$x_1 = v_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} \frac{48}{100} \\ \frac{-11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{-1}{10}t};$$

$$x_2 = v_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} \frac{-18}{100} \\ \frac{-6}{10} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{-1}{20}t};$$

$$x_3 = v_3 e^{\lambda_3 t} = \begin{pmatrix} \frac{29}{100} \\ \frac{57}{100} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{-1}{50}t}.$$

Portanto, a solução geral é dada por $x(t) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$.

Problema 2. Considere o circuito mostrado na figura seguinte contendo um indutor (L), um resistor (R) e um capacitor (C).

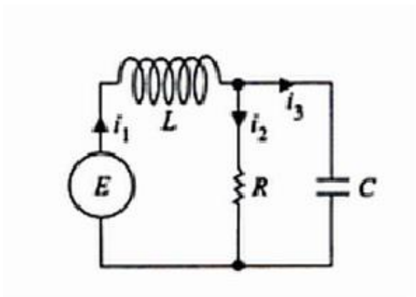

Figura 4.2: Circuito elétrico

Considerando a malha da esquerda, temos pela segunda lei de Kirchhoff que a voltagem aplicada $E(t)$ em uma malha fechada deve ser igual a soma das quedas de voltagem, sendo assim obtemos a seguinte equação diferencial

$$E(t) = L\frac{di_1}{dt} + i_2R.$$

Agora considere a malha da esquerda, temos a equação

$$\frac{1}{C}q_3 - i_2R = 0 \Rightarrow q_3 - CRi_2 = 0$$

e derivando em função de t, temos

$$\frac{dq_3}{dt} - CR\frac{di_2}{dt} = 0.$$

Como $\frac{dq}{dt} = i$ e $i_1 = i_2 + i_3$ segue que:

$$i_3 - CR\frac{di_2}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$i_1 - i_2 - CR\frac{di_2}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$CR\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0.$$

Considere $E(t) = 0$ e obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais.

$$\begin{cases} Li_1' + i_2R = 0 \\ CRi_2' + i_2 - i_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} i_1' = -\frac{R}{L}i_2 \\ i_2' = \frac{1}{CR}i_1 - \frac{1}{CR}i_2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{R}{L} \\ \frac{1}{CR} & -\frac{1}{CR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

ou ainda $i' = Ai$, onde $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{R}{L} \\ \frac{1}{CR} & -\frac{1}{CR} \end{pmatrix}$.

Calculando os autovalores λ_1 e λ_2 da matriz A e os autovetores associados v_1 e v_2 podemos obter $i_1 = v_1e^{\lambda_1 t}$ e $i_2 = v_2e^{\lambda_2 t}$ e, consequentemente, a solução geral do sistema dada por $i(t) = c_1 i_1 + c_2 i_2$.

4.2 Identificação de Cônicas

Uma equação quadrática nas variáveis x e y tem a forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

onde a, b, c, d, e e f são números reais, com a, b e c não simultaneamente nulos. Esta equação representa uma *(seção) cônica*, por poder ser obtida da interseção de um cone circular com um plano. As cônicas mais importantes são elipses, hipérboles e parábolas, que são chamadas de *cônicas não degeneradas*. As outras que incluem um único ponto, um par de retas, são chamadas *cônicas degeneradas*.

Nesta seção, não temos o objetivo de introduzir cônicas, apenas veremos como a diagonalização de matrizes simétricas pode ser usada na identificação das cônicas cujas equações não estão na forma padrão.

Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.2.1. Considere a cônica C cuja equação é

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0.$$

Esta equação pode ser escrita como,

$$X^t AX - 36 = 0,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

e

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é dado por

$$P_A(t) = \det(tI_2 - A) = \det \begin{bmatrix} t-5 & 2 \\ 2 & t-8 \end{bmatrix} = t^2 - 13t + 36.$$

Logo, os autovalores de A são $t_1 = 4$ e $t_2 = 9$. Os autovetores associados a $t_1 = 4$ são as soluções não-nulas do sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2y,$$

cuja solução é $V_1 = \{(2\gamma, \gamma); \gamma \in \mathbb{R}\}$. Assim $v_1 = (2, 1)$ é uma base para V_1, pois gera V_1 é L.I. e $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ é uma base ortogonal para V_1. Os autovetores associados a $t_2 = 9$ são as soluções não-nulas do sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = -2x,$$

cuja solução é $V_2 = \{(-\gamma, 2\gamma); \gamma \in \mathbb{R}\}$. Assim $v_2 = (-1, 2)$ é uma base para V_2, pois gera V_2 é L.I. e $w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ é uma base ortogonal para V_2. Portanto,

$$D = P^t A P$$

onde,

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

e

$$P = [w_1, w_2] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Fazendo a mudança de variáveis $X = PX'$, onde $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ na equação $X^t A X - 36 = 0$, obtemos

$$(PX')^t A P X' - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$(X')^t (P^t A P) X' - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$(X')^t DX' - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$4(x')^2 + 9(y')^2 - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = 1$$

que é a equação de uma elipse cujo esboço é mostrado na figura seguinte.

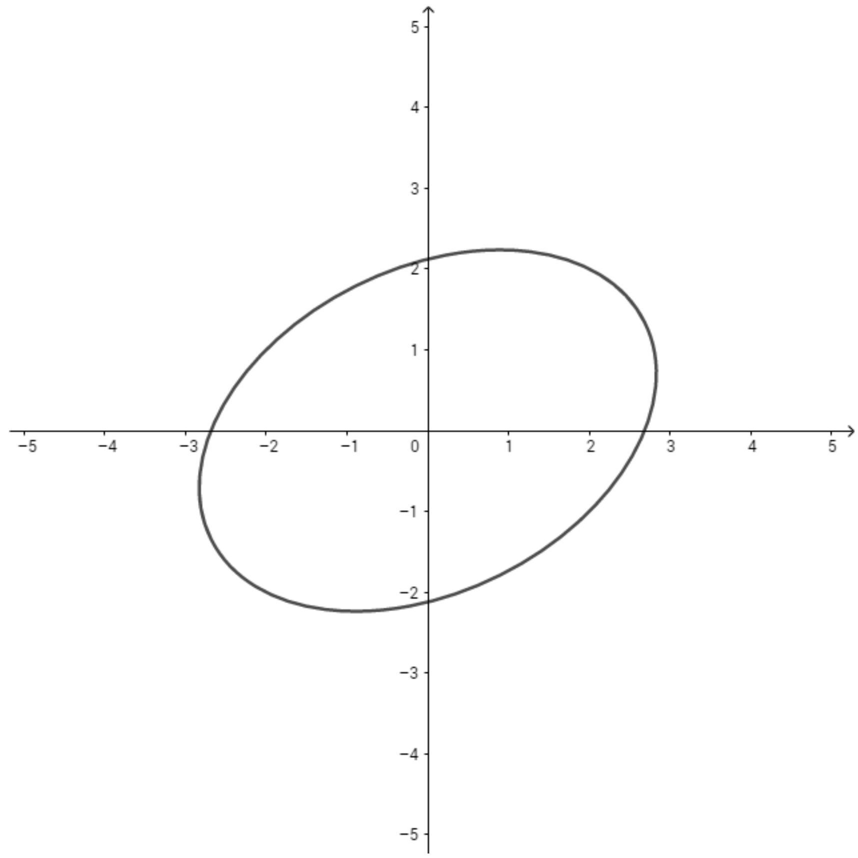

Figura 4.3: Elipse

Generalizaremos, a seguir, o procedimento utilizado no exemplo anterior.

Considere a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, sendo $b \neq 0$ e a e c não simultaneamente nulos. Em primeiro lugar, representando, como já é usual, vetores (x, y) do plano na forma de matriz coluna

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

notamos que qualquer equação do segundo grau $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ pode ser reescrita na forma matricial $X^tAX + BX + f = 0$ para alguma matriz simétrica A. De fato, para isso, note que

$$ax^2 + bxy + cy^2 = ax^2 + \frac{b}{2}xy + \frac{b}{2}xy + cy^2 \Rightarrow$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 = x(ax + \frac{b}{2}y) + y(cy + \frac{b}{2}x) \Rightarrow$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + \frac{b}{2}y \\ cy + \frac{b}{2}x \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

de modo que a equação do segundo grau fica representada em forma matricial por

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0.$$

Denotando, $A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$, temos a equação matricial $X^tAX + BX + f = 0$. A matriz A é uma matriz simétrica, logo pode ser diagonalizada através de uma matriz ortogonal P, ou seja,

$$D = P^tAP,$$

onde D é a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix},$$

t_1 e t_2 sendo os autovalores de A. Fazendo a mudança de coordenadas $X' = P^tX$, de modo que $X = PX'$, obtemos a equação matricial correspondente no novo sistema de coordenadas:

$$X^tAX + BX + f = 0 \Rightarrow$$

$$(PX')^tAPX' + BPX' = -f \Rightarrow$$

$$(X')^t(P^tAP)X' + BPX' = -f \Rightarrow$$

$$(X')^t D X' + (BP)X' = -f.$$

Chamando $a' = t_1$, $b' = t_2$ e $BP = \begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix}$, segue que a equação matricial $(X')^t DX' + (BP)X' = -f$ corresponde a equação algébrica

$$a'(x')^2 + b'(y')^2 + d'x' + e'y' = -f.$$

Portanto, existe um sistema de coordenadas (x', y'), onde a equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ tem a forma

$$a'(x')^2 + b'(y')^2 + d'x' + e'y' = -f,$$

onde $a' = t_1, b' = t_2$ são autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Mais ainda, $X = PX'$, onde $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e P é uma matriz ortogonal $(P^{-1} = P^t)$.

Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 4.2.2. Considere a equação

$$4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0,$$

cuja forma matricial é

$$X^t AX + BX = 0,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} -15 & -6 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de A são $t_1 = 0$ e $t_2 = 29$. Os autovetores associados a $t_1 = 0$ são as soluções não-nulas do sistema

$$\begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 10 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \frac{2}{5}x,$$

cuja solução é $V_1 = \{(\gamma, \frac{2}{5}\gamma); \gamma \in \mathbb{R}\}$. Assim $v_1 = (1, \frac{2}{5})$ é uma base para V_1, pois gera V_1 é L.I. e $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}})$ é uma base ortogonal para V_1. Os autovetores associados a $t_2 = 29$ são as soluções não-nulas do sistema

$$\begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2y = -5x,$$

cuja solução é $V_2 = \{(-\gamma, \frac{5}{2}\gamma); \gamma \in \mathbb{R}\}$. Assim $v_2 = (-1, \frac{5}{2})$ é uma base para V_2, pois gera V_2 é L.I. e $w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (\frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}})$ é uma base ortogonal para V_2. Portanto, os autovetores ortonormais correspondentes são, respectivamente

$$\left(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}} \right), \left(\frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right).$$

Logo, uma matriz ortogonal que diagonaliza A é

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{-2}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \end{bmatrix}.$$

Substituindo $X' = P^t X$ e $X = PX'$, temos que

$$X^t A X + BX = 0 \Rightarrow$$

$$(PX')^t APX' + BPX' = 0 \Rightarrow$$

$$(X')^t (P^t AP) X' + BPX' = 0 \Rightarrow$$

$$(X')^t DX' + (BP)X' = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{-2}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 0$$

e como

$$\begin{bmatrix} -15 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{-2}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\sqrt{29} & 0 \end{bmatrix},$$

temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 29y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3\sqrt{29} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 0,$$

o que implica em

$$29(y')^2 - 3\sqrt{29}x' = 0,$$

ou

$$x' = \frac{\sqrt{29}}{3}(y')^2,$$

uma parábola, portanto. Um esboço do gráfico desta parábola é feito a seguir.

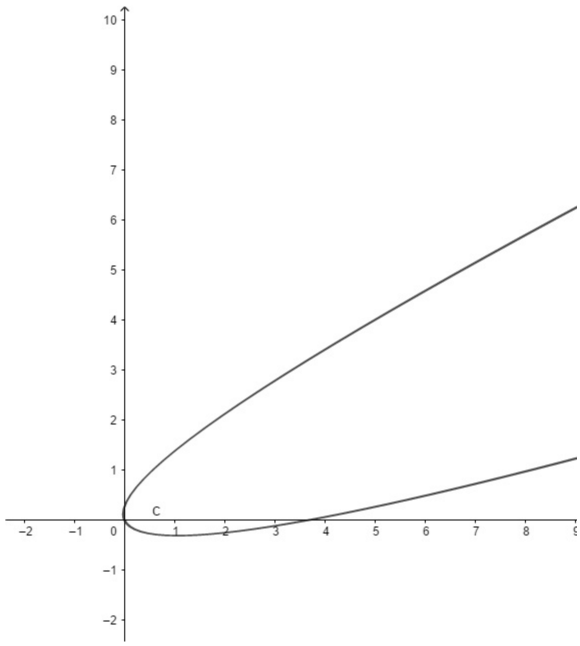

Figura 4.4: Parábola

Referências

[1] Boldrini, José Luiz. Figueiredo, Vera Lúcia. Wetzler, Henry G. Álgebra Linear. São Paulo, Editora Harbra.

[2] Boyce, William E. Diprima, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de valores de contorno. Rio de Janeiro, Editora LTC, 2010.

[3] Brauer, Fred. Nohel, John A. The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations An Introduction. New York, Dover Publications, 1969.

[4] Figueiredo, Djairo Guedes. Neves, Aloisio Freiria. Equações Diferenciais Aplicadas. Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

[5] Hefez, Abramo. Fernandez, Cecília de Souza. Introdução à Álgebra Linear (Coleção PROFMAT). Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[6] Hoffman, K. Kunze, R. Álgebra Linear. 2ª Edição. Editora LTC, Rio de Janeiro, 1979.

[7] Lang, Serge. Introduction to Linear Algebra. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1986.

[8] Lima, Elon Lages. Álgebra Linear. Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

[9] Lima, Elon Lages. Espaços métricos. Rio de Janeiro, IMPA, 2005.

[10] Steinbruch, Alfredo. Winterle, Paulo. Álgebra Linear. São Paulo, Editora Mc Grew-Hill, 1987.

[11] Zill, Dennis G. Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. São Paulo, Editora Thomson Learning, 2003.