UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Grafos, coloração, polinômios cromáticos e jogos no processo de ensino aprendizagem da enumeração e da contagem

Lenilson dos Reis Silva

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Lenilson dos Reis Silva

Grafos, coloração, polinômios cromáticos e jogos no processo de ensino aprendizagem da enumeração e da contagem

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Geraldine Góes Bosco

USP – São Carlos
Maio de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S586g Silva, Lenilson dos Reis
Grafos, coloração, polinômios cromáticos e jogos no processo de ensino aprendizagem da enumeração e da contagem / Lenilson dos Reis Silva; orientadora Geraldine Góes Bosco. -- São Carlos, 2018.
104 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Grafos. 2. Coloração. 3. Polinômio cromático. 4. Enumeração. 5. Jogos. I. Bosco, Geraldine Góes, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Lenilson dos Reis Silva

Graphs, coloration, chromatic polynomials and games in the enumeration and counting teaching learning process

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Geraldine Góes Bosco

USP – São Carlos
May 2018

Dedico este trabalho aos meus pais Sebastião e Maria Cecília, e a minha noiva Ana Caroline.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus e à Nossa Senhora, por terem me dado forças e sabedoria para poder realizar meus estudos e concluir este trabalho. E também agradeço pela graça alcançada de conquistar este mestrado o qual desde criança sempre sonhei.

Agradeço imensamente aos meus amados pais Maria Cecília e Sebastião, por terem me ensinado que os nossos sonhos podem ser realizados através do amor, da fé e da perseverança.

À minha noiva, Carol – presente de Deus em minha vida - que mesmo de longe esteve sempre presente me incentivando e apoiando, pelo seu companheirismo e amor. Pelas palavras de apoio quando eu me sentia desanimado, que soube entender minha ausência em tantos momentos, pelo carinho, amor e por acreditar em mim.

Aos meus irmãos Aparecido, Luiz, Denilson e Ferdinando por todo apoio dispensado.

À professora Dra. Geraldine Góes Bosco, pela paciência, por acreditar em mim e por sua disponibilidade para me orientar.

A todos os professores do PROFMAT da USP – Ribeirão Preto, que contribuíram para o enriquecimento dos meus conhecimentos, em especial a professora Dra. Katia Andreia Gonçalves de Azevedo.

A todos os colegas de mestrado pelo ambiente de estudo, pelos momentos de alegria, amizade, e o companheirismo, em especial os amigos Diego, Juliana e Lívia.

Aos meus alunos da Escola Estadual Dalva Lellis Garcia Prado que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática – SBM – pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pelo incentivo financeiro.

A todos, o meu muito obrigado!

"A vida é uma pergunta,
o amor é a resposta."
(Padre Zezinho)

RESUMO

SILVA, L.R. **Grafos, coloração, polinômios cromáticos e jogos no processo de ensino aprendizagem da enumeração e da contagem**. 2018. 104 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

O objetivo deste trabalho é usar jogos e tópicos de Teoria dos Grafos como ferramenta para desenvolver a habilidade da enumeração, que está por trás dos cálculos combinatórios ensinados no Ensino Fundamental e Médio. Mais especificamente, neste trabalho são introduzidos os métodos mais comuns de contagem através de situacões-problema e jogos, como o Nim e o Dominó, que podem ser melhor explorados ao serem descritos atráves dos elementos de um grafo. Com essa motivacão são apresentados conceitos básicos da Teoria dos Grafos e tópicos de coloração de grafos, como o número cromático e os polinômios cromáticos. Esses tópicos fornecem exemplos ricos e motivacionais ao processo de ensino e aprendizagem dos raciocínios combinatórios. Por outro lado, os tópicos abordados contém em si a riqueza e a complexidade da Matemática, como é o caso do Teorema das 4 Cores, demonstrado com o uso da enumeração de todos os casos possíveis. Nesse contexto são apresentados os conceitos de coloração de vértices de grafos dando destaque principal para problemas combinatórios que envolvem o número cromático e o polinômio cromático de um grafo. Complementando o trabalho, são propostas atividades para serem desenvolvidas em sala de aula.

Palavras-chave: Enumeração, Grafos, Coloração, Polinômio Cromático, Jogos.

ABSTRACT

SILVA, L.R. **Graphs, coloration, chromatic polynomials and games in the enumeration and counting teaching learning process**. 2018. 104 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

The purpose of this work is to use games and topics of Graph Theory as a tool to develop the ability of enumeration, which is behind combinatorial calculations taught in Elementary and High School. More specifically, in this work, the most common methods of counting through problem situations and games, such as Nim and Domino, which can be better explored when described through the elements of a graph. With this motivation are presented basic concepts of the Theory of Graphs and graph coloring topics such as chromatic number and chromatic polynomials. Those topics provide rich and motivational examples to the process of teaching and learning combinatorial reasoning. On the other hand, the topics approach contains in itself the richness and complexity of Mathematics, as is the case with the 4-Color Theorem, demonstrated with the use of the enumeration of all possible cases. In this context are presented concepts of coloring of vertices of graphs giving main highlight to combinatorial problems which involve the chromatic number and the chromatic polynomial of a graph. Complementing the work, activities are proposed to be developed in the classroom

Keywords: Enumeration, Graphs, Coloring, Chromatic Polynomial, Games.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Sobre a Base Nacional Comum Curricular

Há algumas décadas vem aumentando a preocupação dos órgãos responsáveis pela educação no Brasil a respeito de como ensinar e avaliar usando os conceitos atuais de competências e habilidades. O intuito de se ensinar por competências e habilidades é o de formar alunos capazes de aprender a aprender, de resolver problemas e de ter autonomia para a tomada de decisões. Tendo em vista esta preocupação, o Ministério da Educação (MEC) vem debatendo, de maneira sistemática, com os diferentes segmentos do campo educacional e com a sociedade brasileira uma reformulação do Ensino Básico brasileiro chamado de Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

> A (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Aplica-se à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e indica conhecimentos e competências que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade. Orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN), a BNCC soma-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva (BRASIL, 2017a).

As diretrizes desse documento vão modificar o Ensino Fundamental, e posteriormente o Ensino Médio. Não se trata de proposta de um currículo novo, mas tem como objetivo nortear o que deverá ser ensinado por competências e habilidades nas escolas brasileiras, respeitando o Projeto Político Pedagógico de cada escola e o contexto social e cultural em que cada uma está inserida.

> No âmbito da BNCC, a noção de competência é utilizada no sentido da mobilização e aplicação dos conhecimentos escolares, entendidos de forma ampla (conceitos, procedimentos, valores e atitudes). Assim, ser competente significa ser capaz de, ao se defrontar com um problema, ativar e utilizar o conhecimento construído (BRASIL, 2017a) .

A partir desse entendimento a BNCC expressa as habilidades como sendo: "As aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares" (BRASIL, 2017a).

Por conseguinte, habilidades estão relacionadas ao saber fazer algo específico como, somar e multiplicar. As habilidades e competências serão construídas pelo aluno à medida que novos conhecimentos vão sendo agregados aos saberes já consolidados através de um fluxo contínuo de aprendizagem.

Um relato do ensino de combinatória no Brasil

A experiência do autor deste trabalho e de seus colegas de profissão mostra que a análise combinatória é uma área da matemática considerada pela maioria dos alunos, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, como uma das mais difíceis de ser estudada. Em parte essa dificuldade se deve ao fato da maneira como o assunto é apresentado aos alunos, tanto pelos livros didáticos, como pelos professores, que na maioria das vezes acabam resumindo a Análise Combinatória simplesmente em um capítulo de aplicações de fórmulas. Isso torna os alunos dependentes de fórmulas impossibilitando o aprendizado de outras estratégias de contagem. Outro fator a ser considerado é que o ensino de combinatória atual está inserido num modelo de educação em que os saberes socialmente construídos são simplesmente retransmitidos pelo professor ao aluno. Esse modelo tradicional de educação não motiva o aluno a exercer o seu papel de protagonista da sua aprendizagem.

Relação entre combinatória e grafos

Na matemática percebe-se melhores resultados na aprendizagem quando se introduz nas práticas curriculares o lúdico e os aspectos concretos do cotidiano, ou seja, oferece-se aos alunos situações-problema pelos quais eles se interessam. Dessa forma os alunos se sentem motivados a buscarem novas estratégias de resolução. De maneira particular, no ensino de análise combinatória o interesse pode ser ativado através de diversas situações-problema que usem estratégias de resoluções como desenhos, diagramas ou tabelas. Essa abordagem vai ao encontro da formulação que o conceito de grafos proporciona.

> No ensino médio, o termo "combinatória" está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola –

> são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Könisberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: “Partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez?” Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo (BRASIL, 2006) .

Assim, (BRIA, 1998) , nos lembra “A extrema facilidade com que inúmeras situações do nosso cotidiano podem ser tratadas através dos grafos de forma bastante acessível aos estudantes do Ensino Básico."Em combinatória muitos problemas se tornam mais fáceis de serem respondidos quando descritos através dos elementos da teoria dos grafos.

Jogos

De certa forma, no passado, os jogos serviram para motivar os matemáticos para o desenvolvimento de teorias que hoje tem elevada importância em varias áreas, tais como física, engenharia, estatística, genética entre outras. Por outro lado, é inegável a importância dos jogos como instrumento pedagógicos em sala de aula.

De maneira geral os jogos são atividades desafiadoras e divertidas e dificilmente se encontrarão pessoas que não gostem de algum tipo de jogo. E se o jogo é uma atividade prazerosa para muitos adultos quanto mais o será para crianças e jovens que adoram uma competição.

Nesse sentido os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s) nos dizem que o recurso dos jogos pode e deve exercer um papel interessante no ensino da matemática:

> Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes - enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório - necessárias para aprendizagem da Matemática (BRASIL, 1998) .

Na inserção de jogos no ensino da matemática não se quer usar os jogos pelos jogos de forma apenas lúdica, mas sim de dar uma significação matemática para a prática.

Neste trabalho, destaca-se a importância dos jogos no ensino da combinatória para se praticar a enumeração e contagem.

Objetivos do Trabalho

Partindo das reflexões expostas, este trabalho espera contribuir para o desenvolvimento das habilidades necessárias para o aprendizado dos conceitos da área de combinatória. Mais especificamente, usar Jogos e conceitos de Teoria dos Grafos para desenvolver as habilidades específicas da enumeração e da contagem.

Organização do Trabalho

O trabalho está organizado em seis capítulos. O primeiro capítulo apresenta a introdução do trabalho. O segundo capítulo apresenta os principais conceitos da combinatória na Educação Básica: princípios aditivo, multiplicativo, e cálculos combinatórios para agrupamentos ordenados e não ordenados, com ou sem repetiçao de elementos. O terceiro capítulo, traz uma abordagem de conceitos básicos sobre grafos e seus tipos especiais. O quarto capítulo aborda a coloração de grafos, desenvolve um estudo sobre o número cromático e apresenta também o polinômio cromático. O quinto capítulo reune um conjunto de quatro atividades que podem ser aplicadas aos alunos do Ensino Fundamental e Médio: a primeira atividade usa o Jogo Nim apresentada na primeira seção do capítulo; a segunda atividade usa o Jogo Dominó, que é descrito na segunda seção; na terceira atividade são propostas situações-problema que envolve coloração de grafos, relacionados com o Teorema das 4 cores; a quarta atividade propõe problemas combinatórios que envolvem números cromáticos e os polinômios cromáticos. O sexto capítulo apresenta as considerações finais.

CAPÍTULO

2

COMBINATÓRIA

Este capítulo apresenta inicialmente uma breve reflexão sobre a importância da enumeração na construção do raciocínio combinatório. Por meio dos principais conceitos de combinatória no ensino Fundamental e Médio.

Neste capítulo com respeito a parte teórica são utilizadas como principais referências: (LIMA, 2014), (MORGADO *et al.*, 2006) e (OLIVEIRA; FERNáNDEZ, 2010)

2.1 Abordagem inicial

Desde o homem primitivo o processo de contagem é uma necessidade natural da humanidade. Há comprovações arqueológicas que mostram por meio de ranhuras em ossos ou em pedras que o homem já era capaz de contar há pelo menos 50.000 mil anos.

Nesses estudos arqueológicos fica claro que a enumeração foi uma das primeiras habilidades desenvolvida pelo homem no contexto do que se chama contagem, ou seja, listar um a um os elementos de uma coleção de objetos. Se um pastor de um rebanho desejasse controlar a quantidade de animais ele associava cada animal a uma pedrinha dessa forma, o pastor podia saber se estava ou não faltando ovelhas.

Com passar dos anos, aumentou a necessidade do homem desenvolver métodos de contagem e de usá-los cada vez mais cedo em sua vida. Uma das primeiras estratégias de contagem que a criança desenvolve é a que usa os dedos das mãos. Perguntando aos alunos do ensino fundamental, de anos iniciais, de quantas maneiras pode-se escolher duas bolas de sorvete em um pote com 3 sabores, é muito provável que verbalizem todos os casos possíveis, antes de chegarem ao resultado, e usarão os dedos da mão para isso.

Mas contar nem sempre é uma tarefa fácil, principalmente quando envolve uma quantidade muito grande de casos. São apresentados a seguir alguns princípios norteadores para essas situações.

2.2 Alguns princípios de contagem

Muitos problemas de contagem apresentados no ensino fundamental e médio podem ser resolvidos através da utilização de pelo menos uma das quatro operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão. No entanto, o que torna os problemas de contagem admiráveis é a engenhosidade dos raciocínios que são usados em cada situação-problema.

2.2.1 *Princípio aditivo*

Um conjunto é formado de objetos, chamados de elementos. A relação básica entre um objeto e um conjunto é a relação de pertinência. Quando um objeto **x** é um dos elementos que compõe o conjunto A, diz-se que x pertence a A e escrevemos $x \in A$. Se, porém, x não é um dos elementos do conjunto A, diz-se que x não pertence a A e escrevemos $x \notin A$. Um conjunto A fica determinado, ou caracterizado quando se dá uma regra que permita decidir se um objeto arbitrário x pertence ou não a A.

Se todo elemento de um conjunto A é também elemento de um conjunto B, então diz-se que A é *subconjunto* de B.

Dado um conjunto M, o seu número de elementos será indicado por $\mid M \mid$. O princípio aditivo que tem sua origem na teoria dos conjuntos, diz que:

Definição 1. Dados dois conjuntos finitos A e B que não têm elementos em comum, o número de elementos da união é exatamente a soma do número de elementos de cada um dos conjuntos.

Portanto, se A e B forem conjuntos disjuntos, isto é, $A \cap B = \varnothing$, tem-se:

$$\mid A \cup B \mid = \mid A \mid + \mid B \mid$$

Exemplo 1. Em uma entrevista sobre time de preferência, 30 entrevistados responderam que torcem para o Corinthians e 50 responderam que torcem para o São Paulo. Há dois conjuntos disjuntos, a saber:

Conjunto $A =$ "torcedores do Corinthians" $\Rightarrow \mid A \mid = 30$.

Conjunto $B =$ "torcedores do São Paulo"$\Rightarrow \mid B \mid = 50$.

Aplicando o princípio aditivo obtém-se.

$$\mid A \cup B \mid = \mid A \mid + \mid B \mid = 30 + 50 = 80$$

Portanto, 80 pessoas foram entrevistadas.

2.2.2 Princípio multiplicativo

O princípio multiplicativo representa uma parcela significativa da base dos processos de contagem do currículo do ensino fundamental e médio. Esse princípio simplifica o princípio aditivo em situações que aparecem vários resultados que seguem o mesmo padrão.

O exemplo a seguir mostra claramente essa ideia.

Exemplo 2. Uma pessoa recebe um saco cheio de moedas de 25 centavos e quer calcular o valor total.

Entre tantas formas de se fazer tal cálculo, é provável que se pense em formar grupos de 20 moedas, correspondendo a 5 reais cada grupo. Por exemplo, supondo que sejam formados 10 grupos. Daí, em vez de se somar:

$$5+5+5+5+5+5+5+5+5+5,$$

escreve-se este resultado de maneira mais simples usando o princípio multiplicativo.

$$10 \times 5 = 50\,reais.$$

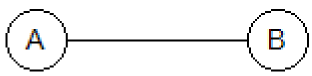
Segue a definição do princípio multiplicativo

Definição 2. Se uma decisão d_1 puder ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy.

As situações a seguir exemplificam o princípio multiplicativo.

Exemplo 3. Os círculos A e B representam pontos luminosos, conforme Figura 1, que acendem simultaneamente sempre com cores distintas. Amarelo, verde e vermelho são as possíveis cores para a iluminação destes pontos. Nestas condições, de quantas maneiras os pontos acendem?

Figura 1 – Pontos a serem iluminados.



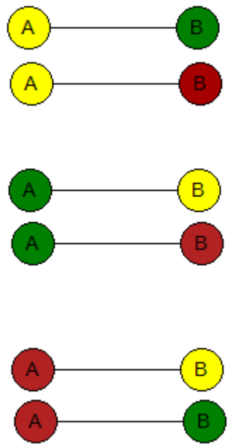
Fonte: Elaborada pelo autor.

Esta questão pode ser resolvida aritmeticamente dividindo-a em duas etapas:

- Primeira etapa: para acender a luz A existem 3 possibilidades.
- Segunda etapa: para acender a luz B existem 2 possibilidades já que ela não pode ser acesa com a mesma cor da luz A.

Se para cada cor usada no ponto A, tem-se duas cores para o ponto B, então pelo princípio multiplicativo obtém-se: $3 \times 2 = 6$. As 6 maneiras que os pontos acendem estão enumeradas na Figura 2.

Figura 2 – Possíveis iluminações.



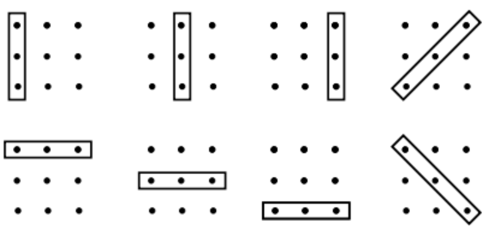
Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 4. (BELTRáN *et al.*, 2013) Nove pontos são desenhados em uma folha de papel, como mostrado na Figura 3. A Figura 4 mostra todas as formas de se escolherem 3 pontos colineares.

Figura 3 – Nove pontos dispostos em 3 linhas e 3 colunas.

Fonte: Beltrán *et al.* (2013).

Figura 4 – As 8 formas de escolher 3 pontos colineares



Fonte: Beltrán *et al.* (2013).

Para escolher 4 pontos de modo que três deles sejam colineares, o problema pode ser dividido em duas etapas. Na primeira etapa são escolhidos três pontos, e isso pode ser feito de 8 maneiras diferentes, como acabou de ser visto. Na segunda etapa escolhe-se o quarto ponto, que necessariamente não é colinear com os três já escolhidos. A escolha desse quarto ponto pode ser de 6 maneiras distintas. Se para cada grupo de três pontos colineares escolhidos, tem-se 6 escolhas para o quarto ponto, então aplicando o princípio multiplicativo, obtém-se:

$$8 \times 6 = 48\,\text{grupos}.$$

2.2.3 Tipos de agrupamentos

Dado um conjunto finito de elementos, são vários os tipos de agrupamentos que podem ser realizados com seus elementos.

Há duas grandes classes de agrupamentos que ajudam a pensar nos cálculos combinatórios mais comuns. os agrupamentos ordenados e os não ordenados, apresentados a seguir.

Definição 3 (Agrupamentos Ordenados)**.** Pode-se dizer que um agrupamento é ordenado quando a mudança de ordem de seus elementos define agrupamentos diferentes. Isto é, quando agrupamentos com os mesmos elementos, porém em ordens diferentes, forem considerados distintos.

Um agrupamento ordenado pode ser chamado de **sequência**.

Definição 4 (Agrupamentos não Ordenados)**.** São agrupamentos em que a ordem de seus elementos pode ser mudada, sem gerar um novo agrupamento. Em outras palavras, quando agrupamentos com os mesmos elementos, porém em ordens diferentes, forem considerados iguais.

Esses dois grandes grupos podem ser ainda classificados ao se permitir ou não a repetição de elementos. Com os conceitos de repetição e ordem pode-se dividir os agrupamentos em 4 tipos: (**1**) agrupamentos ordenados sem repetição de elementos; (**2**) agrupamentos ordenados podendo ocorrer repetição de elementos; (**3**) agrupamentos não ordenados sem repetição de elementos; (**4**) agrupamentos não ordenados podendo ocorrer repetição de elementos. Em cada um desses 4 tipos há uma forma interessante de contar o número de agrupamentos, que é exposta a seguir.

1. **Agrupamentos ordenados sem repetição de elementos**

   O número de maneiras distintas de agrupar k elementos ordenadamente e sem repetição, de um conjunto com n elementos, com $k \leq n$ é

   $$n(n-1)(n-2)...(n-k+1),$$

   ou seja, tem-se n possibilidades na seleção do primeiro elemento, $(n-1)$ possibilidades na seleção do segundo e assim por diante até chegar a $(n-(k-1))$ possibilidades na seleção do último elemento.

   Nos livros didáticos esses agrupamentos são chamados de **Arranjos Simples**.

   A seguir tem-se uma questão em que a ordem importa sem repetição de elementos.

Exemplo 5. Deseja-se formar uma comissão com três membros: presidente, secretário e tesoureiro. Para formá-la dispõem-se de quatro candidatos: Marcos, André, Júlia e Carlos. Para se determinar quantas possíveis comissões existem, é importante representar as comissões como triplas ordenadas, onde o primeiro elemento corresponde ao presidente, o segundo elemento ao tesoureiro e o terceiro ao secretário. O agrupamento (Marcos, André, Júlia) é diferente do agrupamento (Marcos, Júlia e André).

É importante também notar que cada elemento só pode ser escolhido uma única vez, o que classifica as comissões em agrupamentos ordenados e sem repetição.

Então, existem quatro opções para a escolha de um presidente, três opções para a escolha do secretário, e sobram duas opções para escolha de um tesoureiro. Aplicando o princípio multiplicativo tem-se:

$$4 \times 3 \times 2 = 24,$$

maneiras diferentes de se formar uma comissão.

Observação: De maneira particular quando $k = n$, o número de arranjos simples recebe o nome de **Permutações Simples**, e o número de agrupamentos é:

$$n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = n!.$$

Exemplo 6. O número de filas diferentes que podem ser formadas com 6 pessoas pode ser determinado da seguinte forma: há 6 possibilidades de ocupar a primeira posição da fila; sobram 5 possibilidades para a segunda posição da fila. O mesmo raciocínio vale para a terceira posição com 4 possibilidades, para a quarta posição com 3 possibilidades, para a quinta com duas 2 possibilidades e a última com 1 possibilidade. Portanto, podem ser formadas $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$ filas diferentes.

2. **Agrupamentos ordenados podendo ocorrer repetição de elementos**

   O número de maneiras distintas de se agrupar k elementos de um conjunto com n elementos podendo ter repetição dos mesmos é: n^k.

   Exemplo 7. Um determinado banco no Brasil exige uma chave de segurança que é um código alfabético composto por três letras. Esta chave foi criada para aumentar a segurança do correntista nas movimentações financeiras realizadas nos equipamentos de auto-atendimento e no Banco 24 Horas. Para determinar a quantidade de chaves de segurança possíveis, nota-se que a escolha da primeira letra não impõe restrições à escolha da segunda, e a escolha da terceira é independente das escolhas anteriores podendo existir então chaves com letras repetidas, como por exemplo ABB. E como a ordem é importante, ABC e ACB, por exemplo são consideradas chaves diferentes, as chaves de segurança são agrupamentos ordenados com repetição, e há: $26 \times 26 \times 26 = 26^3 = 17.576$, onde 26 é o número de letras do alfabeto.

3. **Agrupamentos não ordenados sem repetição de elementos**

   Um exemplo de agrupamentos com essas características é o conjunto de comissões com k individuos, escolhidos entre um grupo de n indivíduos, em que todos ocupam a mesma função ou cargo.

   Para calcular a quantidade de agrupamentos desse caso, aplica-se o princípio multiplicativo para determinar a quantidade de agrupamentos ordenados com k elementos distintos. Como cada grupo de k elementos tem $k!$ ordenações possíveis, há:

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} \text{ agrupamentos.}$$

   Essa formalização do raciocínio combinatório geralmente é chamada de **Combinação Simples**.

   Exemplo 8. Em uma sala há 4 pessoas, com as quais deseja-se formar um grupo com 3 pessoas, não ordenável. É um problema onde a ordem não importa e sem repetição dos elementos. Portanto, usando o raciocínio exposto anteriormente há:

$$\frac{4 \times 3 \times 2}{3!} = \frac{24}{6} = 4 \text{ grupos distintos.}$$

4. **Agrupamentos não ordenados podendo ocorrer repetição de elementos**

   O exemplo a seguir pode ajudar a entender esse tipo de agrupamento.

   Exemplo 9. Numa cesta existem peras, maçãs, laranjas e bananas. Existem 3 frutas de cada tipo e as frutas de mesmo tipo são todas iguais. De quantas maneiras diferentes é possível escolher três frutas?

   A solução desse problema pode ser obtida através da enumeração de todos os casos possíveis, antes, porém, é interessante destacar duas características nesse processo de escolha:

   i) A ordem não importa. Escolher 1 laranja, 1 maça e uma 1 banana é o mesmo que escolher 1 maça, 1 laranja e 1 banana.

   ii) Uma fruta pode ser escolhida mais de uma vez.

   Levando-se em consideração esses dois itens, as formas de escolher três frutas dessa cesta são listadas na Tabela 1 , onde “P” corresponde à pera, “L” à laranja, “B” à banana e “M” à maçã.

Tabela 1 – Escolhas de três frutas podendo ocorrer repetição.

PPP	PLL	MMM	MLB
PPM	PBB	MML	LLL
PPL	PLB	MMB	LLB
PPB	PLM	MLL	LBB
PMM	PMB	MBB	BBB

Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, pode-se escolher 20 grupos diferentes de frutas.

Como nem sempre se pode enumerar todos os casos, é importante abordar o problema de outra forma. Voltando ao Exemplo 9, usando as variáveis b, l, m e p, respectivamente como a quantidade de bananas, laranjas, maçãs e peras, então $b+l+m+p=3$. Assim, as soluções inteiras não-negativas dessa equação representam as possíveis escolhas. Por exemlo, $b=0$, $l=0$, $m=1$ e $p=2$, significa que foram escolhidas 2 peras, 1 maçã e nenhuma banana ou laranja.

O problema se resume então a determinar a quantidade de soluções inteiras e não-negativas da equação $b+l+m+p=3$. Para representar as soluções vão ser usados os seguintes símbolos: "$+$" e "$\bullet$". O símbolo "$+$" separa as diferentes frutas, e a quantidade de uma determinada fruta corresponde à quantidade de "$\bullet$". Dessa forma o agrupamento *MBB* seria:

Figura 5 – Exemplo de solução da equação.

$$\begin{array}{ccccccccc} b & + & l & + & m & + & p & = & 3 \\ \bullet\bullet & + & & + & \bullet & + & & = & 3 \end{array}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

onde se considerou uma certa ordem: no primeiro espaço entra a quantidade de bananas, representada por 2 "bolinhas", no segundo espaço, não entra nenhuma "bolinha", pois não se escolheu nenhuma laranja, e assim por diante. A Figura 5 resume o raciocínio exposto e completa com uma solução inteira não-negativa.

Então, o problema se reduz a uma permutação de 6 elementos. Contudo, há símbolos iguais: 3 "$+$" e 3 "$\bullet$", e o total de 6! deve ser dividido pela quantidade de permutações desses símbolos, resultando em

$$\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3!3!}=20,$$

soluções da equação ou 20 maneiras de se escolherem 3 frutas.

2.2.4 Princípio da casa dos pombos

O chamado princípio das gavetas Dirichlet (Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805-1859) ou princípio da casa dos pombos foi usado para resolver problemas na Teoria dos Números, contudo este princípio também é importante na resolução de alguns problemas de contagem.

No livro “Análise Combinatória e Probabilidade"seus autores reforçam a importância do estudo deste princípio.

> No entanto, a Análise Combinatória trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, além de combinações, arranjos e permutações, de outras tecnicas para atacá-los: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey são exemplos de tecnicas poderosas da Análise Combinátória (MORGADO *et al.*, 2006, p. 1) .

A seguir são apresentadas duas versões para este princípio.

Definição 5 (Versão Simples)**.** Se distribuímos $N+1$ pombos em N casas, então alguma das casas contém dois ou mais pombos.

Exemplo 10. Em uma sala de reuniões foram colocadas n pessoas. Mostre que existem duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas.

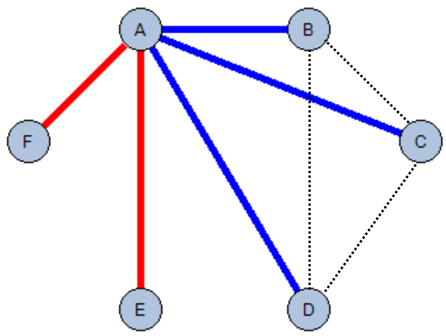
Neste caso consideram-se como pombos as n pessoas. As casas são enumeradas com os números $0,1,2,...,n-1$. E em cada uma dessas casas serão colocadas as pessoas que possuem a quantidade de conhecidos igual ao número da casa. Por exemplo, se uma pessoa conhece 2 outras do grupo, ela será colocada na casa de número 2. Obviamente se uma pessoa não conhecer ninguém, então não poderá haver uma pessoa que conheça todos. Por outro lado, se uma pessoa conhece todas as outras, então não existe uma pessoa que não conheça ninguém. Por isso, que uma das casas enumeradas com 0 ou $n-1$ permanecerá vazia. Portanto, existirá n pombos para serem distribuídos em $n-1$ casas, aplicando o princípio da casas dos pombos haverá um casa com mais de um pombo o que prova que existem no mínimo duas pessoas com o mesmo número de conhecidos num grupo de n pessoas.

Definição 6 (Versão Geral)**.** Se for distribuído $NK+1$ pombos em N casas, então algumas das casas contém pelo menos $K+1$ pombos.

Exemplo 11. Em uma sala, há 6 pessoas. Mostre que necessariamente 3 delas se conhecem mutuamente ou 3 dessas pessoas não se conhecem mutuamente.

Para resolver esta questão usa-se o princípio da casa dos pombos, e para melhor compreensão desta aplicação, usa-se um desenho bem definido, no qual as seis pessoas A, B, C, D, E e F estão representadas por pequenos círculos e se uma pessoa conhece a outra, os círculos que os representam aparecem conectados por uma linha azul, caso contrário usa-se uma linha vermelha para ligá-los. Escolhendo um círculo aleatoriamente, por exemplo, o círculo A, e partindo dele, tem-se cinco conexões. Considerando as cores azul e vermelha como sendo as casas dos pombos e as conexões sendo os pombos e como $5 = 2.2 + 1$, aplicando o princípio da casa dos pombos, tem-se pelo menos três tipos de conexões com a mesma cor, por exemplo, três ligações azuis como pode ser visto na Figura 6.

Figura 6 – Representação da relação existente entre seis pessoas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Contudo se alguma das ligações, "pontilhadas", entre as pessoas B, C e D forem azul então, nesse caso, tem-se três pessoas que se conhecem mutuamente, caso contrário, as três conexões serão vermelhas, existindo então três pessoas que não se conhecem mutuamente.

Desenhos estruturados como o da Figura 6 são dotados de propriedades interessantíssimas, algumas delas serão apresentadas no próximo capítulo, ademais enumerações por meio de desenhos são recursos pedagógicos importantes no processo ensino-aprendizagem de contagem.

A teoria apresentada nesse capítulo servirá como base na resolução de várias questões nos próximos capítulos.

CAPÍTULO

3

GRAFOS

Nas últimas décadas o mundo sofreu grandes transformações sociais e tecnológicas e com certeza essas mudanças influenciaram também a maneira como os alunos se interessam pelo currículo escolar. Nesse sentido, os grafos podem ajudar no aprendizado de conceitos de matemática vistos no ensino fundamental e médio.

Neste capítulo, serão apresentadas noções básicas de grafos, e alguns teoremas interessantes, certos tipos de grafos e suas principais características. Tais conceitos serão importantes para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Em relação à parte teórica são utilizadas como principais referências: (ARAUJO,), (GROSS; YELLEN, 1998), (JURKIEWICZ, 2009) e (OLIVEIRA; RANGEL,).

3.1 Noções básicas

Inicialmente serão apresentadas algumas ideias bem simples sobre grafos.

Definição 7. Um grafo $G(V,A)$ é uma estrutura matemática formada por dois conjuntos, em que V é o conjunto de vértices do grafo, e A é o conjunto de pares não ordenados de V.

Sejam a e b dois elementos quaisquer do conjunto V, designa-se por $e = \{a,b\}$ ou simplesmente ab a aresta cujas extremidades são os vértices a e b.

Pode-se representar um grafo de várias maneiras, uma delas é por uma listagem, que indica para cada um dos vértices, a quais outros ele está ligado, formando as arestas do grafo. O exemplo a seguir mostra essa forma de apresentar um grafo.

Exemplo 12. As alunas Nicole, Raissa, Francine, Franciele e Maria estudam na mesma sala de aula do 9º ano, existindo uma rede de amizade entre elas como descrito abaixo:

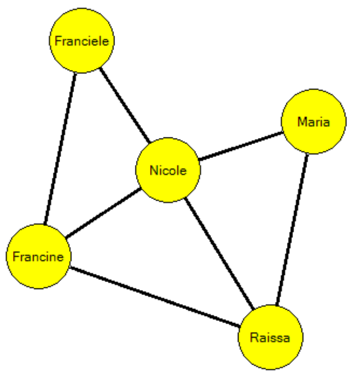
- Nicole é amiga da Raissa, da Francine, da Franciele e da Maria.

- Francine é amiga da Franciele, da Nicole e da Raissa.
- Raissa é amiga da Francine, da Nicole e da Maria.
- Franciele é amiga da Francine e da Nicole.
- Maria é amiga da Nicole e da Raissa.

Uma outra forma de representar um grafo é através de um desenho constituído por círculos ligados ou não entre si. Os círculos representam os vértices, e segmentos de reta, arcos ou setas entre eles são usados para representar as arestas.

No exemplo 12 cada aluna corresponde a um vértice e a amizade existente entre duas alunas é representada por uma aresta, o grafo deste exemplo pode ser observado na Figura 7.

Figura 7 – Grafo rede social.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando dois vértices estão ligados por uma aresta dizemos que os vértices são adjacentes e a aresta é incidente aos vértices. A quantidade de vértices ou ordem de um grafo é representado por $|V|$ e a quantidade de aretas ou tamanho de um grafo é representado por $|A|$. Na Figura 7, tem-se: $|V| = 5$ e $|A| = 7$.

Definição 8. Grau de um vértice é o número de arestas que nele incide e é representado por $d(v)$.

Na Figura 7, tem-se: $d(Nicole) = 4$, $d(Francine) = 3$, $d(Raissa) = 3$, $d(Franciele) = 2$ e $d(Maria) = 2$.

Observação: Um vértice de grau 0 é dito isolado e um vértice de grau 1 é dito pendente.

Definição 9. Um **laço** é uma aresta que liga um vértice nele mesmo.

Exemplo 13. Considere o grafo $G(V,A)$ em que V = $\{1, 2, 3, 4\}$ e a aresta $uv \in A$ se $u+v$ for um número par.

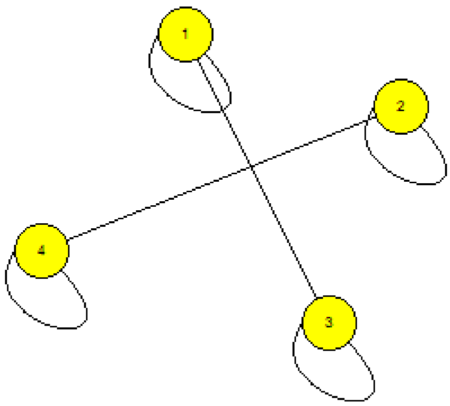
Analisando a condição de construção do grafo G observa-se que para cada dois vértices representados por um número inteiro de 1 a 4, existirá uma ligação entre eles se a soma deles for par, sendo assim, inicialmente somam-se dois a dois os elementos do conjunto V, como mostrado na Tabela 2, e depois de ligados os vértices, o grafo fica como na Figura 8, com laços.

Tabela 2 – Soma dos elementos do conjunto V.

u	v	u+v
1	1	1+1=2 (número par)
1	2	1+2=3 (número ímpar)
1	3	1+3=4 (número par)
1	4	1+4=5 (número ímpar)
2	2	2+2=4 (número par)
2	3	2+3=5 (número ímpar)
2	4	2+4=6 (número par)
3	3	3+3=6 (número par)
3	4	3+4=7 (número ímpar)
4	4	4+4=8 (número par)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 8 – Grafo com laços.

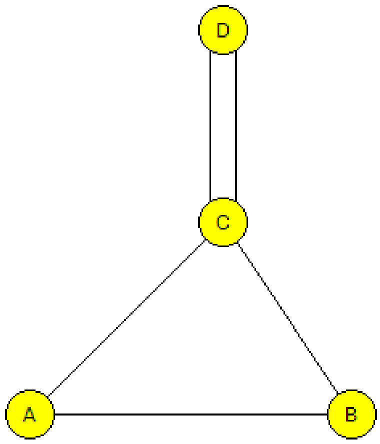


Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 10. Quando duas ou mais arestas ligam os mesmos dois vértices elas são chamadas de **arestas múltiplas** e o grafo que as contém é designado por **multigrafo**.

Exemplo 14. Na cidade Parkelândia existem quatro parques A, B, C e D, sendo que, os parques A, B e C são os vértices de um triângulo, e as avenidas que os ligam são os lados do triângulo ABC. E por último, o parque C está ligado ao parque D por duas grandes avenidas. Esses quatro parques, bem como as avenidas que os ligam, podem ser representados por um grafo, em que as duas avenidas que ligam os parques C e D são as arestas múltiplas do grafo, como pode ser visto na Figura 9.

Figura 9 – Grafo com arestas múltiplas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 11. Um grafo é **Simples** se ele não tiver laços nem arestas múltiplas.

A situação a seguir motivará os dois próximos teoremas.

Exemplo 15. Em uma festa de aniversário estavam presentes Bruna, Amanda, Roberta, Carlos e Pedro. Quando eles se encontraram pela primeira vez, ocorreram os seguintes cumprimentos entre: Bruna e Amanda, Bruna e Roberta, Bruna e Carlos, Bruna e Pedro, Amanda e Roberta, Amanda e Carlos, Pedro e Carlos.

Fazendo uma contagem simples dos cumprimentos realizados, dá um total de 7 cumprimentos, mas se for considerado a soma dos cumprimentos realizados pelas 5 pessoas, verifica-se que:

- Bruna cumprimentou 4 pessoas.
- Amanda cumprimentou 3 pessoas.
- Roberta cumprimentou 2 pessoas.
- Pedro cumprimentou 2 pessoas.
- Carlos cumprimentou 3 pessoas.

É claro que, fazendo a soma destas quantidades é de se esperar um número par, pois nesta situação, o mesmo cumprimento foi contado duas vezes, $4+3+2+2+3 = 14 = 2\times 7$, ou seja, o dobro da quantidade de saudações realizadas.

O Teorema a seguir resume a ideia por trás dessa situação.

Teorema 1. Em todo grafo a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2.|A|$$

Demonstração:

Quando somam-se os graus dos vértices, cada extremidade de uma aresta é somada uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, conclui-se que elas foram contadas duas vezes. ■
O próximo segue.

Teorema 2. Em todo grafo o número de vértices de grau ímpar é sempre par.

Demonstração:

Se a quantidade de vértices de grau ímpar fosse ímpar, então a soma dos graus de todos esses vértices seria ímpar, o que contrariaria o teorema anterior. Logo, o número de vértices de grau ímpar é sempre par. ■

A seguir tem-se uma aplicação do teorema.

Exemplo 16. É possível desenhar 9 segmentos de reta no plano de tal forma que cada um intersecte exatamente 3 outros?

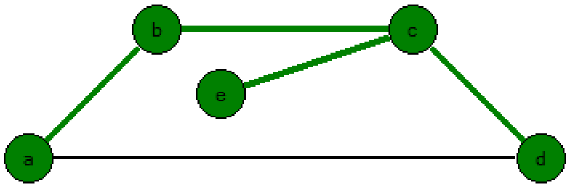
Pode-se tentar representar o problema fazendo inúmeros desenhos mas se não for encontrado nenhuma forma que corresponda ao enunciado, como ter certeza que realmente não é possível? Fazendo uso da teoria dos grafos essa pergunta pode ser respondida sem dúvidas. Imagine os nove segmentos de reta como sendo nove vértices, e dois vértices se ligam formando uma aresta se e somente se cada um dos segmentos correspondentes se cruzarem. Mas daí tem-se cada vértice com três arestas o que é impossível pois a quantidade de vértices de grau ímpar em qualquer grafo é par.

A seguir serão expostos alguns conceitos importantes no estudo dos grafos.

Definição 12. Em um Grafo, um **passeio** que inicia no vértice v_0 e termina no vértice v_n é uma sequência que alterna vértices e arestas, $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n)$, tal que $e_i = v_{i-1}v_i$ para $i = 1, 2, ..., n$; com eventual repetição de vértices e arestas.

Exemplo 17. Um passeio, de vértice inicial **a** e vértice final **d**, expresso pela sequência (a,ab,b,bc,c,ce,e,ce,c,cd,d), pode ser visto na Figura 10 a seguir.

Figura 10 – Passeio

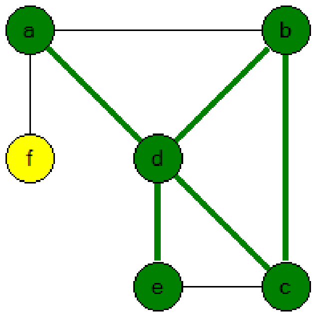


Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 13. Em um grafo, um **trajeto** é um passeio em que pode ocorrer repetição de vértices mas nunca de arestas. Se os vértices inicial e final coincidirem, então tem-se um trajeto fechado caso contrário é um trajeto aberto.

Exemplo 18. A sequência $(a, ad, d, db, b, bc, c, cd, d, de, e)$ representa um trajeto aberto, de vértice inicial **a** e vértice final **e**, como exposto na Figura 11.

Figura 11 – Trajeto

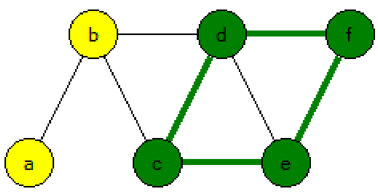


Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 14. Em um grafo, um **ciclo** é um trajeto em que o vértice inicial v_0 coincide com o vértice final v_n e os outros vértices são todos distintos.

Exemplo 19. A sequência dos vértices (c,d,f,e,c) representada na Figura 12 é um exemplo de ciclo.

Figura 12 – Ciclo

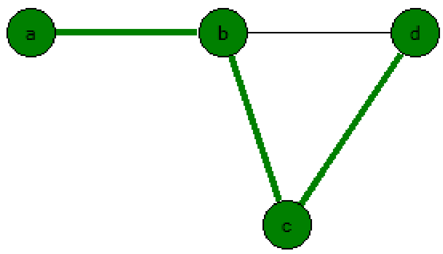


Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 15. Em um grafo, um **caminho** é um trajeto em que todos os seus vértices são distintos.

Exemplo 20. Um caminho, de vértice inicial **a** e vértice final **d**, é a sequência de vértices (a,b,c,d), como está representado na Figura 13 a seguir.

Figura 13 – Caminho

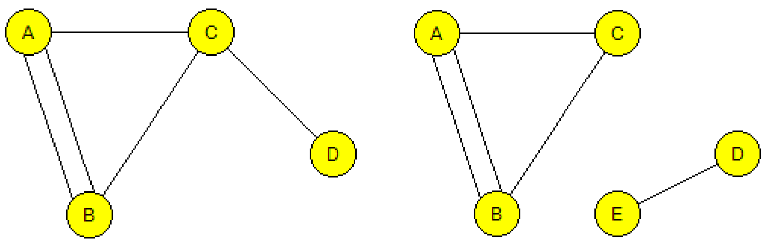


Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 16. O comprimento de um caminho entre os vértices v_0 e v_n é a quantidade de arestas presentes no caminho. Se existir mais de um caminho entre os vértices escolhidos, então o comprimento do caminho é o menor comprimento dentre todos os caminhos entre os vértices v_0 e v_n.

Definição 17 (Grafo Conexo)**.** Um grafo é conexo se, dados dois vértices quaisquer, existir pelo menos um caminho ligando os dois vértices. Caso contrário o grafo é desconexo, nesse caso cada parte conexa do grafo é chamada de componente conexa do grafo.

Figura 14 – Conexidade de grafos



(a) Grafo Conexo. (b) Grafo Desconexo.

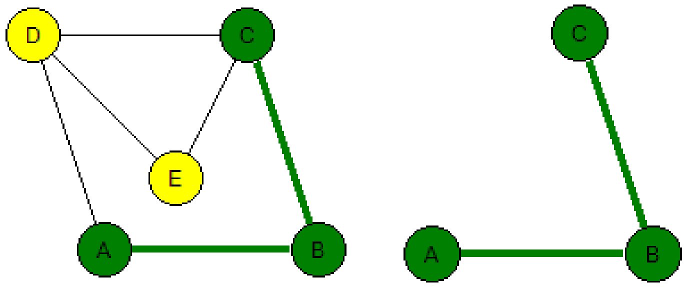
Fonte: Elaborada pelo autor.

É interessante observar que na estrutura de um grafo pode-se destacar outro grafo que recebe o nome de subgrafo.

Definição 18. Um grafo $H(D,E)$ é um subgrafo de $G(V,A)$ se $D \subseteq V$ e $E \subseteq A$.

Em outras palavras, um subgrafo de um grafo G é um grafo H, como o da Figura 15b, cujos vértices e arestas estão todos em G. O grafo H pode ser visto em destaque na Figura 15a.

Figura 15 – Grafo e subgrafo



(a) Grafo G. (b) Subgrafo H.

Fonte: Elaborada pelo autor.

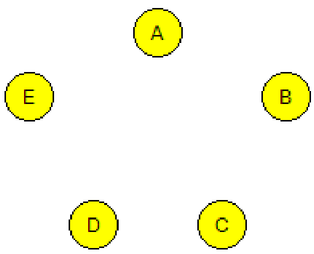
3.2 Alguns tipos especiais de grafos

Nesta seção serão abordados alguns tipos de grafos que aparecem com maior frequência no estudo dos grafos. Saber reconhecê-los seja pela forma gráfica ou por sua notação é importante para poder usar suas propriedades em determinados problemas.

Definição 19 (Grafo Nulo)**.** Um grafo que não tem arestas é um **grafo nulo.**

Exemplo 21. A relação de amizade em um grupo de cinco pessoas, identificadas pelas letras A, B, C, D, e E, em que ninguém se conhece pode ser representada por um grafo nulo, como na Figura 16.

Figura 16 – Grafo nulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 20 (Grafo Completo)**.** Grafo simples em que, para cada vértice do grafo, existe uma aresta conectando este vértice a cada um dos demais é um **grafo completo**. Ou seja, todos os vértices possuem mesmo grau, $d(v) = (n-1)$. Um grafo completo de n vértices é denotado por K_n.

A quantidade de arestas de um grafo completo, K_n, pode ser calculada pela expressão:

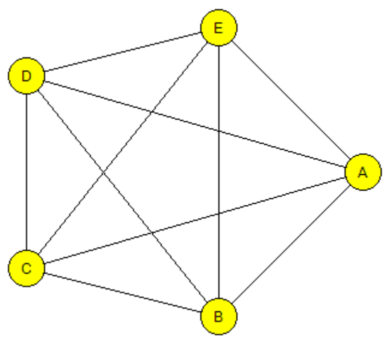
$$\frac{n.(n-1)}{2},$$

ou seja, dado que o grau de cada um dos n vétices é $n-1$, logo a soma dos graus dos vértices é $n.(n-1)$. Por outro lado, o Teorema 1 garante que a soma dos graus dos vértices é o dobro da quantidade das arestas. Dessa forma tem-se duas afirmações equivalentes, portanto:

$$2.|A| = n.(n-1) \Rightarrow |A| = \frac{n.(n-1)}{2}.$$

Exemplo 22. A relação de amizade em um grupo de cinco pessoas, designadas pelas letras A, B, C, D, e E, na qual todos se conhecem pode ser representada pelo grafo completo da Figura 17.

Figura 17 – Grafo Completo K_5



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 21 (Grafo Regular ou k-Regular)**.** O grafo em que todos os vértices tem o mesmo grau é um **grafo regular** ou **k-regular**, ou seja, se um grafo é k-Regular então cada um de seus vértices tem grau k.

Exemplo 23. A molécula de oxigênio O_2, é composta por dois átomos de oxigênio ligados por uma dupla ligação. Essa molécula pode ser representada por um grafo 2-regular, onde os dois átomos são os vértices e a ligação covalente do tipo dupla, que representa 2 pares de elétrons compartilhados, pode ser representada por uma dupla aresta ligando os dois vértices conforme Figura 18.

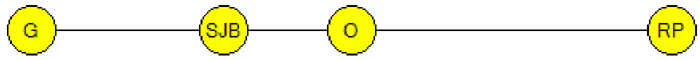
Figura 18 – Grafo 2-Regular

Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 22 (Grafo Caminho)**.** O grafo em "forma de caminho" contendo n vértices é um Grafo Caminho e sua representação é P_n.

Exemplo 24. Um possível caminho entre as cidades de Guaíra-SP e Ribeirão Preto-SP passando por São Joaquim da Barra e Orlândia pode ser representado pelo Grafo Caminho da Figura 19 a seguir.

Figura 19 – Grafo P_4, representando o caminho Guaíra-Ribeirão.

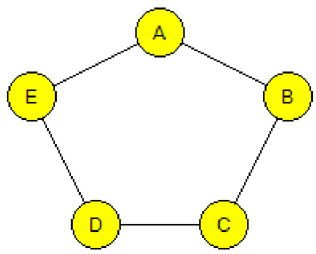


Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 23 (Grafo Ciclo)**.** Um grafo simples, conexo e 2-regular contendo um único ciclo é um Grafo Ciclo e sua representaçao é C_n.

Exemplo 25. A relação de amizade em um grupo de cinco pessoas em que cada pessoa conhece exatamente duas pessoas pode ser representada pelo grafo C_5 da Figura 20.

Figura 20 – Grafo C_5.

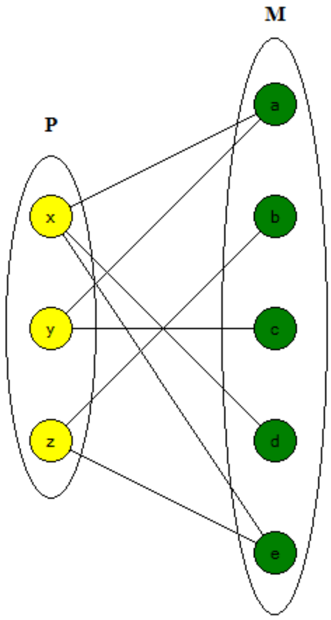


Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 24 (Grafo Bipartido)**.** O grafo em que o conjunto V de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos U e W, tal que cada aresta do grafo tenha uma extremidade em U e a outra extremidade em W é um **grafo bipartido**.

Exemplo 26. Suponha um conjunto de 3 pessoas que deseja comprar um carro cada uma e um conjunto de 5 carros diferentes. Sabendo que cada pessoa se interessa por determinado tipo de carro, então pode-se modelar esta situação com um grafo bipartido conforme mostra a Figura 21, onde P é o conjunto dos compradores e M é o conjunto dos carros.

Figura 21 – Grafo Bipartido.

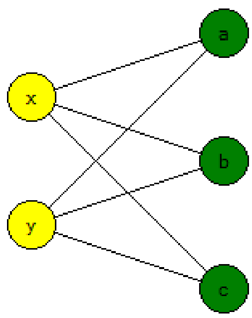


Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 25 (Grafo Bipartido Completo)**.** O grafo bipartido tal que todos os vértices do primeiro subconjunto estão ligados a todos os vértices do segundo subconjunto é um **grafo bipartido completo**. Sendo m a quantidade de vértices no primeiro subconjunto e n a quantidade de vértices no segundo subconjunto então denota-se por $k_{m,n}$ o grafo bipartido completo com $m \times n$ arestas.

Exemplo 27. Na Figura a seguir tem-se um grafo bipartido completo $K_{2,3}$ com as suas $2 \times 3 = 6$ arestas.

Figura 22 – $K_{2,3}$

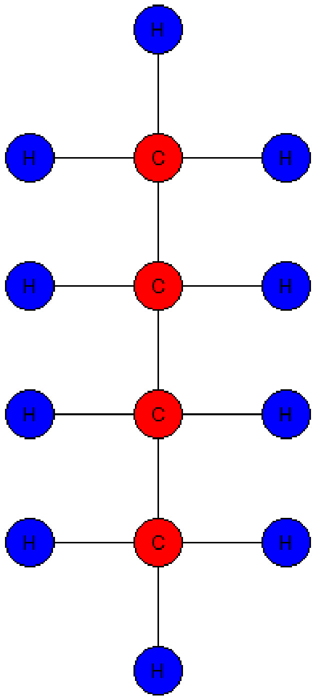


Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 26 (Árvore)**.** O grafo conexo que não tem ciclos é uma **árvore** e será denotada por T.

Exemplo 28. O Butano é um gás incolor, inodoro e altamente inflamável. É um hidrocarboneto gasoso, obtido do aquecimento lento do petróleo. Componente do gás de cozinha, sua fórmula é C_4H_{10} e está representada pela árvore da Figura 23.

Figura 23 – Árvore representando a fórmula química do gás Butano

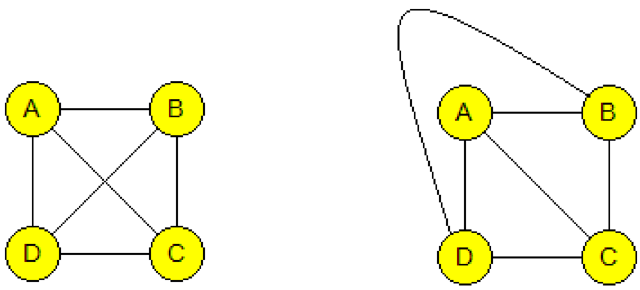


Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 27 (Grafo Planar)**.** O grafo é **planar** se existir alguma representação sua no plano de forma que as suas arestas não se cruzem.

Mesmo se o grafo tiver um cruzamento de arestas, ainda assim, ele pode ser planar se puder ser redesenhado sem cruzamentos como pode ser observado na Figura 24 a seguir.

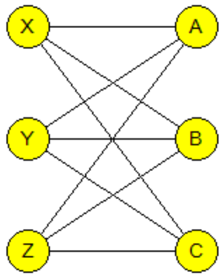
Figura 24 – Grafo K_4 desenhado com e sem cruzamentos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Já os grafos K_5 e $K_{3,3}$ são exemplos de grafos não planares. Estes dois grafos não admitem representações planares.

Figura 25 – Grafo não planar $K_{3,3}$.

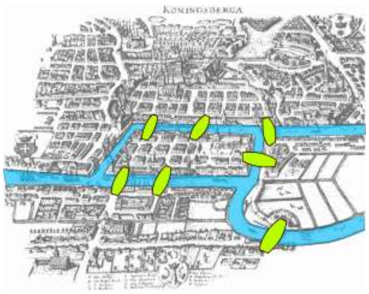


Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.1 Grafo Euleriano

Pela cidade de Kaliningrado passa o rio *Pregel*, dentro da cidade ele se ramifica formando uma ilha, separando a cidade em quatro regiões. No passado essa cidade tinha o nome de Königsberg, naquela época existiam sete pontes, cinco delas ligavam a ilha à restante parte da cidade e as outras duas ficavam sobre as ramificações do rio que seguiam pela cidade, como pode ser visto na Figura 26.

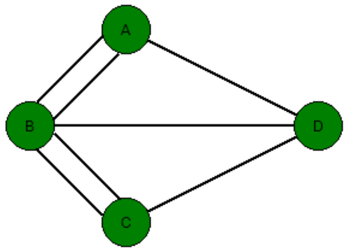
Figura 26 – Cidade de Könisberg.



Fonte: Wikipedia (2015).

Os residentes da cidade passeavam por essas pontes e eles tentavam passar por todas uma única vez, mas nenhum morador da cidade foi capaz de conseguir tal feito. Em 1736 *Leonhard Euler* provou que tal percurso era impossível. *Euler* usou um raciocínio bastante simples para ilustrar o problema. Transformou as pontes em arestas e as quatro regiões da cidade em vértices, surgindo um desenho semelhante ao da Figura 27. O vértice B representa a região da ilha, os vértices A, C e D representam as outras três regiões da cidade. Acredita-se que *Euler* fez o primeiro grafo da História, dando início assim a Teoria dos Grafos.

Figura 27 – Grafo das sete pontes de Könisberg.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No início, as ideias de *Euler* serviram apenas para resolver enigmas e na análise de jogos e outras diversões. A partir de 1800, as pessoas começaram a perceber que os grafos poderiam ser usados para modelar muitos problemas interessantes à sociedade.

Lembrando que trajeto é um passeio que pode repetir vértices mas não ocorre repetição de arestas. A seguir são expostas duas definições importantes que usam esse conceito.

Definição 28 (Grafo Euleriano)**.** O grafo que possui **m** arestas e um trajeto fechado de comprimento **m** é um grafo Euleriano.

Em outras palavras, a definiçao anterior diz que: no Grafo Euleriano pode-se percorrer todas as suas arestas uma única vez partindo de qualquer vértice e retornando a ele novamente.

A seguir o lema que será usado na demonstração do Teorema de Euler.

Lema 1. Se todos os vértices de um grafo G tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo.

Demonstração:

Se G contém laços ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois, automaticamente, G contém um ciclo. Considerando, portanto, apenas os grafos simples, a partir de um vértice v_0, qualquer, inicia-se um trajeto. Ao chegar a um vértice qualquer, ou ele está sendo visitado pela primeira vez e pode-se continuar, ou esse vértice é um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, o lema está provado. ■

Segue o teorema.

Teorema 3 (Euler, 1736)**.** Um grafo conexo G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par.

Demonstração:

Supondo que o grafo G, com m arestas, tenha um trajeto fechado de comprimento m, cada vez que o trajeto passa por um vértice utiliza duas novas arestas, uma para entrar e outra para sair. Logo, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par.

Reciprocamente a demonstração é por indução sobre o número de arestas m do grafo G. Suponha que o teorema seja válido para $m = 1$, sendo o vértice par essa única aresta é um laço, então o grafo é euleriano. Supondo que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que m arestas. Sendo G conexo, todos os vértices têm grau maior ou igual a 2, pois os graus são pares. Pelo Lema 1, G contém um ciclo C. Se C contém todas as arestas de G, o teorema está provado. Caso contrário, remove-se de G as arestas de C, resultando num grafo H, possivelmente desconexo, com menos arestas do que G, e cujos vértices continuam a ter grau par. Logo, pela hipótese de indução, cada componente de H é um grafo euleriano. Além disso, pela conexidade de G, cada componente de H possui ao menos um vértice em comum com C. Portanto, concatenando os grafos eulerianos de cada componente de H com o ciclo C obtém-se G que é euleriano. ■

A seguir é apresentada a definição de grafo semi-euleriano.

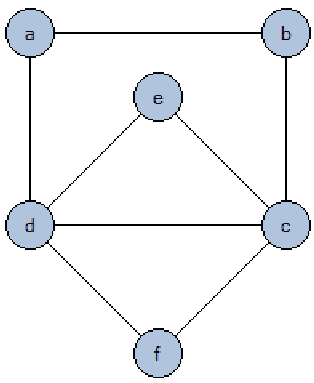
Definição 29. Se o grafo não é Euleriano mas tem um trajeto aberto de comprimento m, ele é um grafo semi-Euleriano.

O grafo semi-Euleriano tem exatamente dois vértices de grau ímpar, pode-se percorrer todas as suas arestas uma única vez partindo de um dos vértices de grau ímpar e tendo como ponto final do trajeto o outro vértice de grau ímpar.

Na sequência é apresentado um exemplo que usa na sua resolução o teorema de Euler.

Exemplo 29. Considerando o desenho da Figura 28, deseja-se saber se é possível passar por todas as suas arestas, uma única vez, partindo do vértice **a** e retornando novamente a ele. Se existir tal percurso, isso poderá ser feito de quantos modos diferentes?

Figura 28 – Grafo Euleriano



Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisando a Figura 28, constata-se um grafo conexo com 6 vértices e todos de grau par, propriedade importante para concluir que se trata de um grafo Euleriano. Portanto, o percurso desejado é possível de ser realizado.

Enumerando todos os percursos possíveis, obtém-se:

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow f \longrightarrow d \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow d \longrightarrow a$$

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow f \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow a$$

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow c \longrightarrow f \longrightarrow d \longrightarrow a$$

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow f \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow d \longrightarrow a$$

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow d \longrightarrow f \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow a$$

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow a$$

$$a \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow f \longrightarrow c \longrightarrow b \longrightarrow a$$

$$a \longrightarrow d \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow d \longrightarrow f \longrightarrow c \longrightarrow b \longrightarrow a$$

$$a \longrightarrow d \longrightarrow f \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow d \longrightarrow c \longrightarrow b \longrightarrow a$$

$$a \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow c \longrightarrow f \longrightarrow d \longrightarrow c \longrightarrow b \longrightarrow a$$

$$a \longrightarrow d \longrightarrow c \longrightarrow f \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow c \longrightarrow b \longrightarrow a$$

$$a \longrightarrow d \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow c \longrightarrow b \longrightarrow a$$

Portanto, são 12 percursos diferentes que satisfazem a questão.

A quantidade de percursos diferentes nessa questão, pode ser ainda calculada por processos aritméticos. Para tanto divide-se o trajeto desejado em partes:

Primeira parte: para ir do vértice **a** para o vértice **c** passando por **b**, existe somente uma possibilidade.

Segunda parte: para ir de **c** até **d**, existem 3 possibilidades.

Terceira parte: para voltar de **d** até **c**, existem 2 possibilidades, já que não se pode repetir a aresta escolhida na segunda etapa.

Quarta parte: para ir de **c** até **d** novamente, só resta 1 possibilidade, pois não se pode repetir as arestas escolhidas nas duas etapas anteriores.

Quinta parte: para ir do vértice **d** ao **a**, existe somente 1 possibilidade.

Usando o princípio multiplicativo obtem-se:

$$1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6.$$

Mas como para cada uma das 6 possibilidades sempre existe um caminho no sentido contrário, logo, $2 \times 6 = 12$ possibilidades de percursos.

O conceito de grafo euleriano será usado na segunda atividade proposta do Capítulo 5.

CAPÍTULO

4

COLORAÇÃO DE GRAFOS

As atividades sobre combinatória relacionadas à coloração de grafos se apresentam atraentes para os alunos, pois nelas estão presentes os aspectos lúdicos e concretos, como o colorir vértices de um grafo, e também da enumeração de todas as possíveis formas de coloração. Neste capítulo será estudado a coloração de grafos, dando destaque para o número cromático e o polinômio cromático.

Neste capítulo, a parte teórica está fundamentada em: (GUICHARD, 2016), (SOUSA,), (GROSS; YELLEN, 1998) e (CARDOSO, 2004).

4.1 Breve histórico

Em 1852 surgiu uma questão que ajudou a impulsionar a teoria dos grafos. Quando Francis Guthrie botânico e matemático, tentava colorir os condados do mapa da Inglaterra, de modo que duas regiões adjacentes não possuíssem a mesma cor, ele percebeu que poderia realizar a tarefa com apenas quatro cores.

Frederick Guthrie, irmão mais novo de Francis, apresentou a questão das "quatro cores[1]," ao seu professor Augustus De Morgan, Professor de Matemática da University College, para que ele pudesse analisar tal hipótese. De Morgan ficou muito empolgado e escreveu uma carta ao matemático William Rowan Hamilton em Dublin, Irlanda, expondo o problema, mas ao contrário de De Morgan ele não manifestou simpatia à questão.

Nos anos seguintes, De Morgan ainda se ocupou com a conjectura das quatro cores, mantendo também contatos com outros matemáticos, mas os avanços não foram suficientes para provar o resultado.

Em 1879, Alfred Bray Kempe, publicou uma demonstração completa do Teorema das

[1] Como passou a ser conhecida

Quatro Cores no *American Journal of Mathematics*. A demonstração foi estudada por muitos matemáticos famosos da época, e considerou-se demonstrado o teorema.

Porém, em 1890, Percy John Heawood provou que a demonstração de Kempe tinha um erro, mas ele também não conseguiu dar uma demonstração do teorema. Contudo durante esse processo ele obteve um avanço significativo para o problema das quatro cores. Acabou provando o Teorema das Cinco Cores, demonstrando que não são necessárias mais do que cinco cores para colorir um mapa no qual países de fronteira comum tenham cores diferentes.

Finalmente, em 1976, contando com a ajuda de um computador, IBM 360, os matemáticos Wolfgang Haken e Kenneth Appel, fizeram uma demonstração do teorema das quatro cores.

Durante os 124 anos anos de tentativas de demonstração do teorema das Quatro Cores foram desenvolvidas muitas teorias que ajudaram a enriquecer a teoria dos grafos. Por exemplo, em 1912 o matemático David Birkhoff introduziu o conceito de Polinômio Cromático na Teoria dos Grafos e Brooks em 1941 enunciou um teorema fornecendo um limite superior para o número cromático de um grafo, assuntos que serão vistos nas próximas seções.

4.2 Coloração de vértices

Uma coloração de vértices de um grafo G é chamada **própria** quando forem atribuídas cores para seus vértices de modo que não existam dois vértices adjacentes com a mesma cor. Se numa coloração própria dos vértices de G puder ser usado exatamente um número k de cores diferentes então, diz-se que o grafo G é *k-colorível*.

Exemplo 30. Quantas cores são necessárias para colorir o mapa da região sudeste do Brasil, de forma que estados com a mesma fronteira não tenham a mesma cor?

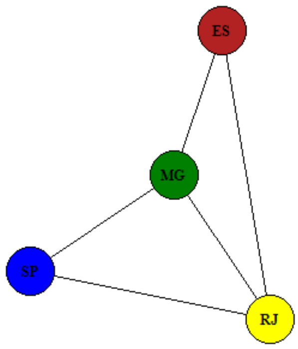
Figura 29 – Mapa da Região Sudeste do Brasil

Fonte: Mapas (2017).

Evidentemente que as possibilidades de coloração poderiam ser verificadas no próprio mapa, mas ao invés disso será usado um grafo G para representar o mapa da região sudeste, de tal forma que, os vértices e as arestas representem os estados e as fronteiras entre eles, respectivamente. A partir de G inicia-se a discussão sobre quantas cores são suficientes para colorir seus vértices desde que vértices adjacentes não recebam cores iguais.

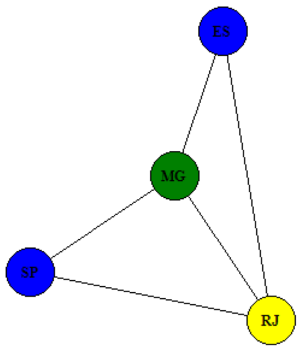
Primeiramente pode-se usar uma cor diferente para cada vértice do grafo, obtendo-se uma coloração própria de G com 4 cores, como pode ser visto na Figura 30. Contudo, observando a coloração obtida nota-se que o vértice que está colorido com a cor vermelha, também poderia ser colorido com a cor azul e vice-versa assim, diminuindo a quantidade de cores usadas, sem deixar de obedecer as condições de uma coloração própria de vértices, como pode ser visto na Figura 31. Então, tem-se uma coloração de G usando exatamente 3 cores, que é a quantidade mínima de cores necessárias para colorir esse grafo.

Figura 30 – Grafo G, 4-colorível, representando a região sudeste do Brasil.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31 – Grafo G, 3-colorível, representando a região sudeste do Brasil.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dado este exemplo, pode-se definir de maneira formal o conceito de coloração própria de vértices de um grafo G da seguinte maneira.

Definição 30. Uma coloração própria de vértices de um grafo $G(V,A)$ é uma função $f: V \to C$, tal que se u e v forem vértices adjacentes em G então $f(u) \neq f(v)$.

Sendo assim, a função f relaciona o conjunto V dos vértices do grafo G ao conjunto C que é o conjunto cujos elementos são as cores. Para problemas de coloração de grafos, para os quais é exigido uma grande quantidade de cores, normalmente usa-se uma sequência de números inteiros positivos para representar cada cor.

A maioria dos problemas de coloração de grafos envolve o desafio de determinar a quantidade mínima de cores necessárias para colorir propriamente os vértices de um grafo. Voltando ao Exemplo 30, inicialmente foram usadas 4 cores para colorir o grafo G. Porém chegou-se à conclusão de que a coloração própria mínima seria de 3 cores. Com esse exemplo em mente, na seção a seguir, é apresentada uma importante definição para problemas de coloração de grafos.

4.3 Número cromático

Definição 31. Chama-se *número cromático* de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, a menor quantidade k de cores distintas necessárias para uma coloração própria de vértices de G. Um grafo com essas característica é chamado de *k-cromático*.

Observa-se que a definição de coloração[2] não se aplica a grafos com laços. Já os grafos com arestas múltiplas ou com vértices isolados são indiferentes para uma coloração. Como já foi visto no Exemplo 30, um mapa no plano pode ser representado por um grafo e esse tipo de grafo tem uma propriedade importante: é planar. O Teorema das Quatro Cores afirma que: *Num grafo planar G tem-se que* $\chi(G) \leq 4$. Isso significa dizer que todo grafo planar pode ser colorido com um máximo de quatro cores. Esse parâmetro fornecido pelo Teorema das Quatro Cores é muito útil no que diz respeito à determinação do número cromático de um grafo planar, pois com exceção de alguns grafos especiais que serão mostrados a seguir a determinação do número cromático é bastante complexa.

4.3.1 Grafo nulo

Um grafo nulo não tem arestas, logo só é necessária uma cor para pintar seus vértices. Portanto, no grafo nulo, $\chi(G) = 1$.

[2] De agora em diante, neste trabalho, quando houver referência a uma coloração própria de vértices de um grafo, esta será chamada apenas de coloração.

4.3.2 Grafo completo

Em um grafo completo todos os seus n vértices estão ligados entre si por arestas, logo para se ter uma coloração são necessárias n cores. Portanto, para todo grafo completo, $\chi(K_n) = n$.

4.3.3 Grafo bipartido

Lembrando que num grafo bipartido seus vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos e as suas arestas só podem conectar vértices de grupos diferentes, conclui-se que são necessárias apenas duas cores para sua coloração. Portanto, no grafo bipartido, $\chi(K_{p,q}) = 2$.

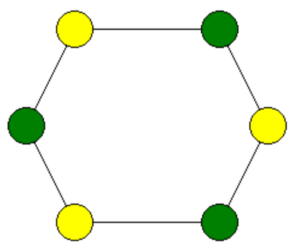
4.3.4 Caminho

Pela definição de caminho, de n vértices, P_n, pode-se atribuir alternadamente 2 cores a seus vértices. Portanto, $\chi(P_n) = 2$.

4.3.5 Ciclo par

Seja C_{2n} um ciclo com uma quantidade par de vértices. Pode-se verificar que são suficientes duas cores para sua coloração, pois para ser atribuída uma coloração basta alternar duas cores no grafo. A Figura 32 a seguir representa uma coloração para um ciclo de seis vértices.

Figura 32 – Coloração para um C_6.



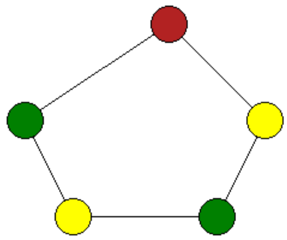
Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, para um ciclo par $\chi(C_{2n}) = 2$.

4.3.6 Ciclo ímpar

Seja C_{2n+1} um ciclo com uma quantidade ímpar de vértices, verifica-se que, se for atribuída uma cor aos vértices de índices ímpares e outra cor aos vértices de índices pares, duas cores não serão suficientes para dar uma coloração ao grafo, pois o vértice v_1 receberia a mesma cor que v_{2n+1}. Isso não poderia ocorrer já que esses dois vértices são adjacentes. Assim, para atribuir uma coloração ao grafo de ciclo ímpar são necessárias 3 cores como pode ser exemplificado no grafo C_5 da Figura 33.

Figura 33 – Coloração para um C_5.



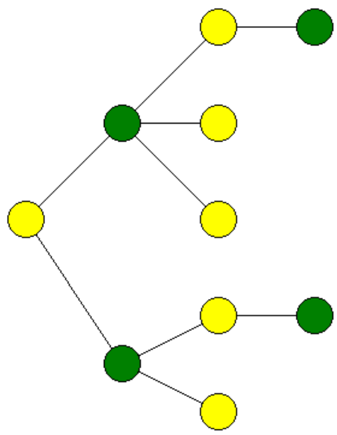
Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, para um ciclo ímpar, $\chi(C_{2n+1}) = 3$.

4.3.7 Árvore

Pela definição de árvore, duas cores são suficientes para sua coloração, pois definido um vértice v_i do grafo com a cor 1, a partir desse vértice todos os vértices que estiverem a um número ímpar de arestas de v_i atribui-se a cor 2 e aos que estiverem a um número par de arestas de v_i atribui-se a cor 1. Como existe um e apenas um caminho entre cada par de vértices, não haverá dois vértices adjacentes com a mesma cor. A Figura 34 apresenta um exemplo para uma árvore.

Figura 34 – Coloração de árvore.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, para uma árvore $\chi(T) = 2$.

4.3.8 Outros grafos

Nem sempre é possível calcular o número cromático de um grafo qualquer. Nessa perspectiva são apresentadas abaixo algumas ferramentas para ajudar a limitar o valor do número cromático de G. Uma dessas ferramentas é o conceito de clique de um grafo G.

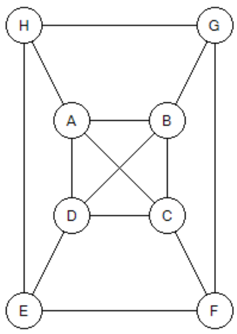
Definição 32. Um **clique** é qualquer subgrafo completo K_n do grafo G.

No estudo do número cromático além de saber reconhecer um clique é preciso também conhecer o seu tamanho, ou seja, o número clique.

Definição 33. O número clique é o maior valor de n tal que K_n seja um clique de G, e será denotado por $\omega(G)$.

Exemplo 31. Observando o grafo G da Figura 35 nota-se que ele possui um subgrafo K_4, ou seja, seu clique é 4. E como já foi discutido todo grafo completo com n vértices necessariamente precisa de n cores para se efetuar uma coloração. Assim sendo, os vértices do grafo G não podem ser coloridos com menos do que 4 cores. Contudo, esse resultado não é suficiente para determinar o valor do seu número cromático, mas indica uma aproximação para ele.

Figura 35 – Grafo G com um clique K_4.



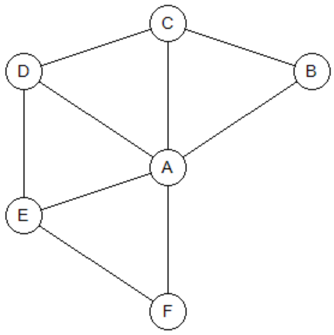
Fonte: Elaborada pelo autor.

Por consequência do raciocínio apresentado no Exemplo 31 pode-se dizer que: se um grafo G possuir um clique, então $\omega(G)$ pode ser considerado um limite inferior para $\chi(G)$. Ou seja, para todo grafo que possui um clique tem-se $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Por outro lado, pode-se tentar buscar um limite superior para o número cromático de um grafo G observando o grau de cada vértice. Adotando como referencial o valor do maior grau dos vértices de G, denotado por $\Delta(G)$, percebe-se que o número de cores para uma coloração do grafo nunca será maior que $\Delta(G)+1$, independentemente do vértice em que se começa a coloração. Isto se explica pelo fato da coloração de vértices adjacentes a um vértice colorido não usar mais do que $\Delta(G)$ cores.

Exemplo 32. Efetuar uma coloração no grafo da Figura 36.

Figura 36 – Grafo para receber uma coloração.

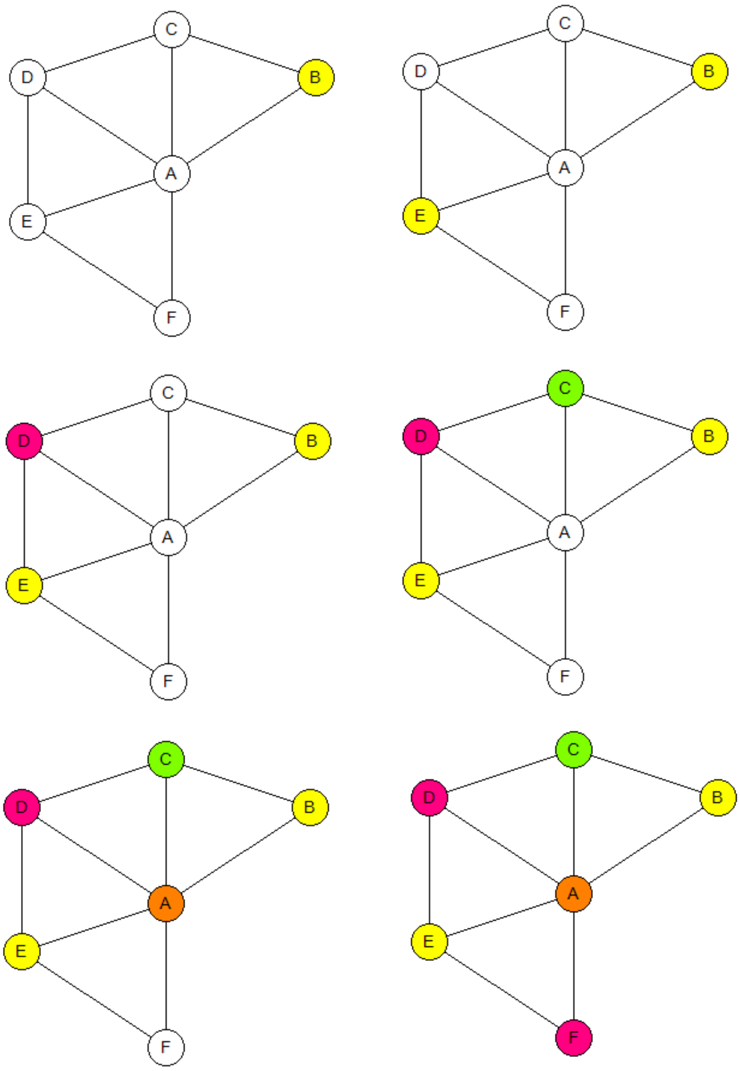


Fonte: Elaborada pelo autor.

Como se nota, o maior grau dos vértices do grafo acima é $d(A) = 5$. Assim, para realizar uma coloração, serão usadas $5+1 = 6$ cores no máximo. Esta quantidade é justificada também pelo fato do grafo ter somente 6 vértices. As cores podem ser: amarela, rosa, verde, azul, laranja e preta.

Para iniciar uma coloração pode-se escolher qualquer um dos seis vértices e atribuir qualquer uma das seis cores disponíveis. Escolhendo o vértice B atribui-se a ele a cor amarela, na sequência, escolhe-se o vértice E, e como ele não é adjacente ao vértice B, pode ser atribuído a ele também a cor amarela. Agora, a cor amarela não pode aparecer nos vértices A, C, D e F, pois alguns desses vértices são adjacentes a B ou E. Escolhendo-se então o vértice D, tem-se cinco cores possíveis para ele, então atribui-se a cor rosa para o vértice D. Para o vértice C, como não pode ser atribuída nem a cor amarela e nem a rosa, escolhe-se para ele uma outra cor dentre 4 cores possíveis, que pode ser a verde. Como o vértice A é adjacente aos vértices já coloridos com as cores amarela, rosa e verde, logo para ele restaram as cores azul, laranja ou preta. Escolhe a cor laranja para o vértice A, sobraram para o vértice F as cores azul, rosa, verde ou preto. Com a escolha da cor rosa para o vértice F, completa-se a coloração do grafo com 4 cores. A sequência de coloração descrita pode ser acompanhada na Figura 37.

Figura 37 – Sequência dos vértices recebendo uma coloração, de cima para baixo, da esquerda para direita.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É facil notar que para um grafo completo ou um ciclo ímpar ocorre $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. O Teorema a seguir garante que tal igualdade é válida somente para grafos completos ou ciclos ímpares, ou seja, se G não for um destes dois grafos, $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Teorema 4 (Teorema de Brooks, 1941)**.** Seja G um grafo simples, conexo e que não é um ciclo ímpar nem um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Para entender o resultado do Teorema são interessantes as seguintes observações:

- $\Delta(G) \neq 0$, pois se $\Delta(G) = 0$, G é um grafo nulo ou desconexo, ou um grafo completo com apenas um vértice, não obedecendo as hipóteses do Teorema.
- $\Delta(G) \neq 1$, pois $\Delta(G) = 1$, tem-se que G é um grafo desconexo ou grafo completo com dois vértices, o que também não faz parte da hipótese.

- Se $\Delta(G) = 2$, o grafo G deve ser um ciclo par ou um caminho pois, pela hipótese do teorema, G é conexo e não pode ser um ciclo ímpar. Logo, $\chi(G) = 2$.

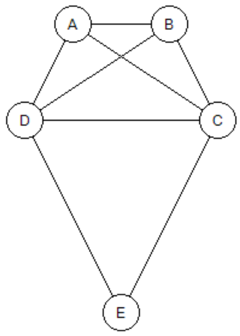
Deste modo, para a aplição deste teorema, assume-se que: $\Delta(G) \geq 3$.

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em (GROSS; YELLEN, 1998, p. 334).

O exemplo a seguir ajuda a ilustrar o Teorema de Brooks.

Exemplo 33. Analisando o grafo G abaixo nota-se que:

Figura 38 – Grafo G para determinação do $\chi(G)$



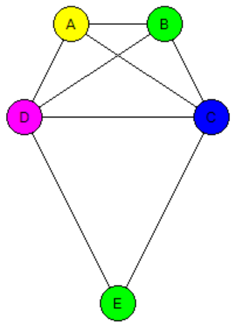
Fonte: Elaborada pelo autor.

1. O grafo G contém um clique de tamanho 4, então necessariamente $\chi(G) \geq 4$.
2. O grafo G é conexo, não completo e $\Delta(G) \geq 3$, portanto obedece as condições do Teorema de Brooks. Nota-se também que $\Delta(G) = 4$, assim, através do Teorema conclui-se que: $\chi(G) \leq 4$.

   De 1 e 2, $4 \leq \chi(G) \leq 4$, o que implica em $\chi(G) = 4$.

Um exemplo de uma coloração para G usando 4 cores: amarela, azul, rosa e verde está na Figura 39.

Figura 39 – Grafo 4-cromático



Fonte: Elaborada pelo autor.

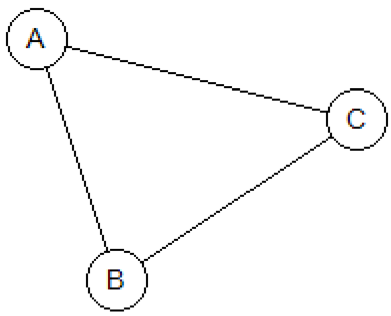
É claro que para obter o número cromático da maioria dos grafos não é tão simples assim. Somente em alguns casos o número cromático pode ser determinado exatamente através dos limites inferior e superior.

4.4 Polinômio cromático

Uma questão interessante de contagem que envolve a coloração de um grafo é o cálculo da quantidade de maneiras distintas de se atribuir uma coloração a um grafo com uma determinada quantidade de cores.

Para refletir sobre essa questão toma-se, por exemplo, o grafo da Figura 40.

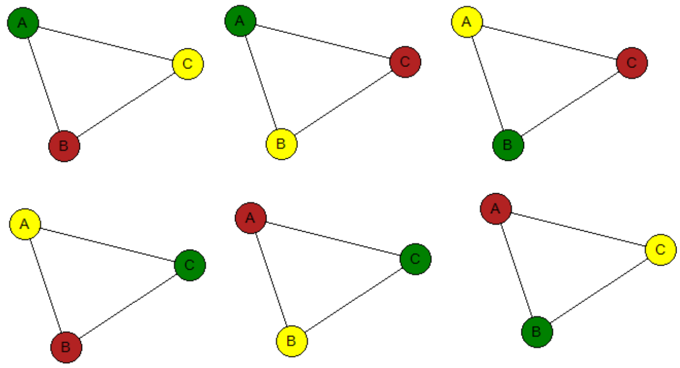
Figura 40 – Grafo a ser colorido.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando o grafo acima é fácil perceber que o seu número cromático é três, pois os três vértices são adjacentes entre si. Por isso, para lhe atribuir uma coloração são necessárias no mínimo três cores, uma cor diferente para cada vértice. Usando, por exemplo, as cores amarela, vermelha e verde, pode-se obter 6 colorações diferentes para o grafo como pode ser visto na Figura 41.

Figura 41 – Diferentes colorações.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, aumentando o número de cores para 4, a quantidade de diferentes colorações aumenta. Daí, ao invés de enumerar todos os resultados, pode-se usar um processo aritmético para determinar essa quantidade.

Começando por escolher um vértice arbitrário, pode-se colori-lo com qualquer uma das 4 cores. Para cada cor escolhida, para o segundo vértice tem-se outras 3 cores. Para cada uma dessas opções, o terceiro vértice tem apenas 2 cores para serem escolhidas. Logo, pelo principio multiplicativo, tem-se: $4 \times 3 \times 2 = 24$. Então, com 4 cores tem-se 24 formas distintas de coloração. Portanto, existem várias formas de se atribuir uma coloração a uma grafo dado uma quantidade k de cores.

Com tudo isso exposto, pode-se introduzir o conceito de polinômio cromático.

Definição 34. O número de diferentes colorações de um grafo por k cores pode ser calculado usando uma função especial que é associada a cada grafo, denominada **Polinômio Cromático**, geralmente representado por $P_G(k)$.

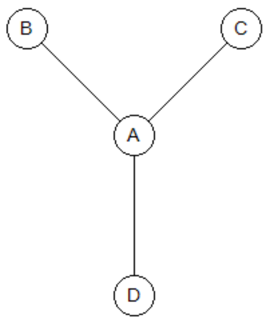
Para um exemplo de aplicação do conceito, seja novamente o grafo da Figura 40. Será determinada a quantidade de formas diferentes de se colorir seus vértices usando k cores. Para isso, pode-se começar a pintar qualquer um dos três vértices. Fixando, por exemplo, o vértice A tem-se k opções para colorí-lo. Para o segundo vértice, que pode ser o B, tem-se $k-1$ opções de cor. E sobram $k-2$ possibilidades para o vértice C. Logo, o total de modos diferentes de se colorir os vértices do grafo é dado por:

$$P_G(k) = k \times (k-1) \times (k-2) = k^3 - 3k + 2k$$

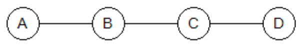
É facil perceber no polinômio acima que para $k = 0$ ou $k = 1$ ou $k = 2$ tem-se, $P_G(k) = 0$, ou seja, para $k < 3$ existem zero formas de colorir os vértices do grafo. Entretanto, para $k = 3$, tem-se 6 maneiras diferentes de se fazer isso. Sendo 3 o menor inteiro positivo que satisfaz $P_G(k) > 0$, ele é o número cromático desse grafo, como já foi mencionado antes.

Em geral um polinômio cromático não define um grafo. Isso pode ser visto nos grafos das Figuras 42a e 42b. Embora eles sejam grafos diferentes ambos tem o mesmo polinômio cromático $P_G(k) = k(k-1)^3$ ou ainda $P_G(k) = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k$.

Figura 42 – Grafos com polinômios cromáticos iguais.



(a) Árvore



(b) Grafo P_4.

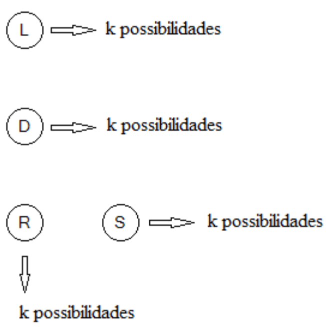
Fonte: Elaborada pelo autor.

Para alguns grafos em particular, a determinação do polinômio cromático pode ser realizada de maneira bem simples através da aplicação direta do princípio multiplicativo. São apresentados a seguir os polinômios de alguns desses grafos.

Polinômio cromático de um grafo nulo:

Na figura 43 tem-se um grafo nulo com quatro vértices e nenhuma aresta, logo não existem vértices adjacentes. Sendo assim, não há restrição para se colorir seus vértices, e por isso para cada um deles sempre tem-se k possibilidades de cores.

Figura 43 – Grafo nulo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, aplicando o princípio multiplicativo, encontra-se:

$$P_G(k) = k^4.$$

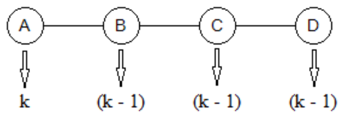
Usando o mesmo raciocínio para um grafo nulo com n vértices, o seu polinômio cromático fica determinado por:

$$P_G(k) = k^n.$$

Polinômio cromático de um caminho:

Considere o grafo da Figura 44, que é um caminho. Tem-se k possibilidades de coloração para o vértice A. Como para o vértice B não pode ser usado a mesma cor que do vértice A, então tem-se $(k-1)$ possibilidades para esse vértice. Já para o vértice C não pode ser usada a mesma cor do vértice B, mas pode ser repetido a cor do vértice A, logo tem-se $(k-1)$ possibilidades para o vértice C. E para o vértice D, a única restrição é não poder usar a mesma cor do vértice C, restando para ele $(k-1)$ possibilidades de cores.

Figura 44 – Grafo caminho.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando o princípio multiplicativo, obtém-se:

$$P_G(k) = k(k-1)^3 = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k.$$

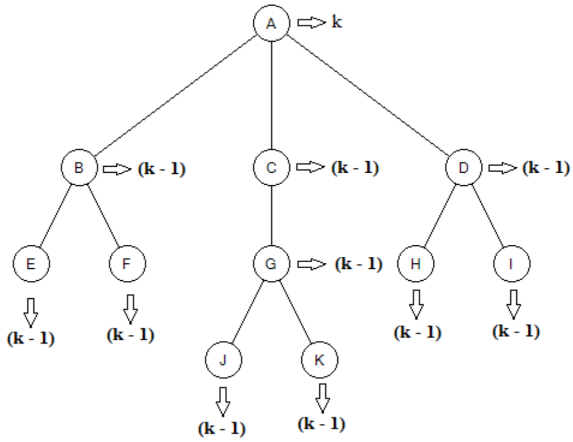
De forma análoga para um grafo que representa um caminho de n vértices, o polinômio cromático fica determinado por:

$$P_G(k) = k(k-1)^{n-1}.$$

Polinômio cromático de uma árvore:

Seja a árvore da Figura 49, para colori-la tem-se k cores para o vértice A, e uma vez atribuída uma cor a esse vértice sobram $(k-1)$ cores para os vértices B, C, e D, já que os mesmos são adjacentes ao vértice A. Os vértices E e F são adjacentes ao vértice B e, portanto, não podem receber a mesma cor que ele, mas podem receber a mesma cor do vértice A. Então para os vértices E e F, tem-se $(k-1)$ cores possíveis. Da mesma forma, tem-se $(k-1)$ possibilidades de cores para os vértices G, H e I. E por último, os vértices J e K podem ser coloridos com $(k-1)$ cores, pois eles são adjacentes a G mas podem receber a mesma cor do vértice C.

Figura 45 – Polinômio cromático de uma árvore.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando o princípio multiplicativo obtém-se:

$$P_G(k) = k(k-1)(k-1)(k-1)(k-1)(k-1)(k-1)(k-1)(k-1)(k-1)(k-1).$$

ou simplesmente,

$$P_G(k) = k(k-1)^{10}.$$

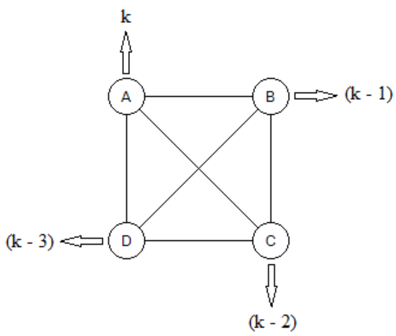
Usando um raciocínio similar para uma árvore de n vértices, tem-se:

$$P_G(k) = k(k-1)^{n-1}.$$

Polinômio cromático um grafo completo:

Seja o grafo completo da Figura 46. Ao escolher o vértice A, para iniciar a coloração, tem-se k cores, mas todos os quatro vértices estão conectados um ao outro por uma aresta, então uma cor só pode aparecer uma única vez. Portanto, para o vértice B tem-se $(k-1)$ possibilidades. Para o vértice C tem-se $(k-2)$ possibilidades e para o vértice D restam $(k-3)$ possibilidades de cores.

Figura 46 – Grafo completo K_4



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, pelo princípio multiplicativo, obtém-se:

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)(k-3) = k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k.$$

De forma análoga para um grafo completo K_n, tem-se:

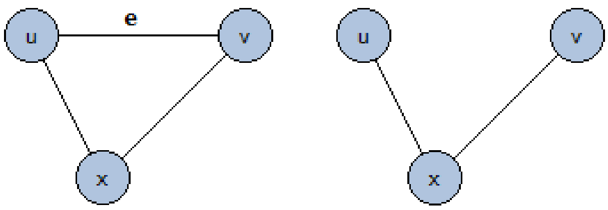
$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)...(k-(n-1)).$$

4.5 Teorema da remoção-contração

Nesta seção é apresentado um método que ajuda obter o polinômio cromático de um grafo simples qualquer de forma recursiva. Para isso, são apresentados os mecanismos de remoção e contração de arestas.

Remoção de arestas: Seja G um grafo simples e nele considere a aresta e que liga os vértices u e v, ou seja, $e = \{u, v\}$ como está representado na Figura 47a. Considere $G - e$ o grafo obtido a partir de G, depois de removida a aresta e. Esta operação é chamada de **remoção de aresta**, e pode ser observado na Figura 47b.

Figura 47 – Remoção da aresta e de um grafo G.

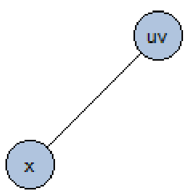


(a) Grafo G (b) $G - e$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Contração de arestas: Na contração de arestas, denotada por G/e, todas as arestas que incidem nos vértices **u** e **v** do grafo $G - e$, passam a incidir em um único vértice, resultante da união de **u** com **v**. Nesse processo, eliminam-se todas as possíveis arestas múltiplas, como pode ser observado na Figura 48.

Figura 48 – Exemplo de contração de arestas G/e.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com esses conceitos em mente, segue um teorema que permite representar o polinômio cromático de um grafo simples, com m arestas, como a diferença entre dois polinômios cromáticos de dois grafos, com no máximo $m-1$ arestas. Esse resultado é chamado de Teorema da Remoção-Contração.

Teorema 5. Suponha que o grafo G tenha uma aresta $e=\{u,v\}$, e considere $P_{G-e}(k)$ e $P_{G/e}(k)$ os polinômios cromáticos, com k cores, dos grafos $G-e$ e G/e respectivamente. Então para o grafo G simples, $P_G(k)=P_{G-e}(k)-P_{G/e}(k)$.

Demonstração:

Considere o grafo $G-e$ e o seu polinômio cromático $P_{G-e}(k)$. Algumas colorações de $G-e$ também são colorações de G, a saber todas as colorações em que os vértices u e v não tenham a mesma cor. Por outro lado, é fácil notar que o número de colorações de $G-e$ em que os vértices u e v tenham a mesma cor é igual ao número de colorações do grafo G/e, ou seja, $P_{G/e}(k)$. Finalmente sabendo que só podem ocorrer esses dois eventos, ou os vértices u e v são coloridos com cores diferentes ou os vértices u e v são coloridos com a mesma cor. Então:

$$P_{G-e}(k)=P_G(k)+P_{G/e}(k),$$

e que pode ser escrito como:

$$P_G(k)=P_{G-e}(k)-P_{G/e}(k).$$

■

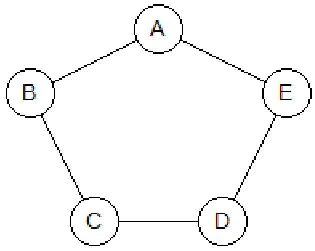
Como consequência desse teorema que acabou de ser demonstrado pode-se demonstrar um outro teorema, como segue:

Teorema 6. Para todo grafo G simples com n vértices, $P_G(k)$ é um polinômio de grau n.

Demonstração:
A demonstração é por indução sobre o número de arestas. Suponha que G seja um grafo simples com n vértices e m arestas. Para $m=0$ o grafo $P_G(k)$ é um polinômio de grau n.
Sendo G um grafo sem arestas e com n vértices, com k cores distintas para colorir os seus vértices, aplicando o princípio multiplicativo, tem-se: $P_G(k)=k^n$, que claramente é um polinômio de grau n. Assim, a afirmação é verdadeira.
Agora, suponha que o teorema seja válido para grafos simples com um número de arestas menor do que m e prova-se que vale também para m arestas.
Sabendo que $G-e$ tem menos que m arestas e tem n vértices, e G/e tem menos que m arestas e tem $n-1$ vértices. Por hipótese de indução $P_{G-e}(k)$ é um polinômio de grau n e $P_{G/e}(k)$ é um polinômio de grau $n-1$. Portanto, pelo teorema 5, $P_G(k)=P_{G-e}(k)-P_{G/e}(k)$ é um polinômio de grau n. ■

Exemplo 34. Considere o grafo da Figura 49 abaixo.

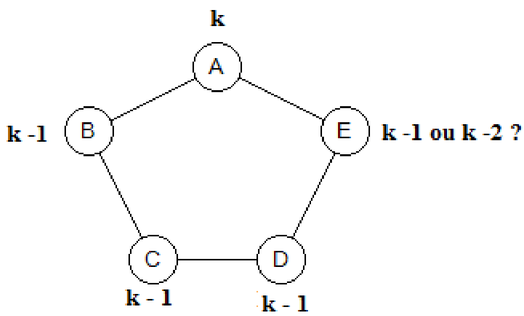
Figura 49 – C_5



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao determinar o polinômio cromático do grafo da Figura 49, usando k cores e iniciando pelo vértice A, no sentido anti-horário, chega-se a uma impasse no vértice E, pois, se os vértices A e D forem coloridos com cores diferentes, então para o vértice E restariam $(k-2)$ cores, mas se A e D forem coloridos com cores iguais, então para E restariam $(k-1)$ cores.

Figura 50 – Possibilidades de coloração de C_5.

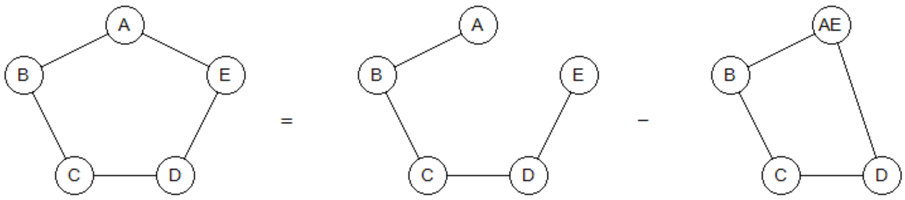


Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando situações assim acontecem, pode-se usar o Teorema da Remoção-Contração para se obter o polinômio cromático de um grafo simples. E o método a ser utilizado é o de sequências definidas recursivamente, como é exposto a seguir.

No grafo C_5 da Figura 49, considerando a aresta $e_1 = \{A, E\}$ e aplicando o Teorema da Remoção-Contração, tem-se: $P_{C_5}(k) = P_{C_5 - e_1}(k) - P_{C_5/e_1}(k)$. Cuja representação gráfica pode ser vista na Figura 51.

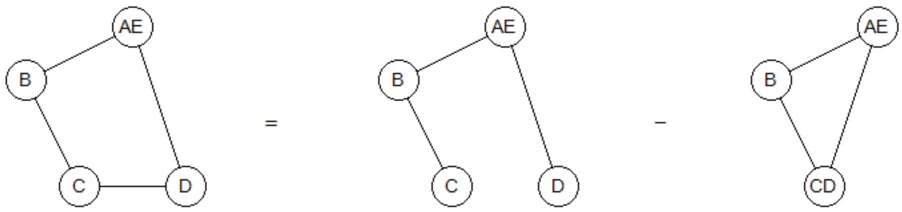
Figura 51 – Representação gráfica de $P_{C_5}(k)$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando o grafo C_4 da Figura 51 e $e_2 = \{C, D\}$ uma de suas arestas e aplicando o Teorema da Remoção-Contração, obtém-se: $P_{C_4}(k) = P_{C_4 - e_2}(k) - P_{C_4/e_2}(k)$, expresso simbolicamente na Figura 52.

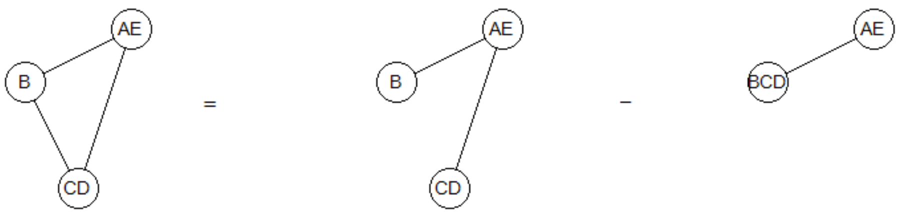
Figura 52 – Representação gráfica de $P_{C_4}(k)$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Repetindo o Teorema 5 para o grafo C_3 da Figura 52 e considerando $e_3 = \{B, CD\}$, encontra-se para seu polinômio cromático a função $P_{C_3}(k) = P_{C_3 - e_3}(k) - P_{C_3/e_3}(k)$, representada graficamente na Figura 53.

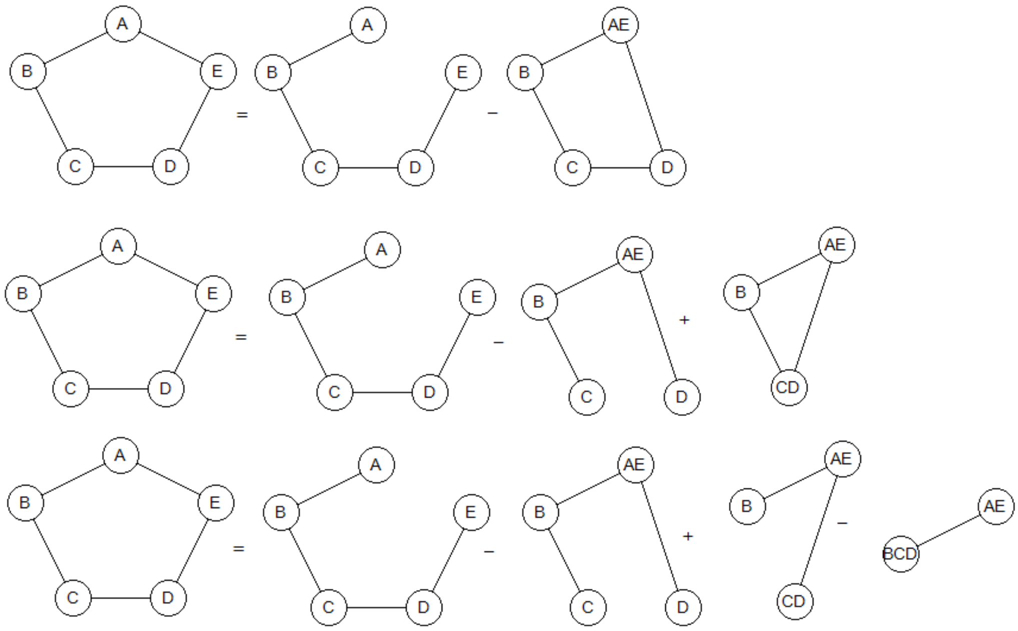
Figura 53 – Representação gráfica de $P_{C_3}(k)$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma, pode-se determinar o polinômio cromático do grafo C_5 de maneira **recursiva** como está representado na Figura 54.

Figura 54 – Representação gráfica de $P_{C_5}(k)$ recursivamente.



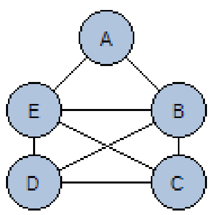
Fonte: Elaborada pelo autor.

Algebricamente o polinômio cromático do grafo C_5 é dado por:

$$P_{C_5}(k) = P_{C_5-e_1}(k) - P_{C_4-e_2}(k) + P_{C_3-e_3}(k) - P_{C_3/e_3}(k)$$
$$P_{C_5}(k) = k(k-1)^4 - k(k-1)^3 + k(k-1)^2 - k(k-1)$$
$$P_{C_5}(k) = k^5 - 5k^4 + 10k^3 - 10k^2 + 4k.$$

Exemplo 35. Determinar o polinômio cromático e o número cromático do grafo da Figura 55 a seguir.

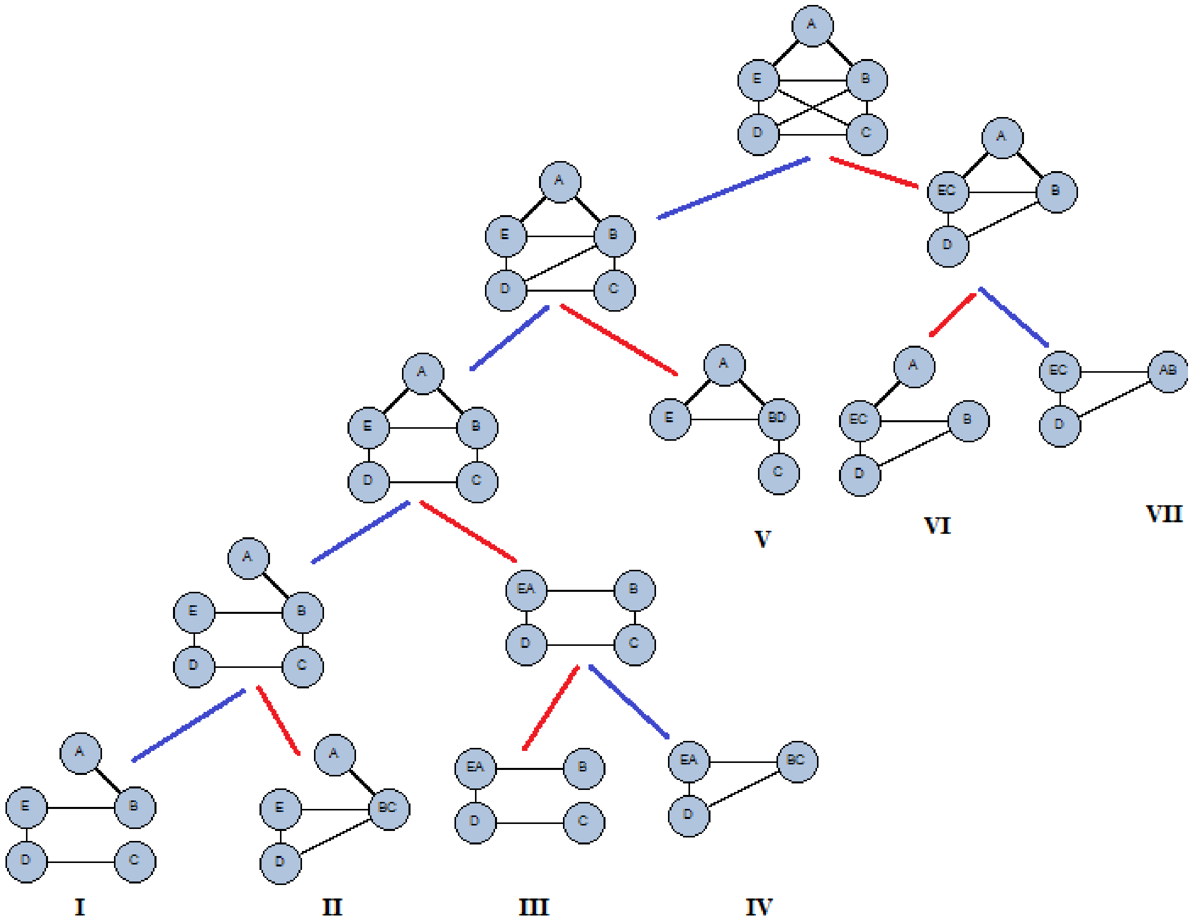
Figura 55 – Grafo H com cinco vértices.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando o método recursivo através do Teorema Remoção-Contração no grafo da Figura 55, obtem-se a árvore dos grafos que fornece o polinômio cromático do grafo H, como está representado na Figura 56. Na árvore abaixo cada traço azul representa um sinal de positivo e cada traço vermelho representa um sinal de negativo.

Figura 56 – Método Remoção-Contração para obter o polinômio cromático do grafo H.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, o polinômio cromático do grafo H será dado pela soma dos polinômios cromáticos dos sete grafos obtidos nesse processo recursivo, ficando:

$$P_H(k) = I - II - III + IV - V - VI + VII$$

$$P_H(k) = k(k-1)^4 - k(k-1)^2(k-2) - k(k-1)^3 + k(k-1)(k-2) - k(k-1)^2(k-2) -$$
$$k(k-1)^2(k-2) + k(k-1)(k-2)$$

$$P_H(k) = k(k-1)^4 - 3k(k-1)^2(k-2) - k(k-1)^3 + 2k(k-1)(k-2)$$

$$P_H(k) = k(k-1)[(k-1)^3 - 3(k-1)(k-2) - (k-1)^2 + 2(k-2)]$$

$$P_H(k) = k(k-1)[(k-1)(k^2-6k+8) + 2(k-2)]$$

$$P_H(k) = k(k-1)[(k-1)(k-2)(k-4) + 2(k-2)]$$

$$P_H(k) = k(k-1)(k-2)[(k-1)(k-4) + 2]$$

$$P_H(k) = k(k-1)(k-2)[k^2 - 5k + 6]$$

$$P_H(k) = k(k-1)(k-2)^2(k-3)$$

ou

$$P_H(k) = k^5 - 8k^4 + 23k^3 - 28k^2 + 12k$$

Para o cáculo do número cromático $\chi(H)$, basta substituir a variável k por valores inteiros positivos.

Sendo assim, é fácil notar em $P_H(k) = k(k-1)(k-2)^2(k-3)$ que $P_H(1) = P_H(2) = P_H(3) = 0$. Mas, para $k = 4$, tem-se: $P_H(4) = 4(4-1)(4-2)^2(4-3) = 4.3.2^2.1 = 48$. Logo, o número cromático de H é 4 e, com 4 cores distintas pode-se atribuir 48 colorações diferentes ao grafo H.

Algumas propriedades interessantes sobre os polinômios cromáticos podem ainda ser estudadas pelos alunos e professor, tais como, o grau do polinômio é igual ao número de vértices do grafo, o coeficiente do termo de maior grau é 1, o coeficiente do termo de grau imediatamente inferior ao de maior grau é igual ao número de arestas do grafo com um sinal negativo, os coeficientes têm sinais alternadamente positivos e negativos e o termo constante é zero.

O estudo dos polinômios cromáticos pode ser bastante explorado pelo professor no Ensino Médio visando o desenvolvimento de habilidades básicas de contagem, em especial, o princípio multiplicativo. No Capítulo 5 será apresentada uma sequência didática envolvendo Polinômio Cromático e Número Cromático.

CAPÍTULO

5 ATIVIDADES

Pensando em tudo o que foi exposto anteriormente, neste capítulo serão apresentados exemplos de atividades, que podem ser aplicadas em sala de aula, relacionando grafos e enumeração. As atividades são lúdicas, e usam os jogos Nim e Dominó, a coloração de grafos e os polinômios cromáticos.

A primeira atividade foi aplicada em sala de aula e as demais são propostas que não foram aplicadas.

5.1 Primeira atividade: Jogo Nim.

Nesta seção as principais referência são: (BOUTON, 1902), (IME, 2014) e (INEZ,).

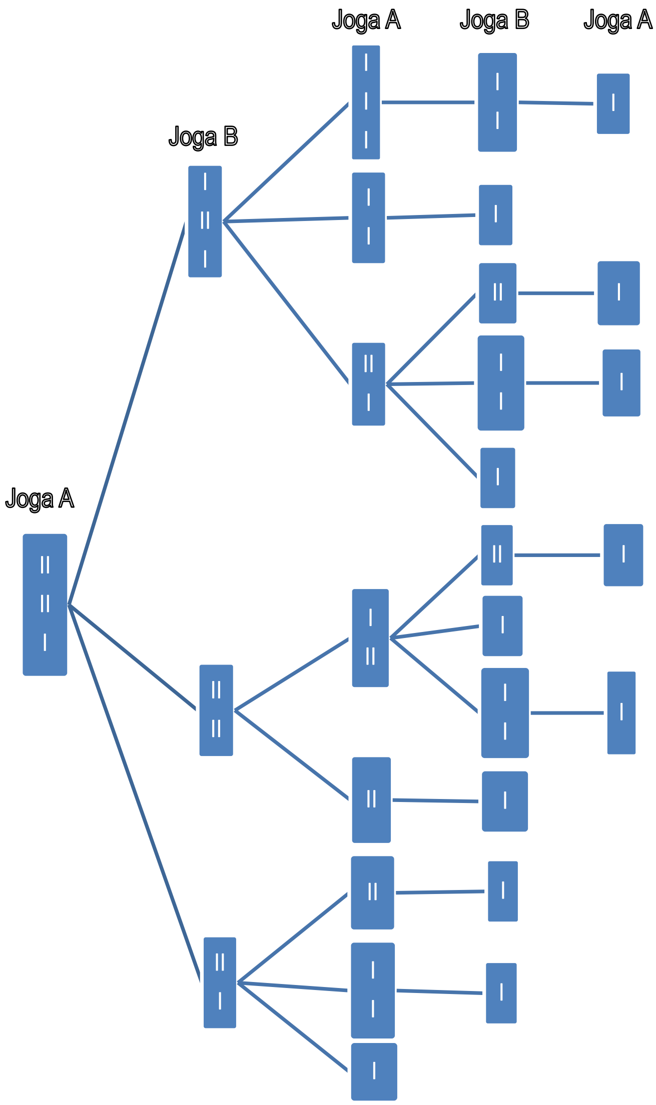
O jogo Nim é usado em situações de aprendizagem que têm como objetivo principal ensinar divisão e números binários. Contudo, o jogo pode oferecer também outras possibilidades de abordagem em sala de aula como o desenvolvimento da habilidade de enumerar. No caso específico do jogo Nim, a enumeração das jogadas pode ser feita através de diagramas de árvore, ou de tomada de decisões, que nada mais é do que a representação de todas as possíveis jogadas através de um esquema que lembra os ramos de uma árvore, auxiliando a elaboraração de estratégias vencedoras. O diagrama de árvore é um exemplo de grafo, o grafo tipo Árvore, ou Árvore somente, visto no capítulo 2.

Não se sabe ao certo a sua origem, mas tudo indica que o jogo Nim foi inventado pelos chineses e que desde o século XVI é jogado na Europa. Acredita-se que o nome Nim deriva da palavra alemã *nimm* cujo significado é pegar.

O jogo consiste em colocar, sobre uma mesa, várias fileiras de palitos ou qualquer outro objeto que possa ser facilmente manipulado. O jogo se desenvolve com dois jogadores, que vão se alternando. Cada jogador, em sua vez, deve escolher uma fileira para retirar a quantidade que quiser de palitos, sendo no mínimo um palito e no máximo toda uma fileira. Perde o jogo quem retirar o último palito da mesa.

É interessante investigar se o jogo Nim é um jogo de azar ou de estratégia. Para isso, consideram-se dois jogadores A e B, jogando o Nim, com a seguinte configuração sobre a mesa: uma fileira com 1 palito e duas fileiras com 2 palitos cada. São analisadas todas as possíveis maneiras de se desenvolver esta configuração usando um grafo tipo Árvore, onde os vértices são as configurações, e as arestas as conectam. Supõe-se que é a vez de A jogar, seguido por B, e assim por diante, até que um deles retire o último palito e dê a vitória ao adversário, como pode ser visto na Árvore da Figura 57.

Figura 57 – Árvore: etapa final de uma partida do jogo Nim.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Árvore permite prever qual jogador pode ganhar mais rapidamente e como. Uma possível sequência seria: *A joga; se ele retirar uma fileira inteira de dois palitos e na sequência o jogador B retirar a outra fileira inteira de dois palitos, o jogador A se vê obrigado a retirar o* *último palito da mesa, confirmando sua derrota.*

Analisando as doze possibilidades do desenvolvimento do jogo no grafo da Figura 57, pode-se notar que existe uma estratégia em que o jogador A ganha sempre, independentemente da jogada que B realize. Por exemplo, supondo que o jogador A retire a fileira que tem um único palito, na sequência o jogador B retire um palito de uma fileira com dois palitos, então o jogador A retira os 2 palitos da outra fileira, restando 1 palito para o jogador B. Uma outra possibilidade seria: o jogador A retirar a fileira que tem um único palito, na sequência o jogador B retirar uma das fileiras com dois palitos, sobrando uma única fileira com 2 palitos; o jogador A, na sequência retira 1 palito, restando 1 palito para o jogador B.

Evidentemente que no início, se nenhum dos dois jogadores tiver uma estratégia, eles irão retirar os palitos de forma aleatória. Contudo, quando a configuração do jogo estiver com poucos palitos em cada fileira, como na Figura 57, os jogadores podem visualizar uma estratégia vencedora a partir da Árvore.

Em vista dos argumentos apresentados, acentua-se fortemente a ideia de que o Nim realmente é um jogo estratégico. O processo de buscar estratégias vencedoras é seu aspecto mais interessante, e pode ser usado em sala de aula, como um primeiro contato com a ideia de enumeração, que é, por sua vez, a primeira abordagem na resolução de problemas em combinatória. Abaixo segue um possível roteiro de aula com o Jogo Nim, que orienta minimamente o professor no desenvolvimento de uma atividade com o jogo. O roteiro foi aplicado pelo autor desta dissertação, e seu relato está na subseção seguinte.

1. Apresentar o Jogo Nim: origem, regras.
2. Dividir a classe em duplas, e propor uma configuração inicial.
3. Deixar os alunos jogarem.
4. Introduzir o conceito de Grafos.
5. Propor a enumeração de todas as possíveis partidas, começando com a configuração anterior, através de uma Árvore.
6. Questionar os alunos sobre a possibilidade de haver uma estratégia vencedora. A Árvore ajuda a encontar essa estratégia?

5.1.1 Relato de atividade em sala de aula

O professor convidou doze alunos[1] do 9º ano de uma Escola Estadual para realizarem uma atividade sobre o Jogo Nim, com o objetivo de explorar estratégias ótimas através de um

[1] Cada aluno que participou dessa atividade foi identificado pela letra inicial do seu nome.

grafo tipo Árvore. Os materiais usados foram: palitos de sorvete, cópias impressas da atividade, folhas para rascunho, lápis e borracha para cada aluno.

O professor dividiu a turma em duplas, e explicou sobre a origem e as regras do jogo. Em seguida apresentou a definição de grafos, fez exemplos e induziu os alunos a modelarem uma partida através de uma Árvore. Esse processo inicial ficou registrado na Figura 58 abaixo.

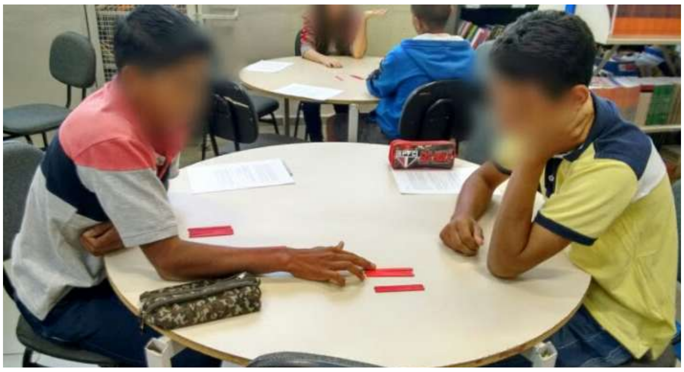
A atividade foi realizada na sala de leitura da escola, em dois dias, cada encontro durou 1 hora, sendo que no primeiro dia compareceram onze alunos e no segundo dia dez alunos. O desenvolvimento da atividade transcorreu muito bem, e houve grande envolvimento dos alunos. A visualização das possíveis jogadas através da Árvore os ajudou a encontrar a estratégia vencedora.

Figura 58 – Professor explicando as regras do jogo Nim.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na sequência o Nim foi jogado algumas vezes pelos alunos para a sua familiarização com o jogo, como registrado na Figura 59. Eles jogaram usando diferentes configurações, como:

Figura 59 – Alunos jogando Nim pela primeira vez.



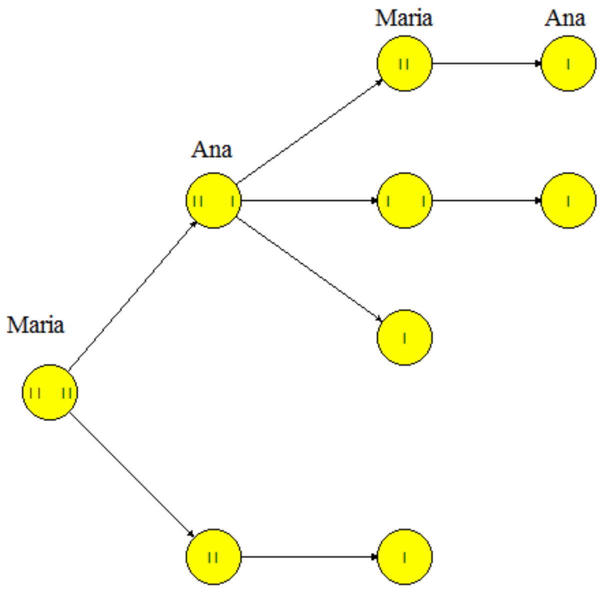
Fonte: Elaborada pelo autor.

- Primeira fileira com 2 palitos, segunda fileira com 3 palitos e a terceira fileira com 5 palitos.

- Primeira fileira com 5 palitos e a segunda fileira também com 5 palitos.
- Primeira fileira com 1 palito, segunda fileira com 3 palitos, terceira fileira com 6 palitos
- Primeira fileira com 2 palitos, segunda fileira com 3 palitos e a terceira fileira com 4 palitos.

O professor apresentou a árvore de possibilidades da Figura 60. Nela estão todas as possibilidades para um jogo fictício entre as adversárias Maria e Ana, começando com duas fileiras de dois palitos.

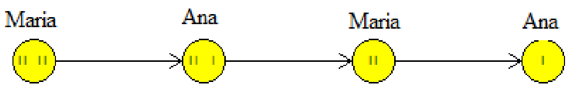
Figura 60 – Árvore de possibilidades.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O professor usou a árvore acima para ressaltar a importância da enumeração para se chegar a uma estratégia vencedora. Falou que cada possibilidade de desenvolvimento do jogo está representada na árvore por meio de um caminho como ilustrado na Figura 61.

Figura 61 – Possibilidade 1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Já a possibilidade ilustrada na Figura 62 representa um outro caminho.

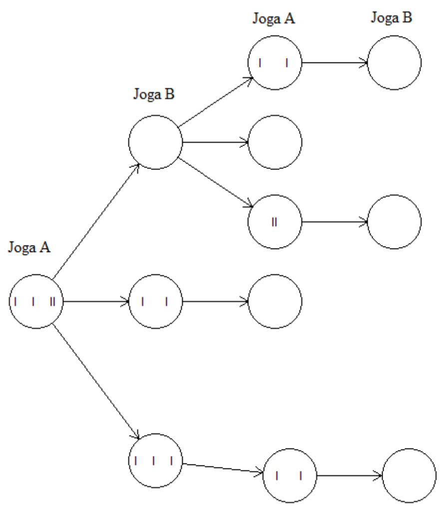
Figura 62 – Possibilidade 2.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando a árvore da Figura 60 notam-se 4 diferentes caminhos para o jogo, sendo que nos dois primeiros vence a jogadora Maria, e nos dois últimos caminhos vence a jogadora Ana. Analisando a mesma figura alguns alunos observaram que ao iniciar o jogo Maria não consegue encontrar uma configuração que a favoreça. Se ela retirar uma fileira inteira ou um palito de uma das fileiras, provavelmente perderá a partida, pois se sua adversária analisar a árvore de possibilidades poderá obter uma estratégia ótima que lhe garantirá a vitória.

Na sequência da atividade o professor pediu aos alunos que completassem a árvore da Figura 63, composta inicialmente de duas fileiras com somente um palito, e uma fileira com dois palitos.

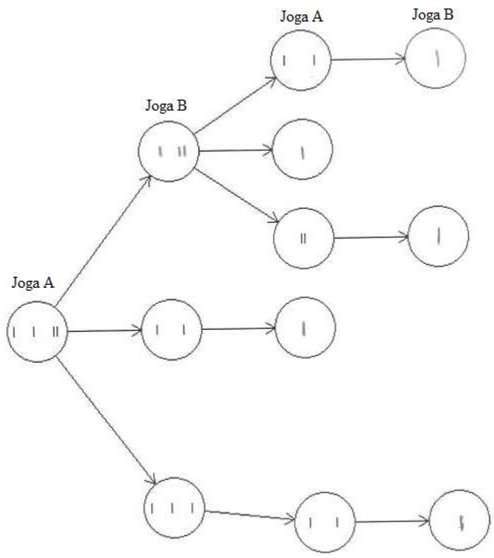
Figura 63 – Árvore de possibilidades para completar.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Todos os alunos completaram corretamente a árvore. Na Figura 64 está a resposta do aluno M. A respeito dessa figura o professor perguntou aos alunos quantas possibilidades existiam para o desenvolvimento do jogo. E todos responderam que existiam 5 possibilidades.

Figura 64 – Árvore de possibilidades completada pelo aluno M.



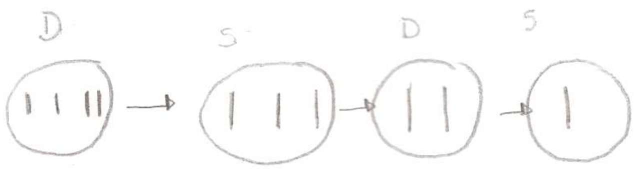
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 65 – Resposta da aluna S.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dando sequência à atividade, foi pedido às duplas que jogassem o jogo Nim com a distribuição dos palitos mostrada na da Figura 64. A Figura 66 a seguir mostra a partida entre as alunas *D* e *S*.

Figura 66 – Construção feita pela aluna S.

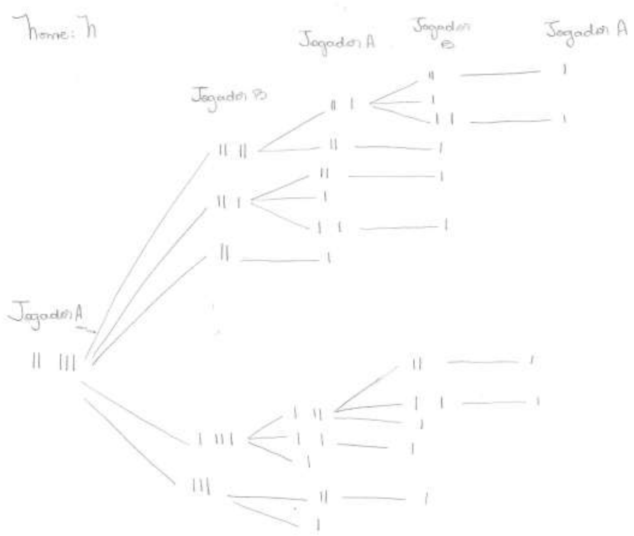


Fonte: Elaborada pelo autor.

A aluna *D* ao começar a partida escolheu uma estratégia que lhe assegurou a vitória. Ela relatou que ao observar a Árvore de configurações, percebeu que, retirando um palito da fileira com dois palitos garantiria a sua vitória.

Na sequência da atividade, o professor apresentou a seguinte configuração: uma fileira com 2 palitos e outra com 3 palitos. Antes que os alunos iniciassem o jogo, o professor pediu que tentassem construir a Árvore com todas as possibilidades de configurações e jogadas.

Figura 67 – Construção feita pela aluna N.

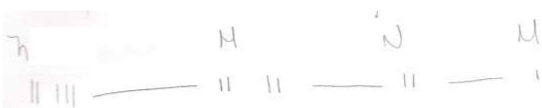


Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesta tarefa os alunos tiveram mais dificuldade. Relataram que a árvore ficou com muitas possibilidades, ficando difícil de processar e usar toda a informação. Mas mesmo considerando essa dificuldade, os resultados foram bons, pois foram motivados a enumerar em uma situação lúdica.

Ao iniciar o jogo as duplas foram orientadas a anotar todas as jogadas, como fez a aluna N, na Figura 67. Na Figura 68 pode-se ver o caminho que levou a jogadora N a ganhar a partida.

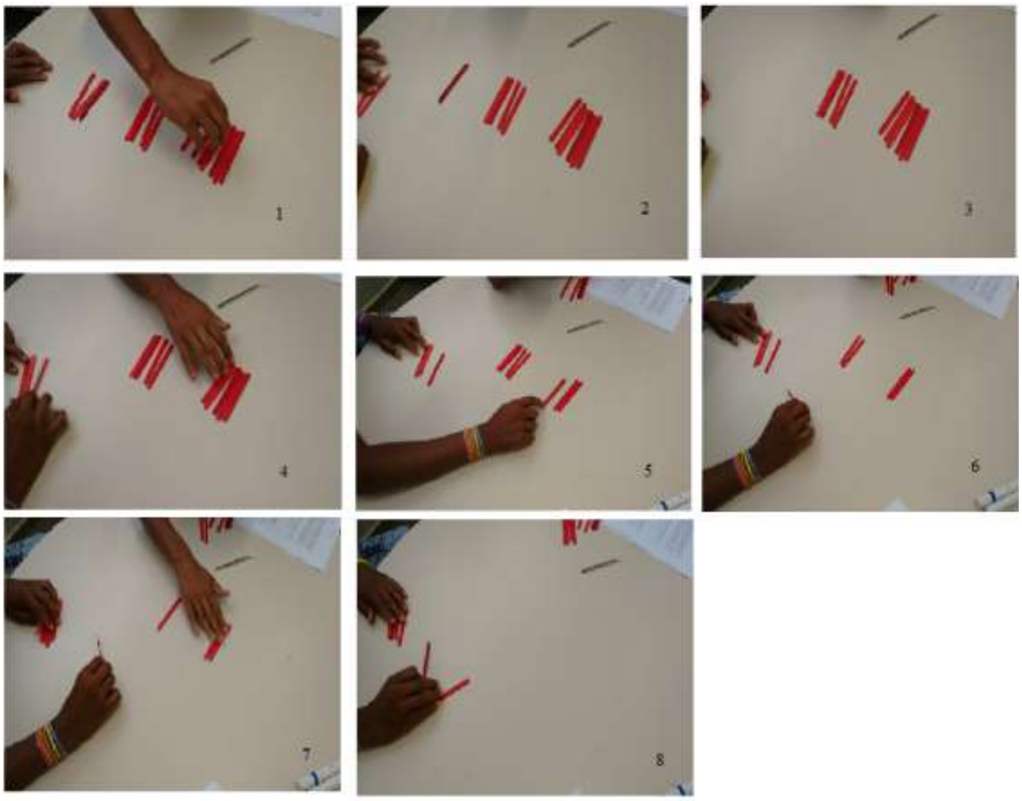
Figura 68 – Anotação da aluna N.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por último, os alunos ficaram a vontade para jogar o Nim usando estratégias aprendidas ou criando novas estratégias. Na Figura 69 a seguir estão registrados alguns momentos e uma partida entre os alunos T e E. No quadro 6 da figura fica claro que o aluno E usou a estratégia de deixar duas fileiras com o mesmo número de palitos para o seu adversário T. Na sequência, embora não apareça nos quadros, o jogador T retira um palito de uma das fileiras. E finalmente, no quadro 7 aparece o aluno E retirando a fileira com dois palitos e garantindo sua vitória, pois quem teve que retirar o último palito foi o jogador T, como aparece no quadro 8.

Figura 69 – A partida dos alunos T e E.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O professor observou que nos dias seguintes à atividade, alguns alunos disputaram partidas contra colegas que não haviam participado da atividade sobre o Jogo Nim. Eles aplicaram as estratégias aprendidas, como pode ser visto na Figura 70

Figura 70 – Alunos iniciando uma partida.

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 Segunda atividade: Dominó

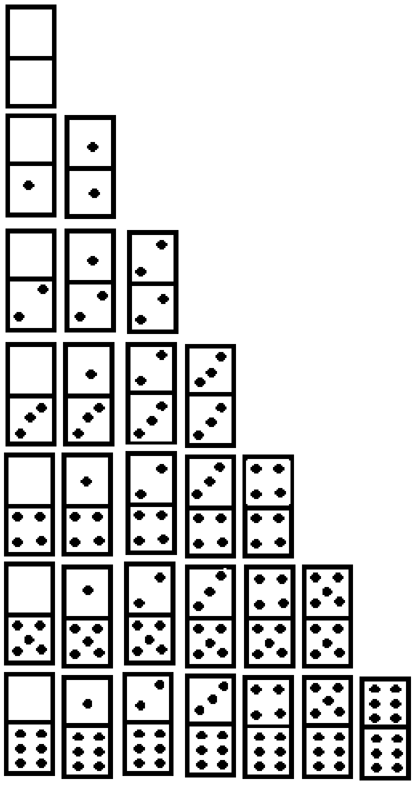
Nesta seção com respeito a parte teórica foi utilizada a referência (LIVRESPORTS, 2010).

O nome dominó provavelmente deriva da expressão latina *"domino gratias"* que quer dizer *"graças ao Senhor"*. Acredita-se que o Dominó surgiu na China por volta de 234 e 181 a.C.. No Brasil, o jogo teria chegado com os portugueses no século XVI virando passatempo para os escravos.

Formado normalmente por 28 peças retangulares, apelidadas de "pedras". Cada peça tem uma das suas faces dividida ao meio, com pontos em cada uma das partes, indicando valores numéricos de um a seis ou sem nenhum ponto, representando o zero. Neste texto é usada a expressão "a pontuação da face-metade" para se referir a um dos dois valores numéricos de uma peça.

O conjunto das peças do Dominó pode ser representado conforme a Figura 71.

Figura 71 – Jogo de Dominó.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando as 28 peças do Dominó, nota-se que elas são formadas por todas as combinações simples possíveis, dois a dois, dos números de 0 a 6, mais todos os agrupamentos compostos por dois números iguais, chamadas de "dublê," a saber, (0 e 0), (1 e 1), (2 e 2), (3 e 3), (4 e 4), (5 e 5) e (6 e 6).

No jogo são usados vários termos específicos tais como:

- "Colocar a pedra" ou "encaixar" significa dizer que duas peças serão colocadas juntas, pois a pontuação da face-metade da uma peça coincide com a da face-metade da outra.
- "Bater" é usado quando um jogador ganha a partida.
- "Rodada" é o desenvolvimento de uma partida.
- "Monte" são as pedras que sobram quando o jogo tem 2 ou 3 participantes.

O Dominó pode ser jogado por $2,3$ ou 4 jogadores, contudo o mais comum são 4 jogadores. Antes de iniciar uma partida sorteia-se uma peça para cada participante. O competidor que tiver a peça com maior soma inicia o jogo. As próximas jogadas seguem a sequência dos jogadores dispostos ao redor da mesa. Para a distribuição das peças entre os jogadores, as peças são colocadas sobre uma mesa, com a face, que indica a pontuação, virada para baixo. Em seguida embaralham-se as peças, que são distribuídas entre os jogadores. Se houver 4 jogadores, que é o ideal, cada um recebe 7 peças, mas se houver dois ou três competidores, vão sobrar peças que ficam no "monte," para serem utilizadas oportunamente.

O jogador que inicia a partida escolhe uma das suas peças e a coloca sobre a mesa. Na sequência, outro jogador "encaixa" uma peça, e assim por diante, formando um encadeamente de pedras. Se durante a partida um dos competidores não tiver peças para encaixar, ocorrerá uma das duas situações a seguir:

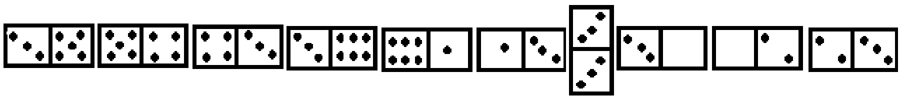
1. Se existir o "monte", o jogador pode recorrer a ele tantas vezes quantas forem necessárias, até encontrar uma peça para jogar.

2. Se não existir o monte, o jogador passa a vez para o próximo jogador.

O jogador que conseguir usar todas as suas pedras primeiro vence o jogo.

Há muitas situações interessantes em uma partida de Dominó, que podem ser usadas em sala de aula. Uma delas é o encadeamento interessante de peças mostrado na Figura 72, abaixo. Na situação exposta a sequência de peças começa e termina com o número três, que aparece exatamente oito vezes, não havendo mais peças com o número três para continuar, então o jogo é considerado fechado. Nesse caso é declarado vencedor o competidor que tiver a menor soma de pontos em suas pedras restantes.

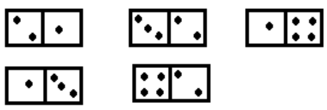
Figura 72 – Exemplo de um jogo de Dominó fechado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 36. Sejam as 5 peças da Figura 73. A enumeração de todas as possíveis sequências válidas com as 5 peças, exige saber as regras do jogo, as pontuações e usar tentativa e erro para montá-las. Contando-se os tipos de pontuações das peças, tem-se: 2 "quatros", 2 "três", 3 "uns" e 3 "dois".

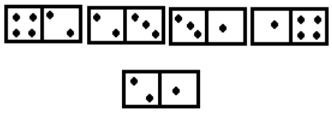
Figura 73 – Cinco peças de dominó



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na primeira tentativa de formar uma sequência válida, começando com a pontuação 4, verificou-se uma sequência não válida, pois sobrou uma peça, como pode ser visto na Figura 74.

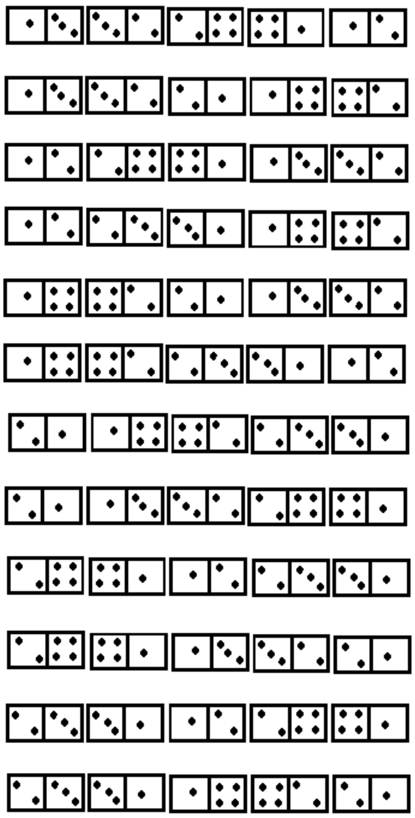
Figura 74 – Sequência não válida de 5 peças de dominó.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura acima, a sequência inicia-se com a pontuação 4, e termina com a pontuação 4. Por outro lado, existem três peças com as pontuações 1 e 2, o que torna impossível encaixá-las no meio da sequência, pois para cada encaixe são necessárias duas pontuações iguais, e necessariamente sobra uma face-metade que não se encaixará com nenhuma outra peça. Por isso, qualquer pontuação, sempre deverá aparecer em quantidade par entre os extremos de qualquer sequência de encaixes formadas pelas peças de dominó. Portanto, usando as 5 peças da Figura 73, só podem ser construidas sequências válidas de encaixes em cujas extremidades figurarão, necessariamente, as pontuações 1 e 2. A Figura 75 mostra todas as 12 sequências válidas possíveis com as 5 peças.

Figura 75 – Sequência de encaixes com cinco peças de dominó.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É interessante notar que, se em todas as 5 peças cada pontuação aparecesse duas vezes, a construção da sequência seria definida apenas pela escolha da primeira peça, pois a escolha das próximas peças aconteceria de maneira única para cada uma delas. Porém, neste exemplo, as pontuações 3 e 4 aparecem duas vezes e as pontuações 1 e 2 três vezes.

Há 3 possibilidades para se iniciar a sequência com a pontuação 1. A face-metade da peça escolhida pode ser 2, 3 ou 4. Se as pontuações 1, 3 e 4 aparecem duas vezes, haverá uma sequência única para cada uma das 3 possibilidades. No entanto, existem três peças com pontuações 2 para serem encaixadas. Contudo quando aparecer a pontuação 2, para o encaixe da próxima peça, há 2 possibilidades. Logo, pelo princípio multiplicativo, fica $3 \times 2 = 6$.

Como já foi analisado, sabe-se que as sequências ou começam com a pontuação 1 e terminam com a pontuação 2 ou começam com 2 e terminam com 1. Por isso, tem-se: $2 \times 6 = 12$ possibilidades de formar sequências válidas em que as 5 peças vão se encaixando uma a uma após a outra.

5.2.1 Dominó e grafos

O texto abaixo exemplifica uma aula hipotética para uma turma do 9º ano, na qual alunos e professor interagem tendo como objetivos:

- Estimular a autonomia do aluno no processo de ensino aprendizagem.
- Relacionar a teoria dos grafos ao jogo de dominó.
- Usar o processo de enumeração para resolver questões de contagem.
- Contribuir para o desenvolvimento da ideia de agrupamento não-ordenado.

Inicialmente os alunos motivados pelo professor, resolveram os seguintes problemas.

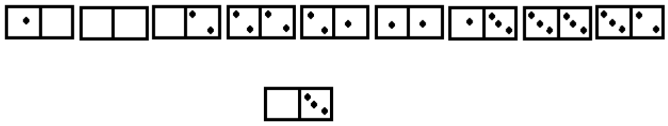
1. Calcular a quantidade de peças de um jogo de dominó na qual os dois números em cada face vão de 0 a 3.

   Uma solução dada pelos alunos foi enumerar todas as possibilidades (0 e 0), (0 e 1), (0 e 2), (0 e 3), (1 e 1), (1 e 2), (1 e 3), (2 e 2), (2 e 3) e (3 e 3), resultando em 10 peças.

2. Com as peças da questão anterior é possível formar uma sequência de encaixes sem sobrar peças?

   Inicialmente os alunos tentaram formar várias sequências encaixando uma peça na outra, mas em nenhuma delas foi possível o uso de todas as peças. A Figura 76 representa uma dessas tentativas, e como pode-se notar sobrou uma peça.

Figura 76 – Sequência de encaixes das peças de dominó

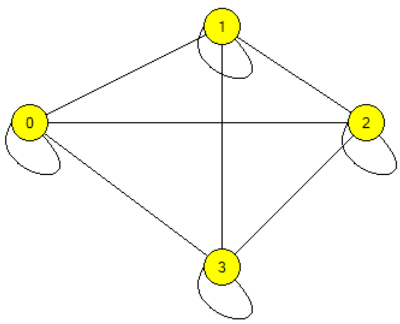


Fonte: Elaborada pelo autor.

Um aluno fez a seguinte afirmação: "Para formar uma sequência de encaixes, com exceção dos pontos que aparecem nas extremidades da possível sequência, todas as pontuações nos encaixes de duas pedras necessariamente aparecem aos pares. Daí duas situações podem ocorrer, ou todos os pontos aparecem em quantidades pares ou duas pontuações com a mesma quantidade ímpar e as demais peças com a mesma quantidade par. Entretanto, observando as peças da questão anterior, todas as pontuações aparecem 5 vezes, que é uma quantidade ímpar, logo não é possível formar uma sequência de encaixes com essas 10 peças."

Partindo desse fato, o professor usou a teoria dos grafos para explicar o motivo pelo qual as peças de dominó da primeira questão não formam uma sequência válida de encaixes, inicialmente ele apresentou uma estrutura matemática denominada "Grafo" na qual os vértices representam os números de 0 a 3 e as arestas representam as peças, como pode ser visto na Figura 77, explicou que o grau de cada vértice é igual ao número de arestas que nele incidem.

Figura 77 – Grafo representando as peças do dominó



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na sequência o professor explicou sobre os grafos euleriano e semi-euleriano.

- *No grafo euleriano, partindo de um vértice pode-se percorrer todas as suas arestas sem repetição e terminar o trajeto no vértice inicial, isso acontece por que todos os vértices tem grau par. O professor aproveitou esse momento e contou a história das sete pontes de Könisberg apresentada no Capítulo 3.*
- *No grafo semi-euleriano, existem dois vértices de grau ímpar e todos os outros tem grau par. Nesse tipo de grafo só tem um jeito de percorrer todos as arestas sem*

repetição: iniciar o percurso em um dos vértices de grau ímpar, dessa forma o vértice final será o outro vértice de grau ímpar.

3. Explicar como se determina a quantidade de peças de um dominó na qual os dois números em cada face vão de 0 a 6.

Como as pontuações das peças recebem números de 0 a 6, os alunos pensaram em construir uma tabela combinando todas as pontuações possíveis. As 7 peças com pontuações iguais foram escritas em vermelho e as 42 peças restantes de preto, como pode ser visto na Tabela 3

Tabela 3 – Peças de dominó

	0	1	2	3	4	5	6
0	0 e 0	0 e 1	0 e 2	0 e 3	0 e 4	0 e 5	0 e 6
1	1 e 0	1 e 1	1 e 2	1 e 3	1 e 4	1 e 5	1 e 6
2	2 e 0	2 e 1	2 e 2	2 e 3	2 e 4	2 e 5	2 e 6
3	3 e 0	3 e 1	3 e 2	3 e 3	3 e 4	3 e 5	3 e 6
4	4 e 0	4 e 1	4 e 2	4 e 3	4 e 4	4 e 5	4 e 6
5	5 e 0	5 e 1	5 e 2	5 e 3	5 e 4	5 e 5	5 e 6
6	6 e 0	6 e 1	6 e 2	6 e 3	6 e 4	6 e 5	6 e 6

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma aluna abservou a tabela depois de construída e notou que as peças de pontuações de cor preta foram registradas duas vezes, pois as peças (1 e 2) e (2 e 1), por exemplo, representam a mesma peça. Daí para saber quantas peças tem pontuações distintas basta dividir 42 por 2 dando 21 peças. Portanto o total de peças deste dominó é dada por $7+21=28$ *peças.*

O professor por sua vez explicou que tal raciocínio poderia ser representado por operações aritméticas, como segue:

Quantidade de peças com pontuações distintas em cada ponta.

$$\frac{7\times 6}{2}=21$$

Quantidade de peças com pontuações iguais em cada ponta.

$$7\times 1=7$$

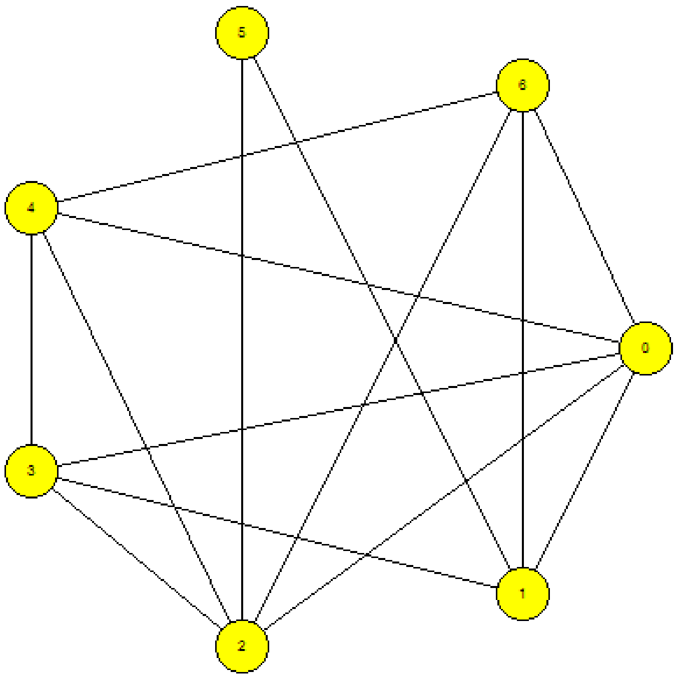
Portanto, dando um total de 21 + 7 = 28 peças

Um outro aluno disse ao professsor que usando as peças deste dominó poderiam ser construídas sequências encaixando todas as peças sem sobras. Ele justificou essa afirmação explicando que no grafo conexo que representa as peças deste dominó, cada vértice tem grau par igual a 8, portanto é Euleriano.

Na sequência, a turma foi dividida em grupos de quatro alunos com a tarefa de confeccionarem jogos de dominó com as 28 peças da questão anterior. Feito isso, o professor recolheu os jogos e em seguida redistribuiu-os novamente. Contudo, em um dos jogos ele retirou algumas peças, e pediu que os alunos disputassem uma rodada. Quando um aluno reclamou que seu grupo tinha recebido um jogo com peças faltantes, e que por isso não daria para jogar, o professor respondeu que era possível sim jogar. O professor, pediu aos alunos do grupo que, com os conhecimentos básicos da teoria de grafos que eles já possuíam, tentassem explicar para os demais grupos o motivo pelo qual daria certo jogar sem as peças faltantes.

Inicialmente os alunos fizeram o grafo das peças do jogo incompleto, conforme pode ser visto na Figura 78.

Figura 78 – Grafo das peças do jogo incompleto



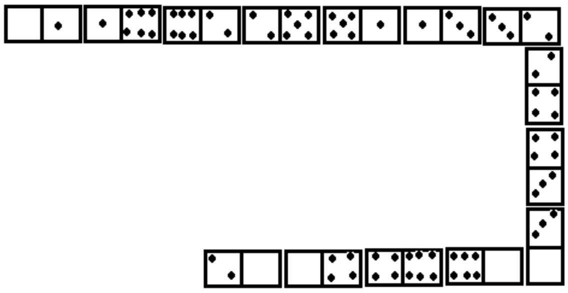
Fonte: Elaborada pelo autor.

Depois de várias observações feitas com a ajuda do professor, os alunos conseguiram chegar às seguintes conclusões:

- *No grafo da Figura 78 que representa as peças do jogo incompleto, notou-se apenas dois vértices com grau ímpar, os vértices* 0 *e* 2*, e os outros quatro vértices com grau par. Posto isso, concluíram que o grafo é semi-euleriano, então existem possíveis trajetos, começando e terminando nos vértices de grau ímpar.*

- *No caso, usando as peças do jogo incompleto, uma sequência possível foi representada na Figura 79.*

Figura 79 – Jogo de dominó com as peças incompletas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Concluíram também que se todos os vértices do grafo tivessem grau par, o grafo seria euleriano, então poderia-se fazer um percurso pelo grafo começando e terminando no mesmo vértice sem que houvesse repetição de arestas. Relacionando essa conclusão com o jogo de Dominó incompleto em questão, significa dizer que, o jogo começaria e terminaria com a mesma pontuação.

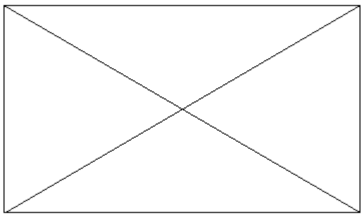
5.3 Terceira atividade: Coloração

Nesta atividade serão abordadas questões nas quais os alunos experimentem pintar figuras, com o objetivo de se favorecer a liberdade de raciocínio e incentivar os alunos a resolverem problemas simples de contagem através da enumeração.

Esta atividade é indicada preferencialmente para alunos do 9º ano.

1. Distribuir lápis de cor aos alunos com a finalidade de colorir a Figura 80 de modo que regiões que tenham a mesma fronteira recebam cores diferentes. Tendo em vista este procedimento, deseja-se saber qual é o menor número de cores necessárias para garantir que a figura possa ser colorida. Cada aluno deverá dizer a sua resposta.

Figura 80 – Mapa com 4 regiões



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na sequência, pede-se aos alunos para apresentarem todas as possíveis colorações usando no máximo 3 cores distintas. Nesse momento o professor deve argumentar sobre questões do tipo:

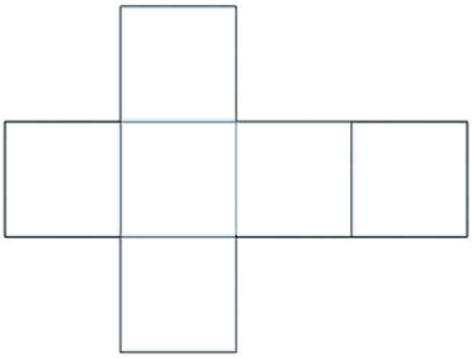
- Se regiões triangulares opostas forem pintadas com cores **iguais** quantas possibilidades restam para as outras 2 regiões?
- Se regiões triangulares opostas forem pintadas com cores **diferentes** quantas possibilidades restam para as outras 2 regiões?

A medida que os alunos forem terminando, peça a eles que comparem as suas resoluções com as dos outros alunos. É importante discutir os resultados.

2. A Figura 81, apresenta uma planificação do cubo que deverá ser pintada de acordo com as regras abaixo:

    - Os quadrados que possuem um lado em comum, nessa planificação, deverão ser pintados com cores diferente.
    - Ao montar o cubo, as faces opostas deverão ter cores diferentes.

    Figura 81 – Planificação do cubo

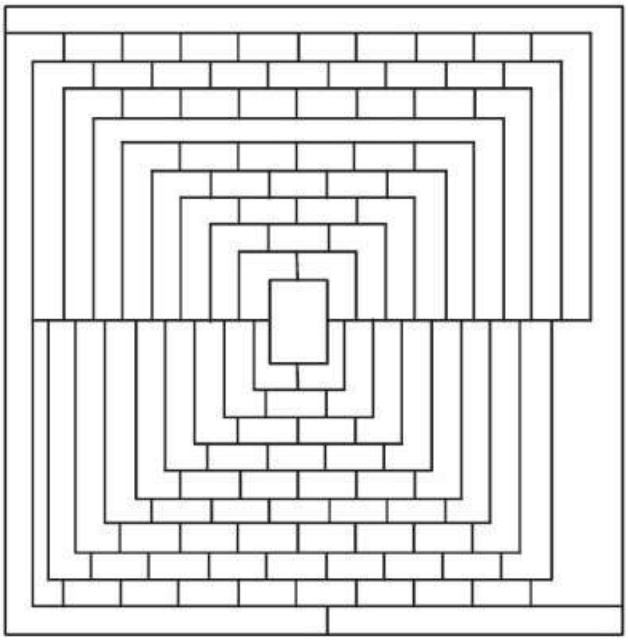
    Fonte: Elaborada pelo autor.

    Dando continuidade ao problema, incentivar os alunos a encontrar o menor número de cores necessárias para se pintar o cubo, a partir da planificação apresentada.

3. Distribui-se uma cópia da Figura 82 para cada aluno, propondo uma competição usando as seguintes regras:

    - Colorir a Figura de modo que regiões que tenham a mesma fronteira recebam cores diferentes.
    - Ganha a competição o aluno que em menor tempo conseguir colorir toda a Figura com a menor quantidade de cores.

Figura 82 – Desenho para colorir



Fonte: Sampaio (2004).

5.4 Quarta atividade: Número cromático e polinômio cromático

Essa atividade tem por objetivo, desenvolver a habilidade de resolver problemas de contagem utilizando conceitos como, o número cromático e o polinômio cromático. A atividade pode ser aplicada aos alunos do 2º ano do ensino médio, utilizando somente lápis de cor e papel sulfite, e ocupando o período de uma aula.

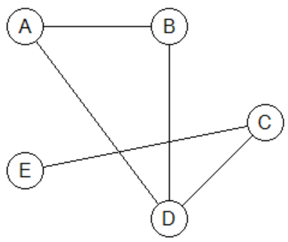
O professor pode iniciar a atividade dando noções básicas de grafos e número cromático aos alunos. Para isso, pode utilizar da seguinte situação:

Os grupos abaixo precisam programar reuniões diariamente durante um certo tempo. As pessoas que compõem os grupos querem saber qual é o menor número de horários por dia, nos quais podem ser agendadas essas reuniões de modo que nenhum membro tenha reuniões simultâneas.

- Grupo A = {Samantha, João, Bernardo}
- Grupo B = {João, Marcos, Elaine}
- Grupo C = {Márcio, Lucas, Marcela}
- Grupo D = {Márcio, João, Mauro}
- Grupo E = {Lucas, Pedro, Leandro}

O professor deve explicar que grafo é uma estrutura matemática que ajuda a modelar a relacão entre os elementos de um conjunto: cada elemento é representado por um ponto, que recebe o nome de vértice; e a relação entre eles é representada por arestas. Na situação-problema exposta acima, o professor pedirá aos alunos que façam 5 círculos pequenos, os vértices, em uma folha e os rotulem usando as letras A, B, C, D e E, representando os grupos. É possível que algum aluno perceba que dois vértices devem ser ligados se eles representarem grupos que possuem alguma pessoa em comum. Se isso não acontecer, o professor pode ajudar desenhando o grafo a seguir e explicando o motivo pelo qual ligou somente alguns desses vértices.

Figura 83 – Exemplo de grafo representando grupos com pessoas em comum.



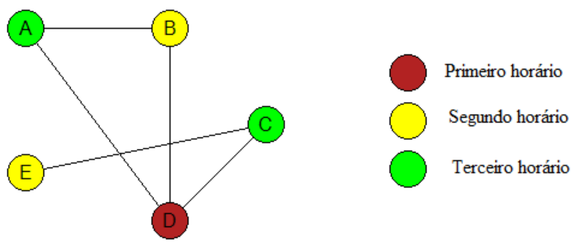
Fonte: Elaborada pelo autor.

Na sequência da atividade, para responder à questão proposta, o professor deve orientar da seguinte maneira:

1. Escolham lápis de cores diferentes para colorir os vértices do grafo.
2. Cada cor representa um horário diferente.
3. Os vértices das extremidades de duas arestas não podem ser coloridos com a mesma cor.

Com essas informações expostas, o professor vai motivar os alunos a colorirem os vértices do grafo da Figura 83 com a menor quantidade de cores. Naturalmente, muitas respostas diferentes vão ser encontradas. A Figura 84 é um exemplo da coloração de um grafo que modela a questão.

Figura 84 – Exemplo de grafo modelando a situação-problema.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Concluído que o menor número de horários é 3, o professor enfatiza a importância do uso de um grafo para modelar e resolver o problema. Além disso, apresenta o conceito de número cromático desse grafo, que é menor quantidade de cores para colorir um grafo, sem que vértices adjacentes tenham a mesma cor.

Na sequência, o professor deve ressaltar que usando as três cores pode-se colorir os vértices do grafo de várias formas diferentes. No caso da Figura 83, o professor pode pedir aos alunos que apresentem todas as possíveis colorações. No entanto, ele deve também motivá-los a determinar esse valor usando a definição do princípio multiplicativo, como segue.

No grafo em questão os vértives A, B e D são adjacentes entre si. Logo, cada um deles tem que ser pintado com uma cor diferente. E isso pode ser feito de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras. Para cada uma dessas maneiras, o vértice C e E podem ser coloridos com 2 cores diferentes. Logo, tem-se $6 \times 2 \times 2 = 24$ modos de se colorir o grafo usando 3 cores. Esse resultado representa a quantidade de maneiras diferentes que se pode distribuir esses cinco grupos nos três horários.

Na sequência da atividade, o professor explica que o raciocínio apresentado anteriormente pode ser usado também para uma quantidade k de cores, sendo $k \geq 3$. Dessa maneira, espera-se que os alunos consigam calcular a função $P(k)$ que determina a quantidade de diferentes colorações do grafo.

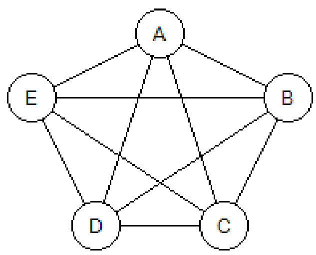
A resposta esperada é:

Tabela 4 – Quantidade de colorações usando k cores.

A		B		D		C		E
k	$\times$	$(k-1)$	$\times$	$(k-2)$	$\times$	$(k-1)$	$\times$	$(k-1)$

Efetuando os produtos, encontra-se a função: $P(k) = k^5 - 5k^4 + 9k^3 - 7k^2 + 2k$, denominada *Polinômio Cromático*. O professor deve argumentar sobre a dificuldade para determinar o número cromático e polinômio cromático de grafos mais complexos. Após apresentação desses conceitos, o professor propõe a determinação dos mesmos para o grafo da Figura 85 a seguir.

Figura 85 – Grafo pentagonal completo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Inicialmente o professor explica que o grafo da Figura 85 é chamado de completo, pois todas as 5 arestas são adjacentes entre si. Com isso os alunos devem perceber que são necessárias no mínimo 5 cores para colorir os vértices do grafo acima, determinando então, o número cromático. Por último, o professor deve estimular discussões sobre como determinar o polinômio cromático desse grafo. O diálogo e a argumentação dos alunos devem conduzi-los ao cálculo a seguir:

Tabela 5 – Cálculo para determinar o polinômio cromático do grafo pentagonal completo.

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{A} & & \text{B} & & \text{C} & & \text{D} & & \text{E} \\ k & \times & (k-1) & \times & (k-2) & \times & (k-3) & \times & (k-4) \end{array}$$

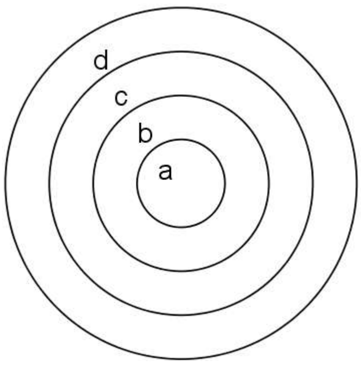
A partir do resultado anterior, é interessante mostrar que escolhendo um valor inteiro e positivo para k, por exemplo $k = 5$, tem-se: $5 \times 4 \times 2 \times 1 = 5!$

O professor deve argumentar com os alunos sobre a importância de se aprofundar em questões semelhantes às apresentadas nessa atividade, aumentando gradativamente o grau de complexidade das questões e desenvolvendo cada vez mais o raciocínio combinatório.

Os problemas indicados a seguir podem dar origem a atividades como a anterior.

1. Dado a Figura 86 a seguir, formado por 4 regiões a, b, c e d, pergunta-se:

Figura 86 – Bandeira para colorir.



Fonte: Elaborada pelo autor.

(a) De quantas maneiras as regiões a, b, c e d podem ser coloridas, usando três cores.

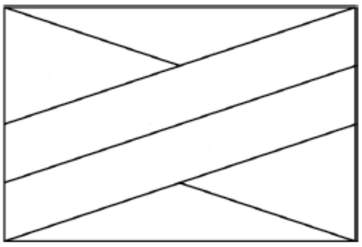
(b) Associar a Figura 86 a um grafo C, sendo que as regiões a, b, c e d sejam consideradas os vértices de C, e estes serão ligados por arestas se representarem regiões com a mesma fronteira.

(c) Determine o número cromático de C.

(d) Determine o polinômio cromático de C.

2. (OBMEP, 2013) Paulo tem tintas de quatro cores diferentes. De quantas maneiras ele pode pintar as regiões da bandeira da figura, cada uma com uma única cor, de modo que cada cor apareça pelo menos uma vez e que regiões adjacentes sejam pintadas com cores diferentes?

Figura 87 – Bandeira para colorir.



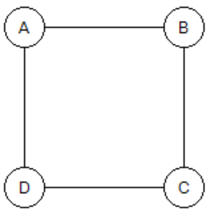
Fonte: OBMEP (2013).

A) 336 B) 420 C) 576 D) 864 E) 972

3. Determine o polinômio cromático dos grafos a seguir.

(a)

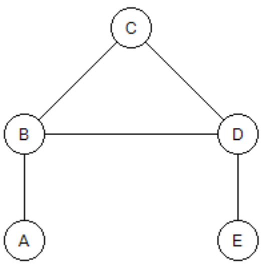
Figura 88 – Grafo C_4.



Fonte: Elaborada pelo autor.

(b)

Figura 89 – Grafo F.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4. (BRASIL, 2017b) O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da copa, composta de uma figura plana e o slogan Juntos num só ritmo“, com as mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Figura 90 – ENEM-2017

Fonte: BRASIL (2017b).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

A)15 B)30 C)108 D)360 E)972

CAPÍTULO

6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram expostos o princípio multiplicativo, que é fundamental em grande parte dos processos de contagem. Também foram abordados grafos e propriedades. Teorema das quatro cores, coloração de grafos, número cromático e polinômio cromático. Foram apresentados os jogos Nim e Dominó. E atividades relacionando todos esses temas.

Dado o exposto, percebeu-se na teoria dos grafos, uma ampla e frutífera área para se desenvolver várias habilidades combinatórias. Além disso, o estudo dessa teoria pode estimular nos alunos o desenvolvimento do raciocínio, a criatividade, a autonomia no processo de ensino-aprendizagem e aumentar o engajamento dos alunos nas aulas. Por todos esses aspectos analisados conclui-se que, o ensino da análise combinatória no Ensino Fundamental e Médio relacionados à teoria dos grafos torna-se mais significativo e atraente aos alunos. Dessa forma tem-se o ensino da combinatória pautado nas competências e habilidades que os alunos devem desenvolver de acordo com as orientações da BNCC.

Este trabalho contribuiu fortemente para o enriquecimento tanto teórico como das práticas metodológicas do seu autor e acredita-se que ele poderá inspirar também outros colegas professores a explorar os temas aqui apresentados bem como outros que a Teoria dos Grafos pode oferecer.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, A. **As pontes de Königsberg**. [S.l.]. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/pontes/>. Acesso em: 14 dez. 2016. Citado na página 37.

BELTRáN, J.; FARFáN, J.; HILáRIO, M.; FRANCO, T. **OBMEP - Banco de Questões**. [S.l.]: IMPA, 2013. Citado na página 30.

BOUTON, C. L. **Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory**. Annals of Mathematics, 1902. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1967631>. Acesso em: 14 dez. 2016. Citado na página 75.

BRASIL. **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS**. [S.l.]: Ministério da Ministério da Educação, SEB, 1998. Citado na página 25.

____. **ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO**. [S.l.]: Ministério da Educação, SEB, 2006. Citado na página 25.

____. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministerio da Educaçao, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>. Acesso em: 14 out. 2017. Citado nas páginas 23 e 24.

____. **ENEM**. Ministério da Educação, 2017. Disponível em: <https://enem.inep.gov.br/#/depois?_k=4rfbik>. Acesso em: 1 dez. 2017. Citado na página 99.

BRIA, J. **Grafos, por que não?** [S.l.: s.n.], 1998. Citado na página 25.

CARDOSO, D. M. **Teoria dos Grafos e Aplicações**. Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, 2004. Disponível em: <http://www.arquivoescolar.org/bitstream/arquivo-e/78/1/TGA2004.pdf>. Acesso em: 14 dez. 2016. Citado na página 53.

GROSS, J.; YELLEN, j. **Theory and Its Aplications**. [S.l.: s.n.], 1998. Citado nas páginas 37, 53 e 62.

GUICHARD, D. **An Introduction to Combinatorics and Graph Theory**. [s.n.], 2016. Disponível em: <https://www.whitman.edu/mathematics/cgt_online/cgt.pdf>. Acesso em: 14 dez. 2016. Citado na página 53.

IME, I. de Matemática e E. **Jogos e Educação - NIM**. Universidade Federal de Goiânia, 2014. Disponível em: <https://jogoseeducacao.mat.ufg.br/p/2135-nim>. Acesso em: 14 dez. 2016. Citado na página 75.

INEZ, F. R. **A teoria matemática do jogo de Nim**. Revista do Professor de matemática (RPM-06). Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/6/13.htm>. Acesso em: 14 dez. 2016. Citado na página 75.

JURKIEWICZ, S. **Grafos – Uma Introdução**. [S.l.]: IMPA, 2009. Citado na página 37.

LIMA, E. **Curso de Análise**. [S.l.]: IMPA, 2014. Citado na página 27.

LIVRESPORTS. **Dominó, a brincadeira da matemática**. Livresports-Revista Digital Especializada, 2010. Disponível em: <http://www.livresportes.com.br/reportagem/domino-a-brincadeira-da-matematica>. Acesso em: 10 dez. 2016. Citado na página 84.

MAPAS. **Mapas da Região Sudeste**. [s.n.], 2017. Disponível em: <http://www.mapasparacolorir.com.br/mapa/regiao/sudeste/regiao-sudeste-nomes.jpg>. Acesso em: 15 nov. 2017. Citado na página 54.

MORGADO, A.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. ed. [S.l.]: SBM, 2006. ISBN 978-85-85-85818-01-2. Citado nas páginas 27 e 35.

OBMEP. **9ª OBMEP, Nível 3 - Ensino Médio**. [S.l.]: IMPA, 2013. Citado na página 98.

OLIVEIRA, K. I. M.; FERNáNDEZ, A. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções**. 1. ed. [S.l.]: SBM, 2010. Citado na página 27.

OLIVEIRA, V. A.; RANGEL, S. **Teoria dos Grafos**. Departamento de Matemática Aplicada - IBILCE - Unesp. Notas de aula, IBILCE, Unesp, 2002-2013. Disponível em: <http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/socorro4029/geuleriano_2014_3.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2017. Citado na página 37.

SAMPAIO, J. C. V. **Quatro Cores e Matemática**. 2ª Bienal da SBM, Universidade Federal da Bahia - UFB, 2004. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M35.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2017. Citado na página 94.

SOUSA, L. **O Teorema das Quatro Cores**. [s.n.]. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf>. Acesso em: 14 dez. 2016. Citado na página 53.

WIKIPEDIA. **Seven Bridges of Königsberg**. [s.n.], 2015. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg>. Acesso em: 10 nov. 2016. Citado na página 49.

ICMC USP
SÃO CARLOS