Universidade Federal de Goiás
Regional de Jataí
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E A EQUAÇÃO DE CAMPO DE EINSTEIN

**Calebe Martes de Andrade Santos**

**Jataí-GO**
**2018**

sistema de bibliotecas ufg

**PRPG**
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

**UFG**

# TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico**: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação:**

Nome completo do autor: CALEBE MARTES DE ANDRADE SANTOS

Título do trabalho: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E A EQUAÇÃO DE CAMPO DE EINSTEIN.

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Calebe M. de Andrade Santos
Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Benedito Leandro Neto
Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 19 / 03 / 2018

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E A EQUAÇÃO DE CAMPO DE EINSTEIN

**Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre Profissional em Matemática. Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática.**

Orientador: Dr. Benedito Leandro Neto

Jataí-GO
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Martes de Andrade Santos, Calebe
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E A EQUAÇÃO DE CAMPO DE EINSTEIN [manuscrito] / Calebe Martes de Andrade Santos. - 2018.
xlii, 42 f.

Orientador: Prof. Dr. Benedito Leandro Neto.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Jataí, 2018.
Bibliografia.

1. Equação Diferencial. 2. Aplicação. 3. Teoria da Relatividade Geral. I. Leandro Neto, Benedito, orient. II. Título.

CDU 517.9

UFG
Universidade Federal de Goiás-UFG REGIONAL JATAÍ
Mestrado profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT/UFG
PROFMAT
Regional Jataí – Caixa Postal 03 – CEP: 75,804-020 – Jataí-GO.
Fones: (64) 3606-8213 **www.jatai.ufg.br/matematica**

**Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Calebe Martes de Andrade Santos –** Ao Vigésimo terceiro dia do mês de Fevereiro do ano de dois mil e dezoito (23/02/2018), às 10:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, Prof. Dr. Benedito Leandro Neto - Orientador, Prof. Dr. Wender José de Souza e Prof. Dr. Bruno Rodrigues de Freitas, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório da Pós Graduação da Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí, procederem a avaliação da defesa intitulada: **"Equações Diferenciais e a Equação de campo de Einstein ",** em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás, polo Jataí. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Dr. Benedito Leandro Neto , que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da Dissertação que, em 40 minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na Secretaria da Coordenação de Matemática da Regional Jataí da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 11 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, José Alfredo Cespi de Oliveira, Secretário da Coordenação Geral de Pós-Graduação da Regional Jataí - UFG, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Benedito Leandro Neto

Prof. Dr. Benedito Leandro Neto
Profmat (Pólo Jataí)-UFG
Presidente

Wender José de Souza

Prof. Dr. Wender José de Souza
Profmat (Pólo Jataí)-UFG
Membro Interno

Bruno Rodrigues de Freitas

Prof. Dr.Bruno Rodrigues de Freitas
(UFG-IME)
Membro Externo

Este trabalho é dedicado à minha família.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por toda sabedoria e capacitação concedidas para escrita deste trabalho e também conclusão deste curso de mestrado profissional. A Ele toda honra, glória e mérito. Agradeço também a minha família, mãe que sempre me incentivou aos estudos e me ajudou nessa caminhada, irmão que também somou comigo e meu pai que durante meu curso, veio a óbito. Porém o tempo em que esteve presente sempre me motivou e inspirou a fazer tudo da maneira correta. Este, mesmo após sua partida, continua sendo meu grande referencial.

Agradeço em especial a minha esposa, que sempre me apoiou, incentivou e me auxiliou de forma idônea e somou comigo em todos os momentos. A ela, o meu muito obrigado.

Agradeço a cada professor que ministrou aulas para minha turma, Wender, Gecirlei, Adriana Cintra, Adriana Molina, Flávio, Claudinei e em especial ao professor Esdras que me auxiliou por várias vezes na cosntrução do template deste trabalho e ao meu orientador Benedito Leandro por toda paciência para comigo e por todo incentivo e motivação que me passou.

Agradeço aos meus colegas de turma que foram perseverantes e me ajudaram também nessa caminhada. Em especial ao meu amigo Helber, pelo tipo raro de incentivo e momentos de estudo. Também a minha companheira de viagem Selma, que também foi de grande importância para mim em toda essa trajetória. A vocês, o meu muito obrigado.

*"Porque dele e por ele, e para ele, são todas as coisas;*
*glória, pois, a ele eternamente. Amém."*
*(Romanos 11:36)*

# RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo, além de expôr algumas técnicas de resolução de equações diferenciais de primeira e segunda ordens, encontrar soluções para Equação de Campo de Einstein, através dessas técnicas. O trabalho foi dividido em 3 partes, sendo elas, introdução e mais dois capítulos. Na introdução, contamos um pouco da história das equações diferenciais, além de abordarmos alguns trechos importantes da história da Teoria da relatividade geral. No primeiro capítulo, de forma preliminar, foi feito um estudo sobre algumas equações diferenciais de primeira e segunda ordens. O segundo capítulo, refere-se à aplicação de equações diferenciais de segunda ordem como solução para Equação de Campo de Einstein. Neste último capítulo, fizemos um estudo sobre o artigo [7], e expomos algumas outras soluções para Equação de Campo de Einstein. Para a escrita do trabalho, foi feita uma revisão bibliográfica em relação aos assuntos abordados no mesmo, relacionando assim, as ideias e definições de alguns autores no decorrer do texto.
**Palavras-chave**: Equação Diferencial, Aplicação, Relatividade Geral.

ABSTRACT

This work has as main objective, besides exposing some techniques of solving differential equations of first and second order, to find solutions to Einstein Field Equation, through these techniques. The work was divided in 3 parts, being them, introduction and two other chapters. In the introduction, we tell a bit about the history of differential equations, as well as covering some important passages in the history of General Theory of Relativity. In the first chapter, in a preliminary way, a study was made on some differential equations of first and second orders. The second chapter refers to the application of second-order differential equations as a solution to Einstein's Field Equation. In this last chapter, we have done a study on the article [7], and we present some other solutions to Einstein's Field Equation. For the writing of the work, a bibliographical revision was made in relation to the subjects addressed in it, thus relating the ideas and definitions of some authors throughout the text.
**Key-Words:** Differential Equation, Application, General Relativity.

# Sumário

# INTRODUÇÃO

A ideia de se estudar Equações Diferenciais, vem pelo fato da tentativa de resolução de alguns problemas físicos. Segundo [5], no final do século XVII, no intuito de reduzir tais problemas, matemáticos e físicos como Newton e Leibniz buscavam inicialmente expressar as soluções de alguns problemas em termos de funções elementares. Para isso, criavam modelos matemáticos reduzidos que, de certa forma, representavam alguma determinada situação ou problema físico. Como os modelos criados inicialmente não eram ainda suficientes para expressar em sua totalidade os problemas analisados, o estudo das equações diferenciais foi se estendendo na busca de novos métodos de resoluções e modelos que representassem cada vez melhor uma determinada situação ou problema físico.

A princípio, os criadores do cálculo citados, Newton e Leibniz, buscavam obter soluções das equações de forma explícita. Porém, as equações que se conseguiam obter esse tipo de solução, eram poucas, de modo que, através da busca de novos métodos de resolução, surgiu então o uso de série de funções já no século XIX, enriquecendo ainda mais o rigor em que os problemas eram analisados. Em [5], ainda é dito que, buscavam também obter informações sobre o comportamento não somente das equações diferenciais, mas também de suas soluções. Dessa forma, era crescente a minuciosidade em que se analisava cada problema.

A preocupação em detalhar cada vez mais os problemas analisados, motivou a busca por novas equações para modelagem de tais problemas, de modo que, através da descoberta de outras técnicas de resolução das equações, cada vez mais, os modelos matemáticos criados para resolução de problemas físicos se tornavam mais parecidos com a realidade do problema. *"O que se procura aí são funções que estão próximas da solução do problema"* [5].

A questão principal, à qual queremos aplicar as definições de Equações Diferenciais, trata-se de um problema antigo, que teve como precursor, Albert Einstein. Tal problema está totalmente associado com a grande teoria que Einstein descreveu, a Teoria da Relatividade Geral.

Segundo [12], com o intuito de criar uma equação que solucionasse o problema de equilíbrio entre massa$\times$energia e curvatura do Espaço-Tempo, Einstein criou uma ideia intuitiva de espaço estático e homogêneo. Assim, simplificando a dificuldade de encontrar equações que mostrassem tal equilíbrio, reduzindo sistemas de equações diferenciais não lineares, a equações diferenciais mais passíveis de solução.

Os estudos sobre a Teoria da Relatividade Geral, descritos no trabalho, foram fundamentados em: [6], [7],[12] e [14]

Em [10], vemos que o estudo sobre a Teoria da Relatividade, ganhou, no ano de 2017 uma motivação a mais para ser estudada e pesquisada, visto que os cientistas Rainer Weiss, Barry Barish e Kip Thorne, ganharam o prêmio Nobel de Física por terem conseguido provar que captaram ondas gravitacionais, fenômeno esse que tem como pioneiro de pesquisas, Albert Einstein, criador da Teoria da Relatividade Geral. Einstein acreditava que esse fenômeno só ocorria em lugares tão distantes da terra, que seus efeitos chegavam a nós com força tão pequena que jamais poderia ser medida.

Ele descreveu um espaço quadridimensioanal que se ajusta conforme a velocidade de movimento, e não tridimensional, compacto e imóvel como descrevia Euclides no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Dessa forma, inseriu-se mais uma coordenada ao espaço que agora passa de três simples eixos de variáveis que representam grandezas de comprimento e incrementa-se uma nova variável independente chamada tempo. Tem-se agora o espaço quadridimensional chamado Espaço-Tempo de Einstein que se ajusta ao objeto que se move com uma determinada velocidade. Daí vem a Teoria da Relatividade, a qual diz que tempo e movimento são relativos.

Em [12], vemos que outro aspecto que foi reformulado dentro da Teoria da Relatividade, foi o problema da lei da gravidade abordada por Newton. Este dizia que os planetas tinham suas órbitas em torno do sol, unicamente pela força de atração entre tais. Já Einstein, pensou no espaço como um tecido esticado, o tecido Espaço-Tempo. Ao inserir um objeto em um tecido esticado, tal objeto, de acordo a quantidade de massa que possui, tende a deformar (afundar) o tecido fazendo uma curvatura em tal. Assim, Einstein diz na Teoria da Relatividade que os planetas giram em torno do sol pois estão dentro dessa curvatura, sendo o sol o objeto maior que deforma com maior curvatura a Variedade Espaço-Tempo. Uma curvatura pode ser entendida como o quanto uma superfície se distancia do plano em cada ponto.

Ainda em [12], vemos que, no intuito de criar alguma equação passível de solução que definisse o cósmos, Einstein modelou uma ideia de espaço estático e finito, para que assim, não tivesse problemas em sua equação com valores de contorno nas respectivas variáveis. Obviamente, o modelo criado por Einstein foi contestado e revogado algum tempo depois, visto que através de observações e tentativas de resolução da equação criada por Einstein, outros físicos como Dwin Hubble (1889-1953), chegaram a conclusão de que o universo não era imóvel como Einstein previa em sua descrição para a equação. Porém, a equação de Einstein para o cósmos ou Equação do Campo Estático de Einstein era apenas um modelo que fugia de dificuldades de resolução para valores de contorno.

A equação de Einstein buscava descrever como o Espaço-Tempo se curva diante da massa de uma matéria e como a matéria reage a curvatura do Espaço-Tempo, chegando assim, em um determinado equilíbrio baseado na igualdade da equação. Como diz [12]

> *"De maneira simples podemos dizer que o conteúdo de massa e energia do sistema diz ao espaço-tempo como se curvar. O espaço-tempo curvo diz então a um corpo de prova, nele colocado, como se mover."*

Assim, energia e matéria são os fatores relacionados na equação. Segundo [13], as equações de Einstein são da forma:

**curvatura do espaço-tempo = constante × matéria-energia**.

Assim, do lado esquerdo da equação, teremos os tensores que expressam a curvatura do espaço e do lado direito, os tensores que definem a quantidade de energia e matéria no sistema envolvido. Ainda mais, [13] expõe a Equação do Campo Estático de Einstein, matematicamente como:

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu v} \tag{1}$$

na qual, a curvatura do espaço-tempo, é dada pelo tensor de Einstein

$$G_{\mu v} = R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R,$$

sendo $g_{\mu v}$ a métrica do Espaço-Tempo e $R_{\mu v}$ um tensor chamado *Tensor de Ricci* que é formado a partir do tensor de curvatura Riemmaniana, que é a maneira mais geral de descrever a curvatura de um espaço qualquer. O produto entre uma constante pelo tensor de matéria-energia é dado pela constante gravitacional de Einstein "$\frac{8\pi G}{c^4}$", sendo $G$ a constante gravitacional universal, $c$ a velocidade da luz no vácuo e $T_{\mu v}$, o tensor de energia-momento. (Ver [2]).

Segundo [12], a junção das equações de campo estático de Einstein, que são as equações da teoria da relatividade, formam um sistema de equações diferenciais não lineares de extrema dificuldade de ser solucionado, porém, considerando a homogeneidade do fluido e as propriedades isotrópicas impostas por Einstein, é possível chegar a soluções mais simples e analíticas para esse sistema.

Em [7], temos um estudo sobre soluções para a equação de campo estático de Einstein. Mais ainda, [1] e [7] abordam a caracterização de soluções estáticas para equação de campo de Einstein.

Este trabalho tem como objetivo mostrar algumas técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias, possibilitando assim desenvolver e modelar passo a passo algumas importantes aplicações dentro da matemática e física. Para este trabalho em especial, utilizaremos equações diferenciais para encontrar soluções para a Equação de Campo de Einstein. Dessa forma, mostrando um pouco da importância do estudo das Equações Diferenciais Ordinárias.

Quando se fala em Equações Diferenciais Ordinárias, tem-se a noção de algum tipo de equação que envolva derivadas em uma determinada ordem. O que sugere a seguinte pergunta: Por que estudar Equações Diferenciais? A resposta é imediata: Equações diferenciais dão um grande suporte matemático para inúmeros problemas da física que envolvem modelagem matemática.

Iremos definir no primeiro capítulo, equações diferenciais e também trazer o conceito de solução de uma equação diferencial

A análise das variáveis e do comportamento das mesmas é de fundamental importância para se modelar um determinado problema. O objetivo em se obter um modelo que descreva matematicamente determinado problema, é justamente criar uma descrição matemática que seja geral porém maleável a ponto de obter diferentes resultados apenas com a análise das variáveis e comportamento das mesmas.

O trabalho será dividido em Introdução e mais dois capítulos, distribuindo-se entre eles algumas definições, teoremas e demonstrações de propriedades para resoluções de equações diferenciais, bem como algumas aplicações contendo as definições e propriedades citadas e demonstradas.

No primeiro capítulo, faremos uma breve abordagem sobre a história das equações diferenciais ordinárias, traremos algumas definições e métodos de resolução para as equações diferenciais de primeira e segunda ordens, e assim, aplicar tais métodos de resolução em alguns exemplos.

Modelaremos uma equação que indica o crescimento ou decrescimento de uma determinada população em função do tempo. Uma forma mais simples e geral para modelar tal variação de quantidade é a equação:

$$f'(x) = k.f(x).$$

Veremos também que uma maneira mais detalhada de modelar o crescimento ou decrescimento populacional pode ser dado pela equação:

$$f'(x) = k.f(x).(L - f(x)),$$

a qual mostraremos que tem solução da forma:

$$f(x) = c.e^{kx}.$$

Ainda no capítulo 1, traremos a definição geral de equações diferenciais de segunda ordem, mostrando alguns métodos específicos para se resolver tais equações, que são assim classificadas pela expressão que possuem. Mostraremos também a validade de alguns tipos de solução para equações de segunda ordem.

Consideraremos, assim como em [5] o formato de tais equações como sendo:

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t). \tag{2}$$

Podemos representá-las de maneira mais simples e usual como em [5], da forma:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f, \tag{3}$$

sendo $p, q, f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *funções contínuas definidas num intervalo aberto* $(a, b)$ , [5]. Considerando ainda na equação (3), valores iniciais

$$x(t_0) = x_0, \qquad \dot{x}(t_0) = v_0.$$

Consideraremos o seguinte teorema, baseados em estudos feitos em [15] e [17]:

**Teorema.** *Considerando a equação* (3)*, se* $p$*,* $q$ *e* $f$ *são funções contínuas em* $(a, b)$*, então o problema de valor inicial tem uma, e somente uma, solução definida em todo o intervalo* $(a, b)$ *[5].*

Concluindo então que:

> qualquer equação da forma $\phi(t) = \alpha_1\phi_1(t)+\alpha_2\phi_2(t)$, tais que, $\alpha_1$ e $\alpha_2$ são constantes arbitrárias e $\phi_1$ e $\phi_2$ são deriváveis, é solução da equação diferencial homogênea $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$ [5].

Fixaremos ainda no capítulo 1, definições e métodos de resolução para equações de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes e também coeficientes variáveis. Tais métodos serão plenamente utilizados para resolver a equação:

$$(n-2)f\varphi'' - f''\varphi - 2\varphi' f' = 0 \qquad\qquad Para \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = 0.$$

Através dessa equação, podemos encontrar funções $f$ e $\varphi$ que compõem a métrica que soluciona a equação de campo de Einstein.

Para as equações com coeficientes constantes mostraremos o método de resolução através da equação característica, que de certa forma reduz a equação diferencial em uma equação de segundo grau, de forma que as raízes da equação característica tem fortes influencias na solução da equação diferencial. Já para as equações que possuem coeficientes variáveis, analisaremos uma equação do tipo Cauchy-Euler, que segundo [17] é da forma:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x),$$

sendo $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ constantes. Em [17], é considerada como principal característica desse tipo de equação, o grau de cada coeficiente coincidir com a ordem de derivação.

No segundo capítulo, faremos uma abordagem sobre algumas soluções para a equação

$$(n-2)f\varphi'' - f''\varphi - 2\varphi' f' = 0, \tag{4}$$

encontrada em [7]. Equação esta que tem grande importância no estudo da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, já que as soluções dessa equação diferencial nos dão novas soluções para a Equação de Campo de Einstein.

Para obtenção de soluções da equação (4), fixaremos a função $\phi$ como uma função conhecida e encontraremos uma solução para $f$ em função de $\phi$.

# Capítulo 1

# Preliminar: Equações Diferenciais

Neste capítulo iremos trazer uma definição de equações diferenciais Ordinárias de modo geral e concentrar em algumas classificações e métodos de resolução de Equações Diferenciais de segunda ordem para aplicar, em capítulos posteriores, tais métodos em problemas relacionados à física que envolvem modelagem matemática. Esse capítulo será um resumo de um estudo feito nas obras [3], [4] [5], [8] e [17].

## 1.1 Definições Preliminares

Quando se fala em Equações Diferenciais Ordinárias, tem-se a noção de algum tipo de equação que envolva derivadas em uma determinada ordem. O que sugere a seguinte pergunta: Por que estudar Equações Diferenciais? A resposta é imediata: Equações diferenciais dão um grande suporte matemático para inúmeros problemas da Física que envolvem modelagem matemática.

A grosso modo, podemos definir equações diferenciais como igualdades que possuem incógnitas, de modo que tais incógnitas são funções e suas respectivas derivadas. De acordo com [17] a definição de Equação Diferencial é:

**Definição 1.** *Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada equação diferencial (ED).*

Desse modo [17], define a Solução de Uma Equação Diferencial como:

**Definição 2.** *Qualquer função $f$ definida em algum intervalo $I$, que quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de solução para a equação no intervalo.*

A classificação geral das equações diferenciais se dá pela ordem da derivada de maior valor, de modo que, a maior derivada da equação indica a ordem da equação. Para [5], uma forma de generalizar as equações lineares de primeira ordem é:

$$\dot{x} = p(t)x + q(t), \tag{1.1}$$

onde $p, q : I \to \mathbb{R}$ são funções reais contínuas no intervalo $I$. Dessa maneira, qualquer função $x$ será solução de (1.1) se for diferenciável e reduzir a equação a uma identidade.

Em (1.1) estamos denotando que a primeira derivada da função $x$, é dada por:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

Assim, como solução para a equação (1.1), buscamos uma função $x$ cuja primeira derivada seja equivalente à soma explícita em (1.1).

Dessa forma, são exemplos de equações diferenciais de primeira ordem, as seguintes equações:

$$\frac{dx}{dt} = \sin 3t, \qquad \frac{dx}{dt} = e^{3t+2x}.$$

### 1.1.1 Equação Separável

Dizemos que uma equação diferencial é Separável ou que tem Variáveis Separáveis quando conseguimos separar suas variáveis através da igualdade. Essa nomenclatura (Separáve) vem pelo modo que podemos escrever tais equações. Segue o formato de uma equação Separável:

$$h(y)dy = g(x)dx. \tag{1.2}$$

Dessa forma, para resolver a equação (1.2) basta aplicarmos integração em ambos os lados,

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx. \tag{1.3}$$

Apresentaremos agora a modelagem de um problema da física, cuja a equação resultante é separável.

## 1.2 Crescimento ou Decrescimento Populacional

Quando falamos em taxa de variação, no meio matemático, logo associamos à derivada de alguma função. Daí, se dissermos que uma população cresce ou decresce em função do tempo, podemos representar a taxa de variação (crescimento ou decrescimento) dessa população pela derivada dessa função.

Assim, considerando como $f(t)$ a função que descreve a quantidade de seres de uma determinada população em função do tempo $t$, dizemos então que a taxa de crescimento ou decrescimento dessa população pode ser espressa por:

$$f'(t) = \frac{df}{dt}.$$

Portanto, o modelo mais simplificado para representar o quanto varia essa população em função do tempo, é o modelo Malthusiano, citado em [5], em que supõe-se que a taxa de variação é uma constante $\lambda$. Dessa forma, a equação que determina o crescimento (ou decrescimento em caso de $\lambda < 0$) da população é:

$$\frac{df}{dt} = \lambda f, \tag{1.4}$$

que é uma equaçao do tipo separável. Nesse caso, a constante $\lambda$ é chamada de *constante de proporcionalidade*.

Para solucionar tal equação, devemos então encontrar uma função $f(t)$ cuja derivada seja igual à $\lambda f(t)$. Multiplicando ambos os lados da equação (1.4) por $dt.f$, temos:

$$\frac{df}{f} = \lambda dt. \tag{1.5}$$

Integrando ambos os lados da equação (1.5), temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{df}{f} &= \lambda \int dt \\ \Rightarrow \ln|f| &= \lambda t + c; \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aplicando exponencial em ambos os lados da última igualdade, chegamos à solução para a equação (1.4), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e^{\ln|f|} &= e^{\lambda t} e^{c} \\ \Leftrightarrow f(t) &= k e^{\lambda t}; \quad k = e^{c}. \end{aligned}$$

Considerando o tempo $t$ inicial igual a 0, notamos que $k$ se torna igual a quantidade inicial de elementos da população, antes de sofrer qualquer alteração. Daí, temos que a solução de (1.4) é

$$f(t) = f(0)e^{\lambda t}. \tag{1.6}$$

Resolveremos agora, como exemplo de aplicação de equações separáveis para o crescimento e decrescimento de uma população, o exercício 4 da página 113 proposto em [5], que diz:

**Problema 1.2.1.** *A população de bactérias em uma cultura cresce a uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes em qualquer tempo. Após 3 horas, observa-se que há 400 bactérias presentes. Após 10 horas, existem 2000 bactérias presentes. Qual era o número inicial de bactérias?*

Para solucionar o problema (1.2.1), iremos utilizar o modelo malthusiano definido acima. Primeiramente iremos expor as informações que temos, que são:

$$f(3) = 400, \qquad f(10) = 2000.$$

Sabemos também que, como se trata de uma situação que retrata a dinâmica de uma população, usaremos o resultado (solução) (1.6) para primeiramente, encontrarmos o valor da constante de proporcionalidade $\lambda$ e assim, através de $\lambda$ determinarmos $f(0)$ que nos indica o número inicial de bactérias.

De (1.6), temos que, $f(3) = f(0)e^{3\lambda}$ e $f(10) = f(0)e^{10\lambda}$, ou seja, temos o sistema

$$\begin{cases} f(0)e^{10\lambda} &= 2000 \\ f(0)e^{3\lambda} &= 400. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação do sistema por $e^{7\lambda}$, geramos o novo sistema, o qual resolveremos pelo método da adição

$$\begin{cases} f(0)e^{10\lambda} &= 2000 \\ f(0)e^{10\lambda} &= 400e^{7\lambda}. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação do novo sistema, da primeira equação, temos que

$$\begin{aligned} 2000 - 400e^{7\lambda} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2000 &= 400e^{7\lambda} \\ \Leftrightarrow e^{7\lambda} &= \frac{2000}{400} \\ \Leftrightarrow e^{7\lambda} &= 5 \\ \Leftrightarrow \ln e^{7\lambda} &= \ln 5 \\ \Leftrightarrow 7\lambda &\approx 1,61 \\ \Leftrightarrow \lambda &\approx 0,22. \end{aligned}$$

Encontrada a constante de proporcionalidade, $(\lambda \approx 0,22)$, escolhemos a equação $f(0)e^{3\lambda} = 400$ para encontrar $f(0)$. Daí, temos:

$$\begin{aligned} f(0)e^{3\lambda} &= 400 \\ \Rightarrow f(0)e^{3.0,22} &\approx 400 \\ \Leftrightarrow f(0) &\approx \frac{400}{e^{0,66}} \\ \Leftrightarrow f(0) &\approx 206,7. \end{aligned}$$

Portanto, temos um valor aproximado para o número inicial de bactérias que é 207.

### 1.2.1 Modelagem Matemática

Podemos brevemente resumir o conceito de modelagem matemática da seguinte forma: Ao depararmos com algum problema real, da Física ou da própria Matemática, supomos um problema parecido com o real e obtemos uma solução real para tal problema suposto. Dessa forma, a solução real do problema suposto serve como uma solução aproximada para o problema real. Ao problema suposto e sua respectiva solução, chamamos de modelo matemático para o problema real. Apresentaremos em seguida, um organograma desse conceito de modelagem:


Seguem alguns passos, dados por [4] para se modelar matematicamente algum problema, utilizando-se de equações diferenciais:

*i*) Identificar as Variáveis que caracterizam o problema;

*ii*) Definição das unidades de medida das variáveis;

*iii*) Determinação das leis (Teóricas ou Empíricas) que regem as relações entre as Variáveis e a dinâmica do sistema;

*iv*) Expressar as leis em termos das Variáveis identificadas.

### 1.2.2 Classificação quanto à Linearidade ou não Linearidade

Dizemos que uma equação diferencial é **Linear** quando podemos escrevê-la de modo que a função $y$ e suas respectivas derivadas que compõem as incógnitas da equação, são todas do primeiro grau. Além do mais, a função $y$ depende apenas de uma variável independente $x$.

Assim, segundo [17], uma equação diferencial **Linear** pode ser escrita da seguinte maneira:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{1.7}$$

Portanto, se uma equação não cumpre as propriedades ditas acima, é dita Não Linear.

A equação modelada no problema (1.2.1), além de ser de primeira ordem, é também exemplo de equação diferencial linear.

Seguem alguns exemplos de equações diferenciais baseados nos tipos de classificação abordados (Ordem e Linearidade):

**Exemplo 1.** *Equações diferenciais ordinárias:*

- $y'(x) + 2y(x) = e^x$ *(Linear)*
- $y''(x).y'(x) + 2y(x) = 0$ *(Não Linear)*
- $y'(x) + 2y(x) = e^x$ *(Linear)*
- $y''(x).y'(x) + 2y(x) = 0$ *(Não Linear)*

## 1.3 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

A importância do estudo de equações diferenciais de segunda ordem se dá pelo fato de que esse tipo de equação é essencial na modelagem de alguns problemas da Física, visto que este tipo de equação, nasceu junto com a mecânica tão explorada em problemas da Física, como veremos com mais detalhes.

Para [4] uma equação diferencial de segunda ordem tem a forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right). \tag{1.8}$$

Podemos ainda expressar uma equação diferencial de segunda ordem linear, na forma:

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = f(t), \tag{1.9}$$

na qual, $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, definidas num intervalo aberto $I$.

Considerando que em algum problema que envolva equações diferenciais do tipo (1.9), se tivermos valores iniciais

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0,$$

com $t_0 \in I$, podemos garantir soluções para tal equação com base no teorema a seguir:

**Teorema 1.** *[5] Se $p$, $q$ e $f$ são funções contínuas em $I$, então o problema de valor inicial tem uma, e somente uma, solução definida em todo o intervalo $I$.*

Nota-se que, os valores $y_0$ e $y'_0$, além de fornecerem um ponto inicial $(t_0, y_0)$, pertencente ao gráfico da solução da equação, também indicam a taxa de variação, ou coeficiente angular, de valor $y'_o$ da reta que tangencia, no ponto $(t_0, y_0)$, o gráfico da solução.

Para solucionar um problema de valor inicial, o número de condições iniciais deve ser igual ao número que indica a ordem da equação diferencial. Assim, em particular, para uma equação diferencial de segunda ordem envolvida em um problema de valor inicial, devemos ter duas condições iniciais. Tais problemas não serão abordados neste trabalho, visto que em nossa principal aplicação (Equação de Campo de Eintein) não envolveremos valores iniciais devido à complexidade de tal problema no que diz respeito a valores de contorno.

Uma equação diferencial de segunda ordem, do tipo (1.9) é chamada de homogênea, quando $f(t) = 0$. Assim, se $f(t) \neq 0$, a equação é chamada de não homogênea.

## 1.4 Métodos de Resolução

A seguir, apresentaremos alguns métodos de resolução para equações diferenciais de segunda ordem que serão utilizados em algumas aplicações no decorrer dos próximos capítulos.

### 1.4.1 Equações Homogêneas com coeficientes constantes

Partiremos de um caso simples de equações diferenciais homogêneas de coeficientes constantes, resolvendo a equação

$$y'' - y = 0. \tag{1.10}$$

Analisando a equação (1.10), procuramos como solução, uma função $y(t)$ de modo que $y''(t) = y(t)$, ou seja, a segunda derivada da função $y(t)$ é igual a ela mesma. De imediato, podemos citar as funções $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$ como soluções para (1.10) pois,

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1(t), \qquad \frac{dy_2}{dt} = y_2(t)$$

e

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = y_1(t), \qquad \frac{d^2y_2}{dt^2} = y_2(t).$$

Assim, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções de (1.10).

De um modo mais geral, podemos ainda afirmar que quaisquer funções múltiplas de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ do tipo $y_a(t) = c_1e^t$ ou $y_b(t) = c_2e^{-t}$, com $c_1, c_2$ constantes quaisquer, são também soluções para a equação (1.10), visto que,

$$\frac{d^2y_a}{dt^2} = y_a(t), \qquad \frac{d^2y_b}{dt^2} = y_b(t).$$

Ainda mais, nota-se que qualquer soma entre as funções que são solução de (1.10) é também uma solução para (1.10), pois, se

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

então,

$$y' = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$$

logo,

$$\begin{aligned} y'' &= c_1 e^t - (-c_2 e^{-t}) \\ \Rightarrow y'' &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ \Rightarrow y'' &= y. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Dessa forma, temos uma família de soluções para a equação (1.10).

Para o caso de termos um problema de valor inicial

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0,$$

podemos encontrar os valores das constantes $c_1$ e $c_2$ através da solução do sistema

$$\begin{cases} c_1 e^{t_0} + c_2 e^{-t_0} = y_0 \\ c_1 e^{t_0} - c_2 e^{-t_0} = y'_0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Vamos analisar de modo análogo à equação (1.10), o caso geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea,

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{1.12}$$

na qual $a, b, c$ são constantes reais. Assim como em (1.10), vamos supor uma solução, em particular, $y = e^{rt}$ para (1.12).

Temos que, $y' = re^{rt}$ e $y'' = r^2 e^{rt}$. Substituindo $y''$, $y'$ e $y$ em (1.12), temos

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$\Leftrightarrow (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$

$$\Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0, \tag{1.13}$$

pois sabemos que $e^{rt} \neq 0$.

À equação (1.13) chamamos de Equação Característica. Esta equação tem ligação direta com a solução de (1.12), pois através dela podemos encontrar até dois valores para $r$ (através dos métodos de resolução de uma equação polinomial do segundo grau) e assim, determinar uma família de soluções para (1.12) partindo da solução suposta $y = e^{rt}$.

Sabendo que em uma equação polinomial do segundo grau podemos ter duas raízes distintas $r_1 \neq r_2$; duas raízes iguais $r_1 = r_2 = r$ ou duas raízes complexas em que $r_1$ é o conjugado de $r_2$, analisaremos o tipo de solução para (1.12) em cada um dos três casos.

### 1.4.2 Equação característica com raízes diferentes

Inicialmente, vamos considerar o primeiro caso citado, em que $r_1 \neq r_2$. Sabemos a princípio que

$$y_1 = e^{r_1 t}, \qquad y_2 = e^{r_2 t},$$

são soluções para (1.12). Daí,

$$y_a = c_1 e^{r_1 t}, \qquad y_b = c_2 e^{r_2 t},$$

também são soluções para (1.12), de fato,

$$y_a' = r_1 c_1 e^{r_1 t}, \qquad y_b' = r_2 c_2 e^{r_2 t}$$

e

$$y_a'' = r_1^2 c_1 e^{r_1 t}, \qquad y_b'' = r_2^2 c_2 e^{r_2 t}.$$

Então, substituindo $y_a$, $y_a'$, $y_a''$ e $y_b$, $y_b'$, $y_b''$ em (1.12), temos:

$$\begin{aligned} & ay'' + by' + cy \\ = \; & a(r_1^2 c_1 e^{r_1 t}) + b(r_1 c_1 e^{r_1 t}) + c(c_1 e^{r_1 t}) \\ = \; & c_1 e^{r_1 t}(ar_1^2 + br_1 + c) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & ay'' + by' + cy \\ = \; & a(r_2^2 c_2 e^{r_2 t}) + b(r_2 c_2 e^{r_2 t}) + c(c_2 e^{r_2 t}) \\ = \; & c_2 e^{r_2 t}(ar_2^2 + br_2 + c). \end{aligned}$$

Logo, como $r_1$ e $r_2$ são raízes da equação característica (1.13), podemos afirmar que

$$ar_1^2 + br_1 + c = 0, \qquad ar_2^2 + br_2 + c = 0.$$

Então

$$c_1 e^{r_1 t}.0 = 0, \qquad c_2 e^{r_2 t}.0 = 0.$$

O que prova que $y_a$ e $y_b$ de fato são soluções de (1.12). Além disso, a soma

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

também é solução de (1.12), pois, se

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\ \Rightarrow y' &= r_1 c_1 e^{r_1 t} + r_2 c_2 e^{r_2 t} \\ \Rightarrow y'' &= r_1^2 c_1 e^{r_1 t} + r_2^2 c_2 e^{r_2 t}. \end{aligned}$$

Logo, substituindo $y$, $y'$ e $y''$ em (1.12), temos:

$$
\begin{aligned}
& ay'' + by' + cy \\
= \; & a(r_1^2 c_1 e^{r_1 t} + r_2^2 c_2 e^{r_2 t}) + b(r_1 c_1 e^{r_1 t} + r_2 c_2 e^{r_2 t}) + c(c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}) \\
= \; & c_1 e^{r_1 t}(ar_1^2 + br_1 + c) + c_2 e^{r_2 t}(ar_2^2 + br_2 + c).
\end{aligned}
$$

Assim, de modo análogo, como $r_1$ e $r_2$ são soluções de (1.13) e por isso, afirmando que

$$ar_1^2 + br_1 + c = 0, \qquad ar_2^2 + br_2 + c = 0,$$

temos que

$$c_1 e^{r_1 t}.0 + c_2 e^{r_2 t}.0 = 0. \qquad \blacksquare$$

Para algum problema de valor inicial

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_0',$$

podemos encontrar os valores das constantes $c_1$ e $c_2$ através da resolução do sistema

$$
\begin{cases}
c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} & = \; y_0 \\
r_1 c_1 e^{r_1 t_0} + r_2 c_2 e^{r_2 t_0} & = \; y_0'.
\end{cases}
\tag{1.14}
$$

Podemos generalizar o resultado obtido através do teorema abaixo:

**Teorema 2** (Princípio da Superposição)**.** *[5]. Se $y_1$ e $y_2$ são soluções da equação diferencial* (1.9),

$$y''(t) + p(t)y' + q(t) = f(t),$$

*então a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes $c_1$ e $c_2$.*

**Exemplo 2.** *Consideraremos a equação $y'' - y' - 12y = 0$ encontrada como exercício em [17]. Sabemos que sua equação característica é:*

$$r^2 - r - 12 = 0. \tag{1.15}$$

*Daí, temos que as soluções de* (1.15)*, são:*

$$r_1 = 4; \qquad r_2 = -3.$$

*Portanto, como $r_1 \neq r_2$, a família de soluções da equação $y'' - y' - 12y = 0$ é da forma:*

$$y = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-3t}.$$

**Exemplo 3.** *Consideraremos a equação* $y'' - 4y = 0$ *encontrada também como exercício em [17], que tem a seguinte equação característica:*

$$r^2 - 4r = 0. \tag{1.16}$$

*Daí, temos que as soluções de* (1.16) *são:*

$$r_1 = 2; \qquad r_2 = -2.$$

*Portanto, como* $r_1 \neq r_2$*, a família de soluções da equação equação* $y'' - 4y = 0$ *é da forma:*

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}.$$

### 1.4.3 Equação caracteística com raízes complexas

Analisaremos agora o caso em que as raízes $r_1$ e $r_2$ da equação característica (1.13) são números complexos. Nesse caso temos que $r_1$ é o conjugado de $r_2$, ou seja, se $r_1 = \lambda + i\mu$ então $r_2 = \lambda - i\mu$ de modo que $\lambda$ e $\mu$ são números reais.

Para esse caso, supomos que as funções

$$y_1(t) = \exp[(\lambda + i\mu)t], \qquad y_2(t) = \exp(\lambda - i\mu)t,$$

são soluções para (1.12).

Considerando a equação

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) \tag{1.17}$$

ou,

$$e^{-it} = \cos(t) - i\sin(t)$$

(pois $\cos(-t) = \cos(t)$ e $\sin(-t) = -\sin(t)$), conhecida como fórmula ou equação de Euler, que de modo mais geral pode ser escrita na forma:

$$e^{i\mu t} = \cos(\mu t) + i\sin(\mu t),$$

podemos notar que,

$$y_1(t) = e^{\lambda t}\cos(\mu t) + ie^{\lambda t}\sin(\mu t), \qquad y_2(t) = e^{\lambda t}\cos(\mu t) - ie^{\lambda t}\sin(\mu t),$$

pois

$$\begin{aligned}
\exp[(\lambda + i\mu)t] &= e^{(\lambda + i\mu)t} \\
&= e^{\lambda t + i\mu t} \\
&= e^{\lambda t} e^{i\mu t} \\
&= e^{\lambda t}[\cos(\mu t) + i\sin(\mu t)] \\
&= e^{\lambda t}\cos(\mu t) + ie^{\lambda t}\sin(\mu t).
\end{aligned}$$

Ainda mais, de acordo com o teorema (2), a combinação $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução para (1.12). Dessa forma, fazendo a soma

$$\begin{aligned} y_1(t) + y_2(t) &= [e^{\lambda t}\cos(\mu t) + ie^{\lambda t}\sin(\mu t)] + [e^{\lambda t}\cos(\mu t) - ie^{\lambda t}\sin(\mu t)] \\ &= 2e^{\lambda t}\cos(\mu t) \end{aligned}$$

e a subtração

$$\begin{aligned} y_1(t) - y_2(t) &= [e^{\lambda t}\cos(\mu t) + ie^{\lambda t}\sin(\mu t)] - [e^{\lambda t}\cos(\mu t) - ie^{\lambda t}\sin(\mu t)] \\ &= 2ie^{\lambda t}\sin(\mu t) \end{aligned}$$

e desprezando as constantes 2 e $2i$ temos mais um par de soluções para (1.12), que são:

$$y_a = e^{\lambda t}\cos(\mu t), \qquad y_b = e^{\lambda t}\sin(\mu t).$$

De modo que novamente, com base no teorema (2), a combinação

$$c_1y_a + c_2y_b = c_1e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2e^{\lambda t}\sin(\mu t),$$

é também solução de (1.12).

Assim, formamos uma família de soluções para (1.12) no caso em que as raízes da equação (1.13) são complexas.

**Exemplo 4.** *Consideraremos a equação $y'' - 2y' + 5y = 0$, encontrada como exercício em [17], que tem a seguinte equação característica:*

$$r^2 - 2r + 5 = 0. \tag{1.18}$$

*Daí, temos então que as raízes de (1.18) são:*

$$r_1 = 1 + 2i; \qquad r_2 = 1 - 2i.$$

*Logo, como $r_1$ e $r_2$ são raízes complexas, a família de soluções da equação $y'' - 2y + 5 = 0$ é da forma:*

$$y = c_1e^t\cos(2t) + c_2e^t\sin(-2t).$$

**Exemplo 5.** *Iremos considerar a equação $y'' - 2y' + 10y = 0$, que possui a seguinte equação característica:*

$$r^2 - 2r + 10 = 0. \tag{1.19}$$

*Daí, temos que as raízes da equação (1.19) são complexas, sendo, $r_1 = 1 + 3i$ e $1 - 3i$. Portanto, o formato da família de soluções para a equação $y'' - 2y' + 10y = 0$ é:*

$$y = c_1e^t\cos(3t) + c_2e^t\sin(-3t).$$

### 1.4.4 Equação Característica com raízes iguais

Veremos agora o caso em que as raízes da equação (1.13) são iguais, ou seja, $r_1 = r_2 = r$. Para isso, utilizaremos método chamado Redução de Ordem, no qual iremos reduzir a equação diferencial de segunda ordem para uma equação diferencial de primeira ordem através da mudança de algumas variáveis.

Para o caso analisado, temos apenas um valor $r$ como raíz da equação (1.13), que em particular, pode ser encontrado através do cálculo

$$r = \frac{-b}{2a},$$

o que nos sugere apenas uma solução para a equação (1.12), que é

$$y_1 = e^{\frac{-bt}{2a}},$$

que de fato é solução de (1.12), pois se

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\frac{-bt}{2a}} \\ \Rightarrow y_1' &= \frac{-b}{2a}e^{\frac{-bt}{2a}} \\ \Rightarrow y_1'' &= \frac{b^2}{2a}e^{\frac{-bt}{4a}}. \end{aligned}$$

Logo, subistituindo $y_1$, $y_1'$ e $y_1''$ em (1.12), temos:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= 0 \\ \Rightarrow a\left(\frac{b^2}{4a}e^{\frac{-bt}{2a}}\right) + b\left(\frac{-b}{2a}e^{\frac{-bt}{2a}}\right) + c\left(e^{\frac{-bt}{2a}}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{\frac{-bt}{2a}}\left[a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c\right] &= 0. \end{aligned}$$

De fato a última igualdade é verdadeira, pois $\frac{-b}{2a}$ é raíz da equação característica, ou seja

$$\begin{aligned} \left[a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c\right] &= 0 \\ \Rightarrow e^{\frac{-bt}{2a}}.0 &= 0. \end{aligned}$$

Conhecida a solução $y_1(t) = e^{\frac{-bt}{2a}}$ que é diferente de zero, faremos a redução de ordem da equação (1.12) buscando outra solução da forma

$$y_2(t) = u(t)y_1(t),$$

para que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sejam linearmente independentes.

Logo, se

$$\begin{aligned} y_2 &= uy_1 \\ \Rightarrow y_2' &= uy_1' + u'y_1 \\ \Rightarrow y_2'' &= uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1. \end{aligned}$$

Assim, substituindo $y_2$, $y_2'$ e $y_2''$ em (1.12), temos:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1) + b(uy_1' + u'y_1) + c(uy_1) \\ &= auy_1'' + 2au'y_1'au''y_1buy_1'bu'y_1 + cuy_1 \\ &= u(ay_1'' + by_1' + cy_1) + au''y_1 + (2ay_1' + by_1)u'. \end{aligned}$$

Daí, como $y_1$ é solução de (1.12), temos que:

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0.$$

Logo,

$$u.0 + au''y_1 + (2ay_1' + by_1)u' = au''y_1 + (2ay_1' + by_1)u'.$$

Assim, pelo método da redução de ordem, fazendo $v = u'$ e substituindo em $au''y_1 + (2ay_1' + by_1)u'$ e igualando a zero (supondo que $y_2$ seja solução de (1.12) ), temos:

$$ay_1v' + (2ay_1' + by_1)v = 0.$$

Como sabemos que $y_1 = e^{\frac{-bt}{2a}}$, iremos subustituí-lo na igualdade acima. Logo, teremos:

$$\begin{aligned} ae^{\frac{-bt}{2a}}v' + \left(2a\frac{-b}{2a}e^{\frac{-bt}{2a}} + be^{\frac{-bt}{2a}}\right)v &= 0 \\ \Rightarrow ae^{\frac{-bt}{2a}}v' + 0.v &= 0 \\ v' &= 0. \end{aligned}$$

O que nos mostra que $v = c_1$, tal que $c_1$ é uma constante. Daí, retornando $v$ para a função $u'$ temos que

$$\begin{aligned} \int u'dt &= \int c_1 dt \\ \Rightarrow u(t) &= c_2t + c_1. \end{aligned}$$

Assim, qualquer função na forma

$$y(t) = (c_2t + c_1)y_1(t)$$

na qual, $c_1$ e $c_2$ são constantes, é também solução para (1.12). Logo, escolhendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, temos a solução $y_2(t)$ de forma mais simplificada, que é:

$$y_2(t) = te^{\frac{-bt}{2a}}.$$

Mais ainda, baseado no teorema (2), sabemos que

$$y_1(t) + y_2(t) = c_1 e^{\frac{-bt}{2a}} + c_2 te^{\frac{-bt}{2a}}.$$

Podemos ainda provar para esse último caso que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ de fato são linearmente independentes, através do determinante Wronskiano, que pela definição dada em [5] é:

**Definição 3** (Wronskiano)**.** *[5] Dadas as funções $\phi_1, \phi_2 : I \to \mathbb{R}$, o determinante*

$$W[\phi_1, \phi_2](t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix},$$

*é chamado o Wronskiano das funções $\phi_1$ e $\phi_2$.*

Seguem a proposição e teorema encontrados em [5] que garantem a independência linear entre duas funções $\phi_1, \phi_2$.

**Proposição 1.** *[5]. Sejam $\phi_1, \phi_2 : I \to \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis, cujo Wronskiano é diferente de zero em um ponto $t_0 \in I$. Então $\phi_1$ e $\phi_2$ são linearmente independentes.*

**Teorema 3.** *[5]. Sejam $\phi_1$ e $\phi_2$ soluções de* (1.12)*. Então, elas são linearmente independentes se e somente se seu Wronskiano é diferente de zero em um ponto $t_0 \in I$. Além disso, se o Wronskiano for diferente de zero em um ponto $t_0$, então ele é diferente de zero em todos os demais pontos de $I$*

Daí, temos que

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](t) &= \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{\frac{-bt}{2a}} & te^{\frac{-bt}{2a}} \\ \frac{-b}{2a} e^{\frac{-bt}{2a}} & \left(1 - \frac{-bt}{2a}\right) e^{\frac{-bt}{2a}} \end{vmatrix} \\ &= e^{\frac{-bt}{a}} \left(1 - \frac{bt}{2a}\right) + e^{\frac{-bt}{a}} \frac{bt}{2a} \\ &= e^{\frac{-bt}{a}} \neq 0. \end{aligned}$$

**Exemplo 6.** *Iremos considerar a equação $4y'' - 4y' + y = 0$ encontrada como exercício em [17], que possui a seguinte equação característica:*

$$4r^2 - 4r + 1 = 0. \tag{1.20}$$

*Daí, como as raízes da equação* (1.20) *são iguais, sendo* $r_1 = r_2 = 2$*, temos que, a família de soluções para a equação* $4y'' - 4y' + y = 0$ *é da forma:*

$$y = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}.$$

**Exemplo 7.** *Consideraremos a equação* $y'' - 4y' + 4y = 0$ *encontrada como exercício em [17], de equação característica:*

$$r^2 - 4r + 4 = 0. \tag{1.21}$$

*Temos então que, as raízes da equação* (1.21) *são iguais, sendo* $r_1 = r_2 = 2$*. Portanto, a família de soluções para a equação* $y'' - 4y' + 4y = 0$*, é da forma:*

$$y = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}.$$

Dessa maneira, nestes dois últimos exemplos, temos duas equações diferenciais de segunda ordem homogêneas, diferentes, porém com o mesmo formato de soluções, visto que, as raízes das equações (1.20) e (1.21) são iguais.

### 1.4.5 Equações Homogêneas Com Coeficientes Variáveis - Equação de Cauchy-Euler

Podemos ainda ter equações diferenciais de segunda ordem, ou ordem superior, tais que seus respectivos coeficientes sejam funções da mesma varíável das funções incógnitas da equação diferencial. Para esse caso, analisaremos a equação de Cauchy-Euler. O estudo a seguir, foi feito, baseado principalmente em [17].

Segundo [17], essa equação tem a seguinte forma:

$$a_nx^n\frac{d^ny}{dx} + a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1x\frac{dy}{dx} + a_0y = g(x),$$

de modo que $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ são constantes e tal equação tem como principal característica que o grau de cada coeficiente monomial coincide com a ordem de derivação.

Iremos analisar o caso particular da equação de Cauchy-Euler homogênea de segunda ordem, ou seja, na forma seguinte:

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = g(x),$$

em que $g(x) = 0$, logo, a forma analisada será

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0, \tag{1.22}$$

visto que o método de solução para ordem superior é análogo.

Para se obter soluções para (1.22), iremos supor uma possível solução $y(x) = x^m$. Assim, se

$$\begin{aligned} y(x) &= x^m \\ \Rightarrow y'(x) &= mx^{m-1} \\ \Rightarrow y''(x) &= m(m-1)x^{m-2}. \end{aligned}$$

Logo, substituindo $y, y'$ e $y''$ em (1.22), temos:

$$\begin{aligned} ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy &= ax^2 \times m(m-1)x^{m-2} + bx \times mx^{m-1} + cx^m \\ &= am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m. \end{aligned}$$

Colocando o termo $x^m$ em evidência, temos:

$$x^m[am(m-1) + bm + c]$$

Assim, nossa solução suposta $y(x) = x^m$ será solução para (1.22) quando $m$ for solução da equação de segundo grau

$$am^2 + (b-a)m + c = 0. \tag{1.23}$$

Analisaremos para (1.23) apenas o caso em que $m_1 \neq m_2$, que é o caso particular que será utilizado no capítulo 2. Para os outros casos em que $m_1 = m_2$ ou $m_1, m_2 \in \mathbb{C}$, ver [17].

Se $m_1$ e $m_2$ são raízes reais e distintas de (1.23), então

$$y_1(x) = x^{m_1} \quad e \quad y_2(x) = x^{m_2},$$

são soluções de (1.23), e consequentemente, assim como nos casos da equação característica vistos anteriormente, a combinação

$$y(x) = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2},$$

também será solução de (1.23).

**Exemplo 8.** *Para a equação $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$, temos:*

$$\begin{aligned} m(m-1) - 2m - 4 &= 0 \\ m^2 - 3m - 4 &= 0. \end{aligned}$$

*Então $m_1 = -1$ e $m_2 = 4$. Logo, a família de soluções é da forma:*

$$y(x) = c_1x^{-1} + c_2x^4$$

As definições e conceitos vistos neste capítulo servirão de base para encontrarmos soluções para a métrica que soluciona a equação de Campo de Einstein.

# Capítulo 2

# Algumas Soluções Para a Equação de Campo Estático de Einstein

Faremos aqui uma análise do teorema abaixo encontrado em [7], que é uma forma de simplificação na busca de soluções para a equação de campo Estático de Einstein. Para isso, será considerado o Espaço-Tempo quadridimensional, com propriedades métricas que serão aqui descritas. Mais ainda, resolveremos de alguns modos diferentes a segunda equação dada no Teorema, utilizando as técnicas de resolução de equações diferenciais de segunda ordem que foram descritas e demonstradas no capítulo inicial deste trabalho, visto que, através da resolução desta equação, podemos encontrar algumas diferentes soluções para a Equação de Campo de Einstein.

Em [7], Leandro e Pina mostram que um tipo de solução para a equação geral de Campo de Einstein, em

$$M^n \times_f \mathbb{R},$$

(que é um Espaço-Tempo estático), é dada pela métrica $ds^2 = -fdt^2 + \bar{g}$, tal que, $f : M^n \to (0, +\infty)$, com $M^n = (\mathbb{R}, \bar{g})$, onde $\bar{g} = \frac{\varepsilon_i \delta_{ij}}{\varphi^2}$.

## 2.1 Conceitos de Geometria Diferencial

Seguem alguns conceitos de geometria diferencial que são abordados durante o teorema:

**Definição 4** (Variedade)**.** *Definimos uma Variedade como um tipo de generalização de superfícies. Em particular, para a ideia abordada do campo de Einstein, uma superfície planificada.*

**Definição 5** (Métrica). *O conceito de métrica pode ser entendido como o conjunto de regras que ditam como se dão as medições em um determinado espaço. As soluções que encontramos para a equação de campo de Einstein, são dadas pela métrica* $ds^2 = -fdt^2 + \bar{g}$.

**Definição 6** (Espaço Estático). *O espaço estático de Einstein, é o espaço-tempo, quadridimensional, com três dimensões de distância e uma dimensão temporal. Assim, é chamado de estático pois a métrica (aqui denotada por* $ds^2$*) considerada para medição desse espaço tem a propriedade de não variar com o tempo. Ou seja, um observador que está olhando para um espaço com essa estrutura terá a impressão de "ver tudo parado", como quando olhamos para um céu estrelado a noite.*

## 2.2 O Teorema

Segue o teorema que será utilizado neste capítulo:

**Teorema 4.** *Seja* $(\mathbb{R}^n, g)$ *um espaço Pseudo-Euclideano,* $n \geq 3$*, com coordenadas cartesianas* $(x_1, ..., x_n)$ *e métrica* $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_1$*. Seja* $O \in \mathbb{R}^n$ *aberto,* $\varphi(\xi)$ *e* $f(\xi)$ *funções deriváveis em* $O$*, onde* $\xi = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \alpha_k \in \mathbb{R}$ *e* $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \alpha_k^2 = \varepsilon_{k_0}$ *ou* $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \alpha_k^2 = 0$*. Então* $(O, \bar{g})$*, com* $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$ *em* $O$*, é o fator espacial (ou, base) para o Espaço-Tempo estático de Einstain no vácuo com* $f$ *sendo função de torção no intervalo se, e somente se,* $\varphi$ *e* $f$ *satisfazem*

$$\begin{cases} (n-2)f\varphi'' - f''\varphi - 2\varphi' f' = 0 \\ f\varphi\varphi'' - f(\varphi') - \varphi\varphi' f' = 0 \end{cases} \qquad Para \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = \varepsilon k_0$$

*e*

$$(n-2)f\varphi'' - f''\varphi - 2\varphi' f' = 0 \qquad Para \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = 0.$$

Primeiramente, é dado um espaço $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n \geq 3$ que é, consequentemente com $n$ coordenadas cartesianas $(x_1, ..., x_n)$ e definida sua respectiva métrica $g_{ij=\varepsilon_i \delta_{ij}}$. Daí, um aberto $O \in \mathbb{R}^n$, que é um subspaço de $\mathbb{R}^n$, com métrica $\bar{g} = \frac{g}{\varphi^2}$, tal que $O$ possui funções diferenciáveis $\xi, f, \varphi$ ou seja, funções que admitem derivação quantas vezes for preciso, em todo aberto $O$, Sob essas condições dadas queremos obter as funções $f$ e $\varphi$ tais que ambas satisfaçam os seguintes sistemas de EDO:

$$\begin{cases} (n-2)f\varphi'' - f''\varphi - 2\varphi' f' &= 0 \\ f\varphi\varphi'' - f(\varphi') - \varphi\varphi' f' &= 0 \end{cases} \qquad Para \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = \varepsilon k_0 \tag{2.1}$$

e

$$(n-2)f\varphi'' - f''\varphi - 2\varphi' f' = 0 \qquad Para \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha_k^2 = 0. \tag{2.2}$$

Iremos encontrar alguns exemplos de espaço-tempo estático que satisfazem as condições do teorema acima. .Em [7], afirma-se ainda que este teorema tem resultados locais, nos quais as funções $f, \varphi$ são bem definidas, e também ressalta a complexidade em encontrar soluções para um sistema de equações diferenciais não lineares. Por isso, vamos nos atentar para a equação (2.2) e desenvolver algumas soluções para a mesma.

Como trata-se de uma equação diferencial não linear de segunda ordem, que possui 2 funções da função $\xi$, iremos substituir tal variável (que no teorema é dada por um somatório) por $x$ e admitiremos funções conhecidas para a função $\varphi$, para reduzir tal equação, à uma equação diferencial linear de segunda ordem. Portanto, substituindo a função $\varphi$ por funções conhecidas na equação (2.2), encontraremos soluções para $f$ em função de $\varphi$ e dessa forma, encontramos algumas soluções para a métrica que solucina a equação de Campo de Einstein. Essas métricas encontradas, são como as "réguas" que nos informa como medir nesse determinado espaço. Ou seja, as soluções aqui encontradas para a equação de campo estático de Einstein, são regras que determinam a medição nesse campo estático.

Em especial, não trataremos a equação (2.2) como problema de valor inicial, visto que,as condições de fronteira são muito específicas para este trabalho. Assim, teremos apenas generalizações e famílias de solução para $f$, assim como descrito no capítulo inicial deste trabalho. Também iremos considerar sempre $n = 3$.

## 2.3 Exemplos de Soluções Para 2.2

Traremos aqui alguns exemplos de soluções de Campo de Einstein.

### 2.3.1 1ª Solução

Primeiramente, pensando em uma equação diferencial homogênea, o caso mais trivial que iremos assumir para substituir em (2.2) é $\varphi(x) = e^x$. Temos então que $\varphi(x) = \varphi'(x) = \varphi''(x) = e^x$. Assim, substituindo $\varphi(x), \varphi'(x)$ e $\varphi''(x)$ em (2.2) temos:

$$(n-2)f(x)e^x - f''(x)e^x - 2f'(x)e^x = 0.$$

Logo, como $e^x \neq 0$, podemos dividir toda a equação por $e^x$, resultando em:

$$-f'' - 2f' + (n-2)f = 0,$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem homogênea e que possui equação característica

$$-r^2 - 2r + (n-2) = 0,$$

de raízes

$$r_1 = 1 + \sqrt{n-1}, \qquad r_2 = 1 - \sqrt{n-1}.$$

Assim, como $r_1 \neq r_2$ e $n = 3$, a família de soluções para $f(x)$ é da forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \\ \Rightarrow f(x) &= C_1 e^{(1+\sqrt{n-1})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{n-1})x} \\ \Rightarrow f(x) &= C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}. \end{aligned}$$

Assim, para a família de soluções da equação diferencial encontrada, temos a generalização da família de soluções para a Equação de Campo de Einstein da forma

$$ds^2 = -\left[C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}\right] dt^2 + \frac{1}{(e^x)^2}\varepsilon_i \delta_{ij}, \tag{2.3}$$

onde $x := \xi$, descrito no teorema (4).

### 2.3.2 Generalizações da 1ª solução

Podemos ainda fazer duas generalizações do caso exponencial, supondo $\varphi(x) = e^{\alpha x}$ e $\varphi(x) = \beta e^{\alpha x}$, tal que $\alpha, \beta$ são constantes. Assim, para o caso em que $\varphi(x) = e^{\alpha x}$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= e^{\alpha x} \\ \Rightarrow \varphi'(x) &= \alpha e^{\alpha x} \\ \Rightarrow \varphi''(x) &= \alpha^2 e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Assim, substituindo $\varphi(x), \varphi'(x)$ e $\varphi''(x)$ em (2.2), temos:

$$(n-2) f \alpha^2 e^{\alpha x} - f'' e^{\alpha x} - 2\alpha e^{\alpha x} f' = 0.$$

De maneira análoga a anterior, podemos dividir toda a equação pelo termo $e^{\alpha x}$, pois este é diferente de zero, resultando na igualdade:

$$(n-2)\alpha^2 f - f'' - 2\alpha f' = 0,$$

que também é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem, porém de equação característica

$$-r^2 - 2\alpha r + (n-2)\alpha^2 = 0,$$

de raízes

$$r_1 = \alpha(1 + \sqrt{n-1}), \qquad r_2 = \alpha(1 - \sqrt{n-1}).$$

Analogamente, como $r_1 \neq r_2$ e $n = 3$, temos que a família de soluções para $f(x)$ será da forma

$$f(x) = C_1 e^{\alpha(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{\alpha(1-\sqrt{2})x}.$$

Para esse caso, temos que a solução da Equação de Campo de Einstein será da forma

$$ds^2 = -\left[C_1 e^{\alpha(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{\alpha(1-\sqrt{2})x}\right]^2 dt^2 + \frac{1}{(e^{\alpha x})^2}\varepsilon_i \delta_{ij}. \tag{2.4}$$

Para o caso em que $\varphi(x) = \beta e^{\alpha x}$, temos que, se

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \beta e^{\alpha x} \\ \Rightarrow \varphi'(x) &= \alpha\beta e^{\alpha x} \\ \Rightarrow \varphi''(x) &= \alpha^2 \beta e^{\alpha x} \end{aligned}$$

Logo, substituindo $\varphi(x), \varphi'(x)$ e $\varphi''(x)$ em (2.2), temos:

$$(n-2) f \alpha^2 \beta e^{\alpha x} - f'' \beta e^{\alpha x} - 2\alpha\beta e^{\alpha x} f' = 0,$$

que, pela divisão da equação por $e^{\alpha x}$, se reduz à equação diferencial homogênea de segunda ordem

$$-\beta f'' - 2\alpha\beta f' + (n-2)\alpha^2 \beta f = 0,$$

de equação característica

$$-\beta r^2 - 2\alpha\beta r + (n-2)\alpha^2\beta = 0,$$

de raízes

$$r_1 = -\alpha(1 + \sqrt{n-1}), \qquad r_2 = -\alpha(1 - \sqrt{n-1}).$$

Analogamente, como $r_1 \neq r_2$ e $n = 3$, a família de soluções para $f(x)$ nesse caso, seria da forma:

$$f(x) = C_1 e^{-\alpha(1+\sqrt{2})} + C_2 e^{-\alpha(1-\sqrt{2})}.$$

Assim, a solução da Equação de Campo de Einstein tem a forma

$$ds^2 = -\left[C_1 e^{-\alpha(1+\sqrt{2})} + C_2 e^{-\alpha(1-\sqrt{2})}\right]^2 dt^2 + \frac{1}{(\beta e^{\alpha x})^2}\varepsilon_i \delta_{ij}. \tag{2.5}$$

### 2.3.3 Para $\varphi(x) = x^2$

Para o caso em que $\varphi(x) = x^2$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 2x \\ \varphi''(x) &= 2. \end{aligned}$$

Logo, substituindo $\varphi(x), \varphi'(x)$ e $\varphi''(x)$ em (2.2) temos:

$$-x^2 f'' - 4xf' + (2n-4)f = 0. \tag{2.6}$$

Vemos então que em (2.6), temos um exemplo de equação na forma da equação de **Cauchy-Euler**, pois cada coeficiente monomiais tem grau igual à ordem de derivação das respectivas incógnitas $f, f', f''$ as quais estão multiplicados. Assim, iremos supor que $f(x) = x^m$ seja solução de (2.6). Daí, se

$$\begin{aligned} f(x) &= x^m \\ \Rightarrow f'(x) &= mx^{m-1} \\ \Rightarrow f''(x) &= m(m-1)x^{m-2}. \end{aligned}$$

Assim, substituindo $f, f'$ e $f''$ em (2.6), temos:

$$-x^2 m(m-1)x^{m-2} - 4xmx^{m-1} + (2n-4)x^m = 0.$$

Assim, evidenciando o termo $t^m$, temos:

$$x^m[m(m-1) - 4m + (2n-4)] = 0.$$

Dessa forma, $x^m$ é solução de (2.6), quando $m$ é solução de

$$m^2 - 5m + (2n-4) = 0, \tag{2.7}$$

ou seja, quando

$$m_1 = \frac{5 + \sqrt{25 + 4(4-2n)}}{2} \quad e \quad m_2 = \frac{5 - \sqrt{25 + 4(4-2n)}}{2}$$

Portanto, como $n = 3$, temos que a família de soluções para $f(x)$ será da forma:

$$f(x) = C_1 x^{\frac{5+\sqrt{17}}{2}} + C_2 x^{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}.$$

Para este último exemplo, temos a seguinte solução para o Campo de Einstein:

$$ds^2 = -\left[C_1 x^{\frac{5+\sqrt{17}}{2}} + C_2 x^{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}\right]^2 dt^2 + \frac{1}{x^4}\varepsilon_i \delta_{ij}. \tag{2.8}$$

# Capítulo 3

# Considerações Finais

Através de trabalhos como este, percebemos a importância do uso de conceitos matemáticos. Em especial, havia na equação de campo estático de Einstein, uma considerável complexidade em sua resolução, de modo que para solucioná-la, era necessário o uso de métodos matemáticos complexos. Assim, o trabalho mostra uma simplificação na busca por novas soluções para a equação de campo estático de Einstein. Através de equações diferenciais lineares de segunda ordem, podemos encontrar métricas, ou seja, formas de medição, que solucionam a equação de campo estático de Einstein.

Através desses exemplos dados, podemos destacar um pouco da utilidade de equações diferenciais consideradas mais simples, em aplicações consideradas complexas e muitas vezes não passíveis de solução. Estes são exemplos de funções que podem ser utilizadas, como solução em (2.2), para que a métrica $ds^2$ seja solução para a equação de campo estático de Einstein no vácuo.

Fica comprovado assim, a importância do estudo de equações diferenciais para a pesquisa acadêmica, pois estas, podem muitas vezes simplificar soluções de problemas complexos. Visto que, neste trabalho, consideramos alguns casos mais simples de equações diferenciais de segunda ordem, que é apenas uma pequena fração da grande quantidade de classificações dentro das equações diferenciais.

Dessa forma, a pesquisa pode ter uma grande continuidade, de maneira a destacar outras classificações de equações diferenciais, permitindo assim, encontrar novas soluções para a equação de campo estático de Einstein.

# Referências

[1] Anderson, M. T. *Static vacuum einstein metrics on bounded domains*. In *Annales Henri Poincaré*, Band 16, 2265–2302. Springer. 2015.

[2] Biezuner, R. J. *Notas de aula geometria Diferencial*. UFMG. 2015. URL `http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/geometria_diferencial.pdf`.

[3] Boyce, W. E. & DiPrima, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Guanabara Dois. 1985.

[4] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.; & Haines, C. W. *Elementary differential equations and boundary value problems*, Band 9. Wiley New York. 1969.

[5] Figueiredo, D. G. & Neves, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadass*. IMPA, Rio de Janeiro, 3º Auflage. 2015.

[6] Hawking, S. *O universo numa casca de noz*. Editora Intrinseca. 2016.

[7] Leandro, B. & Pina, R. *Invariant solutions for the static vacuum equation*. Journal of Mathematical Physics, Band 58(7): 072502. 2017.

[8] Leighton, W. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Livos Técnicos e Científicos. 1978.

[9] Lima, R. F. *Introdução à Geometria Diferencial*. Sociedade Brasileira de Matemática. 2016.

[10] País, E. *Nobel de física premia detecção de ondas gravitacionais, previstas por einstein*. 2017. URL `https://brasil.elpais.com/brasil/2017/10/03/internacional/1507021622_774523.html`.

[11] Pires, A. S. T. *Geometria Diferencial para Físicos*. Antonio S.T. Pires, 1º Auflage. 2015.

[12] Soares, D. *O universo estático de einstein.* Revista Brasileira de Ensino de Física, Band 34(1): 1302. 2012.

[13] Soares, D. *Os fundamentos físico-matemáticos da cosmologia relativista.* Revista Brasileira de Ensino de Física, Band 35(3): 3302. 2013.

[14] Soares, D. *From schwarzschild to newton.* Revista Brasileira de Ensino de Física. 2015.

[15] Sotomayor, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Band 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq. 1979.

[16] Tenenblat, K. *Introdução à geometria diferencial.* Ed. UnB. 1988.

[17] Zill, D. G. & Cullen, M. R. *Equações diferenciais, vol. 1.* São Paulo, Makron. 2001.