



**Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT**

MÁRCIO DA SILVA DOURADO

***GEOMETRIA ESPACIAL E
PROJEÇÕES EM PERSPECTIVA:
UM RELATO DE PRÁTICA NO
NONO ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL***

Orientador:

Humberto José Bortolossi

**UNIVERSIDADE
FEDERAL
FLUMINENSE**

NITERÓI
ABRIL/2013

Márcio da Silva Dourado

***Geometria Espacial e Projeções em Perspectiva:
Um Relato de Prática no
Nono Ano do Ensino Fundamental***

Niterói – RJ

Abril / 2013

Todos os direitos reservados.

É proibida a reprodução total ou parcial sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Márcio da Silva Dourado

***Geometria Espacial e Projeções em Perspectiva:
Um Relato de Prática Interdisciplinar no
Nono Ano do Ensino Fundamental***

Dissertação apresentada à Coordenação do
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional – PROFMAT da Universidade Federal
Fluminense para a obtenção do título de Mestre
em Matemática

Orientador:

Humberto José Bortolossi

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói – RJ

Abril / 2013

Dissertação de mestrado sob o título “*Geometria Espacial e Projeções em Perspectiva: Um Relato de Prática Interdisciplinar no Nono Ano do Ensino Fundamental*”, defendida por Márcio da Silva Dourado e aprovada em 11 de abril de 2013, em Niterói, Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Humberto José Bortolossi
Doutor em Matemática pela PUC-Rio
Orientador

Abramo Hefez
Livre-docente pela UNICAMP

Dirce Uesu Pesco
Doutora em Matemática pela PUC-Rio

Eduardo Teles da Silva
Doutor em Matemática pelo PUC-Rio

Leo Akio Yokoyama
Doutor em Educação Matemática pela UNIBAN

Dedico este trabalho a minha esposa e aos meus estimados filhos.

Agradecimentos

A Deus, que sempre iluminou a minha caminhada. A meus professores e coordenadores tão dedicados, em particular, a meu orientador Humberto José Bortolossi pela dedicação ímpar e atenção que me concedeu durante a elaboração deste trabalho, a professora Camila Nassem pela fundamental contribuição e a todos os meus familiares e amigos pela paciência. Agradeço à CAPES pelas bolsa de estudo concedida.

Não basta saber ler que Eva viu a uva. É preciso compreender qual a posição que Eva ocupa no seu contexto social, quem trabalha para produzir a uva e quem lucra com esse trabalho.

(Paulo Freire)

Resumo

Projeções em perspectiva fornecem um importante modelo matemático de como o sistema visual humano capta e interpreta imagens. Pintores, fotógrafos e técnicos em efeitos especiais usam estas projeções para representar melhor a realidade, bem como para distorcê-la, criando ilusões e paradoxos. No que se refere ao ensino, acadêmicos têm concordado que um melhor entendimento das regras de representação de figuras tridimensionais pode contribuir para um uso mais proficiente de figuras bidimensionais no ensino e na aprendizagem de Geometria Espacial por parte dos alunos. Neste contexto, esta dissertação tem como objetivo principal apresentar nossa experiência, em um trabalho conjunto com Arte, em incluir e adequar atividades que exploram projeções em perspectiva em um planejamento onde o assunto não era apresentado anteriormente. Essas atividades foram conduzidas através do *software* Projeções em Perspectiva (<<http://www.uff.br/cdme/v3d/>>) do Projeto CDME (Conteúdos Digitais para O Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística) do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Neste trabalho relatamos nossa experiência em aplicar as atividades em três turmas de Nono Ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Cacique Cunhãbebe em Angra dos Reis, Rio de Janeiro.

Palavras-chave: ensino e aprendizagem de Geometria Espacial; projeções em perspectiva; interdisciplinaridade; *softwares* educacionais.

Abstract

Perspective projections provide an important mathematical model of how the human visual system captures and interprets images. Painters, photographers and special effects technicians use these projections to better represent reality as well to distort it, creating illusions and paradoxes. With regard to education, scholars have agreed that a better understanding of the rules of representation of three-dimensional figures can contribute to a more proficient use of two-dimensional figures in the teaching and learning of Spatial Geometry by students. In this context, the main objective of this dissertation is to present our experience, in a joint work with Art, in including and adapting activities that explore perspective projections on a syllabus where the subject was not presented before. These activities were conducted through the software Projections in Perspective (<<http://www.uff.br/cdme/v3d/>>) of the CDME Project (Digital Contents for the Teaching and Learning of Mathematics and Statistics) of the Institute of Mathematics and Statistics of the Fluminense Federal University. In this work, we report our experience in implementing the activities in three K-9 classes of the Public Elementary School Cacique Cunhãbebe in Angra dos Reis, Rio de Janeiro.

Keywords: teaching and learning of Spatial Geometry; perspective projections; interdisciplinarity; educational software.

Sumário

1	Introdução	p. 9
2	Planos de Aula	p. 13
2.1	As aulas de Geometria Espacial <i>antes</i> da inclusão de projeções em perspectiva	p. 13
2.2	As aulas de Geometria Espacial <i>depois</i> da inclusão de projeções em perspectiva	p. 16
3	Relato de Prática	p. 33
3.1	Sobre o planejamento	p. 33
3.2	Sobre as aulas	p. 34
3.3	Resultados gerais	p. 39
4	Considerações Finais	p. 41
	Referências Bibliográficas	p. 43

1 *Introdução*

Tipicamente, o ensino da Geometria Espacial é praticado com a utilização do livro didático e a lousa como únicas ferramentas. Desta maneira, o aluno de Matemática se vê com a árdua tarefa de estudar objetos tridimensionais a partir de representações bidimensionais que lhe são apresentadas, de forma estática, em uma página de livro ou no quadro-negro.

Esta transição (de mão dupla) entre o desenho na folha de papel e o objeto no espaço se configura como um problema relevante no estudo de objetos tridimensionais. De fato, constata-se que tanto alunos quanto professores enfrentam dificuldades na construção e na interpretação de representações bidimensionais de figuras tridimensionais ([11]).

Para o conteúdo de Geometria Espacial, os PCN do Ensino Médio ([3]) comentam:

Numa outra direção, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.

Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física.

Os PCN+ do Ensino Médio ([4]) reforçam essas recomendações indicando explicitamente que “interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos” são habilidades que devem ser desenvolvidas ([4, página 125]). Orientações semelhantes aparecem nos PCN do Ensino Fundamental ([2, página 122]):

Como campo de problemas, o estudo do espaço e das formas envolve três objetos de natureza diferente:

- *o espaço físico, ele próprio, ou seja, o domínio das materializações;*
- *a geometria, concebida como modelização desse espaço físico, domínio das figuras geométricas;*
- ***o(s) sistema(s) de representação plana das figuras espaciais, domínio das representações gráficas.***

A esses objetos correspondem três questões relativas à aprendizagem que são ligadas e interagem umas com as outras. São elas:

- *a do desenvolvimento das habilidades de percepção espacial;*
- *a da elaboração de um sistema de propriedades geométricas e de uma linguagem que permitam agir nesse modelo;*
- *a de codificação e de decodificação de desenhos.*

Segundo ainda os PCN, o trabalho deve centrar-se na realização de atividades exploratórias, incentivando os alunos a trabalhar com representações do espaço, produzindo-as e interpretando-as.

São muitas as maneiras criadas para se representar bidimensionalmente objetos do espaço. Temos, por exemplo, as projeções cônicas (também chamadas de projeções em perspectiva), as projeções cilíndricas, as projeções isométricas, as projeções ortogonais, as projeções mongeanas, as projeções olho-de-peixe, etc.

As projeções em perspectiva merecem destaque, pois elas fornecem um modelo matemático de como o sistema visual humano capta e interpreta imagens. Matematicamente, uma projeção em perspectiva é definida como se segue: dados um plano de projeção π e um ponto O (que determina a posição do observador), a projeção em perspectiva de um ponto P no plano π com relação a O é definido como o ponto de interseção P' do plano π com a reta que passa por O e por P . A Figura 1.1 (a) ilustra esta definição. Para construir a projeção em perspectiva de objetos mais complicados, basta construir a projeção em perspectiva de cada um dos pontos que constituem o objeto, como ilustra a Figura 1.1 (b). Note que, nesse modelo, o observador é reduzido a um ponto.

Em quais disciplinas “a interpretação e a associação de objetos sólidos as suas diferentes representações bidimensionais” são desenvolvidas no Ensino Fundamental? Em Arte, os alunos do Ensino Fundamental estudam os elementos básicos da teoria das projeções em perspectiva. Contudo, isto é feito, em geral, usando-se apenas a representação bidimensional final, isto é, a projeção do objeto tridimensional no plano de projeção sem usar as relações geométricas existentes no modelo matemático da Figura 1.1. E em Matemática? O ensino das projeções em perspectiva vem ganhando espaço nos livros didáticos de Matemática: das dez coleções de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2011 aprovadas pelo MEC, quatro delas já trabalham diretamente com projeções

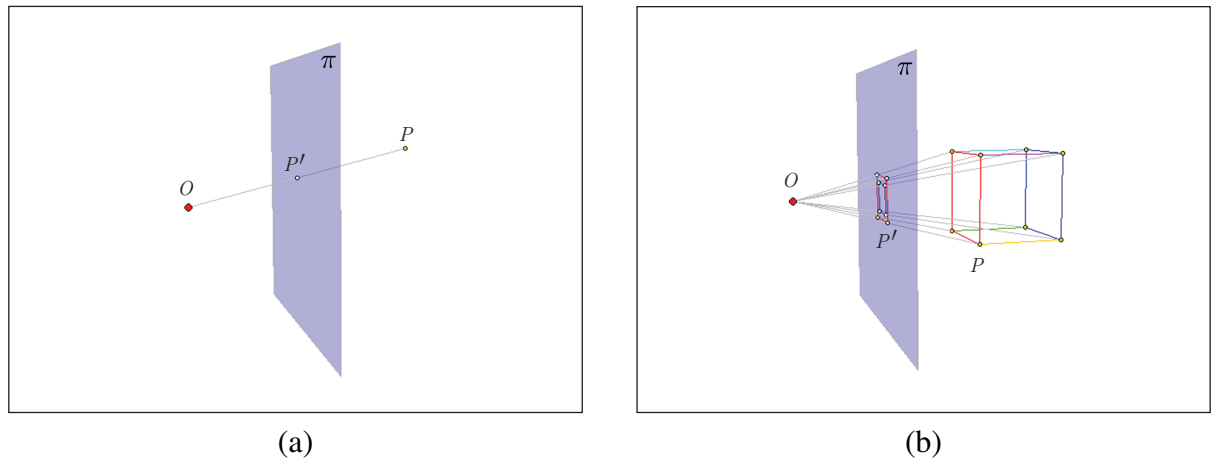


Figura 1.1: Modelo matemático para projeções em perspectiva.

em perspectiva ([5, 6, 9, 10]). Curiosamente, o modelo matemático da Figura 1.1 também é evitado nesses livros. De qualquer modo, como nos alerta [13], ter o conteúdo de projeções em perspectiva em um livro didático não é garantia de que o assunto seja ensinado, pois muitos professores simplesmente omitem esta parte do livro.

O ensino das projeções em perspectiva na escola básica já tem sido considerado e estudado por pesquisadores. No Brasil, por exemplo, a tese de doutorado *Olhar, Saber, Representar: Ensaios sobre A Representação em Perspectiva* de Flores ([7]) faz uma excelente discussão sobre as questões da visualização sobre uma ótica histórico-social e indaga como estas considerações se refletem no contexto escolar. Kodoma, em sua dissertação de mestrado *O Estudo da Perspectiva Cavaleira: Uma Experiência no Ensino Médio* ([12]), investiga a apropriação das regras da perspectiva cavaleira, por alunos do Ensino Médio, a partir de sequências didáticas envolvendo sombras de objetos colocados sobre uma mesa com tampo telado e de um ambiente informático. O estudo também analisa se tais regras favorecem a resolução de problemas da Geometria Espacial. Os dois trabalhos concordam que um melhor entendimento das regras de representação de figuras tridimensionais pode contribuir para um uso mais proficiente de figuras bidimensionais no ensino e na aprendizagem de Geometria Espacial por parte dos alunos.

Não abordar projeções em perspectiva na escola básica também tem consequências no ensino superior. [13] indica estudos que mostram “diversas evidências e testemunhos de que os alunos do Ensino Superior apresentam dificuldades em reconhecer sólidos a partir de sua representação em perspectiva, representar sólidos simples, conceber a forma de um sólido a partir de suas vistas e outras tarefas parecidas”. [13] complementa: “estudantes de Arquitetura, Engenharia, Matemática e Física entre outros, que cursam disciplinas como Álgebra Linear,

Geometria Analítica ou Geometria Descritiva, aproveitariam bem mais as aulas se não apresentassem essas dificuldades relativas à representação bidimensional de figuras tridimensionais”.

Neste contexto, esta dissertação tem como objetivo principal apresentar nossa experiência, em um trabalho interdisciplinar com Arte, em incluir e adequar atividades que exploram projeções em perspectiva em um planejamento onde o assunto não era apresentado anteriormente. Essas atividades foram conduzidas através do programa de computador *Projeções em Perspectiva* (<<http://www.uff.br/cdme/v3d/>>) [1] do Projeto CDME (Conteúdos Digitais para O Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística) do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Neste trabalho relatamos nossa experiência em aplicar as atividades em três turmas de Nono Ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Cacique Cunhãbebe em Angra dos Reis, Rio de Janeiro.

Nosso trabalho está dividido como se segue. No Capítulo 2 descrevemos, inicialmente, como eram os planos de aula de Matemática antes da inclusão do conteúdo de Projeções em Perspectiva. Em seguida, descrevemos, com detalhes, como este conteúdo foi incorporado e trabalhado conjuntamente com a professora de Arte. No Capítulo 3, descrevemos quais foram as escolhas que tivemos que fazer ao longo do processo e as respostas dos alunos durante a realização das atividades. Para terminar, no Capítulo 4, apresentamos nossas considerações finais.

2 *Planos de Aula*

Um dos pressupostos de nosso trabalho foi o de efetivamente incorporar o conteúdo de projeções em perspectiva nas aulas de Matemática e não apenas apresentá-lo como uma atividade extracurricular não integrada às aulas. Para que o leitor possa ter uma melhor percepção das escolhas que tivemos que fazer, descreveremos na Seção 1 deste capítulo os planos de aula de Geometria Espacial usados antes da inclusão do tópico de projeções em perspectiva e, na Seção 2, descreveremos os novos planos de aula depois de incluí-lo.

2.1 **As aulas de Geometria Espacial *antes* da inclusão de projeções em perspectiva**

Conforme o planejamento construído coletivamente na Escola Municipal Cacique Cunhã-bebe (em Angra dos Reis, Rio de Janeiro) pelos professores de Matemática, o assunto Geometria Espacial é trabalhado no nono ano e, tradicionalmente, a abordagem é feita no segundo bimestre do ano letivo. Para este assunto são reservadas seis aulas, cada uma com dois tempos de cinquenta minutos, distribuídas como se segue.

AULA 1: Reconhecimento de Sólidos Geométricos e Seus Elementos (aula expositiva)

O objetivo desta aula é levar o aluno a reconhecer diferentes sólidos geométricos (cubos, paralelepípedos, pirâmides, cilindros, cones e esfera) e seus elementos (vértices, arestas e faces) no caso de poliedros.

Inicie a aula investigando o que os alunos conhecem sobre Geometria Espacial. Para isso, use modelos de sólidos em acrílico. Indague aos alunos qual é a forma desses objetos. Em geral, os alunos não sabem diferenciar uma figura plana de uma figura espacial, o que é de se esperar, pois muitos deles podem ter estudado até então apenas geometria plana e, por isto, costumam

chamar, por exemplo, pirâmides de triângulo e cubos de quadrados. Aproveite para caracterizar figuras planas e figuras espaciais.

Apresente paralelepípedos, cubos, pirâmides, cilindros, cones e esferas e, durante a discussão, associe estes sólidos a objetos do dia-a-dia. Também caracterize e discuta a existência de vértices, arestas e faces nos paralelepípedos, cubos e pirâmides.

No final da aula, peça aos alunos que copiem o conteúdo apresentado do quadro para o caderno. Neste momento, muitos alunos devem se queixar que não sabem desenhar as figuras dos sólidos, mesmo que elas já estejam representadas bidimensionalmente no quadro. Encoraje-os a fazerem o melhor que podem.

AULA 2: **Reconhecimento de Sólidos Geométricos e Seus Elementos** **(exercícios de fixação)**

O objetivo desta aula é fixar a nomenclatura e conceitos introduzidos na aula anterior. Proponha os exercícios que constam na Figura 2.1. Após os alunos resolverem os exercícios, corrija-os.

AULA 3: **Reconhecimento de Sólidos Geométricos e Seus Elementos** **(trabalho avaliativo)**

O objetivo desta aula é fazer com que os alunos sejam capazes de construir planificações de cubos, paralelepípedos, pirâmides, cilindros e cones, assim como avaliar se eles fixaram a nomenclatura e conceitos introduzidos na Aula 1.

Nesta aula proponha o trabalho a seguir:

- Desenhe em uma cartolina um cubo planificado, corte e monte-o. Não esqueça as bordas (abas) para colar.
- Faça o mesmo para outro sólido sorteado pelo professor.

Distribua o material (cartolina, tesoura, régua e cola). Em seguida, faça uma breve explicação do que é uma planificação. Use, para isso, o exemplo de uma caixa de pasta de dente ou de uma caixa de giz desmontadas. Desenhe também no quadro um exemplo de cubo planificado.

Exercícios

- 1) Assinale (p) para figura plana e (e) para figura espacial:
 - () quadrado
 - () cubo
 - () paralelogramo
 - () triângulo
 - () cone
 - () círculo
 - () pirâmide

- 2) Dê exemplo de um objeto que lembre
 - (a) um cubo:
 - (b) um paralelepípedo:
 - (c) uma pirâmide:
 - (d) um cilindro:
 - (e) um cone:
 - (f) uma esfera:

- 3) Determine o número de vértices, arestas e faces dos sólidos
 - (a) cubo
 - vértices:
 - arestas:
 - faces:
 - (b) paralelepípedo
 - vértices:
 - arestas:
 - faces:
 - (c) pirâmide
 - vértices:
 - arestas:
 - faces:

Figura 2.1: Atividade proposta na Aula 2.

Observe, durante a execução do trabalho, se os alunos absorveram a nomenclatura introduzida na Aula 1 (isto é, observe se os alunos não estão, por exemplo, trocando “vértice”, “aresta” e “face” por “lado” e “canto”). Isto pode ser feito monitorando-se os diálogos em que os alunos tiram suas dúvidas e interagem entre si.

Caso os alunos não consigam acabar o trabalho em sala, instrua-os a terminá-lo em casa.

Este processo resulta em uma coleção simples, mas bastante respeitável de sólidos. Exponha no mural da sala os sólidos confeccionados, com o respectivo nome e o número de faces, arestas e vértices, caso sejam poliedros (Figura 2.2).

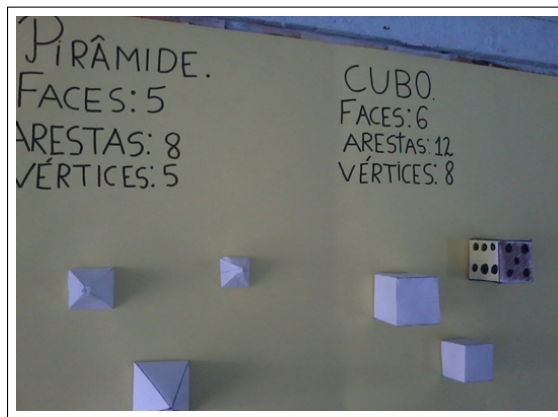


Figura 2.2: Sólidos geométricos construídos pelos alunos expostos no mural da sala de aula.

AULAS 4, 5 e 6: Volume de Sólidos

Nas três aulas seguintes, trabalha-se o cálculo do volume de cubos, paralelepípedos e, quando há tempo, o dos cilindros. A primeira aula é expositiva, na segunda, propõem-se exercícios de fixação e na terceira propõem-se um trabalho avaliativo onde os alunos calculam o volume de objetos com as formas trabalhadas. Não incluiremos aqui mais detalhes destas aulas, pois elas não influenciaram e não sofreram influência direta do novo conteúdo introduzido.

2.2 As aulas de Geometria Espacial *depois* da inclusão de projeções em perspectiva

Nossa proposta de inclusão do conteúdo de projeções em perspectiva se dá em parceria com Arte. Para realizá-la são necessárias oito aulas de Matemática e duas aulas de Arte, cada uma com dois tempos de cinquenta minutos, distribuídas como se segue.

AULA 1 (MATEMÁTICA):
Reconhecimento de Sólidos Geométricos e Seus Elementos
(aula expositiva e exercícios de fixação)

O objetivo desta aula é levar o aluno a reconhecer diferentes sólidos geométricos (cubos, paralelepípedos, pirâmides, cilindros, cones e esfera) e seus elementos (vértices, arestas e faces) no caso de poliedros.

Inicie a aula investigando o que os alunos conhecem sobre Geometria Espacial. Para isso, use modelos de sólidos em acrílico. Indague aos alunos qual é a forma desses objetos. Em geral, os alunos não sabem diferenciar uma figura plana de uma figura espacial, o que é de se esperar, pois muitos deles podem ter estudado até então apenas geometria plana e, por isto, costumam chamar, por exemplo, pirâmides de triângulo e cubos de quadrados. Aproveite para caracterizar figuras planas e figuras espaciais.

Apresente paralelepípedos, cubos, pirâmides, cilindros, cones e esferas e, durante a discussão, associe estes sólidos a objetos do dia-a-dia. Também caracterize e discuta a existência de vértices, arestas e faces nos paralelepípedos, cubos e pirâmides.

Peça aos alunos que copiem o conteúdo apresentado do quadro para o caderno, deixando espaços em branco para os desenhos dos sólidos. Na aula de Arte seguinte (vide Aula 3), os alunos preencherão estes espaços com os respectivos desenhos. Também, proponha os exercícios que constam na Figura 2.3.

AULA 2 (MATEMÁTICA):
Reconhecimento de Sólidos Geométricos e Seus Elementos
(trabalho avaliativo)

O objetivo desta aula é fazer com que os alunos sejam capazes de construir planificações de cubos, paralelepípedos, pirâmides, cilindros e cones, assim como avaliar se eles fixaram a nomenclatura e conceitos introduzidos na Aula 1.

Corrija os exercícios da aula anterior. Proponha então o trabalho a seguir:

- Desenhe em uma cartolina um cubo planificado, corte e monte-o. Não esqueça as bordas (abas) para colar.
- Faça o mesmo para outro sólido sorteado pelo professor.

Exercícios

- 1) Assinale (p) para figura plana e (e) para figura espacial:
 - () quadrado
 - () cubo
 - () paralelogramo
 - () triângulo
 - () cone
 - () círculo
 - () pirâmide

- 2) Dê exemplo de um objeto que lembre
 - (a) um cubo:
 - (b) um paralelepípedo:
 - (c) uma pirâmide:
 - (d) um cilindro:
 - (e) um cone:
 - (f) uma esfera:

- 3) Determine o número de vértices, arestas e faces dos sólidos
 - (a) cubo
 - vértices:
 - arestas:
 - faces:
 - (b) paralelepípedo
 - vértices:
 - arestas:
 - faces:
 - (c) pirâmide
 - vértices:
 - arestas:
 - faces:

Figura 2.3: Atividade proposta na Aula 2.

Distribua o material (cartolina, tesoura, régua e cola). Em seguida, faça uma breve explicação do que é uma planificação. Use, para isso, o exemplo de uma caixa de pasta de dente ou de uma caixa de giz desmontadas. Desenhe também no quadro um exemplo de cubo planificado.

Observe, durante a execução do trabalho, se os alunos absorveram a nomenclatura introduzida na Aula 1 (isto é, observe se os alunos não estão, por exemplo, trocando “vértice”, “aresta” e “face” por “lado” e “canto”). Isto pode ser feito monitorando-se os diálogos em que os alunos tiram suas dúvidas e interagem entre si.

Caso os alunos não consigam acabar o trabalho em sala, instrua-os a terminá-lo em casa.

Este processo resulta em uma coleção simples, mas bastante respeitável de sólidos. Exponha no mural da sala os sólidos confeccionados, com o respectivo nome e o número de faces, arestas e vértices, caso sejam poliedros (Figura 2.2).

AULA 3 (ARTE): Introdução aos Elementos da Perspectiva (aula expositiva e atividade de aprendizagem)

A aula tem como objetivo que o aluno “aguce seu olhar”, ou seja, entenda como se dá a representação de profundidade e perceba onde se localizam, em uma obra de arte, a linha do horizonte, o ponto de fuga e o observador em relação a imagem.

Como motivação, confronte obras de arte que utilizam técnicas de perspectiva com obras de arte que não utilizam estas técnicas claramente. Por exemplo, compare as obras *Recepção Princesca numa Paisagem*¹ (Figura 2.4 (a)) e *O Nascimento de Vênus*² (Figura 2.4 (b)) que não aplicam técnicas de perspectiva com as obras *A Entrega das Chaves a São Pedro*³ (Figura 2.5 (a)), *A Escola de Atenas*⁴ (Figura 2.5 (b)) e *A Última Ceia*⁵ (Figura 2.5 (c)) que as utilizam. Espera-se que o aluno perceba e concretize as diferenças entre as técnicas empregadas.

Introduza, ainda usando a história da perspectiva em Arte, o primeiro contato com os elementos fundamentais das projeções em perspectiva, que são pontos de fuga, posição do observador e a linha do horizonte. Faça também o aluno observar que linhas paralelas (não paralelas ao plano do quadro) nas obras de arte convergem para um ponto: o ponto de fuga. Comente que esta propriedade é fundamental em um desenho em perspectiva.

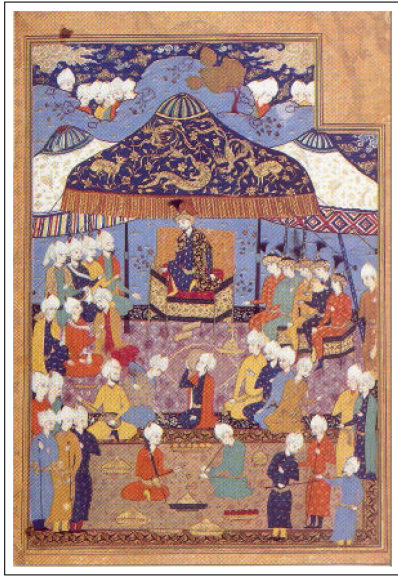
¹Transoxiane, Ouzbékistan, Booukhara, segunda metade do século XVI, guache e ouro sobre cartão, Paris, Museu do Louvre.

²Pintura de Sandro Botticelli em 1486.

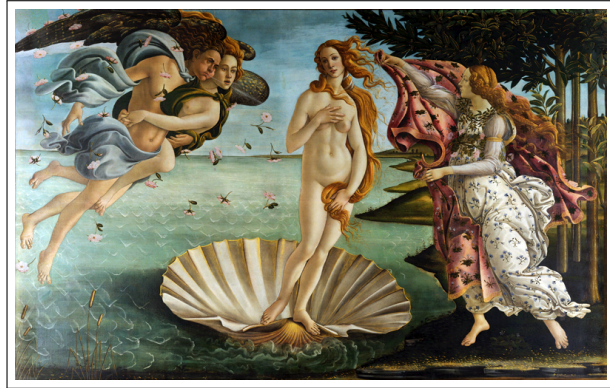
³Pintura de Pietro Perugini em 1481-1482.

⁴Pintura de Rafael Sanzio em 1509-1510.

⁵Pintura de Leonardo da Vinci em 1495-1497.



(a)



(b)

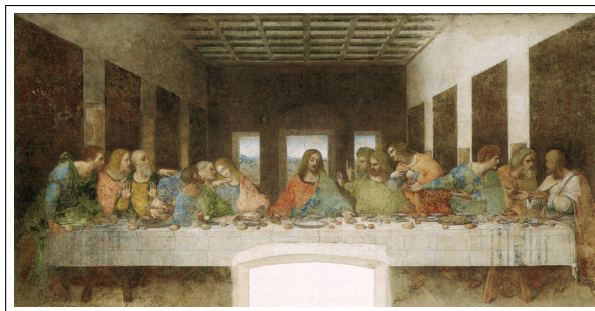
Figura 2.4: Obras de arte que não utilizam técnicas de perspectiva.



(a)



(b)




(c)

Figura 2.5: Obras de arte que utilizam técnicas de perspectiva.

Depois desta parte expositiva, parta para a parte prática da aula. Disponha em sala os sólidos geométricos apresentados nas aulas anteriores de Matemática e desafie os alunos a desenhá-los em perspectiva, mesmo ainda sem que eles tenham domínio da técnica. Peça para eles registrarem o desenho no caderno de Matemática, no espaço em branco reservado na Aula 1. Durante a execução da atividade, circule entre as mesas, verifique o andamento do trabalho e sugira correções (provavelmente uma das dificuldades mais frequentes dos alunos será a determinação das inclinações das retas que determinam pontos de fuga).

AULAS 4 e 5 (MATEMÁTICA): Relação entre Os Elementos da Perspectiva (trabalho no laboratório de informática)

Estas duas aulas têm como objetivos exercitar visualização espacial, explorar as propriedades matemáticas das projeções em perspectiva e apreciar o uso das projeções em perspectiva em obras de arte e fotografias.

Proponha aos alunos que realizem as oito atividades computacionais existentes no endereço <<http://www.uff.br/cdme/v3d/>>, preenchendo simultaneamente o *Formulário de Acompanhamento do Aluno* (um arquivo do *Microsoft Word*) o qual pode ser acessado na página principal através do ícone . Alerta os seus alunos que o preenchimento deste formulário (seja em uma fotocópia, no próprio documento do *Word* ou mesmo no caderno) é um quesito muito importante, pois ele será usado para averiguar como foi o desenvolvimento do trabalho. Lembre-se que todas as atividades estão disponíveis para uso *off-line*, caso sua escola não tenha acesso à Internet.

Apresente o programa e, como exemplo, desenvolva o primeiro experimento com os alunos coletivamente. Explique que, nesta e nas três atividades seguintes, eles serão desafiados a tentar descobrir qual é a figura geométrica apresentada em vermelho. Explique também que nos vários passos destes experimentos, a figura é apresentada com recursos visuais e níveis de interação diferentes.

Esclareça aos alunos que no primeiro passo dos quatro primeiros experimentos a figura é estática (isto é, que não se pode interagir com ela). Já no segundo passo, a figura no quadro é dinâmica (ou seja, é possível “clique e arrastar”). O objeto vermelho é sempre o mesmo em todos os passos de cada experimento, mas elementos visuais auxiliares em azul são acrescentados nos dois últimos passos, como se pode observar a seguir na Figura 2.6 com as imagens apresentadas no Experimento 1.

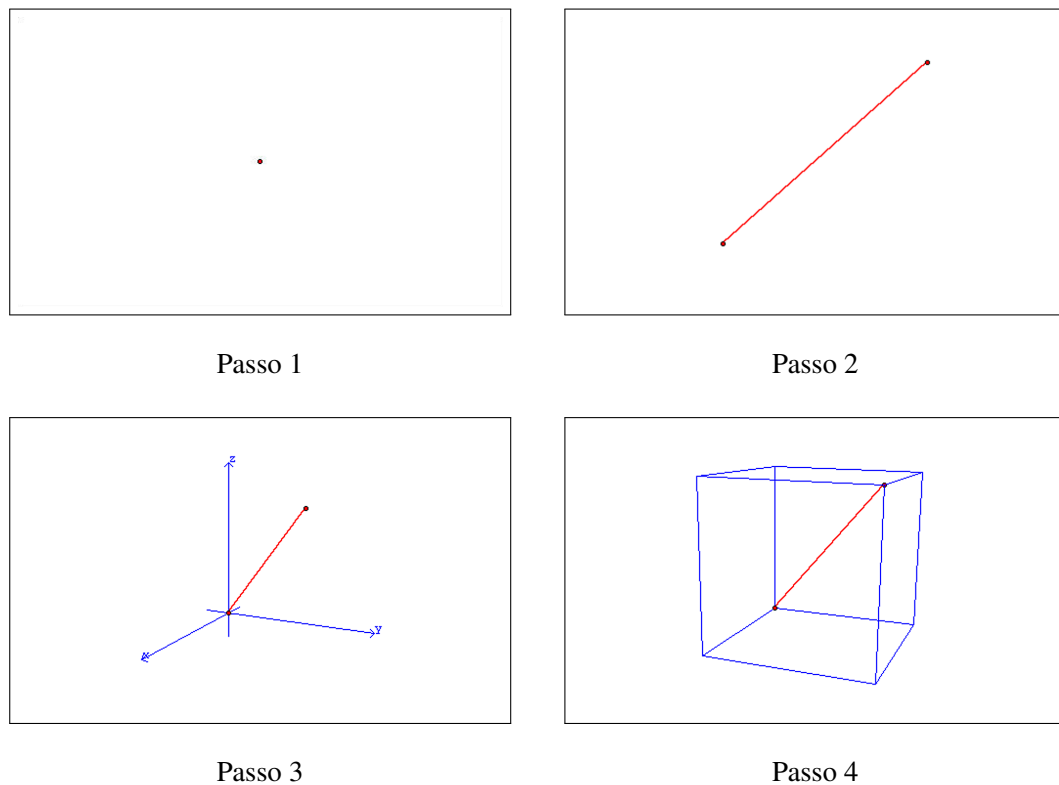


Figura 2.6: Os quatro primeiros passos do Experimento 1 no *software* Projeções em Perspectiva.

Após resolver o primeiro experimento com os alunos, peça que façam os Experimentos 2, 3 e 4 preenchendo o formulário. Acompanhe-os de perto e observe como eles estão interagindo com o *software*. Caso necessário, ajude-os.

Discuta a atividade seguinte, o Interlúdio 1, coletivamente com os alunos. Apresente a definição de projeção em perspectiva: dados um plano de projeção π e um ponto O (que determina a posição do observador), a projeção em perspectiva de um ponto P no plano π com relação a O é definido como o ponto de interseção P' do plano π com a reta que passa por O e por P . Use a Figura 2.7, que no Passo 1 do Interlúdio 1 é interativa, para ilustrar a definição. Chame a atenção dos alunos para o fato de que a projeção depende das posições do observador O , do plano de projeção e do objeto a ser projetado. Use os Passos 2, 3 e 4 para explicar o que ocorreu no Experimento 1.

Ao conduzir o Passo 5 do Interlúdio 1 com seus alunos, destaque a importante característica da projeção em perspectiva que está sendo ilustrada nesse passo: a sequência de segmentos paralelos e congruentes (com vértices amarelos) são projetados em segmentos não congruentes (com vértices brancos). Observe também que quanto mais distante do observador está um segmento com vértices amarelos, menor é o tamanho do segmento projetado (Figura 2.8).

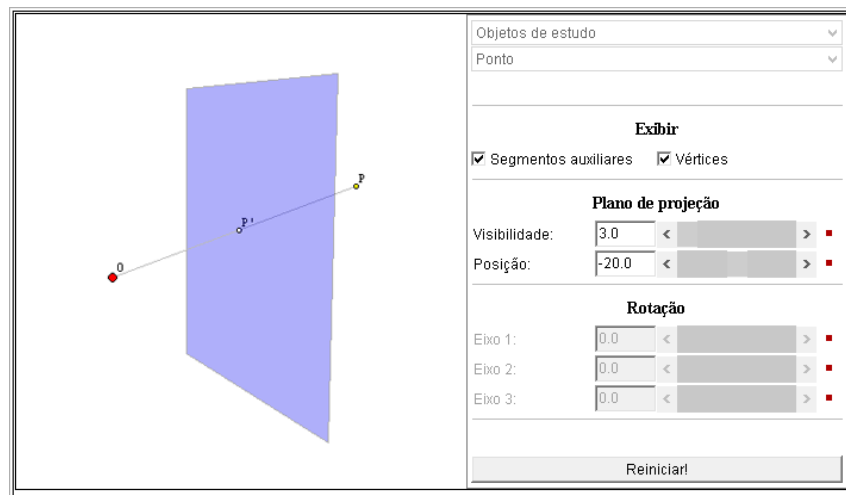


Figura 2.7: Ilustrando dinamicamente a definição de uma projeção em perspectiva.

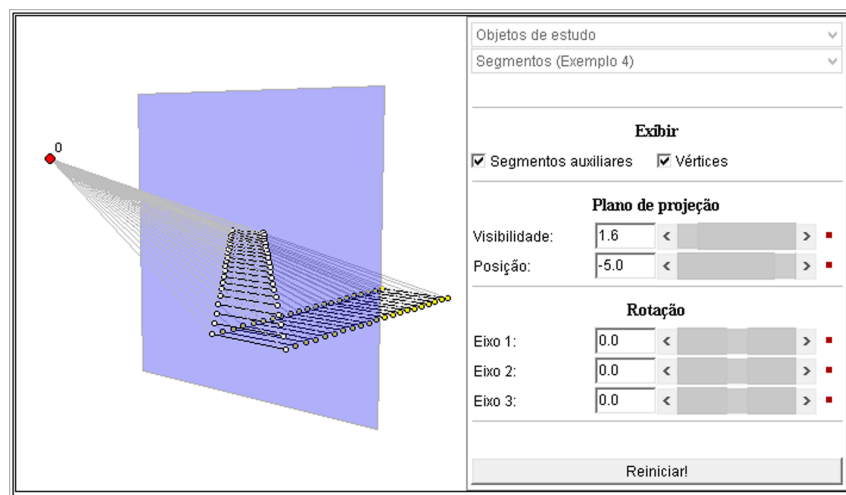


Figura 2.8: Ilustrando dinamicamente uma propriedade importante das projeções em perspectiva.

No Passo 6 do Interlúdio 1, chame a atenção de seus alunos para outra propriedade importante que está sendo exemplificada no *software*: nas projeções em perspectiva, um conjunto de retas paralelas que não são paralelas ao plano de projeção são projetadas em segmentos que “convergem” para um ponto, denominado *ponto de fuga* (Figura 2.9). Neste momento, faça as conexões possíveis com a Aula 3 de Arte.

Use o Passo 7 do Interlúdio 1 para explicar o que aconteceu no Experimento 2. Mais precisamente, use os controles deslizantes “Eixo 1”, “Eixo 2” e “Eixo 3” para girar o círculo e observe para seus alunos que, dependendo da posição do círculo, sua projeção pode ser um círculo, um segmento de reta ou uma “curva oval” (de fato, uma elipse).

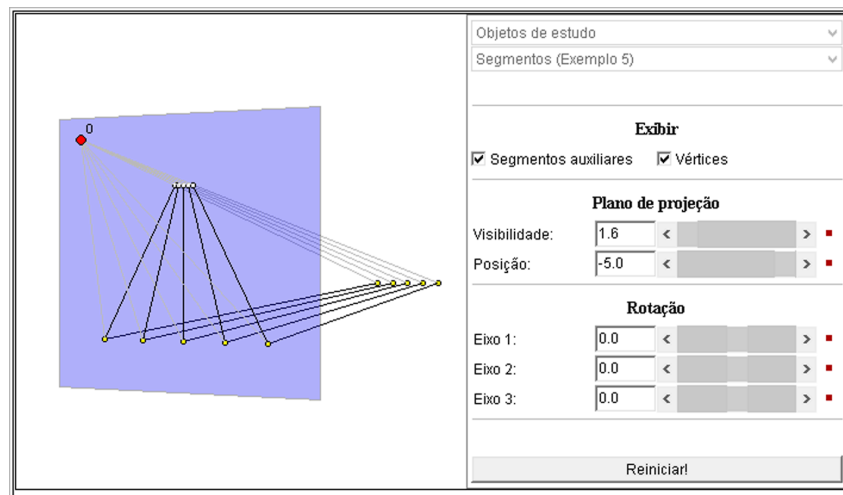


Figura 2.9: Ilustrando dinamicamente outra propriedade importante das projeções em perspectiva.

No Passo 8 do Interlúdio 1 é possível escolher livremente qual objeto será projetado através dos seletores do programa. As categorias disponíveis são “objetos de estudo”, “sólidos platônicos” e “animais”. Peça para os alunos escolherem objetos diferentes, moverem o ponto do observador e verificarem como as projeções são alteradas.

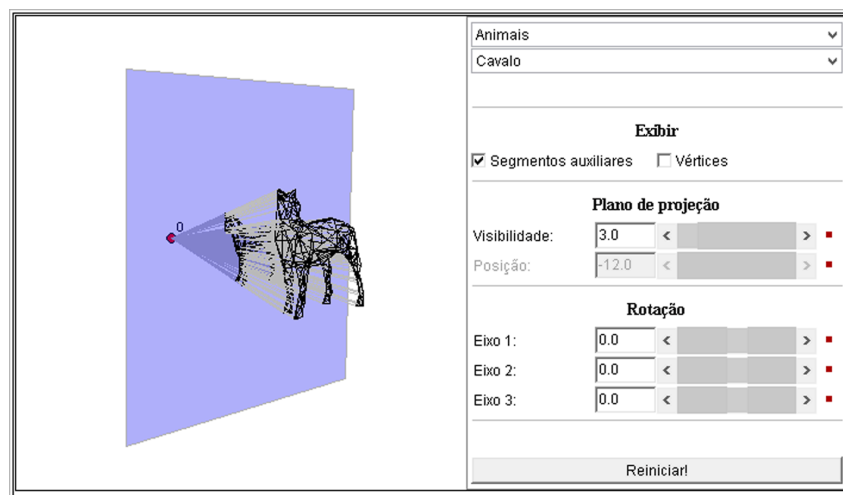


Figura 2.10: Ajustando dinamicamente a projeção em perspectiva de um modelo 3d de um cavalo.

Convide os alunos a assinalarem os pontos de fuga em obras de arte e fotografias que são apresentadas no Experimento 5. Diga para os alunos identificarem linhas arquitetônicas paralelas umas a outras (mas não paralelas ao plano da tela) nos cenários tridimensionais que estão sendo representados nas imagens. Em seguida, mova os pontos laranja (clique e arraste) a fim de que as retas laranja fiquem por cima das projeções das linhas arquitetônicas identificadas.

Observe para os seus alunos que estas retas laranjas se intersectarão em um determinado ponto: o *ponto de fuga* (Figura 2.11).

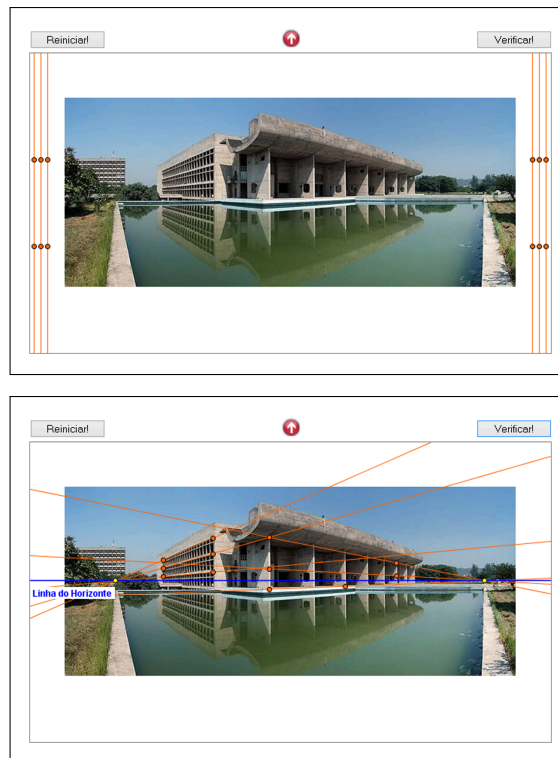


Figura 2.11: Identificando a linha do horizonte e pontos de fuga em fotografias.

A seguir, no Experimento 6, proponha que o aluno tente identificar as inconsistências da gravura produzida em 1754 pelo inglês William Hogarth (1697-1764). Informe a seus alunos que Hogarth concebeu esta figura com o propósito de mostrar que, sem o conhecimento da teoria da perspectiva, um pintor pode fazer desenhos absurdos. Corrija esta atividade usando o *link* em azul “clique aqui para saber o que encontramos...” (Figura 2.12).

Proponha no Experimento 8 que o aluno tente identificar nos vários desenhos se é realmente impossível construir um objeto real cuja imagem seja igual a da figura apresentada de forma estática (Figura 2.13). No passo seguinte, convide o aluno a clicar e arrastar, movendo o objeto para desvendar o segredo de cada desenho.

AULA 6 (ARTE): Pontos de Fuga (atividade de aprendizagem)

A aula tem o objetivo de fixar as características e usos dos pontos de fuga como também fixar o método para localizá-los em uma obra de arte ou fotografia.



Figura 2.12: Encontrando inconsistências na gravura de 1753 produzida pelo inglês William Hogarth.

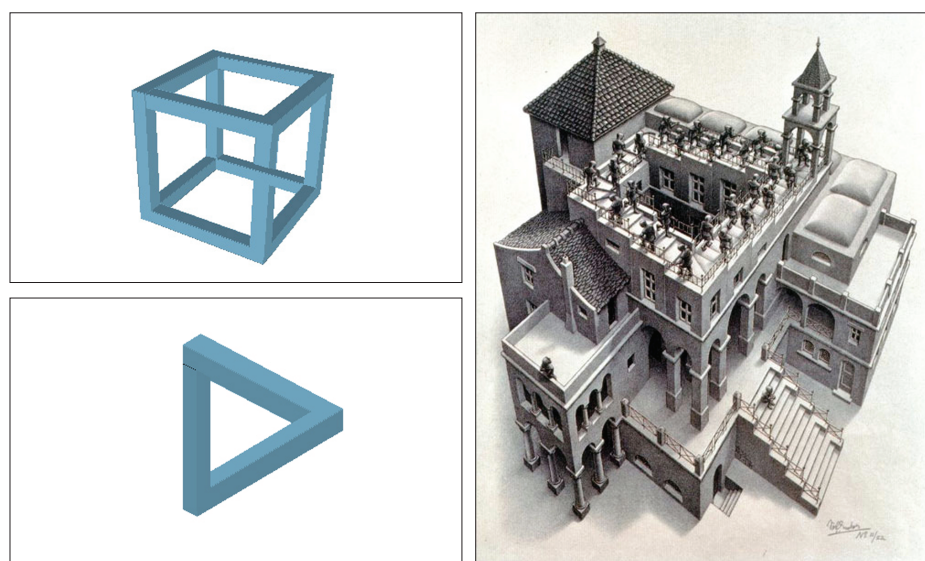


Figura 2.13: Desvendando os segredos dos desenhos de Escher.

Use um *datashow* ou outro equipamento (retroprojektor, televisão, ...) para apresentar imagens de obras de arte (como as da Figura 2.5) ou fotografias para seus alunos. Nestas imagens, localize linhas arquitetônicas paralelas umas a outras (mas não paralelas ao plano da tela) nos cenários tridimensionais que estão sendo representados e, com a ajuda de alunos, sobreponha barbantes sobre estas linhas (Figura 2.14). Mostre que elas se intersectam em um ponto: o *ponto de fuga*.



Figura 2.14: Aluno sobrepondo um barbante sobre uma obra de arte para tentar encontrar seus pontos de fuga.

Em uma foto de um corredor, como o da Figura 2.15, destaque a existência de algumas colunas (todas de mesma altura) alinhadas. Mostre como as colunas que estão mais próximas do observador aparecem maiores na fotografia e, conforme elas se afastam, seus tamanhos na fotografia diminuem cada vez mais. Discuta que, quando se sabe que os objetos têm a mesma medida, mas se vê uma imagem na qual esses objetos aparecem de tamanhos diferentes, tem-se automaticamente a percepção de que alguns desses objetos estão mais longe do que outros.



Figura 2.15: Foto de um corredor da Escola Municipal Cacique Cunhãbebe.

Destaque ainda que as colunas estão igualmente espaçadas na realidade, mas na imagem, à medida que se distanciam do observador, são projetadas de forma que a distância entre elas também diminuem. Exponha que esta é outra característica que causa a sensação de profundidade.

AULA 7 (MATEMÁTICA): Proporções, Perspectiva e Ilusões de Ótica (trabalho avaliativo)

Esta aula tem o objetivo de explorar as propriedades matemáticas das projeções em perspectiva, aplicando-as para criar ilusões de ótica em fotografias. Proponha para os alunos o desafio de calcular a distância que uma pessoa deveria ficar do fotógrafo para que, na fotografia, ela parecesse bem menor (digamos, como uma boneca de 60 cm) se comparado com outra pessoa a sua frente na foto. Para motivá-los mais ainda, exponha, utilizando um *datashow* ou outro equipamento (retroprojetor, televisão, ...), fotos onde este tipo de ilusão é utilizada (Figura 2.16).



Figura 2.16: Criando uma ilusão de ótica através da perspectiva.

Esclareça aos alunos que eles não podem utilizar dados do posicionamento do aluno de trás, pois se parte do pressuposto de que não se sabe a que distância este deveria ficar do observador. Também chame a atenção que o fenômeno da ilusão de ótica está relacionado com a perspectiva, no sentido mais elementar. Parta de uma foto e resolva o problema proposto para servir de exemplo. Na foto da Figura 2.16, a questão fica assim:

Determine a distância que uma pessoa de 1,60 m de altura deve ficar da máquina fotográfica (observador) para parecer ser uma boneca de 60 cm de altura na mão de outra pessoa a sua frente (como na foto da Figura 2.16). Sabe-se que a distância entre a máquina fotográfica e a pessoa da frente é de 3 m, a altura desta pessoa é de 1,75 m e esta altura na foto aparece projetada com tamanho 2,8 cm.

Para resolver este problema, aplique semelhança de triângulos três vezes. Inicialmente, calcule a distância d entre o observador (máquina fotográfica) e o plano de projeção. Antes de prosseguir, cabe aqui uma melhor explicação do que é esta distância d . Esta medida nas máquinas analógicas antigas sem lentes (as assim denominadas máquinas estenopeicas ou *pinhole*) é a distância entre o orifício da máquina (por onde entra a luz) e o filme (colocado no fundo da máquina), conforme Figura 2.17. Sendo assim, nestas câmeras, esta distância é fácil de se observar e até de se medir concretamente. Note que a imagem do objeto aparece invertida no filme. Por este motivo, para fins de estudo, é costume considerar um plano de projeção virtual que é simétrico ao plano do fundo da máquina com relação ao orifício. Assim, a distância entre o plano de projeção virtual e o orifício também é igual a d .

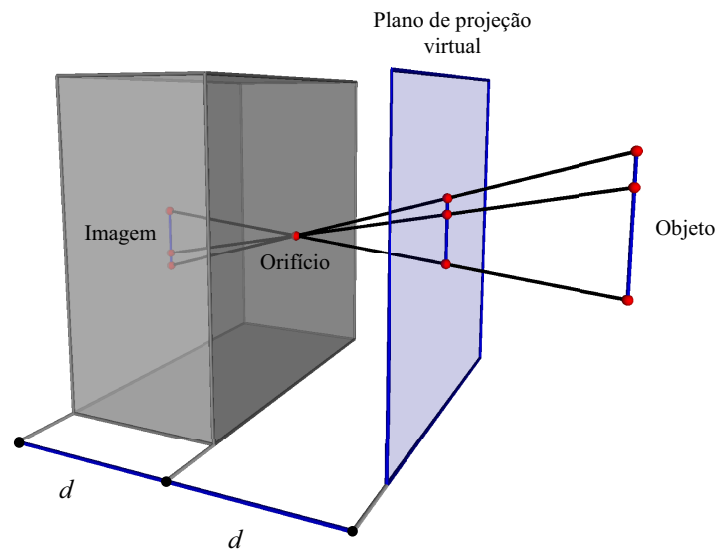
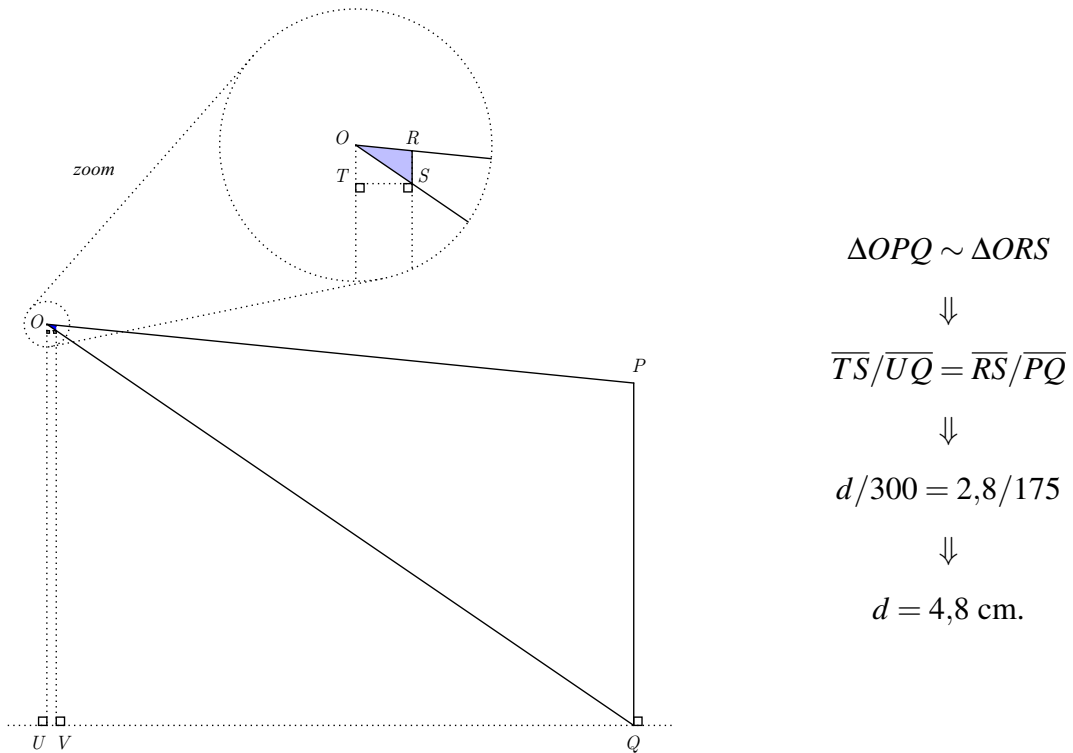


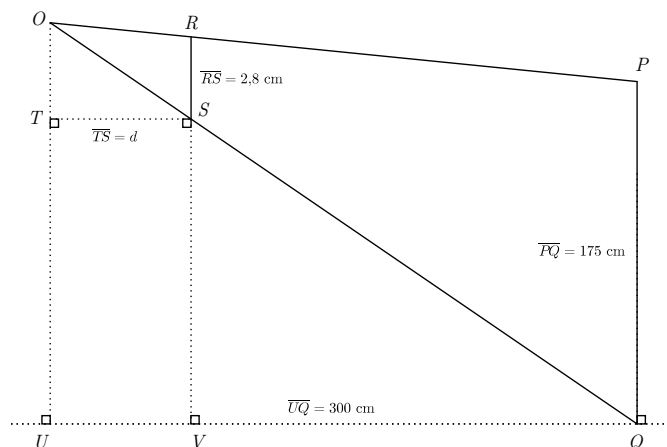
Figura 2.17: Modelo de câmera *pinhole*.

Câmeras com lentes têm uma Física mais complicada. Para estas situações (e também para as homotetias presentes no *zoom* digital das câmeras digitais), adotaremos um modelo mais simples no qual a distância entre o plano de projeção virtual e a lente (a distância d que nos interessa e que mostraremos como calcular a seguir) não é mais igual a distância entre a lente e o filme (ou o sensor no caso de câmeras digitais e celulares).

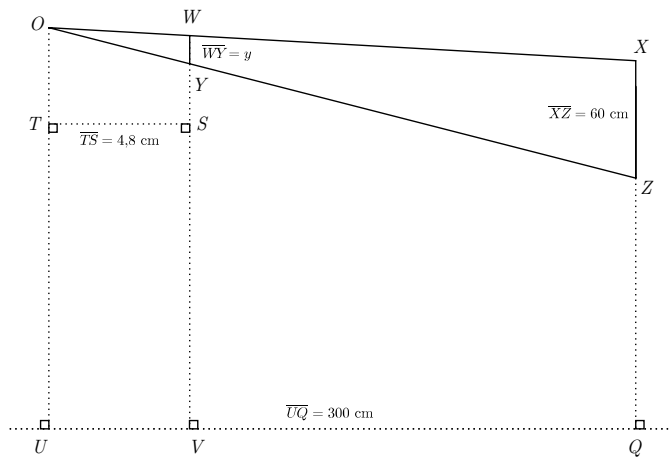
Voltando ao problema, considere a figura a seguir, onde \overline{UQ} é a distância do observador O à pessoa sendo fotografada; \overline{PQ} é a altura da pessoa sendo fotografada; \overline{RS} é a medida da altura da projeção da pessoa na fotografia, isto é, no plano de projeção e $\overline{TS} = d$ é a distância do observador O ao plano de projeção. Assim,



Observação: caso seus alunos tenham dificuldades em entender este diagrama com o *zoom*, você pode usar um diagrama mais simplificado, como o apresentado a seguir, não esquecendo de avisá-los de que se trata de um desenho fora de escala e, portanto, distorcido. Neste diagrama, as medidas importantes são \overline{UQ} , \overline{PQ} , \overline{RS} e \overline{TS} . Se estas medidas são mantidas, nem mesmo a distância \overline{OU} (a “altura” da posição do observador) é importante.

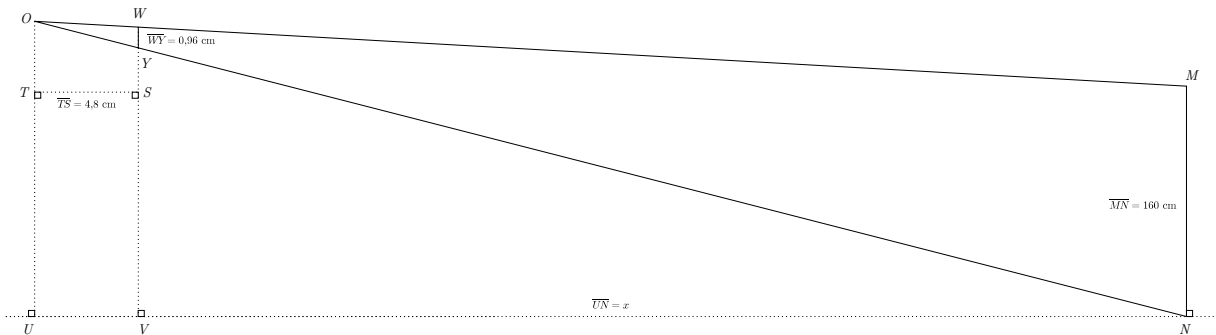


Agora, calcule a medida y que a imagem da pessoa de trás deve ter na foto, para parecer uma boneca de 60 cm na mão da pessoa da frente usando novamente semelhança de triângulos (note que o diagrama está distorcido):



$$\begin{aligned} \triangle OWY &\sim \triangle OXZ \\ \Downarrow \\ \overline{TS}/\overline{WY} &= \overline{UQ}/\overline{XZ} \\ \Downarrow \\ 4,8/y &= 300/60 \\ \Downarrow \\ y &= 0,96 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Finalmente, calcule a distância x que a pessoa de trás deve ficar da máquina fotográfica para parecer a boneca (note que o diagrama está distorcido):



$$\triangle OWY \sim \triangle OMN \Rightarrow \overline{TS}/\overline{WY} = \overline{UN}/\overline{MN} \Rightarrow 4,8/0,96 = x/160 \Rightarrow x = 800 \text{ cm.}$$

Desta maneira, a pessoa que está atrás deve ficar a 8 m da máquina fotográfica para parecer uma boneca de 60 cm na mão da pessoa da frente.

Divida agora os alunos em grupos (de quatro ou cinco pessoas, por exemplo) e instrua-os a recriarem o problema apresentado partindo de uma foto deles mesmos, reproduzindo a ilusão de ótica como a do exemplo. Várias dúvidas e erros devem surgir. Tire-as individualmente à medida que forem aparecendo. As principais devem ser:

- Misturar e/ou não saber administrar a utilização das unidades centímetro e metro (isto é, não fazer a conversão de unidades certa no lugar certo). Para resolver este problema, aconselhe-os a utilizar apenas a unidade centímetro.
- Onde deve ser medido o tamanho da imagem de quem estava à frente segurando a boneca?

Explique que isto pode ser feito na própria tela da máquina fotográfica (normalmente todos os alunos usam seus próprios celulares).

- Qual é a medida d na solução do exemplo? Para ilustrar do que se trata esta distância, desenhe no vidro da janela da sala o objeto que aparece atrás, olhando pela janela. Explique que a medida d é a distancia entre você e o vidro, isto é, é a distância entre o observador e o plano de projeção.

Observação importante: dificilmente, na realidade, o fotógrafo e os dois alunos estarão alinhados em um mesmo plano como pressuposto nas figuras das páginas 30 e 31. Neste sentido, nosso modelo é uma simplificação da situação real e, por este motivo, os resultados obtidos serão aproximados.

Observação importante⁶: ao invés de três regras de três, bastaria, de fato, aplicar apenas uma única regra de três para resolver o problema proposto na página 29: $300/60 = x/160 \Rightarrow x = 800$ cm. Isto ocorre porque a situação apresenta no problema envolve composições de homotetias que, por sua vez, é também uma homotetia Contudo, esta justificativa (e, por conseguinte, o uso de apenas uma regra de três) não está acessível a um aluno do 7º ano do Ensino Fundamental.

AULAS 8, 9 e 10 (Matemática): Volume de Sólidos

Nas três aulas seguintes, trabalha-se o cálculo do volume de cubos, paralelepípedos e, quando há tempo, o dos cilindros. A primeira aula é expositiva, na segunda, propõem-se exercícios de fixação e na terceira propõem-se um trabalho avaliativo onde os alunos calculam o volume de objetos com as formas trabalhadas. Não incluiremos aqui mais detalhes destas aulas, pois elas não influenciaram e não sofreram influência direta do novo conteúdo introduzido.

⁶Agradecemos ao professor Ralph Costa Teixeira por esta observação.

3 *Relato de Prática*

Neste capítulo iremos descrever algumas escolhas que fizemos, além de expor e comentar alguns episódios que ocorreram durante a realização das atividades propostas.

3.1 Sobre o planejamento

A grade curricular da Secretaria Municipal de Educação de Angra dos Reis prevê semanalmente quatro tempos de aula de Matemática e dois tempos de aula de Arte, cada tempo com duração de cinquenta minutos.

Como podemos observar no capítulo anterior, a inclusão do tema projeções em perspectiva no planejamento gerou o acréscimo de duas aulas extras de dois tempos com relação ao que era feito anteriormente em Geometria Espacial.

Uma das estratégias que minimizou a necessidade de tomar aulas alocadas para outros conteúdos foi a parceria com a disciplina de Arte, pois vários dos conceitos que tínhamos que apresentar de acordo com nossa proposta já eram trabalhados nesta disciplina, porém nem sempre com o enfoque matemático necessário. De fato, este trabalho foi pensado originalmente para ser realizado com as participações das disciplinas de Matemática, Arte e História. Contudo, o professor de História, apesar do interesse, não pode se integrar a equipe, pois ele estava escrevendo seu projeto de doutorado. Os conceitos que seriam trabalhados por esta disciplina foram absorvidos por Arte, dada a formação de História da Arte da professora de Arte da escola, Camila Nagem.

Não estamos, com isto, afirmando que este trabalho não pudesse ser feito apenas pelo professor de Matemática, com uma dose de boa vontade, estudo e adaptações necessárias. O trabalho com projeções em perspectiva feito individualmente pela Matemática é completamente viável e é assim que vemos nos livros didáticos. Mas, como recomenda os PCN, a integração de conteúdos de áreas aparentemente distintas visa superar a fragmentação do conhecimento tornando-o mais eficaz.

3.2 Sobre as aulas

Vários autores como Comenius, Locke, Rousseau, Pestalozzi, Froebel, Herbart, Dewey, Poincaré, Montessori, entre outros, “apontam, cada um na sua época, a importância da experimentação e da utilização de materiais manipuláveis” no ambiente escolar (apud [14]). Ainda segundo [14], “no processo ensino-aprendizagem o aluno deve realizar experiências com materiais concretos, usando a intuição que desperta a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, vivenciando de forma dinâmica os conteúdos, descobrindo conceitos e interiorizando-os, que servirão como auxiliares no desenvolvimento de seu raciocínio lógico”. É sob esta ótica que foram planejadas e aplicadas, especialmente as três primeiras aulas. Para que a criança construa a capacidade de interpretar e registrar o espaço, é necessária uma longa caminhada. Em nossa proposta, isto é feito em três etapas.

Na Etapa 1 são apresentados alguns sólidos geométricos e seus elementos, com o intuito de estabelecer uma nomenclatura que facilitará o posterior registro e interpretação desses objetos em representações bidimensionais (Aulas 1, 2 e 3) (Figura 3.1).



Figura 3.1: Alunos construindo sólidos geométricos na Aula 2.

Na Etapa 2 são estabelecidas e exercitadas as relações geométricas entre observador, plano de projeção e pontos de fuga (Aulas 4, 5 e 6).

Finalmente, na Etapa 3, algumas relações de proporcionalidade existentes em determinadas configurações particulares das projeções em perspectiva são aplicadas com o objetivo de se reproduzir certas ilusões de ótica (Aula 7).

Perspectiva é um assunto que desperta grande interesse dos alunos. Muitas vezes eles perguntam ao professor de Arte, mesmo fora das aulas, como dar o efeito de profundidade em um desenho, como representar uma pessoa no fundo ou na frente de outra. Mas, ainda nos últimos

anos do ensino fundamental, os alunos encontram dificuldades no momento de representar objetos em perspectiva, mesmo os mais simples. É isto que podemos observar nos trabalhos de Arte produzidos pelas turmas na atividade da Aula 3: em geral, percebe-se que a maioria dos estudantes não consegue colocar no desenho a noção de profundidade.

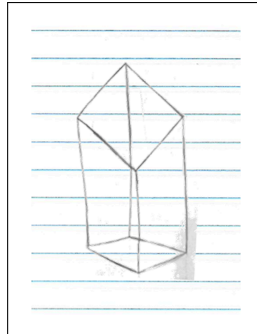


Figura 3.2: Tentativa de um aluno em desenhar um paralelepípedo reto.

Para entender corretamente projeções em perspectiva, precisamos entender bem a sua definição geométrica. Neste intuito, introduzimos o uso do computador que oferece a possibilidade de representações dinâmicas, interativas e sempre precisas. Além disso, o bom uso deste recurso em sala de aula, em geral, traz uma motivação a mais para os alunos. Como nos alerta [8], “na interatividade que está-se pensando, o sistema oferece suporte às concretizações e ações mentais do aluno; isto se materializa na representação dos objetos matemáticos na tela do computador e na possibilidade de manipular estes objetos via sua representação”. Continua [8], agora sobre a possibilidade de representações dinâmicas com o uso do computador:

A instância física de um sistema de representação afeta substancialmente a construção de conceitos e teoremas. As novas tecnologias oferecem instâncias físicas em que a representação passa a ter caráter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito às concretizações mentais. Um mesmo objeto matemático passa a ter representação mutável, diferentemente da representação estática das instâncias físicas tipo “lápiz e papel” ou “giz e quadro-negro”. O dinamismo é obtido através de manipulação direta sobre as representações que se apresentam na tela do computador. Por exemplo: em geometria são os elementos de um desenho que são manipuláveis.

Em nossa escola, a existência de um laboratório de informática recém-inaugurado facilitou nosso trabalho, mas em escolas em que não há esta realidade, as atividades podem ser aplicadas como exercícios extraclasse, isto é, para que sejam realizadas fora do tempo de sala de aula (em casa se o aluno tiver um computador ou com outras alternativas como uma *lan house*). O uso de um *datashow* também é uma alternativa, caso a escola possua um: as atividades são projetadas em sala de aula e os alunos, sob a orientação do professor, respondem aos questionamentos propostos.

As oito atividades computacionais desenvolvidas nas Aulas 4 e 5 estão divididas em três categorias. A primeira procura motivar os alunos provocando-os através da análise de algumas ambiguidades inerentes às projeções em perspectiva. A segunda parte das atividades é o Interlúdio: ele explora a definição das projeções em perspectiva apresentada na página 10 desta dissertação. A terceira, por sua vez, relaciona o uso das projeções em perspectiva à Arte.

Pessoas diferentes podem interpretar uma mesma figura de maneiras diferentes. Por exemplo, na figura do Passo 1 do Experimento 1, alguns alunos disseram que o objeto apresentado era um ponto, outros um círculo, outros uma pequena esfera. O problema é que interpretar um objeto tridimensional, olhando-o de uma posição fixa (o que acontece com figuras desenhadas na página de um livro e em fotografias), pode gerar dúvidas. Mesmo se pudermos visualizar um objeto tridimensional de várias posições diferentes, como no Passo 2 do Experimento 1, identificá-lo pode ainda ser uma tarefa difícil. Por exemplo, alguns alunos podem não perceber que o segmento de reta apresentado estava no espaço, imaginando que ele está no plano, apenas variando de tamanho. Sendo assim, o uso de elementos visuais adicionais, como os eixos coordenados no Passo 3 e o paralelepípedo do Passo 4, são muito convenientes.

Em nossa experiência com as turmas, alguns alunos, quando chegaram no Experimento 4, já perceberam no Passo 1 a intenção da atividade e responderam que o desenho apresentava um cubo contido em outro cubo. No passo seguinte deste experimento, a discussão foi generalizada e, com isto, atingimos nosso objetivo de que o aluno percebesse a possibilidade de ambiguidades inerentes às projeções em perspectiva.

Durante a discussão do Interlúdio 1, foi chamada a atenção para a existência de triângulos semelhantes existentes na projeção de um segmento de reta paralelo ao plano de projeção (Figura 3.3). Trabalhar esta propriedade matemática das projeções em perspectiva prepara o aluno para o entendimento da atividade proposta na Aula 7, onde exploramos o uso das projeções em perspectiva em truques de fotografias.

Os alunos estavam compenetrados e se divertindo muito nas atividades finais (depois do Interlúdio 1) mas, infelizmente, alguns computadores já tinham apresentado problemas, não abrindo as atividades, não deixando interagir ou travando totalmente. Como os dois tempos da Aula 4 estavam acabando, os alunos foram então orientados a terminarem o que era possível.

Cabe considerar que uma das dificuldades para o uso da informática nas escolas é a baixa qualidade do material distribuído e a falta de profissionais especializados para a manutenção dos laboratórios. Assim, é sempre importante ter alternativas caso algo inesperadamente não funcione. Na Aula 5, optamos em não usarmos o laboratório de informática e, sim, um *datashow*. As atividades dos Experimentos 5 e 6 que já tinham sido iniciadas e até terminadas por alguns

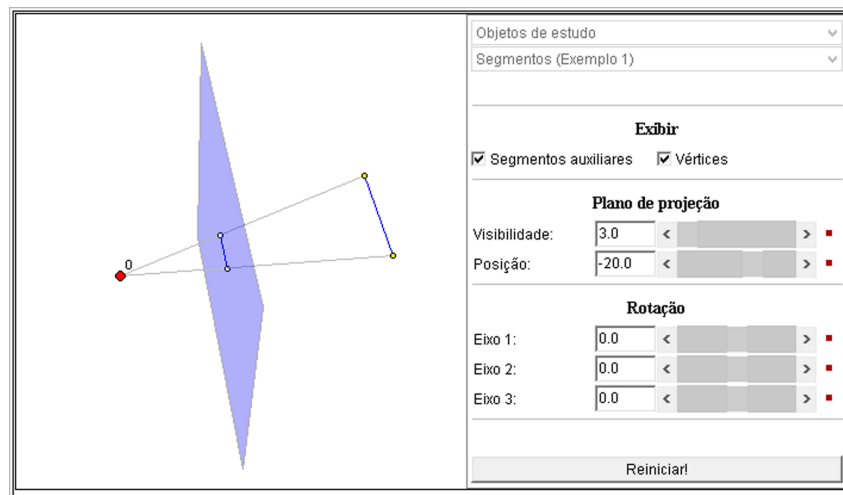


Figura 3.3: Triângulos semelhantes em uma configuração especial: o segmento de reta (objeto a ser projetado) é paralelo ao plano de projeção.

alunos na aula anterior, foram projetadas em sala de aula e os alunos responderam verbalmente às questões do Formulário de Acompanhamento do Aluno e, de maneira informal, finalizando o que tinha sido iniciado na Aula 4. Os alunos viram o que pode acontecer com a mudança de posição do observador e divertiram-se muito com as ilusões de ótica do Experimento 7.

O que os alunos fizeram virtualmente no Experimento 5 da Aula 5, eles puderam reproduzir concretamente na aula seguinte de Arte. Na Figura 3.4 a seguir, usando uma régua, um aluno mostra a posição de retas que convergem para um ponto de fuga em uma imagem de obra de arte. É a localização destas retas que vão dar ao aluno a capacidade de compreender como o artista produz o efeito de profundidade no plano.



Figura 3.4: Aluno localizando pontos de fuga em uma obra de arte.

Com todo este preparo, os alunos acabam percebendo que o posicionamento do observador, o uso de pontos de fuga, as sobreposições e o distanciamento das pessoas podem fazer uma

imagem parecer diferente do que é na realidade. A atividade proposta na Aula 7 vem reforçar ainda mais estas propriedades e, ao mesmo tempo, apresentar uma aplicação de semelhança de triângulos. Os alunos foram divididos em grupos de até 5 pessoas e instruídos a recriarem a ilusão de ótica do exemplo apresentado partindo de uma foto deles mesmos. Todos os alunos preferiram seguir uma foto da Internet onde uma pessoa se posicionava a frente da outra e parecia segurar um boneco. Para isto, eles se dirigiram à quadra e foram tirar fotos. A Figura 3.5 apresenta o trabalho de um grupo de alunos e a Figura 3.6 a solução dada por outro grupo de alunos para o problema proposto.



Figura 3.5: Grupo de alunos criando uma ilusão de ótica através do uso da perspectiva.

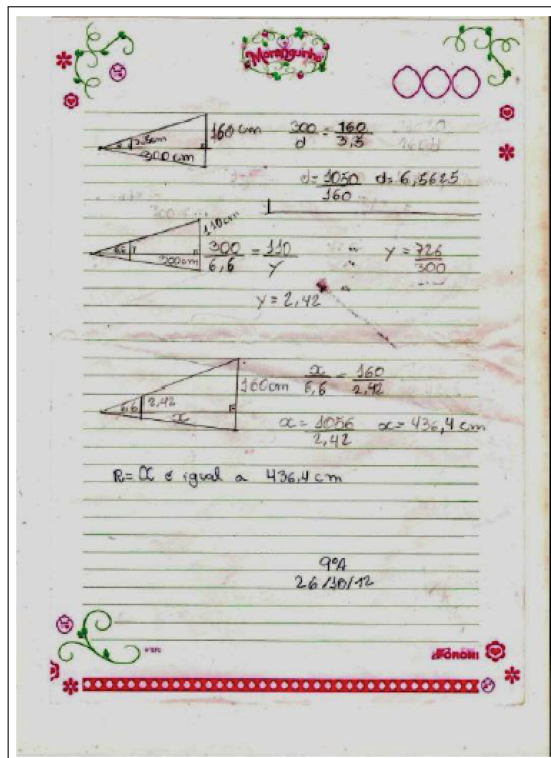


Figura 3.6: Solução do problema proposto apresentada por um dos grupos de alunos.

Os alunos tiveram um desempenho excelente na realização desta última tarefa: apenas um dos grupos formados nas três turmas não conseguiu terminar o último trabalho, todos os outros receberam o conceito A (quando todos os objetivos são atingidos) ou o conceito B (quando os objetivos são atingidos satisfatoriamente). Foi grande a repercussão do trabalho, pois muitos alunos criaram por conta própria outras situações de ilusão de ótica e até postaram algumas fotos em redes sociais. Também, no início deste ano letivo de 2013, alguns alunos visitaram a escola (eles agora estão no Ensino Médio) e novamente comentaram sobre o trabalho. Isto mostra que a atividade foi significativa e prazerosa para os alunos.

3.3 Resultados gerais

Acreditamos que os alunos conseguiram, com as atividades desenvolvidas, perceber as propriedades fundamentais das projeções em perspectiva (ou seja, que quanto mais longe um objeto está do observador, menor será a sua projeção e que retas paralelas são projetadas em segmentos que convergem para um ponto – o ponto de fuga). Um episódio que parece comprovar claramente este fato foi um passeio realizado com os alunos ao centro do Rio de Janeiro: ao chegar ao Arco do Telles para conhecer os casarios do Rio Antigo com o professor de História, os alunos identificaram os vários elementos das projeções em perspectiva na forma com que observavam o casario antigo que estava de ambos os lados do arco, isto é, eles reconheceram o ponto de fuga, a linha do horizonte e as linhas convergentes que definiam a percepção do tamanho dos objetos em relação a sua distância do observador. Para registrar tal momento, os alunos tiraram uma fotografia para mostrar à professora de Arte, Camila Nagem.

Do ponto de vista da professora de Arte, a parceria com Matemática foi importante para tornar a aprendizagem do conceito de perspectiva mais significativa. O trabalho conjunto também trouxe elementos como a nomenclatura dos sólidos geométricos e o aprofundamento da discussão sobre as propriedades matemáticas das projeções em perspectiva, o que facilitou o trabalho em Arte. Nas palavras da professora Camila: “A possibilidade de conhecer o processo criativo de artistas renascentistas e a importância do conhecimento da Matemática na construção de suas obras, promoveu ainda mais a aproximação entre Arte e Matemática. Aproximação esta fundamental para o pensamento do homem renascentista e que atualmente vem sendo esquecida. Reconhecer em situações cotidianas o uso e a aplicação da perspectiva é despertar no aluno uma nova forma de *olhar*”.

Este ano, o trabalho interdisciplinar com projeções em perspectiva já está no planejamento de Matemática e Arte, e deve contar com a participação do professor de História. Estamos

considerando, da mesma maneira, a possibilidade de incluir o professor de Ciências para trabalhar com os aspectos físicos existentes nas câmeras *pinhole*. Há também a intenção de relatar nossa prática na Sensibilizarte (Mostra Estudantil de Arte) e nas reuniões de coordenação de matemática, espaços estes dedicados às trocas de experiência dos professores da rede municipal de Angra dos Reis.

4 *Considerações Finais*

Incluir projeções em perspectiva nas aulas é importante pois, entre outros motivos, elas explicam como enxergamos e percebemos o mundo. Por conseguinte, elas contribuem para um uso mais proficiente de figuras bidimensionais no ensino e na aprendizagem de Geometria Espacial por parte dos alunos. Foi esta a ideia que trouxemos para a sala de aula.

Por outro lado, incluir um tópico novo em um currículo de Matemática que já é bastante extenso tem o seu preço. Em nossa experiência, tivemos que acrescentar duas aulas extras de dois tempos ao que era feito anteriormente em Geometria Espacial. Contudo, em uma análise posterior, percebemos que poderíamos evitar a necessidade de uma aula extra transferindo os Experimentos 6, 7 e 8 (Aula 5) do *software* Projeções em Perspectiva, proposto inicialmente como aula de Matemática, para a aula de Arte. Esta transferência também se justifica pelo fato dos conteúdos destas atividades estarem mais fortemente relacionados com a disciplina de Arte.

Alguns alunos estranharam o fato de estarem estudando perspectiva numa aula de Matemática. Nesse sentido, o trabalho ajudou a desfazer o mito de que em Matemática só se faz contas. Acreditamos que o ensino interdisciplinar permite que nossos alunos possam perceber que os conhecimentos estudados na sala de aula servem para entender como o nosso mundo funciona. Foram várias as conexões entre Arte e Matemática exploradas durante o trabalho: os sólidos geométricos, seus elementos e suas representações bidimensionais, os elementos das projeções em perspectiva (ponto do observador, plano de projeção e ponto de fuga) e algumas relações geométricas entre eles (em particular, a proporcionalidade existente em certas configurações especiais).

Entre as dificuldades de se explicar projeções em perspectiva, principalmente usando o modelo descrito na Figura 1.1 da página 11, estão a falta de dinamismo e a falta de precisão quando se tenta fazer isto apenas com lápis e papel ou com quadro e giz na sala de aula. Assim, o computador foi uma ferramenta fundamental em nossa experiência porque, com ele, conseguimos facilmente mover, ampliar e girar os objetos, com a garantia de que os desenhos apresentados na tela estão sempre corretamente desenhados.

O uso do computador, a opção pela interdisciplinaridade e o desenvolvimento em um espaço de experimentação por parte dos alunos foram estratégias que tornaram o processo de ensino e aprendizagem muito mais rico, dinâmico, atual, lúdico e contextualizado, estimulando e despertando a atenção de muitos alunos, antes desinteressados aos desafios propostos.

Referências Bibliográficas

- [1] BORTOLOSSI, H. J. *Projeções em Perspectiva*. Conteúdos Digitais para O Ensino e A Aprendizagem de Matemática e Estatística. Universidade Federal Fluminense, 2013. Disponível em: <<http://www.uff.br/cdme/v3d/>>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.
- [2] BRASIL. Ministério da Educação, *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental)*. Brasília: MEC, 1998.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação, *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (Ensino Médio: Bases Legais)*. Brasília: MEC, 1999.
- [4] BRASIL. Ministério da Educação, *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2002.
- [5] CARVALHO, A. L. T.; REIS, L. F. *Aplicando A Matemática. Sexto ano*. Casa Publicadora Brasileira, 2011.
- [6] DANTE, L. R. *Tudo é Matemática. Oitavo ano*. Editora Ática, 2011.
- [7] FLORES, C. R. *Olhar, Saber, Representar: Ensaio Sobre A Representação em Perspectiva*. Tese de doutorado, Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.
- [8] GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. *A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados*. IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998. Disponível em: <<http://www.geogebra.im-uff.mat.br/biblioteca/117.zip>>. Acesso em: 19 de janeiro de 2013.
- [9] IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática. Oitavo e Nonos Anos*. Editora Moderna, 2011.
- [10] JAKUBOVIC, J.; CENTURIO, N, M. R., *Matemática na Medida Certa. Sétimo Ano*. Editora Scipione, 2011.
- [11] KALEFF, A. M. M. R., *Vendo e Entendendo Poliedros: Do Desenho ao Cálculo do Volume Através de Quebra-Cabeças Geométricos e Outros Materiais Concretos*. Niterói: Editora da Universidade Federal Fluminense, 2003.
- [12] KODAMA, Y. O, *Estudo da Perspectiva Cavaleira: Uma Experiência no Ensino Médio*. Dissertação de mestrado, PUC/SP, 2006.
- [13] LELLIS, M., *Desenho em Perspectiva no Ensino Fundamental – Considerações Sobre Uma Experiência*. Seminários de Ensino de Matemática (SEMA), Primeiro Semestre de 2009 (Ano II), Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2009. Disponível em: <<http://www.nilsonmachado.net/sema20090602.pdf>>. Acesso em: 19 de dezembro de 2012.

- [14] WATERMAN, I.; FRANCO, V. S., *Geometria Projetiva no Laboratório de Ensino de Matemática*. Artigo produzido durante o Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná (PDE), Universidade de Maringá, 2008/2009.