UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

(Mestrado)

LAUSELI FERNANDES DE AZEVEDO AMES

INTERPOLAÇÃO E APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES POR POLINÔMIOS

Maringá-PR

2018

LAUSELI FERNANDES DE AZEVEDO AMES

INTERPOLAÇÃO E APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES POR POLINÔMIOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi

Maringá

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Ames, Lauseli Fernandes de Azevedo
A513a Aproximação e interpolação de funções por polinômios. -- Maringá, 2018.
82 f. : il., color.

Orientador: Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2018.

1. Interpolação. 2. Polinômios. 3. Aproximação. 4. Funções. 5. Mínimos quadrados. 6. Interpolation. 7. Polynomials. 8. Approximation. 9. Functions. 10. Least squares. I. Shirabayashi, Wesley Vagner Inês, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 515.5

Edilson Damasio CRB9-1.123

LAUSELI FERNANDES DE AZEVEDO AMES

INTERPOLAÇÃO E APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES POR POLINÔMIOS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Prof. Dr. Valter Soares de Camargo
Universidade do Estado do Paraná – Paranavaí

Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 23 de abril de 2018.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

“Dedico este trabalho ao meu querido pai Angelo Fernandes de Azevedo, In Memorian, por ter sido a primeira pessoa a me mostrar a alegria em entender a Matemática. E a minha querida mãe Rita Tereza de Jesus Azevedo pelo infindável apoio.”

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho, agradeço:

À Deus pela saúde e pela sabedoria no momento de escolher a matemática!

Ao meu Professor Orientador e amigo Dr. Wesley V. I. Shirabayashi pelos seus ensinamentos, pela confiança na minha capacidade, pela dedicação e pela paciência nos momentos difíceis!

À parceira de estudos e amiga Gizele Cristina Guizo!

À Professora Dra. Claudete Matilde Webler Martins pelos seus ensinamentos, pelo acolhimento e carinho dedicados à todos os seus alunos do PROFMAT!

Ao Professor Dr. Emerson Vitor Castelani pelos seus ensinamentos, pelas excelentes sugestões e opiniões que contribuíram para a realização desse trabalho!

À Cristina Kozan de Brito pelo auxílio com os programas de computação!

À Professora Dr. Marcela Duarte Ferrari pelo Incentivo!

Ao "Marcão" do colégio Dr. Gastão Vidigal, pelas inúmeras ideias e sugestões de temas para a dissertação, todas na área de Aritmética!

À Capes pelo apoio financeiro!

À SBM pela oportunidade de aprimorar os conhecimentos por meio do PROFMAT.

E finalmente agradeço à minha família pelo amor, apoio e compreensão nas ausências!!!

“E talvez,

a posteridade vai me agradecer por ter mostrado

que os antigos não sabiam de tudo.”

(Pierre de Fermat)

RESUMO

Para o professor de matemática a pior experiência é ouvir dos seus alunos as temíveis perguntas: “Para que serve isso?”e “Onde usarei esse assunto na minha vida?”. Com este trabalho queremos contribuir para o conhecimento de uma parte da modelagem matemática, que pode ser aplicada no ensino médio. Contribuindo para a resposta daquelas perguntas em alguns conteúdos.

Aqui adquirimos um pouco de conhecimento das equações algébricas e das aproximações de funções.

Procuramos entender alguns métodos de interpolação e apresentá-los como uma ferramenta de modelagem matemática. Fizemos isso com o intuito de utilizar apenas a aproximação com funções polinomiais, uma vez que os polinômios são menos complicados de manipular.

Mostramos que a interpolação polinomial é um caso particular da interpolação. Também apresentamos um outro método que não usa apenas função polinomial, o método dos Mínimos Quadrados.

Palavras chave: Interpolação, Aproximação, Funções, Polinômios, Mínimos Quadrados.

ABSTRACT

For the mathematics teacher the worst experience is to hear from their students the fearsome questions: "What is this for?"And "Where will I use this subject in my life?"With this work we want to contribute for the knowledge of a part of mathematical modeling, that can be applied in high school. Contributing for the answer of those questions in some contents.

Here we aquired some knowledge of algebraic equations and function approximations.

We seek to understand some interpolation methods and present them as a tool of mathematical modeling. We did this in order to use only polynomial approximation of functions, since the polynomials are less complicated to manipulate.

We show that the polynomial interpolation is a particular case of interpolation. We also show another method that doesn't only use polynomial function, the Least Squares method.

Keywords: Interpolation, Approximation, Functions, Polynomials, Least Squares.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

A matemática é uma ciência que fascina boa parte da humanidade. Esse fascínio, muitas vezes, faz com que o ser humano busque ainda mais conhecimentos nesta área. Por sua vez, essa busca de conhecimento pode levar a disputas. E ainda há a necessidade de publicar as descobertas para que outros não obtenham os méritos conquistados. Um desses acontecimentos está citado em [2], erroneamente afirma-se que Thomas Harriot(1560-1621) fez várias inovações e descobertas matemáticas, uma delas é uma bem elaborada geometria analítica (antes da publicação de Descartes em 1637), outra é a afirmação de que todo polinômio de grau n tem n raízes e a "regra de sinais de Descartes". Alguns desses equívocos se devem a inserções, feitas por escritores posteriores, em manuscritos de Harriot preservados. Ainda em [2] encontramos algo sobre interpolação, que é o assunto estudado nesse trabalho, diz que D. E. Smith mostrou que a parte que lida com a geometria analítica é uma interpolação feita por mãos posteriores,[2] página 348. Também segundo [2] Arquimedes era um exímio calculista e determinou aproximações racionais de raízes quadradas irracionais verdadeiramente notáveis. Também John Wallis (1616-1703) usou interpolação para determinar π, [2] página 432.

O que queremos dizer é que a interpolação e a aproximação não são coisas de agora, não são novidades e consistem em ferramentas matemáticas muito úteis. Segundo [3] (páginas 58 e 435) aproximação é o resultado aproximado, ou processo para obtê-lo, na solução de um problema numérico, e interpolar é introduzir, inserir. Aproximação é a obtenção de estimativas a respeito da ordenada de pontos onde não se tem o valor exato coletado para ela, conforme [6].

Mas o que é interpolação? Interpolar é fazer a troca de uma certa função por outra onde as operações são menos complicadas. Interpolação é aproximar uma função usando outra função que satisfaça algumas propriedades, neste caso a primeira função é substituída por essa nova.

Porque substituir as funções? A resposta para essa pergunta pode ser escrita da seguinte forma: quando conhecemos de uma dada função alguns de seus valores e precisamos calcular o valor num ponto desconhecido ou quando a função tem uma expressão onde operações tais como derivação e integração são complicadas e às vezes impossíveis de realizar.

Na interpolação a função interpolante coincide com a função dada em pontos pré determinados. As interpolações mais usadas são as polinomiais, as trigonométricas e as exponenciais [18] (página 132). Neste trabalho não falaremos das duas últimas, apenas da polinomial. Na interpolação polinomial é determinado o polinômio de grau n que passa por $n+1$ pontos dados. Não importa o método usado, sempre encontramos o mesmo polinômio. Estudaremos os polinômios de Legendre, os de Chebyshev, os de Lagrange, o Método de Newton (utilizando diferenças divididas). Também falaremos sobre o Métodos dos Mínimos Quadrados, que é o método que melhor ajusta aos dados, sendo que este não é um método de interpolação.

Capítulo 1

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E POLINÔMIOS

Neste primeiro capítulo definiremos equações algébricas e polinômios, em seguida apresentaremos algumas propriedades dos polinômios com exemplos. (Para aprofundar os conhecimentos sobre polinômios veja [5]). Apresentaremos um pouco da teoria sobre espaços vetoriais, uma vez que no conjunto dos polinômios os seus elementos se portam nas operações de multiplicação por escalar e adição como se portam os vetores do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Ou seja, o conjunto dos polinômios constitui um espaço vetorial. A definição a seguir é baseada na definição de [13].

Definição 1.1. *Equações algébricas são aquelas em que temos uma única incógnita, e essa aparece apenas envolvida com as operações algébricas, ou seja, com adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.*

1.1 Exemplos de Equações Algébricas

Exemplo 1.2. *A equação $x+1 = -4$, é uma equação de primeiro grau. Nela temos operações de adição e subtração.*

Exemplo 1.3. *Já esta $\sqrt[3]{7}x^2 - x = 6$, é uma equação de segundo grau onde temos operações de adição, multiplicação e subtração.*

Exemplo 1.4. *Nosso último exemplo é de equação de primeiro grau com a operação de divisão.* $\frac{x}{5} = 5$.

Definição 1.5. *Denomina-se equação polinomial ou algébrica toda equação que pode ser escrita na forma:*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \tag{1.1}$$

onde $a_n \neq 0$ *e* $n \in \mathbb{N}^*$ *(n é um inteiro positivo),* $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ *são números reais e* n *é o grau da equação.*

1.2 Definição de polinômio

Definição 1.6. *Um polinômio* $p(x)$ *com coeficientes em* $\mathbb{R}$ *é uma expressão do tipo:*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \tag{1.2}$$

com $a_i \in \mathbb{R}$*, para todo* $i = 0, 1, 2, ..., n, x \in \mathbb{R}$.

Quando a_i for igual a zero para todo i o polinômio $p(x)$ será chamado identicamente nulo ($p(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$).

Denotamos por $gr(p)$ o grau do polinômio $p(x)$, onde $gr(p)$ é o maior valor de n tal que $a_n \neq 0$. O polinômio identicamente nulo não tem grau.

Cada termo do polinômio, $a_i x^i$, é um produto e recebe o nome de monômio com grau i, e a_i são os coeficientes, e a_0 é chamado de termo independente.

A seguir apresentamos alguns exemplos de polinômios:

Exemplo 1.7. *Considere o polinômio de grau 3 onde* $a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = -6$ *e* $a_3 = 10$*, isto é,*

$$p(x) = 10x^3 - 6x^2 + x + 2.$$

Exemplo 1.8. *Se* $a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = 0, a_1 = 2$ *e* $a_5 = 3$*, então o polinômio tem grau 5, e*

$$p(x) = 3x^5 + 2x.$$

Exemplo 1.9. *Um polinômio de grau 1, onde* $a_0 = 3$ *e* $a_1 = 1$*, é dado por:*

$$p(x) = x + 3.$$

Valor de um polinômio é o valor que o polinômio assume em um determinado ponto, de acordo com a definição seguinte:

Definição 1.10. *A cada polinômio, como descrito em (1.2), e $\beta \in R$, associamos um elemento $p(\beta) \in \mathbb{R}$ pela regra $p(\beta) = \sum_{i=0}^{n} a_i \beta^i$. Em particular, se $p(\beta) = \sum_{i=0}^{n} a_i \beta^i = 0$, dizemos que β é raiz do polinômio $p(x)$.*

Vejamos alguns exemplos de valores de polinômios:

Exemplo 1.11. *Se $p(x) = 3x^6 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 7$, tomando $\beta = 0$ e $\beta = -1$, ambos números reais, temos:*

$$\begin{aligned} p(0) &= 3 \cdot 0^6 + 2 \cdot 0^5 - 0^4 + 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 - 7 \\ &= -7, \\ p(-1) &= 3 \cdot (-1)^6 + 2 \cdot (-1)^5 - (-1)^4 + (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 7 \\ &= 3 - 2 - 1 - 1 - 2 - 1 - 7 \\ &= -11. \end{aligned}$$

Exemplo 1.12. *Se $p(x) = x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9$, tomando $\beta = -3$, um número real, temos:*

$$\begin{aligned} p(-3) &= (-3)^4 + 6(-3)^3 + 10(-3)^2 + 6(-3) + 9 \\ &= 81 + 6(-27) + 90 + (-18) + 9 \\ &= 90 + 90 - 162 - 18 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Neste exemplo temos que -3 é raiz de $p(x)$.

Exemplo 1.13. *Se $p(x) = 7x^4 + 3x^3 - x^2 - x + \sqrt{2}$, tomando $\beta = \sqrt{2}$ e $\beta = 0,5$,* *ambos números reais, temos:*

$$
\begin{aligned}
p(\sqrt{2}) &= 7\sqrt{2}^4 + 3\sqrt{2}^3 - \sqrt{2}^2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} \\
&= 7 \cdot 4 + 3 \cdot 2,828427 - 2 \\
&= 28 + 8,485281 - 2 \\
&= 34,485281, \\
p(0,5) &= 7(0,5)^4 + 3(0,5)^3 - (0,5)^2 - (0,5) + \sqrt{2} \\
&= 0,4375 + 0,375 - 0,25 + 0,914213 \\
&= 1,476713.
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.14. *Se* $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 8$, $p(10) = 1198$ *e* $p(1) = 10$, *uma vez que:*

$$
\begin{aligned}
p(10) &= 10^3 + 2 \cdot 10^2 - 10 + 8 = 1000 + 200 - 2 \\
&= 1198, \\
p(1) &= 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 + 8 = 1 + 2 - 1 + 8 \\
&= 10.
\end{aligned}
$$

1.2.1 Operações com Polinômios

Definiremos nesta seção apenas as quatro operações básicas que podemos fazer com os polinômios. Para isso consideremos dados dois polinômios

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j,$$

com $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$ e $n, m \in \mathbb{N}$. Logo:

Definição 1.15. *Adição:*
A adição de $p(x)$ *com* $g(x)$ *é o polinômio dado pela soma*

$$p(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i,$$

se $m = n$, *onde* $c_i = a_i + b_i$ *para todo* i. *Se* $m \neq n$ *adicionamos os coeficientes da mesma forma, no entanto onde* $a_i = 0$ *(ou equivalentemente* $b_i = 0$*), apenas repetimos cada* b_i

(equivalentemente a_i). Digamos,

$$\begin{aligned} p(x)+g(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \\ &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 + b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \\ &\quad +... + b_2x^2 + b_1x + b_0. \end{aligned}$$

Definição 1.16. *Multiplicação:*
A Multiplicação de $p(x)$ por $g(x)$ é o polinômio dado pelo produto:

$$\begin{aligned} p(x)\cdot g(x) &= a_0b_0 + a_0b_1x + a_0b_2x^2 + \cdots a_0b_mx^m + a_1b_0x + a_1b_1x^2 + a_1b_2x^3 + \cdots a_1b_mx^{m+1} \\ &\quad + a_2b_0x^2 + a_2b_1x^3 + a_2b_2x^4 + \cdots a_2b_mx^{m+2} \\ &\quad + \cdots + a_nb_0x^n + a_nb_1x^{n+1} + a_nb_2x^{n+2} + \cdots a_nb_mx^{m+n} \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 \\ &\quad + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 \\ &\quad + \cdots + (a_0b_m + a_1b_{m-1} + a_2b_{m-2} + \cdots + a_nb_0)x^m + \cdots + a_nb_mx^{n+m}. \end{aligned}$$

As operações de adição e multiplicação de polinômios têm as seguintes propriedades:

- Comutatividade da adição e da multiplicação;
- Associatividade da adição e da multiplicação;
- Distributividade da multiplicação em relação à adição;
- Existência de elemento neutro da adição e da multiplicação;
- Existência do inverso aditivo.

Definição 1.17. *Subtração:*

Chama-se diferença $p(x) - g(x)$*, o polinômio* $p(x) + [-g(x)]$*. Isto é, adicionamos o oposto de* $g(x)$ *ao polinômio* $p(x)$*.*

Definição 1.18. *Divisão:*

Quando $g(x)$ *não for o polinômio nulo dividir o polinômio* $p(x)$ *por* $g(x)$ *é determinar dois outros polinômios* $q(x)$ *(quociente) e* $r(x)$ *(resto) tais que:*

$$p(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x),$$

com $\quad gr(g) > gr(r)$.

Quando a divisão for exata $r(x)$ será o polinômio nulo.

Vejamos alguns exemplos de operações com polinômios:

Exemplo 1.19. *Sejam* $p(x) = 5x^2 + 2x + 1$ *e* $g(x) = 8x^4 + 3x^2 - x - 7$*, então*

$$\begin{aligned} p(x) + g(x) &= (5x^2 + 2x + 1) + (8x^4 + 3x^2 - x - 7) \\ &= (0+8)x^4 + (0+0)x^3 + (5+3)x^2 + (2 + (-1))x + (1 + (-7)) \\ &= 8x^4 + 0x^3 + 8x^2 + x - 6. \end{aligned}$$

Exemplo 1.20. *São dados os polinômios* $p(x) = -3x^7 - 6x^6 - 4x^5 + 3x^4 - x^3 + 5x^2 + 2x + 1$ *e* $g(x) = x^4 - 3x^2 - 3x + 1$*, então*

$$\begin{aligned} p(x) + g(x) &= (-3x^7 - 6x^6 - 4x^5 + 3x^4 - x^3 + 5x^2 + 2x + 1) + (x^4 - 3x^2 - 3x + 1) \\ &= -3x^7 - 6x^6 - 4x^5 + (3+1)x^4 + (-1+0)x^3 + (5 + (-3))x^2 \\ &\quad +(2 + (-3))x + (1+1) \\ &= -3x^7 - 6x^6 - 4x^5 + 4x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2. \end{aligned}$$

Exemplo 1.21. *Se* $p(x) = 3x - 8$ *e* $g(x) = -5x + 2$ *a soma* $p(x) + g(x)$ *é obtida por:*

$$\begin{aligned} p(x) + g(x) &= (3x - 8) + (-5x + 2) \\ &= (3-5)x + (-8+2) \\ &= -2x - 6. \end{aligned}$$

Exemplo 1.22. *São dados* $p(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 + x - 1$ *e* $g(x) = 2x^5 + 3$, *assim temos que*

$$\begin{aligned} p(x) + g(x) &= (1+2)x^5 + (2+0)x^4 + (-3+0)x^3 + (-1+0)x^2 + +(1+0)x + (-1+3)) \\ &= 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 2. \end{aligned}$$

Exemplo 1.23. *Considere* $p(x)$ *e* $g(x)$, *onde* $p(x) = 3x^2 + 2x - 1$ *e* $g(x) = -2x + 3$. *Temos que o produto de* $p(x)$ *por* $g(x)$ *é dado por*

$$\begin{aligned} p(x)g(x) &= (3x^2 + 2x - 1) \cdot (-2x + 3) \\ &= 3 \cdot (-2) \cdot x^2 \cdot x + 3 \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot (-2) \cdot x \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot x + (-1) \cdot (-2) \cdot x + (-1) \cdot 3 \\ &= -6x^3 + 5x^2 + 8x - 3. \end{aligned}$$

Exemplo 1.24. *Dados* $p(x) = 7x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 2$ *e* $g(x) = x^3 - x^2 + x + 7$, *o quociente da divisão de* $p(x)$ *por* $g(x)$ *é* $q(x) = 7x + 4$. *O polinômio que representa o resto é* $r(x) = -2x^2 - 54x - 30$.

Exemplo 1.25. *Efetuando a divisão de* $p(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ *por* $g(x) = 9x^2 + 2$ *obtemos resto* $r(x) = -3x^2 - \frac{2}{3}$ *e quociente* $q(x) = \frac{5}{9}x + \frac{1}{3}$.

1.2.2 Igualdade de polinômios

Dados dois polinômios

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m,$$

com $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ $n, m \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq m$. Dizemos que $p(x) = g(x)$ se $m = n$ e $a_i = b_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$.

Exemplo 1.26. *Se* $p(x) = (2a + 1)x - 8 + b$ *e* $g(x) = -7x + 2$, *com* $p(x) = g(x)$, *temos* $a = -4$ *e* $b = 10$. *Uma vez que os coeficientes dos termos semelhantes devem ser iguais.*

Os elementos do conjunto $\mathcal{P}$ dos polinômios portam-se com as operações de adição e multiplicação por escalar como os elementos do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, dessa forma eles podem ser tratados como vetores.

1.3 Espaços Vetoriais Reais

A Definição seguinte é baseada na Definição de espaço vetorial encontrada em [8].

Definição 1.27. *Um espaço vetorial real V é um conjunto não vazio, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações: a adição, que a cada par de vetores v_1 e $v_2 \in V$ faz corresponder um novo vetor $v_1 + v_2 \in V$, denominado a soma de v_1 e v_2, e a multiplicação por um número real, que a cada número $a \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $v \in V$ faz corresponder um vetor $a \cdot v$ ou av, chamado o produto de a por v, satisfazendo as seguintes propriedades para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $v_1, v_2, v_3 \in V$:*

(A_1) *Comutatividade:* $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$;

(A_2) *Associatividade:* $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$;

(M_1) *Associatividade* $(ab)v_1 = a(bv_1)$;

(A_3) *Vetor nulo:* $\exists\ 0 \in V$, *chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que*

$$v + 0 = 0 + v = v, \forall v \in V;$$

(A_4) *Inverso aditivo: para cada vetor $v \in V$ existe um vetor $-v \in V$ chamado o inverso aditivo, ou o simétrico de v, tal que $-v + v = v + (-v) = 0$;*

(D_1) *Distributividade:* $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$;

(D_2) $(a + b)v = av + bv$;

(M_2) *Elemento neutro da multiplicação:* $1 \cdot v = v$.

Tomemos $\mathbb{R}^2$ e o conjunto $\mathcal{P}$ dos polinômios. Vamos mostrar que esses dois modelos constituem, cada um, um espaço vetorial.

Exemplo 1.28. *Afirmação: $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial real.*

De fato, sejam A, B e $C \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$, onde $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$,

$a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2$. *Assim, sendo a adição e multiplicação por escalar em* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1, a_2) + (b_1, b_2) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ k \cdot A &= k \cdot (a_1, a_2) \\ &= (ka_1, ka_2). \end{aligned}$$

Comutatividade:

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2) \\ &= (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \\ &= B + A. \end{aligned}$$

Associatividade da adição:

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (a_1, a_2) + [(b_1, b_2) + (c_1, c_2)] \\ &= (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\ &= (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2) \\ &= ([a_1 + b_1] + c_1, [a_2 + b_2] + c_2) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) \\ &= (A + B) + C. \end{aligned}$$

Elemento neutro: Existe um único ponto $O \in \mathbb{R}^2$ *chamado de origem de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $O = (0, 0)$ *e* $\forall A \in \mathbb{R}^2$ *temos*

$$\begin{aligned} A + O &= (a_1, a_2) + (0, 0) \\ &= (a_1 + 0, a_2 + 0) \\ &= (a_1, a_2) = A. \end{aligned}$$

Existência do inverso aditivo: Dado $A \in \mathbb{R}^2, A = (a_1, a_2)$ *temos que*

$$\begin{aligned} A + (-A) &= (a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) \\ &= (a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2)) \\ &= (0, 0) \\ &= O. \end{aligned}$$

Existência do elemento neutro da multiplicação: $\forall A \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} 1 \cdot A &= 1 \cdot (a_1, a_2) \\ &= (1a_1, 1a_2) \\ &= (a_1, a_2) \\ &= A. \end{aligned}$$

Associatividade da multiplicação:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot A &= (\alpha_1 \cdot \alpha_2)(a_1, a_2) \\ &= (\alpha_1 \cdot \alpha_2 a_1, \alpha_1 \cdot \alpha_2 a_2) \\ &= \alpha_1(\alpha_2 a_1, \alpha_2 a_2) \\ &= \alpha_1(\alpha_2 A). \end{aligned}$$

Distributividade da multiplicação com relação a adição (D_2):

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot A &= (\alpha_1 + \alpha_2)(a_1, a_2) \\ &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_1, \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_2) \\ &= (\alpha_1 a_1, \alpha_1 a_2) + (\alpha_2 a_1, \alpha_2 a_2) \\ &= \alpha_1 A + \alpha_2 A. \end{aligned}$$

Distributividade da multiplicação com relação a adição (D_1):

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (A+B) &= \alpha[(a_1,a_2)+(b_1,b_2)] \\
&= \alpha(a_1+b_1, a_2+b_2) \\
&= (\alpha a_1+\alpha b_1, \alpha a_2+\alpha b_2) \\
&= (\alpha a_1+\alpha a_2)+(\alpha b_1, \alpha b_2) \\
&= \alpha(a_1,a_2)+\alpha(b_1,b_2) \\
&= \alpha A+\alpha B.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.29. *Consideremos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos polinômios da forma:*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n, \tag{1.3}$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n$ são escalares fixos em $\mathbb{R}$, que não dependem de x.
Afirmação: $\mathcal{P}$ é um espaço vetorial!
De fato, sejam $p, g \in \mathcal{P}$, tais que

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_m x^m,$$

com $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ $m, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq m$.

Se $m = n$ então,

$$p(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i.$$

Se $m < n$,

$$p(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{m} (a_j + b_j)x^j + \sum_{i=m+1}^{n} (a_i x^i).$$

Se $n < m$,

$$p(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i + \sum_{j=n+1}^{m} (b_j x^j).$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha p(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i x^i.$$

Temos que verificar se $\mathcal{P}$ *satisfaz todas as propriedades de espaço vetorial.*

A_1 *(A adição é comutativa):*

$$\begin{aligned}
p(x) + g(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \\
&= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 + b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \\
&\quad + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \\
&= b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m + a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \\
&= \sum_{j=0}^{m} b_j x^j + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\
&= g(x) + p(x).
\end{aligned}$$

A_2*(A adição é associativa):*

$$\begin{aligned}
p(x) + (g(x) + s(x)) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j + \sum_{k=0}^{t} c_k x^k \right) \\
&= a_0 + a_1 + ... + a_n x^n + b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m + c_0 + c_1 x + ... + c_t x^t \\
&= (a_0 + a_1 + ... + a_n x^n + b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m) + c_0 + c_1 x + ... + c_t x^t \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \right) + \sum_{k=0}^{t} c_k x^k \\
&= (p(x) + g(x)) + s(x).
\end{aligned}$$

A_3*(Existência do vetor nulo):*

Existe um único polinômio $O(x) = 0 \in \mathcal{P}$ *chamado de polinômio nulo tal que* $O(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Assim,* $\forall p(x) \in \mathcal{P}$;

$$\begin{aligned}
p(x) + O(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + 0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + 0 \\
&= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.
\end{aligned}$$

A_4(Existência do inverso aditivo):

Existe $-p(x), \forall p(x) \in \mathcal{P}$ tal que:

$$\begin{aligned} p(x) + (-p(x)) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left(-\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \\ &= a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + (-a_0 - a_1 x ... - a_n x^n) \\ &= a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n - a_0 - a_1 x - ... - a_n x^n \\ &= 0 = O(x). \end{aligned}$$

M_2(Existência do elemento neutro da multiplicação):

$$\begin{aligned} 1 \cdot p(x) &= 1 \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ &= 1 \cdot (a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) \\ &= 1a_0 + 1a_1 x + ... + 1a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ &= p(x). \end{aligned}$$

M_1(Associatividade da multiplicação):

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \cdot \alpha_2) p(x) &= (\alpha_1 \cdot \alpha_2) \left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right] = (\alpha_1 \cdot \alpha_2)[a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n] \\ &= \alpha_1 \alpha_2 a_0 + \alpha_1 \alpha_2 a_1 x + ... + \alpha_1 \alpha_2 a_n x^n \\ &= \alpha_1(\alpha_2 a_0) + \alpha_1(\alpha_2 a_1 x) + ... + \alpha_1 (\alpha_2 a_n x^n) \\ &= \alpha_1[\alpha_2 a_0 + \alpha_2 a_1 x + ... + \alpha_2 a_n x^n] = \alpha_1 \left[\alpha_2 \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right] \\ &= \alpha_1(\alpha_2 p(x)). \end{aligned}$$

D_2(Distributividade:)

$$\begin{aligned}
(\alpha_1+\alpha_2)p(x) &= (\alpha_1+\alpha_2)\left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right] = (\alpha_1+\alpha_2)[a_0+a_1x+...+a_nx^n]\\
&= (\alpha_1+\alpha_2)a_0+(\alpha_1+\alpha_2)a_1x+...+(\alpha_1+\alpha_2)a_nx^n\\
&= \alpha_1a_0+\alpha_2a_0+\alpha_1a_1x+\alpha_2a_1x...+\alpha_1a_nx^n+\alpha_2a_nx^n\\
&= \alpha_1a_0+\alpha_1a_1x+...+\alpha_1a_nx^n+\alpha_2a_0+\alpha_2a_1x+...+\alpha_2a_nx^n\\
&= \alpha_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\right)+\alpha_2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\right)\\
&= \alpha_1p(x)+\alpha_2p(x).
\end{aligned}$$

D_1(Distributividade:)

$$\begin{aligned}
\alpha[p(x)+g(x)] &= \alpha\left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^i+\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right]\\
&= \alpha\left[a_0+a_1x+...+a_nx^n+b_0+b_1x+...+b_mx^m\right]\\
&= \alpha a_0+\alpha a_1+...+\alpha a_nx^n+\alpha b_0+\alpha b_1x+...+\alpha b_mx^m\\
&= \alpha\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)+\alpha\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right)\\
&= \alpha p(x)+\alpha g(x).
\end{aligned}$$

Resumidamente, a soma de polinômios é um polinômio e a multiplicação de um escalar por um polinômio também é um polinômio.

1.3.1 Bases de Polinômios

Uma combinação linear de elementos de X é uma soma finita $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n$, com $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbb{R}$ e $v_1,v_2,...,v_n\in X$.

Seja V um espaço vetorial. Um subconjunto X de V é dito linearmente independente quando nenhum elemento de X for combinação linear de outros elementos de X. Em outras palavras, quando $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n=0$ implicar apenas $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$ com $v_1,v_2,...,v_n\in X$ e $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbb{R}$, [4].

Se o conjunto não for linearmente independente ele será chamado de linearmente dependente. Isso ocorre quando existir elementos $v_1, v_2, ..., v_n \in X$ e escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, onde $\alpha_i \neq 0$ para algum i, tais que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$.

O seguinte fato é um teorema retirado da referência [8], que não apresentaremos a sua demonstração. Para os interessados, recomenda-se página 26 de [8].
"Sejam $v_1, v_2, ..., v_n$ vetores não nulos do espaço vetorial V. Se nenhum deles é combinação linear dos anteriores então o conjunto $X = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é linearmente independente."

Definição 1.30. *Dizemos que o conjunto X gera o espaço vetorial V se para todo elemento $v \in V$ existirem elementos $v_1, v_2, ..., v_n \in X$ e escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ de tal forma que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$.*

Definição 1.31. *Um conjunto $\mathcal{B}$ do espaço vetorial V será uma base para V quando for linearmente independente e gerar V.*

Assim uma base para o espaço dos polinômios é um conjunto que é linearmente independente e que gera o espaço.

Os dois exemplos a seguir são exemplos de bases do espaço vetorial dos polinômios. O primeiro é a base canônica de $\mathcal{P}$, sendo este o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a n. Já o segundo é a base do conjunto dos polinômios de grau menor ou igual à 2:

Exemplo 1.32. *Os monômios $1, x, x^2, ..., x^n$ formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n. De fato, sejam $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + ... + \alpha_n \cdot x^n = 0.$$

Daí pela igualdade de polinômios temos que $\alpha_i = 0, \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, então $1, x, x^2, ..., x^n$ são linearmente independentes.

Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, mostremos que $p(x)$ se escreve como combinação linear de $1, x, x^2, ..., x^n$. Com efeito, se

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n$$

pela igualdade de polinômios temos que

$$a_0 = \alpha_0, a_1 = \alpha_1, a_2 = \alpha_2, ..., a_n = \alpha_n.$$

Portanto os polinômios $1, x, x^2, ..., x^n$ *geram o conjunto* $\mathcal{P}$ *dos polinômios de grau menor ou igual a* n*.*

A seguir definimos subespaço vetorial, baseada na definição de [4].

Definição 1.33. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*. Um subespaço de* V *é um subconjunto* X *de* V *que é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *com as operações de adiçãode vetores e multiplicação escalar de* V*.*

Exemplo 1.34. *Para* $n = 2$*, temos, por exemplo, que*

$$\left\{p_1(x) = 1 + x, \quad p_2(x) = 1 + x^2, \quad p_3(x) = x + x^2\right\}, \tag{1.4}$$

constitui uma base para o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2.
Para mostrar que (1.4) é uma base devemos mostrar que é linearmente independente (LI) e que gera o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2. Sejam α_1, α_2 *e* $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\alpha_1(1 + x) + \alpha_2(1 + x^2) + \alpha_3(x + x^2) = 0.$$

Então pela igualdade de polinômios temos:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \Longrightarrow \alpha_3 = \alpha_2 \Longrightarrow$$

$$2\alpha_3 = 0 \Longrightarrow \alpha_3 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Assim (1.4) é LI.

Tomemos $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ *um polinômio de grau 2. Suponhamos que*

$$p(x) = \beta_1(1 + x) + \beta_2(1 + x^2) + \beta_3(x + x^2),$$

com $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$.

Logo,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = \beta_1 + \beta_2 + (\beta_1 + \beta_3)x + (\beta_2 + \beta_3)x^2.$$

O que implica que

$$\begin{cases} a_0 = \beta_1 + \beta_2 \\ a_1 = \beta_1 + \beta_3 \\ a_2 = \beta_2 + \beta_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + 0 = a_0 \\ \beta_1 + 0 + \beta_3 = a_1 \\ 0 + \beta_2 + \beta_3 = a_2. \end{cases}$$

Utilizando escalonamento chegamos a

$$\beta_3 = \frac{a_1 - a_0 + a_2}{2}, \quad \beta_2 = \frac{a_0 - a_1 + a_2}{2} \quad e \quad \beta_1 = \frac{a_0 + a_1 - a_2}{2}.$$

Portanto,

$$p(x) = \frac{a_0 + a_1 - a_2}{2}(1 + x) + \frac{a_0 - a_1 + a_2}{2}(1 + x^2) + \frac{a_1 - a_0 - a_2}{2}(x + x^2).$$

O próximo exemplo de espaço vetorial será o espaço das funções. Antes definiremos função. Essa definição de função é fundamentada na definição de função de [6].

Definição 1.35. *Uma função f é uma relação que associa a cada elemento x de um conjunto X, que recebe o nome de domínio da função, um único elemento $f(x)$, que depende de x, de um conjunto Y, chamado contradomínio da função.*

Onde $f(x)$ é a imagem de x pela f.

Exemplo 1.36. *Espaço das Funções:*

Seja X um conjunto diferente do vazio. Consideremos $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções de X em $\mathbb{R}$. Definindo a soma de duas funções e o produto por escalar por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

e

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x),$$

com $f, g \in \mathcal{F}$, $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. $\mathcal{F}$ se torna um espaço vetorial (como definido em 1.27) pois:
(A_1) A adição em $\mathcal{F}$ é comutativa $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$, $\forall f, g \in \mathcal{F}$ e $x \in X$;
(A_2) A adição em $\mathcal{F}$ é associativa $f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x)$,

$\forall f, g, h \in \mathcal{F}$ *e* $x \in X$;

(A_3) Existe uma única função em $\mathcal{F}$ *que associa a cada* $x \in X$ *ao elemento* 0 *em* $\mathbb{R}$*, essa função é chamada função nula;*

(A_4) Para cada função f *em* $\mathcal{F}$ *a função* $(-f)$ *é a função dada por* $(-f)(x) = -f(x)$;

(M_1) $(1f)(x) = f(x)$;

(M_2) $(\alpha \cdot \beta \cdot f)(x) = \alpha \cdot (\beta f)(x) = \alpha \cdot \beta f(x)$;

(M_3) $[\alpha(f + g)](x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$;

(M4) $[(\alpha + \beta)f](x) = (\alpha f + \beta f)(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$.

Exemplo 1.37. *Um caso particular de espaço de funções é o conjunto das funções polinomiais, que na realidade é um subespaço do espaço de todas as funções de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$*.*
Este é o conjunto das funções do tipo:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n,$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n$ *são escalares fixos em* $\mathbb{R}$*, que não dependem de* x*.*

1.4 Resoluções de Equações Algébricas

Como já foi relatado anteriormente em 1.1 uma equação algébrica é uma equação em que a incógnita aparece apenas envolvida com operações algébricas que são multiplicação, adição, divisão, subtração, radiciação e potenciação.
Resolver uma equação algébrica é determinar o valor da incógnita que torna a expressão verdadeira.

1.4.1 Equação do 1º Grau

Iniciamos o contato com equações algébricas no 7º ano do ensino fundamental, com as equações do 1º grau com uma incógnita. E para resolver uma equação de 1º grau não necessitamos de cálculos elaborados, precisamos conhecer as noções comuns de Euclides encontradas em [1] que são:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são somados a iguais, os totais serão iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.
5. O todo é maior do que a parte.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.38. *Resolver a equação* $7x + 13 = -1$.

$$7x = -1 - 13 \Leftrightarrow 7x = -14 \Leftrightarrow x = \frac{-14}{7} \Leftrightarrow x = -2.$$

1.4.2 Equação do 2º Grau

A partir do 9º ano do ensino fundamental é apresentado ao aluno a equação algébrica do segundo grau e para resolver esse tipo de equação usamos a fórmula de Bhaskara que foi publicada pelo matemático hindu Sridhara por volta do ano de 991 d.C. [19]. Mas leva o nome de Bhaskara que nasceu em 1114. Segundo [14](página 6) foi Bhaskara que demonstrou algebricamente essa fórmula.

Considere a equação algébrica $ax^2+bx+c = 0$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Vejamos o processo para isolar a incógnita x : Primeiramente subtraímos c em ambos os membros da igualdade, obtendo:

$$ax^2 + bx = -c.$$

Nessa etapa dividiremos ambos os membros por a. Isto é,

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}.$$

Aqui completamos o quadrado do lado esquerdo da igualdade, ou seja, do lado esquerdo deve ter um binômio que seja um quadrado perfeito, já temos o quadrado do 1º termo e o termo $\frac{bx}{a}$ que deve ser duas vezes um termo vezes o outro termo. Então o nosso 2º termo deve ser $\frac{b}{2a}$. Assim

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x + \frac{b}{2a})^2} = \pm\sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}.$$

Como $\sqrt{x^2} =\mid x \mid$ temos,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Denominamos $\Delta = b^2 - 4ac$.

No ensino fundamental resolvemos apenas as equações em que o Δ é ≥ 0 (maior ou igual a zero), pois se Δ for ≤ 0 (menor do que zero) o radicando será um número negativo e assim teremos um número que não pertence ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, e sim ao conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. Somente no Ensino médio o aluno opera com $\Delta \leq 0$, se for apresentado à ele o conjunto $\mathbb{C}$.

Embora estejamos buscando a interpolação polinomial utilizando apenas números reais, vamos precisar dos números complexos, pois eles aparecem nas raízes das equações algébricas de grau 2 ou mais. As definições a seguir são baseadas em [5]

Definição 1.39. *Denominamos conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$) o conjunto dos pares ordenados de números reais ($(a, b), a, b \in \mathbb{R}$) para os quais estão definidas a igualdade, a* *adição e a multiplicação como em* $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.40. *Dado um número complexo* $z = a + bi$ *chama-se norma de* z *ao número real positivo* $a^2 + b^2$.

Definição 1.41. *O módulo de* z *é o número real positivo*

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Definição 1.42. *O argumento de* z*, sendo* $z \neq 0$*, com* $\rho = |z|$*, é o ângulo* θ *tal que,*

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \quad e \quad \sin\theta = \frac{b}{\rho}$$

Exemplo 1.43. *Resolver a equação* $(3 - x)\sqrt{2}x = 0$*. Deixando na forma padrão vemos que:* $a = -\sqrt{2}, b = 3\sqrt{2}$ *e* $c = 0$.
Assim $\Delta = 18$*, daí temos duas raízes reais e distintas. Sendo* $x = \frac{-3\sqrt{2}\pm 3\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}$ *as raízes reais são* $x_1 = 0$ *e* $x_2 = 3$.

Exemplo 1.44. *Resolver a equação* $x^2 - 4x + 13 = 0$*. Onde* $a = 1, b = -4$ *e* $c = 13$.
Assim $\Delta = -36$ *e assim a equação não possui raízes reais. Ela possui duas raízes complexas conjugadas, pois* $x = \frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}$*, logo essas raízes são* $x_1 = 2 + 3i$ *e* $x_2 = 2 - 3i$.

Exemplo 1.45. *Dada a equação* $2x^2 - 9x - 56 = 0$*, determinar as suas raízes reais, se existirem.*
Neste caso $\Delta = 529$ *e a equação possui duas raízes reais e distintas dadas por* $x = \frac{9\pm\sqrt{529}}{4}$ $x_1 = 8$ *e* $x_2 = -\frac{7}{2}$.

Exemplo 1.46. *Seja a equação* $x^2 - 14x + 49 = 0$*, determine as suas raízes reais, se existirem.*
Neste caso $\Delta = 0$ *e a equação possui duas raízes reais e iguais onde* $x = \frac{14\pm\sqrt{0}}{2}$*. Logo* $x_1 = x_2 = 7$.

1.4.3 Equação do 3º Grau

A equação algébrica do terceiro grau não é apresentada aos alunos do ensino fundamental, nem aos alunos do ensino médio. Antes de mostrarmos a fórmula resolutiva da equação do terceiro grau apresentemos algumas definições que nos serão úteis.

As Definições 1.47 e 1.48 são de [14].

Definição 1.47. *Seja $z \neq 0$ um número complexo, na sua forma polar, isto é, $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$. A Fórmula de De Moivre é dada por $z^n = \rho^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.*

Definição 1.48. *As raízes n-ésimas da unidade são todos os números complexos que resultam 1 quando são elevados a uma potência n. Em outras palavras, as raízes n-ésimas da unidade são as raízes complexas n-ésimas de 1.*

Para $z = 1$ temos $\rho = |z| = 1$ e $\theta = arg(1) = 0$, logo,

$$z_k = \sqrt[n]{1}\left[\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{0 + 2k\pi}{n}\right)\right]. \tag{1.5}$$

$k = 0, 1, 2, ..., n - 1.$

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Agora podemos retomar a resolução da equação de terceiro grau. Sem perda de generalidade consideremos a equação algébrica da forma:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{1.6}$$

Com o coeficiente de x^3 igual 1, pois se ele fosse diferente de 1, dividiríamos todos os termos da equação por ele.

Fazendo $x = y + l$ a equação em (1.6) fica,

$$(y + l)^3 + a(y + l)^2 + b(y + l) + c = 0.$$

Daí,

$$y^3 + (3l + a)y^2 + (3l^2 + 2al + b)y + l^3 + al^2 + bl + c = 0.$$

Para que o coeficiente de y^2 seja nulo devemos ter $l = -\frac{a}{3}$. Assim, podemos escrever a equação na forma:

$$y^3 + \alpha y + \beta = 0,$$

onde $\alpha = b - \frac{a^2}{3}$ e $\beta = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$.

As soluções da equação são:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + l,$$

$$x_2 = \gamma\sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \gamma^2\sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + l,$$

$$x_2 = \gamma^2\sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \gamma\sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + l.$$

Onde γ e γ^2 são as raízes da unidade. As demonstrações dessas fórmulas podem ser encontradas em [14].

Exemplo 1.49. *Tomemos um exemplo trivial $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$, com $a = -3, b = 3$ e $c = -1$. Não é difícil verificar que essa equação tem 1 como raiz de multiplicidade três. Fazendo $x = y + l$ obtemos,*

$$(y + l)^3 - 3 \cdot (y + l)^2 + 3 \cdot (y + l) - 1 = 0.$$

Logo,

$$y^3 + (3l - 3)y^2 + (3l^2 - 6l + 3)y + l^3 - 3l^2 + 3l - 1 = 0.$$

Devemos ter $3l - 3 = 0 \Rightarrow l = 1$. Agora podemos escrever nossa equação na forma

$$y^3 + 0y^2 + (3 - 6 + 3)y + 1 - 3 + 3 - 1 = 0,$$

ou seja, $y^3 = 0$, pois $\alpha = 3 - \frac{(-3)^2}{3} = 0$ e $\beta = 2\frac{(-3)^3}{27} - \frac{(-3)\cdot 3}{3} + (-1) = 0$.

Obtemos uma das soluções da equação

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{0}{2} + \sqrt{\frac{0^2}{4} + \frac{0^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{0}{2} - \sqrt{\frac{0^2}{4} + \frac{0^3}{27}}} + 1 = 1.$$

Como $\alpha = \beta = 0$, não precisamos das raízes da unidade, pois temos que $x_1 = x_2 = x_3 = l = 1$.

Exemplo 1.50. *Tomemos um outro exemplo $x^3 + 3x^2 + 3x + 7 = 0$, com $a = 3, b = 3$ e $c = 7$. Fazendo $x = y + l$ obtemos,*

$$(y + l)^3 + 3 \cdot (y + l)^2 + 3 \cdot (y + l) + 7 = 0.$$

Logo

$$y^3 + (3l + 3)y^2 + (3l^2 + 6l + 3)y + l^3 + 3l^2 + 3l + 7 = 0.$$

Devemos ter $3l + 3 = 0 \Rightarrow l = -1$. Agora podemos escrever nossa equação na forma $y^3 + 0y^2 + 0y + 6 = 0$, ou seja, $y^3 = -6$, pois $\alpha = 3 - \frac{(3)^2}{3} = 0$ e $\beta = 2\frac{(3)^3}{27} - \frac{(3)\cdot 3}{3} + 7 = 6$.

Obtemos uma das soluções da equação

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{6}{2} + \sqrt{\frac{6^2}{4} + \frac{0^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{6}{2} - \sqrt{\frac{6^2}{4} + \frac{0^3}{27}}} + (-1) = -\sqrt[3]{6} - 1.$$

As outras raízes são:

$$x_2 = \frac{\sqrt[3]{6} - 2}{2} - \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{6}}{2} i \quad e \quad x_3 = \frac{\sqrt[3]{6} - 2}{2} + \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{6}}{2} i.$$

Pois as raízes da unidade para $n = 3$ são $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Veja como calculamos essas raízes da unidade:

Se $n = 3$, então $k = 0, 1, 2$, logo em (1.5), para $k = 0$, temos

$$z_0 = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{0 + 20\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0 + 20\pi}{3}\right)\right].$$

O que implica $z_0 = 1\left[\cos\left(\frac{0}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0}{3}\right)\right] = 1$.
Substituindo $k = 1$ em (1.5), obtemos $z_1 = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{0+2\cdot 1\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0+2\cdot 1\pi}{3}\right)\right]$.
Resultando em $z_1 = 1\left[\cos\left(\frac{0+2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0+2\pi}{3}\right)\right] = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Já para $k = 2$, (1.5) fica $z_2 = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{0+2\cdot 2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0+2\cdot 2\pi}{3}\right)\right] = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Exemplo 1.51. *$x^3 - 3x^2 + 3x + 5 = 0$, com $a = -3, b = 3$ e $c = 5$. Fazendo $x = y + l$ obtemos,*

$$(y + l)^3 - 3 \cdot (y + l)^2 + 3 \cdot (y + l) + 5 = 0.$$

Logo

$$y^3 + (3l - 3)y^2 + (3l^2 - 6l + 3)y + l^3 - 3l^2 + 3l + 5 = 0.$$

Devemos ter $3l - 3 = 0 \Rightarrow l = 1$. Agora podemos escrever nossa equação na forma $y^3 + 0y^2 + 0y + 6 = 0$, ou seja, $y^3 = 0$,que coincide com a anterior pois $\alpha = 3 - \frac{(-3)^2}{3} = 0$ e $\beta = 2\frac{(-3)^3}{27} - \frac{(-3)\cdot 3}{3} + 5 = 6$.

Obtemos uma das soluções da equação

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{6}{2} + \sqrt{\frac{6^2}{4} + \frac{0^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{6}{2} - \sqrt{\frac{6^2}{4} + \frac{0^3}{27}}} + 1 = -\sqrt[3]{6} + 1.$$

Já calculamos as raízes da unidade no Exemplo 1.50, utilizando elas novamente aqui, na obtenção das outras raízes, temos:
$x_2 = \frac{\sqrt[3]{6}+2}{2} - \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{6}}{2}i$ *e* $x_3 = \frac{\sqrt[3]{6}+2}{2} + \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{6}}{2}i.$

1.4.4 Equação do 4º Grau

Considere a equação

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0. \tag{1.7}$$

Primeiramente dividimos toda a equação por $a \neq 0$.

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0.$$

Renomeando os coeficientes de x^3, x^2, x e o termo independente,

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Agora fazemos $x = y + m$. Daí temos

$$(y + m)^4 + a_3(y + m)^3 + a_2(y + m)^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(y^2+2my+m^2)\cdot(y^2+2my+m^2)+a_3(y+m)\cdot(y^2+2my+m^2)+$$
$$+a_2(y^2+2my+m^2)+a_1(y+m)+a_0=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$y^4+2my^3+2my^3+a_3y^3+m^2y^2+m^2y^2+4m^2y^2+a_3my^2+2a_3my^2+a_2y^2+$$
$$+2m^3y+2m^3y+a_3m^2y+a_32m^2y+2a_2my+a_1y+m^4+a_3m^3+a_2m^2+a_1m=0.$$

Fazendo o coeficiente de y^3 igual à zero obtemos $m=-\dfrac{a_3}{4}$ e

$$y^4+y^2\cdot\left[6\left(\frac{-a_3}{4}\right)^2+3a_3\left(\frac{-a_3}{4}\right)+a_2\right]$$
$$+y\left[4\left(\frac{-a_3}{4}\right)^3+3a_3\left(\frac{-a_3}{4}\right)^2+2a_2\left(\frac{-a_3}{4}\right)+a_1\right]$$
$$+\left(\frac{-a_3}{4}\right)^4+a_3\left(\frac{-a_3}{4}\right)^3+a_2\left(\frac{-a_3}{4}\right)^2+a_1\left(\frac{-a_3}{4}\right)=0.$$

Renomeando os coeficientes novamente temos,

$$y^4+py^2+qy+r=0.$$

Transformando a equação de forma que os dois lados sejam quadrados perfeitos

$$y^4+py^2+\alpha y^2+r+\beta=\alpha y^2-qy+\beta,$$
$$y^4+y^2(p+\alpha)+r+\beta=\alpha y^2-qy+\beta. \tag{1.8}$$

Agora devemos ter os discriminantes de ambos os lados iguais à zero, ou seja

$$\begin{cases}(p+\alpha)^2-4(r+\beta)=0\\ q^2-4\alpha\beta=0.\end{cases}$$

Daí $\beta=\frac{q^2}{4\alpha}$ se $\alpha\neq 0$,

$$p^2+2p\alpha+\alpha^2-4r-\frac{q^2}{\alpha}=0\Leftrightarrow$$
$$\alpha p^2+2p\alpha^2+\alpha^3-4r\alpha-q^2=0\Leftrightarrow$$
$$\alpha^3+2p\alpha^2+\alpha(p^2-4r)-q^2=0.$$

Assim determinamos o valor de α usando a fórmula descoberta por Tartaglia e publicada por Cardamo, ([2] página 303).

Agora é só extrair a raiz quadrada dos dois lados da equação (1.8).

Lembrando que $\sqrt{x^2}=\mid x\mid$, percebe-se que teremos as quatro raízes da equação (1.7).

Capítulo 2

INTERPOLAÇÃO

Vejamos alguns conceitos relacionados à interpolação e interpolação polinomial. Como nosso tema é interpolação polinomial, apresentamos algumas formas (ou métodos) de interpolação polinomial.

2.1 Matriz de Vandermonde

Antes de falarmos de interpolação definimos a matriz de Vandermonde, cujo determinante nos será útil. A definição apresentada é baseada nas definições de [4] e [18].

Definição 2.1. *Dados $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, números reais, chamamos de Matriz de Vandermonde toda matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ tal que*

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}. \end{bmatrix}$$

As colunas da matriz são formadas por potências de mesma base com expoentes inteiros, variando de 0 até $n-1$.

Chamaremos os elementos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, de característicos da matriz, ou seja, os elementos com o expoente 1 recebem esse nome.

O determinante da matriz de Vandermonde é dado por

$$V = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i),$$

onde $j > i$, segundo [11]. Esse determinante será 0 (zero) somente se $a_i = a_j$ para algum $i \neq j$. Quando isso não ocorre o matriz é chamada de inversível ou regular.

2.2 Interpolação

Definição 2.2. *Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, consideremos $(n+1)$ pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$ e suas imagens $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$.*

Os pontos $x_0, x_1, ..., x_n$ são chamados de nós de interpolação.

Vamos obter uma outra função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) = f(x_n). \end{cases}$$

Os pontos x_i são diferentes, pois se existissem dois iguais $(x_i = x_j)$ com $f(x_i) \neq f(x_j)$, f não seria função. Ou seja, se os pontos x_i's forem iguais podemos descartar um deles (tem um sobrando).

2.3 Interpolação Polinomial

O objetivo da interpolação polinomial é aproximar uma função $f(x)$ por um polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n, sendo $n+1$ a quantidade de pontos distintos conhecidos, isto é $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, tal que

$$p(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Nos nós de interpolação o valor do polinômio é igual ao valor da função a ser interpolada.

Assim se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, $a_i \in \mathbb{R}, \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots, n$ temos o sistema

$$\begin{cases} p(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ p(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ p(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_2^n = f(x_2) \\ \vdots \\ p(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n = f(x_n). \end{cases}$$

Em forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Neste sistema temos $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas. Essas incógnitas são os coeficientes $a_i, 0 \leq i \leq n$. Ao resolver o sistema temos que o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero (determinante de uma matriz de Vandermonde, onde $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$), dessa forma temos que o sistema tem uma única solução, [14]. Portanto o polinômio $p(x)$ é único, [15].

Para determinar os coeficientes de $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ basta resolver o sistema linear, o que pode apresentar dificuldades se o n for grande, [18].

Mas essa não é a única forma de obter o polinômio que interpola $f(x)$, [15]. Veremos mais adiante outras formas de determinar o polinômio.

Exemplo 2.3. *Obter o polinômio que interpole uma função conhecida nos pontos* $f(-1) = 1, f(1) = 2$ *e* $f(2) = -1$. $(n = 2)$. *Os nós de interpolação são* $-1, 1, 2$. *Iremos interpolar esta função por um polinômio* p *de grau menor ou igual a 2 (dois), uma vez que temos 3 (três) pontos conhecidos. Se* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, *montamos o sistema*

$$\begin{cases} p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 = 1 \\ p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ p(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ 0 + 2a_1 + 0 = 1 \\ 0 + 3a_1 + 3a_2 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ 0 + 2a_1 + 0 = 1 \\ 0 + 0 + 3a_2 = \frac{-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ 0 + 2a_1 + 0 = 1 \\ 0 + 0 + a_2 = \frac{-7}{6}. \end{cases}$$

Daí $a_0 = \frac{8}{3}$.

Assim $p(x) = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{6}x^2$ *é o polinômio que interpola* $f(x)$ *em* $x_0 = -1, x_1 = 1$ *e* $x_2 = 2$.

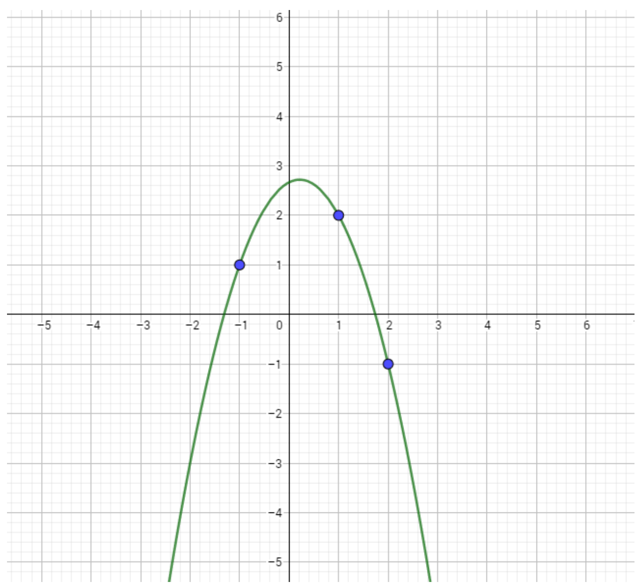

Figura 2.1: Gráfico do Exemplo 2.3

A Figura 2.1 é a representação gráfica do polinômio interpolador do Exemplo 2.3, feita no Geogebra. Vejamos mais um exemplo:

Exemplo 2.4. *Suponhamos que* $x_0 = -3, x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$ *e* $x_3 = 1$, *com* $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = -1, f(x_2) = \frac{1}{3}$ *e* $f(x_3) = 1$. *Procuramos um polinômio* p *que interpole esta função. Este polinômio deve ser de grau menor ou igual a 3 (três), uma vez que temos 4 (quatro) pontos conhecidos. Se* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, *o sistema será:*

$$\begin{cases} p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ p(0) = a_0 = -1 \\ p(\frac{1}{2}) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a \cdot 3}{8} = \frac{1}{3} \\ p(-3) = a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 = 0. \end{cases}$$

Como a segunda equação já está solucionada ($a_0 = 1$). Substituímos esse valor de a_0 nas outras equações, o nosso sistema passa a ter três equações e três incógnitas. Ou seja:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 2 \\ 12a_1 + 6a_2 + a_3 = 32 \\ -3a_1 + 9a_2 - 27a_3 = 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Resolvendo o sistema (2.2) encontramos $a_3 = \frac{-23}{42}$, $a_2 = \frac{-43}{84}$ e $a_1 = \frac{257}{84}$.

O que nos mostra que o polinômio procurado é

$$p(x) = -1 + \frac{257}{84}x - \frac{43}{84}x^2 - \frac{23}{42}x^3.$$

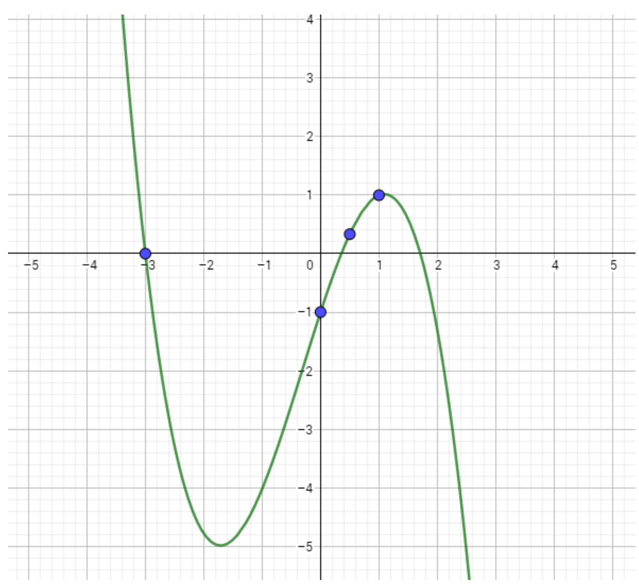

Figura 2.2: Gráfico do Exemplo 2.4

Na Figura 2.2 está a representação gráfica do polinômio interpolador do Exemplo 2.4, feito com o auxilio do Geogebra.

2.4 Algumas Formas de Interpolação

Nesta seção citamos 4 (quatro) outras maneiras diferentes de se obter o polinômio interpolador. Começaremos pela forma de Lagrange, depois forma de Newton, seguido de Polinômios de Chebyshev e por último Polinômios de Legendre.
Antes disso precisamos definir Polinômios Ortogonais e Produto Interno:

Definição 2.5. *Polinômios Ortogonais são polinômios ortogonais entre si em relação a um produto interno e que podem ser gerados por meio de fórmulas recursivas de três termos, [18].*

Definição 2.6. *Seja V um Espaço Vetorial, como definido em 1.27 e $v_1, v_2 \in V$. O produto interno de v_1 e v_2, é um funcional que satisfaz às seguintes propriedades:*

1. $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle, \forall v_1, v_2 \in V;$

2. $\langle c_1 v_1 + c_2 v_2, v_3 \rangle = c_1 \langle v_1, v_3 \rangle + c_2 \langle v_1, v_3 \rangle, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *e* $\forall v_1, v_2, v_3 \in V;$

3. $\langle v_1, v_1 \rangle \geqslant 0, \forall v_1 \in V;$

4. $\langle v_1, v_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0.$

Para os interessados em se aprofundar no assunto sobre ortogonalidade ver [18].

2.4.1 Forma de Lagrange

A definição seguinte é tirada de [16] e é a definição do polinômio interpolador de Lagrange.

Definição 2.7. *Sejam $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, e $f(x_i) = y_i, i = 0, 1, \ldots, n$.*

Seja $p(x)$ o polinômio de grau menor ou igual a n que interpola f em $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Os polinômios de Lagrange de grau n são dados por:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)},$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)},$$

$$\vdots$$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}, k = 2, 3, ..., n-1.$$

$$\vdots$$

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$

Onde $L_i(x_i) = 1$ *e* $L_i(x_j) = 0$*, para* $i \neq j$*.*

O polinômio interpolador na forma de Lagrange é dado pela expressão:

$$p(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \ldots + y_nL_n(x).$$

Exemplo 2.8. *Vamos voltar ao Exemplo 2.3 e determinar o polinômio interpolador, utilizando a interpolação de Lagrange para a Tabela 2.1.*

x	-1	1	2
$f(x)$	1	2	-1

Tabela 2.1: Pontos do Exemplo 2.3

Assim devemos obter $p(x) = a_0L_0(x) + a_1L_1(x) + a_2L_2(x)$*. Para atingir nosso objetivo substituímos os pontos da Tabela 2.1 nos Polinômios de Lagrange. Logo encontramos as equações:*

$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^2-3x+2}{(-2)(-3)} = \frac{1}{6}(x^2-3x+2);$

$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = \frac{x^2-x-2}{2\cdot(-1)} = \frac{-1}{2}(x^2-x-2);$

$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{x^2-1}{3\cdot 1} = \frac{1}{3}(x^2-1).$

Daí,

$$\begin{aligned}
p(x) &= 1 \cdot \frac{1}{6}(x^2-3x+2) + 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)(x^2-x-2) + (-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)(x^2-1) \\
&= \frac{1}{6}x^2 - \frac{3x}{6} + \frac{2}{6} - \frac{2}{2}x^2 + \frac{2}{2}x + \frac{4}{2} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3} \\
&= \frac{x^2-6x^2-2x^2}{6} + \frac{6x-3x}{6} + \frac{2+12+2}{6} \\
&= -\frac{7}{6}x^2 + \frac{3}{6}x + \frac{16}{6} \\
&= -\frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Como esperado, é o mesmo resultado obtido no Exemplo 2.3.

Voltando ao Exemplo 2.4. Será que pela Forma de Lagrange conseguiremos chegar ao mesmo polinômio obtido naquele exemplo? Para responder a essa pergunta precisamos fazer os cálculos, vejamos:

Exemplo 2.9. *Tínhamos* $x_0 = -3, x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$ *e* $x_3 = 1$, *com* $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = -1, f(x_2) = \frac{1}{3}$ *e* $f(x_3) = 1$. *Logo,*

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(-3-0)(-3-\frac{1}{2})(-3-1)} \\
L_0(x) &= \frac{(x^2-\frac{x}{2})(x-1)}{(-3)(-\frac{7}{2})(-4)} \\
L_0(x) &= \frac{x^3}{42} - \frac{x^2}{28} + \frac{x}{84};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= \frac{(x+3)(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(0+3)(0-\frac{1}{2})(0-1)} \\
L_1(x) &= \frac{(x^2+2x-3)(x-\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}} \\
L_1(x) &= \frac{2x^3}{3} + x^2 - \frac{8x}{3} + 1;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(x+3)(x-0)(x-1)}{(\frac{1}{2}+3)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}\\
L_2(x) &= \frac{(x^3+2x^2-3x)(x-\frac{1}{2})}{\frac{-7}{8}}\\
L_2(x) &= -\frac{8x^3}{7}-\frac{16x^2}{7}+\frac{24x}{7};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_3(x) &= \frac{(x+3)(x)(x-\frac{1}{2})}{(1+3)(1-0)(0-\frac{1}{2})}\\
L_3(x) &= \frac{x^3+\frac{5x^2}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\\
L_3(x) &= \frac{x^3}{2}+\frac{5x^2}{4}-\frac{3x}{4}.
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 0\cdot L_0(x)+(-1)L_1(x)+\frac{1}{3}\cdot L_2(x)+1\cdot L_3(x)\\
p(x) &= -\frac{2x^3}{3}-x^2+\frac{8x}{3}-1-\frac{8x^3}{21}-\frac{16x^2}{21}+\frac{24x}{21}+\frac{x^3}{2}+\frac{5x^2}{4}-\frac{3x}{4}\\
p(x) &= -\frac{23x^3}{84}-\frac{43x^2}{42}+\frac{257x}{84}-1.
\end{aligned}
$$

2.4.2 Forma de Newton

A forma de Newton para o polinômio $p(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \dots, x_n, (n+1)$ pontos distintos é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= d_0+d_1(x-x_0)+d_2(x-x_0)(x-x_1)+d_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\\
&\quad +\ldots+d_i(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})+\ldots+\\
&\quad +d_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Onde d_i é o operador diferenças divididas de ordem i entre os pontos $(x_i, f(x_i))$ e $i = 0, 1, \dots, n$.

Definição 2.10. *Diferenças Divididas:*

Essa definição é baseada em [15] e [18].

Considere uma função f, nos pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ do domínio da função f. Definimos o operador diferenças divididas pela Tabela **??***:*

DDD	Ordem	Valor
$f[x_0]$	0	$f(x_0)$
$f[x_0, x_1]$	1	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$
$f[x_0, x_1, x_2]$	2	$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	3	$\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n]$	n	$\frac{f[x_1,x_2,\ldots,x_n]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$

Tabela 2.2: Diferenças Divididas

Agora usando a forma de Newton vamos interpolar $f(x)$ para o Exemplo 2.3. Onde tínhamos $(-1, 1), (1, 2), (2, -1)$.

Exemplo 2.11. *A diferença dividida de ordem zero em relação a x_0 é $f[x_0] = f(x_0) = 1 = d_0$*

A diferença dividida de ordem 1 em relação a x_0 e x_1 é

$$f[x_0, x_1] = \frac{1-2}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = d_1.$$

A segunda diferença dividida em relação a x_0, x_1 e x_2 é

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-3 - \frac{1}{2}}{2+1} = \frac{-6-1}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{7}{6} = d_2.$$

Como,

$$p(x) = d_0 + (x - x_0)d_1 + (x - x_0)(x - x_1)d_2,$$

temos:

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + (x+1)\frac{1}{2} + (x+1)(x-1) \cdot -\frac{7}{6} \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{7}{6}x^2 + \frac{7}{6} = \frac{6+3+7}{6} + \frac{x}{2} - \frac{7}{6}x^2 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{7}. \end{aligned}$$

Note que o polinômio obtido é idêntico ao dos Exemplos 2.3 e 2.8, o que de fato deve ocorrer, pois o polinômio interpolador é único.

Exemplo 2.12. *Usaremos agora a Forma de Newton para os pontos dos Exemplos 2.4 e 2.9, ou seja,* $x_0 = -3$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$ *e* $x_3 = 1$, *com* $f(x_0) = 0, f(x_1) = -1, f(x_2) = \frac{1}{3}$ *e* $f(x_3) = 1$.

Primeiramente calculamos as diferenças divididas, isto é, d_0, d_1, d_2 *e* d_3*:*
A primeira é a de ordem 0,

$$f(x_0) = 0 = f[x_0] = d_0.$$

A de ordem 1 é

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-1+0}{0+3} = \frac{-1}{3} = d_1.$$

Para o cálculo da de ordem 2, d_2, *necessitamos de*

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{2}-0} = \frac{8}{3},$$

assim

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{8}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+3} = \frac{18}{21} = d_2.$$

Para o cálculo de d_3 *necessitamos calcular* $f[x_2, x_3]$ *e* $f[x_1, x_2, x_3]$*. Também precisamos de* $f[x_0, x_1, x_2] = d_2$, *que já está calculada. Depois de efetuados os cálculos obtemos,*

$$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(_2)}{x_3 - x_2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

e

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{4}{3}-\frac{8}{3}}{1-0} = -\frac{4}{3}.$$

Estamos prontos para calcular d_3,

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{-\frac{4}{3}-\frac{18}{21}}{4} = -\frac{23}{42} = d_3.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
p(x) &= d_0 + (x+3)\cdot d_1 + (x+3)\cdot x \cdot d_2 + (x+3)\cdot x\cdot(x-\frac{1}{2})\cdot d_3 \\
&= 0 + (x+3)\cdot(-\frac{1}{3}) + (x+3)\cdot x\cdot\frac{18}{21} + (x+3)\cdot x\cdot(x-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{23}{42}) \\
&= -1 + \frac{257}{84}x - \frac{43}{84}x^2 - \frac{23}{84}x^3.
\end{aligned}$$

E novamente constatamos que o polinômio interpolador é o mesmo, independente do método utilizado para obtê-lo.

2.4.3 Polinômios de Chebyshev

Os polinômios de Chebyshev satisfazem a relação de recorrência

$$\begin{cases} T_0(x) = 1; \\ T_1(x) = x; \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

E onde o coeficiente do termo de maior potência é dado por $A_0 = 1,\ A_n = 2^{n-1}, n \geq 1$.

Para $n \geqslant 0$ os polinômios de Chebyshev satisfazem a fórmula:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \forall x \in [-1, 1].$$

Os polinômios de Chebyshev, $T_2(x)$ e $T_3(x)$ seguintes foram obtidos por essa fórmula, com o auxílio de algumas identidades trigonométricas

$T_0(x) = 1;$

$T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x;$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 \\ &= 2\cos(\arccos(x)) \cdot \cos(\arccos(x)) - 1 \\ &= 2x^2 - 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \cos(3\arccos(x)) = \cos[\arccos(x) + 2\arccos(x)] \\ &= x(2x^2 - 1) - \sin(\arccos(x)) \cdot \sin(2\arccos(x)) \\ &= 2x^3 - x - 2x\sin^2(\arccos(x)) \\ &= 2x^3 - x - 2x \cdot \left[\frac{1 - (2x^2 - 1)}{2}\right] \\ &= 2x^3 - x - x + 2x^3 - x \\ &= 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

Essa maneira de obtê-los se torna muito trabalhosa, mas utilizando a Fórmula Recursiva, como descrito acima:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1; \\ T_1(x) = x; \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

podemos obtê-los de forma simples, isto é,

$$T_0(x) = 1;$$
$$T_1(x) = x;$$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) \\ &= 2x \cdot x - 1 \\ &= 2x^2 - 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) \\ &= 2x \cdot (2x^2 - 1) - x \\ &= 4x^3 - 3x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) \\ &= 2x \cdot (4x^3 - 3x) - 2x^2 + 1 \\ &= 8x^4 - 8x^2 + 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_5(x) &= 2xT_4(x) - T_3(x) \\ &= 2x \cdot (8x^4 - 8x^2 + 1) - 4x^3 - 3x \\ &= 16x^5 - 20x^3 + 5x; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_6(x) &= 2xT_5(x) - T_4(x)\\
&= 2x\cdot(16x^5 - 20x^3 + 5x) - 8x^4 - 8x^2 + 1\\
&= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_7(x) &= 2xT_6(x) - T_5(x)\\
&= 2x\cdot(32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1) - 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
&= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_8(x) &= 2xT_7(x) - T_6(x)\\
&= 2x\cdot(64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x) - 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1\\
&= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1.
\end{aligned}
$$

Poderíamos continuar determinando os polinômios de Chebyshev, mas esse não é o nosso objetivo. O polinômio Interpolador de Chebyshev tem a forma:

$$p(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + ... + a_nT_n(x).$$

Os polinômios de Chebyshev são polinômios ortogonais, pois satisfazem a Definição 2.5 e constituem uma ferramenta muito útil, pois ao trabalhar com aproximações é de interesse obter erros pequenos com polinômios de grau o mais baixo possível, para evitar que a curva descrita pelo polinômio aproximador apresente oscilações.

De acordo com [14], Pafnuty Lvovich Chebyshev (Rússia 1821-1894) desenvolveu os polinômios de Chebyshev para estudar aproximação e probabilidade.

Novamente vamos voltar ao Exemplo 2.3 utilizando polinômios de Chebyshev.

Exemplo 2.13. *Escrevendo* $p(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x)$, *com* $p(x_0) = f(x_0)$, $p(x_1) = f(x_1)$ *e* $p(x_2) = f(x_2)$. *Então,*

$$
\begin{cases}
a_0T_0(x_0) + a_1T_1(x_0) + a_2T_2(x_0) = f(x_0)\\
a_0T_0(x_1) + a_1T_1(x_1) + a_2T_2(x_1) = f(x_1)\\
a_0T_0(x_2) + a_1T_1(x_2) + a_2T_2(x_2) = f(x_2).
\end{cases}
$$

Substituindo temos o sistema:

$$\begin{cases} a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot 1 = 1 \\ a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 = 2 \\ a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 7 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 - a_1 + a_2 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 7a_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ 0 - 2a_1 + 0 = -1 \\ 0 - a_1 - 6a_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ 0 + a_1 + 0 = \frac{1}{2} \\ 0 + 0 - 6a_2 = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

Então, $a_1 = \frac{1}{2}$ *e* $a_2 = -\frac{7}{12}$. *O que implica que,* $a_0 = 2 + \frac{7}{12} - \frac{1}{2} = \frac{24+7-6}{12} = \frac{25}{12}$. *Logo,*

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{25}{12}T_0(x) + \frac{1}{2}T_1(x) - \frac{7}{12}T_2(x) \\ &= \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{6}x^2. \end{aligned}$$

Coincidindo com o polinômio obtido nos Exemplos 2.3, 2.8 e 2.11.

Novamente vamos determinar o polinômio interpolador para os pontos do Exemplo 2.4, desta vez usando os Polinômios de Chebyshev

Exemplo 2.14. *Pondo* $p(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + a_3T(x)$, *com* $p(x_0) = f(x_0)$, $p(x_1) = f(x_1)$, $p(x_2) = f(x_2)$ *e* $p(x_3) = f(x_3)$. *Assim temos:*

$$\begin{cases} a_0T_0(x_0) &+& a_1T_1(x_0) &+& a_2T_2(x_0) &+& a_3T_3(x_0) &=& f(x_0) \\ a_0T_0(x_1) &+& a_1T_1(x_1) &+& a_2T_2(x_1) &+& a_3T_3(x_0) &=& f(x_1) \\ a_0T_0(x_2) &+& a_1T_1(x_2) &+& a_2T_2(x_2) &+& a_3T_3(x_0) &=& f(x_2) \\ a_0T_0(x_2) &+& a_1T_1(x_2) &+& a_2T_2(x_2) &+& a_3T_3(x_0) &=& f(x_3). \end{cases}$$

Esse sistema, fica:

$$\begin{cases} a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot (-3) + a_2 \cdot 17 + a_3 \cdot (-99) = 0 \\ a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot (-1) + a_3 \cdot 0 = -1 \\ a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \frac{1}{2} + a_2 \cdot (-\frac{1}{2}) + a_3(-1) = \frac{1}{3} \\ a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 - 3a_1 + 17a_2 - 99a_3 = 0 \\ a_0 - 0 - a_2 + 0 = -1 \\ a_0 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 - a_3 = \frac{1}{3} \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1. \end{cases}$$

Escalonando obtemos:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ 0 - a_1 - 2a_2 - a_3 = -2 \\ 0 - \frac{1}{2}a_1 - \frac{3}{2}a_2 - 2a_3 = -\frac{2}{3} \\ 0 + 4a_1 - 16a_2 + 100a_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ 0 + a_1 + 2a_2 + a_3 = 2 \\ 0 + 0 + -\frac{1}{2}a_2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \\ 0 + 0 - 24a_2 + 96a_3 = -7. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ 0 + a_1 + 2a_2 + a_3 = 2 \\ 0 + 0 + a_2 + 3a_3 = -\frac{2}{3} \\ 0 + 0 - 24a_2 + 96a_3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ 0 + a_1 + 2a_2 + a_3 = 2 \\ 0 + 0 + -\frac{1}{2}a_2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \\ 0 + 0 + 0 + 168a_3 = -23. \end{cases}$$

Então, $a_3 = -\frac{23}{168}$, $a_2 = -\frac{43}{168}$, $a_1 = \frac{445}{168}$ *e* $a_0 = -\frac{211}{168}$ *. O que implica que*

$$\begin{aligned} p(x) &= (-\frac{211}{168})T_0(x) + (\frac{445}{168})T_1(x) + (-\frac{43}{168})T_2(x) + (-\frac{23}{168})T_3(x) \\ &= -\frac{211}{168} + \frac{445}{168}x - \frac{43}{168}(2x^2 - 1) - \frac{23}{168}(4X^3 - 3x) \\ &= -1 + \frac{257}{84}x - \frac{43}{84}x^2 - \frac{23}{42}x^3. \end{aligned}$$

Coincidindo com o polinômio obtido nos Exemplos 2.4, 2.9 e 2.12.

A próxima seção é sobre os Polinômios de Legendre, e é baseada em [17].

2.4.4 Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre são definidos no intervalo referencial $[-1, 1]$ pela fórmula:

$$\begin{cases} Le_0(x) = 1 \\ Le_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{d \cdot x^n}[(x^2 - 1)^n], n \geq 1. \end{cases}$$

Onde o índice que aparece em P_n indica a ordem do polinômio.

A fórmula recursiva de três termos que serve para gerar os polinômios de Legendre é

$$\begin{cases} Le_0(x) = 1, \ Le_1(x) = x \\ Le_{n+1}(x) = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) xL_{e_n}(x) - \left(\frac{n}{n+1}\right) L_{e_{n-1}}(x), n \geq 1. \end{cases}$$

De acordo com [17], temos:

$$\begin{aligned}
Le_0(x) &= 1; \\
Le_1(x) &= x; \\
Le_2(x) &= x^2 \quad -\tfrac{1}{3}; \\
Le_3(x) &= x^3 \quad -\tfrac{3}{5}x; \\
Le_4(x) &= x^4 \quad -\tfrac{6}{7}x^2 \quad +\tfrac{3}{35}; \\
Le_5(x) &= x^5 \quad -\tfrac{10}{9}x^3 \quad +\tfrac{5}{21}x; \\
Le_6(x) &= x^6 \quad -\tfrac{15}{11}x^4 \quad +\tfrac{5}{11}x^2 \quad -\tfrac{5}{231}.
\end{aligned}$$

Aqui eles estão normalizados

$$\begin{aligned}
Le_0(x) &= 1 \\
Le_1(x) &= x \\
Le_2(x) &= \tfrac{3}{2}x^2 \quad -\tfrac{1}{2} \\
Le_3(x) &= \tfrac{5}{2}x^3 \quad -\tfrac{3}{2}x \\
Le_4(x) &= \tfrac{35}{8}x^4 \quad -\tfrac{15}{4}x^2 \quad +\tfrac{3}{8} \\
Le_5(x) &= \tfrac{63}{8}x^5 \quad -\tfrac{35}{4}x^3 \quad +\tfrac{15}{8}x \\
Le_6(x) &= \tfrac{231}{16}x^6 \quad -\tfrac{315}{16}x^4 \quad +\tfrac{105}{16}x^2 \quad -\tfrac{5}{16}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.15. *A cargo de curiosidade e intrigados com a situação voltemos ao Exemplo 2.3 para fazer a interpolação dos valores da Tabela 3.4, com*

$$\begin{cases} p(x_0) &= f(x_0) \\ p(x_1) &= f(x_1) \\ p(x_2) &= f(x_2). \end{cases}$$

Assim, como

$$\begin{cases} a_0Le_0(x_0) + a_1Le_1(x_0) + a_2Le_2(x_0) = f(x_0) \\ a_0Le_0(x_1) + a_1Le_1(x_1) + a_2Le_2(x_1) = f(x_1) \\ a_0Le_0(x_2) + a_1Le_1(x_2) + a_2Le_2(x_2) = f(x_2). \end{cases}$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot 1 = 1 \\ a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 = 2 \\ a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot \frac{11}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 + 2a_1 + \frac{11}{2}a_2 = -1. \end{cases}$$

Fazendo o escalonamento:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 - a_1 + a_2 = 1 \\ 2a_0 + 4a_1 + 11a_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ 0 - 2a_1 + 0 = -1 \\ 0 + 2a_1 + 9a_2 = -6. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ 0 - 2a_1 + 0 = -1 \\ 0 + 0 + 96a_2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ 0 + a_1 + 0 = \frac{1}{7} \\ 0 + 0 + a_2 = \frac{-7}{9}. \end{cases}$$

E $a_0 = 2 - \frac{1}{2} + \frac{7}{9} = \frac{36-9+14}{18} = \frac{41}{18}$.

Logo,

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{41}{18} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ &= \frac{41}{18} + \frac{7}{10} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{6}x^2 \\ &= \frac{48}{18} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{6}x^2 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{6}x^2. \end{aligned}$$

Agora vamos determinar o polinômio interpolador para os pontos do Exemplo 2.4, desta vez usando os Polinômios de Legendre.

Exemplo 2.16. *Primeiramente escrevemos*

$$\begin{cases} a_0Le_0(x_0) & + & a_1Le_1(x_0) & + & a_2Le_2(x_0) & + & a_3Le_3(x_0) & = & f(x_0) \\ a_0Le_0(x_1) & + & a_1Le_1(x_1) & + & a_2Le_2(x_1) & + & a_3Le_3(x_1) & = & f(x_1) \\ a_0Le_0(x_2) & + & a_1Le_1(x_2) & + & a_2Le_2(x_2) & + & a_3Le_3(x_2) & = & f(x_2) \\ a_0Le_0(x_3) & + & a_1Le_1(x_3) & + & a_2Le_2(x_3) & + & a_3Le_3(x_3) & = & f(x_3). \end{cases}$$

Substituindo os respectivos valores obtemos,

$$\begin{cases} a_0 \cdot 1 & + & a_1 \cdot (-3) & + & a_2 \cdot (\frac{26}{3}) & + & a_3 \cdot (-\frac{126}{5}) & = & 0 \\ a_0 \cdot 1 & + & a_1 \cdot (0) & + & a_2 \cdot (-\frac{1}{3}) & + & a_3 \cdot (0) & = & -1 \\ a_0 \cdot 1 & + & a_1 \cdot (\frac{1}{2}) & + & a_2 \cdot (-\frac{1}{12}) & + & a_3 \cdot (-\frac{7}{40}) & = & \frac{1}{3} \\ a_0 \cdot 1 & + & a_1 \cdot (1) & + & a_2 \cdot (\frac{2}{3}) & + & a_3 \cdot (\frac{2}{5}) & = & 1. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} a_0 & - & 3a_1 & + & \frac{26}{3}a_2 & - & \frac{126}{5}a_3 & = & 0 \\ 0 & + & 3a_1 & - & 9a_2 & + & \frac{126}{5}a_3 & = & -1 \\ 0 & + & \frac{7}{2}a_1 & - & \frac{105}{12}a_2 & + & \frac{1001}{40}a_3 & = & \frac{1}{3} \\ 0 & + & 4a_1 & - & 8a_2 & + & \frac{128}{5}a_3 & = & 1. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} a_0 & - & 3a_1 & + & \frac{26}{3}a_2 & - & \frac{126}{5}a_3 & = & 0 \\ 0 & + & a_1 & - & 3a_2 & + & \frac{42}{5}a_3 & = & -\frac{1}{3} \\ 0 & + & 0 & + & \frac{7}{4}a_2 & - & \frac{35}{8}a_3 & = & \frac{3}{2} \\ 0 & + & 0 & + & 4a_2 & - & 8a_3 & = & \frac{7}{3}. \end{cases}$$

O que implica que,

$$\begin{cases} a_0 & - & 3a_1 & + & \frac{26}{3}a_2 & - & \frac{126}{5}a_3 & = & 0 \\ 0 & + & a_1 & - & 3a_2 & + & \frac{42}{5}a_3 & = & -\frac{1}{3} \\ 0 & + & 0 & + & a_2 & - & \frac{5}{2}a_3 & = & \frac{6}{7} \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 2a_3 & = & -\frac{23}{21}. \end{cases}$$

Finalmente, $a_3 = -\frac{23}{42}$, $a_2 = -\frac{43}{84}$, $a_1 = \frac{1147}{420}$ *e* $a_0 = -\frac{295}{252}$.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_0Le_0(x) + a_1Le_1(x) + a_2Le_2(x) + a_3Le_3(x) \\
&= -\frac{295}{252}\cdot 1 + \frac{1147}{420}\cdot x - \frac{43}{84}\cdot (x^2 - \frac{1}{3}) - \frac{23}{42}\cdot (x^3 - \frac{3}{5}x) \\
&= -\frac{295}{252} + \frac{43}{252} + \frac{1147}{420}x + \frac{69}{210}x - \frac{43}{84}x^2 - \frac{23}{42}x^3 \\
&= -1 + \frac{1285}{420}x - \frac{43}{84}x^2 - \frac{23}{42}x^3 \\
&= -1 + \frac{257}{84}x - \frac{43}{84}x^2 - \frac{23}{42}x^3.
\end{aligned}
$$

Mesmo sabendo que o polinômio interpolador é único nos sentimos intrigados e ao mesmo tempo curiosos para fazer os cálculos, na tentativa de encontrar um polinômio diferente. Depois dos procedimentos efetuados ficamos realmente realizados ao verificar que independente do método (aqui apresentado) usado nos exemplos, encontramos sempre o mesmo polinômio interpolador. Isso evidência a consistência das ideias de interpolação polinomial.

Para quem se interessar em aprofundar os estudos em alguma das formas de interpolação polinomial presentes neste trabalho temos as seguintes sugestões: A forma de Newton é utilizada para a analise de erro; A Forma de Lagrange é usada para dedução de cálculo aproximado de área (integral); A forma de Legendre é usado para fórmulas de quadratura e Polinômios de Chebyshev para integração numérica.

Naturalmente a forma do sistema pode ser diretamente aplicada ao ensino médio.

Todas as técnicas estão associados a precisão.

Capítulo 3

AJUSTE DE CURVAS PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Nem sempre a interpolação polinomial resolve os problemas de aproximação. Quando isso ocorre precisamos encontrar outra forma que nos leve a solução esperada.
Vejamos quando a interpolação polinomial não é indicada:

1. é preciso obter um valor aproximado da função em algum ponto fora do intervalo de tabelamento, isto é, quando se quer extrapolar;

2. os valores tabelados são resultados de algum experimento físico ou de alguma pesquisa, porque, nestes casos, estes valores poderão conter erros inerentes (próprios) que, em geral, não são previsíveis [15].

3. para os casos em que queremos aproximar sem ter os dados tabelados.

Para esses casos o método de aproximação mais utilizado é o dos Mínimos Quadrados. Faremos aqui apenas para o caso discreto que é o caso em que a função $f(x)$ se apresenta num quadro de valores, já no caso contínuo $f(x)$ é uma função contínua definida por uma expressão algébrica num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, [12].

3.1 Algumas Definições

Definição 3.1. *Diagrama de dispersão é a representação dos dados, como pontos no sistema cartesiano.*

A próxima definição é tirada de [17] página 35.

Definição 3.2. *Resíduo é o erro de ajuste no ponto* (x_i, y_i)*, sendo igual à soma dos quadrados das diferenças entre o valor da função escolhida em* x_i *e a ordenada* y_i*.*

De acordo com [9](página 76) O Método dos Mínimos Quadrados consiste em determinar uma função $g(x)$ que pode ser uma combinação linear de funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, entre outras, escolhidas a priori que melhor se aproxime de $f(x)$, em algum sentido, ou seja

$$f(x) \approx g(x) = \alpha_0 g_0(x) + \alpha_1 g_1(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x).$$

Devemos traçar um diagrama de dispersão dos pontos e observar o comportamento para escolher as funções que melhor ajustam à $f(x)$.

Assim, dados os pontos $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_m, f(x_m))$ e as n funções $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \ldots, g_n(x)$ escolhidas de alguma forma. Devemos encontrar os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que a função $\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$. Seja $d_i = f(x_i) - \varphi(x_i)$ o desvio em x_i. Este método consiste em escolher os $\alpha_i's$ de tal forma que $\sum_{i=1}^m d_i^2 = \sum_{i=1}^m [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2$ seja mínima. Logo os coeficientes α_i's que fazem com que $\varphi(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$, são os que minimizam a função

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{m} [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2.$$

Se o modelo ajustar exatamente aos dados o mínimo da função F será zero. Assim, devemos encontrar os pontos críticos de F, isto é os $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tais que

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \;\; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Logo,

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 2 \sum_{i=1}^{m} [f(x_i) - \alpha_1 g_1(x_i) - \ldots - \alpha_n g_n(x_i)] \cdot [-g_j(x_i)].$$

Então,

$$\sum_{i=1}^{m}[f(x_i) - \alpha_1 g_1(x_i) - \ldots - \alpha_n g_n(x_i)] \cdot [-g_j(x_i)] = 0, \;\; j = 1, 2, ..., n.$$

Assim,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}[f(x_i) - \alpha_1 g_1(x_i) - \ldots - \alpha_n g_n(x_i)] \cdot [-g_1(x_i)] = 0 \\ \sum_{i=1}^{m}[f(x_i) - \alpha_1 g_1(x_i) - \ldots - \alpha_n g_n(x_i)] \cdot [-g_2(x_i)] = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m}[f(x_i) - \alpha_1 g_1(x_i) - \ldots - \alpha_n g_n(x_i)] \cdot [-g_n(x_i)] = 0, \end{cases}$$

o que implica que

$$\begin{cases} [\sum_{i=1}^{m} g_1(x_i)g_1(x_i)]\alpha_1 + ... + [\sum_{i=1}^{m} g_n(x_i)g_1(x_i)]\alpha_n = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)g_1(x_i) \\ [\sum_{i=1}^{m} g_1(x_i)g_2(x_i)]\alpha_1 + ... + [\sum_{i=1}^{m} g_n(x_i)g_2(x_i)]\alpha_n = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)g_2(x_i) \\ \vdots \\ [\sum_{i=1}^{m} g_1(x_i)g_n(x_i)]\alpha_1 + ... + [\sum_{i=1}^{m} g_n(x_i)g_n(x_i)]\alpha_n = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)g_n(x_i). \end{cases}$$

E essas equações formam um sistema linear com n equações e n incógnitas: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. As equações deste sistema linear são chamadas equações normais, pois satisfazem a Definição 3.3, conforme [20].

Definição 3.3. *O sistema linear*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1, 2, 3, ..., n,$$

é denominado normal se:

1. A matriz dos coeficientes $A = (a_{ij})$ é simétrica, isto é: $a_{ij} = a_{ji}$;

2. A forma quadrática correspondente é definida positiva.

O sistema linear pode ser escrito na forma matricial $A \cdot X = B$, isto é,

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n = b_n, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $A = (a_{ij})$ é tal que

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)g_j(x_k) = a_{ji}. \tag{3.2}$$

Portanto a matriz A é simétrica. Também temos que

$$\begin{cases} X = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^t \\ B = [b_1, b_2, \dots, b_n]^t \\ b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)g_i(x_k). \end{cases} \tag{3.3}$$

Usando a notação de produto escalar o sistema normal $A \cdot X = B$ é expresso por

$A = (a_{ij}) = \langle \bar{g}_i, \bar{g}_j \rangle$ e $B = (b_{ij}) = \langle \bar{f}, \bar{g}_i \rangle$ onde $\bar{g}_l$ é o vetor $(g_l(x_1), g_l(x_2), \dots, g_l(x_m))^T$ e $\bar{f}$ o vetor $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m))^T$.

Se os vetores $\bar{g}_k$ forem linearmente independentes o determinante da matriz é diferente de zero e assim o sistema linear admite solução única. Esta solução é o ponto em que a função F atinge seu valor mínimo.

Exemplo 3.4. *Faremos agora o Exercício 2(dois) do Capítulo 6(seis) página 287(duzentos e oitenta e sete) de [15].*

Ajuste os dados abaixo pelo método dos mínimos quadrados utilizando:

a) uma reta;

b) uma parábola do tipo $ax^2 + bx + c$*;*

Trace as duas curvas no gráfico de dispersão dos dados. Como você compararia as duas curvas em relação aos dados?

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,5	0,6	0,9	0,8	1,2	1,5	1,7	2

Tabela 3.1: Pontos do Exemplo 3.4

Resolução do item a):

$f(x) \approx F(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$, $g_1(x) = 1$ *e* $g_2(x) = x$, *n é o número de funções e m é a quantidade de pontos. Nesse caso* $n = 2$ *e* $m = 8$.

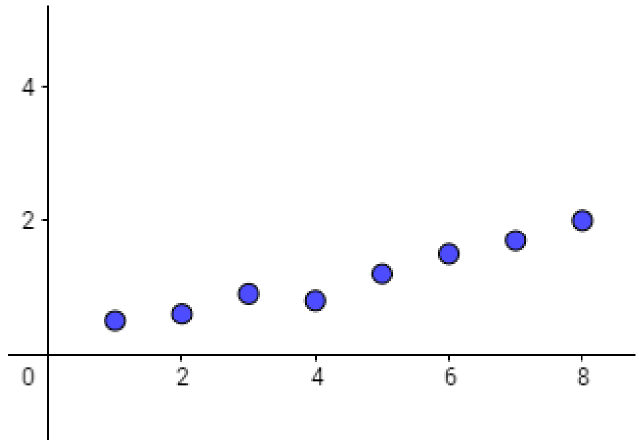

Figura 3.1: Diagrama de Dispersão do Exemplo 3.4

Utilizando (3.2), temos

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \sum_{k=1}^{8} g_1(x_k)\cdot g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{8} 1\cdot 1 = 8\\
a_{12} &= a_{21} = \sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)\cdot g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k\cdot 1 = 36\\
a_{22} &= \sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)\cdot g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k\cdot x_k = \sum_{k=1}^{8}(x_k)^2 = 204.
\end{aligned}$$

Por (3.3) obtemos

$$\begin{aligned}
b_1 &= \sum_{k=1}^{8} f(x_k)\cdot g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{8} f(x_k)1\cdot 1 = 9,2\\
b_2 &= \sum_{k=1}^{8} f(x_k)\cdot g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} f(x_k)1\cdot x_k = 50,5.
\end{aligned}$$

Sendo assim o sistema é:

$$\begin{cases} 8\alpha_1 + 36\alpha_2 = 9,2\\ 36\alpha_1 + 204\alpha_2 = 50,5. \end{cases} \tag{3.4}$$

Resolvendo o sistema em (3.4), por comparação temos:

$$\alpha_1 = \frac{9,2 - 36\alpha_2}{8} = \frac{50,5 - 204\alpha_2}{36}.$$

Logo,

$$331,2 - 1296\alpha_2 = 404 - 1632\alpha_2.$$

Então $\alpha_2 = 0,216666$, *e assim determinamos que* $\alpha_1 = 0,175003$ *e portanto,*

$$F(x) = 0,175003 + (0,216666)x.$$

Resolução do item b):

$f(x) \approx F(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$ $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$ *e* $g_3(x) = x^2$. *Agora a matriz A é de ordem 3, a matriz B é 3 por 1. Lembrando que agora* $n = 3$. *Utilizando (3.2), temos*

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \sum_{k=1}^{8} g_1(x_k)\cdot g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{8} 1\cdot 1 = 8 \\
a_{12} &= a_{21} = \sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)\cdot g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k \cdot 1 = 36 \\
a_{13} &= a_{31} = \sum_{k=1}^{8} g_1(x_k)\cdot g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{8} 1\cdot (x_k)^2 = 204 \\
a_{22} &= \sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)\cdot g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k \cdot x_k = \sum_{k=1}^{8} (x_k)^2 = 204 \\
a_{23} &= a_{32} = \sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)\cdot g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k \cdot (x_k)^2 = \sum_{k=1}^{8} (x_k)^3 = 1296 \\
a_{33} &= \sum_{k=1}^{8} g_3(x_k)\cdot g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{8} (x_k)^2 \cdot (x_k)^2 = 8772.
\end{aligned}$$

Por (3.3) obtemos

$$\begin{aligned}
b_1 &= \sum_{k=1}^{8} f(x_k)\cdot g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{8} f(x_k)\cdot 1 = 9,2 \\
b_2 &= \sum_{k=1}^{8} f(x_k)\cdot g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} f(x_k)\cdot x_k = 50,5 \\
b_3 &= \sum_{k=1}^{8} f(x_k)\cdot g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{8} f(x_k)\cdot (x_k)^2 = 319,1.
\end{aligned}$$

Sendo assim o sistema é:

$$\begin{cases}
8\alpha_1 + 36\alpha_2 + 204\alpha_3 = 9,2 \\
36\alpha_1 + 204\alpha_2 + 1296\alpha_3 = 50,5 \\
204\alpha_1 + 1296\alpha_2 + 8772\alpha_3 = 319,1.
\end{cases} \tag{3.5}$$

Resolvendo o sistema em (3.5), por escalonamento:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \frac{9}{2}\alpha_2 + \frac{51}{2}\alpha_3 = 1,15 \\ 0 + 42\alpha_2 + 378\alpha_3 = 9,1 \\ 0 + 378\alpha_2 + 3570\alpha_3 = 84,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \frac{9}{2}\alpha_2 + \frac{51}{2}\alpha_3 = 1,15 \\ 0 + \alpha_2 + 9\alpha_3 = \frac{9,1}{42} \\ 0 + 0 + 168\alpha_3 = 2,6. \end{cases}$$

Determinamos que $\alpha_1 = 0,407143$*,* $\alpha_2 = 0,077380$ *e* $\alpha_3 = 0,015476$.

Portanto,

$$F(x) = 0,407143 + (0,077380)x + (0,015476)x^2.$$

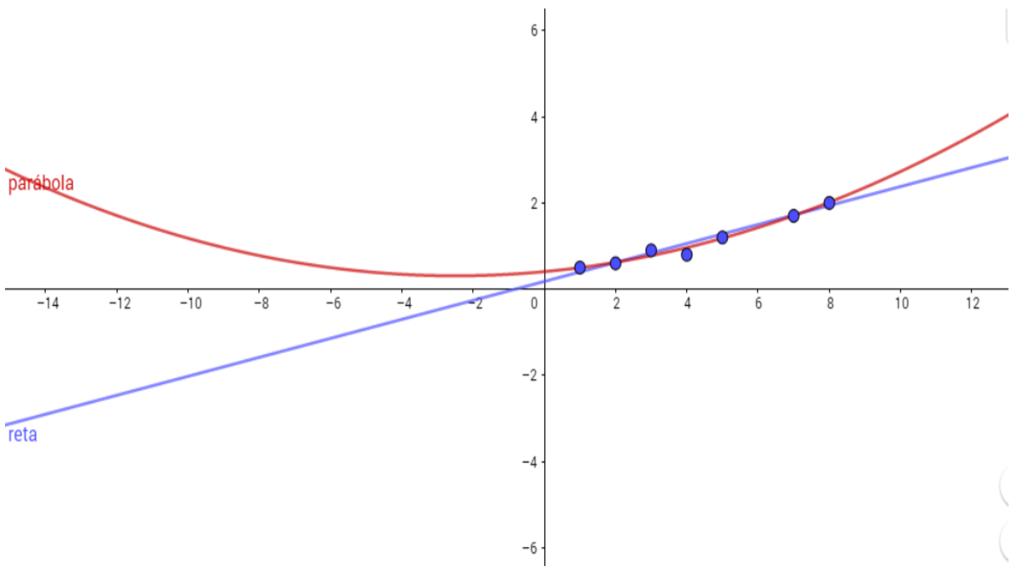

Figura 3.2: Curvas Do Exemplo 3.4

Observando as duas curvas na Figura 3.2 notamos que elas se aproximam satisfatoriamente da função dada, no entanto a parábola passa por mais pontos, o que dá a impressão de que ela se aproxima mais da referida função.

Exemplo 3.5. *Faremos agora o Exercício 3 (três) do Capítulo 6 (seis) página 288 (duzentos e oitenta e oito) de [15].*

Dada a tabela abaixo, faça o gráfico de dispersão dos dados e ajuste uma curva da melhor maneira possível:

x	0.5	0.75	1	1.5	2.0	2.5	3.0
y	-2.8	-0,6	1	3.2	4.8	6.0	7.0

Tabela 3.2: Pontos do Exemplo 3.5

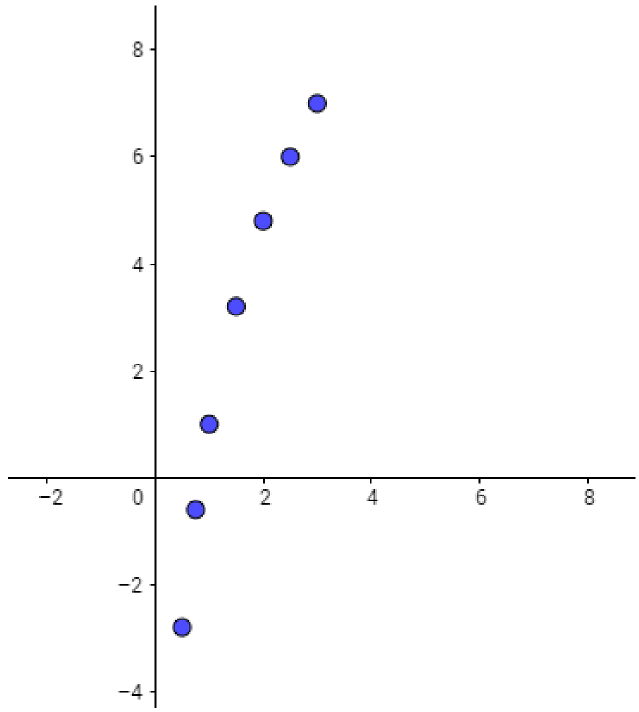

Figura 3.3: Diagrama de Dispersão do Exemplo 3.5

Pelo diagrama de dispersão $f(x) \approx F(x) = \alpha_2 \ln x + \alpha_1$, *e assim,* $g_1(x) = 1$ *e* $g_2(x) = \ln x$. *Utilizando (3.2), temos:*

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \sum_{i=1}^{7} g_1(x_k) \cdot g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{7} 1 \cdot 1 = 7 \\
a_{12} = a_{21} &= \sum_{k=1}^{7} g_2(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{7} \ln(x_k) \cdot 1 \\
&= -0.693147 - 0.287682 + 0 + 0.405465 + 0.693147 + 0.916290 + 1.098612 \\
&= 2.132685
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{22} &= \sum_{k=1}^{7} g_2(x_k)g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{7}[\ln(x_k)]^2 \\
&= [-0.693147]^2 + [-0.287682]^2 + 0^2 + [0.405465]^2[0.693147]^2 \\
&\quad +[0.916290]^2 + [1.098612]^2 \\
&= 3.2546.
\end{aligned}$$

E de (3.3) obtemos,

$$\begin{aligned}
b_1 &= \sum_{k=1}^{7} f(x_k)g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{7} f(x_k)\cdot 1 \\
&= -2.8 + (-0.6) + 1 + 3.2 + 4.8 + 6 + 7 \\
&= 18.6 \\
b_2 &= \sum_{k=1}^{7} f(x_k)g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{7} f(x_k)\cdot \ln(x_k) \\
&= (-2.8)\cdot(-0.693147) + (-0.6)\cdot(-0.287682) + 1\cdot 0 + 3.2\cdot(0.405465) \\
&= 4.8\cdot(0.693147) + 6\cdot(0.916290) + 7\cdot(1.098612) \\
&= 19.926037.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} 7\alpha_1 + 2.132685\alpha_2 = 18.6 \\ 2.132685\alpha_1 + 3.2546\alpha_2 = 19.926037. \end{cases}$$

Daí, pelo método da substituição obtemos,

$$\alpha_1 = \frac{18.6 - 2.132685\alpha_2}{7}.$$

Logo,

$$\frac{39.667941}{7} - \frac{4.548345}{7}\alpha_2 + 3.2546\alpha_2 = 19.926037 \Leftrightarrow \alpha_2 = 5.474119.$$

E assim,

$$\alpha_1 = \frac{18.6 - 11.674571}{7} = \frac{6.925429}{7} = 0.989347.$$

Portanto a expressão encontrada para a nossa função é

$$F(x) = 5.474119\ln x + 0.989347.$$

Voltemos ao GeoGebra e traçamos essa curva para analisar a interpolação.

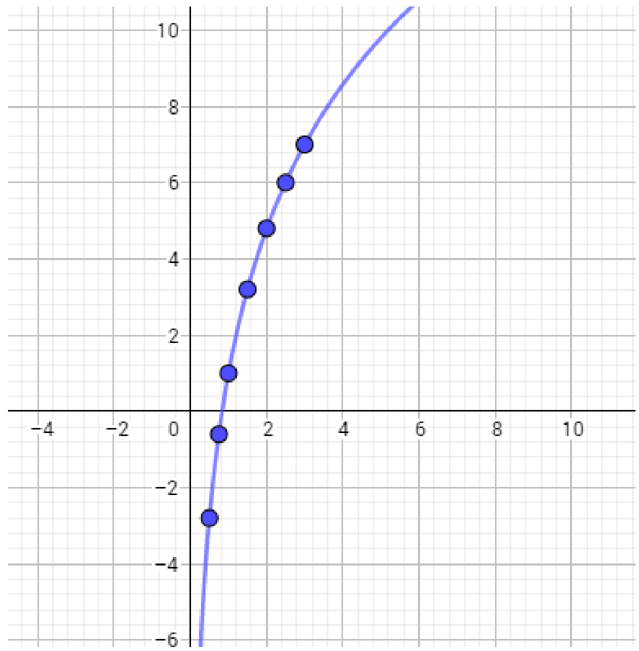

Figura 3.4: Curva do Exemplo 3.5

Capítulo 4

APLICAÇÕES

Agora resolveremos alguns problemas, de modelagem matemática aplicando interpolação polinomial e aproximação de funções pelo Método dos Mínimos Quadrados.

Qualquer método de interpolação polinomial aplicado nos dará o polinômio. Sendo que o melhor método para trabalhar com os alunos dos níveis fundamental e médio é o da resolução do Sistema.

Problema 4.1. *Interpolar, utilizando os Polinômios de Chebyshev e ajustar pelo método dos mínimos quadrados a uma função polinomial os dados do consumo de água, em metros cúbicos, referentes aos meses de outubro de 2017 à janeiro de 2018 (4 (quatro) meses) de um consumidor (residencial) da cidade de Maringá no Paraná. Seja os meses os x_i e o consumo as $f(x_i)$.*

mês	1	2	3	4
Consumo (m^3)	6	7	7	8

Tabela 4.1: Pontos do Exemplo 4.1

Assim se $p(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + a_3T(x)$.
Com $p(x_0) = f(x_0)$, $p(x_1) = f(x_1)$, $p(x_2) = f(x_2)$ *e* $p(x_3) = f(x_3)$. *Temos:*

$$\begin{cases} a_0T_0(x_0) + a_1T_1(x_0) + a_2T_2(x_0) + a_3T_3(x_0) = f(x_0) \\ a_0T_0(x_1) + a_1T_1(x_1) + a_2T_2(x_1) + a_3T_3(x_1) = f(x_1) \\ a_0T_0(x_2) + a_1T_1(x_2) + a_2T_2(x_2) + a_3T_3(x_2) = f(x_2) \\ a_0T_0(x_2) + a_1T_1(x_3) + a_2T_2(x_3) + a_3T_3(x_3) = f(x_3). \end{cases}$$

Esse sistema, fica:

$$\begin{cases} a_0 \cdot 1 & + & a_1 \cdot 1 & + & a_2 \cdot 1 & + & a_3 \cdot 1 & = & 6 \\ a_0 \cdot 1 & + & a_1 \cdot 2 & + & a_2 \cdot 7 & + & a_3 \cdot 26 & = & 7 \\ a_0 \cdot 1 & + & a_1 \cdot 3 & + & a_2 \cdot 17 & + & a_3 \cdot 99 & = & 7 \\ a_0 \cdot 1 & + & a_1 \cdot 4 & + & a_2 \cdot 31 & + & a_3 \cdot 244 & = & 8. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos:

$$\begin{cases} a_0 = 0,75 \\ a_1 = 6,416666 \\ a_2 = -1,25 \\ a_3 = 0,083333. \end{cases}$$

Logo

$$\begin{aligned} p(x) &= 0,75 + 6,416666x - 1,25(2x^2 - 1) + 0,083333(4x^3 - 3x) \\ &= 0,75 + 1,25 + 6,416666x - 0,249999x - 2,5x^2 + 0,333332x^3 \\ &= 2 + 6,166667x - 2,5x^2 + 0,333332x^3. \end{aligned}$$

Não pode haver nenhum ponto fora da curva que representa o polinômio interpolador. Se isso acontecer refaça os cálculos, até que todos os pontos estejam na curva do polinômio interpolador.

Um esboço do gráfico, feito no Geogebra, do polinômio que interpola o consumo de água da nossa amostra residencial se encontra na Figura 4.1.

Pelo Método dos mínimos quadrados seja $\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$. *Então* $g_1(x) = 1$ *e* $g_2(x) = x$.

$a_{11} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) \cdot g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} 1 \cdot 1 = 4;$

$a_{12} = a_{21} \sum_{k=1}^{4} g_2(x_k) \cdot g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k \cdot 1 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10;$

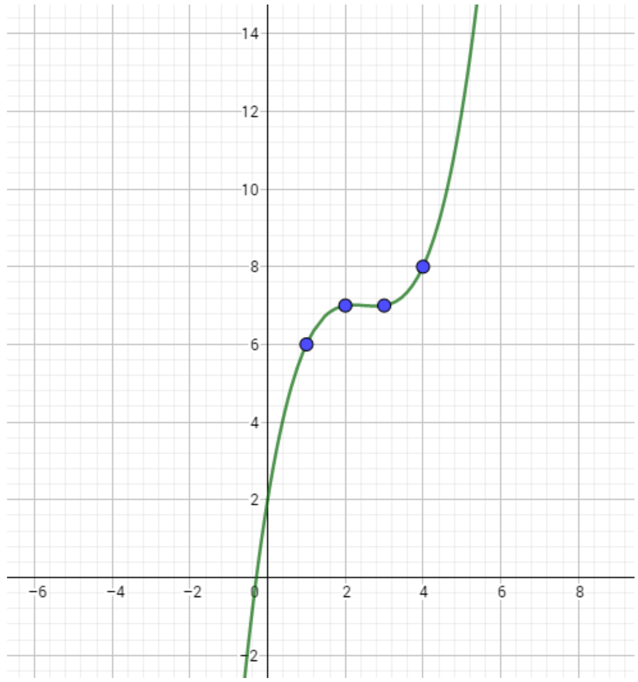

Figura 4.1: Diagrama de Dispersão e Polinômio Interpolador do Exemplo 4.1

$a_{22} = \sum_{k=1}^{4} g_2(x_k) \cdot g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k \cdot x_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

$b_1 = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) \cdot g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) \cdot 1 = 6 + 7 + 7 + 8 = 28$

$b_2 = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) \cdot g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) \cdot x_k = 6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 73$

Escrevendo o sistema:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 10\alpha_2 = 28 \\ 10\alpha_1 + 30\alpha_2 = 73, \end{cases} \tag{4.1}$$

Então os coeficientes $\alpha_i s$ tais que φ se aproxime da f são: $\alpha_2 = \frac{3}{5}$ *e* $\alpha_1 = \frac{11}{2}$

Logo $\varphi(x) = \frac{11}{2} + \frac{3x}{5}$

O gráfico dessa reta (função polinomial) se encontra na Figura 4.2.

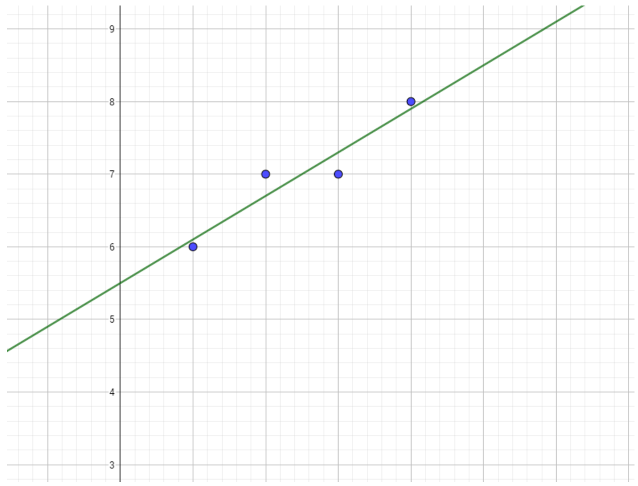

Figura 4.2: Diagrama de Dispersão e reta do Consumo de Água da Residência

Retirando um ponto, ou seja, considerando o seguinte consumo em cada mês, $(1, 6)$, $(2, 7)$, $(3, 8)$ *e fazendo a aproximação, utilizando Mínimos Quadrados, para* $\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$*, temos* $g_1(x) = 1$ *e* $g_2(x) = x$*. Logo*

$a_{11} = \sum_{k=1}^{3} g_1(x_k) \cdot g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{3} 1 \cdot 1 = 3;$

$a_{12} = a_{21} \sum_{k=1}^{3} g_2(x_k) \cdot g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{3} x_k \cdot 1 = 1 + 2 + 3 = 6;$

$a_{22} = \sum_{k=1}^{3} g_2(x_k) \cdot g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{3} x_k \cdot x_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

$b_1 = \sum_{k=1}^{3} f(x_k) \cdot g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{3} f(x_k) \cdot 1 = 6 + 7 + 8 = 21$

$b_2 = \sum_{k=1}^{3} f(x_k) \cdot g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{3} f(x_k) \cdot x_k = 6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 44$

Escrevendo o sistema:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 6\alpha_2 = 21 \\ 6\alpha_1 + 14\alpha_2 = 44. \end{cases} \tag{4.2}$$

Então os coeficientes α_i*s tais que* φ *se aproxime da* f *são:* $\alpha_2 = 1$ *e* $\alpha_1 = 5$.

Logo $\varphi(x) = 5 + x$.

Com a retirada de um ponto a reta passa por todos os pontos, o que não acontecia com a reta obtida anteriormente, pelo mesmo método. Observando as Figuras 4.2 e 4.3 podemos ver essa diferença.

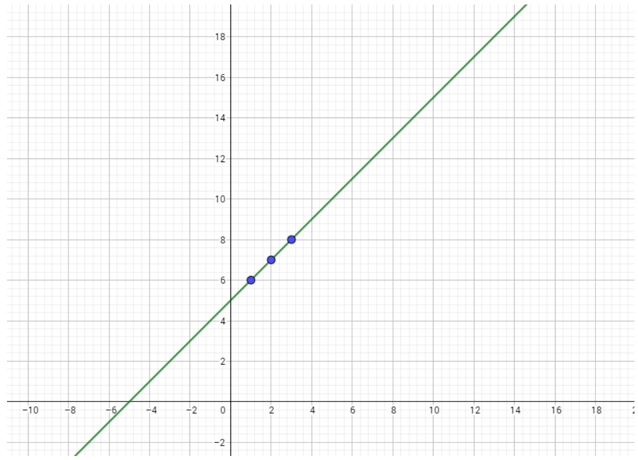

Figura 4.3: Diagrama de Dispersão e reta do Consumo de Água da Residência, após a retirada de um ponto.

Problema 4.2. *Pela definição, determinar, qual o polinômio que interpola um consumo de água, em metros cúbicos, durante 5 (cinco) meses (de outubro de 2017 à fevereiro de 2018) de um colégio da mesma cidade.Tomemos os valores do consumo de água do colégio, sendo os meses os* x_i *e o consumo as* $f(x_i)$.

mês	1	2	3	4	5
Consumo (m^3)	537	629	608	383	468

Tabela 4.2: Pontos do Exemplo 4.2

Assim se $p(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + a_3T(x) + a_4T(x)$.
Com $p(x_0) = f(x_0)$, $p(x_1) = f(x_1)$, $p(x_2) = f(x_2)$,$p(x_3) = f(x_3)$ *e* $p(x_4) = f(x_4)$. *Temos:*

$$\begin{cases} a_0T_0(x_0) + a_1T_1(x_0) + a_2T_2(x_0) + a_3T_3(x_0) + a_4T_4(x_0) = f(x_0) \\ a_0T_0(x_1) + a_1T_1(x_1) + a_2T_2(x_1) + a_3T_3(x_1) + a_4T_4(x_1) = f(x_1) \\ a_0T_0(x_2) + a_1T_1(x_2) + a_2T_2(x_2) + a_3T_3(x_2) + a_4T_4(x_2) = f(x_2) \\ a_0T_0(x_3) + a_1T_1(x_3) + a_2T_2(x_3) + a_3T_3(x_3) + a_4T_4(x_3) = f(x_3) \\ a_0T_0(x_4) + a_1T_1(x_4) + a_2T_2(x_4) + a_3T_3(x_4) + a_4T_4(x_4) = f(x_4). \end{cases}$$

Esse sistema, fica:

$$\begin{cases} a_0 \cdot 1 & + & a_1 \cdot 1 & + & a_2 \cdot 1 & + & a_3 \cdot 1 & + & a_4 \cdot 1 & = & 537 \\ a_0 \cdot 1 & + & a_1 \cdot 2 & + & a_2 \cdot 7 & + & a_3 \cdot 26 & + & a_4 \cdot 97 & = & 629 \\ a_0 \cdot 1 & + & a_1 \cdot 3 & + & a_2 \cdot 17 & + & a_3 \cdot 99 & + & a_4 \cdot 577 & = & 608 \\ a_0 \cdot 1 & + & a_1 \cdot 4 & + & a_2 \cdot 31 & + & a_3 \cdot 244 & + & a_4 \cdot 1921 & = & 383 \\ a_0 \cdot 1 & + & a_1 \cdot 5 & + & a_2 \cdot 49 & + & a_3 \cdot 485 & + & a_4 \cdot 4801 & = & 468. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos:

$$\begin{cases} a_0 = 1495,848958 \\ a_1 = -1366,1875 \\ a_2 = 471 \\ a_3 = -66,8125 \\ a_4 = 3,151042. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} p(x) &= 1495,848958 - 1366,1875x + 471(2x^2 - 1) - 66,8125(4x^3 - 3x) \\ &\quad +3,151042(8x^4 - 8x^2 + 1) \\ &= 1495,848958 - 471 + 3,151042 - 1366,1875x + 200,4375 + 942x^2 \\ &\quad -25,208336x^2 - 267,25x^3 + 25,208336x^4 \\ &= 1028 - 1165,75x + 916,791664x^2 - 267,25x^3 + 25,208336x^4. \end{aligned}$$

Agora vamos interpolar os valores tomados da medição do consumo de energia elétrica de outra residência de Maringá. Anotamos o consumo em kwh de outubro de 2017 à fevereiro de 2018. Desta vez usaremos a interpolação polinomial como em (2.1).

Problema 4.3. *Obter o polinômio que interpole o consumo de energia conhecendo os pontos:* $f(1) = 229, f(2) = 251,$ $f(3) = 247,$ $f(4) = 266$ *e* $f(5) = 228.$ $(n = 4)$. *Iremos interpolar esta função por um polinômio* p *de grau menor ou igual a 4 (quatro), pois conhecemos 5 (cinco) pontos. Se* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, *montamos o sistema*

$$\begin{cases} p(1) = a_0 - a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 229 \\ p(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 251 \\ p(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 = 247 \\ p(4) = a_0 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 = 266 \\ p(5) = a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 + 625a_4 = 228. \end{cases}$$

Escalonando esse sistema obtemos:

$a_4 = \frac{-129}{24}$, $a_3 = \frac{743}{12}$, $a_2 = \frac{-2001}{8}$, $a_1 = \frac{5035}{12}$ *e* $a_0 = 3$

Portanto,

$$p(x) = 3 + \frac{5035}{12}x - \frac{2001}{8}x^2 + \frac{743}{12}x^3 - \frac{129}{24}x^4,$$

é o polinômio que interpola o consumo de energia desta residência em kwh, no período citado acima.

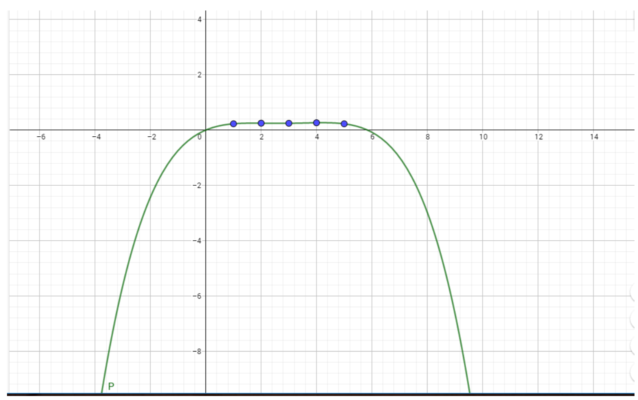

Figura 4.4: Diagrama de Dispersão e Polinômio Interpolador do Exemplo 4.3

Foram bem satisfatórios os resultados que encontramos para a interpolação polinomial utilizada para descrever o consumo de água, em metros cúbicos, de uma residência e também do colégio. Os dados da residência correspondem ao consumo durante quatro meses seguidos, os dados do colégio correspondem ao consumo durante cinco meses seguidos. O que gerou para o primeiro caso um polinômio de terceiro grau e para o outro caso um polinômio de quarto grau. Diante dos resultados satisfatórios aplicamos a modelagem matemática também para interpolar o consumo de energia elétrica, em kwh, de outra residência. Desta vez pegamos os valores referentes ao consumo durante cinco meses.

Tais atividades extrapolam alguns conteúdos de ensino médio, no entanto, seus modelos e elementos envolvidos no processo de resolução são banais. Dessa forma, a temática promove ilustrações motivadoras de verdadeiras aplicações de matemática.

Capítulo 5

CONCLUSÃO

Neste trabalho mostramos um pouco de Equações Algébricas e Polinômios. O estudo das equações algébricas foi voltado à determinação de suas raízes, quando existirem. Definimos Polinômios e as quatro operações básicas que podemos fazer com eles. Também definimos Espaço Vetorial e Bases, pois a Interpolação polinomial consiste em escrever a função dada como combinação linear de polinômios. Depois de apresentar a interpolação polinomial de funções apresentamos a aproximação de funções pelo Método dos Mínimos Quadrados e encerramos o trabalho com a resolução de alguns problemas de modelagem matemática para mostrar a aplicabilidade do que foi estudado. Sendo a nossa aplicação feita num contexto pratico. Pois as interpolações são usadas para determinar aproximações dentro de um intervalo definido ou conhecido, enquanto o método de quadrados permite extrapolação, ou seja, permite que se tenha uma estimativa do valor da função para pontos fora do intervalo utilizado.

Com os estudos realizados neste trabalho concluímos que as respostas para as perguntas questionadoras dos alunos surgem quando o professor tem a possibilidade de investigar e aplicar o assunto, dando a devida importância para a modelagem matemática. Uma dessas aplicações se encontra aqui, a interpolação.

Chegamos à conclusão de que a interpolação polinomial é uma forma simples de obter modelos polinomiais relacionados a precisão. Sendo que, para aproximar uma função utilizando polinômios, em todas as formas apresentadas no decorrer deste trabalho que são: interpolação polinomial, interpolação pelos polinômios de Legendre, pelos de Chebyshev, pelos de Lagrange e o Método de Newton (utilizando diferenças divididas) encontramos o mesmo polinômio, pois ele é único, que faz a modelagem matemática esperada (se os cálculos ficarem árduos dá para usar recursos tecnológicos). Quando interpolamos estamos fazendo a combinação dos polinômios, determinando quais são os coeficientes que devem multiplicar os polinômios que representam a base da forma utilizada. E quase todos esses métodos, que expusemos, recaem na resolução de um sistema linear.

Também podemos concluir que a aproximação utilizando os Mínimos Quadrados é uma alternativa para a interpolação quando esta não é possível ou não nos daria resultados satisfatórios.

Nos exemplos de interpolação resolvidos no decorrer deste trabalho, o Método de Newton mostrou-se um pouco laborioso, porque tem uma quantidade razoável de fórmulas para os cálculos das diferenças divididas, já nos polinômios de Legendre os cálculos ficaram exaustivos em virtude das frações com valores altos nos denominadores. No entanto, nenhum desses fatores priva o pesquisador de alcançar o seu objetivo, muito pelo contrário, uma vez que atingindo o resultado esperado isso lhe dará mais regozijo.

Em suma, o conhecimento adquirido pelo professor de sala de aula sempre contribui para uma melhora na qualidade do ensino. Em virtude disso, reconhecemos que estudar e se aprimorar deve fazer parte do cotidiano de todo professor, principalmente do de matemática, disciplina que quando encanta é para sempre!

Referências

[1] BOYER, CARL B. *História da Matemática* tradução Elza F. Gomide, Edgard Blucher, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1974.

[2] EVES, HOWARD, *Introdução à História da Matemática*, tradução Hygino H. Domingues, Editora da Unicamp, Campinas, São Paulo, 2011, 5^a Ed. .

[3] FERREIRA, AURÉLIO BUARQUE DE HOLANDA, *Míni Aurélio: O Dicionário da Língua Portuguesa*, Editora Positivo, Curitiba, Paraná, 2010 8^a Ed.

[4] HOFFMAN, K., KUNZE, R. *Álgebra Linear*, tradução de Adalberto Panobianco Bergamasco, Editora Polígono (Editora da Universidade de São Paulo), São Paulo, 1971.

[5] IEZZI, GELSON, MURAKAMI, Carlos, DOLCE, Osvaldo e HAZZAN Samuel, *Fundamentos da Matemática Elementar*, Atual Editora, São Paulo, 1977.

[6] GABETTA JUNIOR, ANTÔNIO MARCOS, *Aproximação de Funções por Interpolação: Método de Lagrange*, Dissertação, Universidade Estadual de Campinas Unicamp, Campinas, 2015.

[7] LIMA, ELON, LAGES, *A Equação do terceiro Grau*, Artigo, Coleção Matemática Universitária, n°5, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, junho de 1987, 9-23.

[8] LIMA, ELON, LAGES, *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 1998.TERCEIRA EDIÇÃO.

[9] MARQUES, VANESSA PRISCILA NICOLUSSI, *Polinômios e Aproximações de Função*, Instituto de ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo USP, São Paulo, 2017, PROFMAT.

[10] MARTINS, FLÁVIO INÁCIO DA SILVEIRA, *Modelagem de Funções via Interpolação Polinomial de Lagrange*, Universidade Federal de Goiás, Jataí, GO, 2017.

[11] MARTINS, JAMERSON FERNANDO CONFORT, *Determinantes, Propriedades e Métodos de Condensação*, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, PROFMAT, 2015.

[12] MONTEIRO, AGOSTINHO JORGE TAVARES, *Otimização Não Linear de Mínimos Quadrados*, Universidade de Aveiro, 2013.

[13] PERUZZO, JUCIMAR, *Evolução dos Métodos de Resolução de Equações Algébricas*, primeira edição, Disponível em: www.https://books.google.com.br/, Irani-SC 2013, Acesso em 09/06/17.

https://books.google.com.br/books/about/Evolu

[14] PESSOA, FERNANDA DINIZ, *Polinômios: Raízes e Utilidade para Métodos Numéricos*, Universidade Federal de São João Del-Rei UFSJ Campos Alto Paraopeba-CAP, PROFMAT, 2015.

[15] RUGGIERO, MÁRCIA A. GOMES e LOPES, VERA LÚCIA DA ROCHA, *Cálculo Numérico Aspectos Teóricos e Computacionais*, segunda edição, Departamento de Matemática Aplicada IMECC-UNICAMP, Pearson Makron Books, São Paulo.

[16] SILVA, ALESSANDRO SILVA SANTOS, *Ajuste de Curvas por Polinômios com foco no Currículo do Ensino Médio*, Unicamp, Campinas, 2015, PROFMAT.

[17] SANTOS, REGINALDO DE JESUS, *Polinômios de Legendre*, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001. Disponível em: www.mat.ufmg.br/ regi/gaalt/polleg.pdf. Acessado em: 06/08/2017 às 23:58 regi@mat.ufmg.br

[18] SPERANDIO, DÉCIO, SILVA, LUIZ HENRY MONKEN e MENDES, JOÃO TEIXEIRA, *Cálculo Numérico - Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos*, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2003.

[19] SCHUVAAB, JAIR LUIS, *Resolução de Equações Algébricas até Quarto Grau: Uma Abordagem Histórica*, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013, PROFMAT.

[20] WANDRESEN, ROMUALDO, *Métodos Iterativos para a Solução de Sistemas de Equações Normais*, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1980.