UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Grupos de Friso

Ana Paula Inforsato

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli

2018

512.2 Inforsato, Ana Paula
I43g Grupos de friso / Ana Paula Inforsato. - Rio Claro, 2018
66 f. : il., figs., fots.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Elíris Cristina Rizziolli

1. Teoria dos grupos. 2. Grupos de friso. 3. Transformações geométricas. 4. Isometrias. 5. Simetrias. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP - Ana Paula Santulo C. de Medeiros / CRB 8/7336

TERMO DE APROVAÇÃO

Ana Paula Inforsato

Grupos de Friso

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli
Orientadora

Profa. Dra. Daiane Alice Henrique Ament
Departamento de Matemática- UFSCar

Prof. Dr. Thiago de Melo
Departamento de Matemática - IGCE-UNESP

Rio Claro, 04 de Maio de 2018

Ao meu noivo, minha mãe e minha irmã.

Agradecimentos

A Deus, que tornou tudo possível.

À minha orientadora Elíris Cristina Rizziolli pela infinita dedicação e paciência durante as orientações e também durante as aulas do PROFMAT.

À minha mãe pelo apoio incondicional para a realização desse mestrado e de tantos outros sonhos nos quais sempre esteve presente, não permitindo que eu desanimasse.

Ao meu noivo por todo amor, paciência e por estar sempre ao meu lado, me incentivando a buscar sempre mais.

À minha irmã que me inspira como profissional e que me faz querer ser cada vez melhor.

Às minhas amigas de curso, Flávia e Fernanda, pela parceria durante esses anos, pelas inúmeras horas de estudo e também pelos momentos de descontração.

A todos que de alguma forma contribuiram para a conclusão desse projeto.

Educação não transforma o mundo.
Educação transforma pessoas.
Pessoas transformam o mundo.
Paulo Freire

Resumo

Neste trabalho tratamos da classificação dos grupos de friso. Para realizar este objetivo abordamos elementos básicos da estrutura algébrica de grupo bem como apresentamos transformações geométricas, entre estas destacamos: translações, reflexões, rotações e reflexão com deslizamento. Além disso, localizamos este assunto como tópico da estrutura curricular do Ensino Fundamental e executamos uma atividade em sala de aula em que os alunos criaram frisos ornamentais.

Palavras-chave: Grupos de Friso, Transformações geométricas, Isometrias, Simetrias.

Abstract

In this work we deal with the classification of frieze groups. In order to accomplish this objective we approach basic elements of the algebraic group structure as well as present geometric transformations, among which we highlight: translations, reflections, rotations and glide reflection. In addition, we locate this subject as a topic of the curricular structure of Elementary School and perform a classroom activity in which the students created ornamental friezes.

Keywords: Frieze Groups, Geometric Transformations, Isometries, Symmetries.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho usamos [1] como referência principal.

O nosso objetivo é mostrar a classificação dos grupos de friso. Para isso, iniciamos tratando de grupos e algumas de suas propriedades. Em seguida, apresentamos as definições e propriedades de algumas transformações geométricas, a saber: translações, reflexões e rotações; fazemos um estudo sobre as propriedades obtidas a partir da composição dessas transformações, sua paridade e pontos fixos, para assim conseguirmos definir mais uma transformação utilizada: a reflexão com deslizamento e então demonstrarmos o teorema principal, que mostra que existem apenas sete grupos de friso e como cada um deles é gerado. Para finalizar, apresentamos uma atividade desenvolvida com alunos do ensino fundamental, que consistia em fazê-los criar frisos ornamentais.

Este trabalho está organizado como segue.

O segundo capítulo trata de noções básicas de grupo, através da sua definição, exemplos e propriedades, além disso, nesse capítulo também trabalhamos o conceito de subgrupo e grupo cíclico.

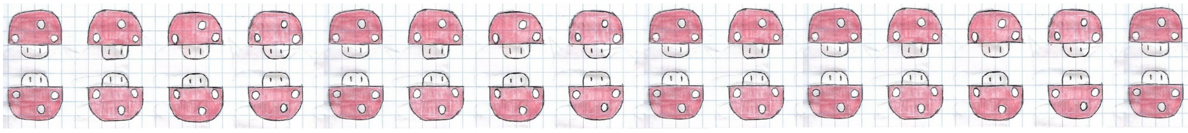
No terceiro capítulo vamos apresentar as notações, definições e os resultados que serão utilizados no capítulo seguinte. Para isso já admitimos sabidas noções básicas da Geometria Euclidiana, a saber, noções de ponto, plano, reta, segmento, ponto médio, raio, triângulo, ângulo, medida angular, coeficiente angular de retas, paralelismo e perpendicularismo entre retas, bem como suas notações. Para mais informações consulte [4]. A primeira seção desse capítulo apresenta todas as definições necessárias; a segunda seção trata sobre as Colineações e mostra que todas as transformações geométricas formam um grupo, denotado por $\mathcal{G}$, e o conjunto de todas as colineações é um subgrupo de $\mathcal{G}$; a terceira seção traz as propriedades das Translações, e tem como resultado final que o conjunto das translações, com a operação composição, formam um grupo abeliano; a próxima seção apresenta as propriedades das Meias-Voltas e mostra que o grupo gerado por elas contém apenas meias-voltas e translações; a quinta seção aborda as Reflexões e mostra, entre outras coisas, que as reflexões são isometrias; a seção seguinte fala sobre as Isometrias e apresenta várias propriedades relacionando isometrias e reflexões; a oitava seção traz os resultados sobre as Rotações e mostra que assim como as translações, o conjunto das rotações com a operação composição também formam um grupo abeliano; para finalizar esse capítulo apresentamos as Reflexões com Deslizamento, mas para tanto faz-se necessário estabelecer relações importantes entre as transformações que apareceram anteriormente estudando seus pontos fixos e paridade.

No quarto capítulo vamos apresentar a demonstração do teorema central desse trabalho, que classifica os sete grupos de friso existentes.

O quinto capítulo traz a aplicação que foi feita em uma sala de oitavo ano de uma escola pública de Rio Claro e fotos dos trabalhos realizados pelos alunos.

No sexto capítulo vamos apresentar a conclusão deste trabalho e da experiência realizada em sala de aula.

Ao longo do texto utilizamos inúmeras figuras para ilustrar e facilitar o entendimento do leitor. As figuras 3.1, 3.2, de 3.4 a 3.10 e de 4.3 a 4.9 foram retiradas do livro [1], a 3.3 e a 4.2 foram feitas com o software Geogebra, as figuras de 5.1 a 5.7 são fotos das atividades realizadas pelos alunos em sala de aula e a 4.10 foi feita no Word.



2 Sobre a Estrutura Algébrica: Grupo

Neste capítulo trataremos noções básicas sobre grupo, através da definição do mesmo, bem como exemplos e propriedades. Abordaremos também subgrupos e grupos cíclicos. Detalhes sobre este assunto e demais considerações podem ser encontrados em [2, 3].

2.1 Grupos

Definição 2.1. *Sejam G um conjunto não vazio e $*$ uma operação binária de G, isto é,*

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x * y \end{aligned}$$

Dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo*** *em relação a esta operação binária $*$ se, e somente se, valem as seguintes propriedades:*

(a) Associativa: $a * (b * c) = (a * b) * c, \ \forall \ a, b, c \in G$;

(b) Existência do elemento neutro: $\exists \ e \in G \mid a \ * \ e = a = e \ * \ a, \ \forall \ a \in G$;

(c) Existência de elemento oposto: $\forall \ a \in \ G, \exists \ a' \in \ G \mid a * \ a' = e = a' * a$.

Observação 2.1. Dizemos que um grupo é aditivo se a operação binária é a adição, e adotamos então o elemento neutro $e = 0$ e o elemento oposto $a' = (-a)$. Analogamente, dizemos que um grupo é multiplicativo se sua operação binária é a multiplicação, e adotamos o elemento identidade $e = 1$ e o elemento inverso $a' = a^{-1}$.

Proposição 2.1. *Propriedades elementares de um grupo $(G, *)$:*

(i) O elemento neutro é único.

(ii) Cada elemento do grupo possui um único elemento oposto.

(iii) Quaisquer que sejam $a, b \in G$, tem-se

- $(a')' = a$.
- $(a * b)' = b' * a'$.

(iv) Se $a_1, \ldots, a_n \in G$, então $(a_1 * \cdots * a_n)' = a_n' * \cdots * a_1'$.

(v) *Quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$, *temos*

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

e

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

que são as leis do cancelamento à esquerda e à direita, respectivamente.

Demonstração. (i) Seja e o elemento neutro de G, ou seja,

$$e * a = a = a * e, \forall\ a \in G. \qquad (I)$$

Suponhamos agora que exista outro elemento e' tal que, para qualquer $a \in G$: $e' * a = a = a * e'$. Em particular, para $a = e$ temos:

$$e * e' = e.$$

Por outro lado, considerando $a = e'$ em (I), segue que $e * e' = e'$.

Consequentemente,

$$e' = e * e' = e.$$

Portanto, $e' = e$.

(ii) Se b e c são ambos elementos opostos de a em G temos

- $a * b = e = b * a$;
- $a * c = e = c * a$.

Deste modo,

$$c = e * c = (b * a) * c = b * (a * c) = b * e = b.$$

Portanto, $b = c$.

(iii) Se e é o elemento neutro de G, temos $a' * (a')' = e = a' * a$, então segue da lei do cancelamento que $(a')' = a$.

Provemos que $(a * b)' = b' * a'$. Como G é um grupo, dados $a, b \in G$, temos

$$a' * a = e = a * a'$$

e

$$b' * b = e = b * b'.$$

Deste fato e usando a propriedade associativa segue:

$(a * b) * (b' * a') = [(a * b) * b'] * a' = [a * (b * b')] * a' = (a * e) * a' = a * a' = e$

e

$(b' * a') * (a * b) = [(b' * a') * a] * b = [b' * (a' * a)] * b = (b' * e) * b = b' * b = e.$

Consequentemente, $b' * a'$ é o elemento oposto de $a * b$.

Portanto, $(a * b)' = b' * a'$.

(iv) Sejam $a_1, \ldots, a_n \in G$, provemos por meio do Princípio da Indução Finita que

$$(a_1 * \ldots * a_n)' = a_n' * \ldots * a_1', \forall\ n \in \mathbb{N}. \qquad (I)$$

A igualdade (I) é válida para $n = 1$.

Segue do item (iii), que (I) também é válida para $n = 2$.

Assumamos como hipótese de indução que a igualdade seja válida para n. Ou seja,

$$(a_1 * \ldots * a_n)' = a_n' * \ldots * a_1'.$$

Mostremos agora que (I) é válida para $n + 1$. De fato:

$(a_1 * \ldots * a_{n+1})' = [(a_1 * \ldots * a_k) * a_{n+1}]' = a_{n+1}' * (a_1 * \ldots * a_n)' =$

$a_{n+1}' * a_n' * \ldots * a_1'$.

Portanto, nestas condições, segue do Princípio de Indução Finita que:

$$(a_1 * \ldots * a_n)' = a_n' * \ldots * a_1', \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

(v) Por hipótese temos $a * b = a * c$. Logo,

$b = e * b = (a' * a) * b = a' * (a * b) = a' * (a * c) = (a' * a) * c = e * c = c.$

Portanto, $b = c$.

Analogamente, se $b * a = c * a$, segue

$b = b * e = b * (a * a') = (b * a) * a' = (c * a) * a' = c * (a * a') = c * e = c.$

□

Exemplo 2.1. *Grupo Aditivo dos Reais.*
$\mathbb{R}$ munido da adição usual, $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo.

Exemplo 2.2. *Grupo Aditivo dos Complexos.*
Seja $\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos números complexos.
Admitindo $\alpha = a+bi$, $\beta = c+di$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, definimos em $\mathbb{C}$ a seguinte operação:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha + \beta := (a + c) + (b + d)i. \end{aligned}$$

Veja que $\alpha + \beta \in \mathbb{C}$, logo $+$ é uma operação binária e ainda:

(a) Dados $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ e $\gamma = f + gi$, elementos quaiquer em $\mathbb{C}$, temos pela propriedade associativa da adição usual em $\mathbb{R}$ que

$$\alpha + (\beta + \gamma) = a + bi + ((c + f) + (d + g)i) = (a + (c + f)) + (b + (d + g))i =$$

$$((a + c) + f) + ((b + d) + g)i = ((a + c) + (b + d)i) + f + gi = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Portanto, vale a propriedade associativa.

(b) Dado $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ qualquer, usando a propriedade do elemento neutro em $\mathbb{R}$ temos que $0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$ satisfaz:

$\alpha + 0 = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi = \alpha,$

e

$0 + \alpha = (0 + a) + (0 + b)i = a + bi = \alpha,$

ou seja, existe elemento neutro para $(\mathbb{C}, +)$.

(c) Para cada $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, pela propriedade de elemento neutro de $\mathbb{R}$, o elemento $-\alpha = -a - bi$ é tal que

$\alpha + (-\alpha) = (a + bi) + (-a - bi) = (a + (-a)) + (b + (-b))i = 0 + 0i = 0$, e $(-\alpha) + \alpha = ((-a) + a) + ((-b) + b)i = 0 + 0i = 0.$

ou seja, existe elemento oposto para $(\mathbb{C}, +)$.

Portanto, segue dos itens (a), (b) e (c) que $(\mathbb{C}, +)$ é um grupo.

Definição 2.2. *Dizemos que um grupo $(G, *)$ é* ***abeliano*** *ou* ***comutativo*** *se, e somente se, a operação binária $*$ é comutativa, isto é,*

$$x * y = y * x, \forall\ x, y \in G.$$

Exemplo 2.3. *Grupo Aditivo dos Inteiros.*
Por propriedades da adição usual em $\mathbb{Z}$ temos: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}$,

(a) $a + (b + c) = (a + b) + c,$

(b) $a + 0 = a = 0 + a,$

(c) $a + (-a) = 0 = (-a) + a,$

(d) $a + b = b + a.$

Logo $(\mathbb{Z}, +)$, Grupo Aditivo dos Inteiros, é um grupo abeliano.

Exemplo 2.4. *Grupo Aditivo dos Reais.*
$\mathbb{R}$ munido da adição usual, $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo abeliano.

Exemplo 2.5. *Grupo Multiplicativo dos Reais não nulos.*
O par $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, onde $\mathbb{R}^*$ é o conjunto dos reais não nulos e a operação $\cdot$ é a multiplicação usual, é outro exemplo de grupo abeliano.

Exemplo 2.6. *Grupo Aditivo dos Racionais.*
O par $(\mathbb{Q}, +)$, onde $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos racionais e $+$ é a adição usual em $\mathbb{Q}$, é um grupo abeliano.

Exemplo 2.7. *Grupo Multiplicativo dos Racionais não nulos.*

Seja $\cdot$ a multiplicação usual em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^*$ o conjunto dos números racionais não nulos. O par $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ é um grupo abeliano. Observe que $\mathbb{Q}^*$ é fechado para esta operação, pois para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}^*$, temos $a \cdot b \neq 0$ e portanto $a \cdot b \in \mathbb{Q}^*$. Ainda,

(a) Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

(b) Temos que 1 é o elemento identidade de $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, já que

$$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a;$$

(c) Cada elemento $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ tem como elemento inverso $\frac{b}{a}$, pois

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1 = \frac{ba}{ab} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b};$$

(d) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}^*$, temos $a \cdot b = b \cdot a$.

Exemplo 2.8. *Grupo Multiplicativo dos Complexos não nulos.*

Seja $\mathbb{C}^*$ o conjunto dos números complexos não-nulos. Tomando quaisquer α e $\beta \in \mathbb{C}^*$, com $\alpha = a + bi$ e $\beta = c + di$, temos a seguinte operação:

$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i.$

Veja que $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ é um grupo abeliano.

Com efeito:

(a) $\forall \alpha, \beta$ e $\gamma \in \mathbb{C}^*$ com $\alpha = a + bi, \beta = c + di, \gamma = e + fi$, temos $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$, pois

$\alpha(\beta\gamma) = (a + bi)[(ce - df) + (cf + de)i] =$

$[a(ce - df) - b(cf + de)] + [a(cf + de) + b(ce - df)]i =$

$[ace - adf - bcf - bde] + [acf + ade + bce - bdf]i =$

$[(ac - bd)e - (ad + bc)f] + [(ac - bd)f) + (ad + bc)e]i =$

$[(ac - bd) + (ad + bc)i](e + fi) = (\alpha\beta)\gamma =$

Portanto, $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

(b) Seja $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}^*$, qualquer. Observe que $1 = 1 + 0i$ é tal que

$\alpha 1 = (a1 - b0) + (a0 + b1)i = a + bi = (1a - 0b) + (0a + 1b)i = 1\alpha.$

Logo, $\alpha 1 = \alpha = 1\alpha$.

Portanto, $1 = 1 + 0i$ é o elemento identidade de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

(c) Para cada $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}^*$, vejamos como determinar $\alpha^{-1} \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$\alpha\alpha^{-1} = 1 = \alpha^{-1}\alpha.$$

Suponha $\alpha^{-1} = c + di$. Veja que $\alpha\alpha^{-1} = 1$ equivale a $(a + bi)(c + di) = 1 + 0i$, ou ainda, $(ac - bd) + (ad + bc)i = 1 + 0i$.

Consequentemente, as incógnitas c e d devem satisfazer o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} ac - bd &= 1, \\ bc + ad &= 0. \end{cases}$$

Via regra de Cramer temos que a solução deste sistema é

$$\begin{aligned} c &= \tfrac{a}{a^2+b^2} \\ d &= -\tfrac{b}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

Note que a igualdade $\alpha^{-1}\alpha = 1$ gera o mesmo sistema linear. Portanto, para cada $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}^*$, o seu elemento inverso é dado por $\alpha^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$, conforme comprovamos a seguir.

$$\alpha\alpha^{-1} = \Big(a + bi\Big)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) =$$

$$\left(a\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - b\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\right) + \left(a\left(\frac{-b}{a^2+b^2}i\right) + b\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)\right)i =$$

$$\left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) + \left(-\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right)i =$$

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{(-ab)+(ab)}{a^2+b^2}\right)i = 1 + 0i = 1.$$

Analogamente, $\alpha^{-1}\alpha = 1 + 0i = 1$.

(d) Para quaisquer $\alpha = a + bi, \beta = c + di$,

$$\alpha\beta = \beta\alpha.$$

De fato,

$$\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ca - db) + (da + cb)i = \beta\alpha.$$

Portanto $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, o Grupo Multiplicativo dos Complexos não nulos, é um grupo abeliano.

Exemplo 2.9. *Grupos de Permutações.*

Seja H um conjunto não vazio. Denotamos por $S(H)$ o conjunto de todas as funções $f : H \longrightarrow H$ bijetoras.

Neste conjunto definimos a operação composição $\circ$, $(f, g) \longmapsto f \circ g, \forall f, g \in S(H)$.

O par $(S(H), \circ)$ é um grupo denominando grupo das permutações sobre H.

Vamos então mostrar que $(S(H), \circ)$ satisfaz as condições de um grupo.

(a) A propriedade associativa é satisfeita, pois, para qualquer $a \in H$ e quaisquer f, g e $h \in S(H)$, segue da definição de composição de funções que

$((f \circ g) \circ h)(a) = (f \circ g)(h(a)) = f(g(h(a))) = f((g \circ h)(a)) = (f \circ (g \circ h))(a)$.

Portanto, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

(b) Para qualquer $f \in S(H)$ a função identidade $id_H : H \to H$ é o elemento neutro de $(S(H), \circ)$. De fato, para qualquer $a \in H$, segue que

$$(f \circ id_H)(a) = f(id_H(a)) = f(a) = id_H(f(a)) = (id_H \circ f)(a).$$

Portanto, $f \circ id_H = f = id_H \circ f$.

(c) Para cada $f \in S(H)$, como f é bijetora, existe $f^{-1} \in S(H)$ tal que

$$f \circ f^{-1} = id_H = f^{-1} \circ f.$$

Portanto, pelos itens (a), (b) e (c) o par $(S(H), \circ)$ é um grupo.

Em particular, se $H = \{1, 2, \cdots, n\}, n \geq 1$, denotamos $S(H)$ por S_n e o chamamos de **grupo simétrico** de grau n. Através de análise combinatória sobre os elementos de H podemos constatar que S_n é um grupo com $n!$ elementos.

Definição 2.3. *Dizemos que $(G, *)$ é um* ***grupo finito*** *se o conjunto G é finito. O número de elementos de G é chamado de ordem do grupo G e denotado por $o(G)$.*

Exemplo 2.10. A multiplicação usual dos números inteiros com o conjunto $\{1, -1\}$, é um grupo finito de ordem 2, denotado por $(\{1, -1\}, \cdot)$ e sua tabela de operações é dada por:

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Podemos verificar que $(\{1, -1\}, \cdot)$ é um grupo através dos seguintes cálculos:

(a) A propriedade associativa é válida, pois

- $1 \cdot (1 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = (1 \cdot 1) \cdot 1$.
- $1 \cdot [1 \cdot (-1)] = 1 \cdot (-1) = (-1) = (1 \cdot 1) \cdot (-1)$.
- $1 \cdot [(-1) \cdot 1] = 1 \cdot (-1) = (-1) = (-1) \cdot 1 = [(-1) \cdot 1] \cdot 1$.
- $(-1) \cdot (1 \cdot 1) = (-1) \cdot 1 = (-1) = 1 \cdot (-1) = (1 \cdot 1) \cdot (-1)$.
- $1 \cdot [(-1) \cdot (-1)] = 1 \cdot 1 = 1 = (-1) \cdot (-1) = [(-1) \cdot (-1)] \cdot 1$.
- $(-1) \cdot [1 \cdot (-1)] = (-1) \cdot (-1) = 1 = (-1) \cdot (-1) = [(-1) \cdot 1] \cdot (-1)$.
- $(-1) \cdot [(-1) \cdot 1] = (-1) \cdot (-1) = 1 = (-1) \cdot (-1) = [(-1) \cdot (-1)] \cdot 1$.
- $(-1) \cdot [(-1) \cdot (-1)] = (-1) \cdot 1 = (-1) = 1 \cdot (-1) = [(-1) \cdot (-1)] \cdot (-1)$.

(b) Existe o elemento identidade, pois $1 \in G$ tal que

$$1 \cdot 1 = 1 = 1 \cdot 1$$

e

$$(-1) \cdot 1 = -1 = 1 \cdot (-1).$$

Portanto, 1 é o elemento identidade.

(c) Existe o elemento inverso, pois

para $1 \in G, \exists\ 1 \in G \ \mid\ 1 \cdot 1 = 1$,

para $-1 \in G, \exists 1 \in G \ \mid\ (-1) \cdot (-1) = 1$.

Portanto, todo elemento de G tem inverso.

Logo $(\{1, -1\}, \cdot)$ é um grupo.
E ainda $(\{-1, 1\}, \cdot)$ é um grupo abeliano, pois satisfaz,
$1 \cdot 1 = 1 = 1 \cdot 1$.
$1 \cdot (-1) = -1 = (-1) \cdot 1$.
$(-1) \cdot 1 = -1 = 1 \cdot (-1)$.
$(-1) \cdot (-1) = 1 = (-1) \cdot (-1)$.

2.2 Subgrupos

Definição 2.4. *Seja $(G, *)$ um grupo. Dizemos que um subconjunto não vazio $H \subset G$ é um **subgrupo** de G se*

(i) $\forall\ x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$;

(ii) $(H, *)$ *tem estrutura de grupo.*

Teorema 2.1. *Para que um subconjunto não vazio $H \subset G$ seja subgrupo de um grupo $(G, *)$, é necessário e suficiente que*

$$\forall x, y \in H \Longrightarrow x * y' \in H,$$

onde y' é o elemento inverso de y.

Demonstração.

$(\Longrightarrow)$ Por hipótese, temos H um subgrupo de G, (ou seja, para quaisquer $x, y \in H$, $x * y \in H$), e também que $(H, *)$ tem estrutura de grupo.

Queremos mostrar que para quaisquer $x, y \in H$, $x * y' \in H$.

Tomando e_H o elemento identidade de H e e_G o elemento identidade de G, vamos primeiramente mostrar que $e_H = e_G$.

De fato, como e_H é o elemento identidade de H temos $e_H * e_H = e_H$, por outro lado, como $e_H \in H \subset G$, segue que $e_H * e_G = e_H$. Logo,

$$e_H * e_H = e_H = e_H * e_G.$$

Assim, pela lei do cancelamento em G,

$$e_H = e_G.$$

Denotamos $e_H = e_G := e$.

Também pela lei do cancelamento segue que, para cada $y \in H$ temos $y'_H = y'$, onde y'_H é o elemento inverso de y em H e y' é o elemento inverso de y em G. Com efeito,

$$y * y'_H = e_H = e_G = y * y'.$$

Logo, $y'_H = y'$.

Consequentemente, para quaisquer $x, y \in H$, temos

$$x * y' = x * y'_H \in H.$$

($\Longleftarrow$) Temos por hipótese que para todo $x, y \in H, x * y' \in H$. Queremos mostrar que $(H, *)$ é um subgrupo de (G,$*$).

(i) $(H, *)$ tem estrutura de grupo:

a. Existência de elemento identidade;

Como por hipótese, para todo $x, y \in H, x * y' \in H$, então segue que $e \in H$, pois $e = x * x', \forall\ x \in H$.

Como $e * x = x = x * e$, para qualquer $x \in H \subset G$, segue que e é o elemento identidade para $(H, *)$.

b. Existência de elemento inverso;

Para cada $y \in H$, $y' \in H$, pois

$$y' = e * y' \in H.$$

E para cada $y \in H \subset G$,

$$y * y' = e = y' * y.$$

Portanto, y' é o elemento inverso de y em $(H, *)$.

c. Propriedade associativa;

Finalmente, a propriedade associativa para H é válida uma vez que G é um grupo e $H \subset G$.

(ii) $\forall\ \ x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$,

Dados $x, y \in H$, como $y' \in H$, segue por hipótese que

$$x * y = x * (y')' \in H.$$

Logo, por (i) e (ii), segue que $(H, *)$ é um subgrupo de $(G, *)$.

□

Observação 2.2. Todo grupo G admite pelo menos dois subgrupos, a saber: G e $\{e\}$, chamados de subgrupos triviais de G.

Observação 2.3. Relembramos que, para um determinado elemento x, a notação de seu oposto x' será $-x$, para grupos aditivos e x^{-1}, para grupos multiplicativos.

Exemplo 2.11. Para o Grupo Multiplicativo dos Reais não nulos $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, tomemos $H = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$.

Sejam $x, y \in H$, então temos $y > 0$, logo $y^{-1} = \frac{1}{y} > 0$ e $xy^{-1} > 0$. Assim $xy^{-1} \in H$ e, portanto, $(H, \cdot)$ é subgrupo de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Exemplo 2.12. Seja agora o Grupo Aditivo dos Reais $(\mathbb{R}, +)$ e tomemos o subconjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Então,

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x + (-y) = x - y \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $(\mathbb{Z}, +)$ é subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

2.3 Grupos Cíclicos

Definição 2.5. *Seja G um grupo multiplicativo. Se $a \in G$ e m é um número inteiro, então a potência de a com expoente m, é o elemento de G denotado por a^m e definido da seguinte maneira:*

- *se $m \geq 0$, por recorrência, temos*

  $a^0 = e$ *(elemento neutro de G)*

  $a^m = a^{m-1}a$, *se* $m \geq 1$
- *se $m < 0$, temos*

  $a^m = (a^{-m})^{-1}$

A definição por recorrência, no caso em que $m \geq 0$ deve ser interpretada da seguinte maneira: $a^1 = a^{1-1}a = a^0a = ea = a$; $a^2 = a^{2-1}a = a^1a = aa$; $a^3 = a^{3-1}a = a^2a = (aa)a$; e assim sucessivamente.

Uma consequência imediata dessa definição é que, para todo inteiro m, vale $e^m = e$.

Temos as seguintes propriedades para um grupo multiplicativo G.

Propriedade 2.1. Seja G um grupo multiplicativo. Se m e n são números inteiros e $a \in G$, então

(i) $a^m a^n = a^{m+n}$;

(ii) $a^{-m} = (a^m)^{-1}$;

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$;

(iv) $a^m a^n = a^n a^m$.

A demonstração desse propriedade pode ser encontrada em [2].

Se a é elemento de um grupo multiplicativo G, denotaremos por $\langle a \rangle$ o subconjunto de G formado pelas potências inteiras de a, ou seja, $\langle a \rangle = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Esse subconjunto de G nunca é vazio, pois e, o elemento neutro de G, pertence a ele, uma vez que $e = a^0$.

Lema 2.1. *$\forall a \in G$, $\langle a \rangle$ é subgrupo de G, chamado subgrupo gerado por a.*

Demonstração. Dados $\forall b, c \in \langle a \rangle$, então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $b = a^m$ e $c = a^n$. Logo,

$$bc^{-1} = a^m(a^n)^{-1} = a^m a^{-n} = a^{m-n} \in \langle a \rangle.$$

Portanto, $bc^{-1} \in \langle a \rangle$.

Temos então que $\langle a \rangle$ é subgrupo de G.

□

Dessa forma o subconjunto $\langle a \rangle$ é um subgrupo de G e se H é um subgrupo de G ao qual a pertence, então $\langle a \rangle \subset H$.

Podemos então definir um grupo cíclico.

Definição 2.6. *Um grupo multiplicativo G é chamado* ***grupo cíclico*** *se, para algum elemento $a \in G$, se verificar a igualdade $G = \langle a \rangle$. Nessas condições, o elemento a é chamado* ***gerador*** *do grupo G.*

Exemplo 2.13. O grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +)$ é cíclico, pois $\mathbb{Z} =< 1 >$.

Observação 2.4. Podemos classificar um grupo cíclico, $G = \langle a \rangle$, de duas maneiras:

Caso 1 :$a^r \neq a^s$, sempre que $r \neq s$.

Caso 2 :$a^r = a^s$, para algum par de inteiros distintos, r e s.

Ao analisar tais situações podemos estabelecer os seguintes resultados:

Proposição 2.2. *Se $G = \langle a \rangle$ é um grupo cíclico que cumpre a condição do caso 1, então a aplicação $f : \mathbb{Z} \to G$ definida por $f(r) = a^r$, é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Tome a aplicação $f : \mathbb{Z} \to G$ como definida acima.

Pela própria definição do caso 1, temos f injetora, já que, $a^r \neq a^s$, sempre que $r \neq s$.

Ela também é sobrejetora, porque todo elemento $y \in G$ pode ser escrito como $y = a^r$, para algum inteiro r, e então $f(r) = a^r = y$.

E por fim é um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{Z}$ no grupo G, pois $\forall m, n \in \mathbb{Z}$
$f(m + n) = a^{m+n} = a^m a^n = f(m)f(n)$.

□

Proposição 2.3. *Seja $G = \langle a \rangle$ um grupo cíclico que cumpre as condições do caso 2. Então existe um número inteiro $h > 0$ tal que, $a^h = e$ e $a^r \neq e$, sempre que $0 < r < h$. Neste caso, a ordem do grupo é h e $G = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{h-1}\}$.*

Demonstração. Suponhamos $r > s$. Então $a^r(a^s)^{-1} = a^s(a^s)^{-1} = e$ e daí, $a^{r-s} = e$, em que $r - s > 0$. Isso mostra que há potências de a, com expoentes estritamente positivos, iguais ao elemento neutro e. Portanto, é possível fazer a seguinte escolha: seja h o menor número inteiro estritamente positivo, tal que $a^h = e$.

Então $a^h = e$, $a^{h+1} = a^h a = ea = a$, $a^{h+2} = a^{h+1}a = aa = a^2, \ldots$ .Ou seja, a partir do expoente h as potências de a se repetem ciclicamente.

Precisamos mostrar então que os elementos anteriores ao a^h não se repetem. De fato, suponhamos $a^i = a^j$, com $0 \leqslant i < j < h$. Então $0 < j - i < h$ e $a^{j-i} = a^j(a^i)^{-1} = a^j(a^j)^{-1} = e$, o que é um absurdo, pois dada a escolha de h, não se pode ter simultaneamente $0 < j - i < h$ e $a^{j-i} = e$.

Basta mostrarmos então que não há outros elementos no grupo além de $e, a, a^2, ...,$ a^{h-1}. Tome x um elemento de $G = \langle a \rangle$, então $x = a^m$ para algum inteiro m. Usando o algoritmo euclidiano com m como dividendo e h como divisor temos $m = hq + r$, com $0 \leqslant r < h$.

Então, $a^m = a^{hq+r} = (a^h)^q a^r = e^q a^r = ea^r = a^r$.

Como os valores possíveis de r são 0, 1,2, ..., $h-1$, então as possibilidades para a^m são $a^0 = e$, $a^1 = a$, a^2, ... , a^{h-1}. Isso mostra que $\langle a \rangle \subset \{a^0 = e, a^1 = a, a^2, ..., a^{h-1}\}$. Porém, devida à definição de $\langle a \rangle$, também vale a inclusão contrária, e portanto $\langle a \rangle = \{a^0 = e, a^1 = a, a^2, ..., a^{h-1}\}$, e a ordem desse grupo é h.

□

A partir dessas proposições definimos:

Definição 2.7. *Seja G um grupo cíclico qualquer*

(i) Se G é como no caso 1, dizemos que G é um grupo cíclico infinito.

(ii) Se G é como no caso 2, dizemos que G é grupo cíclico finito e o expoente h dado na Proposição 2.3 é chamado de ordem de a.

Observação 2.5. Se, para qualquer inteiro $r \neq 0$, $a^r \neq e$, então se diz que a ordem ou período de a é zero. Se a ordem de um elemento de um grupo é zero, então ele gera um subgrupo cíclico infinito. De fato, neste caso não se pode ter $m \neq n$ e $a^m = a^n$, pois, supondo por exemplo, $m > n$, então $a^{m-n} = e$, o que é impossível, devido à suposição feita.

3 Transformações Geométricas

Neste capítulo, vamos apresentar as notações, definições e os resultados que serão utilizados no próximo capítulo.

Observamos que já admitimos sabidas noções básicas da Geometria Euclidiana, a saber, noções de ponto, plano, reta, segmento, ponto médio, raio, triângulo, ângulo, medida angular, coeficiente angular de retas, paralelismo e perpendicularismo entre retas, bem como suas notações. Para mais informações, consulte [4].

3.1 Definições

Reservamos esta seção para apresentar todas as definições de elementos geométricos que serão explorados nas próximas seções.

Definição 3.1. *Uma **transformação** no plano é uma bijeção de um conjunto de pontos do plano nele mesmo, ou seja, dada uma transformação f, para cada ponto P existe um único ponto Q tal que $f(P) = Q$ e, inversamente, para cada ponto R existe um único ponto S tal que $f(S) = R$.*

A partir dessa definição, dizemos que a transformação **inversa** de f, denotada por f^{-1} é tal que $f^{-1}(A) = B$ se, e somente se, $A = f(B)$.

Definição 3.2. ***Colineação** é uma transformação que preserva retas, ou seja, se f é uma transformação e l é uma reta, então $f(l)$ também será uma reta.*

Translações e rotações são exemplos de colineações.

Definição 3.3. *Uma colineação f é uma **dilatação** se $l \parallel f(l)$, para toda reta l do plano.*

Definição 3.4. *Uma transformação f: **fixa um ponto** P do plano se $f(P) = P$, **fixa uma reta** l do plano se $f(l) = l$ e, em geral, **fixa um conjunto de pontos** s se $f(s) = s$.*

Definição 3.5. *Dados $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, a **distância** entre A e B é denotada por AB e dada por*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Definição 3.6. *A transformação **identidade** ι é tal que $\iota(P) = P$, para qualquer ponto P.*

Definição 3.7. *Dadas as transformações α e β, a **composição** $\beta \circ \alpha$ também é uma transformação e é definida por $\beta \circ \alpha(P) = \beta(\alpha(P))$, para qualquer ponto P.*

Definição 3.8. *Uma **involução** é uma transformação $\gamma \neq \iota$ de ordem 2, satisfazendo $\gamma^2 = \iota$ ou então, $\gamma = \gamma^{-1}$.*

Definição 3.9. *Dados dois pontos distintos A e B, a **translação** $\tau_{A,B}$ leva cada ponto P do plano num ponto P', ou seja, $\tau_{A,B}(P) = P'$, onde $AB = PP'$.*

Podemos também definir translações usando equações.

Definição 3.10. *Dados dois pontos $A = (x, y)$ e $B = (x', y')$ a **translação** $\tau_{A,B}$ é dada por:*
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$
onde a e b são unicamente determinados.

Dessa forma, $\tau_{A,B}(A) = B$.

Definição 3.11. *Uma **rotação** em torno de um ponto C através de um ângulo θ é uma transformação $\rho_{C,\theta}$, que fixa o ponto C e leva um ponto P para o ponto P', onde $CP' = CP$ e θ é a medida do ângulo formado entre $\overleftrightarrow{CP}$ e $\overleftrightarrow{CP'}$. Dizemos então que $\rho_{c,\theta}$ tem centro C e direção θ.*

A rotação $\rho_{C,0}$ é a identidade ι.

Definição 3.12. *Uma **meia-volta** é uma rotação involutiva, isto é, uma rotação de 180º.*

Assim como fizemos com as translações, podemos definir meias-voltas usando equações.

Podemos observar que se um ponto A for girado 180º sobre um ponto P teremos o ponto A', então P é o ponto médio de A e A' (observe a figura).

Por isso, precisamos apenas da fórmula do ponto médio para obter as equações desejadas. Das equações $\dfrac{(x + x')}{2}$ e $\dfrac{(y + y')}{2}$, podemos formular a nossa definição como segue.

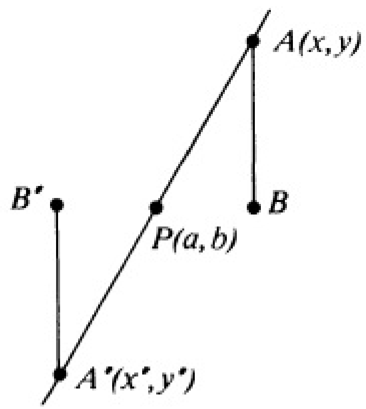


Figura 3.1: Exemplo de meia-volta

Definição 3.13. *Se $P = (a, b)$, então a* ***meia-volta****, σ_P sobre o ponto P tem equações:*
$$\sigma_P = \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

Definição 3.14. *A* ***reflexão*** *σ_m* ***na reta*** *m é uma transformação que tem equações:*

$$\sigma_m(P) = \begin{cases} P, & se\ P \in m \\ Q, & se\ P \notin m, m\ é\ mediatriz\ de \overline{PQ}. \end{cases}$$

Definição 3.15. *Uma transformação f é uma* ***isometria*** *se $PQ = P'Q'$, para todos os pontos P e Q, onde $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$, ou seja, uma isometria é uma transformação que preserva distâncias.*

Definição 3.16. *Uma isometria α é uma* ***simetria*** *para um conjunto s de pontos se $\alpha(s) = s$.*

Definição 3.17. *Uma reta m é uma* ***reta de simetria*** *para um conjunto s de pontos se $\sigma_m(s) = s$, ou seja, se σ_m fixa s. Um ponto P é um* ***ponto de simetria*** *para um conjunto s de pontos se $\sigma_P(s) = s$, ou seja, se σ_P fixa s.*

Definição 3.18. *Uma* ***isometria par*** *é o produto de um número par de reflexões. E uma* ***isometria ímpar*** *é o produto de um número ímpar de reflexões.*

Definição 3.19. *Se α e β são isometrias, então $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}$ é chamado* ***conjugado*** *de β por α .*

Definição 3.20. *Se a e b são retas distintas e perpendiculares à reta c, então $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ é uma* ***reflexão com deslizamento*** *de eixo c, onde σ_c é uma reflexão e $\sigma_b \circ \sigma_a$ é uma translação.*

3.2 Colineações

Teorema 3.1. *O conjunto de todas as transformações, com a operação de composição, forma um grupo, denotado por $\mathcal{G}$.*

Demonstração. Para mostrar que um conjunto não vazio de transformações no plano forma um grupo com a operação de composição, precisamos mostrar que o conjunto é fechado e associativo para essa operação, existe elemento identidade e que toda transformação tem inversa.

De fato, de acordo com a definição de composição, sabemos que a composição de duas transformações é também uma transformação, logo o conjunto das transformações é fechado para essa operação.

Além disso, a composição usual de funções é associativa e o elemento identidade desse conjunto é a transformação identidade.

E ainda, como toda função bijetora é inversível, e sua inversa é também bijetora, então toda transformação do plano possui uma inversa, que é também uma transformação do plano. □

Teorema 3.2. *O conjunto de todas colineações é um subgrupo do grupo das transformações.*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que composta de colineações é também uma colineação. De fato, sejam α e γ colineações e seja l uma reta do plano. Como α é uma colineação, temos por definição que $\alpha(l)$ é uma reta do plano, e como γ é uma colineação segue que $\gamma(\alpha(l))$ também é uma reta. Assim, $\gamma \circ \alpha(l)$ é uma reta e portanto $\gamma \circ \alpha$ é uma colineação.

Sabemos que a transformação identidade é uma colineação, logo é o elemento identidade desse conjunto.

Além disso, dada β uma colineação qualquer e r uma reta do plano, sabemos que como β é bijetora, existe uma reta l no plano tal que $\beta(l) = r$, então $\beta^{-1}(r) = \beta^{-1}(\beta(l)) = l$, que é uma reta do plano, e portanto β^{-1} é uma colineação.

□

3.3 Translações

Nesta seção apresentamos resultados que envolvem translações.

Teorema 3.3. *Dados P e Q pontos distintos do plano, existe uma única translação que leva P em Q, chamada $\tau_{P,Q}$.*

Demonstração. Tome $P = (c, d)$ e $Q = (e, f)$, então há únicos a e b tal que $e = c + a$ e $f = d + b$, então a única translação que leva P em Q tem equações

$$\begin{cases} x' = x + (e - c) \\ y' = y + (f - d) \end{cases}$$

e pela definição 3.10, essa translação é chamada de $\tau_{P,Q}$. □

Teorema 3.4. *Suponha A, B e C pontos não colineares. Então $\tau_{A,B} = \tau_{C,D}$ se, e somente se, o quadrilátero $CABD$ for um paralelogramo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, três pontos não colineares. Temos por hipótese que $\tau_{A,B} = \tau_{C,D}$, então pela definição de translação, segue que $AB = CD$, logo, podemos escrever $\tau_{A,B}(C) = D$, ou seja, $D = (x_D, y_D) = (x_C + (x_B - x_A), y_C + (y_B - y_A))$.

Então $AC = (x_C - x_A, y_C - y_A)$ e $BD = (x_D - x_B, y_D - y_B) = (x_C + (x_B - x_A) - x_B, y_C + (y_B - y_A) - y_B) = (x_C - x_A, y_C - y_A)$, logo $AC = BD$.

Portanto o quadrilátero $CABD$ é um paralelogramo.

($\Leftarrow$) Temos por hipótese que o quadrilátero $CABD$ é um paralelogramo, então $AB = CD$, logo $\tau_{A,B} = \tau_{C,D}$.

$\square$

Teorema 3.5. *Uma translação é uma dilatação. Se $P \neq Q$ então $\tau_{P,Q}$ não fixa nenhum ponto do plano e fixa exatamente as retas do plano que são paralelas a $\overleftrightarrow{PQ}$.*

Demonstração. Vamos primeiramente mostrar que toda translação é uma colineação. De fato, sejam l uma reta do plano, com equação $aX + bY + c = 0$ e a translação não identidade $\tau_{P,Q}$ de equações $x' = x + h$ e $y' = y + k$, com $P = (x, y)$ e $Q = (x', y')$. Assim, $\tau_{P,Q} = \tau_{O,R}$, onde $O = (0, 0)$, $R = (h, k)$ e $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{OR}$.

A partir das equações de $\tau_{P,Q}$, vemos que
$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow$
$a(x' - h) + b(y' - k) + c = 0 \Rightarrow$
$ax' - ah + by' - bk + c = 0 \Rightarrow$
$ax' + by' + (c - ah - bk) = 0$

Assim $\tau_{P,Q}(l) = m$, onde m é uma reta do plano com equação $aX + bY + (c - ah - bk) = 0$.

Temos portanto que toda translação é uma colineação.

Além disso, comparando as equações das retas l e m, $l \parallel m$ e portanto toda translação é uma dilatação.

Agora, l e m são a mesma reta se, e somente se, $ah + bk = 0$. Como $\overleftrightarrow{OR}$ tem equação $kX - hY = 0$, então $ah + bk = 0$ se, e somente se $l \parallel \overleftrightarrow{OR}$. Portanto $\tau_{P,Q}(l) = l$ se, e somente se $l \parallel \overleftrightarrow{PQ}$.

Basta então mostrarmos que $\tau_{P,Q}$ não fixa nenhum ponto do plano. Suponha que $\tau_{P,Q}$ fixa um ponto $S = (x'', y'')$ do plano. Então, $\tau_{P,Q}(S) = \tau_{P,Q}(x'', y'') = (x'' + h, y'' + k) = (x'', y'') = S$, o que significa que h = k = 0. Mas $h = x_Q - x_P$ e $k = y_Q - y_P$, logo se $h = k = 0$ então P = Q, o que contraria nossa hipótese. Logo, se $P \neq Q$ então $\tau_{P,Q}$ não fixa nenhum ponto do plano.

$\square$

Observação 3.1. Enquanto qualquer colineação transforma um par de retas paralelas em um par de retas paralelas, uma dilatação leva cada reta dada em uma reta paralela a ela. Por exemplo, uma rotação de 90º é uma colineação, mas não uma dilatação.

Teorema 3.6. *As translações com a operação da composição, formam um grupo abeliano, denotado por $\mathcal{T}$.*

Demonstração. Sejam $S = (a, b), T = (c, d)$ e $R = (a + c, b + d)$. Então,

$\tau_{O,T} \circ \tau_{O,S}(x, y) = \tau_{O,T}(x + a, y + b) = (x + a + c, y + b + d) = \tau_{O,R}(x, y)$,

logo, a composição de duas translações é uma translação.

Agora, tomando $R = O$, o inverso de $\tau_{O,S}$, onde $S = (a, b)$ é $\tau_{O,T}$, onde $T = (-a, -b)$, já que

$\tau_{O,T} \circ \tau_{O,S}(x, y) = \tau_{O,T}(x + a, y + b) = (x + a + (-a), y + b + (-b)) = (x, y)$.

Assim, o conjunto das translações formam um grupo.

Além disso, como a + c = c + a e b + d = d + b, segue $\tau_{O,T} \circ \tau_{O,S} = \tau_{O,S} \circ \tau_{O,T}$, pois

$\tau_{O,T} \circ \tau_{O,S}(x, y) = \tau_{O,T}(x + a, y + b) = (x + a + c, y + b + d) = (x + c + a, y + d + b) = \tau_{O,S}(x + c, y + d) = \tau_{O,S} \circ \tau_{O,T}(x, y)$,

logo, as translações são comutativas.

Portanto as translações formam um grupo abeliano.

□

Teorema 3.7. *As dilatações formam um grupo, denotado por $\mathcal{D}$.*

Demonstração. As dilatações são colineações.

Pela simetria do paralelismo das retas, isto é, $l \parallel l' \Rightarrow l' \parallel l$, temos que o inverso de uma dilatação é uma dilatação.

Pela transitividade de paralelismo para retas, isto é, $l \parallel l'$ e $l' \parallel l'' \Rightarrow l \parallel l''$, temos que a composição de duas dilatações é uma dilatação.

Então, as dilatações formam um grupo $\mathcal{D}$ de transformações, chamado grupo de dilatação. □

3.4 Meias-voltas

Nesta seção apresentamos resultados que envolvem meias-voltas.

Teorema 3.8. *Uma meia-volta é uma dilatação involutiva. O ponto médio de A e $\sigma_P(A)$ é P. A meia-volta σ_P fixa o ponto A se, e somente $A = P$. A meia-volta σ_P fixa a reta l se, e somente se, $P \in l$.*

Demonstração. Pela definição de meia-volta, para qualquer ponto A, o ponto médio de A e $\sigma_P(A)$ é P.

A partir desse simples fato, segue que σ_P é uma transformação involutiva e além disso, a partir da definição 3.4, σ_P fixa exatamente o ponto P.

Para mostrar a última parte desse teorema, devemos primeiramente mostrar que σ_P é uma colineação. Suponha que a reta l tem equação $aX + bY + c = O$ e seja $P = (h, k)$, então σ_P tem equações $x' = -x + 2h$ e $y' = -y + 2k$. Então,

$ax + by + c = O \Leftrightarrow ax' + by' + c - 2(ah + bk + c) = O$.

Logo $\sigma_P(l)$ é a reta m com a equação $aX + bY + c - 2(ah + bk + c) = O$. Portanto, σ_P é uma colineação, mas além disso, é uma dilatação, pois comparando as equações temos $l \parallel m$. Finalmente, l e m são a mesma reta se, e somente se, $ah + bk + c = 0$, se, e somente se $(h, k) = P \in l$. □

Teorema 3.9. *Se Q é ponto médio de P e R, então $\sigma_Q \circ \sigma_P = \tau_{P,R} = \sigma_R \circ \sigma_Q$.*

Demonstração. Seja $P = (a, b)$ e $Q = (e, d)$. Então,

$$\sigma_Q \circ \sigma_P(x, y) = \sigma_Q(-x + 2a, -y + 2b) = (-[-x + 2a] + 2c, -[-y + 2b] + 2d) = (x + 2[c - a], y + 2[d - b]).$$

Uma vez que $\sigma_Q \circ \sigma_P$ tem equações $x' = x + 2(c - a)$ e $y' = y + 2(d - b)$, então $\sigma_Q \circ \sigma_P$ é uma translação. Isso prova o resultado importante de que a composição de duas meias-voltas é uma translação.

Suponha R o ponto tal que Q seja o ponto médio de P e R. Então,

$$\sigma_Q \circ \sigma_P(P) = \sigma_Q(P) = R \text{ e } \sigma_R \circ \sigma_Q(P) = \sigma_R(R) = R.$$

E como existe uma única translação que leva P em R, cada $\sigma_Q \circ \sigma_P$ e $\sigma_R \circ \sigma_Q$ deve ser $\tau_{P,R}$.

□

Teorema 3.10. *O produto de três meias-voltas é uma meia-volta. Em particular, se os pontos P, Q e R não são colineares, então $\sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_S$, onde o quadrilátero $PQRS$ é um paralelogramo.*

Demonstração. Suponha que $P = (a, b), Q = (c, d)$ e $R = (e, f)$ e seja $S = (a - c + e, b - d + f)$. No caso em que, P, Q, R não são colineares, então o quadrilátero $PQRS$ é um paralelogramo. Isso é fácil de verificar, pois os lados opostos do quadrilátero são congruentes e paralelos, veja a figura abaixo.

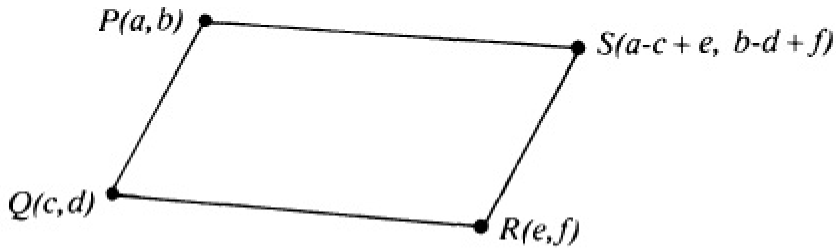


Figura 3.2: Quadrilátero PQRS

Já sabemos que $\sigma_Q \circ \sigma_P(x, y) = (x + 2[c - a], y + 2[d - b])$, então

$$\sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P(x, y) = \sigma_R((x + 2[c - a], y + 2[d - b])) = (-x + 2[a - c + e], -y + 2[b - d + f]) = \sigma_S(x, y).$$

□

O próximo teorema nos mostra que dados três vértices de um paralelogramo, o quarto é unicamente determinado por uma equação que envolve isometrias.

Teorema 3.11. *Dados quaisquer três pontos, não necessariamente distintos, A, B, C, D, então o quarto ponto é determinado exclusivamente pela equação $\tau_{A,B} = \sigma_D \circ \sigma_C$.*

Demonstração. Podemos resolver a equação $\tau_{A,B} = \sigma_D \circ \sigma_C$, para quaisquer A, B, C, D em termos dos outros três.

Conhecendo C, D e A ou B, conseguimos definir o outro pela equação $\sigma_D \circ \sigma_C(A) = B$ ou a equação equivalente $\sigma_C \circ \sigma_D(B) = A$. Em ambos os casos, o produto $\sigma_D \circ \sigma_C$ é a translação única que leva A em B e, portanto, $\sigma_D \circ \sigma_C = \tau_{A,B}$.

Por outro lado, se conhecemos A e B, tomamos M o seu ponto médio, então $\tau_{A,B} = \sigma_M \circ \sigma_A$. Conhecendo A, B e D, temos C a única solução para Y na equação $\sigma_D \circ \sigma_M \circ \sigma_A = \sigma_Y$, então $\tau_{A,B} = \sigma_M \circ \sigma_A = \sigma_D \circ \sigma_Y$.

Conhecendo A, B e C, temos D a única solução para Z na equação $\sigma_M \circ \sigma_A \circ \sigma_C = \sigma_Z$, então $\tau_{A,B} = \sigma_M \circ \sigma_A = \sigma_Z \circ \sigma_C$.

□

Embora as meias-voltas não comutem, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.12. *$\sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R$ para quaisquer P, Q e R.*

Demonstração. Se $\sigma_Q \circ \sigma_P = \tau_{P,R}$, então $\tau_{P,R}^{-1} = \sigma_P \circ \sigma_Q$, assim $\sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_P \circ \sigma_Q$ se, e somente se, $P = Q$.

No entanto, pelo teorema anterior, sabemos que para quaisquer pontos P, Q e R, há um ponto S tal que

$$\sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_S = \sigma_S^{-1} = (\sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P)^{-1} = \sigma_P^{-1} \circ \sigma_Q^{-1} \circ \sigma_R^{-1} = \sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R.$$

□

As meias-voltas não formam um grupo por si só. Mas como já vimos anteriormante, o produto de duas meias-voltas é uma translação e uma vez que uma translação é um produto de duas meias-voltas, então o produto, em qualquer ordem, de uma translação e uma meia-volta é uma meia-volta, pelo Teorema 3.10.

Em geral, o produto de um número par de meias-voltas é um produto de translações e, portanto, é uma translação. E, um produto de um número ímpar de meias-voltas é uma meia-volta seguido de uma translação e, portanto, é uma meia-volta. Assim, o grupo gerado pelas meias-voltas contém apenas as meias-voltas e as translações.

3.5 Reflexões

Nesta seção apresentamos resultados que envolvem reflexões.

Teorema 3.13. *A reflexão σ_m: fixa o ponto P se, e somente se, $P \in m$; fixa os pontos da reta l se, e somente se, $l = m$; fixa a reta l se, e somente se, $l = m$ ou $l \perp m$. E é uma transformação involutiva que troca os semiplanos de m.*

Demonstração. Claramente σ_m fixa um ponto P se, e somente se, $P \in m$, já que, $\sigma_m(P) = P'$, onde m é a mediatriz de $\overline{PP'}$, mas se $P = P'$, então a mediatriz passa por P e portanto $P \in m$. Agora, se $P \in m$, então $\sigma_m(P) = P$.

σ_m não só fixa a reta m, mas fixa todos os pontos de m. Em geral, a transformação α é dita fixar pontos do conjunto s se $\alpha(P) = P$ para cada ponto P em s, dessa forma,

$$\sigma_m \text{ fixa os pontos de } l \Leftrightarrow \sigma_m(P) = P, \forall P \in l \Leftrightarrow \forall P \in l, P \in m \Leftrightarrow m = l.$$

Suponhamos agora que a reta l seja distinta de m e fixada por σ_m. Seja $Q = \sigma_m(P)$ para algum ponto $P \in l$ e $P \notin m$, então P e Q estão ambos em l e, por definição, m é mediatriz de $\overline{PQ}$, portanto, $l \perp m$.

Sabemos que uma reta divide o plano em dois semiplanos, dessa forma, a partir da definição de reflexão, segue que $\sigma_m(P) = P'$, que é o simétrico de P em relação à m, ou seja, essa reflexão troca os semiplanos de m.

Basta então, mostrarmos que σ_m é uma transformação involutiva, ou seja, $\sigma_m^2 = \iota$.

Seja $\sigma_m(P) = P'$, onde m é mediatriz de $\overline{PP'}$. Considere agora $\sigma_m(P') = P''$, onde m é mediatriz de $\overline{P'P''}$. Como m é mediatriz de $\overline{PP'}$ e $\overline{P'P''}$, segue que $P = P''$ e portanto σ_m é uma transformação involutiva.

$\square$

Teorema 3.14. *Se a reta m tem equações $aX + bY + c = 0$, então σ_m tem equações:*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - 2a(ax+by+c)}{(a^2+b^2)}, \\ y' = \dfrac{y - 2b(ax+by+c)}{(a^2+b^2)}. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $P = (x, y)$ e $\sigma_m(P) = (x', y') = Q$.

Primeiramente, suponha $P \notin m$.

A reta r que contém os pontos $(x, y) = P$ e $(x', y') = Q$ é perpendicular à reta m, assim, o coeficiente angular de m é dado por $-\dfrac{a}{b}$ e o de r é dado por $\dfrac{b}{a}$. E como P e $Q \in r$, também podemos escrever seu coeficiente angular como $\dfrac{y'-y}{x'-x}$, assim temos

$$\frac{b}{a} = \frac{y'-y}{x'-x} \Rightarrow b(x'-x) = a(y'-y) \text{ (I)}$$

Além disso, $(\dfrac{(x+x')}{2}, \dfrac{(y+y')}{2})$ é o ponto médio de $\overline{PQ}$ e está na reta m, então podemos representar pela equação

$$a(\frac{(x+x')}{2}) + b(\frac{(y+y')}{2}) + c = 0 \text{ (II)}$$

Reescrevendo (I) e (II) temos o sistema:

$$\begin{cases} bx' - ay' = bx - ay, \\ ax' + by' = -2c - ax - by, \end{cases}$$

Vemos que temos duas equações lineares nas incógnitas x' e y'. Isolando x' na primeira equação, obtemos $x' = \dfrac{ay' + bx - ay}{b}$.

Substituindo na segunda equação, temos:

$$a(\frac{ay'+bx-ay}{b}) + by' = -2c - ax - by \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2y' + abx - a^2y + b^2y' = -2bc - abx - b^2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2y' + b^2y' = -2bc - 2abx - b^2y + a^2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(a^2+b^2) = -2bc - 2abx - b^2y + a^2y + b^2y - b^2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(a^2+b^2) = -2b(c+ax+by) + y(a^2+b^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = y - \frac{2b(c+ax+by)}{a^2+b^2}.$$

Substituindo y' encontrado, temos:

$$x' = \frac{ay'+bx-ay}{b} = x + \frac{ay'}{b} - \frac{ay}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = x + \frac{a[y - \dfrac{2b(c+ax+by)}{a^2+b^2}]}{b} - \frac{ay}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = x + \frac{ay}{b} - \frac{ay}{b} - \frac{2a(c+ax+by}{a^2+b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = x - \frac{2a(c+ax+by)}{a^2+b^2}.$$

Agora supondo que $P \in m$, então $ax+by+c=0$ e portanto $(x',y')=(x,y)$.

□

Teorema 3.15. *A reflexão σ_m é uma isometria.*

Demonstração. Dados dois pontos P e Q, tais que $\sigma_m(P) = P'$ e $\sigma_m(Q) = Q'$, queremos mostrar que $PQ = P'Q'$.

Para isso tomemos $R = \overline{PP'} \cap m$, $S = \overline{QQ'} \cap m$ e $T = \overline{PQ} \cap m$, como mostra a figura abaixo.

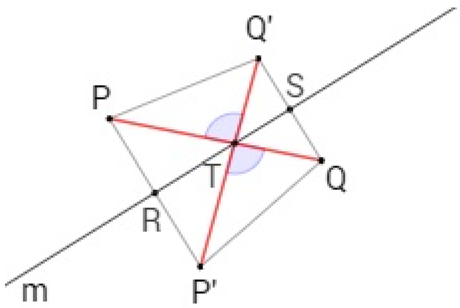


Figura 3.3: Reflexão σ_m é uma isometria

Tomando $\triangle PRT$ e $\triangle P'RT$ temos, por construção, que m é mediatriz de $\overline{PP'}$, logo R é ponto médio desse segmento e então $\overline{PR} = \overline{RP'}$, também por ser mediatriz, os ângulos $P\widehat{R}T$ e $P'\widehat{R}T$ são retos e $\overline{RT}$ é lado comum aos dois triângulos, logo pelo caso LAL temos $\triangle PRT \cong \triangle P'RT$ e portanto $\overline{PT} = \overline{P'T}$.

Analogamente, analisando $\triangle QST$ e $\triangle Q'ST$, temos que eles são congruentes pelo caso LAL e portanto $\overline{QT} = \overline{Q'T}$.

Agora, tomando $\triangle PTQ'$ e $\triangle P'TQ$, temos $\overline{PT} = \overline{P'T}$, $P\widehat{T}Q' = P'\widehat{T}Q$, pois são opostos pelo vértice e $\overline{QT} = \overline{Q'T}$, logo pelo caso LAL os triângulos são congruentes, e portanto $PQ = P'Q'$.

□

Agora que sabemos que uma reflexão é uma isometria, seguiremos com outras propriedades que dependem apenas da distância entre dois ou mais pontos.

3.6 Isometrias

Nesta seção apresentamos resultados que envolvem isometrias.

Teorema 3.16. *Uma **isometria** é uma colineação que preserva um ponto estar entre outros pontos, pontos médios, segmentos, raios, triângulos, ângulos, medida angular, perpendicularismo e paralelismo.*

Demonstração. Seja α uma isometria, A, B e C três pontos quaisquer e tome $A' = \alpha(A)$, $B' = \alpha(B)$ e $C' = \alpha(C)$.

Uma vez que α preserva distâncias, se $AB + BC = AC$, então, $A'B' + B'C' = A'C'$, pois $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ e $A'C' = AC$. E dizer que $AB + BC = AC$, é o mesmo que dizer que B está entre A e C. Logo, se $A'B' + B'C' = A'C'$ então podemos dizer que B' está entre A' e C'. Nós descrevemos esse fato dizendo que α preserva um ponto estar entre outros.

O caso especial em que $AB = BC$ no argumento acima, implica que $A'B' = B'C'$. Em outras palavras, se B é o ponto médio de $\overline{AC}$, então B' é o ponto médio de $\overline{A'C'}$. Assim, dizemos que α preserva os pontos médios.

Generalizando, uma vez que $\overline{AB}$ é a união de A, B e todos os pontos entre eles, então $\alpha(\overline{AB})$ é a união de A', B' e todos os pontos entre eles. Assim, $\alpha(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$ e dizemos que α preserva segmentos.

Da mesma forma, pela definição de α, $\overrightarrow{AB}$ é a união de $\overline{AB}$ e todos os pontos C de tal forma que B esteja entre A e C, então $\alpha(\overrightarrow{AB})$ é a união de $\overrightarrow{A'B'}$ e todos os pontos C' tal que B' esteja entre A' e C'. Então, $\alpha(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ e dizemos que α preserva os raios.

Uma vez que $\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$, então $\alpha(\overleftrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} \cup \overrightarrow{B'A'} = \overleftrightarrow{A'B'}$. Então, α é uma transformação que preserva retas, em outras palavras, α é uma colineação.

Se A, B e C são pontos não colineares, então $AB + BC > AC$ e portanto $A'B' + B'C' > A'C'$ e A', B' e C' também serão pontos não colineares. Então, uma vez que $\triangle ABC$ é uma união dos três segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, então concluímos que $\alpha(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$. Portanto, uma isometria preserva triângulos.

Segue então que α preserva ângulos, já que, $\alpha(A\widehat{B}C) = A'\widehat{B'}C'$ e não só preserva ângulos, mas também preserva a medida deles, pois $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ pelo caso LLL e portanto a medida dos ângulos é igual.

Finalmente, se $mA\widehat{B}C = 90^o$ então $mA'\widehat{B'}C' = 90^o$, portanto se $BA \perp BC$, então, $B'A' \perp B'C'$. Portanto, α preserva a perpendicularidade.

Além disso, α preserva o paralelismo, uma vez que retas paralelas possuem uma perpendicular em comum.

□

Teorema 3.17. *O conjunto de todas as simetrias de um conjunto de pontos, com a operação da composição, forma um grupo.*

Demonstração. Seja s um conjunto de pontos.

O conjunto de simetrias para s é não vazio, pois ι é uma simetria para s, já que, $\iota(s) = s$.

Suponha que α e β sejam simetrias para s. Então

$$\beta \circ \alpha(s) = \beta(\alpha(s)) = \beta(s) = s,$$

portanto o conjunto de simetrias é fechado para essa operação.

Pela definição 3.16, α é uma isometria, logo possui inversa α^{-1}. Então

$$\alpha^{-1}(s) = \alpha^{-1}(\alpha(s)) = \alpha^{-1} \circ \alpha(s) = \iota(s) = s,$$

logo α^{-1} é uma simetria e então o conjunto de simetrias também possui a propriedade inversa.

Portanto o conjunto de todas as simetrias de um conjunto de pontos forma um grupo.

□

O que acontece se o conjunto de pontos considerado neste teorema for o conjunto de todos os pontos? Neste caso especial, as simetrias são exatamente as mesmas que as isometrias. E temos então o seguinte teorema.

Teorema 3.18. *O conjunto de todas as isometrias, com a operação da composição, forma um grupo, denotado por $\mathcal{I}$.*

Demonstração. A demonstração desse teorema é analoga à demonstração anterior. □

Teorema 3.19. *Se uma isometria fixa dois pontos distintos em uma reta, então ela fixa cada ponto dessa reta. Ainda, se uma isometria fixa três pontos não colineares, então ela é a identidade.*

Demonstração. Dados A, $B \in r$ e α uma isometria que fixa esses pontos nessa reta. Tome então o ponto P na mesma reta r, de forma que P seja distinto dos pontos A e B. Sabemos que $\alpha(A) = A'$, $\alpha(B) = B'$ e $\alpha(P) = P'$. Uma vez que uma isometria é uma colineção que preserva distâncias, segue que $AP = A'P'$ e $BP = B'P'$.

Mas por hipótese, α fixa os pontos A e B, então $A' = A$ e $B' = B$, logo $P' = P$. Portanto, uma isometria que fixa os pontos distintos A e B deve fixar cada ponto da reta que passa por A e B.

Suponha agora que uma isometria α fixe cada um dos três pontos não colinares A, B e C. Então, acabamos de observar que α deve fixar cada ponto do $\triangle ABC$, assim ela fixa cada ponto em qualquer uma das retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$. Qualquer ponto Q no plano situa-se numa reta que cruza o $\triangle ABC$ em dois pontos distintos. Logo, o ponto Q está em uma reta contendo dois pontos fixos e, portanto, também deve ser fixado, ou seja, $\alpha(Q) = Q$ e assim α é a identidade. Então, uma isometria que fixa três pontos não colineares, deve fixar todo ponto Q do plano.

□

Teorema 3.20. *Se α e β são isometrias tais que*

$$\alpha(P) = \beta(P),\ \alpha(Q) = \beta(Q) \text{ e } \alpha(R) = \beta(R),$$

para três pontos não colineares P, Q e R, então $\alpha = \beta$.

Demonstração. Suponha que as isometrias α e β sejam tais que $\alpha(P) = \beta(P)$, $\alpha(Q) = \beta(Q)$ e $\alpha(R) = \beta(R)$ para três pontos não colinares P, Q e R. Tomemos β^{-1}, a inversa de β e então

$\beta^{-1} \circ \alpha(P) = \beta^{-1} \circ \beta(P) = \iota(P) = P,$

$\beta^{-1} \circ \alpha(Q) = \beta^{-1} \circ \beta(Q) = \iota(Q) = Q,$

$\beta^{-1} \circ \alpha(R) = \beta^{-1} \circ \beta(R) = \iota(R) = R,$

logo, $\beta^{-1} \circ \alpha$ fixa três pontos não colineares e então, pelo teorema anterior, segue que é a identidade.

Portanto $\alpha = \beta$.

□

Teorema 3.21. *Uma isometria que fixa dois pontos é uma reflexão ou a identidade.*

Demonstração. Suponha que uma isometria α fixe dois pontos distintos P e Q na reta m. Conhecemos duas possibilidades para α, a saber, $\alpha = \iota$ e $\alpha = \sigma_m$.

Queremos mostrar que estas são as únicas duas possibilidades, mostrando que se $\alpha \neq \iota$ então $\alpha = \sigma_m$.

Se $\alpha \neq \iota$, então há um ponto R não fixado por α, e então, pelo teorema 3.19, $R \notin m$, e P, Q e R são três pontos não colineares. Seja $R' = \alpha(R)$, então $PR = PR'$ e $QR = QR'$, pois α é uma isometria. Portanto, m é a mediatriz de $\overline{RR'}$ e cada um de P e Q está no lugar geométrico de todos os pontos equidistantes de R e R'. Assim, $\alpha(R) = R' = \sigma_m(R)$, bem como $\alpha(P) = P = \sigma_m(P)$ e $\alpha(Q) = Q = \sigma_m(Q)$. Pelo teorema anterior, temos $\alpha = \sigma_m$.

□

Teorema 3.22. *Uma isometria que fixa exatamente um ponto é o produto de duas reflexões.*

Demonstração. Suponha que uma isometria α fixe exatamente um ponto C e seja P um ponto diferente de C, tal que $\alpha(P) = P'$ e m a mediatriz de $\overline{PP'}$. Como α é uma isometria, temos $CP = CP'$ e então $C \in m$. Logo, $\sigma_m(C) = C$ e $\sigma_m(P') = P$. Então,

$$\sigma_m \circ \alpha(C) = \sigma_m(C) = C \text{ e } \sigma_m \circ \alpha(P) = \sigma_m(P') = P.$$

Pelo teorema anterior, $\sigma_m \circ \alpha = \iota$ ou $\sigma_m \circ \alpha = \sigma_l$, onde $l = \overleftrightarrow{CP}$. No entanto, $\sigma_m \circ \alpha \neq \iota$, pois caso contrário, $\sigma_m \circ \alpha$ fixaria mais pontos além de C. Assim, $\sigma_m \circ \alpha = \sigma_l$ para alguma reta l.

Logo, $\sigma_m \circ \alpha = \sigma_l \Rightarrow \sigma_m \circ \sigma_m \circ \alpha = \sigma_m \circ \sigma_l \Rightarrow \alpha = \sigma_m \circ \sigma_l$.

□

Teorema 3.23. *Uma isometria que fixa um ponto é o produto de no máximo duas reflexões.*

Demonstração. Sejam α uma isometria e P um ponto qualquer, com $\alpha(P) = P$.

Se P é o único ponto fixado por α então, pelo teorema anterior, α é o produto de duas reflexões.

Agora, se existir um ponto Q, tal que $\alpha(Q) = Q$, então α fixa dois pontos, e pelo teorema 3.21 ela é uma reflexão ou a identidade, lembrando que $\iota = \sigma_m \circ \sigma_m$, para toda reta m.

□

Teorema 3.24. *Um produto de reflexões é uma isometria. Toda isometria é um produto de no máximo três reflexões.*

Demonstração. Como o produto de isometrias é uma isometria e a reflexão é uma isometria, então o produto de reflexões é uma isometria.

Já sabemos que a identidade é um produto de duas reflexões. Suponha que a isometria não-identidade α seja tal que $\alpha(P) = P'$ e m a mediatriz de $\overline{PP'}$, então, $\sigma_m \circ \alpha$ fixa o ponto P.

Pelo teorema anterior, $\sigma_m \circ \alpha$ deve ser o produto β de no máximo duas reflexões. Logo,

$$\sigma_m \circ \alpha = \beta \Rightarrow \alpha = \sigma_m \circ \beta,$$

portanto, α é o produto de no máximo três reflexões.

□

Teorema 3.25. *Se $\triangle PQR \cong \triangle ABC$, então existe uma única isometria α, tal que $\alpha(P) = A$, $\alpha(Q) = B$ e $\alpha(R) = C$.*

Demonstração. Sabemos que há no máximo uma isometria α, de modo que $\alpha(P) = A$, $\alpha(Q) = B$ e $\alpha(R) = C$ (teorema 3.20). Queremos mostrar que existe pelo menos uma isometria α. Observe a figura abaixo.

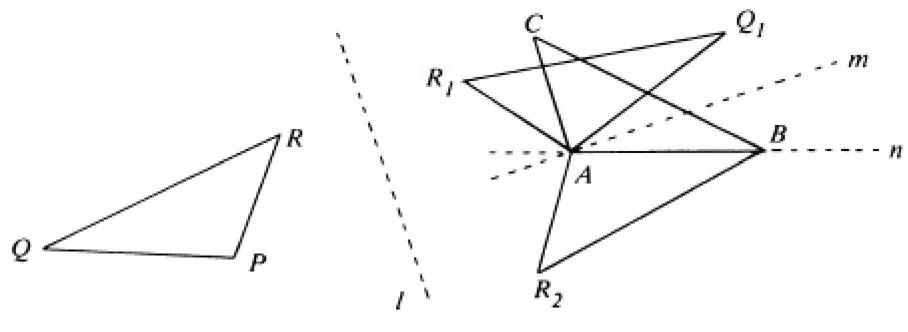


Figura 3.4: Reflexões do $\triangle PQR$

Usaremos várias vezes na prova o fato que uma reflexão é uma isometria e o lugar geométrico dos pontos equidistantes de M e N é a mediatriz de $\overline{MN}$.

Como $\triangle PQR \cong \triangle ABC$, então $\overline{AB} = \overline{PQ}$, $\overline{AC} = \overline{PR}$ e $\overline{BC} = \overline{QR}$.

Se $P \neq A$, então, chame $\alpha_1 = \sigma_l$, onde l é a mediatriz de $\overline{PA}$. Se $P = A$, então, chame $\alpha_1 = \iota$. Em qualquer caso, temos $\alpha_1(P) = A$. Seja, $\alpha_1(Q) = Q_1$ e $\alpha_1(R) = R_1$.

Se $Q_1 \neq B$, então, chame $\alpha_2 = \sigma_m$, onde m é a mediatriz de $\overline{Q_1B}$. Neste caso, $A \in m$, pois $\overline{AB} = \overline{PQ} = \overline{AQ_1}$. Se $Q_1 = B$, então, $\alpha_2 = \iota$. Em qualquer caso, temos $\alpha_2(A) = A$ e $\alpha_2(Q_1) = B$. Seja, $\alpha_2(R_1) = R_2$.

Se $R_2 \neq C$, então, chame $\alpha_3 = \sigma_n$, onde n é a mediatriz de $\overline{R_2C}$. Neste caso, $n = \overleftrightarrow{AB}$, $\overline{AC} = \overline{PR} = \overline{AR_1} = \overline{AR_2}$ e $\overline{BC} = \overline{QR} = \overline{Q_1R_1} = \overline{BR_2}$. Se $R_2 = C$, então chame $\alpha_3 = \iota$. Em qualquer caso, temos $\alpha_3(A) = A$, $\alpha_3(B) = B$ e $\alpha_3(R_2) = C$.

Seja $\alpha = \alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1$. Então,

$$\alpha(P) = \alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1(P) = \alpha_3 \circ \alpha_2(A) = \alpha_3(A) = A,$$
$$\alpha(Q) = \alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1(Q) = \alpha_3 \circ \alpha_2(Q_1) = \alpha_3(B) = B,$$
$$\alpha(R) = \alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1(R) = \alpha_3 \circ \alpha_2(R_1) = \alpha_3(R_2) = C,$$

como desejamos.

□

Teorema 3.26. *Dois segmentos, dois ângulos ou dois triângulos são congruentes se, e somente se, existe uma isometria que leva um no outro.*

Demonstração. Uma vez que dois segmentos congruentes são lados correspondentes de triângulos congruentes e uma vez que dois ângulos congruentes são ângulos correspondentes de triângulos congruentes, essa demonstração é imediata a partir do teorema anterior.

□

3.7 Rotações

Nesta seção apresentamos resultados que envolvem rotações.

Teorema 3.27. *Uma rotação é uma isometria.*

Demonstração. Tome dois pontos P e Q e a rotação $\rho_{C,\theta}$, tal que $\rho_{C,\theta}(P) = P'$ e $\rho_{C,\theta}(Q) = Q'$.

Se C, P e Q são colineares, então pela definição de $\rho_{C,\theta}$, segue que $PQ = P'Q'$.

Se C, P e Q não são colineares, então vamos observar os triângulos $\triangle PCQ$ e $\triangle P'CQ'$ da figura abaixo.

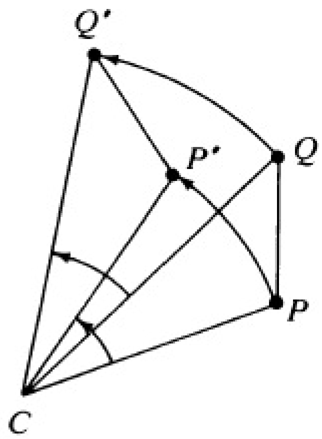


Figura 3.5: Rotação do $\triangle PCQ$

Pela definição de rotação, temos $CP = CP'$, $CQ = CQ'$ e $P\widehat{C}P' = Q\widehat{C}Q' = \theta$.

Agora, $P\widehat{C}Q = P\widehat{C}P' - Q\widehat{C}P' = \theta - Q\widehat{C}P'$ e $P'\widehat{C}Q' = Q\widehat{C}Q' - Q\widehat{C}P' = \theta - Q\widehat{C}P'$, e então temos $P\widehat{C}Q = P'\widehat{C}Q'$.

Logo $\triangle PCQ \cong \triangle P'CQ'$ pelo caso LAL, e portanto $PQ = P'Q'$.

□

Teorema 3.28. *Uma rotação não identidade fixa exatamente um ponto, a saber: o seu centro. Ainda uma rotação com o centro C, fixa cada círculo de centro C. Se C é um ponto e θ e ϕ são números reais, então $\rho_{C,\phi} \circ \rho_{C,\theta} = \rho_{C,\theta+\phi}$ e $\rho_{C,\theta}^{-1} = \rho_{C,-\theta}$. Uma rotação involutiva é uma meia-volta, e $\rho_{C,180^o} = \sigma_C$, para qualquer ponto C.*

Demonstração. Pela definição de rotação, temos $\rho_{C,\theta}(C) = C$. Tomemos então um ponto P qualquer, tal que $\rho_{C,\theta}(P) = P$, e então $\theta = P\widehat{C}P = 0^o$. Logo, $\rho_{C,\theta} = \iota$.

Portanto uma rotação, diferente da identidade, fixa somente o seu centro.

Seja C_p o círculo de centro C e raio $\overline{CP}$, então $\rho_{C,\theta}(P) = P'$, e pela definição, $CP = CP'$. Temos então que $\overline{CP'}$ também é raio do círculo, e portanto $P' \in C_p$.

Portanto $\rho_{C,\theta}$ fixa os círculos de centro C.

Seja P um ponto qualquer do plano e suponha que $\rho_{C,\theta}(P) = P'$ e $\rho_{C,\phi}(P') = P''$. Então temos $P\widehat{C}P' = \theta$ e $P'\widehat{C}P'' = \phi$, logo, $P\widehat{C}P'' = \theta + \phi$ e então $P'' = \rho_{C,\theta+\phi}(P)$.

Por outro lado, $\rho_{C,\phi} \circ \rho_{C,\theta}(P) = \rho_{C,\phi}(\rho_{C,\theta}(P)) = \rho_{C,\phi}(P') = P''$. Portanto, $\rho_{C,\phi} \circ \rho_{C,\theta}(P) = \rho_{C,\theta+\phi}(P)$, para qualquer ponto P do plano.

Além disso temos $\rho_{C,\theta}^{-1} \circ \rho_{C,\theta} = \iota$. Mas por definição, $\iota = \rho_{C,0} = \rho_{C,\theta-\theta}$. Então, $\rho_{C,\theta}^{-1} \circ \rho_{C,\theta} = \rho_{C,\theta-\theta} = \rho_{C,\theta+(-\theta)}$. Portanto, pelo resultado anterior segue que $\rho_{C,\theta}^{-1} = \rho_{C,-\theta}$.

Seja $\rho_{C,180}(P) = P'$, para qualquer ponto P do plano, logo, por definição $CP = CP'$ e então C é ponto médio de $\overline{PP'}$.

Portanto, pela definição de meia-volta temos $\rho_{C,180} = \sigma_C$.

□

Teorema 3.29. *As rotações de centro C, com a operação composição, formam um grupo abeliano.*

Demonstração. Pela definição de rotação, temos $\iota = \rho_{C,0}$.

Pelo teorema anterior, sabemos que o conjunto das rotações é fechado com relação a composição, já que o produto de duas rotações de centro C também será uma rotação de centro C. E ainda, que a inversa de uma rotação de centro C também será uma rotação de centro C.

Portanto, o conjunto das rotações formam um grupo. Basta mostrarmos que é abeliano. De fato,

$$\rho_{C,\theta} \circ \rho_{C,\phi} = \rho_{C,\phi+\theta} = \rho_{C,\theta+\phi} = \rho_{C,\phi} \circ \rho_{C,\theta}.$$

Portanto, as rotações de centro C formam um grupo abeliano.

□

3.8 Reflexões com Deslizamento

Apresentamos a definição e propriedades da reflexão com deslizamento, para tanto faz-se necessário antes, estabelecer relações importantes entre elementos já vistos anteriormente.

3.8.1 Translações e Rotações

Já sabemos que toda isometria é o produto de no máximo três reflexões, ou seja, cada isometria pode ser escrita como σ_l, $\sigma_l \circ \sigma_m$ ou $\sigma_l \circ \sigma_m \circ \sigma_r$. Vamos estudar o caso $\sigma_l \circ \sigma_m$. Como uma reflexão é uma involução, sabemos que $\sigma_l \circ \sigma_l = \iota$, para qualquer reta l. Vamos então analisar o produto de duas reflexões em retas distintas.

Temos duas possibilidades para l e m: elas são paralelas ou se intersectam em um único ponto.

Vamos começar pelo caso em que elas são paralelas.

Teorema 3.30. *Se $l \parallel m$, então $\sigma_m \circ \sigma_l$ é a translação que tem o dobro da distância entre l e m.*

Demonstração. Seja $l \parallel m$ e suponha $\overleftrightarrow{LM}$ uma perpendicular comum a essas retas, com $L \in l$ e $M \in m$, então a distância entre as retas l e m é a mesma que a distância entre os pontos L e M.

Observe a figura abaixo.

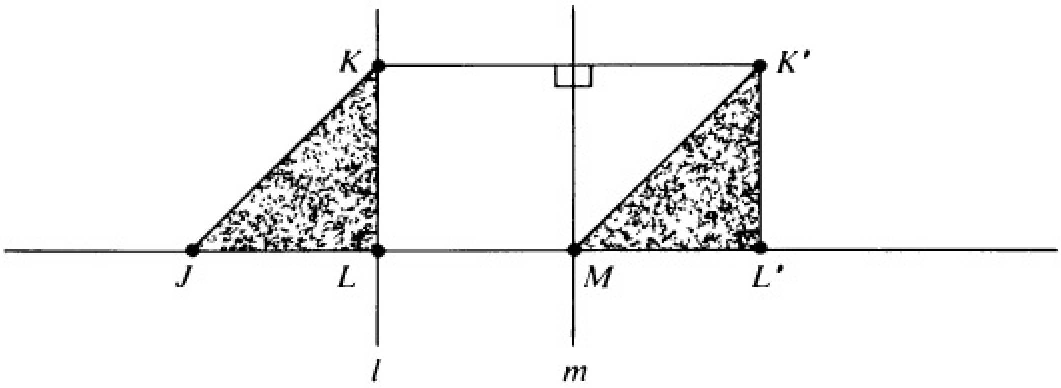


Figura 3.6: Reflexões por retas paralelas

Tome $K \in l, K \neq L$, tal que $L' = \sigma_m(L)$ e $K' = \tau_{L,L'}(K)$, então pelos teoremas 3.3 e 3.4 temos $\tau_{K,K'} = \tau_{L,L'}$ e o quadrilátero $LKK'L'$ é um retângulo, onde m é a mediatriz comum de $\overline{LL'}$ e $\overline{KK'}$. Assim, $\sigma_m(K) = K'$.

Agora seja $J = \sigma_l(M)$, então L é o ponto médio de $\overline{JM}$ e M é o ponto médio de $\overline{LL'}$, temos então que $\tau_{J,M} = \tau_{L,L'}$, onde $\tau_{L,L'}$ é a translação que tem o dobro da distância entre L e M.

Então,

$$\sigma_m \circ \sigma_l(J) = \sigma_m(M) = M = \tau_{L,L'}(J),$$
$$\sigma_m \circ \sigma_l(K) = \sigma_m(K) = K' = \tau_{L,L'}(K),$$
$$\sigma_m \circ \sigma_l(L) = \sigma_m(L) = L' = \tau_{L,L'}(L).$$

Portanto, $\sigma_m \circ \sigma_l = \tau_{L,L'} = \tau^2_{L,M}$. □

Teorema 3.31. *Se a reta b é perpendicular a l em L e perpendicular a m em M, então*

$$\sigma_m \circ \sigma_l = \tau_{L,M}^2 = \sigma_M \circ \sigma_L.$$

Demonstração. Na demonstração anterior podemos escrever $\tau_{L,L'}$ como $\sigma_M \circ \sigma_L$, já que M é ponto médio de $\overline{LL'}$ (teorema 3.9), então $\sigma_m \circ \sigma_l = \tau_{L,M}^2 = \sigma_M \circ \sigma_L$. □

Teorema 3.32. *Toda translação é o produto de duas reflexões em retas paralelas, e por outro lado, o produto de duas reflexões em retas paralelas é uma translação.*

Demonstração. Seja a translação, não identidade, $\tau_{L,N}$, então $\tau_{L,N} = \sigma_M \circ \sigma_L$, onde M é o ponto médio de $\overline{LN}$. Tomando l perpendicular a $\overleftrightarrow{LM}$ em L e m perpendicular a $\overleftrightarrow{LM}$ em M, temos pelo teorema anterior que $\sigma_M \circ \sigma_L = \sigma_m \circ \sigma_l$. □

Teorema 3.33. *Se as retas l, m e n são perpendiculares à reta b, então existem únicas retas p e q, tais que*

$$\sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_n \circ \sigma_p = \sigma_q \circ \sigma_n.$$

Demonstração. Seja a reta b perpendicular às retas l, m e n nos pontos L, M e N respectivamente e tome P, $Q \in b$, os únicos pontos tais que $\sigma_M \circ \sigma_L = \sigma_N \circ \sigma_P = \sigma_Q \circ \sigma_N$.

Tome então uma reta p perpendicular a b em P, e uma reta q perpendicular a b em Q. Assim,

$$\sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_M \circ \sigma_L = \sigma_N \circ \sigma_P = \sigma_n \circ \sigma_p \text{ e } \sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_M \circ \sigma_L = \sigma_Q \circ \sigma_N = \sigma_q \circ \sigma_n.$$

A unicidade dessas retas p e q que satisfazem as igualdades acima, resulta da lei do cancelamento, pois

$$\sigma_n \circ \sigma_p = \sigma_n \circ \sigma_t \Rightarrow \sigma_p = \sigma_t \Rightarrow p = t.$$

□

Teorema 3.34. *Se $P \neq Q$ então $\tau_{P,Q}$ pode ser escrita como $\sigma_b \circ \sigma_a$, com a, $b \perp \overleftrightarrow{PQ}$, em que a ou b é escolhida arbitrariamente e a outra é unicamente determinada.*

Demonstração. Tome $a \perp \overleftrightarrow{PQ}$ em A, então pelo teorema 3.9 temos $\tau_{P,Q} = \sigma_R \circ \sigma_P$, onde R é o ponto médio de $\overline{PQ}$.

Agora seja $B = \tau_{P,R}(A)$, temos $\sigma_B \circ \sigma_A = \tau_{P,Q}$ e $b \perp \overleftrightarrow{PQ}$ em B.

Portanto, pelo teorema 3.31 temos $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_B \circ \sigma_A = \tau_{P,Q}$.

□

Teorema 3.35. *Se as retas l, m e n são perpendiculares à reta b, então $\sigma_n \circ \sigma_m \circ \sigma_l$ é uma reflexão por uma reta perpendicular à b.*

Demonstração. Temos por hipótese que as retas l, m e n são perpendiculares à reta b, então pelo teorema 3.33, existem únicas retas p e q perpendiculares à b, tais que

$$\sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_n \circ \sigma_p \Rightarrow \sigma_n \circ \sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_n \circ \sigma_n \circ \sigma_p = \iota \circ \sigma_p = \sigma_p.$$

□

Passamos agora a analisar o caso em que as retas se interceptam em um único ponto.

Teorema 3.36. *Se as retas l e m se interceptam no ponto C e o ângulo formado na direção de l para m é $\frac{\theta}{2}$, então $\sigma_m \circ \sigma_l = \rho_{C,\theta}$.*

Demonstração. Seja $L \in l$, com $L \neq C$, C_L o círculo de centro C e raio $\overline{CL}$, $M = C_L \cap m$. Assim, $l = \overleftrightarrow{CL}$ e $m = \overleftrightarrow{CM}$ e $L\widehat{C}M = \frac{\theta}{2}$.

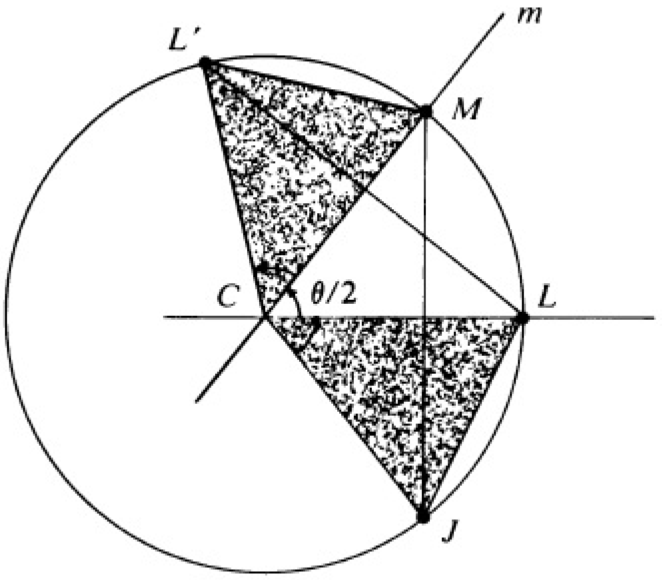


Figura 3.7: Rotação como produto de duas reflexões por retas concorrentes

Tome $L' = \rho_{C,\theta}(L)$, então pela definição de rotação, $CL = CL'$ e então $L' \in C_L$ e m é a mediatriz de $\overline{LL'}$, assim $L' = \sigma_m(L)$.

Tome $J = \sigma_l(M)$, onde l é a mediatriz de $\overline{JM}$, assim $J \in C_L$ e o ângulo formado entre $\overrightarrow{CJ}$ e $\overrightarrow{CM}$ é θ. Consequentemente, $M = \rho_{C,\theta}(J)$.

Portanto,

$$\sigma_m \circ \sigma_l(C) = \sigma_m(C) = C = \rho_{C,\theta}(C),$$
$$\sigma_m \circ \sigma_l(J) = \sigma_m(M) = M = \rho_{C,\theta}(J),$$
$$\sigma_m \circ \sigma_l(L) = \sigma_m(L) = L' = \rho_{C,\theta}(L).$$

Uma vez que os pontos C, J e L não são colineares, concluimos que $\sigma_m \circ \sigma_l = \rho_{C,\theta}$. Assim $\sigma_m \circ \sigma_l$ é a rotação de centro C, cujo ângulo é o dobro do formado entre l e m. □

Teorema 3.37. *Toda rotação é um produto de duas reflexões por retas concorrentes, e, reciprocamente, um produto de duas reflexões por retas concorrentes é uma rotação.*

Demonstração. Dada uma rotação, $\rho_{C,\theta}$, tome as retas l e m de tal forma que $l \cap m = C$ e o ângulo formado entre elas (direcionado de l para m) é $\frac{\theta}{2}$. Então $\sigma_m \circ \sigma_l = \rho_{C,\theta}$. □

Teorema 3.38. *Se as retas l, m e n são concorrentes no ponto C, então existem únicas retas p e q tais que*

$$\sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_n \circ \sigma_p = \sigma_q \circ \sigma_n.$$

Demonstração. Dadas as semirretas $\overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{CM}$ e $\overrightarrow{CN}$, então existem únicas semirretas $\overrightarrow{CP}$ e $\overrightarrow{CQ}$ de tal forma que os ângulos $L\widehat{C}M$, $P\widehat{C}N$ e $N\widehat{C}Q$ têm a mesma medida. Observe a figura.

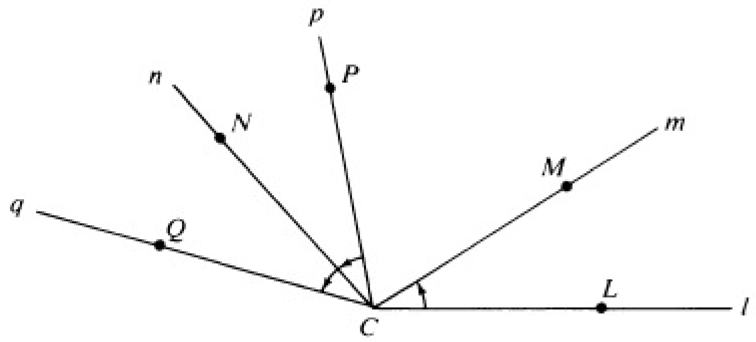


Figura 3.8: Reflexões por retas concorrentes

Tomando então $\overleftrightarrow{CN} = n$, $\overleftrightarrow{CP} = p$ e $\overleftrightarrow{CQ} = q$, encontramos as retas p e q que satisfazem as igualdades $\sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_n \circ \sigma_p = \sigma_q \circ \sigma_n$, onde l, m e n são retas concorrentes em C.

A unicidade de p e q se dá pela lei do cancelamento, pois,

$$\sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_m \circ \sigma_p \Rightarrow \sigma_l = \sigma_p.$$

□

Teorema 3.39. *A rotação $\rho_{C,\theta}$ pode ser escrita como $\sigma_b \circ \sigma_a$ onde a e b são retas concorrentes em C e uma delas é escolhida arbitrariamente e a outra é unicamente determinada.*

Demonstração. Sejam a uma reta qualquer contendo C, e $A \in a$ com $A \neq C$.

Agora tome $b = \overleftrightarrow{CB}$, onde $B = \rho_{C,\frac{\theta}{2}}(A)$.

Logo, pelo teorema 3.36 temos $\rho_{C,\theta} = \sigma_b \circ \sigma_a$.

□

Teorema 3.40. *Se as retas l, m e n são concorrentes no ponto C, então $\sigma_n \circ \sigma_m \circ \sigma_l$ é uma reflexão por uma reta que passa por C.*

Demonstração. Temos por hipótese que as retas l, m e n são concorrentes no ponto C, então pelo teorema 3.38 existem únicas retas p e q passando por C, tais que

$$\sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_n \circ \sigma_p = \sigma_q \circ \sigma_n \Rightarrow \sigma_n \circ \sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_n \circ \sigma_n \circ \sigma_p = \iota \circ \ \sigma_p = \sigma_p.$$

□

Teorema 3.41. *Uma meia-volta σ_P é o produto (em qualquer ordem) de duas reflexões por quaisquer duas retas perpendiculares em P.*

Demonstração. Sabemos pelo teorema 3.28 que $\rho_{P,180} = \sigma_P$, para qualquer ponto P, logo pelo teorema 3.39 existem retas a e b perpendiculares em P tais que $\sigma_b \circ \sigma_a = \rho_{P,180} = \sigma_P$.

□

Teorema 3.42. *O produto de duas reflexões é uma translação ou uma rotação. Somente a identidade é uma rotação e uma translação ao mesmo tempo.*

Demonstração. Tome duas retas l e m quaisquer, então

(i) Se $l \parallel m$, com $l \neq m$ então pelo teorema 3.30 temos $\sigma_m \circ \sigma_l$ é uma translação;

(ii) Se l e m são concorrentes, então pelo teorema 3.36 $\sigma_m \circ \sigma_l$ é uma rotação;

(iii) Se $l = m$, então $\sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_l \circ \sigma_l = \iota = \tau_{P,P} = \rho_{P,0}$, para qualquer ponto P.

□

3.8.2 Pontos fixos e involuções

Nessa seção vamos classificar todas as isometrias que fixam pontos e todas que são involuções.

Teorema 3.43. *Uma isometria que fixa exatamente um ponto é uma rotação. Uma isometria que fixa ao menos um ponto é uma rotação ou uma reflexão.*

Demonstração. Como já visto no teorema 3.22, uma isometria que fixa exatamente um ponto é o produto de duas reflexões por retas. Se essas retas forem paralelas, então o produto é uma translação (teorema 3.32), que não fixa nenhum ponto. Se elas forem coincidentes, então o produto será a identidade, que fixa todos os pontos do plano. Se elas forem concorrentes, então o produto será uma rotação (teorema 3.37), que fixa exatamente um ponto.

Agora, pelo teorema 3.24 uma isometria que fixa um ponto é o produto de no máximo duas reflexões. Então se for o produto de duas reflexões, teremos uma rotação ou a identidade, como vimos acima. Se for apenas uma reflexão, fixa um ponto.

□

Teorema 3.44. *As isometrias que são involuções são as meias-voltas e as reflexões.*

Demonstração. Seja α uma isometria que é uma involução, $\alpha \neq \iota$ e tome os pontos P e Q tais que $\alpha(P) = Q$, $Q \neq P$. Assim, $P = \iota(P) = \alpha^2(P) = \alpha(Q)$ e então α troca distintos pontos P e Q. Logo, pelo teorema 3.16, α fixa o ponto médio de $\overline{PQ}$.

Portanto, pelo teorema anterior, α deve ser uma rotação ou uma reflexão, mas pela definição de meia-volta, uma rotação involutiva é uma meia-volta. Logo, α é uma reflexão ou uma meia-volta. □

Teorema 3.45. *Uma rotação não-identidade que fixa uma reta é a meia-volta.*

Demonstração. Embora saibamos pelo teorema 3.8 que uma meia-volta σ_P fixa uma reta l se, e somente se, $P \in l$, não consideramos as retas que são fixadas por rotações arbitrárias.

Suponhamos então uma rotação $\rho_{C,\theta}$, diferente da identidade, que fixa a reta l e seja m uma reta perpendicular a l em C. Então, pelo teorema 3.39 existe uma reta $n \neq m$, que passa pelo ponto C tal que $\rho_{C,\theta} = \sigma_n \circ \sigma_m$.

Agora, se $l \perp m$ então, pelo teorema 3.13, $l = \rho_{C,\theta}(l) = \sigma_n \circ \sigma_m(l) = \sigma_n(l)$. Assim σ_n fixa a reta l e então $n = l$ ou $n \perp l$.

Mas se $n \perp l$, as retas m e n são concorrentes no ponto C e ambas perpendiculares a l, o que é ímpossível. Logo $n = l$, e assim m e n são perpendiculares no ponto C e $\rho_{C,\theta}$ é a meia-volta σ_C.

□

3.8.3 Paridade

Lema 3.1. *Se P é um ponto e a e b são retas, então existem retas c e d, com $P \in c$ tais que $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_d \circ \sigma_c$.*

Demonstração. Dados a, b e P, se $a \parallel b$, então c é a reta paralela a a que passa por P e se $a \cap b = C$, então c é a reta que passa pelos pontos C e P.

Então a, b e c são retas paralelas ou concorrentes no ponto C. Em qualquer caso, existe uma reta d tal que $\sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_c = \sigma_d$ e portanto $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_d \circ \sigma_c$.

□

Teorema 3.46. *Um produto de quatro reflexões é um produto de duas reflexões.*

Demonstração. Dado o produto $\sigma_s \circ \sigma_r \circ \sigma_q \circ \sigma_p$, queremos mostrar que esse produto é o mesmo que o produto de duas reflexões.

Seja $P \in p$, então pelo lema anterior, existem retas q' e r' tais que $\sigma_r \circ \sigma_q = \sigma_{r'} \circ \sigma_{q'}$, com $P \in q'$.

Ainda usando o mesmo lema, existem retas r'' e m tais que $\sigma_s \circ \sigma_{r'} = \sigma_m \circ \sigma_{r''}$, com $P \in r''$.

Logo, p, q' e r'' são concorrentes em P e então a reta l é tal que $\sigma_{r''} \circ \sigma_{q'} \circ \sigma_p = \sigma_l$.

Portanto,

$$\sigma_s \circ \sigma_r \circ \sigma_q \circ \sigma_p = \sigma_s \circ \sigma_{r'} \circ \sigma_{q'} \circ \sigma_p = \sigma_m \circ \sigma_{r''} \circ \sigma_{q'} \circ \sigma_p = \sigma_m \circ \sigma_l.$$

□

Teorema 3.47. *Uma isometria par é o produto de duas reflexões. Uma isometria ímpar é o produto de três reflexões. Nenhuma isometria é par e ímpar ao mesmo tempo.*

Demonstração. Dado um longo produto de reflexões, podemos usar o teorema anterior repetidamente para reduzir as quatro primeiras reflexões a duas reflexões, até obter um produto com menos de quatro reflexões.

Assim, uma isometria par será o produto de duas reflexões e uma isometria ímpar será o produto de três reflexões ou uma reflexão.

Agora, para mostrar que uma isometria não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo, precisamos mostrar que um produto de duas reflexões não pode ser igual a uma reflexão ou a um produto de três reflexões.

Tome as retas p, q, r, s e t tais que $\sigma_r \circ \sigma_q \circ \sigma_p = \sigma_s \circ \sigma_t$, então, nós mostramos acima que devem existir retas l e m tais que $\sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_s \circ \sigma_r \circ \sigma_q \circ \sigma_p = \sigma_s \circ \sigma_s \circ \sigma_t = \sigma_t$, o que é uma contradição já que $\sigma_m \circ \sigma_l$ é uma translação ou rotação e não uma reflexão σ_t.

Portanto o produto de duas reflexões nunca será igual a uma reflexão ou ao produto de três reflexões. □

Teorema 3.48. *Uma isometria involutiva par é uma meia-volta e uma isometria involutiva ímpar é uma reflexão.*

Demonstração. Já sabemos pelo teorema 3.44 que as isometrias involutivas são as meias-voltas e as reflexões.

Agora, pelo teorema anterior, uma isometria par é o produto de duas reflexões e consequentemente deve ser uma translação ou uma rotação. (teorema 3.42). Logo, uma isometria involutiva par deve ser ao mesmo tempo uma meia-volta ou reflexão e translação ou rotação. Portanto o único caso possível, é que essa isometria seja uma meia-volta, que por definição, é uma rotação de 180º.

Já a isometria ímpar é uma reflexão ou o produto de três reflexões, que é também uma reflexão. Portanto, para que ela seja involutiva e ímpar deve ser uma reflexão.

□

Teorema 3.49. *As isometrias pares, com a operação composição, formam um grupo, denominado $\mathcal{E}$.*

Demonstração. Sabemos que uma isometria par é o produto de duas reflexões. Então,

(i) Esse conjunto é fechado para essa operação, pois pelo teorema 3.46 o produto de isometrias pares será sempre uma isometria par;

(ii) A identidade está nesse grupo, já que $\sigma_m \circ \sigma_m = \iota$, para toda reta m;

(iii) A composição usual é associativa;

(iv) A inversa de uma isometria par, é também uma isometria par, pois $(\sigma_m \circ \sigma_l)^{-1} = \sigma_l^{-1} \circ \sigma_m^{-1}$

Portanto, as isometrias pares formam um grupo.

□

Teorema 3.50. *Se P é um ponto, m uma reta e α uma isometria, então*

$$\alpha \circ \sigma_m \circ \alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(m)} \text{ e } \alpha \circ \sigma_P \circ \alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(P)}.$$

Demonstração. Para essa demonstração usaremos dois resultados que não serão provados:

(I) Se α e β são isometrias, então $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}$ é uma involução se, e somente se, β é uma involução.

(II) Se α e β são isometrias, então $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}$ e β têm a mesma paridade e α e α^{-1} também têm a mesma paridade.

Temos então por (I) que, como σ_P e σ_m são involuções, então $\alpha \circ \sigma_P \circ \alpha^{-1}$ e $\alpha \circ \sigma_m \circ \alpha^{-1}$ também são involuções.

Agora, por (II) temos que $\alpha \circ \sigma_P \circ \alpha^{-1}$ é par, pois σ_P é par, e $\alpha \circ \sigma_m \circ \alpha^{-1}$ é ímpar, pois σ_m é ímpar.

Então $\alpha \circ \sigma_P \circ \alpha^{-1}$ é uma isometria involutiva par e portanto é uma meia-volta (teorema 3.48). Logo,

$$\alpha \circ \sigma_P \circ \alpha^{-1}(\alpha(P)) = \alpha \circ \sigma_P(P) = \alpha(P).$$

Então $\alpha \circ \sigma_P \circ \alpha^{-1}$ é uma meia-volta que fixa $\alpha(P)$, e como essa transformação fixa apenas o seu centro, assim $\alpha \circ \sigma_P \circ \alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(P)}$.

Analogamente, $\alpha \circ \sigma_m \circ \alpha^{-1}$ é uma isometria involutiva ímpar e portanto é uma reflexão (teorema 3.48) que fixa todos os pontos $\alpha(P)$ que estão na reta $\alpha(m)$, logo $\alpha \circ \sigma_m \circ \alpha^{-1}$ é uma reflexão na reta $\alpha(m)$, ou seja, $\alpha \circ \sigma_m \circ \alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(m)}$.

□

Teorema 3.51. *Se α é uma isometria, então*

$$\alpha \circ \tau_{A,B} \circ \alpha^{-1} = \tau_{\alpha(A),\alpha(B)} \text{ e } \alpha \circ \rho_{C,\theta} \circ \alpha^{-1} = \rho_{\alpha(C),\pm\theta},$$

onde $+\theta$ é aplicado quando α é par e $-\theta$ quando é ímpar.

Demonstração. Tome o conjugado $\alpha \circ \tau_{A,B} \circ \alpha^{-1}$ da translação $\tau_{A,B}$ pela isometria α. Se M é ponto médio de A e B, então como α preserva distâncias, $\alpha(M)$ é ponto de $\alpha(A)$ e $\alpha(B)$. Assim $\tau_{A,B} = \sigma_M \circ \sigma_A$ e $\tau_{\alpha(A),\alpha(B)} = \sigma_{\alpha(M)} \circ \sigma_{\alpha(A)}$.

Então,

$$\alpha \circ \tau_{A,B} \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ \sigma_M \circ \sigma_A \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ \sigma_M \circ \alpha^{-1} \circ \alpha \circ \sigma_A \circ \alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(M)} \circ \sigma_{\alpha(A)} = \tau_{\alpha(A),\alpha(B)}.$$

Tome primeiramente $\alpha = \sigma_l$ e seja m a reta perpendicular a l no ponto C, logo existe uma reta n que passa por C tal que $\rho_{C,\theta} = \sigma_n \circ \sigma_m$ e então $\sigma_l(m)$ e $\sigma_l(n)$ se cruzam em $\sigma_l(C)$ e o ângulo formado de $\sigma_l(m)$ para $\sigma_l(n)$ tem sinal negativo em relação ao ângulo formado de m para n (veja figura abaixo).

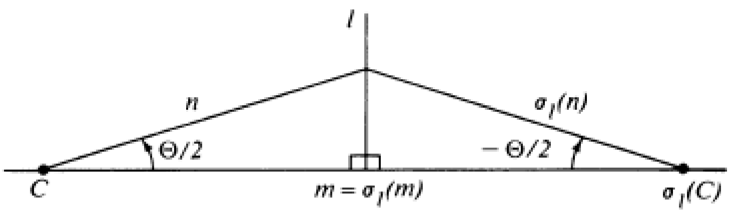


Figura 3.9: Ângulos formados entre m e n e entre $\sigma_l(m)$ e $\sigma_l(n)$

Então temos,

$$\sigma_l \circ \rho_{C,\theta} \circ \sigma_l^{-1} = \sigma_l \circ \sigma_n \circ \sigma_m \circ \sigma_l^{-1} = \sigma_l \circ \sigma_n \circ \sigma_l^{-1} \circ \sigma_l \circ \sigma_m \circ \sigma_l^{-1} = \sigma_{\sigma_l(n)} \circ \sigma_{\sigma_l(m)} = \rho_{\sigma_l(C),-\theta}.$$

Agora, se $\alpha = \sigma_t \circ \sigma_s$, então $\alpha \circ \rho_{C,\theta} \circ \alpha^{-1} = \sigma_t \circ (\sigma_s \circ \rho_{C,\theta} \circ \sigma_s^{-1}) \circ \sigma_t^{-1} = \rho_{\alpha(C),+\theta}$, onde o sinal positivo aparece substituindo os dois negativos do θ.

Por fim, se $\alpha = \sigma_t \circ \sigma_s \circ \sigma_r$ então o sinal negativo volta a aparecer.

Portanto, se α é uma isometria par, o ângulo será positivo e se α é uma isometria ímpar, o ângulo será negativo.

□

Teorema 3.52. *$\sigma_m \circ \sigma_n = \sigma_n \circ \sigma_m$ se, e somente se, $m = n$ ou $m \perp n$.*

Demonstração. Dadas as retas m e n temos

$$\sigma_m \circ \sigma_n = \sigma_n \circ \sigma_m \Leftrightarrow \sigma_n \circ \sigma_m \circ \sigma_n = \sigma_n \circ \sigma_n \circ \sigma_m \Leftrightarrow \sigma_n \circ \sigma_m \circ \sigma_n = \sigma_m;$$

Mas reflexões são involuções, então

$\sigma_n \circ \sigma_m \circ \sigma_n = \sigma_m \Leftrightarrow \sigma_n \circ \sigma_m \circ \sigma_n^{-1} = \sigma_m;$

Pelo teorema 3.50

$\sigma_n \circ \sigma_m \circ \sigma_n^{-1} = \sigma_m \Leftrightarrow \sigma_{\sigma_n(m)} = \sigma_m \Leftrightarrow \sigma_n(m) = m;$

Portanto, pelo teorema 3.13 temos $m = n$ ou $m \perp n$.

□

3.8.4 Propriedades das Reflexões com Deslizamento

Teorema 3.53. *A reflexão com deslizamento não fixa nenhum ponto; fixa exatamente uma reta, o seu eixo; o ponto médio entre qualquer ponto do plano e sua imagem por uma reflexão com deslizamento pertence ao eixo dessa reflexão com deslizamento.*

Demonstração. Tome a reflexão com deslizamento $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$, um ponto qualquer P e $P' = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a(P)$. Temos pela definição da reflexão com deslizamento que $a \neq b$ e a, $b \perp c$.

Vamos supor que $P' = P$, logo $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a(P) = P$ e então $\sigma_b \circ \sigma_a(P) = \sigma_c(P)$.

Mas $\sigma_b \circ \sigma_a$ é uma translação por uma reta perpendicular às retas a e b, e portanto paralela à c. Sabemos que c divide o plano em dois semiplanos e P e $\sigma_b \circ \sigma_a(P)$ estão no mesmo semiplano. Agora, como σ_c é uma reflexão pela reta c, então ela inverte o semiplano de P(teorema 3.13), logo P e $\sigma_c(P)$ estarão em semiplanos opostos, o que é uma contradição.

Portanto $P \neq P'$ e a reflexão com deslizamento não fixa nenhum ponto.

Assim, uma reflexão com deslizamento troca os semiplanos de seu eixo. Por isso, qualquer reta fixada pela reflexão com deslizamento deve passar por seu eixo pelo menos duas vezes. Ou seja, essa reta só pode ser o seu eixo.

Portanto a única reta fixada por essa transformação é o seu eixo.

Queremos mostrar agora que o ponto médio entre qualquer ponto do plano e sua imagem por uma reflexão com deslizamento pertence ao eixo dessa reflexão com deslizamento.

Suponha P um ponto qualquer e seja l uma reta que passa por P e é perpendicular à c, então existe uma reta m, $m \perp c$ tal que $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_m \circ \sigma_l$.

Tome M a intersecção das retas m e c então P e M são pontos distintos tais que

$$\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a(P) = \sigma_c \circ \sigma_m \circ \sigma_l(P) = \sigma_c \circ \sigma_m(P) = \sigma_M(P) \neq P.$$

Então $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a(P) = \sigma_M(P)$, onde M é ponto médio dos distintos pontos P e $\sigma_M(P)$ e $M \in c$.

□

Teorema 3.54. *Uma reflexão com deslizamento é a composição de uma reflexão por alguma reta a seguida de uma meia-volta por algum ponto fora de a. Uma reflexão com deslizamento é a composição de uma meia-volta sobre algum ponto A seguido de uma reflexão por alguma reta que não passa por A.*

Por outro lado, se o ponto $P \notin l$, então $\sigma_P \circ \sigma_l$ e $\sigma_l \circ \sigma_P$ são reflexões com translação que têm como eixo a reta perpendicular à l que passa por P.

Demonstração. Sejam γ uma reflexão com deslizamento e a, b e c retas distintas tais que $\gamma = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$, onde a,$b \perp c$ em A e B respectivamente. Então, $\sigma_A = \sigma_a \circ \sigma_c = \sigma_c \circ \sigma_a$ e $\sigma_B = \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_c \circ \sigma_b$.

Logo, $\gamma = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_B \circ \sigma_a$ e $\gamma = \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_a = \sigma_b \circ \sigma_A$.

Então γ é o produto $\sigma_B \circ \sigma_a$, onde $B \notin a$ e $\sigma_b \circ \sigma_A$, onde $A \notin b$.

Queremos agora mostrar o inverso, ou seja, que tal produto é uma reflexão com deslizamento.

Suponha uma reta l e um ponto P qualquer, com $P \notin l$. Sejam p uma reta perpedicular à l, passando por P e m uma reta perpendicular à p, passando por P. Logo, l, m e p são retas distintas e l, $m \perp p$, além disso $\sigma_P \circ \sigma_l = \sigma_p \circ \sigma_m \circ \sigma_l$ e $\sigma_l \circ \sigma_P = \sigma_p \circ \sigma_l \circ \sigma_m$.

Portanto, $\sigma_P \circ \sigma_l$ e $\sigma_l \circ \sigma_P$ são reflexões com translação.

□

Teorema 3.55. *Uma translação que fixa uma reta c comuta com uma reflexão com deslizamento de eixo c. O quadrado de uma reflexão com deslizamento é uma translação diferente da identidade. Uma reflexão com deslizamento gera um grupo cíclico infinito.*

Demonstração. Tome $\gamma = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$, com $a \neq b$ e $a, b \perp c$, nos pontos A e B respectivamente.

Tomando $c = \overleftrightarrow{AC}$, para algum $C \in c$, então pelo teorema 3.34 temos,

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \tau_{A,C},$$

e como A, $C \in c$, segue que $\tau_{A,C}$ fixa c.

Já sabemos que uma translação τ que fixa c comuta com uma reflexão σ_c e que as translações comutam entre si, então

$$\gamma \circ \tau = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a \circ \tau = \sigma_c \circ \tau \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \tau \circ \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \tau \circ \gamma.$$

Mais ainda,

$$\gamma^2 = (\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a)^2 = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_c \circ \tau_{A,B} \circ \sigma_c \circ \tau_{A,B} =$$
$$\sigma_c \circ \sigma_c \circ \tau_{A,B} \circ \tau_{A,B} = \iota \circ \tau_{A,B}^2 = \tau_{A,B}^2 \neq \iota.$$

O grupo $< \gamma^2 >$ é um grupo cíclico gerado por todas as translações não identidades γ^2, e portanto é um grupo infinito e está contido em $< \gamma >$, o grupo cíclico gerado por γ, já que $< \gamma >$ contém todas as potências de γ. Logo, como $< \gamma^2 >$ é um grupo infinito, segue que $< \gamma >$ também é infinito.

□

Teorema 3.56. *As retas p, q e r não são concorrentes e não possuem perpendicular comum se, e somente se, $\sigma_r \circ \sigma_q \circ \sigma_p$ é uma reflexão com deslizamento.*

Demonstração. Tome as retas p, q e r que não são concorrentes e não possuem perpendicular comum.

Primeiramente vamos considerar o caso em que as retas p e q se intersectam em algum ponto Q, com $Q \notin r$, pois caso contrário as retas seriam concorrentes. Observe a figura 3.10.

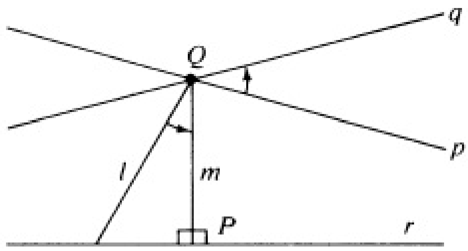


Figura 3.10: Reflexão com deslizamento

Sejam P o pé da perpendicular à r que passa por Q e $m = \overleftrightarrow{PQ}$, então existe uma reta l que passa por Q, tal que $\sigma_q \circ \sigma_p = \sigma_m \circ \sigma_l$. Como $p \neq q$, então $l \neq m$ e $P \notin l$.

Logo, $\sigma_r \circ \sigma_q \circ \sigma_p = \sigma_r \circ \sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_P \circ \sigma_l$, onde $P \notin l$. Portanto, pelo teorema 3.54 $\sigma_r \circ \sigma_q \circ \sigma_p$ é uma reflexão com deslizamento.

Vamos agora considerar o caso em que $p \parallel q$. Assim r e q devem se intercectar, pois caso contrário, p, q e r teriam uma perpendicular comum. Então, como acabamos de provar anteriormente, existe um ponto P, $P \notin l$, tal que $\sigma_p \circ \sigma_q \circ \sigma_r = \sigma_P \circ \sigma_l$. Então, $\sigma_r \circ \sigma_q \circ \sigma_p = (\sigma_p \circ \sigma_q \circ \sigma_r)^{-1} = (\sigma_P \circ \sigma_l)^{-1} = \sigma_l \circ \sigma_P$, com $P \notin l$.

Portanto, temos novamente que $\sigma_r \circ \sigma_q \circ \sigma_p$ é uma reflexão com deslizamento.

□

Temos então dois corolários imediatos desse teorema.

Corolário 3.1. *Uma isometria ímpar é uma reflexão ou uma reflexão com deslizamento.*

Corolário 3.2. *Uma isometria não- identidade é exatamente uma das seguintes transformações: translação, rotação, reflexão, reflexão com deslizamento.*

Teorema 3.57. *Se γ é uma reflexão com deslizamento de eixo c e α é uma isometria, então $\alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1}$ é uma reflexão com deslizamento de eixo $\alpha(c)$.*

Demonstração. Tome $\gamma = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$, com $a \neq b$ e a, $b \perp c$ e α uma isometria. Então,

$$\alpha\circ\gamma\circ\alpha^{-1} = \alpha\circ\sigma_c\circ\sigma_b\circ\sigma_a\circ\alpha^{-1} = \alpha\circ\sigma_c\circ\alpha^{-1}\circ\alpha\circ\sigma_b\circ\alpha^{-1}\circ\alpha\circ\sigma_a\circ\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(c)}\circ\sigma_{\alpha(b)}\circ\sigma_{\alpha(a)}.$$

E como α é uma isometria, temos $\alpha(a) \neq \alpha(b)$ e $\alpha(a)$, $\alpha(b) \perp \alpha(c)$.

Portanto $\alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1}$ é uma reflexão com deslizamento de eixo $\alpha(c)$.

□

4 Grupos de Friso

A propriedade essencial de um friso ornamental (aquele usado, por exemplo, em prédios antigos) é manter fixado tal friso ao longo de translações.

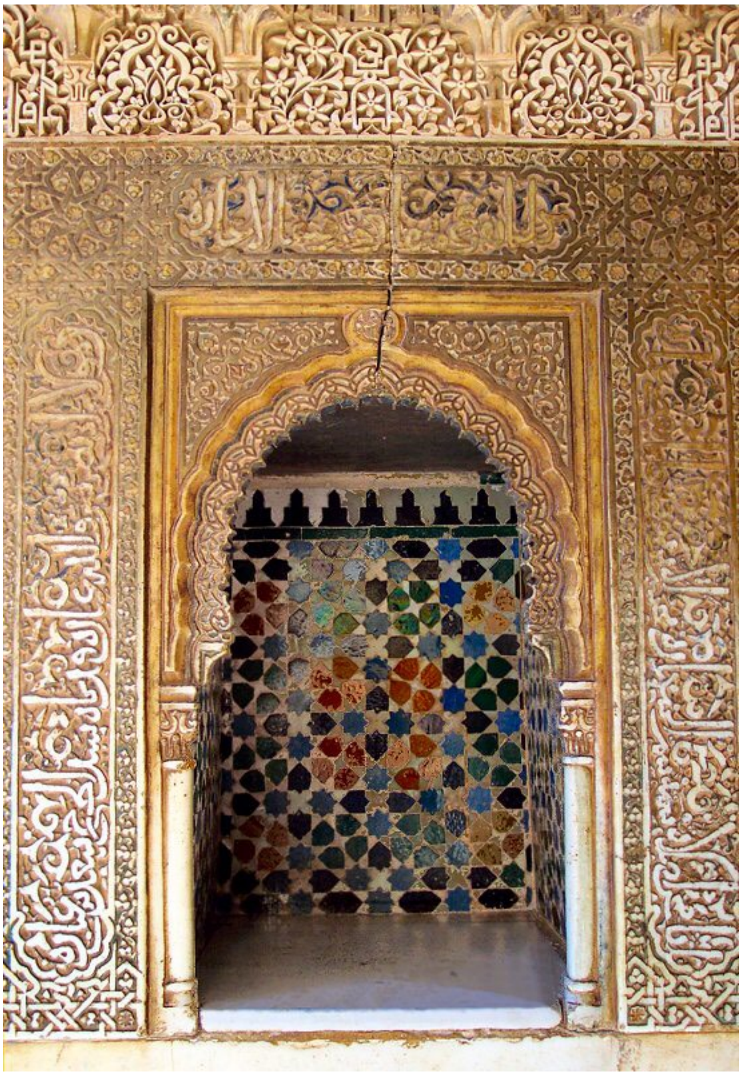


Figura 4.1: Castelo de Alhambra, na Espanha

Podemos chamar AB o comprimento de translação $\tau_{A,B}$ e dizemos que $\tau_{A,B}$ é menor que $\tau_{C,D}$, se AB é menor que CD.

Além de translações podemos acrescentar simetrias em frisos, a saber, reflexão, rotação, entre outros. Na verdade podemos aplicar uma infinidade de ações em um friso padrão.

Observamos que estamos interessados em simetrias que mantenham o padrão do friso invariante, por isso, em geral trabalhamos com isometrias.

A partir do fato de que o conjunto das isometrias com a composição, forma um grupo $\mathcal{I}$, temos as seguintes considerações:

- Dado um ponto P qualquer no plano , se α e σ_P pertencem ao grupo $\mathcal{I}$ das isometrias, então $\sigma_{\alpha(P)}$ também pertence a $\mathcal{I}$, pois $\sigma_{\alpha(P)} := \alpha \circ \sigma_P \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{I}$.

- Dada l uma reta arbitrária do plano, se α e σ_l pertencem ao grupo $\mathcal{I}$ então $\sigma_{\alpha(l)} \in \mathcal{I}$, pois $\sigma_{\alpha(l)} := \alpha \circ \sigma_l \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{I}$.

Ou seja, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Se P é um ponto de simetria para um conjunto de pontos s e α é uma simetria de s, então $\alpha(P)$ é um ponto de simetria para esse conjunto.*

Ainda, se l é uma reta de simetria para um conjunto s de pontos e α é uma simetria de s, então $\alpha(l)$ é uma reta de simetria para esse conjunto.

Definição 4.1. *Um grupo formado por isometrias que mantêm uma determinada reta c invariante e cujas translações formam um grupo cíclico infinito é denominado: grupo de frisos com centro c. Notação: $\mathcal{F}$.*

O objetivo deste trabalho é mostrar que existem no máximo 7 grupos de frisos.

A saber, dada uma translação τ (diferente da identidade) que fixa uma dada reta c, desejamos determinar todos os grupos de frisos $\mathcal{F}$ com centro c cujas translações formam um grupo cíclico gerado por τ. Veremos que existirão apenas 7 de tais grupos. Para cada um, exibiremos o friso padrão que o define.

Ou seja, estamos interessados em mostrar o seguinte resultado.

Teorema 4.2. *Se $\mathcal{F}$ é um grupo de friso com centro c cujas translações formam o grupo gerado pela translação τ, então $\mathcal{F}$ é um dos seguintes grupos: $\mathcal{F}_1 =< \tau >$, $\mathcal{F}_1^1 =< \tau, \sigma_c >$, $\mathcal{F}_1^2 =< \tau, \sigma_a >$, $\mathcal{F}_1^3 =< \gamma >$, $\mathcal{F}_2 =< \tau, \sigma_A >$, $\mathcal{F}_2^1 =< \tau, \sigma_A, \sigma_c >$, $\mathcal{F}_2^2 =< \gamma, \sigma_A >$, em que σ_A é uma meia-volta de centro A, σ_c é uma reflexão que fixa c, σ_a é uma reflexão que fixa a, em que a é perpendicular a c, γ é uma reflexão com deslizamento de eixo c, tal que $\gamma^2 = \tau$.*

Demonstração. Inicialmente escolhemos um ponto A sobre a reta c como segue:

- Se $\mathcal{F}$ contém meias-voltas então A é escolhido como sendo o centro dessas meias-voltas.

- Se $\mathcal{F}$ não contém meias-voltas, mas contém reflexões em retas perpendiculares a c, então escolhemos A como sendo a interseção de uma dessas retas e c.

- Se $\mathcal{F}$ não contém meias-voltas e não contém reflexões em retas perpendiculares a c, então escolhemos A como sendo qualquer ponto da reta c.

Agora denotemos: $A_i = \tau^i(A)$, onde $\tau^i = \tau \circ \tau \circ ... \circ \tau$, i vezes.

Veja que $A_0 = A$ e uma vez que $\tau^n(A_i) = \tau^{n+i}(A)$, então toda translação em $\mathcal{F}$ pode ser tomada de cada ponto A_i para um ponto A_j.

Seja M o ponto médio entre A e A_1 e defina $M_i := \tau^i(M)$, ou seja, M_i é o ponto médio entre A_i e A_{i+1}, bem como o ponto médio entre $A_0 = A$ e A_{2i+1}.

Figura 4.2: M_i é o ponto médio entre A_i e A_{i+1}

Estudemos agora todas as possibilidades de $\mathcal{F}$.

Uma possibilidade, é $\mathcal{F}$ ser exatamente o grupo gerado por τ, neste caso denotemos $\mathcal{F}$ por $\mathcal{F}_1$, isto é,

$$\mathcal{F}_1 =< \tau >.$$

Veja que o friso padrão que tem $\mathcal{F}_1$ como seu grupo de simetria não tem ponto de simetria, não tem reta de simetria e não é fixado por uma reflexão com deslizamento.

Por exemplo:

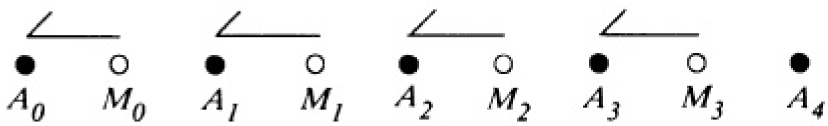


Figura 4.3: Grupo de simetria $\mathcal{F}_1$

(Observe que os pontos A_i e M_i não são considerados como parte do padrão ilustrado).

Sabemos que as translações mantém a reta c fixada. Além delas, as únicas isometrias pares que fixam a reta c são as meias-voltas com centro em c.

Consideremos agora o caso em que $\mathcal{F}$, além de translações, contém também meias-voltas com centro em c e escolha uma meia-volta $\sigma_A \in \mathcal{F}$, com $A \in c$.

Uma vez que τ e $\sigma_A \in \mathcal{F}$, então $\sigma_M \in \mathcal{F}$, já que $\sigma_M \circ \sigma_A = \tau$ e então $\sigma_M = \tau \circ \sigma_A$, onde M é o ponto médio de A e $\tau(A)$.

Pelo teorema 4.1 segue que $\mathcal{F}$ contém a meia-volta sobre cada A_i e sobre cada M_i.

Agora suponha que P é o centro de alguma meia-volta em $\mathcal{F}$, então $\sigma_P \circ \sigma_A \in \mathcal{F}$ e mais ainda $\sigma_P \circ \sigma_A(A) = A_n$, para algum n. Dessa forma, $\sigma_P(A) = A_n$, para algum n e, pela definição de meia-volta, P é o ponto médio de A e A_n, logo P é algum M_i.

Consequentemente, $\mathcal{F}$ contém exatamente aquelas meias-voltas que tem centro A_i e aquelas que tem centro M_i. Denotamos então

$$\mathcal{F}_2 =< \tau, \sigma_A >.$$

Uma vez que σ_A é uma involução então: $\tau \circ \sigma_A = \sigma_A^{-1} \circ \tau^{-1} = \sigma_A \circ \tau^{-1}$, logo todo elemento de $\mathcal{F}_2$ é da forma τ^i ou da forma $\sigma_A \circ \tau^i$. Observe que $\mathcal{F}_2$ também pode ser visto como $\mathcal{F}_2 =< \sigma_A, \sigma_M >$, já que $\sigma_M \circ \tau = \sigma_A$. Então,

$$\mathcal{F}_2 =< \tau, \sigma_A >=< \sigma_A, \sigma_M >.$$

Um friso padrão tendo $\mathcal{F}_2$ como seu grupo de simetria tem pontos de simetria, porém não tem retas de simetria.

Consequentemente, se $\mathcal{F}$ contém isometrias pares então $\mathcal{F}$ necessariamente é $\mathcal{F}_1$ ou $\mathcal{F}_2$.

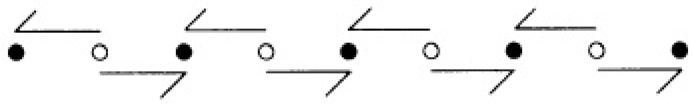


Figura 4.4: Grupo de simetria $\mathcal{F}_2$

Outras possibilidades para $\mathcal{F}$ são obtidas adicionando uma isometria ímpar.

Inicialmente adicionamos uma isometria ímpar em $\mathcal{F}_1$, a saber: a reflexão σ_c. Lembramos que σ_c é tal que, fixa uma reta arbitrária l se, e só se, $c = l$ ou $c \perp l$.

Denotemos esse novo grupo por $\mathcal{F}_1^1$, isto é,

$$\mathcal{F}_1^1 =< \tau, \sigma_c >.$$

Uma vez que $\tau \circ \sigma_c = \sigma_c \circ \tau$, então $\mathcal{F}_1^1$ é um grupo abeliano e todo elemento é da forma $\sigma_c^j \circ \tau^i$. Ainda se $n \neq 0$ então $\mathcal{F}_1^1$ contém uma "reflexão com deslizamento"de eixo c que leva A em A_n.

Um padrão de friso tendo $\mathcal{F}_1^1$ como seu grupo de simetria não tem nenhum ponto de simetria e o centro é uma reta de simetria.

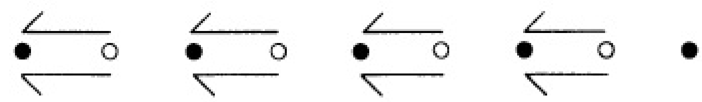


Figura 4.5: Grupo de simetria $\mathcal{F}_1^1$

Agora adicionamos σ_c em $\mathcal{F}_2$ e denotamos esse novo grupo por:

$$\mathcal{F}_2^1 =< \tau, \sigma_A, \sigma_c >.$$

Como σ_c comuta com τ e também com σ_A, segue que todo elemento de $\mathcal{F}_2^1$ é da forma $\sigma_c^k \circ \sigma_A^j \circ \tau^i$.

Sabemos que σ_A e σ_c são involuções. Se $n \neq 0$ então $\mathcal{F}_2^1$ contém uma reflexão com deslizamento $\sigma_c \circ \tau^n$ com eixo c que leva A em A_n. Além disso, $\mathcal{F}_2^1$ contém $\tau^{2i} \circ \sigma_A \circ \sigma_c$, o qual é a reflexão na reta perpendicular a c em A_i e $\mathcal{F}_2^1$ contém $\tau^{2i+1} \circ \sigma_A \circ \sigma_c$ o qual é uma reflexão na reta perpendicular a c em M_i . Se a é uma reta perpendicular a c em A, então

$$\mathcal{F}_2^1 =< \tau, \sigma_a, \sigma_c >.$$

Um padrão de friso tendo $\mathcal{F}_2^1$ como seu grupo de simetria tem ponto de simetria e o centro é uma reta de simetria.

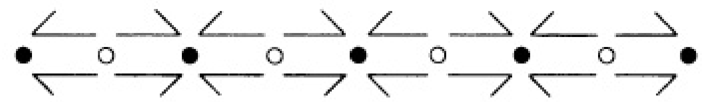


Figura 4.6: Grupo de simetria $\mathcal{F}_2^1$

Suponha agora que $\mathcal{F}$ não contém uma meia-volta, mas contém uma reflexão na reta a que é perpendicular a c. Neste caso suponha que $A \in a$. Então $\mathcal{F}$ contém $\tau^{2i} \circ \sigma_a$, que é uma reflexão na reta perpendicular a c em A_i e $\mathcal{F}$ contém $\tau^{2i+1} \circ \sigma_a$ que é uma reflexão na reta perpendicular a c em M_i.

Assuma que $\mathcal{F}$ contém uma reflexão σ_l diferente de σ_a. Veja que necessariamente $l \neq c$, pois se $l = c$, teríamos que $\sigma_c \circ \sigma_a \in \mathcal{F}$, mas $\sigma_c \circ \sigma_a$ é uma meia-volta e já sabemos que $\mathcal{F}$ não contém esse tipo de movimento. Sendo assim, podemos concluir que l é perpendicular a c.

Então $\mathcal{F}$ contém a translação $\sigma_l \circ \sigma_a$ que aplica A em A_n, para algum n.

Logo: $\sigma_l(A) = A_n$, para algum A_n com $n \neq 0$ e l é perpendicular a c em algum A_i ou em algum M_i. Note que $\sigma_l = \tau^k \circ \sigma_a$, para algum k, logo, $< \tau, \sigma_a, \sigma_l > = < \tau, \sigma_a >$.

Portanto, $\mathcal{F}$ necessariamente contém todas aquelas reflexões em retas perpendiculares a c em A_i, para cada i, e todas aquelas reflexões em retas perpendiculares a c em M_i, para cada i.

Temos agora considerado todos os possíveis casos de reflexões adicionados a $\mathcal{F}_1$.

Seja,

$$\mathcal{F}_1^2 = < \tau, \sigma_a >,$$

em que a é uma reta perpendicular a c em A.

Como: $\tau \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \tau^{-1}$, então todo elemento $\mathcal{F}_1^2$ é da forma $\sigma_a^j \circ \tau^i$.

$\mathcal{F}_1^2$ não contém σ_c, mas contém todas as reflexões de retas que são perpendiculares a c em A_i ou M_i.

Um padrão de friso tendo $\mathcal{F}_1^2$ como seu grupo de simetria, não tem ponto de simetria, tem uma reta de simetria, mas o centro não é uma reta de simetria.

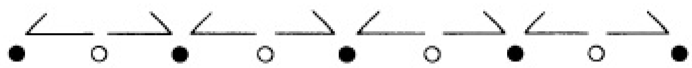


Figura 4.7: Grupo de simetria $\mathcal{F}_1^2$

Agora suponha que $\mathcal{F}$ contém uma meia-volta e uma reflexão, σ_q, em uma reta q.

Se $q \neq c$, q é perpendicular a c em A_i, ou q é perpendicular a c em M_i, então voltamos ao caso $\mathcal{F}_2^1$.

Para obter algo novo, devemos supor q não passando por A_i e nem por M_i.

Uma vez que $\sigma_q(A)$ necessariamente é o centro de uma meia-volta em $\mathcal{F}$, pelo teorema 4.1 (tomando $\alpha = \sigma_q$) a única possibilidade que resta é que q é a mediatriz de $\overline{AM_i}$, para algum i. Como as meias-voltas estão em $\mathcal{F}$, a segunda parte do teorema 4.1 exige que $\mathcal{F}$ contenha a reflexão na mediatriz de $\overline{AM_i}$, para cada i. Consequentemente, em particular, $\mathcal{F}$ contém σ_p, em que p é a mediatriz de $\overline{AM}$.

Se a reta a é perpendicular a c em A, então $\mathcal{F}$ não pode conter simultâneamente σ_p e σ_a. Pois se isso ocorrer, a translação $\sigma_p \circ \sigma_a$ levaria A em M, o que é impossível. E também, como $\sigma_p \circ \sigma_a = \sigma_p \circ \sigma_c \circ \sigma_A$, segue que $\mathcal{F}$ não pode conter simultâneamente σ_p e σ_c.

Com isso, temos então considerado todos os casos possíveis de maneiras de adicionar reflexões a $\mathcal{F}_2$.

Seja,

$$\mathcal{F}_2^2 = < \tau, \sigma_A, \sigma_p >,$$

em que p é a mediatriz de $\overline{AM}$.

Note que $\mathcal{F}_2^2$ contém uma reflexão com deslizamento $\sigma_p \circ \sigma_A$ com eixo c que leva A em M.

Seja $\gamma = \sigma_p \circ \sigma_A$. Logo, $\tau = \gamma^2$ e $\sigma_p = \gamma \circ \sigma_A$.

Com isto,

$$\mathcal{F}_2^2 =< \tau, \sigma_A, \sigma_p >=< \gamma, \sigma_A >.$$

Observe que $\mathcal{F}_2^2$ não contém σ_c pelas condições anteriores.

O padrão do friso tendo $\mathcal{F}_2^2$ como seu grupo de simetria, tem um ponto de simetria, uma reta de simetria, mas o centro não é uma reta de simetria.

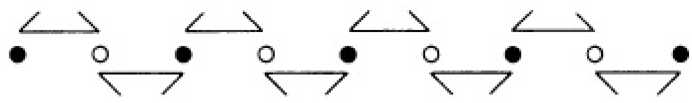


Figura 4.8: Grupo de simetria $\mathcal{F}_2^2$

Até o momento, consideramos todas as possibilidades para $\mathcal{F}$ que não contenham, inicialmente, reflexão com deslizamento. Suponha agora o caso em que $\mathcal{F}$ contém uma reflexão com deslizamento α.

Sabemos que α tem eixo c e α^2 é uma translação que fixa c.

Temos dois casos:

1º $\alpha^2 = \tau^{2n}$

2º $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$

No primeiro caso, $\alpha^2 = \tau^{2n}$, como α e τ comutam, então $(\alpha \circ \tau^{-n})^2$ é a identidade.

Logo, a isometria involutiva ímpar $\alpha \circ \tau^{-n}$ necessariamente é σ_c.

Com isto, $\alpha = \sigma_c \circ \tau^n$.

Neste caso, $\mathcal{F}$ contém σ_c e $\sigma_c \circ \tau^m$, para algum inteiro m. Se $\mathcal{F}$ não contém meias-voltas, então voltamos ao caso $\mathcal{F}_1^1$ e se $\mathcal{F}$ contém meias-voltas, voltamos ao caso $\mathcal{F}_2^1$.

Para o segundo caso, $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$, temos $(\tau^{-n} \circ \alpha)^2 = \tau$.

Seja $\gamma = \tau^{-n} \circ \alpha$. Então γ é uma isometria ímpar, cujo quadrado é τ. Consequentemente, γ é a única reflexão com deslizamento de eixo c que leva A em M.

Uma vez que $\gamma^{2m} = \tau^m$ e $\gamma^{2m+1} = \tau^m \circ \gamma$, segue que as reflexões com deslizamento em $\mathcal{F}$ são exatamente aquelas da forma $\tau^m \circ \gamma$.

Seja,

$$\mathcal{F}_1^3 =< \gamma >,$$

em que γ é a reflexão com deslizamento de eixo c, tal que $\gamma^2 = \tau$.

Um padrão de friso tendo $\mathcal{F}_1^3$ como grupo de simetria não tem ponto de simetria, não tem reta de simetria e é fixado por uma reflexão com deslizamento.

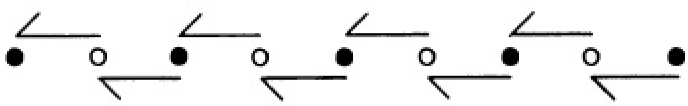


Figura 4.9: Grupo de simetria $\mathcal{F}_1^3$

Suponha que $\mathcal{F}$ contém isometrias adicionais a aquelas geradas pela reflexão com deslizamento γ com eixo c, em que $\gamma^2 = \tau$. Como o quadrado da translação $\sigma_c \circ \gamma$ é τ então $\sigma_c \circ \gamma$ não pertence a $< \tau >$. Logo, σ_c não pode estar em $\mathcal{F}$.

Se $\mathcal{F}$ contém σ_l, com $l \perp c$, então $\mathcal{F}$ contém a meia-volta $\sigma_l \circ \gamma$. E, se $\mathcal{F}$ contém uma meia-volta, então contém necessariamente σ_A. Neste caso, $\mathcal{F}$ contém σ_A e a reflexão com deslizamento γ de centro c, tal que $\gamma^2 = \tau$. Consequentemente $\mathcal{F}$ é $\mathcal{F}_2^2$.

Temos finalmente esgotado todas as possibilidades. Portanto os sete grupos de simetria são: $\mathcal{F}_1 =< \tau >$, $\mathcal{F}_1^1 =< \tau, \sigma_c >$, $\mathcal{F}_1^2 =< \tau, \sigma_a >$, $\mathcal{F}_1^3 =< \gamma >$, $\mathcal{F}_2 =< \tau, \sigma_A >$, $\mathcal{F}_2^1 =< \tau, \sigma_A, \sigma_c >$, $\mathcal{F}_2^2 =< \gamma, \sigma_A >$.

□

Para finalizar o capítulo apresentamos um mapa conceitual, onde conhecendo a resposta de no máximo quatro perguntas, é possível determinar em qual dos sete grupos esse frizo se encaixa.

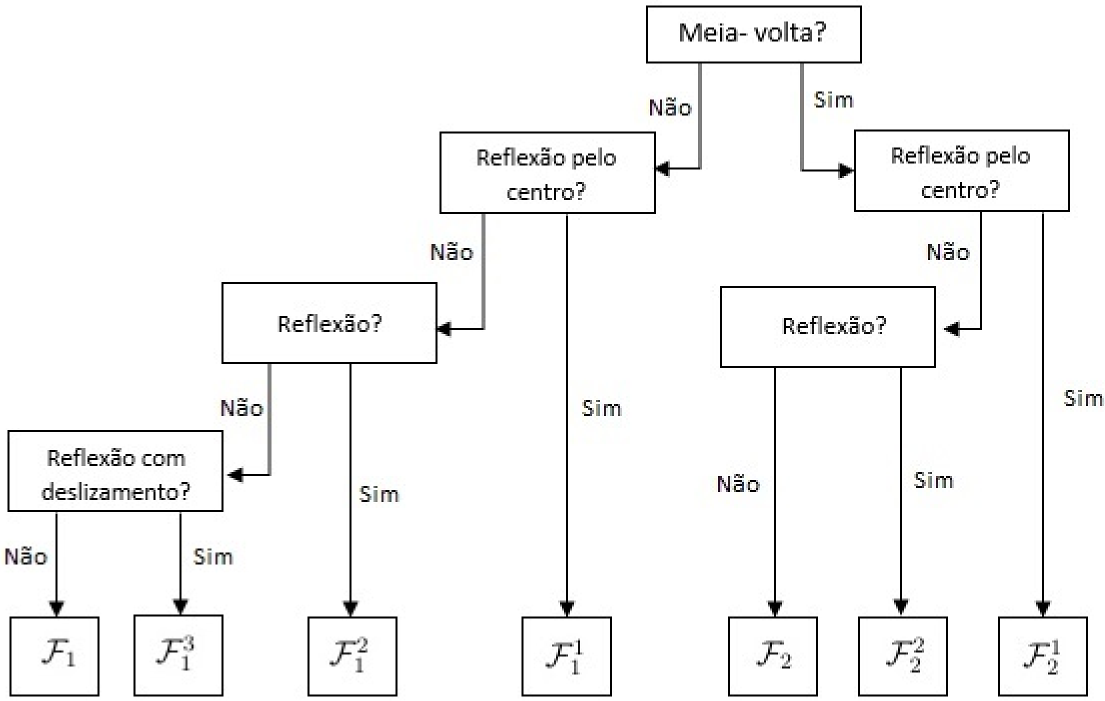


Figura 4.10: Mapa conceitual dos sete grupos de friso

5 Experiência em Sala de Aula

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, o conceito de simetria aparece no primeiro ciclo, onde o aluno deve ser capaz de observar se as formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem são simétricos ou não, e a partir do segundo ciclo sendo utilizado para identificar características das figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas. Também no segundo ciclo é introduzido aos alunos os movimentos de translação, reflexão e rotação, utilizando o plano cartesiano.

Pensando na necessidade de contextualizar o assunto trabalhado, afim de aumentar o interesse dos alunos e instigá-los na aprendizagem, foi realizada uma atividade para finalizar o estudo dos movimentos de reflexão, rotação e translação, com alunos do oitavo ano de uma escola pública de Rio Claro.

A atividade consistiu em apresentar os grupos de friso para os alunos e finalizá-la com a construção desses. Para o seu desenvolvimento foram utilizadas seis aulas com duração de 50 minutos cada, divididas da seguinte maneira: a primeira aula foi para que os alunos investigassem sobre o tema, na segunda aula eu formalizei os conceitos e apresentei a eles os sete grupos e as quatro aulas seguintes foram para que eles construíssem os frisos a partir do que foi apresentado.

Comecei explicando que faríamos um trabalho para que eles entendessem uma aplicação, no nosso dia-a-dia, desses movimentos estudados e então perguntei o que eles conheciam sobre os frisos, e todos responderam que não sabiam o que era e que nunca haviam visto. Ao invés de explicar sobre o assunto, preferi que eles pesquisassem e formulassem suas definições. Para isso, levei-os à sala de informática e sentados em duplas, pedi que procurassem sobre o assunto e fossem me falando o que estavam descobrindo.

A maioria dos alunos foi direto pesquisar nas imagens e rapidamente perceberam que já haviam visto os frisos em diversos lugares como em azulejos, janelas coloridas, na igreja, em vasos de cerâmica e tecidos.

Nesse momento surgiram muitos exemplos e comentários de lugares que os frisos poderiam ser encontrados, mas dois deles me chamou a atenção. Um dos alunos disse: “na minha casa têm vários frisos, pois minha vó tem muitos tapetes onde os desenhos se repetem“, achei interessante sua fala, pois nas imagens que eles estavam vendo, não aparecia nenhum tapete, o que me levou a entender que ele realmente havia compreendido o assunto. E outro aluno me surpreendeu ao dizer que os frisos eram simétricos, pois “as partes eram iguaizinhas“. A surpresa foi porque até o momento eu não havia falado nada sobre simetria.

Após deixá-los livres para pesquisarem sobre o assunto, pedi para que olhassem fotos sobre o Castelo de Alhambra, que fica em Granada, na Espanha, pois é um castelo belíssimo que traz em toda sua arquitetura esses frisos. Novamente fiquei extasiada com o envolvimento dos alunos. Uma das duplas sugeriu que entrassem pelo Google Maps, para que conseguissem explorar o interior do castelo como se estivessem lá. Todos adoraram a experiência, inclusive eu, pois mesmo planejando esse momento da aula, ele ocorreu de forma muito mais interessante e produtiva.

Na segunda parte dessa aula, foi feita a construção desses grupos de frisos, explicando que havia apenas sete maneiras de fazê-los, partindo dos movimentos que havíamos estudado. Nesse momento também foi formalizado os conceitos de frisos e simetrias. Para simplificar o assunto e facilitar o entendimento dos alunos, os grupos foram apresentados como sendo formados pelos seguintes movimentos:

- **Grupo 1**: translação;
- **Grupo 2**: reflexão horizontal;
- **Grupo 3**: reflexão vertical e translação;
- **Grupo 4**: reflexão com deslizamento;
- **Grupo 5**: reflexão vertical e reflexão horizontal;
- **Grupo 6**: rotação (meia-volta);
- **Grupo 7**: reflexão com deslizamento e meia-volta.

O único movimento que os alunos não conheciam era a reflexão com deslizamento, expliquei então que eles deveriam fazer como no grupo 3, fazer uma reflexão vertical e depois uma translação, mas desenhar apenas onde a figura ficaria após a translação.

Nas quatro aulas seguintes, foi proposto aos alunos que em duplas, construíssem esses sete grupos partindo de padrões que eles quisessem. Optei por deixar o padrão inicial livre, para estimular a imaginação, a criatividade e o interesse pela atividade.

Durante o desenvolvimento da atividade, houve um grande envolvimento de todos os alunos. Até mesmo os que não gostavam da matéria e costumavam atrapalhar o andamento das aulas, participaram nesse dia.

Um aluno em especial me chamou atenção, pois durante o ano todo eu tentei envolve-lo em diversas atividades, sempre sem sucesso, pois ele apresentava muita dificuldade de aprendizagem, e por conta disso não produzia nada durante as aulas e acabava sendo grosseiro quando era questionado. E nos dias em que desenvolvemos esse trabalho, o comportamento dele foi totalmente diferente. Ao perceber seu interesse, expliquei de maneira bem simplificada como funcionava cada movimento, e mesmo apresentando dificuldade, ele conseguiu construir todos os grupos, tive que corrigir alguns de seus desenhos, mas foi um avanço muito grande para ele.

Os demais alunos apresentaram dificuldade para construir o grupo 7, no qual precisavam aplicar uma reflexão com deslizamento e depois uma meia-volta. Para facilitar a compreensão, utilizei pequenos triângulos iguais feitos em cartolina, pois acreditava que manipulando o padrão ficaria mais fácil de fazê-los compreender como ficaria o desenho. Então fui passando pelas duplas com esse material, explicando como deveriam ser feitos os movimentos, e o resultado foi positivo. Alguns alunos recortaram os padrões que estavam utilizando para poder manipular antes de desenhar.

A seguir apresentamos algumas imagens dos frisos construídos pelos alunos:

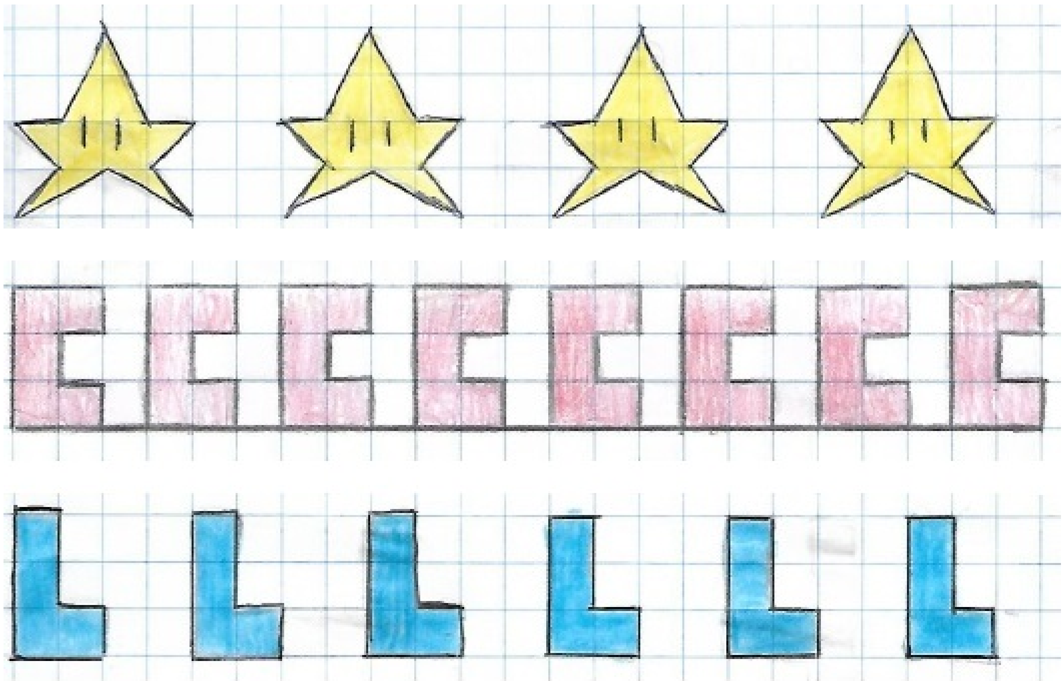


Figura 5.1: Grupo 1: translação

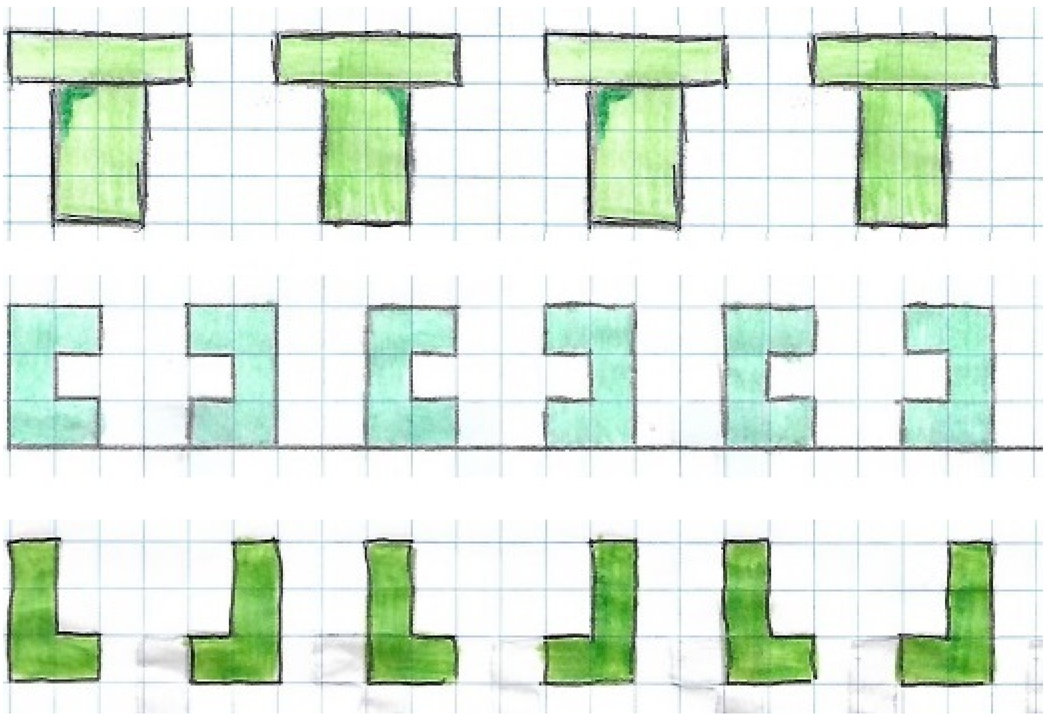


Figura 5.2: Grupo 2: reflexão horizontal

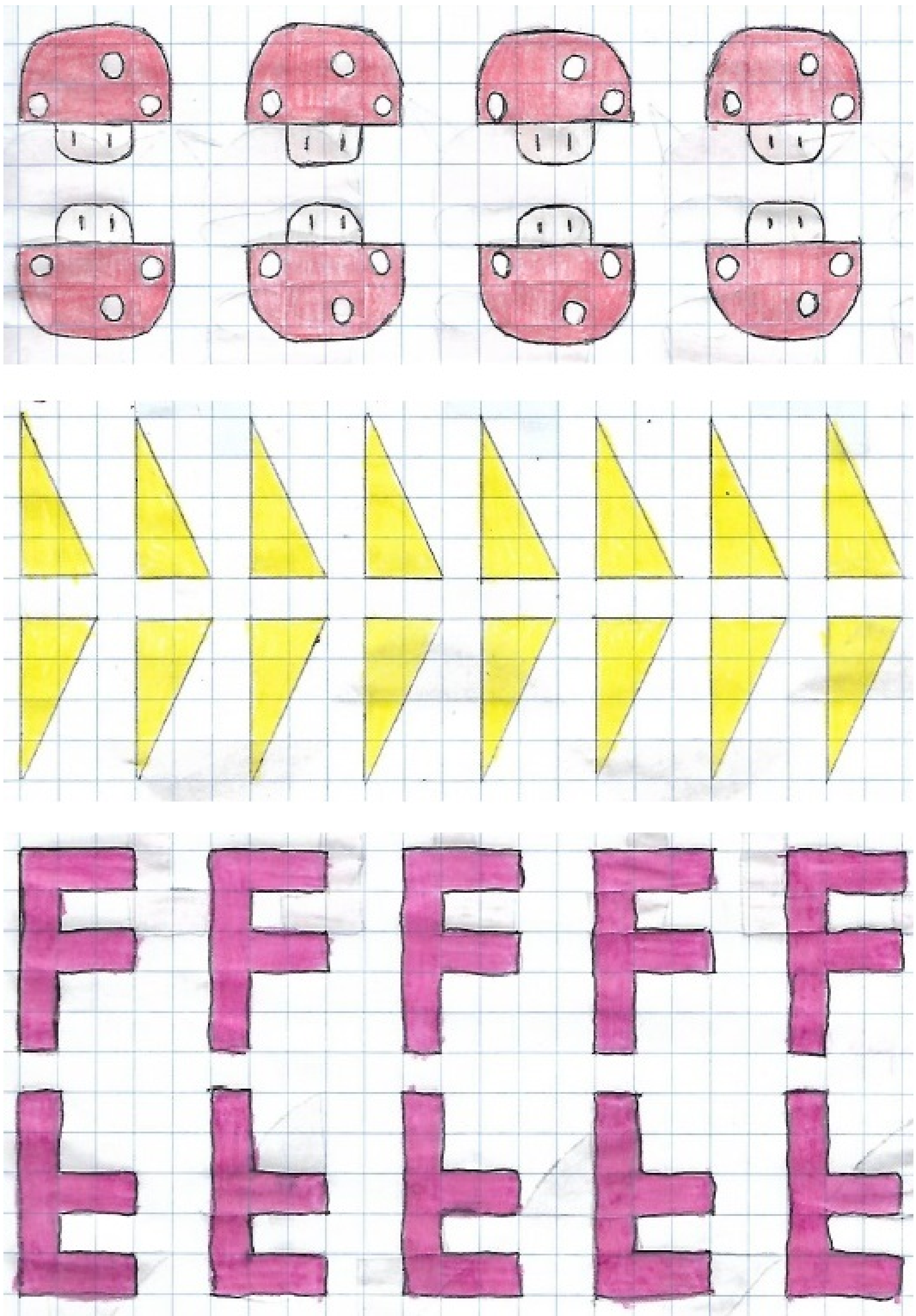


Figura 5.3: Grupo 3: reflexão vertical e translação

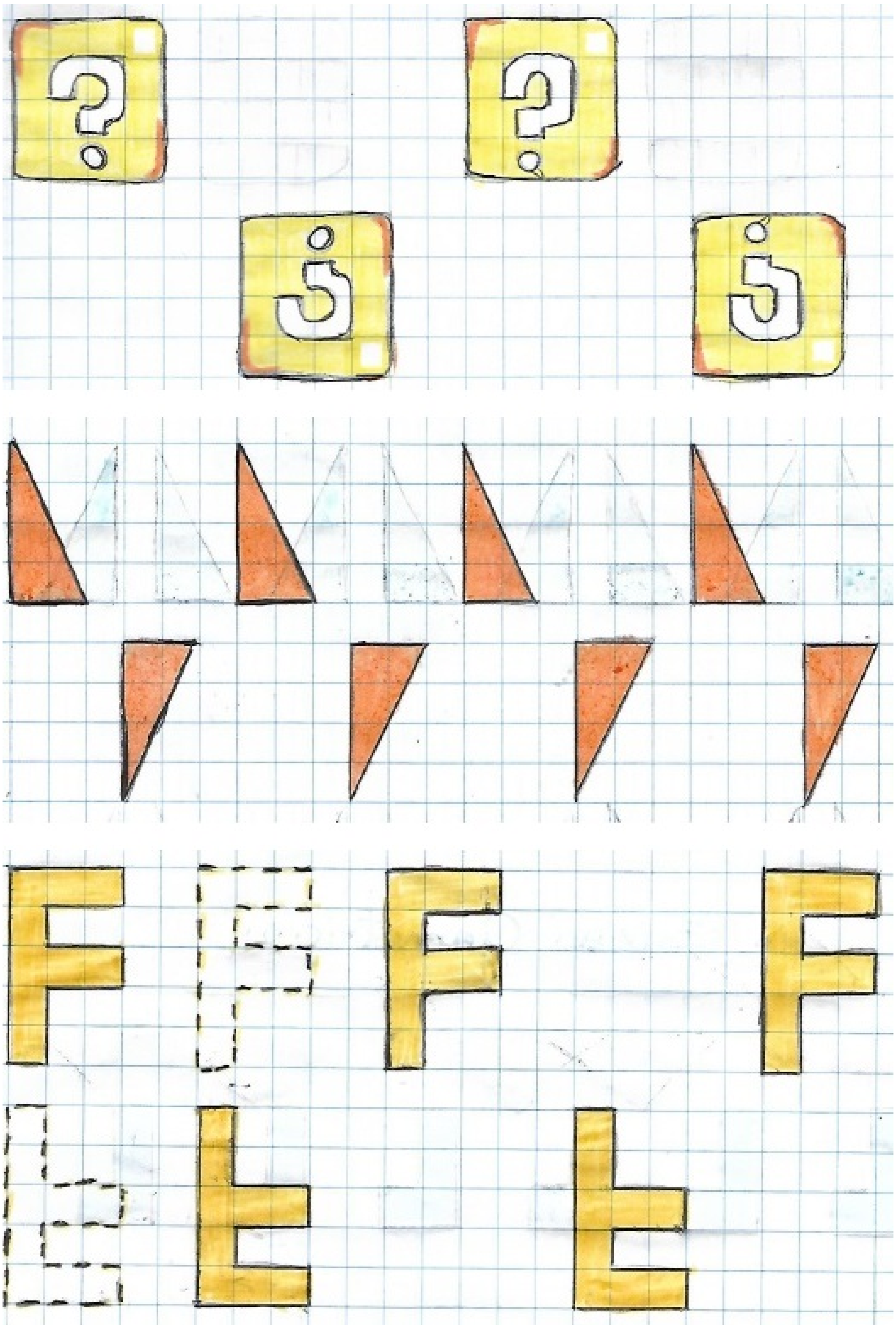


Figura 5.4: Grupo 4: reflexão com deslizamento

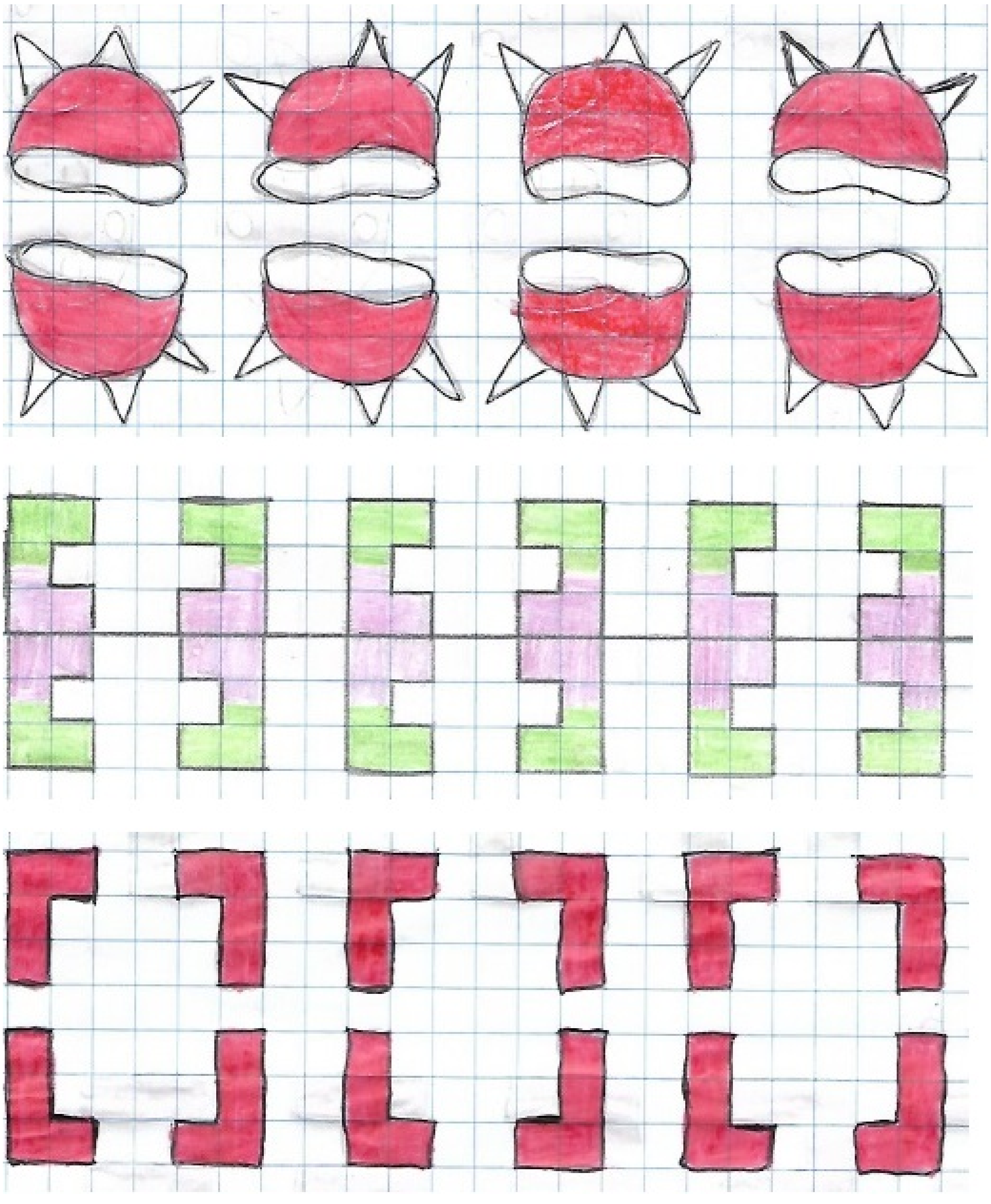


Figura 5.5: Grupo 5: reflexão vertical e reflexão horizontal

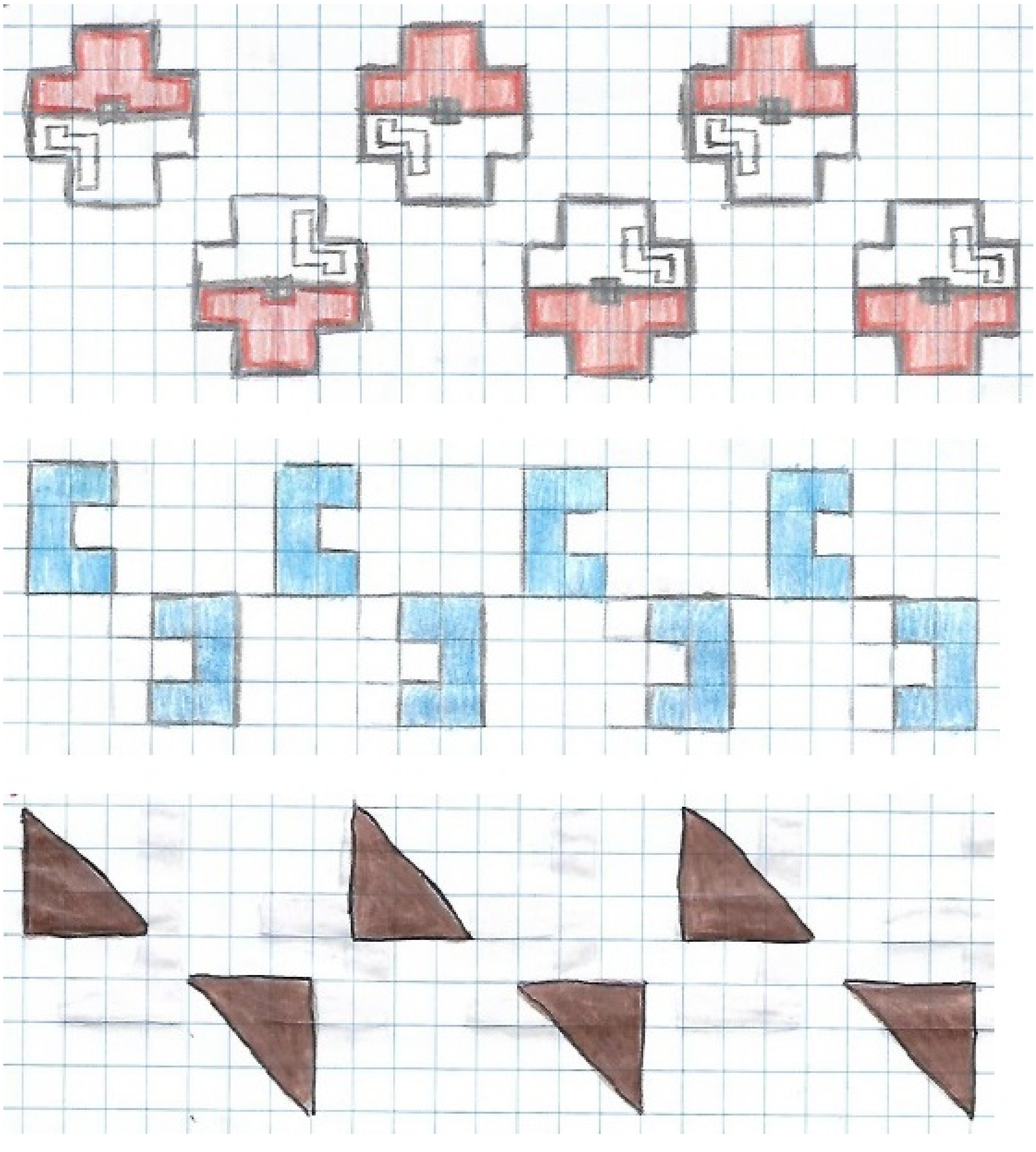


Figura 5.6: Grupo 6: meia-volta

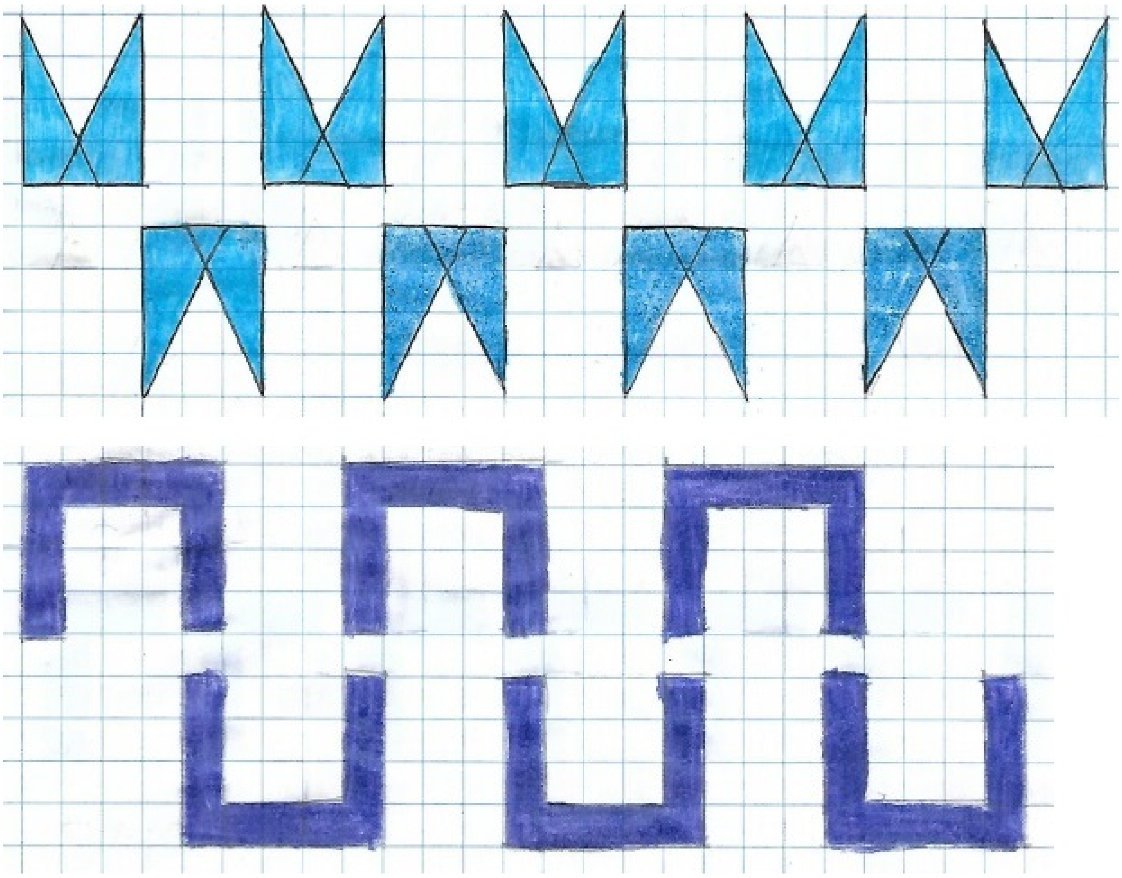


Figura 5.7: Grupo 7: reflexão com deslizamento e meia-volta

6 Conclusão

Nesse trabalho, o objetivo principal foi estudar os grupos de friso e como cada um deles é gerado.

Para isso, primeiramente fizemos um estudo sobre grupos e algumas de suas propriedades. Feito isso, desenvolvemos um material sobre as transformações geométricas, com definições e propriedades das translações, reflexões, rotações e reflexões com deslizamento, para então chegarmos ao teorema central do trabalho, onde vimos que existem apenas sete grupos de friso.

Para finalizar, pensamos em atividades que pudessem ser desenvolvidas com alunos do ensino fundamental, pois em sala de aula os professores são frequentemente questionados pelos alunos sobre aplicações do assunto estudado e como podem usá-lo em seu dia a dia, e muitas vezes o docente não conhece uma aplicação próxima da realidade do aluno que poderia chamar sua atenção e servir como elemento motivacional para o estudo.

Assim, as atividades desenvolvidas tinham como objetivo contextualizar o assunto que estava sendo estudado afim de tornar as aulas menos abstratas, mostrando que os movimentos estudados (translação, reflexão e rotação) estão presentes no nosso cotidiano em diversos lugares e dessa maneira fazer com que a aprendizagem fosse mais prazerosa.

O trabalho foi realizado em duplas, pois assim os alunos conseguiram trabalhar de maneira colaborativa, relacionando o assunto com o que já haviam aprendido e discutindo as ideias entre eles, até que chegassem a uma conclusão para fazer o desenho. No decorrer de todo processo as intervenções foram feitas somente quando necessárias ou quando solicitada pelos alunos, para que eles conseguissem de maneira independente elaborar suas conclusões e construir o seu conhecimento.

Após o término do trabalho, analisando as atividades realizadas pude perceber que o objetivo foi alcançado e a aprendizagem significativa. Os alunos relataram que conseguiram entender melhor cada movimento, que gostaram da experiência de pesquisar sobre o assunto, vendo as imagens e conhecendo o castelo, e que o mais interessante havia sido poder criar seu próprio friso, diferente dos que haviam visto.

É possível concluir que o assunto trabalhado é pertinente ao programa de pós graduação, pois trata de um assunto que faz parte do currículo do ensino fundamental e também do ensino médio e a maneira como foi abordado teve impacto positivo, visto que aulas diferenciadas facilitam o processo de ensino-aprendizagem, despertando a curiosidade e o interesse do aluno. Cabe ao professor criar situações que sejam do interesse da sua turma, já que cada um tem uma realidade diferente e reage de uma maneira às atividades propostas.

Referências

[1] MARTIN, G. E. *Transformation Geometry-An Introduction to Symmetry*. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1982.

[2] DOMINGUES, H. *Álgebra Moderna*. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

[3] FRALEIGH, J. B. *A First Course in Abstract Algebra*. 5. ed. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[4] MOISE, E. E. *Geometria Moderna*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1971.