

Seções Planas, Ângulos e Segmentos Notáveis nos Poliedros Regulares: uma Proposta de Integração e Dinamização das Geometrias Espacial e Plana

por

Ednaldo de Oliveira Martins

Orientador: Carlos Henrique dos Santos

Preprint PROFMAT 1 (2017)

17 de Março de 2017

Disponível via internet
<http://www.profmtat-sbm.org.br>

Seções Planas, Ângulos e Segmentos Notáveis nos Poliedros Regulares: uma Proposta de Integração e Dinamização das Geometrias Espacial e Plana

Ednaldo de Oliveira Martins

Departamento de Matemática – UFPR

81531-980 Curitiba, PR

Brasil

e-mail: ed_o.martins@outlook.com

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar ao leitor uma proposta pedagógica de aplicação dos poliedros regulares no ensino da Geometria Espacial. Dentre as diversas aplicações possíveis destes sólidos na sala de aula pretendemos chamar a atenção para secções planas, diedros, ângulos planos e “espaciais” e segmentos notáveis, proporcionando-lhes uma percepção geométrica diferenciada do espaço físico. No estudo desses objetos será utilizado o método dos cinco níveis de aprendizagem de VAN HIELE. Partindo da observação desses sólidos e de resultados tradicionalmente trabalhados na Educação Básica vamos provar a congruência dos ângulos poliédricos, provar a congruência e calcular a medida dos diedros formados por faces adjacentes e destacar secções planas e sólidos notáveis, com ênfase no icosaedro regular. Elencamos fatos importantes da história da Geometria e destacamos o conceito de prova em Matemática que floresceu com os gregos por volta do século IV a.C. Além disso, enfatizamos os objetos geométricos fundamentais.

Palavras-chave: Educação. Ensino Médio. Matemática. Geometria Espacial. Poliedros Regulares. Poliedros de Platão. Contextualização. Interdisciplinaridade. Van Hiele.

Abstract

The present work aims to present to the reader a pedagogical proposal for the application of regular polyhedra in the teaching of Space Geometry. Among many possible applications of these solids in the classroom we would like to draw attention to flat sections, dihedral, flat and "space" angles and notable segments, giving them a differentiated geometric perception of the physical space. In the study of these objects the method of the five levels of learning of VAN HIELE will be used. From the observation of these solids and the results traditionally worked on Basic Education we proved the congruence of the polyhedral angles, the congruence and calculate the measure of the dihedral formed by adjacent faces and also highlighted notable flat and solid sections, with emphasis on the regular icosahedron. We listed important facts of the history of Geometry and emphasized the concept of proof in Mathematics that flourished with the Greeks around the fourth century BC. In addition, we emphasized fundamental geometric objects.

Keywords: Education. High school. Mathematics. Spatial Geometry. Regular Polyhedra. Plato's polyhedrons. Contextualization. Interdisciplinarity. Van Hiele.

1 INTRODUÇÃO

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, protagonizou uma reforma que priorizou a contextualização como instrumento indispensável na compreensão dos conhecimentos escolares no uso cotidiano. De forma geral, contextualização é o ato de vincular o conhecimento à sua origem e à sua aplicação.

O conhecimento escolar pode ser visto pelo discente como algo que não irá contribuir para sua formação como cidadão. Para os professores das ciências naturais é comum ouvir os questionamentos, tanto por parte dos discentes como pelos respectivos responsáveis:

- “Para que estou aprendendo isso?”; ou
- “Onde o meu filho aplicará esse conhecimento?”

Essa concepção pode fazer com que o aluno passe a rejeitar aquele conteúdo, dificultando os processos de ensino e aprendizagem. Dessa forma, em nosso entendimento, torna-se essencial a contextualização daqueles conteúdos para enriquecimento da prática pedagógica.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar ao leitor uma proposta de integração do conteúdo de Geometria Espacial posicional e métrica com os poliedros regulares. Pretendemos motivar o estudo dos objetos geométricos usando os elementos destes sólidos (objetos geométricos espaciais, isto é, que possuem medidas lineares nas três dimensões do espaço) como meio de materialização e melhor visualização da geometria tanto espacial como a plana.

As características e a impressionante “regularidade” dos poliedros regulares vêm despertando o interesse da humanidade ao longo de toda a história registrada da ciência. Dentre as diversas aplicações possíveis destes sólidos na sala de aula pretendemos chamar a atenção dos discentes para as seções planas, para os ângulos formados por faces adjacentes (ângulo diédrico ou diedro), segmentos notáveis, esferas relacionadas e poliedros derivados dos poliedros regulares, proporcionando-lhes uma percepção geométrica diferenciada do espaço físico.

Na escola em que trabalho era costume, por parte dos professores, solicitar aos alunos do Ensino Médio a construção dos cinco poliedros regulares a partir das respectivas planificações. Na primeira oportunidade em que ministrei aulas de Geometria Espacial, no primeiro ano do Ensino Médio, em 2009, pareceu-me oportuno, além da construção dos poliedros, realizar o cálculo do ângulo diedro formado por duas faces consecutivas, como forma de integrar e contextualizar as geometrias plana e espacial.

Por ocasião daquele projeto, pareceu-nos também oportuno utilizar o método dos cinco níveis de aprendizagem de VAN HIELE: (1) VISUALIZAÇÃO; (2) ANÁLISE, (3) DEDUÇÃO INFORMAL, (4) DEDUÇÃO FORMAL; (5) RIGOR [10].

O trabalho que ora propomos pretende, a partir da observação desses sólidos, e de alguns resultados conhecidos e tradicionalmente trabalhados na Educação Básica como a congruência de triângulos e a “lei dos cossenos” e de outros resultados que ora são encontrados nas referências, ora são demonstrados, provar que num poliedro regular os diedros, formados por faces adjacentes, e os ângulos poliédricos são congruentes. Além disso, calculamos a medida desses diedros e revelamos diversas secções planas notáveis nos poliedros regulares.

Na Secção 2 vamos percorrer a legislação educacional e alguns autores que incentivam e orientam a contextualização e a interdisciplinaridade da educação como forma de integração dos conteúdos curriculares na Educação Escolar Básica no Brasil, onde destacamos o Modelo de Van Hiele para o ensino da geometria [10]. Neste trabalho procuramos adaptá-lo ao Ensino da Geometria Espacial posicional e métrica.

Como suporte para os temas centrais deste trabalho, na Secção 3 vamos discorrer sobre os fundamentos da Geometria Euclidiana onde apresentamos um breve histórico dos princípios e do conceito de prova em Matemática, da linguagem de conjuntos aplicada à lógica e dos conceitos primitivos da Geometria.

Ainda na Secção 3 vamos descrever elementos geométricos julgados essenciais que serão tratados de forma integrada com os poliedros regulares. Os principais resultados da Geometria Euclidiana Plana utilizados neste trabalho são apresentados de forma sucinta, sem a preocupação da demonstração formal da maioria das propriedades (pois são facilmente encontradas nas referências) a exceção do pentágono regular que vamos demonstrar algumas relações notáveis.

Na Secção 4 os objetos essenciais da Geometria Espacial Posicional e Métrica são apresentados. Procuramos representá-los por meio de imagens e conceitos associados. Também são descritas as principais posições relativas entre esses objetos. Essa secção destina-se, assim como os anteriores, a fundamentar os elementos que serão integrados no próximo secção.

O foco deste trabalho é a Secção 5. Nessa secção são apresentadas diversas características dos poliedros regulares, algumas secções planas notáveis e também outros poliedros derivados que são formados ora a partir de alguns vértices, faces e arestas, ora a partir apenas de pontos notáveis como pontos médios de arestas e vértices, principalmente no icosaedro regular.

Dessa forma esse trabalho não pretende ser um compêndio sobre as possibilidades de aplicação pedagógica dos poliedros regulares, por exemplo, só apresentamos as esferas relacionadas ao icosaedro regular!

Neste trabalho pretendemos:

- a) Contextualizar os elementos básicos da Geometria por meio de objetos sólidos notáveis;

- b) Relacionar o conceito de prova em Matemática com a própria construção do conhecimento científico e tecnológico, apresentando exemplos de demonstrações diretas, exaustivas (que esgotam possibilidades) e por redução ao absurdo;
- c) Destacar relações e aprofundar o conhecimento geométrico por meio de definições, teoremas e propriedades de figuras planas e espaciais; e
- d) Indicar possibilidades de aplicação pedagógica dos poliedros regulares.

Assim, consideramos este texto como um estudo aprofundado daquele trabalho que começamos a desenvolver com nossos alunos no ano de 2009. Esperamos que ele sirva como subsídio e gerador de novas propostas pedagógicas para professores, alunos e leitores em geral.

2 POLIEDROS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

O ensino na Educação Básica vem passando por diversas propostas de reformulação tanto dos conteúdos curriculares quanto da forma pedagógica de aprendizagem dos conhecimentos escolares. A Lei de Diretrizes e Bases para Educação de 1996 propôs que os conhecimentos escolares pudessem ser utilizados no cotidiano dos cidadãos, priorizando a contextualização e a interdisciplinaridade [23].

De forma geral, contextualização é o ato de vincular o conhecimento à sua origem e à sua aplicação. A ideia de contextualização entrou em pauta com a reforma do Ensino Médio. Além disso, foram desenvolvidos os PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais, para orientarem a escola e os professores na aplicação do novo modelo. Os PCN foram estruturados para orientarem a contextualização e a interdisciplinaridade [23].

O conceito de interdisciplinaridade surgiu no final do século XIX com o intuito de reformular a fragmentação das ciências, divididas em muitas disciplinas, devido principalmente à influência do Positivismo [18].

Com a interdisciplinaridade pretendia-se restabelecer um diálogo entre as ciências, embora não resgatasse ainda a unidade e a totalidade do saber. Posteriormente o conceito de interdisciplinaridade foi sendo absorvido pelas ciências vinculadas às práticas pedagógicas.

Edward Claparède, um dos mestres de Piaget, fundou em 1912 o Instituto Jean-Jacques Rousseau, em Genebra. Naquele instituto foi ampliada a discussão sobre a relação entre as ciências mães e as ciências aplicadas à educação: a sociologia da educação, a psicologia da educação, etc. Outras noções correlatas foram surgindo, como intradisciplinaridade, pluridisciplinaridade e transdisciplinaridade [18].

A intradisciplinaridade pode ser entendida como uma relação interna entre o conhecimento teórico da disciplina e a sua respectiva aplicação prática. Assim, o ensino do teorema de Pitágoras e a aplicação deste teorema na resolução do problema de calcular uma medida inacessível caracteriza um contexto intradisciplinar.

Quando uma aula é ministrada, Matemática, por exemplo, mobiliza naturalmente no discente o conhecimento presente em várias disciplinas. Isto é um exemplo da pluridisciplinaridade.

Piaget sustentava que a interdisciplinaridade seria uma forma de se chegar à transdisciplinaridade, etapa que não ficaria na interação e reciprocidade entre as ciências, mas alcançaria um estágio onde não haveria mais fronteiras entre as disciplinas.

Jean William Fritz Piaget nasceu em nove de agosto de 1895, em Neuchâtel, Suíça. Considerado um dos grandes pensadores do século XX, defendeu uma abordagem interdisciplinar para a investigação epistemológica e fundou a Epistemologia Genética, teoria do conhecimento com base no estudo da gênese psicológica do pensamento humano.

“Durante décadas, a teoria de Piaget influenciou o currículo escolar. Para o autor, as crianças, em faixas etárias determinadas, passam por quatro estágios estáveis de estruturação do pensamento: sensório-motor, pré-operacional, das operações concretas e das operações formais” [10].

Piaget faleceu em dezesseis de setembro de 1980. Durante sua vida Piaget escreveu mais de cinquenta livros e centenas de artigos [18].

A interdisciplinaridade procura garantir a construção de um conhecimento universal, desconstruindo as fronteiras das disciplinas. Dessa forma, apenas integrar os conteúdos de diversas disciplinas não seria suficiente. Seria preciso uma atitude e postura interdisciplinar, atitude de busca, envolvimento, compromisso e reciprocidade diante do conhecimento.

No seu artigo 28º, a LDB indica como ela pode ser posta em prática, quando afirma que “os sistemas de ensino promoverão as adaptações necessárias à sua adequação às peculiaridades da vida rural e de cada região, especialmente”. Isto é, o ensino deve considerar a realidade de cada região, as experiências vivenciadas pelos docentes, suas prováveis áreas de atuação profissional, como eles podem atuar como cidadãos; enfim, ensinar levando em conta o contexto dos estudantes.

Assim, acreditamos que o conhecimento ganhará significado real para o aluno. Caso contrário, o aluno poderá questionar: “Para que estou aprendendo isso?” ou “Quando eu usarei isso em minha vida?”. Isso pode fazer com que o aluno passe a rejeitar a matéria, dificultando os processos de ensino e aprendizagem.

“Para que isso não ocorra e o aluno sinta também prazer e gosto pelo conhecimento, entendendo sua importância; o professor precisa definir o tratamento a ser dado ao conteúdo que será ensinado e, depois, tomar as decisões didáticas e metodológicas necessárias para que o ambiente de aprendizagem contextualizada seja eficaz” [23].

Dessa forma torna-se necessário que o professor crie situações comuns ao dia a dia do aluno e o faça interagir ativamente de modo intelectual e afetivo, trazendo o cotidiano para a sala de aula e aproximando o dia a dia dos alunos do conhecimento científico. Isso é sempre possível, pois inúmeros e praticamente inesgotáveis são os campos e contextos de experiências vivenciadas pelos alunos e pela escola, que podem ser utilizados para dar vida e significado ao conhecimento.

Podem ser abordados aspectos como: problemas ou fenômenos psíquicos, físicos, econômicos, sociais, ambientais, culturais, políticos, etc. Não precisam estar diretamente ligados aos alunos, mas podem fazer referência também aos seus familiares, desde que os discentes estejam envolvidos com a situação apresentada.

O ensino da geometria deve desenvolver a compreensão do mundo, estimulando o discente a observar, perceber semelhanças e diferenças, a identificar regularidades, compreender conceitos métricos, e permitir o estabelecimento de conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

“Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” [10].

Os registros históricos revelam que o homem sempre procurou representar visualmente o mundo que o cerca. Com a evolução do pensamento científico, a Geometria passa a se firmar “*como disciplina empírica vocacionada para resolver problemas da vida prática*” [10].

Além disso, todos nós iniciamos o nosso “aprendizado” da Geometria à medida que descobrimos o mundo que nos cerca. Utilizar exemplos da realidade dos discentes na prática pedagógica nos parece ser um caminho virtuoso de diálogo, tomando como ponto de partida a visualização dos objetos geométricos presentes na realidade dos alunos por meio de imagens, modelos etc.

“A criança começa a aprender e praticar Geometria pelo simples fato de ver, sentir e se movimentar no espaço. À medida que cresce, vai aprofundando o conhecimento da natureza dos objetos que visualiza no mundo, agregando conceitos como tamanho, forma, posição, movimento etc. De modo geral, a experiência do ser humano com o mundo é tão rica que, do ponto de vista do ensino, oferece uma fonte inesgotável de contextos que os professores de Matemática devem privilegiar na prática docente” [10].

O estudo dos poliedros pode ser integrado em diversos contextos. Eles aparecem na natureza em forma de cristais, nas estruturas de alguns vírus e em modelos de diversas moléculas. Os poliedros estão presentes na Arquitetura, na Arte, em ornamentações, na Cartografia, na Natureza, na Filosofia e na Literatura. Os poliedros regulares, em particular, possuem diversas curiosidades históricas, como tentativas de explicação do universo, por exemplo. Além disso, consideramos curioso o simples aspecto exterior desses sólidos.

Os poliedros têm despertado o interesse da humanidade há muito tempo, além disso, o estudo dos poliedros tem contribuído para o desenvolvimento de diversas áreas humanas, além da Matemática [13].

Partindo da regularidade, das curiosidades históricas e de outros aspectos desses sólidos, esperamos motivar o estudo dos objetos geométricos presentes nos poliedros regulares. De modo que vértices (pontos), arestas (segmentos de retas), faces (polígonos regulares), ângulos planos, diedros, ângulos poliédricos, seções planas e esferas relacionadas, possam ser estudados com maior interesse e profundidade. Além disso, pode-se integrá-los com o estudo de Análise Combinatória, Probabilidade, Geometria Analítica etc.

A forma como serão estudadas as seções planas e os cálculos dos ângulos diédricos formados por duas faces consecutivas de um poliedro regular envolverá diversos aspectos geométricos trabalhados na Educação Básica. Assim, esperamos uma integração maior entre a geometria das figuras planas, uma geometria essencialmente virtual, com objetos reais, que podem ser materializados no espaço físico.

Os ângulos entre planos aparecem em diversas situações: em objetos portáteis, nas construções, nos automóveis, nas estradas, viadutos etc.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio afirmam que:

“O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano [...]. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes” [8].

Podemos definir a Geometria da Educação Básica como a ciência que trata das propriedades das figuras tanto no plano como no espaço. Para Keith Devlin, que adotou a frase: “*A Matemática é a ciência dos Padrões*”, a Geometria estuda os padrões das formas. Não qualquer tipo de forma, mas aquelas que possuem regularidades mensuráveis, como polígonos, círculos, poliedros, elipses, esferas etc. [11].

A construção dos poliedros regulares, normalmente a partir das respectivas planificações, além de ser uma possibilidade de atividade lúdica, favorece a aplicação do modelo dos cinco níveis de aprendizagem de Van Hiele [10]. Esse modelo procura conjugar a contextualização com a formalidade e o rigor necessário e inerente ao conhecimento matemático.

O ensino da Matemática até o início do século XX privilegiava o pensamento abstrato baseado na lógica e na axiomática, devido aos gregos, principalmente a Euclides (trataremos com mais detalhes na Secção 3). Porém, em meados daquele século, a ênfase na abstração e a preocupação com a análise das estruturas da Matemática proporcionaram o surgimento do

movimento conhecido como *Matemática Moderna*. Esse movimento dominou o ensino de Matemática na maioria das nações ocidentais na segunda metade do século XX.

“Como, em geral, se podem expressar as ideias abstratas da Matemática de maneira mais clara e concisa em termos da notação e dos conceitos da teoria dos conjuntos e como esta é, reconhecidamente, um dos fundamentos da Matemática, compreende-se por que a Matemática Moderna se inicia com uma introdução elementar à teoria dos conjuntos e prossegue com uma utilização persistente de suas noções e ideias. [...]. Como ocorre frequentemente com as ideias novas, houve uma tendência entre os mais arrebatados a aplicar os princípios da nova abordagem mesmo a situações em que não ajudavam a simplificar ou tornar mais claras as coisas [...]” [16].

No entanto, a Matemática Moderna ajudou a aumentar o abismo entre o espaço físico real e os conceitos matemáticos resultando num fracasso em termos pedagógicos.

“Após o fracasso da reforma preconizada pela Matemática Moderna, diversas ações pedagógicas surgiram em favor de um ensino da Geometria contextualizado, tendo como fundamento as teorias de Piaget e Vygotsky” [10].

Lev Semenovitch Vygotsky nasceu em 17 de novembro de 1896, em Moscou. Foi professor de literatura, advogado, médico e pesquisador em psicologia. Vygotsky foi pioneiro dos pensadores sócio interacionistas que defendem que o desenvolvimento intelectual das crianças ocorre em função das interações sociais e condições de vida. A sociedade acadêmica ocidental descobriu seus trabalhos muitos anos após a sua morte ocorrida em 11 de junho de 1934, por tuberculose, aos 37 anos [19].

A metodologia construtivista propõe que o ensino da Geometria esteja vinculado às situações reais e articulado com valores numéricos. Assim, tanto a lógica-axiomática iniciada pelos gregos, como a Matemática Moderna do século XX, vão aos poucos, dando espaço ao construtivismo.

“No entanto, esta maneira de desenvolver a docência em Matemática coloca dificuldades, muitas das quais ainda não encontraram respostas definitivas. Por exemplo, se no ensino da Geometria não há mais o fio (condutor) axiomático como guia, como assegurar coerência na prática pedagógica? Como, enfim, integrar as ideias construtivistas à prática da docência através de situações problemas?” [10].

Este último parágrafo nos remete à questão mais fundamental de como ensinar Geometria de modo que:

- a Geometria seja trabalhada de forma contextualizada, através de situações-problema;
- construindo o conhecimento geométrico necessário; e
- sem permitir que se perca o “alicerce do pensamento axiomático”.

Neste contexto surge o Modelo de Van Hiele para o ensino da Geometria.

“Este modelo foi inicialmente proposto por Pierre Van Hiele e sua esposa Dina Van Hiele-Geoldof, motivados pelo conhecimento das dificuldades apresentadas por seus alunos do curso secundário da Holanda. O trabalho dos Van Hiele teve lenta penetração na comunidade de pesquisa.” [10].

Esse método propõe a construção do conhecimento geométrico em etapas, ou níveis, a partir da visualização do objeto de estudo.

A professora Lilian Nasser, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, começou a divulgar esse modelo no Brasil a partir de 1990, quando defendeu tese na Universidade de Londres [10]. A professora Ana Kaleff, da Universidade Federal Fluminense, também contribuiu para impulsionar o modelo de Van Hiele, através de trabalhos de pesquisa e na prática da formação continuada de professores [10].

O Modelo de Van Hiele propõe que a Geometria seja estudada a partir das sensações visuais e táteis do espaço físico. O discente é levado a construir o conhecimento geométrico em etapas, ou seja, a partir de cada um dos cinco níveis, representados sucintamente no Quadro 1.

Nível de Van Hiele	Características	Exemplo
1º Nível Reconhecimento	Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global.	Classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
2º Nível Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de propriedades: 4 lados iguais, 4 ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos.
3º Nível Abstração	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra; Argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades mínimas: 4 lados iguais, 4 ângulos retos. Reconhecimento de que o quadrado é também um retângulo.
4º Nível Dedução	Domínio do processo dedutivo e das demonstrações; Reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.

5º Nível Rigor	Capacidade de compreender demonstrações formais; Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.
-------------------	---	---

Quadro 1: níveis de Van Hiele
Fonte: [28]

Nosso trabalho procurar adaptar esse modelo à geometria espacial tendo como matéria-prima os poliedros regulares. Dessa forma, nosso “quadro dos níveis” passa a ser:

Nível de Van Hiele	Características	Exemplo
1º Nível Reconhecimento	Reconhecimento, comparação e nomenclatura dos sólidos geométricos por sua aparência global.	Identificação dos poliedros regulares por meio de suas principais características: formas dos polígonos que formam as faces, vértices, arestas e número de faces.
2º Nível Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição dos poliedros: relação de Euler e contagem do número de vértices, faces e arestas; congruência das faces, número de diedros, ângulos planos.
3º Nível Abstração	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra; Argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Aparente congruência dos ângulos poliédricos e dos diedros, diagonais do poliedro, secções com aparência de polígonos, poliedros derivados e esferas relacionadas.
4º Nível Dedução	Domínio do processo dedutivo e das demonstrações; Reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração da congruência e da medida dos diedros; congruência dos ângulos poliédricos, medidas das diagonais do poliedro, demonstrações de secções planas notáveis, poliedros

		derivados e esferas relacionadas.
5º Nível Rigor	Capacidade de compreender demonstrações formais; Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.

Quadro 2: adaptação dos níveis de Van Hiele no estudo dos poliedros regulares
Fonte: o autor

Iniciamos, agora, uma sucinta revisão dos conceitos da Geometria utilizados neste trabalho, a partir de uma breve introdução histórica.

3 GEOMETRIA: ELEMENTOS PRIMITIVOS E A AXIOMÁTICA

Os registros históricos mais antigos sobre o conhecimento da Geometria, e da Matemática em geral, foram deixados pela antiga civilização da Babilônia e pelo antigo Egito. As descobertas matemáticas daquele período foram empregadas nas construções da antiguidade, no estudo do movimento dos astros, nas práticas da agricultura e do comércio [16].

No século VI a.C. Tales de Mileto, um dos pioneiros do raciocínio lógico, fundou a escola jônica, onde floresceu a filosofia grega e nasceu a geometria demonstrativa. A partir de então, a busca da organização racional do pensamento e a necessidade de apresentar o conhecimento matemático através de uma cadeia de raciocínios dedutivos passou a constituir a chamada “prova de uma verdade matemática”.

“Tales, Pitágoras, Aristóteles, Pârmênides e Arquimedes, entre outros, sistematizam, logicamente, a aritmética e a geometria empíricas das civilizações do Mediterrâneo. Tales é, portanto, um divisor de águas na evolução do conhecimento Matemático. O conhecimento acumulado até sua época consistia de um conjunto de regras práticas para resolver problemas concretos. Em seus trabalhos na área de Matemática, tendo a geometria como fio condutor, Tales inicia um processo de construção de provas dos resultados, através de argumentos estruturados logicamente” [9].

Dos anos 600 a.C a 300 a.C. a matemática grega obteve um avanço extraordinário. Além disso, os estudiosos gregos procuraram relacionar os conhecimentos matemáticos com o estudo da filosofia, relacionando-os também com a mitologia. Platão (427 a.C. a 387 a.C.) no famoso texto conhecido por *Timeu* – Platão escreveu diversos textos conhecidos por Diálogos: *Timeu*, *Crítias*, *Fédon*, etc. – os poliedros regulares são utilizados para representar os elementos básicos que compõe o universo.

“E aqui se impõe algo que devemos sempre afirmar acima de tudo o mais em nosso discurso: o deus moldou esses quatro tipos para serem tão belos e excelentes quanto possível, o que não eram até então. Trata-se agora, todavia, de empenhar-me em explicar-vos a disposição e origem desses tipos, um a um, empreendendo essa tarefa uma forma expositiva incomum” [3].

Para classificar e relacionar os objetos geométricos, os gregos introduziram o método postulacional, no qual alguns elementos são constituídos e uma pequena lista de “relações básicas”, entre esses elementos, é aceita como verdade absoluta, incontestável.

Através das ferramentas lógicas desenvolvidas pelos gregos e também empregadas na filosofia, dos conceitos iniciais e das relações básicas são construídas novas relações entre os objetos e as relações básicas. Essas novas relações são conhecidas por teoremas.

De forma geral os gregos adotavam um método para demonstrações geométricas que ficou conhecido por “sintético” [11]. No estudo da Geometria, o procedimento sintético é fundamentado simplesmente em conceitos geométricos, independentes da Álgebra. Partindo do saber conhecido e mais simples chega-se ao mais complexo.

A partir do Renascimento, as propriedades geométricas tão numerosas e variadas ganharam um novo princípio de classificação, o “analítico”, cujo procedimento é baseado na introdução de coordenadas numéricas, e utiliza as técnicas da Álgebra. O método analítico provocou uma profunda alteração na Matemática [11].

Este trabalho pretende motivar o uso dos poliedros regulares no ensino dos objetos geométricos constantes do conteúdo de Geometria Espacial posicional e métrica, do Ensino Médio, que tradicionalmente é ministrada de forma independente em relação à Geometria Analítica. Portanto, vamos priorizar o procedimento **sintético**. Como sugestão para trabalhos futuros, esse mesmo conteúdo poderá ser estudado analiticamente. Na próxima seção, vamos discutir sumariamente as estruturas da Geometria da Educação Básica.

3.1 O Raciocínio Postulacional na Geometria da Educação Básica

A Geometria ministrada na Educação Básica é definida como Geometria Euclidiana, pois é fundamentada em cinco postulados formalizados por Euclides, matemático grego que nasceu por volta de 330 a.C., na cidade de Alexandria [25].

Por volta de 300 a.C., Euclides compôs uma das coleções de livros mais estudadas em todos os tempos intitulada “Os Elementos”, composta de 13 livros [4].

Na segunda metade do século V a.C., eclodiu um conflito armado entre as duas principais cidades-estados gregas, Atenas e Esparta, conhecido como Guerra do Peloponeso. Essa guerra enfraqueceu e trouxe desunião às cidades gregas, tornando-as vulneráveis a ataques de outras nações [16].

Em 338 a.C., Felipe II, da Macedônia, conquistou a cidade de Atenas estendendo o Império Macedônico até o sul da Grécia. Em 336 a.C., seu filho Alexandre sucedeu-lhe o trono e num período de cinco anos conquistou um vasto império cujos limites chegavam até o oeste da Índia, incluindo o Egito, a Síria, a Palestina e a Pérsia. Alexandre escolheu um porto bem colocado, no norte da África, para ser a capital do seu vasto império, Alexandria.

Após a morte de Alexandre em 323 a.C., o Império Macedônico foi dividido e coube à dinastia dos Ptolomeus a administração do Reino do Egito, onde estava situada Alexandria. Os Ptolomeus compartilhavam da visão de Alexandre de tornar a capital Alexandria um grande centro de cultura e de estudo. Foi criada uma escola e uma biblioteca para promover a Ciência e a Filosofia que atraiu personalidades distintas, com seus conhecimentos e culturas, incluindo setenta judeus que traduziram para o grego, o Antigo Testamento da Bíblia. Este grande centro cultural da Antiguidade, foi fundamental para a divulgação dos estudos científicos e em particular, dos poliedros regulares [13].

O raciocínio postulacional desenvolvido pelos gregos é utilizado até os nossos dias tanto nas ciências naturais, como nas humanas. Na forma postulacional de raciocínio as afirmações verdadeiras podem ser agrupadas basicamente em duas classes. A primeira é composta por afirmações iniciais que devem ser aceitas sem nenhum tipo de demonstração formal. Na segunda classe, as afirmações exigem demonstração lógica consistente e coerente com outras verdades previamente aceitas ou demonstradas.

“(...) o método postulacional inspirado em Euclides penetrou quase todos os campos da Matemática a ponto de alguns matemáticos defenderem a tese de que não só o raciocínio matemático é postulacional mas que também, no sentido inverso, raciocínio postulacional é raciocínio matemático. Uma consequência relativamente moderna foi a criação de um campo de estudos chamado *axiomática*, dedicado ao exame das propriedades gerais dos conjuntos de postulados e do raciocínio postulacional” [16].

Na obra “Os Elementos”, Euclides organiza as afirmações ali presentes em definições, postulados, axiomas e teoremas. As definições caracterizam os objetos enquanto que os axiomas e postulados são verdades aceitas sem demonstração e os teoremas devem ser provados formalmente. Os teoremas, às vezes, recebem nomes diferenciados de acordo com a importância ou aplicabilidade: lema, corolário ou problema.

Um lema é um resultado “de menor importância” que será utilizado como parte da prova de um resultado “de maior importância”: o teorema. Já o corolário é uma verdade, um novo teorema, que é uma consequência “imediate” do teorema anterior (do qual é consequência).

De uma maneira geral, um teorema é uma “lei generalizada” que pode ser aplicada em diversas situações. Por outro lado, um problema é uma questão “particular”.

Os axiomas e teoremas exprimem verdades a respeito dos elementos presentes nas respectivas definições, suas características e relações. No primeiro livro dos Elementos são apresentados vinte e cinco definições, três postulados, doze axiomas e quarenta e oito proposições classificadas como problemas ou teoremas.

Para Eves, a maioria dos matemáticos gregos considerava três diferentes formas de distinguir os postulados dos axiomas:

- “a. um axioma é uma afirmação assumida como auto evidente e um postulado é uma construção de algo assumido como auto evidente;
- b. um axioma é uma suposição comum a todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência peculiar em estudo;
- c. um axioma é uma suposição de algo que é, ao mesmo tempo, óbvio e aceitável para o aprendiz; um postulado é uma suposição de algo que não é nem necessariamente óbvio e nem necessariamente aceitável para o aprendiz” [16].

Não há como ter certeza de quais afirmações Euclides classificou como postulados ou teoremas [16]. A seguir apresentamos aquelas que foram consagradas como postulados:

- “1. Pode-se traçar, de um ponto qualquer, a outro ponto, uma linha reta.
- 2. E que se pode continuar qualquer segmento de reta continuamente em uma reta.
- 3. E que com qualquer ponto e com qualquer intervalo pode-se construir um círculo.” [21].

Agora, as que foram definidas como axiomas:

- “1. Coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si;
- 2. Se coisas iguais se juntarem a outras iguais, os totais serão iguais;
- 3. E, se de coisas iguais se tirarem outras coisas iguais, os restos serão iguais;
- 4. E, se de coisas desiguais se juntarem outras iguais, os totais serão desiguais;
- 5. E, se de coisas desiguais se tirarem coisas iguais, os totais serão desiguais;
- 6. As quantidades, das quais cada uma por si faz o dobro de outra quantidade, são iguais;
- 7. E aquelas que são as metades de uma mesma quantidade, também são iguais;
- 8. Duas quantidades que se ajustam perfeitamente uma com a outra são iguais;
- 9. O todo é maior do que qualquer de suas partes;
- 10. Duas linhas retas não compreendem espaço;
- 11. Todos os ângulos retos são iguais;
- 12. É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.” [21].

No entanto, Euclides também utilizou como postulados, o décimo primeiro e o décimo segundo axiomas. Dessa forma, os três postulados acrescidos dos dois últimos axiomas formam o que conhecemos hoje por: os cinco postulados da geometria plana, ou os cinco postulados da Geometria Euclidiana ou ainda, os cinco postulados de Euclides. Aos demais dez axiomas, chamamos “noções comuns” e suas aplicações vão além da geometria [1].

O quinto postulado (décimo segundo axioma) foi considerado nos anos seguintes a divulgação como “muito extenso” para ser admitido como postulado. Um postulado deveria ser uma afirmação auto evidente, para ser aceito como verdade, sem demonstração. Assim, muitos Matemáticos ao longo dos séculos tentaram prová-lo a partir dos quatro primeiros e assim reduzir

o rol dos axiomas. Assim surgiu a **Geometria Neutra**, cujos axiomas são somente os quatro primeiros postulados de Euclides.

Na idade média, as tentativas de prova do quinto postulado conduziram ao surgimento de outras geometrias possíveis além da Geometria Euclidiana, as geometrias: **Hiperbólica e Elíptica** [25].

A obra de Euclides foi discutida por mais de vinte séculos. Encontramos nos livros que tratam da História da Matemática diversas críticas ao conteúdo daquela coleção apontando alguns erros lógicos, por exemplo. Ao longo de vinte séculos surgiram diversas tentativas de atualizá-lo.

“O conjunto de postulados escolhidos para uma teoria matemática deve satisfazer a dois requisitos: ele deve ser consistente (isto é, não deve ser possível chegar a contradições a partir dos postulados) e suficiente (isto é, deve ser possível determinar a veracidade de uma afirmativa a partir dos postulados). Além disso, é desejável que os postulados reflitam fatos que indiscutivelmente correspondam à nossa intuição a respeito dos objetos fundamentais da teoria” [29].

A obra “Os Elementos” foi a principal referência matemática para geômetras por quase dois mil anos. Apesar de ser uma obra vasta, era composta por treze livros, nos elementos não aparece uma definição explícita para ponto, reta e plano. O que ensinamos hoje é que esses objetos são considerados elementos primitivos (ou noções primitivas).

David Hilbert propôs em 1899 no seu livro “Grundlagen der Geometrie” (Fundamentos da Geometria) um compêndio de vinte e um axiomas estabelecendo as bases modernas da Geometria Euclidiana. Os objetivos principais eram tornar rigorosa a Geometria Euclidiana e apontar as ramificações decorrentes da discussão em torno do quinto postulado de Euclides, que geram novas geometrias. Outras axiomatizações modernas da Geometria Euclidiana são as de Alfred Tarski e de George Birkhoff [16].

O exercício do Magistério concede o benefício da análise de livros didáticos. Nossa experiência na análise de livros didáticos de Matemática para a Educação Básica, nos últimos 15 anos, no Brasil, revela que o texto mais comum para os cinco postulados da Geometria Euclidiana se apresenta da seguinte forma: (referências com textos similares: [15], [26] e [30]).

- 1°. Dois pontos distintos definem uma única reta.
- 2°. Retas possuem comprimento infinito.
- 3°. Dados um ponto P qualquer e uma distância fixa d é possível construir uma circunferência com centro no ponto P e raio com medida d .
- 4°. Todos os ângulos retos são congruentes.
- 5°. Por um ponto P não pertencente a uma reta r só existe uma reta s paralela à r (substituto, isto é, equivalente do quinto postulado de Euclides conhecido por axioma de Playfair [1]).

Para facilitar a notação, vamos denotar por PE1, PE2, (...), PE5 os cinco primeiros dos postulados da Geometria Euclidiana, respectivamente.

Os cinco postulados caracterizam a Geometria Plana. No entanto, para a Geometria Espacial são necessários outros postulados que serão introduzidos à medida que se fizerem necessário, com a respectiva referência.

A construção de uma teoria utilizando o pensamento postulacional inclui, além dos postulados, uma lógica.

“O conjunto de postulados constitui a base da qual a teoria brota e a lógica proporciona as regras pelas quais essa base pode se expandir para transformar-se num corpo de teoremas” [16].

Na próxima secção vamos discorrer sobre os fundamentos da lógica.

3.1.1 Raciocínio lógico aplicado na Geometria

O raciocínio lógico está presente no ser humano desde épocas primitivas.

“O salto para racionalidade acontece quando se começa a intuir as primeiras leis universais, como ‘**lei da causa e do efeito**’. Esta lei é simplesmente percebida pela verificação sucessiva de que ‘**se isto aconteceu... em seguida, aquilo deve acontecer**’” [9].

A lógica formal desenvolvida pelos gregos foi sistematizada por Aristóteles que viveu entre 384 a.C. a 322 a.C. Aristóteles investigou a estrutura do discurso lógico e procurou estabelecer regras universais para a argumentação a fim de garantir veracidade às conclusões. A lógica aristotélica era alicerçada em três pilares [9]:

- conceito: afirmações a respeito de objetos;
- argumentação: utilização do raciocínio lógico e de conhecimentos prévios válidos; e
- juízo: decisão sobre a veracidade ou não da afirmação.

Em princípio nem todas as afirmações podem ser julgadas como falsas ou verdadeiras. As afirmações sobre as quais é possível atribuir o valor lógico de falso ou verdadeiro são classificadas como sentenças declarativas. No entanto, há sentenças declarativas que se apresentam “completas” e há as que se apresentam “incompletas”.

Quando é possível atribuir um, e apenas um dos valores lógicos: falso ou (“ou” exclusivo) verdadeiro a uma declaração, sem lhe acrescentar nenhuma nova informação, dizemos que esta é uma sentença declarativa fechada. Por exemplo: $3 = 5$; é uma afirmação com valor lógico falso, portanto é uma sentença declarativa fechada.

Uma afirmação que pode assumir tanto o valor lógico verdadeiro como o falso dependendo do acréscimo de informação é chamada sentença declarativa aberta. Como exemplo, temos:

$$x^2 + 1 = 0.$$

Essa sentença depende de informação adicional para lhe ser julgada a veracidade. A sentença é falsa para x representando um número real qualquer; porém, a sentença é verdadeira para x representando um número complexo.

As sentenças declarativas fechadas, que assumem apenas um, e somente um valor lógico: verdadeiro ou (exclusivo) falso, são as que mais interessam ao estudo da lógica. Elas também são chamadas de proposições. Na lógica aristotélica, as proposições devem seguir a três princípios básicos: bivalência, não contradição e terceiro excluído [9].

- Bivalência: os dois únicos juízos possíveis para uma proposição são: verdadeiro ou falso.
- Não contradição: uma proposição não pode assumir simultaneamente os valores verdadeiro e falso.
- Terceiro excluído: o valor lógico de uma proposição é exatamente uma das possibilidades: verdadeiro ou falso, não sendo possível qualquer terceira alternativa.

Perseguindo a perfeição do pensamento, Aristóteles procurou estabelecer regras para distinguir argumentos válidos de argumentos inválidos. Os argumentos inválidos foram batizados de sofismas, ou falácia.

Concorria com a lógica de Aristóteles a escola filosófica sofista que ensinava a retórica, arte de bem argumentar. Protágoras foi um dos mais brilhantes filósofos da Escola Sofista. Para os sofistas qualquer proposição poderia ser provada como verdadeira, dependendo apenas do talento do argumentador [16].

Para julgar a validade dos argumentos, Aristóteles percebeu que era necessário que os enunciados tivessem sentido preciso, isto é, em forma de proposições categóricas (afirmações simples e objetivas com a estrutura: “sujeito seguido de predicado”). Além disso, ele classificou-as em quatro tipos [9]:

- afirmação universal; exemplo: Todos os objetos da classe A possuem a propriedade B ;
- negação universal; exemplo: Nenhum objeto da classe A possui a propriedade B ;
- afirmação particular; exemplo: Alguns objetos da classe C têm a propriedade D ; e
- negação particular; exemplo: Existem objetos da classe C que não têm a propriedade D .

O ponto de partida para a argumentação lógica, também chamada de demonstração ou prova de um resultado, é a estrutura:

- hipótese (também chamada premissa); argumento; e tese: (consequência) [9].

A hipótese é a parte do enunciado que é previamente considerada como verdadeira. Pode ser um elemento primitivo, uma definição, um postulado, um axioma ou algum resultado já provado. Por outro lado, a tese é uma afirmação que se pretende provar ser verdadeira ou falsa. O

argumento é a articulação lógica de todos os conhecimentos para chegar-se ao veredito sobre a tese: verdadeira ou falsa.

Aristóteles utilizava uma regra, admitida como postulado, chamada silogismo (significa argumento ou raciocínio, em grego) na estrutura da argumentação lógica [9].

No silogismo de Aristóteles, duas premissas verdadeiras (válidas) são tomadas e uma terceira, consequência das duas primeiras, é considerada verdadeira (conclusão).

Como exemplo, temos o silogismo 1:

Proposição I (1ª premissa): Todos os humanos são mortais.

Proposição II (2ª premissa): Os brasileiros são humanos.

Proposição III (conclusão): Os brasileiros são mortais.

Antes da Idade Moderna empregava-se apenas a linguagem corrente nos textos das “demonstrações logicamente válidas”. Posteriormente, matemáticos como Gottfried Wilhelm Leibniz (*De Arte Combinatória*, 1666); George Boole (*The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, 1847); e Augustus De Morgan (*Formal Logic; or the Calculus of Inference, Necessary and Probable*, 1847) revestiram a lógica de um conjunto de símbolos e uma sintaxe, originando a lógica simbólica ou lógica matemática.

“Os matemáticos da atualidade entenderam que seria uma tarefa praticamente inútil, tendo em conta as preocupações modernas, continuar abordando a lógica dessa maneira. A fim de que essa matéria pudesse ser estudada com o caráter científico necessário, era necessário introduzir-se uma linguagem simbólica. A concretização desse intento resultou no que se chama hoje de lógica simbólica ou lógica matemática” [16].

A lógica simbólica (ou matemática) utiliza símbolos e regras de transformações formais claramente prescritas, para representar as várias relações entre afirmações e objetos. A partir de então o desenvolvimento da teoria ficou livre de ambiguidades que eram tão comuns às demonstrações realizadas em linguagem corrente. Além disso, partindo de um conjunto inicial de fórmulas e seguindo as regras de transformação formal, muito parecidas com o desenvolvimento de algum tópico de álgebra, a linguagem simbólica se apresenta mais clara e concisa que a linguagem corrente.

Na linguagem simbólica as proposições são representadas por letras, por exemplo:

- p (inicial da palavra proposição): todos os retângulos são paralelogramos;
- q (próxima letra em ordem alfabética): todos os quadrados são retângulos.

Para combinar duas ou mais proposições e também para construir a argumentação são empregados conectivos que traduzem em símbolos os aspectos mais simples da língua corrente.

A seguir, no Quadro 3, são expressos os conectivos mais usados:

Símbolo	Conectivos	Significado lógico
\Rightarrow	implicação	se ... então.
\Leftrightarrow	dupla implicação	se, e somente se
\sim \neg	negação	$(p \text{ é verdadeira}) \Rightarrow (\sim p \text{ é falsa}).$
\wedge	e	Conjunção
\vee	ou (inclusivo)	disjunção inclusiva
$\underline{\vee}$	ou (exclusivo)	disjunção exclusiva
\exists	existe	quantificador existencial
\nexists	não existe	negador existencial.
$\exists!$	existe um único	quantificador para unicidade
\forall	qualquer que seja	quantificador universal
\top	tautologia	a proposição é, independente de condições, verdadeira.
\perp	contradição	a proposição é, independente de condições, falsa.

Quadro 3: símbolos lógicos mais utilizados

Fonte: o autor

Dessa forma, chamando a hipótese de p e a tese de q , vem que a estrutura do raciocínio lógico passa a ser: $p \Rightarrow q$, isto é, se p é verdadeira então q também é verdadeira.

Destacamos também a dupla implicação $p \Leftrightarrow q$. A dupla implicação é uma forma abreviada de expressar duas implicações conjugadas: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Dizemos que p e q são logicamente equivalentes [9].

A argumentação lógica pode ser realizada de forma direta ou indireta. Numa prova direta a verdade é obtida por uma construção cuja conclusão é o resultado esperado.

O método indireto também é chamado de prova por redução ao absurdo e é fundamentado na hipótese de que se uma sentença p é verdadeira a negação dessa sentença, isto é, $\sim p$ conduz a uma contradição, uma afirmação que é reconhecidamente falsa.

Vamos exemplificar uma prova indireta. Seja a sentença declarativa:

- p : O dobro de um número positivo k é maior que k .

Temos então que a negação dessa sentença é:

- $\sim p$: O dobro de um número positivo k não é maior que k , em outras palavras $2k$ é menor ou igual a k .

A sentença $\sim p$ pode ser traduzida para a linguagem simbólica como:

- $\sim p$: $(k > 0) \wedge (2k \leq k)$

Partindo de $(2k \leq k)$, sabendo que $k \div k = 1 \forall k > 0$ e sabendo também que a divisão por um número positivo não “inverte” o sentido da desigualdade temos como argumentação lógica:

$$(2k \leq k) \Leftrightarrow \left(\frac{2k}{k} \leq \frac{k}{k} \right) \Leftrightarrow (2 \leq 1) \blacksquare$$

A última expressão da direita é uma contradição, de fato $2 > 1$. Assim, $\sim p$ é falsa, logo, pelo princípio do terceiro excluído p é verdadeira, isto é, o dobro de um número positivo k é maior que k .

Há ainda outras técnicas de argumentação lógica [9]:

- Método da exaustão.
- Método da contraposição.
- Método da descida ao infinito.
- Método da indução finita.
- Segundo Método da Indução finita etc.

Neste trabalho vamos realizar diversas demonstrações sem a preocupação de explicitar o método ou a técnica de argumentação empregada. Dependendo da complexidade de uma demonstração podem ser utilizadas diversas variações e combinações de métodos. O Método da Exaustão, por exemplo, que pode ser classificado como técnica de força bruta [9] procura estabelecer todas as possibilidades que uma sentença pode tomar e analisar a veracidade de cada uma delas, às vezes utilizando a redução ao absurdo, para se chegar a um resultado procurado.

O princípio do Terceiro Excluído caracteriza a lógica aristotélica como bivalente, isto é, só é possível atribuir dois valores lógicos: falso ou verdadeiro. No século XX, a partir do questionamento do princípio do terceiro excluído surgiram lógicas multivalentes que estão em desenvolvimento.

“Já há algum tempo os matemáticos têm ciência da mutabilidade do primeiro conjunto de afirmações iniciais (os postulados) mas até tempos recentes pensava-se universalmente que o segundo conjunto de afirmações iniciais (ou seja, a lógica) fosse fixo, absoluto e imutável. De fato, essa ainda é a visão que prevalece entre as pessoas de um modo geral, pois parece inconcebível, salvo para poucos especialistas, que possa haver uma alternativa para as leis da lógica enunciadas por Aristóteles no século IV a.C. A impressão geral é que essas leis são, de alguma maneira, atributos da estrutura do universo e que elas são inerentes à própria natureza do raciocínio humano. Tal como muitas visões absolutas do passado essa também veio abaixo, mas só em 1921” [16].

Acreditamos que a lógica aristotélica vai continuar admitida como válida pela comunidade científica, por algum tempo ainda, portanto, ensinada nas escolas e universidades. A concepção de lógica multivalente, isto é, que existem várias opções de valores lógicos para uma proposição “estremece” toda a estrutura de conhecimento construída pela humanidade.

No entanto, assim como a descoberta das novas geometrias não invalidou o conhecimento, os benefícios e os progressos realizados graças à Geometria Euclidiana, acreditamos que seja possível que o emprego das “novas lógicas” possam de alguma forma coexistir com a tradicional lógica aristotélica.

Passamos agora a tratar de uma importante ferramenta matemática que facilitou a compreensão do silogismo aristotélico e a construção da argumentação lógica, em geral. Estamos falando da linguagem dos conjuntos que pode ser empregada em todas as áreas da Matemática e teve destacada importância na Matemática Moderna.

3.1.2 Linguagem dos conjuntos aplicada na Geometria

O desenvolvimento da linguagem dos conjuntos foi um importante avanço para a Matemática, onde a simplicidade figura como uma das mais notáveis características.

“Toda a Matemática atual é formulada na linguagem dos conjuntos. Portanto, a noção de conjunto é a mais fundamental: a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela é também a mais simples das ideias matemáticas” [20].

A ideia de conjunto é uma noção primitiva: um conjunto é formado por seus elementos. Tradicionalmente representamos um conjunto por uma letra maiúscula latina e um elemento, ou membro, qualquer por uma letra minúscula latina. Além disso, se A é um conjunto e a é um elemento, só existe duas possibilidades para avaliar a relação entre a e A :

- a é elemento de A ; ou
- a não é elemento de A .

Essa relação é chamada relação de pertinência e os símbolos \in e \notin são empregados para expressar, respectivamente, se um elemento pertence ou não pertence a um conjunto. Por outro lado, para que um conjunto A seja representado em sua totalidade, utilizamos chaves, onde os elementos do conjunto A são todos enumerados ou, uma condição que delimita esses elementos é enunciada. Por exemplo, $A = \{\text{números naturais}\}$.

Um conjunto que possui apenas um elemento é dito conjunto unitário enquanto que um conjunto que não possui elementos é classificado como vazio e sua representação é \emptyset ou $\{ \}$.

Agora se A e B são conjuntos é possível que eles tenham elementos comuns ou não. Quando dois conjuntos A e B não possuem elementos comuns, dizemos que A e B são disjuntos. Caso contrário, dizemos que os elementos que pertencem a A e também pertencem a B formam o conjunto interseção de A e B . A representação para este conjunto é $A \cap B$. Além disso, se A e B são disjuntos $A \cap B = \emptyset$.

Quando $A \cap B \neq \emptyset$, existe a possibilidade de todos os elementos de A serem também elementos de B , caso isso ocorra, dizemos que A está contido em B , ou (“ou” inclusivo) que A é subconjunto de B , e representamos esta relação por $A \subset B$. Notamos que a definição de subconjunto inclui o próprio conjunto, isto é, $B \subset B$. Portanto, qualquer conjunto é subconjunto de si mesmo.

Por outro lado, se existir apenas um $a \in A$ tal que $a \notin B$, dizemos que A não está contido em B e representamos esta relação por $A \not\subset B$. Esta relação entre dois conjuntos é chamada de relação de inclusão. Além disso, se $A \subset B$ e $B \subset A$ conclui-se que $A = B$.

Quando $A \not\subset B$ destaca-se um novo conjunto definido por todos os elementos $a \in A$ e $a \notin B$. Esse conjunto é a diferença entre A e B , representada por $A - B$. Assim, se $A - B = \emptyset$, temos que $A \subset B$. Esta última conclusão nos força a “aceitar” o postulado de que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto, uma vez que ele não possui nenhum elemento que não pertença a um conjunto B qualquer. Logo, se B é um conjunto, $\emptyset \subset B$.

Dessa forma surge uma nova distinção entre subconjuntos. Um subconjunto A de um conjunto B é impróprio se $A = \emptyset$ ou $A = B$. Caso contrário, isto é, $A \subset B$ e $A \neq \emptyset$ e $A \neq B$, dizemos que A é um subconjunto próprio (ou propriamente dito) de B .

O conjunto universo, representado geralmente pela letra U , representa todos os elementos que podem ser abrangidos por uma determinada noção ou campo de estudo, dependendo da aplicação ou interesse. Por exemplo: o conjunto de todos os seres mortais.

Quando aplicamos a noção de diferença entre U e um dos seus subconjuntos A , $U - A$, determinamos o conjunto complementar de A em U e representamos por: $\complement_U A$.

Destacamos, também, o conjunto união de A e B , que é formado por todos os elementos de A e todos os elementos de B . A representação do conjunto união de A e B é $A \cup B$.

Finalmente, ao tomarmos o conjunto $C = (A - B) \cup (B - A)$, definimos C como diferença simétrica de A e B , ou de B e A . Além disso, é fácil ver que $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (B \cap A)$.

Os conjuntos união, interseção, diferença, diferença simétrica e complementar definem as operações ou a álgebra de conjuntos.

“Em anos recentes, ficou claro que a álgebra dos conjuntos lança luz sobre muitos ramos da Matemática, tais como a teoria da medida e a teoria das probabilidades; é também útil na redução sistemática de conceitos matemáticos à sua base lógica” [11].

Como exemplo de aplicação prática da linguagem dos conjuntos na lógica, destacamos o silogismo 1 apresentado na seção 3.1. Aqui, os seres mortais compõem o conjunto universo U . O conjunto A representa todos os humanos e o conjunto B todos os brasileiros:

Estrutura Lógica	Linguagem corrente	Linguagem dos Conjuntos
Hipótese	Existem seres mortais.	U
Argumentação (premissas)	Todos os humanos são mortais.	$A \subset U$
	Os brasileiros são humanos.	$B \subset A$
Tese (conclusão)	Os brasileiros são mortais.	$B \subset U$

Quadro 4: silogismo 1

Fonte: o autor

Leibniz e Leonhard Euler foram os primeiros a representar conjuntos por meio de curvas fechadas chamadas diagramas. Também foram os primeiros a utilizá-los na álgebra de conjuntos. Posteriormente, John Venn aperfeiçoou esses diagramas, de forma que, um diagrama de Venn deve representar todas as possíveis interseções dos conjuntos que estão em estudo. A Figura 1 representa o silogismo 1, em termos de diagramas de Venn. O conjunto universo é representado por um retângulo:

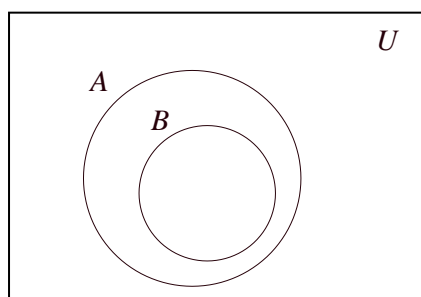


Figura 1: silogismo 1
Fonte: o autor

A linguagem dos conjuntos ganhou maior importância depois da criação da Teoria dos Conjuntos, de George Cantor. Essa teoria impactou todos os campos da Matemática, inclusive, a Geometria do espaço físico. Assim ficou mais clara a noção de elementos primitivos bem como a relação entre eles, porém o ensino da geometria ficou mais abstrato.

3.1.3 Elementos Primitivos

David Hilbert criou o conceito de elemento primitivo, objeto da geometria que não possui uma definição [16]. Na Geometria os elementos primitivos são: *ponto*, *reta* e *plano*. Tendo como referência o Modelo de Van Hiele propomos a utilização de um bloco retangular como instrumento de visualização dos elementos primitivos em estudo.

O bloco retangular (paralelepípedo reto retângulo) é um poliedro. Os poliedros formam um subconjunto dos sólidos geométricos, que serão estudados com mais detalhe na Seção 5. À medida que os conceitos geométricos forem surgindo neste texto outras características fundamentais do bloco retangular vão sendo esclarecidas.

Na Figura 2 as linhas indicam as arestas (extremidades do bloco retangular). As linhas tracejadas, em vermelho, representam as arestas que não ficam visíveis da posição em que é observado o objeto e as extremidades das arestas são os vértices, indicados por letras latinas maiúsculas.

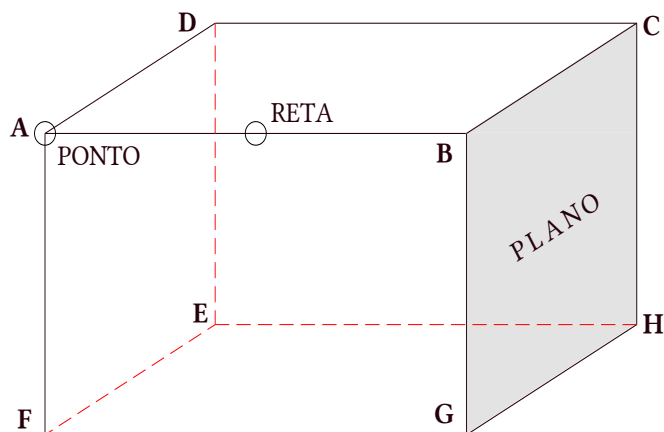


Figura 2: bloco retangular
Fonte: o autor

Voltando aos elementos primitivos não definimos o elemento ponto, há apenas uma ideia (noção) do que seja esse objeto geométrico. Citamos como exemplo algumas noções de ponto:

- é o conjunto formado pela intersecção de duas retas concorrentes (retas que têm apenas um ponto em comum);
- é o centro de um círculo;
- é um vértice de um poliedro;
- é a extremidade de uma linha.

Agora, com a noção de ponto, podemos então compreender o espaço: é o conjunto de todos os pontos. Além disso, dois pontos definem um comprimento que também pode ser entendido como a distância entre esses pontos. Quando dois pontos são coincidentes dizemos que o comprimento é nulo. Destacamos no bloco retangular oito pontos notáveis extremidades das suas arestas e indicados pelas letras: A, B, C, D, E, F, G e H . Estes pontos são os seus vértices.

As retas e os planos são subconjuntos do espaço, isto é, formados por pontos. Por simplicidade, vamos definir uma figura como um subconjunto próprio do espaço.

A noção de reta pode ser entendida como uma aresta de um bloco retangular cujo comprimento aumenta infinitamente. Além disso, pelo PE1, dois pontos definem uma reta. Assim, na Figura 2, cada par de vértices determina uma única reta.

Ao trecho da reta definido por dois pontos chamamos de segmento de reta e o comprimento do segmento de reta é a medida da distância entre esses dois pontos. Assim, cada aresta do bloco retangular é um segmento de reta. O bloco retangular possui doze arestas divididas em três grupos, onde cada grupo tem quatro arestas com mesmo comprimento. Sem perda de generalidade e tomando a Figura 2 como referência, temos:

- Grupo 1: Arestas formadas pelos pares de pontos: A e B , C e D , E e H , F e G .
- Grupo 2: Arestas formadas pelos pares de pontos: A e D , B e C , E e F , G e H .

iii. Grupo 3: Arestas formadas pelos pares de pontos: A e F , B e G , C e G , D e F .

Cada um desses grupos define uma dimensão do bloco retangular. Assim, o bloco retangular possui três dimensões: comprimento, largura e altura.

As arestas definidas pelos pontos B , C , H e G , formam uma face do bloco retangular. Dessa forma, o bloco retangular possui seis faces. Vamos chamar a face que contém os pontos B , C , H e G por F_{BCHG} . Cada face possui duas dimensões.

Um plano pode ser entendido como uma face do bloco retangular com dimensões “infinitamente grandes”.

Tradicionalmente, para representarmos um ponto utilizamos as letras maiúsculas do alfabeto latino. As retas são representadas por letras minúsculas também do alfabeto latino. Os planos são representados por letras minúsculas do alfabeto grego.

Passamos agora a apresentar a representação gráfica, que será adotada neste trabalho, dos objetos primitivos, bem como de novos conceitos e objetos geométricos relacionados aos elementos primitivos.

3.1.3.1 Representação gráfica dos elementos primitivos e conceitos relacionados

A representação gráfica de um ponto isolado num plano, sem representar a interseção de outros objetos, é feita por um círculo de raio mínimo (na Seção 3.2 serão tratados de forma sucinta o círculo e o respectivo raio), pois na realidade o comprimento desse raio é zero.

Um segmento de reta pode ser entendido como um trecho, “um pedaço”, de uma reta, limitado por dois pontos. Na Figura 2, a aresta delimitada pelos pontos A e B (assim como as demais arestas do bloco retangular) é um segmento de reta. A representação gráfica de um segmento de reta é feita por um retângulo com largura mínima, pois na realidade essa largura é nula.

A representação gráfica tradicional de uma reta é feita por um segmento de reta onde são acrescentadas setas às extremidades do segmento de reta para indicar que se trata de uma reta, cujo comprimento é infinito. Além disso, um ponto P qualquer de uma reta r divide-a em duas semirretas de mesma origem P :

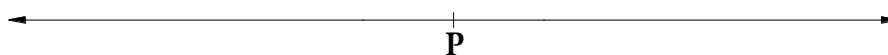


Figura 3: reta e ponto P da reta
Fonte: o autor

Dois pontos quaisquer P e Q de uma reta r definem um segmento \overline{PQ} , isto é, o segmento \overline{PQ} é o conjunto formado pelos pontos P , Q e todos os pontos $R \in r$ que estão entre P e Q . Além disso, os pontos P , Q , R e todos os demais pontos de r são chamados colineares, isto é, que pertencem a uma mesma reta. Dizemos também que r é a reta suporte do segmento \overline{PQ} .

Para representar a reta que contém os pontos P e Q usamos a notação \overleftrightarrow{PQ} . Além disso, a reta \overleftrightarrow{PQ} expressa também uma direção que possui dois sentidos. O símbolo \overrightarrow{RQ} representa a semirreta com origem em R que contém Q e sinaliza o sentido de R a Q . Analogamente \overrightarrow{RP} é a semirreta com origem em R que contém P e sinaliza o sentido de R a P .

Duas semirretas com origem comum, que possuem a mesma direção e sentidos opostos são semirretas opostas. Assim, um ponto qualquer R de uma reta r determina duas semirretas opostas.

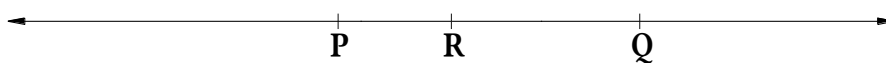


Figura 4: semirretas opostas com origem no ponto R
Fonte: o autor

Além disso, os segmentos \overline{PR} e \overline{RQ} são consecutivos. Dois segmentos de reta são consecutivos quando a interseção deles é apenas um ponto e este ponto é uma extremidade de ambos os segmentos. Assim, \overline{PR} e \overline{PQ} não são consecutivos, pois a interseção deles não é apenas o ponto P , é todo o segmento \overline{PR} .

Destacamos, ainda, que dois segmentos de reta são adjacentes quando forem consecutivos e colineares. Logo, \overline{PR} e \overline{RQ} são também adjacentes.

Voltamos agora ao objeto geométrico plano. Um plano possui infinitas retas. Uma reta r de um plano α divide α em dois semiplanos de mesma origem r .

Tradicionalmente um plano é representado graficamente por um paralelogramo [26]. A imagem, a seguir, representa dois pontos P e Q pertencentes a um plano α e uma reta r contida em α . Observamos que $P \in r$ e $Q \notin r$. Além disso, os pontos P e Q e a reta r são coplanares, isto é, pertencem ao mesmo plano.

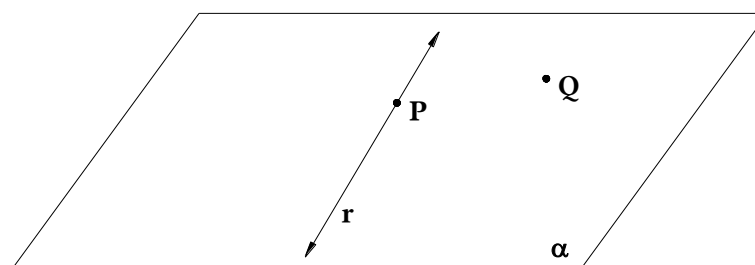


Figura 5: representação de um plano
Fonte: o autor

A distância de P a Q é definida como a medida do segmento \overline{PQ} . Alguns autores diferenciam a notação para a medida do segmento e para o segmento propriamente dito. Assim, PQ pode representar o segmento e \overline{PQ} a medida do segmento, ou vice-versa, isto é, PQ pode representar a medida do segmento e \overline{PQ} o segmento, dependendo do autor.

Para representar distâncias ainda há as formas $d(P,Q) = b$ ou $|PQ| = b$, onde $b > 0$, é um número real. Escolhemos representar segmentos por \overline{PQ} e a medida por $d(P,Q) = b$. Porém, em alguns casos vamos utilizar também a notação \overline{PQ} para a distância, para simplificar as notações. Nesse caso, o contexto deixará claro que se trata de um comprimento.

O contexto deixará claro, também, quando uma letra minúscula está representando uma distância ou (exclusivo) uma reta.

Na Educação Escolar, Ensino Fundamental e Ensino Médio, a distância entre dois objetos no espaço é definida como a medida do segmento de reta de menor medida que une dois pontos desses objetos [24].

As principais unidades padrões de medida de segmento de reta, também chamada de comprimento ou dimensão linear, são a polegada e o metro. O metro é definido como o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de $1/299\,792\,458$ de segundo, enquanto que uma polegada equivale a $\frac{254}{10.000}$ do metro.

Dois segmentos de reta são congruentes se possuem a mesma medida. Equivalentemente dois segmentos de reta são congruentes se um pode ser sobreposto sobre o outro de forma que um “cubra” completamente o outro e vice-versa.

O símbolo mais comum para indicar congruência é “ \cong ”. Para simplificar o entendimento e identificar segmentos congruentes usa-se o recurso de construir um número igual de “traços perpendiculares” (pequenos segmentos de reta) nos segmentos congruentes.

Na Figura 6, os segmentos \overline{PQ} e \overline{RS} são congruentes, assim como \overline{QU} e \overline{QR} , além disso:

- Todos os segmentos de reta são coplanares;
- Os segmentos \overline{RS} e \overline{ST} são os únicos colineares.
- São consecutivos os pares: $(\overline{PQ}, \overline{QU})$, $(\overline{UQ}, \overline{QR})$, $(\overline{PQ}, \overline{QR})$, $(\overline{QR}, \overline{RS})$ e $(\overline{RS}, \overline{ST})$.
- São consecutivas as quadras: $(\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RS}, \overline{ST})$ e $(\overline{UQ}, \overline{QR}, \overline{RS}, \overline{ST})$.
- Os segmentos \overline{RS} e \overline{ST} são os únicos adjacentes.

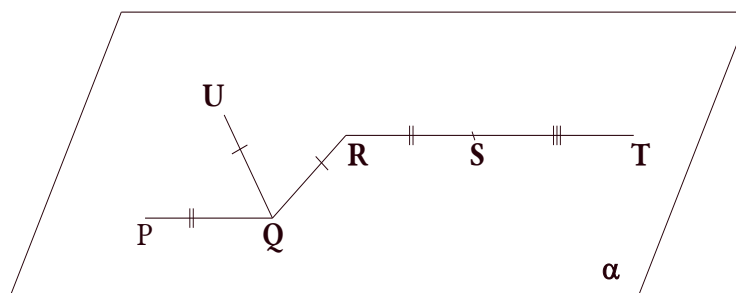


Figura 6: segmentos de retas congruentes
Fonte: o autor

De uma maneira geral duas figuras são congruentes se for possível através de movimentos rígidos, isto é, que não deformam a figura, ajustar a posição de uma até que fique sobreposta sobre a outra e todos os objetos (cada ponto que forma cada objeto) de uma cubram completamente e exatamente os mesmos objetos da outra e vice-versa. Os movimentos rígidos essenciais na verificação da congruência de figuras são a translação e a rotação.

A translação de um ponto é o simples deslocamento deste. Já a translação de uma figura é a translação de todos os pontos da figura de modo que a figura não seja deformada, isto é, todos os pontos da figura são submetidos ao mesmo deslocamento – não há diferenças importantes da translação do plano para a translação no espaço. Na Figura 6, pode-se verificar a congruência de segmentos transladando o segmento \overline{PQ} de modo que P coincida com R .

A rotação de um ponto (ou uma figura) exige que se tenha uma referência e pode ocorrer tanto num plano como no espaço. No plano, a referência é um ponto que pode ser da própria figura. A figura então “gira” em torno do ponto de referência mantendo sua forma original, sem se deformar. Ainda, na Figura 6, pode-se verificar a congruência de segmentos rotacionando o segmento \overline{QR} em torno de Q , de modo que R coincida com U .

A rotação e a translação são exemplos de isometrias, isto é, transformações que preservam distâncias [14].

As relações entre os elementos primitivos compõem uma extensa lista de definições, axiomas e teoremas. Neste trabalho essas relações serão formalmente apresentadas apenas quando forem utilizadas nas provas dos resultados principais.

Será necessário, também, citar diversos resultados, tanto da Geometria Espacial como da Geometria Plana, cujas respectivas demonstrações são encontradas com facilidade nas respectivas referências: [15], [17], [24], [26] e [27].

3.2 Conceitos da Geometria Plana utilizados no cálculo dos objetos geométricos nos poliedros regulares

Uma figura é plana quando todos os seus pontos pertencem a um único plano [30]. Há muitas formas para se classificar as figuras planas: quanto à convexidade (sim ou não), quanto à conexidade (sim ou não), quanto às formas dos elementos que a compõe etc.

A área da Matemática que estuda as formas, de uma maneira geral, é a Topologia que é considerada uma extensão da Geometria. Na Educação Básica são estudadas formas geométricas específicas como polígonos, curvas e sólidos.

As retas são exemplos de curvas planas, isto é, uma reta é um tipo especial de curva. Uma curva é uma linha com a espessura de um ponto definida de maneira livre, ou por pontos que obedecem a uma condição.

As figuras formadas por pontos que obedecem a uma condição são lugares geométricos, LG. Por exemplo, os pontos Q_i , i um número natural, de um plano α que estão a uma distância r de um ponto P formam uma curva plana conhecida por circunferência.

Assim, uma circunferência é o LG dos pontos que equidistam (estão a uma mesma distância) de um ponto, o centro.

Um segmento de reta que une o ponto P centro da circunferência a um ponto Q_i da circunferência é um raio da circunferência. Além disso, qualquer segmento de reta com ambas as extremidades sobre pontos da circunferência é chamado de corda. É fácil ver que uma corda com comprimento máximo contém o centro. Neste caso a corda chama-se diâmetro e sua medida é $2r$.

Um arco é um “trecho” da circunferência limitado por dois pontos. Dois pontos distintos de uma circunferência identificam dois arcos. Neste trabalho vamos adotar como padrão o sentido anti-horário para “percorrer” a circunferência. Assim, usando os pontos cardeais como referência, para “percorrer” metade da circunferência do:

- Leste para o Oeste, passamos pelo Norte;
- Norte para o Sul, passamos pelo Oeste;
- Oeste para o Leste, passamos pelo Sul;
- Sul para o Norte, passamos pelo Leste.

Contudo, quando dois pontos de uma circunferência coincidem temos um arco de uma volta (a circunferência completa) ou um arco nulo (um ponto).

A Figura 7 representa uma circunferência com centro P e pontos Q_i , $i = 1; 2; 3$; da circunferência e: os raios $\overline{PQ_1}$, $\overline{PQ_2}$, $\overline{PQ_3}$; as cordas $\overline{Q_1Q_2}$, $\overline{Q_2Q_3}$ e $\overline{Q_1Q_3}$ (diâmetro); e os arcos $\widehat{Q_1Q_2}$, $\widehat{Q_1Q_3}$, $\widehat{Q_2Q_3}$, $\widehat{Q_2Q_1}$, $\widehat{Q_3Q_1}$ e $\widehat{Q_3Q_2}$.

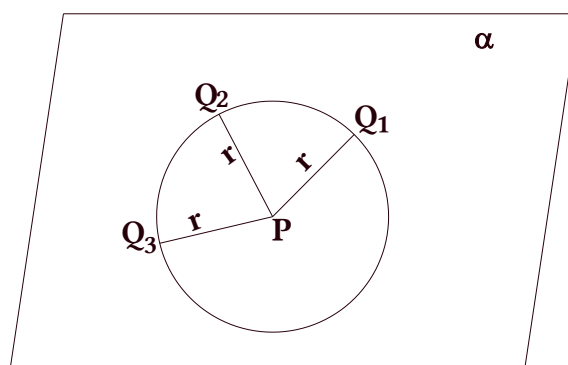


Figura 7: circunferência e círculo
Fonte: o autor

Temos também que os pontos do plano que estão a uma distância menor ou igual (\leq) a r formam um círculo, isto é, um círculo é a figura formada pelos pontos do plano interiores a uma circunferência e pelos pontos da própria circunferência.

Na Educação Básica, em geral, os conceitos de reta e curva são dissociados, isto é, a ideia é que uma “curva é uma linha que não é reta”. As linhas estudadas que são “classificadas” como curva são as circunferências e seus os arcos, as cônicas e os gráficos de funções (“excluindo” a função polinomial do 1º grau e a função constante cujos gráficos são retas!).

Ainda nesse trabalho veremos outros LG’s. Agora, passamos a estudar os polígonos.

3.2.1 Polígonos

Um polígono é uma figura formada por uma linha poligonal fechada e a região interior delimitada por essa linha poligonal. Por sua vez, uma linha poligonal é uma figura formada por segmentos de reta unidos por suas extremidades.

As extremidades dos segmentos de reta que compõem a linha poligonal são os vértices do polígono e esses segmentos de reta são os lados do polígono. Dois vértices são consecutivos quando pertencem ao mesmo lado.

Um polígono é plano quando todos os seus vértices são coplanares, caso contrário, dizemos que o polígono é reverso. Os lados de um polígono plano também são coplanares, pois seria uma contradição, as suas extremidades serem coplanares e os lados não. Por fim, a região interior de

um polígono plano é formada por todos os pontos do plano, que contém o polígono, limitados pelos lados. Essa região é também chamada de região poligonal.

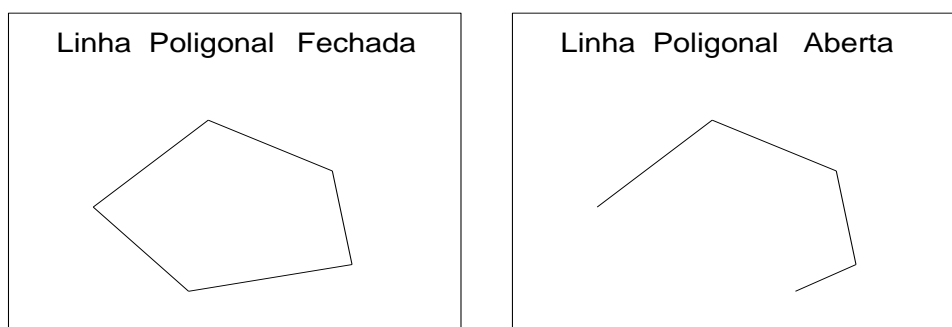


Figura 8: linha poligonal
Fonte: o autor

Uma característica topológica da região poligonal, estudada na Educação Escolar, é a convexidade. Neste trabalho vamos estudar apenas polígonos convexos.

De forma geral uma figura plana é convexa quando escolhidos quaisquer dois pontos da figura o segmento de reta que une esses pontos está inteiramente contido no interior da figura. Equivalentemente a figura será não convexa (ou côncava) se existir pelo menos um par de pontos tais que o segmento de reta que os liga possui pontos que não pertencem à figura.

Em se tratando de polígonos, há também outras afirmações equivalentes para a convexidade, como por exemplo:

- um polígono não é convexo quando não está inteiramente contido no semiplano determinado pela reta suporte de um de seus lados; ou
- um polígono não é convexo quando um dos seus ângulos internos é maior que um ângulo raso (na próxima seção trataremos de ângulos).

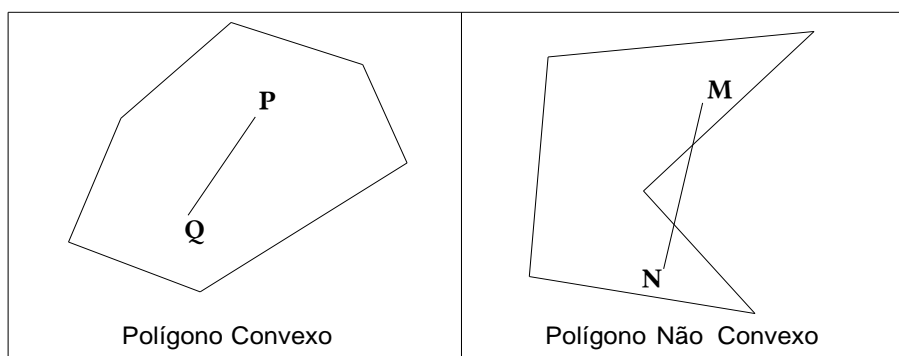


Figura 9: convexidade de polígonos
Fonte: o autor

Uma diagonal de um polígono é um segmento de reta cujas extremidades coincidem com dois vértices que não pertençam ao mesmo lado, isto é, não consecutivos. Num polígono convexo uma diagonal está sempre contida no interior desse polígono.

Na próxima seção vamos destacar um objeto especial presente num polígono, o ângulo.

3.2.1.1 Ângulos

Um ângulo é uma figura formada por duas semirretas com uma origem comum. A região do plano delimitada pelos lados de um ângulo é chamada de região angular. As semirretas são os lados do ângulo e a origem das semirretas é o vértice do ângulo. Um ângulo é uma figura plana, pois duas retas concorrentes são sempre coplanares [15].

As notações mais comuns para representar um ângulo de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são: $\hat{A}OB$ e $\angle AOB$. Também são utilizadas letras minúsculas, latinas ou gregas (com um arco de circunferência cujas extremidades indicam os lados do ângulo), que podem representar tanto o ângulo como a medida do ângulo.

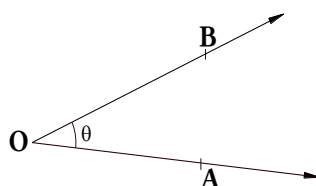


Figura 10: ângulo
Fonte: o autor

A medida de um ângulo é determinada pela posição relativa entre as semirretas que formam os lados do ângulo. Essa posição fica definida pela direção e sentido (Secção 3.1.3.1) dessas semirretas.

Consideramos, agora, as duas semirretas opostas determinadas por um ponto R de uma reta r . Sem perder a generalidade e tomando como exemplo a Figura 4 (página 30), notamos que as semirretas \overrightarrow{RP} e \overrightarrow{RQ} formam dois ângulos. Para nomear esses ângulos tomamos novamente como referência o sentido anti-horário de modo que a região angular de $\hat{Q}RP$ seja a figura formada “acima” de r e a região angular de $\hat{P}RQ$ a figura formada “abaixo” de r .

Agora, se aplicarmos uma rotação na reta r em torno de R (R é a referência) de modo que a nova posição de r mantenha a direção original, é fácil ver que os ângulos $\hat{Q}RP$ e $\hat{P}RQ$ são congruentes, ou seja, possuem a mesma medida. Cada um desses ângulos é chamado de ângulo raso ou ângulo de meia-volta.

Agora, consideramos um ponto S da região angular de $\hat{Q}RP$. Se tomarmos outra semirreta com origem em R e que contém o ponto S , $S \notin r$, de forma que os ângulos $\hat{Q}RS$ e \hat{SRQ} sejam congruentes, formamos dois ângulos retos.

Um ângulo reto é representado, graficamente, pelo símbolo \square . O ângulo reto também é chamado de ângulo de $\frac{1}{4}$ (um quarto) de volta. Neste caso as retas r e \overline{SR} são classificadas como perpendiculares, cuja representação é $r \perp \overline{SR}$. Duas retas que têm apenas um ponto em comum são chamadas concorrentes. Duas retas concorrentes que não são perpendiculares são chamadas oblíquas.

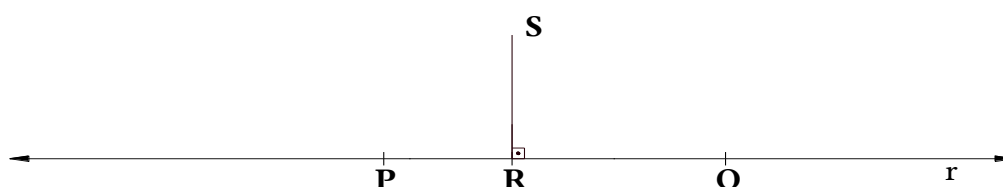


Figura 11: ângulo raso, ângulo reto e retas perpendiculares
Fonte: o autor

Num bloco retangular (Figura 2, página 28) todas as arestas concorrentes são perpendiculares. Destacamos que uma reta que divide um ângulo em dois ângulos congruentes é uma bissetriz. A bissetriz também é o L.G. dos pontos do plano que equidistam dos lados de um ângulo [26].

Um ângulo cuja medida é igual à soma das medidas de dois ou mais ângulos é chamado de ângulo soma. O ângulo soma de dois ângulos retos é um ângulo raso, enquanto que o ângulo soma de dois ângulos rasos é um ângulo de uma volta.

Um ângulo α é maior que um ângulo β quando sobrepostos num mesmo plano, um lado de β coincide com um lado de α e outro lado de β pertence à região angular de α . Um ângulo menor que um ângulo reto é chamado agudo. Por outro lado, um ângulo maior que um ângulo reto e menor que um ângulo raso é chamado obtusos. E ainda, um ângulo maior que um ângulo obtuso e menor que ângulo de uma volta é um ângulo côncavo.

Destacamos também nomes especiais que alguns pares de ângulos recebem:

- Dois ângulos cujo ângulo soma é congruente a um ângulo reto são chamados de complementares.
- Dois ângulos cujo ângulo soma é congruente a um ângulo raso são chamados de suplementares.
- Dois ângulos cujo ângulo soma é congruente a um ângulo de uma volta são chamados de replementares.
- Dois ângulos que possuem um lado comum são chamados de consecutivos.
- Dois ângulos que possuem um lado comum, o vértice comum e as respectivas regiões angulares, salvo o lado comum, sem pontos comuns são chamados de adjacentes.
- Dois ângulos adjacentes cujo ângulo soma é congruente a um ângulo raso formam um par linear. Os ângulos \widehat{QRS} e \widehat{SRP} (Figura 11) formam um par linear.

- Dois ângulos são opostos pelo vértice quando um deles é formado pelas respectivas semirretas opostas às semirretas que formam os lados do outro. Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes [26].

3.2.1.1.1 Unidades de medidas de ângulos

As unidades padrão de medidas de ângulos mais populares são obtidas de duas formas:

- Através de uma fração do ângulo de uma volta: graus, grados e milésimos.
- Através do arco de circunferência cujo comprimento é igual ao respectivo raio: radiano.

Um ângulo com medida de um grau, cuja representação é 1° , tem a medida de $\frac{1}{360}$ de um ângulo de uma volta. Por outro lado, um grado, cuja representação é 1grd , tem a medida de $\frac{1}{400}$ de um ângulo de uma volta. Finalmente, um milésimo, cuja representação é 1mil , tem a medida de $\frac{1}{6400}$ de um ângulo de uma volta. É fácil ver que a medida do ângulo de uma volta é 360° , em graus; 400grd , em grados; e 6400mil , em milésimo.

A unidade grau possui duas subunidades. Um minuto, representado por $1'$, é $\frac{1}{60}$ de um grau, enquanto que um segundo, representado por $1''$, possui a medida de $\frac{1}{60}$ de um minuto.

Agora, sempre que um ângulo é transportado por um movimento rígido de forma que o seu vértice coincida com o centro de uma circunferência fica definido um setor circular nessa circunferência. Esse setor é delimitado pelos lados do ângulo e pelo respectivo arco definido pelas interseções dos lados com a circunferência. Este ângulo é chamado ângulo central.

Um radiano é a medida de um ângulo central cujo arco correspondente possui comprimento igual ao raio da circunferência e é expresso por 1rad .

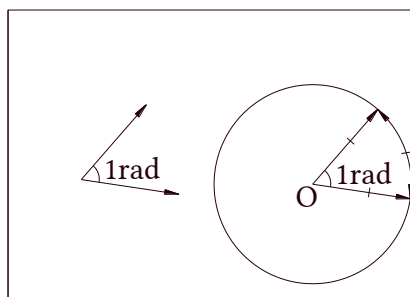


Figura 12: ângulo com medida de 1 rad
Fonte: o autor

Durante a História da humanidade buscou-se determinar um valor numérico que expressasse a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. Esse valor é o número irracional 3,141592..., representado pela letra π .

Agora, chamando de c o comprimento de uma circunferência de raio r , vem que:

$$\pi = \frac{c}{2r} \Leftrightarrow c = 2\pi r \quad \blacksquare \quad (01)$$

Logo, um arco de meia circunferência terá comprimento πr . Portanto, um setor circular definido por um ângulo central raso, isto é, sobre um diâmetro, terá medida $\pi \text{ rad}$.

3.2.1.2 Ângulos nos Polígonos Convexos

Destacamos nos polígonos o ângulo interno e o ângulo externo de um vértice.

O ângulo interno é formado por dois lados consecutivos cuja região angular está contida no interior do polígono.

Por outro lado, o ângulo externo de um vértice A de um polígono é formado por um lado e pela semirreta que é prolongamento do outro lado que contém A .

Em cada vértice de um polígono convexo destacam-se dois ângulos externos: o formado por um lado e pelo prolongamento do outro e vice-versa.

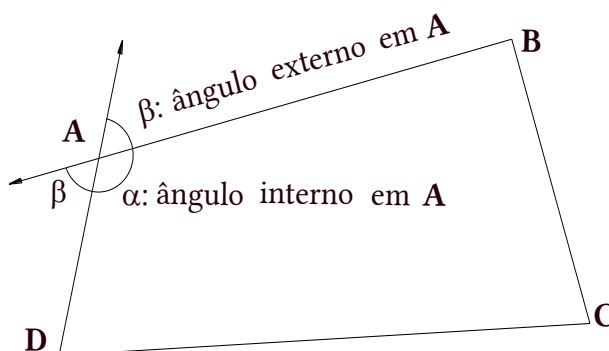


Figura 13: ângulo externo e ângulo interno de um polígono
Fonte: o autor

Num vértice de um polígono convexo o ângulo interno e um dos externos formam um par linear, isto é, são suplementares. Logo, qualquer dos externos possui a mesma medida. Assim, considera-se apenas um dos ângulos externos, de modo que o número de ângulos internos e externos seja o mesmo. Num polígono convexo esse número também é igual ao número de lados e determina a classificação mais fundamental dos polígonos.

3.2.2 Classificação e Elementos Notáveis nos Polígonos Convexos

Num polígono convexo o número de lados é igual ao número de vértices, esse número é o gênero do polígono convexo. O gênero define a nomenclatura do polígono. Nesse trabalho teremos polígono de gênero no máximo dez:

- Três lados: triângulo;
- Quatro lados: quadrilátero;
- Cinco lados: pentágono;
- Seis lados: hexágono;
- Sete lados: heptágono;
- Oito lados: octógono;
- Nove lados: eneágono; e
- Dez lados: decágono.

Além disso, é possível calcular diversos elementos nos polígonos convexos a partir do gênero. Um exercício interessante é deduzir as “fórmulas” para o cálculo da soma dos ângulos internos de um polígono convexo de gênero n , a partir da soma dos ângulos internos de um triângulo, e o número de diagonais, respectivamente, Si_n e D_n .

$$Si_n = 180^\circ (n - 2) \quad (02)$$

$$D_n = \frac{n(n - 3)}{2} \quad (03)$$

É fácil ver também que a soma dos ângulos externos de um polígono convexo, Se_n , (considerando apenas um ângulo externo por vértice) é um valor constante, independente do gênero do polígono, igual a um ângulo de uma volta. Em graus, $Se_n = 360^\circ$.

A maioria dos livros de Matemática da Educação Escolar apresentam as principais características dos triângulos e dos quadriláteros. Nesse trabalho, elas serão citadas apenas quando interessarem objetivamente. Esse é o caso da lei dos cossenos.

3.2.2.1 Lei dos cossenos

A trigonometria relaciona razões (as razões trigonométricas) de segmentos de reta com ângulos. A trigonometria na Educação Escolar é fundamentada na semelhança de triângulos e no ciclo trigonométrico [17].

Intuitivamente, duas figuras são semelhantes se todos os seus elementos tem a mesma forma. Assim, a congruência é um caso particular de semelhança, onde, além das figuras terem a mesma forma, elas também têm as mesmas medidas.

Polígonos são semelhantes se todos os ângulos são ordenadamente congruentes e todos os lados homólogos são ordenadamente proporcionais, o que acarreta que as razões homólogas desses segmentos é um valor constante, a constante de proporcionalidade.

Nos triângulos destacam-se casos de congruência e de semelhança. Esses casos são condições mínimas que, se atendidas por dois triângulos, pode-se concluir que eles são congruentes ou semelhantes, respectivamente. Um dos casos de semelhança de triângulos é que se eles possuem dois ângulos internos ordenadamente congruentes, eles são semelhantes [27].

Todo triângulo que possui um ângulo reto é chamado retângulo. No triângulo retângulo os lados recebem nomes especiais. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros dois lados são os catetos. Quando identificamos um ângulo agudo do triângulo retângulo os catetos recebem nomes determinados.

- O cateto que forma o ângulo agudo juntamente com a hipotenusa recebe o nome de cateto adjacente.
- O outro cateto recebe o nome de cateto oposto (oposto ao ângulo identificado).

Como todo triângulo retângulo possui um ângulo reto, para que dois triângulos retângulos sejam semelhantes basta que um ângulo agudo de um seja congruente a um ângulo agudo de outro. Como consequência dessa semelhança, para cada medida de um ângulo agudo as razões homólogas serão proporcionais, independente das medidas do triângulo retângulo. Essas razões são chamadas razões trigonométricas.

A medida de um ângulo interno de um triângulo é sempre menor que 180° [1], portanto, interessa-nos as razões trigonométricas de ângulos menores que um ângulo raso. As razões trigonométricas fundamentais são o seno, o cosseno e a tangente.

O seno de um ângulo agudo é a razão do cateto oposto para a hipotenusa, enquanto que o cosseno de um ângulo agudo é a razão do cateto adjacente para a hipotenusa. Por outro lado, a tangente de um ângulo agudo é a razão do cateto oposto para o cateto adjacente.

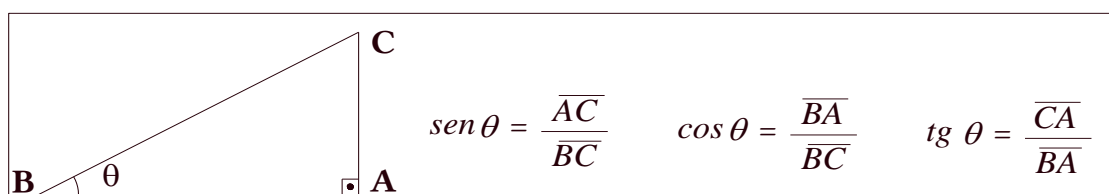


Figura 14: razões trigonométricas fundamentais de um ângulo agudo

Fonte: o autor

Com o recurso do ciclo trigonométrico é possível determinar valores para o cosseno, e também para as demais razões trigonométricas de qualquer medida de ângulo. Em particular, o $\cos 0^\circ = 1$ e o $\cos 90^\circ = 0$ [17].

Além disso, o cosseno de um ângulo obtuso é igual ao oposto (número cuja soma com o original é nula) do cosseno do suplemento desse ângulo. Essa relação pertence a um conjunto de relações similares conhecido por redução ao 1º quadrante [17].

Exemplo: calcular o cosseno de 120° , conhecido o cosseno de 60° :

$$[(\cos 120^\circ = -\cos (180^\circ - 120^\circ)) \wedge (\cos 60^\circ = 1/2)] \Rightarrow [\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ] \Rightarrow [\cos 120^\circ = -1/2].$$

Dessa forma é possível construir tabelas com os valores das diversas razões trigonométricas. No entanto, essas tabelas já estão em desuso devido à comodidade que as novas tecnologias proporcionam, de modo que é mais simples e preciso utilizar as “calculadoras” digitais para determinar tanto as razões trigonométricas para um determinado ângulo, como o contrário, **encontrar um ângulo** a partir do valor numérico de uma razão trigonométrica.

A lei dos cossenos relaciona as medidas dos lados de um triângulo com o cosseno de um de seus ângulos internos:

“Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles” [17].

Aplicando a lei dos cossenos na figura anterior em relação ao lado \overline{AC} , vem que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \theta \quad (04)$$

Vamos agora utilizar a lei dos cossenos, como um lema, para provar um dos mais fundamentais resultados da Geometria Euclidiana. Aplicando a lei dos cossenos em relação à hipotenusa no triângulo retângulo da figura anterior, temos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \hat{A}$$

Como $\hat{A} = 90^\circ$ e $\cos 90^\circ = 0$, vem que:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \quad \blacksquare \quad (05)$$

O que nos leva a concluir que:

“O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos” (Teorema de Pitágoras).

Dentre os polígonos convexos destacam-se os polígonos regulares.

3.2.2.2 Polígonos regulares

Um polígono convexo é regular quando todos os seus lados são congruentes e todos os seus ângulos são congruentes. A partir da definição e das fórmulas S_{i_n} e S_{e_n} é imediato deduzir

fórmulas para as medidas de um ângulo interno e um externo, Ai_n e Ae_n , de um polígono regular conhecido o seu gênero, respectivamente:

$$Ai_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \quad (06)$$

$$Ae_n = \frac{360^\circ}{n} \quad (07)$$

Destacamos, ainda, três segmentos notáveis nos polígonos regulares: os raios das circunferências, inscrita e circunscrita, e a altura.

Uma característica comum a todos os polígonos regulares é que eles são inscritíveis e circunscritíveis. Um polígono é inscritível quando existe uma circunferência que contém todos os vértices do polígono. Nesse caso dizemos que a circunferência está circunscrita ao polígono.

Por outro lado, um polígono é circunscritível quando todos os seus lados tangenciam uma mesma circunferência, isto é, existe uma circunferência que é tangente a todos os lados do polígono. Nesse caso dizemos que a circunferência está inscrita no polígono.

O centro do polígono regular é o centro da sua circunferência circunscrita (equidistante dos vértices). É fácil ver que o centro da circunferência inscrita também coincide com o centro do polígono regular.

Uma reta tangencia uma circunferência quando possui apenas um ponto em comum com ela. Além disso, o raio da circunferência é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência [26].

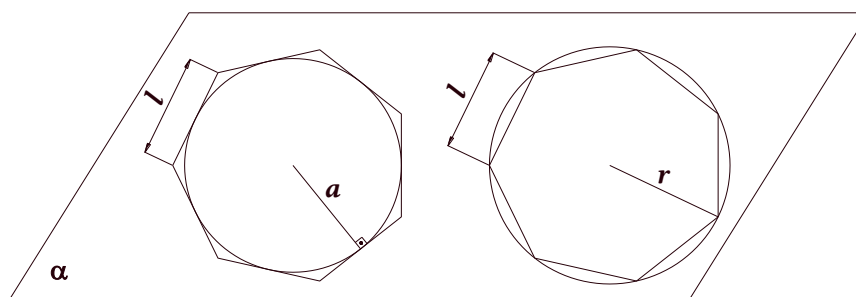


Figura 15: circunferência inscrita e circunscrita num heptágono regular

Fonte: o autor

O raio da circunferência inscrita recebe o nome de apótema. Nos polígonos regulares que possuem número par de lados, a altura do polígono regular é igual ao diâmetro da circunferência nele inscrita. Nos polígonos regulares de número ímpar de lados, a altura é a medida da distância de um lado ao vértice que lhe é oposto [27].

A distância entre ponto e reta será vista na Seção 3.3.1. Porém, intuitivamente, a altura de um polígono regular de número de lados ímpar é igual à soma dos raios das circunferências inscrita e circunscrita ao polígono.

Nesse trabalho necessitamos também das relações entre as medidas dos lados, das alturas e das diagonais de alguns polígonos regulares. Em nossas rotineiras análises de livros didáticos

(ressaltamos que não foi realizado um trabalho de pesquisa), percebemos que muitas dessas relações aparecem com frequência nos livros didáticos da Educação Escolar no Brasil, como em [15], [17], [20], [24], [26], [27] e [30], porém, esse não é o caso do pentágono regular e isso motivou-nos a escrever uma seção dedicada a esse polígono.

3.2.2.3 Segmentos notáveis no pentágono regular

Iniciamos essa seção com uma propriedade singular dos pentágonos convexos: são os únicos polígonos convexos que possuem o número de diagonais igual ao gênero. Aplicando a fórmula (03) vem que:

$$D_5 = \frac{5(5-3)}{2} = 5.$$

Além disso, com o auxílio de (02) encontramos para a soma dos ângulos internos 540° , de fato:

$$Si_5 = 180^\circ(5-2) = 540^\circ.$$

Aplicando (06) encontramos o valor de um ângulo interno do pentágono regular.

$$Ai_5 = \frac{180^\circ(5-2)}{5} = 108^\circ. \quad (08)$$

Num pentágono convexo podemos relacionar o comprimento de uma diagonal d_1 com os lados consecutivos, l_1 e l_2 , que contém os vértices de d_1 e o ângulo α entre l_1 e l_2 utilizando a lei dos cossenos.

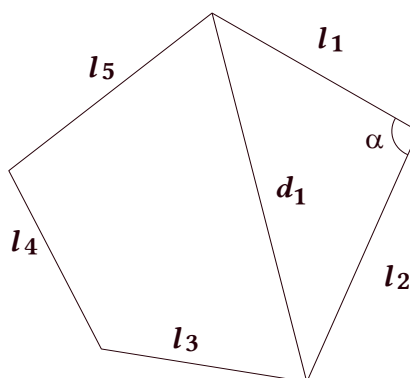


Figura 16: lei dos cossenos num pentágono convexo
Fonte: o autor

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo formado pelos lados l_1 e l_2 e d_1 , vem que:

$$d_1^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \alpha. \quad (09)$$

As diagonais do pentágono regular também são todas congruentes. Vamos provar de duas formas: aplicando (09) e utilizando um caso de congruência de triângulos.

- I. Provando com trigonometria: como os lados e os ângulos internos são todos congruentes podemos substituir em (09) o valor de α por 108° (08) e um valor l , constante, para a medida do lado. Sabendo que $d > 0$ vem que:

$$d^2 = l^2 + l^2 - 2l \cdot l \cdot \cos 108^\circ \Leftrightarrow$$

$$d = l\sqrt{2(1 - \cos 108^\circ)} \quad \blacksquare \quad (10)$$

- II. Utilizando congruência de triângulos: vamos agora utilizar o caso fundamental de congruência de triângulos conhecido por LAL:

“Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então esses dois triângulos são congruentes” [29].

Consideramos um pentágono regular $ABCDE$ (Figura 17):

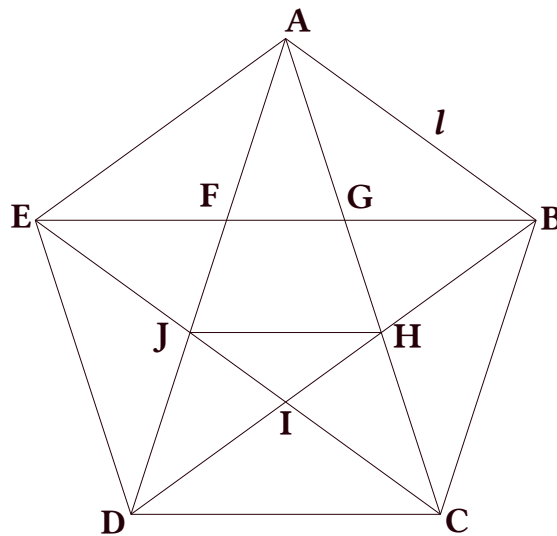


Figura 17: diagonais e segmentos notáveis no pentágono regular
Fonte: o autor

Nos triângulos ABC e BCD , temos que:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \overline{AB} \cong \overline{DC} = l \\ \bullet \widehat{ABC} \cong \widehat{BCD} = 108^\circ \\ \bullet \overline{BC} \text{ é um lado comum} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Por LAL os triângulos } ABC \text{ e } BCD \text{ são congruentes logo,} \quad (11)$$

$$\overline{AC} \cong \overline{BD}.$$

Analogamente:

$$\overline{CE} \cong \overline{AD} \cong \overline{BE} \cong \overline{AC} \cong \overline{BD} \quad \blacksquare \quad (12)$$

Dessa forma as diagonais de um pentágono regular são congruentes. No entanto, a recíproca dessa afirmação é **falsa**: se um pentágono possui as diagonais congruentes, então é regular. A figura a seguir é um contraexemplo construído com régua e compasso.

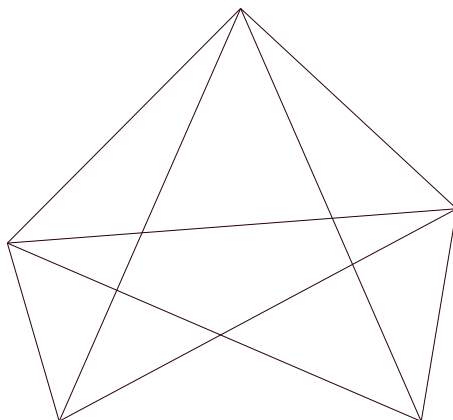


Figura 18: pentágono não regular com todas as diagonais congruentes
Fonte: o autor

Porém, se um pentágono convexo possui todos os lados congruentes entre si e todas as diagonais congruentes entre si então, esse pentágono é regular. Prova: sem perda de generalidade, vamos tomar como referência a Figura 17.

Vamos utilizar o caso de congruência de triângulos conhecido por LLL [27]:

– Dois triângulos que possuem os três lados ordenadamente congruentes são congruentes. (13)

Por hipótese $\overline{AC} \cong \overline{AD}$, $\overline{AB} \cong \overline{AE}$ e $\overline{BC} \cong \overline{ED}$. Assim, por LLL, os triângulos ABC e AED são congruentes, logo, $\hat{A}BC \cong \hat{A}ED$. Analogamente:

$$\hat{A}ED \cong \hat{E}AB \cong \hat{B}CD \cong \hat{C}DE \cong \hat{A}BC.$$

Portanto, esse pentágono é regular ■

Passamos agora a enumerar diversas relações entre as figuras formadas pelos lados e pelas diagonais do pentágono regular. Essas propriedades serão utilizadas na determinação dos ângulos diedros do dodecaedro regular e do icosaedro regular. Além disso, vamos determinar o valor numérico do $\cos 108^\circ$.

Em (10) relacionamos a medida da diagonal com o lado e o ângulo interno com a lei dos cossenos. A semelhança de triângulos [27] além das relações procuradas proporcionará a descoberta de várias outras relações notáveis entre as medidas das diagonais e das divisões causadas pelas suas respectivas intersecções. Sem perda de generalidade vamos tomar a Figura 17 como referência para facilitar a identificação dos segmentos de reta e ângulos em questão.

a. Os triângulos ABC , BCD , CDE , DEA e EAB são congruentes e isósceles.

Prova: pela definição de pentágono regular é imediato que são isósceles, enquanto que a prova da congruência é análoga à prova em (11).

b. O quadrilátero formado por uma diagonal e pelos três lados que pertencem ao mesmo semiplano determinado por essa diagonal é um trapézio isósceles. O trapézio isósceles é

um quadrilátero que possui um par de lados paralelos, que são a base maior e a base menor, e um par de lados não paralelos congruentes.

Prova: no triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes [26] e de (02) a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , esta é a lei angular de Tales, dessa forma temos que:

$$\widehat{C\hat{B}D} + \widehat{B\hat{C}D} + \widehat{C\hat{D}B} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{C\hat{B}D} + \widehat{C\hat{D}B} = 180^\circ - 108^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot \widehat{C\hat{B}D} = 72^\circ \Leftrightarrow \widehat{C\hat{B}D} = 36^\circ. \quad (14)$$

Agora, como $\widehat{A\hat{B}C} = 108^\circ$ vem que:

$$\widehat{A\hat{B}C} = \widehat{A\hat{B}E} + \widehat{C\hat{B}E} \Leftrightarrow \widehat{C\hat{B}E} = \widehat{A\hat{B}C} - \widehat{A\hat{B}E} \Leftrightarrow \widehat{C\hat{B}D} = 108^\circ - 36^\circ \Leftrightarrow \widehat{C\hat{B}E} = 72^\circ. \quad (15)$$

Agora, como $\widehat{B\hat{C}D} = 108^\circ$ temos que:

$$\widehat{B\hat{C}D} + \widehat{C\hat{B}E} = 108^\circ + 72^\circ = 180^\circ. \quad (16)$$

Agora, da contra positiva do 5º postulado de Euclides:

– Se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos no mesmo lado cuja soma é igual a dois ângulos retos então, as duas retas se continuadas não se encontram, isto é, são paralelas.

Dessa forma as retas \overline{BE} e \overline{CD} são paralelas, com $\overline{BC} \cong \overline{DE}$, portanto:

- O quadrilátero $BCDE$ é um trapézio isósceles com bases \overline{CD} e \overline{BE} . ■ (17)

Como num triângulo o lado maior é oposto ao maior ângulo [26] é fácil ver que a diagonal é a base maior e o lado do pentágono é a base menor desse trapézio isósceles. Destacamos nos trapézios a altura, que é a distância entre as bases. Na Secção 5.2.4 vamos calcular sem perda de generalidade a altura do trapézio $BCDE$.

- c. As diagonais de um pentágono regular $ABCDE$ se intersectam em cinco pontos distintos interiores do pentágono.

Prova: o triângulo ABC é isósceles e $\widehat{A\hat{B}C} = 108^\circ$. De (14) $\widehat{A\hat{B}E} \cong \widehat{B\hat{A}C} \cong \widehat{B\hat{C}A} = 36^\circ$. Assim, $\widehat{A\hat{B}E} + \widehat{B\hat{A}C} = 72^\circ < 180^\circ$, logo, pelo PE5 as diagonais \overline{EB} e \overline{AC} se intersectam no ponto G no semiplano determinado por \overline{AB} e que contém os ângulos $\widehat{A\hat{B}E}$ e $\widehat{B\hat{A}C}$.

Agora, como a diagonal \overline{AC} está contida na região angular de $\widehat{D\hat{A}B}$ e a diagonal \overline{EB} está contida na região angular de $\widehat{D\hat{B}A}$, o ponto G está contido na interseção das duas regiões angulares, isto é, no interior do triângulo ADB . Logo, G está contido no interior do pentágono $ABCDE$.

Analogamente, \overline{AC} e \overline{BD} se encontram no ponto H . Como $\overline{BD} \neq \overline{EB}$, temos que $G \neq H$.

Agora, como \overline{AC} e \overline{AD} se encontram no ponto A , vértice do pentágono, temos que essas

diagonais não se intersectam em outro ponto, pois não seriam distintas. Analogamente, \overline{AC} e \overline{CF} se encontram apenas no vértice ponto C . Logo, \overline{AC} intersecta exatamente duas diagonais nos pontos G e H ■

Analogamente, cada diagonal intersecta outras duas diagonais. Como são cinco diagonais há dez interseções possíveis, sendo que cada ponto é “contado” duas vezes, logo são cinco pontos distintos formando um pentágono menor. Chamamos esses pontos por $F, G, H, I,$ e J .

- d. Os triângulos AGB, BHC, CID, DJE e EFA são isósceles e semelhantes.

Prova: análogo ao item anterior, $\widehat{GAB} \cong \widehat{GBA} = 36^\circ$, logo $\overline{GA} \cong \overline{GB}$ e o triângulo AGB é isósceles logo, de (02) $\widehat{AGB} = 108^\circ$. Analogamente são isósceles e possuem os ângulos internos com as medidas $36^\circ, 36^\circ$ e 108° todos os demais triângulos. Logo são semelhantes por terem os ângulos respectivos congruentes [27] ■

- e. Os triângulos AGB, BHC, CID, DJE e EFA são congruentes.

Prova: novamente, sem perda de generalidade tomamos os triângulos AGB e EFA . As bases desses triângulos isósceles são $\overline{AB} \cong \overline{AE} = l$ e os ângulos relativos a essas bases são todos congruentes e iguais a 36° . Logo pelo caso de congruência ALA, ângulo – lado – ângulo [26], esses triângulos são congruentes ■ (18)

- f. Os triângulos AFG, BGH, CHI, DIJ e EJF são isósceles e congruentes.

Da congruência do item anterior, vem que:

$$\overline{AF} \cong \overline{AG} \cong \overline{BG} \cong \overline{BH} \cong \overline{CH} \cong \overline{CI} \cong \overline{DI} \cong \overline{DJ} \cong \overline{EJ} \cong \overline{EF} \quad \blacksquare \quad (19)$$

Logo, são isósceles. Novamente sem perda de generalidade e tomando os ângulos \widehat{EAB} e \widehat{FAG} , do item (d) vem que:

$$\widehat{EAF} + \widehat{FAG} + \widehat{GAB} = 108^\circ \Leftrightarrow 36^\circ + \widehat{FAG} + 36^\circ = 108^\circ \Leftrightarrow \widehat{FAG} = 36^\circ.$$

Analogamente:

$$\widehat{FAG} \cong \widehat{GBH} \cong \widehat{HCI} \cong \widehat{IDJ} \cong \widehat{JEF} = 36^\circ \quad \blacksquare$$

Logo, por LAL esses triângulos são congruentes ■

- g. O pentágono $FGHIJ$ é regular.

Prova: da congruência do item anterior temos que:

$$\overline{FG} \cong \overline{GH} \cong \overline{HI} \cong \overline{IJ} \cong \overline{JF} \quad \blacksquare \quad (20)$$

Além disso, os ângulos $\widehat{FGH}, \widehat{GHI}, \widehat{HIJ}, \widehat{IJF}$ e \widehat{JFG} são opostos pelo vértice respetivamente aos ângulos congruentes (do item (d)):

$$\widehat{AGB} \cong \widehat{BHC} \cong \widehat{CID} \cong \widehat{DJE} \cong \widehat{EFA} = 108^\circ \quad \blacksquare$$

Assim, como o pentágono $FGHIJ$ possui todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes, ele é regular ■

O fato impressionante é a possibilidade da construção de um pentágono regular, a partir de outro pentágono regular, maior (prolongando os lados) ou menor (traçando as diagonais) que o anterior. Além disso, esse processo é infinito. Vamos mostrar também, em (j), que a razão do lado do pentágono “maior” ($ABCDE$) para a diagonal do pentágono “menor” ($FGHIJ$) é a mesma razão da diagonal para o lado de um mesmo pentágono regular.

h. O triângulo ABH é isósceles e tem a base \overline{BH} .

Prova. Como $\hat{A}HB + \hat{C}HB = 180^\circ$ e $\hat{C}HB = 108^\circ$, então $\hat{A}HB = 72^\circ$. Como $\hat{A}BH + \hat{C}BH = 108^\circ$ e $\hat{C}BH = 36^\circ$ (da letra c), temos que $\hat{A}BH = 72^\circ$. Portanto, o triângulo ABH é isósceles e $\overline{AH} \cong \overline{AB} = l$ ■

Além disso, os ângulos da base são 72° e 72° e o ângulo no vértice oposto à base é 36° .

Analogamente, o triângulo AEJ é isósceles e tem base \overline{AJ} , além disso:

$$\overline{AJ} \cong \overline{AE} = l \quad \blacksquare \quad (21)$$

i. O triângulo ABH é congruente ao triângulo AJH .

Prova. $\hat{E}AB = \hat{E}AF + \hat{F}AG + \hat{G}AB = 108^\circ$. Da letra (d), vem que:

$$36^\circ + \hat{F}AG + 36^\circ = 108^\circ \Leftrightarrow \hat{F}AG = 36^\circ \quad \blacksquare$$

Da letra anterior $\overline{AH} = l = \overline{AJ}$ logo o triângulo AJH também é isósceles. Por LAL são congruentes os triângulos ABH e AJH , donde $\overline{JH} \cong \overline{BH} = x$ ■

Essa última congruência será fundamental para relacionar o lado com a diagonal do pentágono regular, pois:

$$\left((\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{HC}) \wedge (\overline{AH} = l) \wedge (\overline{HC} \cong \overline{BH} = x) \right) \Rightarrow \overline{AC} = l + x \quad \blacksquare \quad (22)$$

j. O triângulo AJH é semelhante ao triângulo ADC .

Prova. Dentre as várias provas possíveis vamos empregar o caso fundamental da semelhança de triângulos conhecido por LAL:

“Se dois lados de um triângulo $A'B'C'$ são respectivamente proporcionais a dois lados de um triângulo ABC e se forem congruentes os ângulos formados por esses lados, os triângulos são semelhantes” [27]. (23)

Temos que: $\hat{J}AH \cong \hat{D}AC = 36^\circ$ e ainda:

$$\left[\left(\frac{d}{l} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AJ}} \right) \wedge \left(\frac{d}{l} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} \right) \right] \Rightarrow \left[\frac{\overline{AD}}{\overline{AJ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} \right].$$

Por LAL os triângulos AJH e ADC são semelhantes. Logo:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AJ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{JH}} = \frac{d}{l}. \quad (24)$$

Além disso, $\overline{DC} = l$ e $\overline{JH} = x$, onde x é a diagonal do pentágono “menor” (g). Assim, a razão do lado do pentágono $ABCDE$ para a diagonal do pentágono $FGHIJ$ é a mesma razão da diagonal para o lado de um mesmo pentágono regular ■

k. Razão da diagonal para o lado do pentágono regular.

Aplicando a propriedade fundamental das proporções [27] em (24) vem que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{JH}} \Leftrightarrow \overline{AC} \cdot \overline{JH} = \overline{AH} \cdot \overline{DC} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{JH}}. \quad (25)$$

Dessa última proporção, de (24) e de (25), vem que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{JH}} \Leftrightarrow \frac{x+l}{l} = \frac{l}{x} \Leftrightarrow x^2 + lx - l^2 = 0. \quad (26)$$

Usando a fórmula resolvente da equação do 2º grau para a incógnita x , da equação (26) e sabendo que $x > 0$ e $l > 0$, vem que:

$$x = \frac{-(l) \pm \sqrt{(l)^2 - 4(1)(-l^2)}}{2(1)} = \frac{-l \pm \sqrt{5l^2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-l + l\sqrt{5}}{2} = l \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right), \\ x_2 = \frac{-l - l\sqrt{5}}{2} = l \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2} \right). \end{cases}$$

Portanto,

$$x = l \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right). \quad \blacksquare$$

Agora, como $d = l + x$, vem que:

$$d = l + l \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) = \frac{2l + l\sqrt{5} - l}{2} = \frac{l + l\sqrt{5}}{2} = l \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)$$

$$d = l \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \approx \frac{162}{100} l \quad \text{ou} \quad (27)$$

$$\frac{d}{l} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right). \quad \blacksquare \quad (28)$$

O número real $(\sqrt{5}+1)/2$ é conhecido como razão áurea e “aparece” em diversas formas da natureza. Um retângulo cuja razão entre os lados é a razão áurea é conhecido como

retângulo áureo. Assim, propomos que o trapézio $BCDE$ seja conhecido por trapézio áureo.

1. Valor do cosseno de 108° .

Comparando (10) e (28), vem que:

$$\sqrt{2(1-\cos 108^\circ)} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \Leftrightarrow 2(1-\cos 108^\circ) = \frac{5+1+2\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow 1-\cos 108^\circ = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\cos 108^\circ = 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow \cos 108^\circ = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \blacksquare$$

$$\cos 108^\circ \approx -0,30901699437494742410229341718282.$$

- m. Raios das circunferências circunscrita e inscrita no pentágono regular.

A circunferência circunscrita contém o conjunto formado por todos os vértices do polígono logo, o centro dessa circunferência é um ponto equidistante dos vértices. A circunferência inscrita tangencia todos os lados do polígono logo, o centro dessa circunferência é equidistante dos lados do polígono.

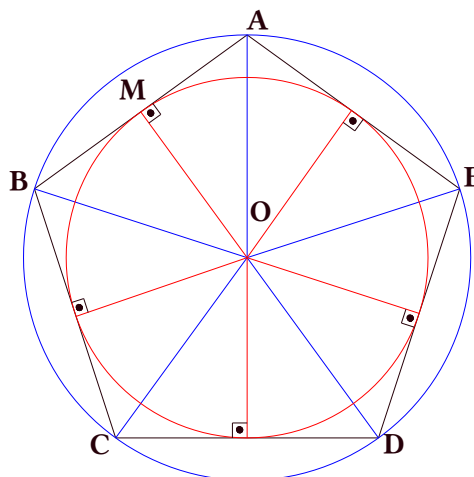


Figura 19: circunferências inscrita e circunscrita ao pentágono regular
Fonte: o autor

Como sabemos que o LG dos pontos que equidistam de dois pontos, A e B é a mediatriz de \overline{AB} então, o centro O da circunscrita pertence à mediatriz de \overline{AB} . Analogamente, O pertence às mediatrizes de todos os lados do polígono. Assim só existe circunferência circunscrita se as mediatrizes de todos os lados se encontrarem num único ponto.

Por outro lado, o LG dos pontos que equidistam de dois segmentos consecutivos é a bissetriz do ângulo formado por esses dois segmentos. Assim, o LG dos pontos que equidistam dos lados \overline{AB} e \overline{AE} é a bissetriz interna de \widehat{BAE} . Analogamente, O' pertence às bissetrizes internas de todos os ângulos do polígono. Logo, só existe circunferência

inscrita se as bissetrizes internas de todos os ângulos do polígono se encontrarem num único ponto. Neste trabalho não vamos realizar a demonstração de que esses pontos existem e coincidem (deixamos como desafio para o leitor). Porém, vamos relacionar o raio da circunscrita, que vamos chamar de r , e o raio da inscrita, que vamos chamar de s , com a medida l do lado do pentágono regular.

Na Figura 19, o triângulo AOB é isósceles, com base \overline{AB} . Da mesma forma o triângulo AOE é isósceles com base \overline{AE} . Temos então:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \overline{AB} \cong \overline{AE} = l \\ \bullet \overline{OB} \cong \overline{OE} = r \\ \bullet \overline{OA} \text{ é um lado comum} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Por LLL os triângulos } ABO \text{ e } AEO \text{ são congruentes,} \\ \text{logo: } \hat{OAB} \cong \hat{OAE} \blacksquare$$

Analogamente são congruentes os triângulos isósceles OBC , OCD , ODE , OEA e OAB .

Seja M o ponto médio do segmento \overline{AB} . Como o triângulo AOB é isósceles, a mediana coincide com a altura [26] assim, $\overline{AM} = s$ e o triângulo MAO é retângulo, com $\hat{OMA} = 90^\circ$ ■

Vamos calcular os raios, usando as razões trigonométricas cosseno e tangente do ângulo \hat{OAM} . Da congruência dos triângulos que tem o vértice comum O , temos que $\hat{OAM} = 540^\circ/10 = 54^\circ$.

i. Raio da circunferência circunscrita.

$$\cos(\hat{OAM}) = \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \cos 54^\circ = \frac{l/2}{r} \Leftrightarrow r = \frac{l}{2 \cos 54^\circ} \approx \frac{85}{100} l. \quad (29)$$

ii. Raio da circunferência inscrita.

$$\operatorname{tg}(\hat{OAM}) = \frac{\overline{MO}}{\overline{MA}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 54^\circ = \frac{s}{l/2} \Leftrightarrow s = \operatorname{tg} 54^\circ \frac{l}{2} \approx \frac{69}{100} l. \quad (30)$$

n. A altura de um polígono regular que tem um número ímpar de lados é a distância de um vértice ao lado oposto a esse vértice. A distância entre duas figuras é a medida do menor segmento de reta que une essas figuras. Observando a Figura 20 notamos que a altura relativa ao lado \overline{DC} do pentágono regular $ABCDE$ coincide com a altura h do triângulo isósceles ACD .

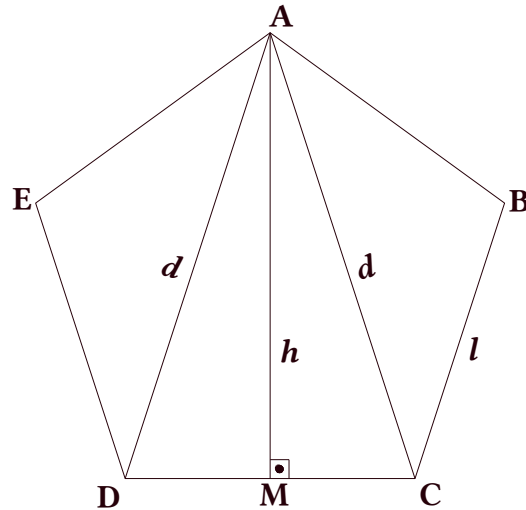


Figura 20: altura do pentágono regular
Fonte: o autor

No triângulo isósceles a altura e a mediana relativa à base coincidem [26], logo \overline{AM} é perpendicular a \overline{DC} e M é o ponto médio desse segmento.

Do teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = d^2 \Leftrightarrow h^2 = d^2 - \frac{l^2}{4}$$

Da relação (18) entre d e l , e sabendo que $h > 0$, vem que:

$$h^2 = \left[\frac{(1+\sqrt{5})}{2}l\right]^2 - \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow h^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}l^2 - \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow h^2 = l^2\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$h^2 = l^2\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{4}\right) \Leftrightarrow h^2 = l^2\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{4}\right) \Rightarrow h = \sqrt{l^2\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{4}\right)} \Rightarrow$$

$$h = l \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} \approx l \cdot 1,5388417685876267012851452880185 \approx \frac{154}{100}l. \quad (31)$$

Comparando as figuras 19 e 20 notamos que a altura do triângulo ADC parece coincidir com a soma dos raios das circunferências inscrita e circunscrita. Apesar de não apresentarmos a demonstração formal vamos comparar os dois resultados utilizando as relações das razões trigonométricas [17].

$$r + s = \frac{l}{2 \cos 54^\circ} + \frac{l}{2} \operatorname{tg} 54^\circ = \frac{l}{2 \cos 54^\circ} + \frac{l \operatorname{sen} 54^\circ}{2 \cos 54^\circ} = \frac{l}{2} \left(\frac{1 + \operatorname{sen} 54^\circ}{\cos 54^\circ} \right) \blacksquare$$

$$r + s \approx l \cdot 1,5388417685876267012851452880185.$$

4 CONCEITOS BÁSICOS DA GEOMETRIA ESPACIAL

Como vimos na Seção 3.1.3 o espaço é o conjunto de todos os pontos. Na Educação Básica o espaço físico que habitamos é mapeado como um espaço tridimensional, isto é, possui três dimensões. Na Geometria Euclidiana uma dimensão pode ser comparada com a direção definida por uma reta.

O ato de medir uma dimensão de um objeto é exatamente uma comparação daquela medida com um padrão pré-estabelecido. Por exemplo, ao medirmos um segmento de reta verificamos quantas vezes uma medida padrão “cabe” naquele segmento.

Um objeto (um corpo) é dito espacial quando ele ocupa lugar no espaço. Esse “lugar ocupado” por um corpo também pode ser comparado, isto é, medido por meio de um objeto padrão. O objeto padrão para medidas espaciais é o cubo. O cubo é um bloco retangular com todas as arestas congruentes e as arestas concorrentes são perpendiculares.

Observando o bloco retangular (Figura 2, página 21) notamos que ele possui 12 arestas. Notamos também que só é possível construir um bloco retangular com no máximo três arestas com dimensões distintas (de modo que as arestas concorrentes permaneçam perpendiculares) as nove arestas restantes são três a três congruentes. Assim, no bloco retangular temos, no máximo, três quartetos de arestas congruentes.

Essas três possíveis medidas distintas são chamadas de dimensões do bloco retangular as quais chamamos por: comprimento, largura e altura (a terceira dimensão também é chamada de profundidade ou espessura). Assim, o espaço ocupado por um corpo pode ser comparado com o espaço ocupado por um bloco retangular. Dessa forma, um objeto do espaço pode ser medido com três dimensões.

Um segmento de reta é uma figura do espaço que possui apenas uma dimensão: comprimento. A largura e a altura de um segmento de reta são consideradas nulas. As curvas em geral possuem apenas uma dimensão. As figuras planas possuem duas dimensões: comprimento e largura, a terceira dimensão é nula. Além disso, o ponto é adimensional.

As figuras (ou objetos) espaciais possuem três dimensões não nulas. No livro XI (Os Elementos) Euclides define: “*Sólido é o que tem comprimento, largura e profundidade*”. Os principais sólidos geométricos estudados na Educação Escolar são os corpos redondos e os poliedros [5].

Um corpo redondo apresenta uma superfície não plana enquanto que num poliedro todas as superfícies, as faces, são todas planas. Os principais corpos redondos são: a esfera, o cilindro e o

cone. Este trabalho é direcionado para os poliedros regulares e, apesar de ser possível relacioná-los com os corpos redondos, não iremos nesse sentido, ficando como sugestão para trabalhos futuros, por exemplo, a inscrição e a circunscrição de poliedros regulares em corpos redondos.

Antes de prosseguirmos com o estudo dos poliedros é necessário enumerar as posições relativas dos objetos que compõe os poliedros.

4.1 Posições Relativas entre os Elementos Primitivos, Projeção Ortogonal, Simetria e Distância

Vimos que o espaço é o conjunto de todos os pontos. As retas e os planos são subconjuntos do espaço. A análise rigorosa da estrutura desses conjuntos não é objeto da Educação Escolar. Assim, vamos considerar de forma intuitiva que uma figura é um conjunto de pontos do espaço.

Como o ponto é o elemento fundamental do espaço relacioná-lo com os outros elementos primitivos é uma tarefa bem simples utilizando a linguagem dos conjuntos:

- a. Um ponto P e uma reta r :
 - $P \in r$ (r “passa” por P); ou
 - $P \notin r$.
- b. Um ponto P e um plano α :
 - $P \in \alpha$ (α “passa” por P); ou
 - $P \notin \alpha$.

Na Seção 3.1 vimos que dois pontos distintos determinam uma reta (PE1). Apesar de uma reta conter infinitos pontos podemos ter três pontos do espaço não colineares. Assim, dois pontos do espaço são sempre colineares e três podem não ser colineares.

Analogamente existe um axioma de determinação de um plano (ADP): “*três pontos não colineares determinam um plano*” [15]. De forma semelhante, três pontos são sempre coplanares e pode haver no mínimo quatro pontos do espaço não coplanares.

Uma reta de um plano divide-o em dois semiplanos, analogamente um plano divide o espaço em dois semi-espacos.

As retas e os planos são subconjuntos do espaço, isto é, estão contidos nos espaço. Esses subconjuntos do espaço podem ser disjuntos ou não disjuntos. Além disso, classificamos as relações entre esses objetos em posições relativas.

4.1.1 Posições relativas entre duas retas

Duas retas podem ser distintas ou coincidentes. Duas retas r e s são coincidentes se possuem todos os pontos em comum, isto é: $r \subset s$ e $s \subset r$ logo $r = s$. Para que isso ocorra basta que tenham dois pontos em comum, pois dois pontos determinam uma reta. Caso contrário, r e s são distintas.

Se duas retas são distintas, elas podem ser coplanares ou reversas (não coplanares). Uma reta r sempre está contida num número infinito de planos, isto é, existe um número infinito de planos que contém r . Para que um plano α contenha r basta α e r terem dois pontos distintos em comum [26]. Vamos chama-lo de AIR (axioma de inclusão da reta)

Agora, se r e s são retas e existe um plano α que as contém, isto é, $[(r \subset \alpha) \wedge (s \subset \alpha)]$, então r e s são coplanares. Caso contrário, r e s são reversas. Na Figura 21, os pares de retas $(r ; s)$ e $(r ; t)$ são coplanares e $(s ; t)$ são reversas.

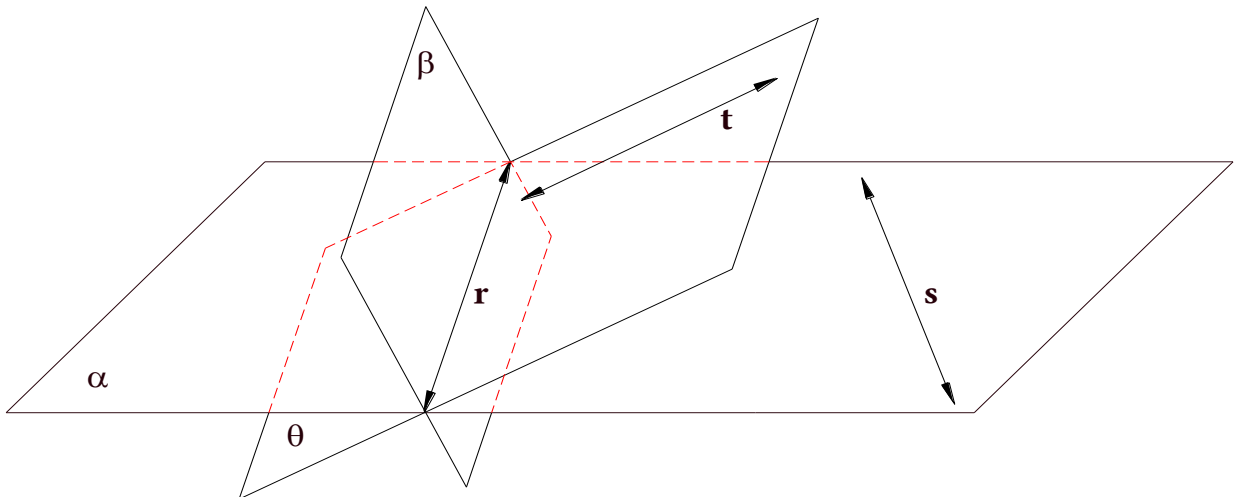


Figura 21: posições relativas de retas no espaço
Fonte: o autor

Se duas retas distintas são coplanares elas podem ser, ainda, concorrentes ou paralelas (as retas coincidentes também são classificadas como paralelas coincidentes). Serão concorrentes se tiverem apenas um ponto em comum, pois dois pontos determinam uma reta. Caso contrário, são paralelas (ou paralelas distintas), isto é, são coplanares e não possuem ponto em comum.

A recíproca do parágrafo anterior é verdadeira e auxilia na determinação de um plano:

– Se duas retas são concorrentes ou são paralelas, elas sempre serão coplanares.

Vamos provar essa afirmação em duas partes a partir de outra forma de determinação de um plano, utilizada como lema. Vamos chamá-la de DP1:

DP1: Uma reta e um ponto não pertencente a ela determinam um plano.

Prova: seja r uma reta, P um ponto não pertencente a r e sejam A e B pontos distintos de r . Como P, A e B são não colineares, pelo ADP esses pontos determinam um plano α . Além disso, $r \subset \alpha$ pelo AIR. ■

Vamos provar agora a primeira parte da recíproca: Vamos chamar essa afirmação de DP2.

DP2: Duas retas concorrentes determinam um plano.

Prova. Sejam r e s duas retas concorrentes no ponto P e sejam A e B pontos tais que:

$$[(A \in r) \wedge (A \notin s)] \wedge [(B \in s) \wedge (B \notin r)] \Leftrightarrow [P, A \text{ e } B \text{ são não colineares}],$$

Portanto, r e s determinam um plano β . Além disso, $r \subset \beta$ e $s \subset \beta$ pelo AIR. ■

A figura a seguir, resume as posições relativas de duas retas no espaço:

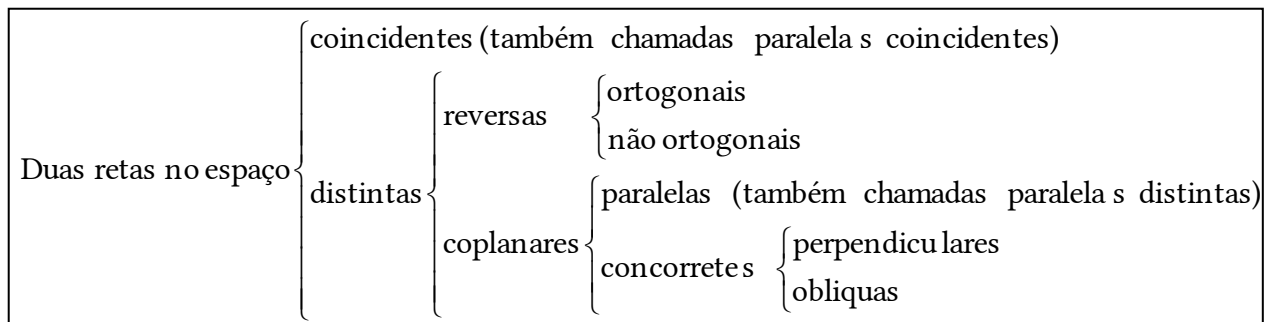


Figura 22: resumo das posições relativas de retas no espaço

Fonte: o autor

A distância entre duas retas concorrentes é nula. De uma maneira geral a distância entre duas figuras que têm ponto em comum é também nula.

Por outro lado, a distância entre dois objetos que não têm ponto em comum é igual à medida do segmento de reta de menor medida que liga um ponto de um objeto a um ponto do outro objeto [30].

A partir de $P \notin r$ destacamos dois pontos notáveis: a projeção ortogonal de P sobre r e o simétrico de P em relação a r (Figura 23).

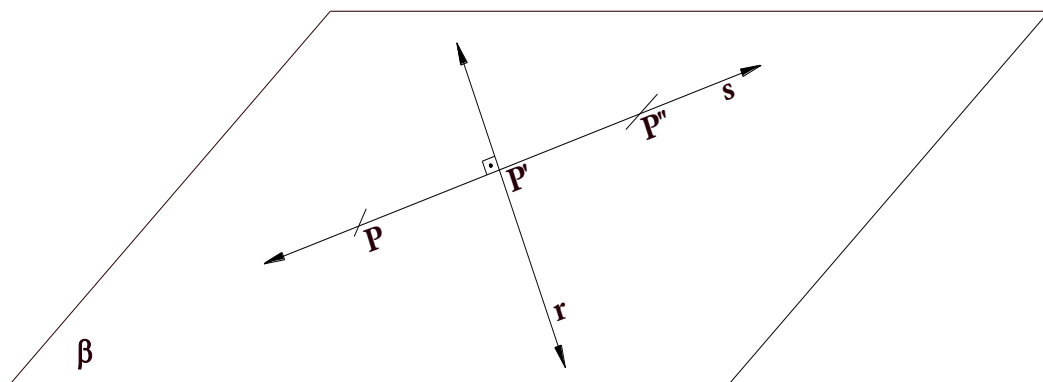


Figura 23: simétrico, projeção ortogonal e distância de um ponto a uma reta

Fonte: o autor

A projeção ortogonal de P sobre r é o ponto P' interseção de r com uma reta s perpendicular a r que “passa” por P . Em notação algébrica:

$$proj_r P = \{P'\} = (r \cap s) \wedge (s \perp r) \wedge (P \in s).$$

O simétrico de P em relação a r é o ponto $P'' \in s$ tal que $\overline{PP'} \cong \overline{P'P''}$ e $(P'' \neq P)$. O simétrico de P em relação a r é também chamado de reflexão de P em relação a r .

Além disso, é fácil ver (utilizando as propriedades dos triângulos retângulos) que a distância de P a r é a medida do segmento $\overline{PP'}$.

Na Geometria Euclidiana a distância entre duas retas paralelas é constante, essa afirmação é considerada um substituo para o 5º Postulado de Euclides [25].

Assim, para medir a distância entre duas retas paralelas basta medir a distância de um ponto qualquer de uma reta até a outra. A distância entre duas retas reversas r e s é a distância entre r e o plano α que contém s e que é paralelo a r , ou vice-versa [15]. Na próxima seção vamos ver como medir a distância entre reta e plano.

Duas retas concorrentes formam quatro ângulos dois a dois opostos pelo vértice. Logo são dois pares de ângulos congruentes. Se um deles for reto (é fácil ver que os outros três também serão) as retas são perpendiculares. Caso contrário, as retas são oblíquas.

Finalmente, se duas retas são reversas elas podem ser ortogonais ou não ortogonais. São ortogonais quando o ângulo entre elas for reto.

O ângulo entre duas retas reversas r e s é obtido com o auxílio da projeção ortogonal de r sobre o plano que contém s e é paralelo a r [15].

A projeção ortogonal de uma reta r sobre uma reta s só fica definida quando estas são coplanares. Se r e s forem perpendiculares, a projeção ortogonal será apenas o ponto de interseção. Se as retas forem oblíquas ou paralelas, a projeção ortogonal de r sobre s será a reta s .

4.1.2 Posições Relativas entre uma reta e um plano

Uma reta pode estar contida num plano ou não. Na Figura 21, $t \subset \theta$ e $s \not\subset \theta$. Uma reta s não contida num plano θ pode não ter ponto em comum com θ ou ter apenas um ponto em comum, pois, se tiver dois pontos em comum com θ estará contida em θ [15].

Quando a reta s e o plano θ não tem ponto em comum, isto é, $s \cap \theta = \emptyset$, dizemos que s é paralela a θ ou que s e θ são paralelos. Por outro lado quando s possui apenas um ponto em

comum com θ dizemos que s intersecta (ou fura) θ . O ponto T , tal que $s \cap \theta = \{T\}$ é chamado traço de s em θ . Nesse caso a reta será perpendicular ou oblíqua ao plano.

Uma reta r é perpendicular a um plano β quando forma ângulo reto com todas as retas de β . Uma condição suficiente é que r seja perpendicular a duas retas de β concorrentes em T [24]. Na Figura 24, r é perpendicular a s e a t . Além disso, s e t estão contidas em β e T é o traço de r em β . O ângulo de r e β é reto e a projeção ortogonal de r em β é apenas o traço de r em β .

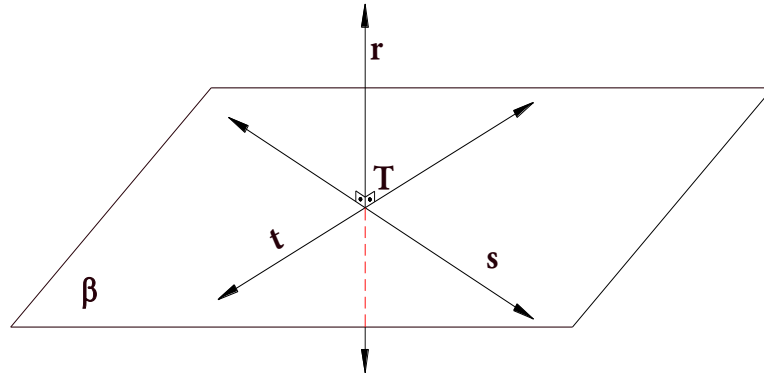


Figura 24: reta perpendicular a um plano
Fonte: o autor

Quando r é oblíqua a α forma ângulos com medidas diversas com as retas de α . O ângulo entre r e α é o ângulo ϖ que r faz com a sua projeção ortogonal sobre α . Esse é o ângulo de menor medida que r faz com uma reta de α [24].

A projeção ortogonal de r em α é a reta r' concorrente com r no traço, T , de r em α .

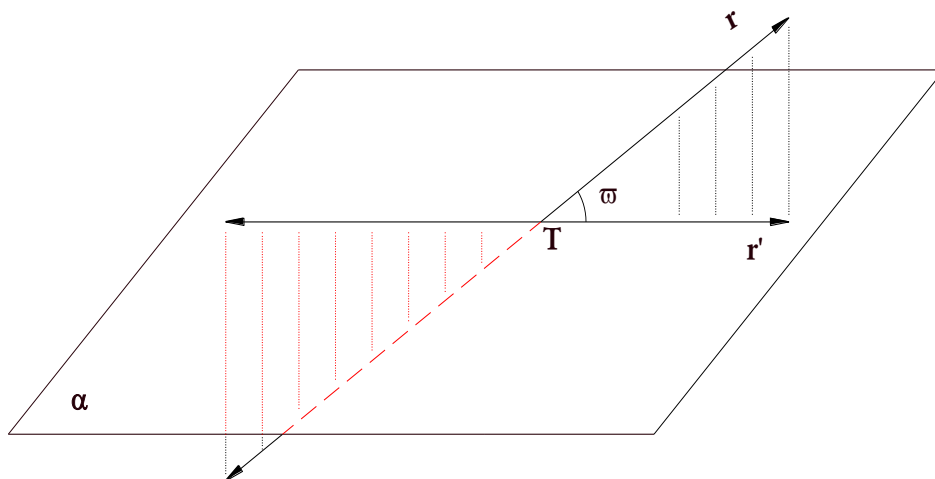


Figura 25: reta oblíqua a um plano
Fonte: o autor

Analogamente a projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é o ponto P' interseção de α com uma reta s perpendicular a α que “passa” por P . O simétrico (a reflexão) de P em relação a α é o ponto $P'' \in s$ tal que $\overline{PP'} \cong \overline{P'P''}$ e $(P'' \neq P)$.

Também é fácil ver que a distância de P a α é a medida do segmento $\overline{PP'}$.

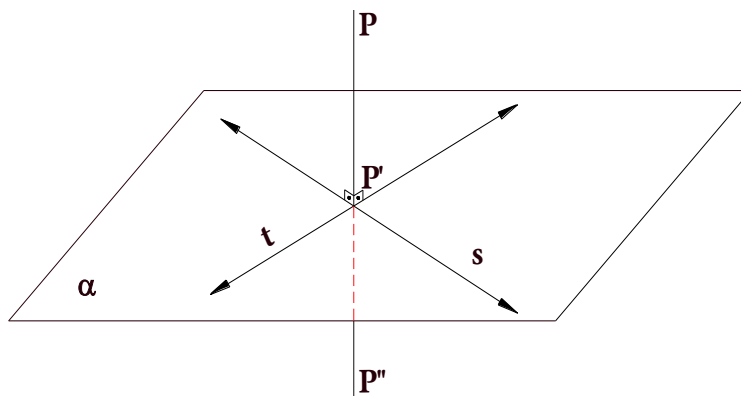


Figura 26: simétrico, projeção ortogonal e distância de um ponto a um plano
Fonte: o autor

Na Figura 27 s é paralela a θ . A projeção ortogonal de s em θ é uma reta s' paralela a s . Nesse caso, a distância entre s e θ é a distância entre s e s' .

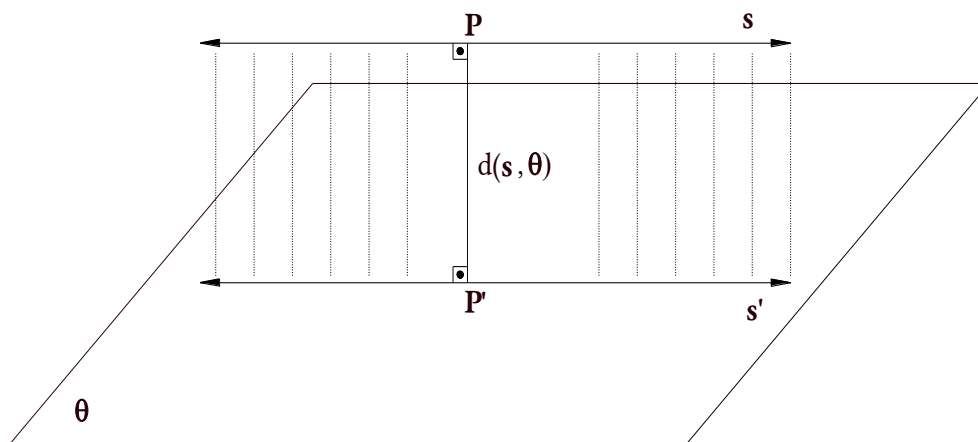


Figura 27: reta paralela a um plano
Fonte: o autor

4.1.3 Posições Relativas entre dois planos

Dois planos podem ser distintos ou coincidentes (também chamados paralelos coincidentes). Se forem distintos podem ser paralelos (também chamados paralelos distintos) e não possuem ponto em comum ou concorrentes. A distância entre dois planos paralelos é a distância de um ponto de um ao outro. Assim, se dois planos forem paralelos e possuírem um ponto comum esses planos são coincidentes.

A interseção de dois planos concorrentes é uma reta também chamada de traço de um plano no outro [15]. Além disso, dois planos concorrentes (Figura 28) formam quatro figuras: os

diedros. Um diedro (ângulo diedro ou ângulo diédrico) é uma figura formada por dois semiplanos com uma reta (origem dos semiplanos) comum. Os semiplanos são as faces do diedro.

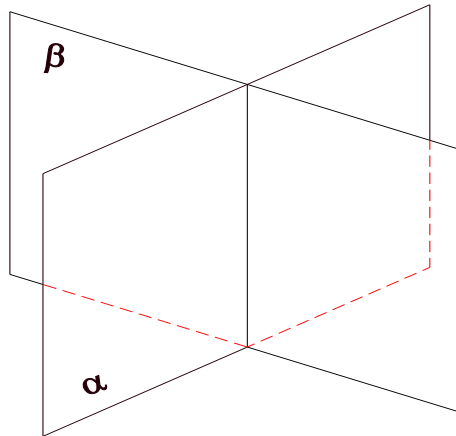


Figura 28: planos concorrentes
Fonte: o autor

Dois planos concorrentes podem ser perpendiculares ou oblíquos. Dois planos perpendiculares formam quatro diedros congruentes, onde cada um é um diedro reto.

Dois planos oblíquos formam dois pares de diedros congruentes: um par de diedros agudos (opostos pela origem) e um par de diedros obtusos (opostos pela origem).

A medida de um diedro é a medida de sua secção reta. A secção reta de um diedro é um ângulo formado por duas semirretas pertencentes respectivamente às faces do diedro que são perpendiculares à origem (Figura 29).

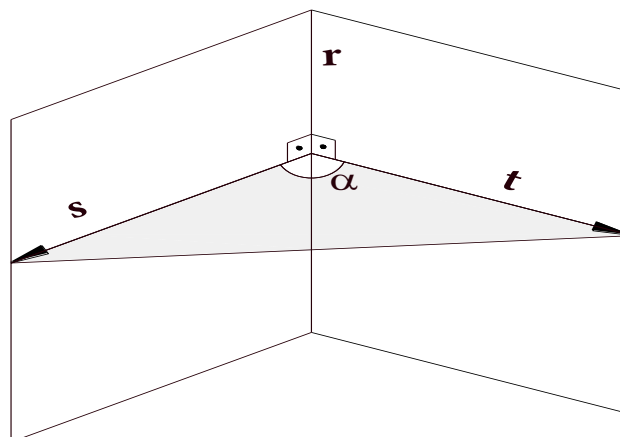


Figura 29: secção reta e medida do diedro
Fonte: o autor

A secção reta também é definida como a intersecção de um plano perpendicular à origem do diedro com o diedro. De uma forma geral a intersecção de um plano com uma figura gera uma secção plana naquela figura.

O sufixo “edro” significa face plana logo, diedro significa objeto que possui exatamente duas faces planas. Analogamente triedro é um objeto que possui exatamente três faces planas; tetraedro, quatro etc. Poliedro significa objeto que possui várias faces planas.

Não há distinção entre diedro e ângulo diédrico (ou ângulo diedro), porém, a partir de três faces distinguimos poliedro e ângulo poliédrico.

O ângulo poliédrico é uma generalização do ângulo plano para o espaço. O ângulo plano é uma figura formada por duas semirretas de mesma origem enquanto que o ângulo poliédrico é formado por três ou mais semirretas (arestas) reversas três a três e de mesma origem.

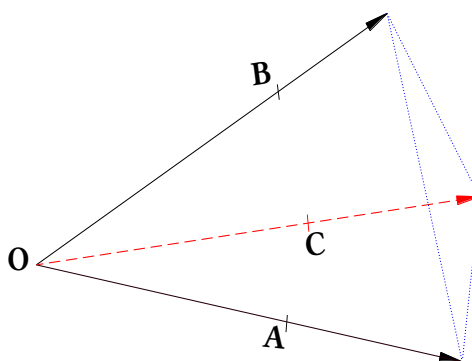


Figura 30: ângulo triédrico (triedro)

Fonte: o autor

Além das arestas, dos vértices e dos diedros, destacam-se as faces do triedro. A medida de uma face é a medida do ângulo formado pelas respectivas arestas. Assim, temos:

- $\text{med } F(AOB) = A\hat{O}B$;
- $\text{med } F(AOC) = A\hat{O}C$;
- $\text{med } F(BOC) = B\hat{O}C$;

Na Educação escolar são estudados apenas os ângulos poliédricos convexos, isto é, as arestas que determinam o número de faces não pertencem à região interior do ângulo poliédrico [15]. Na Secção 5 vamos listar mais detalhes de poliedros e ângulos poliédricos.

4.1.4 Posições relativas entre segmentos de retas, figuras planas e elementos primitivos

Duas figuras distintas do espaço que possuem ponto em comum são chamadas de concorrentes ou secantes. Se essas figuras forem planas poderão ser oblíquas ou perpendiculares. Quando são oblíquas, o ângulo entre essas figuras é definido como o menor ângulo formado entre elas.

Quando essas figuras não possuem ponto em comum a posição relativa entre eles é definida pela posição relativa dos elementos primitivos que lhes “servem” de suporte. Alguns exemplos:

- dois segmentos de reta \overline{AB} e \overline{CD} : a posição relativa é a mesma das retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} ;
- um segmento de reta \overline{AB} e um plano α : a posição relativa é a mesma de \overleftrightarrow{AB} e α ;
- uma figura plana F_1 e um plano α : a posição relativa é a mesma do plano suporte de F_1 e α .
- uma figura plana F_1 e uma reta r : a posição relativa é a mesma do plano suporte de F_1 e r .
- um segmento de reta \overline{AB} e uma figura plana F_1 : a posição relativa é a mesma da reta \overleftrightarrow{AB} e do plano suporte de F_1 .

Na Figura 31 apresentamos o exemplo de um segmento de reta \overline{AB} não concorrente com um plano β que lhe é oblíquo, além disso:

- \overleftrightarrow{AB} é a reta suporte de \overline{AB} ;
- $\overline{A'B'}$ é a projeção ortogonal de \overline{AB} sobre β ;
- $\overleftrightarrow{A'B'}$ é a projeção ortogonal de \overleftrightarrow{AB} sobre β e sua reta suporte é $\overleftrightarrow{A'B'}$;
- θ é o ângulo entre \overleftrightarrow{AB} e β ; e
- o segmento $\overline{AA'}$ tem comprimento igual à distância de \overline{AB} a β .

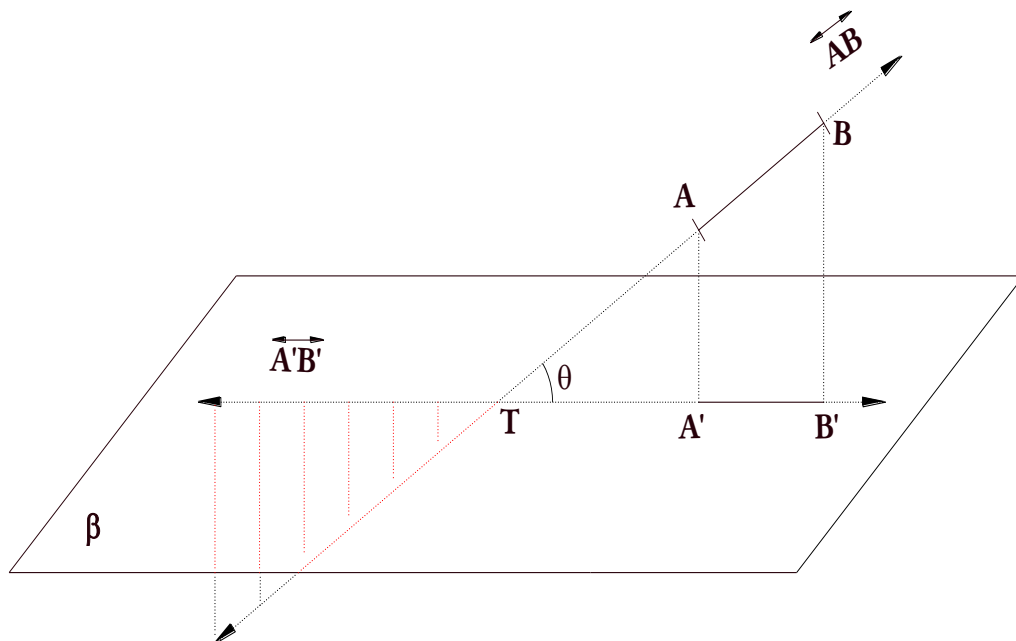


Figura 31: projeção ortogonal e ângulo de um segmento de reta oblíquo a um plano
Fonte: o autor

Encerramos a lista de conceitos básicos da Geometria Espacial, apresentando dois lugares geométricos importantes: a mediatriz e o plano mediador de um segmento de reta.

A mediatriz de um segmento \overline{AB} é LG dos pontos de um plano α que contém \overline{AB} que equidistam (estão à mesma distância) de A e de B . A mediatriz de \overline{AB} é uma reta perpendicular a \overline{AB} que passa pelo ponto médio de \overline{AB} [26]. Na figura a seguir, M é o ponto médio de \overline{AB} . Além disso, é fácil ver que A e B são simétricos em relação à reta m .

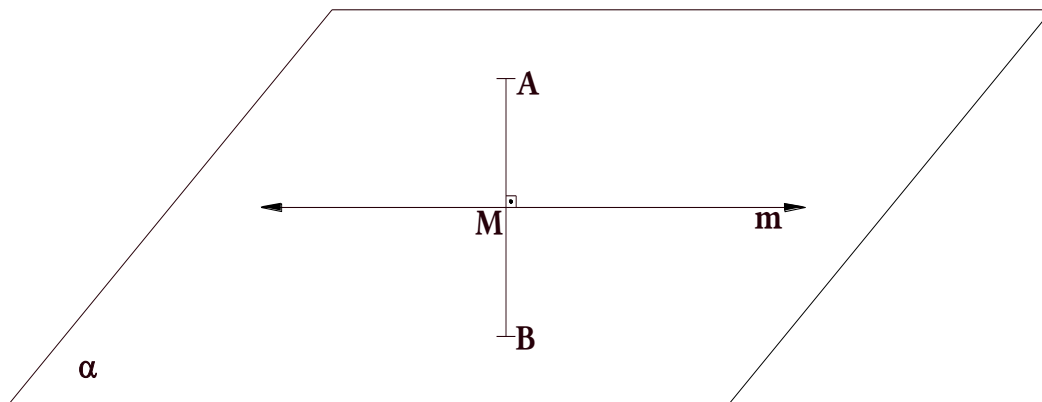


Figura 32: mediatriz de um segmento de reta
Fonte: o autor

Por outro lado, o plano mediador de um segmento de reta \overline{CD} é o LG dos pontos do espaço que equidistam de C e de D . O plano mediador de \overline{CD} é um plano β perpendicular a \overline{CD} que passa pelo ponto médio de \overline{CD} [15].

Na Figura 33 N é o ponto médio de \overline{CD} . Além disso, C e D são simétricos em relação ao plano β (a demonstração encontra-se na Seção 5.2.5).

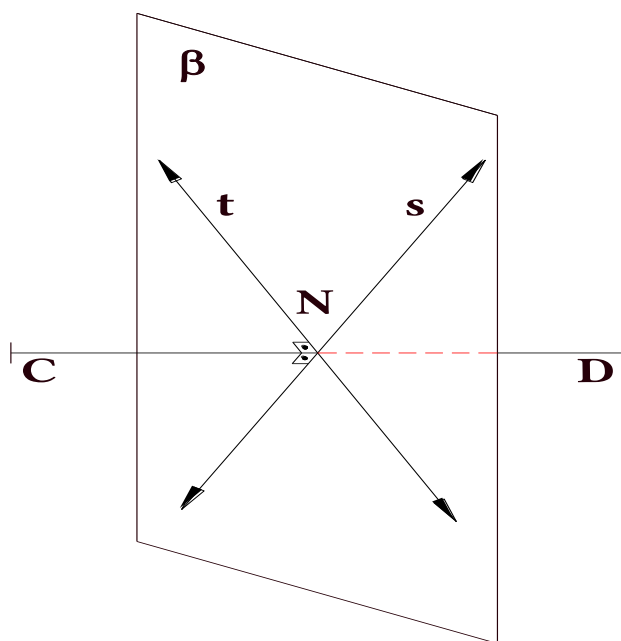


Figura 33: plano mediador de um segmento de reta
Fonte: o autor

5 POLIEDROS

Poliedros são objetos espaciais que aparecem em diversas formas da natureza e em construções artificiais, tanto materiais como abstratas, o que possibilita a aplicação do Modelo de Van Hiele (MVH) no estudo contextualizado dos seus elementos.

Partindo da observação de sólidos geométricos surge a questão fundamental se o sólido é, de fato, um poliedro. Na literatura encontram-se muitas formas de definir um poliedro, como por exemplo:

“Define-se um *poliedro* como um sólido cuja superfície consiste em um certo número de faces poligonais.” [11].

Apesar da simplicidade e da objetividade dessa definição, para Neto uma afirmação como essa “*pode dar uma ideia do que sejam, mas não serve absolutamente como definição*” [29]. No entanto, ela nos parece adequada para os dois primeiros níveis do MVH: Reconhecimento e Análise.

Recordando, as características do 1º Nível do MVH são: “Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global” [28]. Observando o bloco retangular, apresentado na Seção 3.1.3, e comparando-o com a definição apresentada inicialmente, verificamos que ele é um poliedro; pois ele é um sólido cuja superfície é formada por seis faces retangulares.

O 2º Nível do MVH tem como características: “Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas” [28].

No bloco retangular, além da observação inicial sobre as faces, notamos que:

- a. As faces opostas são retângulos congruentes paralelos;
- b. \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EH} e \overline{FG} são arestas paralelas, assim como \overline{AF} , \overline{DE} , \overline{BG} e \overline{CH} ;
- c. Os pares de arestas concorrentes são perpendiculares (Seção 3.2.1.1 Ângulos);
- d. As diagonais de faces opostas ou são paralelas ou são reversas;
- e. Uma aresta perpendicular a uma face possui duas arestas dessa face que lhe são ortogonais;
- f. Duas faces concorrentes formam um diedro reto.
- g. os vértices são arestas de ângulos triédros tri-retângulos congruentes [15];

- h. A distância entre faces opostas é a medida das arestas que lhe são perpendiculares;
- i. Além das arestas destacamos como segmentos notáveis as diagonais das faces e as diagonais do bloco retangular (uma diagonal de um poliedro é qualquer segmento de reta que une dois vértices excluindo-se as arestas e as diagonais das faces).

A região do espaço limitada pelas faces do poliedro é o interior do poliedro. A convexidade do poliedro é determinada pela convexidade dessa região. É fácil perceber que o bloco retangular é um poliedro convexo, pois qualquer segmento de reta que une dois pontos dessa região está inteiramente contido no interior do bloco retangular, em particular, as diagonais do bloco retangular (ver Figura 2, bloco retangular, na página 21).

Porém, com a definição apresentada inicialmente é possível imaginar sólidos que “*não deveriam ser objeto de discussão em um primeiro estudo dos poliedros*” [29], que vamos chamá-los de “pseudopoliedros”, pois representam regiões do espaço difíceis de serem analisados nesse nível inicial de estudo.

A Figura 34 representa um pentaedro, de acordo com a definição de poliedro apresentada inicialmente, cuja convexidade não é objeto de estudo da Educação Escolar:

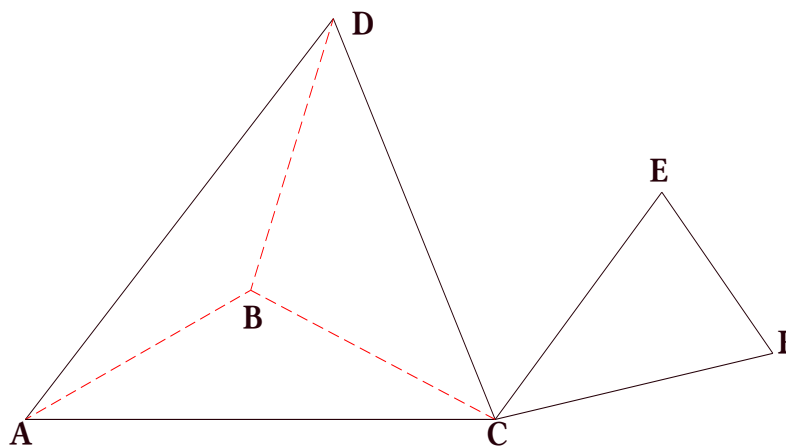


Figura 34: pseudopoliedro formado por cinco faces triangulares
Fonte: o autor

Dessa forma, para aprofundarmos o estudo dos poliedros, evitando “os mal-entendidos”, como o que representa a Figura 34, necessitamos de uma definição mais precisa do que seja um poliedro. Além disso, o 3º Nível do MVH, abstração, tem como características:

“Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra; argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.” [28].

Apresentamos então uma definição mais completa, de fácil entendimento, rigorosa, que evitará infortúnios e que será nossa referência para definir um poliedro:

“Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados *face* onde:

1. Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
2. A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma *aresta* do poliedro e cada vértice de uma face é um *vértice* do poliedro.
3. É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra sem passar por nenhum vértice (ou seja cruzando apenas arestas)” [29].

Vamos agora analisar a Figura 34 à luz dessa última definição. Para simplificar a notação dos elementos dos sólidos, vamos identificar as faces (polígonos) por $F_{A_1A_2\dots A_n}$, onde $A_1A_2\dots A_n$ são os vértices do polígono que formam a face do poliedro:

- Os lados \overline{CE} , \overline{CF} e \overline{EF} formam a face F_{CEF} e não são comuns a nenhuma outra face do poliedro, contrariando o número 1, portanto não é um poliedro; além disso:
- Partindo de qualquer ponto da face F_{CEF} não é possível chegar à outra face sem passar pelo vértice C , agora contrariando o número 3.

Por outro lado, se considerarmos apenas os pontos A , B , C e D , da Figura 34, verificamos que, de fato, o tetraedro formado por quatro triângulos é um poliedro no sentido que pretendemos estudar:

1. Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono:
 - a. \overline{AB} é comum às faces F_{ABC} e F_{ABD} ;
 - b. \overline{AC} é comum às faces F_{ABC} e F_{ACD} ;
 - c. \overline{AD} é comum às faces F_{ABD} e F_{ACD} ;
 - d. \overline{BC} é comum às faces F_{ABC} e F_{BCD} ;
 - e. \overline{BD} é comum às faces F_{ABD} e F_{BDC} ;
 - f. \overline{CD} é comum às faces F_{ACD} e F_{BCD} ;
2. A interseção de duas faces quaisquer é um lado comum:
 - a. $(F_{ABC}) \cap (F_{ABD}) = \overline{AB}$;
 - b. $(F_{ABC}) \cap (F_{ACD}) = \overline{AC}$;
 - c. $(F_{ABC}) \cap (F_{BCD}) = \overline{BC}$;
 - d. $(F_{ABD}) \cap (F_{ACD}) = \overline{AD}$;
 - e. $(F_{ACD}) \cap (F_{BCD}) = \overline{CD}$; e
 - f. $(F_{ABD}) \cap (F_{BDC}) = \overline{BD}$.
3. É sempre possível ir de um ponto de uma face, a um ponto de qualquer outra face sem passar por nenhum vértice (ou seja cruzando apenas arestas):

- Nos exemplos anteriores é possível passar pela aresta comum para ir de uma face para outra, sem passar pelo vértice.

Destacando os elementos dos poliedros, temos:

- Faces: polígonos;
- Arestas: segmentos de retas, lados dos polígonos das faces;
- Vértices: extremidades das arestas;
- Ângulos poliédricos: formados em cada vértice do poliedro, sendo constituídos pelos vértices, pelas arestas concorrentes nos respectivos vértices e pelas faces determinadas por essas arestas;
- Ângulos diedros: formados por duas faces adjacentes (que possuem uma aresta comum);
- Diagonais das faces: diagonais dos polígonos das faces;
- Diagonais do poliedro: qualquer segmento de reta que une dois vértices dos poliedros, excluídas as arestas e as diagonais das faces.

5.1 Principais classificações dos poliedros

Quanto à convexidade, um poliedro pode ser côncavo ou convexo. Uma propriedade importante dos poliedros convexos é que eles são eulerianos, isto é, eles satisfazem a relação de Euler [15]:

$$V - A + F = 2, \quad (32)$$

onde:

- V é o número de vértices;
- A é o número de arestas; e
- F é o número de faces.

Todo poliedro convexo é euleriano, porém, nem todo poliedro euleriano é convexo.

Na Figura 35 temos: $V = 12$; $A = 18$ e $F = 8$, logo:

$$V - A + F = 12 - 18 + 8 = 2.$$

Portanto, o poliedro da Figura 35 é euleriano. Por outro lado, é fácil ver que a diagonal \overline{DJ} une dois pontos desse poliedro e não está inteiramente contida nele logo, é côncavo.

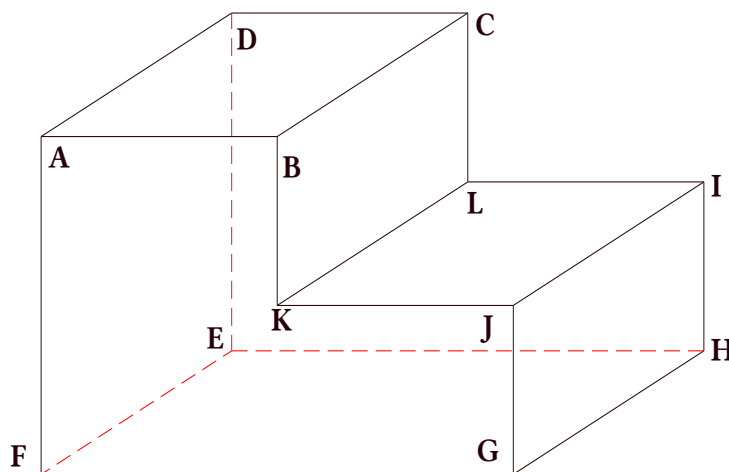


Figura 35: poliedro euleriano côncavo
Fonte: o autor

Antes de abordarmos os poliedros regulares (Secção 5.1.3) vamos destacar os prismas e as pirâmides. Nas duas seções, a seguir, serão sucintamente apresentadas as principais características destes sólidos.

5.1.1 Prismas

A maioria dos autores de livros didáticos para o Ensino Médio como em [15] defini um prisma a partir de uma construção. No entanto, Antônio dos Santos Machado defini um prisma a partir da observação, o que nos parece mais adequada para o MVH :

“Denominamos *prisma* a todo poliedro convexo que:

- 1º) há duas faces (chamadas *bases*) que são polígonos congruentes contidos em planos paralelos distintos; e
- 2º) as demais faces (chamadas *faces laterais*) são paralelogramos determinados por pares de lados correspondentes nas duas bases” [24]

Como exemplo, temos o bloco retangular (Figura 2). A denominação do prisma é dada pelo polígono da base. Como no bloco retangular a base é um quadrilátero, ele é um prisma quadrangular. As arestas dos prismas recebem nomes especiais:

- As arestas dos polígonos que formam as bases são chamadas: arestas da base.
- As arestas que ligam uma base à outra são chamadas: arestas laterais.
- A altura do prisma é a distância entre as bases.

Os prismas são classificados em retos e oblíquos. Nos prismas retos as arestas laterais são perpendiculares à base, enquanto que nos prismas oblíquos as arestas são oblíquas à base. Nos prismas retos as faces laterais são retângulos [24].

Os prismas retos cujas bases são polígonos regulares são chamados de prismas regulares. Na Secção 5.1.3 vamos apresentar formalmente os poliedros regulares, no entanto, adiantamos que o

único prisma que é poliedro regular é o hexaedro regular, que também é um prisma quadrangular regular.

5.1.2 Pirâmides

Definição:

“Denominamos *pirâmide* a todo poliedro convexo em que há uma face (chamada *base*) num dado plano e apenas um vértice (chamado *vértice* da pirâmide) fora desse plano.

As demais faces da pirâmide são os triângulos determinados, cada um deles, por um lado da base e o vértice da pirâmide. Elas são chamadas *faces laterais*” [24].

Como exemplo temos o tetraedro da Figura 34 formado apenas pelos vértices $ABCD$.

A denominação da pirâmide é definida pelo polígono da base. O tetraedro $ABCD$ é uma pirâmide triangular. As arestas das pirâmides também recebem nomes especiais:

- As arestas do polígono da base são chamadas: arestas da base.
- As arestas que ligam a base ao vértice são chamadas: arestas laterais.

A altura da pirâmide é a distância entre o vértice da pirâmide e a base.

Uma pirâmide é regular quando:

- A base é um polígono regular; e
- A projeção ortogonal do vértice da pirâmide sobre a base coincide com o centro do polígono regular.

Nas pirâmides regulares as faces laterais são triângulos isósceles congruentes cujas bases, desses triângulos, são os lados do polígono regular. Desta forma, as arestas das bases de uma pirâmide regular são congruentes entre si e as arestas laterais também são congruentes entre si. Destaca-se, ainda, o apótema da pirâmide regular que é a altura do triângulo isósceles que forma uma face lateral.

A única pirâmide que é poliedro regular é o tetraedro regular que também é uma pirâmide triangular regular.

Destacamos também os troncos de pirâmide. Um tronco de pirâmide é um poliedro formado quando uma pirâmide é seccionada por um plano paralelo à sua base.

A intersecção de uma pirâmide com um plano paralelo à sua base é um polígono semelhante à sua base [15]. Esse polígono é chamado de base menor do tronco de pirâmide de bases paralelas, enquanto que a base original da pirâmide é a base maior do tronco. As arestas que ligam as bases do tronco são chamadas arestas laterais do tronco.

A secção da pirâmide por um plano paralelo à sua base gera também uma pirâmide menor cuja base é a base menor do tronco de pirâmide. Na Figura 36:

- O poliedro formado pelos vértices $VABCD$ é uma pirâmide quadrangular.
- O quadrilátero $EFGH$ é paralelo à base da pirâmide.
- O poliedro formado pelos vértices $ABCDEFHG$ é um tronco de pirâmide quadrangular.
- O poliedro formado pelos vértices $VEFGH$ é uma pirâmide semelhante à formada pelos vértices $VABCD$.

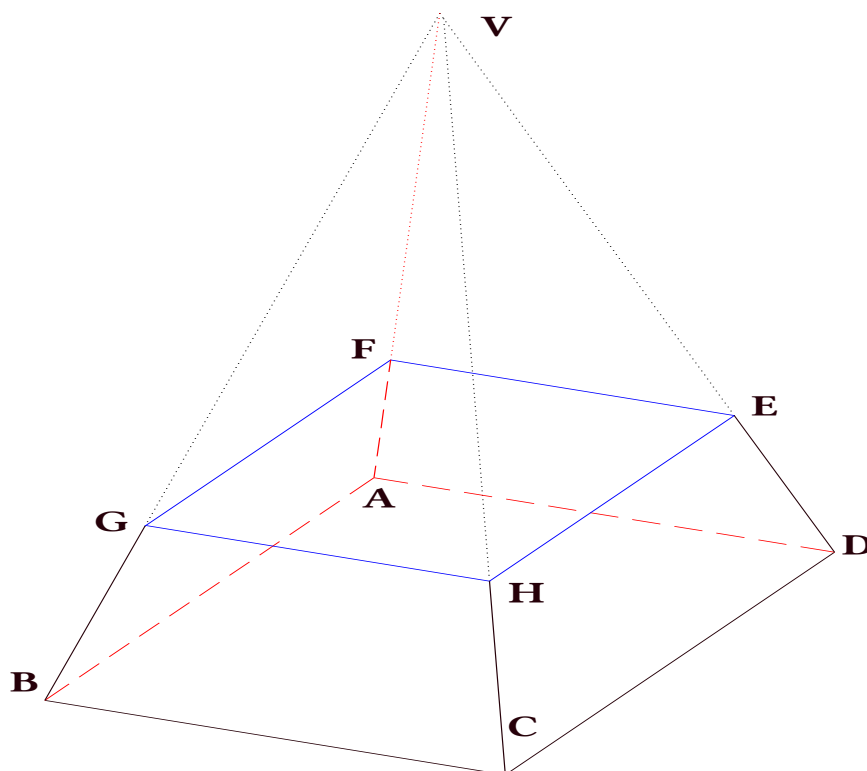


Figura 36: tronco de pirâmide quadrangular
Fonte: o autor

5.1.3 Poliedros regulares e poliedros de Platão

Alguns autores de livros didáticos distinguem poliedros regulares e poliedros de Platão. No livro 4 – Áreas e Volumes – da coleção Matemática: temas e metas [24] e no livro 10 – Geometria Espacial: posicional e métrica – da coleção Fundamentos de Matemática Elementar [15], assim como em diversos livros didáticos do Ensino Médio encontramos semelhantes definições:

“Um poliedro é chamado de poliedro de Platão, se e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

- todas as faces tem o mesmo número (n) de arestas,
- todos os ângulos poliédricos tem o mesmo número (m) de arestas
- vale a relação de Euler ($V - A + F = 2$)” [15].

Dessa forma, para que um poliedro seja “de Platão” não se é exigido que as faces sejam polígonos regulares. Como consequência temos um número infinito de possibilidades de poliedros de Platão, o que gera certa discordância.

Esses poliedros são divididos em “*classes*” [15] ou “*espécies*” [24] de poliedros de Platão. Nas respectivas referências encontra-se a demonstração que são exatamente cinco classes (ou espécies) de poliedros de Platão.

O Quadro 5 resumi os nomes das classes de poliedros de Platão, onde: m é o número de arestas em cada ângulo poliédrico, n é o número de lados de cada polígono face, A é o número total de arestas, V é o número de vértices e F é o número total de faces.

m	n	A	V	F	Nome
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Hexaedro
4	3	12	6	8	Octaedro
3	5	30	20	12	Dodecaedro
5	3	30	12	20	Icosaedro

Quadro 5: classes de poliedros de Platão

Fonte: [15]

De acordo com a definição acima, qualquer pirâmide triangular (tetraedro) e qualquer prisma retangular (hexaedro) são classificados como poliedro de Platão.

Assim, a definição de poliedro regular passa a ser:

“Denominamos poliedro regular ao poliedro de Platão cujas faces são polígonos regulares congruentes” [24].

Dessa última definição e da segunda coluna do Quadro 5 (da esquerda para a direita) temos que os únicos polígonos que formam as faces dos poliedros regulares são o triângulo equilátero, o quadrado e o pentágono regular. Além disso, são apenas cinco os poliedros regulares.

No entanto, Platão descreve a superfície de “seus sólidos” como sendo polígonos regulares:

“E quando quatro triângulos equiláteros são combinados, um só ângulo contínuo é formado na junção de três ângulos planos, esse ângulo contínuo se colocando, na ordem, junto do mais obtuso dos ângulos planos. E quando são produzidos quatro ângulos como esse, é construída a primeira figura sólida, a qual divide em parte iguais e semelhantes o todo da esfera circunscrita. O segundo sólido é formado com base nos mesmos triângulos (...)” [3].

Parece-nos que o termo “classes, ou gêneros, de poliedros de Platão” deveria ser revisto por estar em desacordo com o texto de Platão que tratava, de fato, de poliedros regulares.

Passamos, agora, ao estudo principal de nosso trabalho. A prova da congruência dos ângulos diédricos e poliédricos dos poliedros regulares e o cálculo dos ângulos diédricos, que motivou a descoberta e o estudo, por nossa parte, de diversos elementos geométricos notáveis nos poliedros regulares.

5.2 Seções Planas, Segmentos Notáveis e Ângulos nos Poliedros Regulares

Na definição de poliedros regulares não se é exigido que os ângulos poliédricos (formados pelos vértices e arestas concorrentes) e os ângulos diédricos (formados por faces adjacentes) sejam congruentes. No entanto, a congruência destes objetos é uma das mais fascinantes características desses sólidos e isso nos motivou a estudá-las.

Quando um plano e um poliedro se interceptam dizemos que a interseção é o traço do poliedro no plano. Esse traço é uma figura plana que pode ser um ponto, segmentos de reta, ângulo ou polígono. Acreditamos que o estudo dessas figuras pode desenvolver uma visão geométrica qualificada do espaço.

A secção reta de um diedro é um ângulo cuja medida é a medida do diedro, isto é, a medida do ângulo entre dois planos. A prova de que os ângulos diedros de um poliedro regular são todos congruentes pode ser obtida empregando o caso LLL de congruência de triângulos. Por outro lado, para determinarmos a medida desse ângulo vamos aplicar a lei dos cossenos junto com a função inversa do cosseno de um ângulo, o arco cosseno de um número [17].

A congruência dos ângulos poliédricos é mais complexa, pois é exigido que um ângulo “encaixe” no outro perfeitamente [24]. Nossa ideia será mostrar que cada vértice é vértice de uma pirâmide e todas essas pirâmides são congruentes, logo, os ângulos poliédricos também serão.

Para cada poliedro regular existem três esferas notáveis associadas. Nesse trabalho vamos apresentar as esferas relacionadas ao icosaedro regular deixando para o leitor a pesquisa dos detalhes das outras esferas, assim como o estudo de outros objetos que julgar importante.

As secções a seguir são desenvolvidas a partir da ótica dos Níveis de Van Hiele:

- Observação nos poliedros de seus objetos definidores (1º Nível);
- Identificação das características dos demais objetos (2º Nível);
- Descoberta de novos objetos e relações notáveis (3º Nível); e
- Dedução formal das propriedades observadas (4º Nível);

O 5º Nível desenvolve-se ora por meio da dedução de novos teoremas, ora por meio das provas formais propostas. Começamos com o tetraedro regular.

5.2.1 Tetraedro Regular

O tetraedro regular é um poliedro cujas faces são quatro triângulos equiláteros congruentes.

Ele é o único poliedro regular que é uma pirâmide. Além disso, seus vértices são ângulos triédricos.

Como vimos, para medir um diedro é necessário tomar duas semirretas perpendiculares e com mesma origem, na aresta do diedro, formando a secção reta. Vamos eleger, então, duas alturas relativas à aresta comum de duas faces adjacentes. Ora, temos que cada face do tetraedro regular é um triângulo equilátero e, como no triângulo equilátero as três cevianas notáveis coincidem [26], o “pé de cada altura” de duas faces adjacentes coincide com o ponto médio da aresta. Dessa forma formamos a secção reta para medirmos o ângulo diédrico.

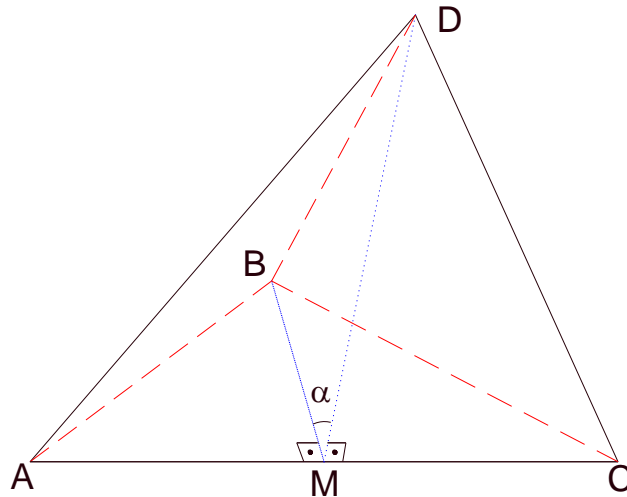


Figura 37: tetraedro regular
Fonte: o autor

Na Figura 37:

- $ABCD$ é um tetraedro regular de aresta l ;
- \overline{AC} é uma aresta comum às faces F_{ABC} e F_{ADC} ;
- \overline{MB} é a altura relativa à aresta \overline{AC} da face F_{ABC} ;
- \overline{MD} é a altura relativa à aresta \overline{AC} da face F_{ADC} ; e
- O ângulo \widehat{BMD} tem a medida α do ângulo diédrico formado pelas faces F_{ABC} e F_{ADC} do tetraedro regular $ABCD$.

Notamos que a secção reta contém o triângulo BMD . Como as faces são todas congruentes, as alturas relativas às faces e as arestas também são, logo, os seis triângulos isósceles formados por duas dessas alturas e pela aresta oposta são todos congruentes por LLL. Portanto os seis diedros, formados por duas faces adjacentes de um tetraedro regular, são congruentes ■

Agora, para calcular a medida do ângulo \hat{BMD} vamos usar a lei dos cossenos no triângulo isósceles BMD . Utilizando o teorema de Pitágoras é fácil ver que a medida da altura relativa à

base de um triângulo isósceles é $h = l \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{87}{100}l$, pela lei dos cossenos temos que:

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= \overline{MB}^2 + \overline{MD}^2 - 2\overline{MB} \cdot \overline{MD} \cdot \cos \alpha && \Leftrightarrow \\ l^2 &= \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)\cos \alpha && \Leftrightarrow \\ l^2 &= 2\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cos \alpha && \Leftrightarrow \\ l^2 &= 2\left(\frac{3l^2}{4}\right) - 2\left(\frac{3l^2}{4}\right)\cos \alpha && \Leftrightarrow \\ l^2 &= \left(\frac{3l^2}{2}\right) - \left(\frac{3l^2}{2}\right)\cos \alpha && \Leftrightarrow \\ l^2 &= \frac{3}{2}l^2(1 - \cos \alpha) && \Leftrightarrow \\ \frac{2}{3} &= (1 - \cos \alpha) && \Leftrightarrow \\ \cos \alpha &= 1 - \frac{2}{3} && \Leftrightarrow \\ \cos \alpha &= \frac{1}{3} \Rightarrow && \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,528779365509308630754000660038^\circ. && (33) \end{aligned}$$

Assim, a medida do ângulo diédrico formado por duas faces adjacentes de um tetraedro regular é aproximadamente $70,5^\circ$ ■

Assim, provamos a congruência e calculamos o valor numérico dos diedros formados por duas faces consecutivas do tetraedro regular. Vamos agora provar a congruência dos ângulos triédricos (triedros). De forma geral:

“Um triedro é congruente a outro, se e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre suas arestas e as do outro, de modo que:
seus diedros são ordenadamente congruentes aos diedros do outro e
suas faces são ordenadamente congruentes as do outro” [15].

Duas faces de ângulos poliédricos são congruentes quando os ângulos entre as respectivas arestas são congruentes. Além disso, há duas formas de congruência de triedros que satisfazem às condições anteriores: a congruência direta e a indireta. Vamos chamar as condições anteriores de condições regulares de congruência de triedros, CRCT.

A congruência direta entre triedros ocorre quando, além de satisfazer às CRCT, os triedros são superponíveis, isto é, podem ser superpostos por movimento de translação e rotação. Por outro lado, a congruência inversa entre triedros ocorre quando às condições anteriores são satisfeitas, mas os triedros não são superponíveis.

Assim, a superposição é considerada uma condição “mais forte” do que as CRCT, pois a superposição implica nas CRCT, mas as CRCT não implicam na superposição.

Da mesma forma que a congruência entre triângulos pode ser estabelecida por condições mínimas, os casos de congruência de triângulos, também ocorrem os casos de congruência entre triedros [15]. No entanto, vamos estabelecer a congruência dos quatro triedros do tetraedro regular sem recorrer aos casos de congruência. Vamos mostrar a congruência das “quatro pirâmides triangulares regulares” que implicam nas respectivas superposições.

Cada vértice do tetraedro regular é vértice de uma pirâmide triangular regular cuja base é congruente às faces laterais e cuja altura é igual a $a = l \frac{\sqrt{6}}{3} \approx \frac{82}{100}l$, verifique! Portanto são quatro pirâmides triangulares regulares congruentes. Logo, os ângulos triédricos são congruentes ■

5.2.2 Hexaedro Regular, o Cubo

O cubo é formado por seis quadrados, ele é o único prisma que é poliedro regular. Ele também é um bloco retangular com todas as arestas congruentes. Seus ângulos poliédricos são triedros tri-retângulos, isto é, formados por três faces retas (as arestas formam ângulos retos duas a duas).

Vamos inicialmente provar a congruência dos ângulos triédricos. Um dos casos de congruência de triedros é:

“Se dois triedros têm, ordenadamente congruentes, as três faces, então eles são congruentes” [15].

Esse é o caso FFF de congruência de triedros. Logo, os ângulos poliédricos do cubo são congruentes ■

A diagonal de um poliedro é um segmento de reta que une dois vértices não consecutivos e em faces distintas. É fácil ver que de cada vértice do hexaedro regular parte apenas uma diagonal, logo possui apenas quatro diagonais. Vamos mostrar que elas são congruentes e depois calcular o seu comprimento em função da aresta, l , do cubo.

Sem perda de generalidade, consideramos os triângulos retângulos DAG e HGA (Figura 38).

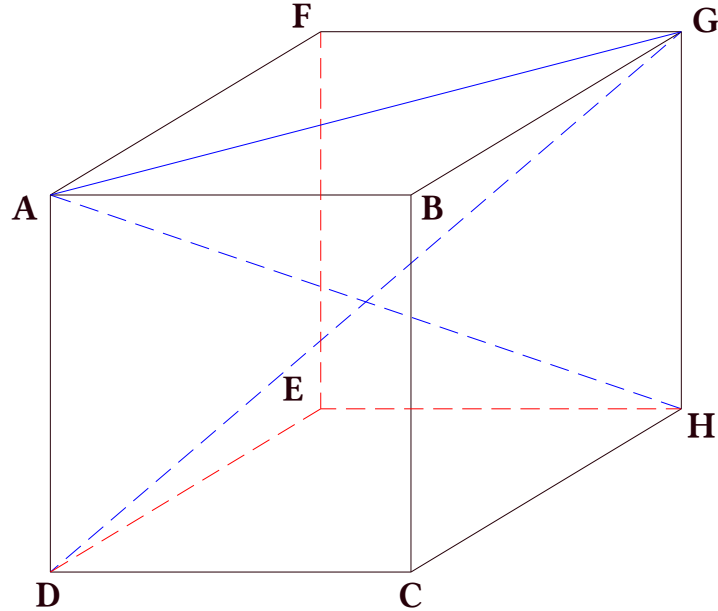


Figura 38: cubo
Fonte: o autor

Como $\overline{DA} \perp \overline{AB}$ e $\overline{DA} \perp \overline{AF}$, \overline{DA} é perpendicular à face $ABGF$, logo $\widehat{DAG} = 90^\circ$, donde temos:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \overline{DA} \cong \overline{HG} = l \\ \bullet \widehat{DAG} \cong \widehat{HGA} = 90^\circ \\ \bullet \overline{AG} \text{ é lado comum} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Por LAL os triângulos } DAG \text{ e } HGA \text{ são congruentes, logo:} \\ \overline{AH} \cong \overline{DG}$$

Analogamente as outras diagonais também são congruentes. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos DCH e ADH , sabendo que as medidas são positivas, vem que:

$$\overline{DH}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CH}^2 \Leftrightarrow \overline{DH}^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow \overline{DH}^2 = 2l^2 \Rightarrow \overline{DH} = l\sqrt{2} \approx \frac{141}{100}l \quad \blacksquare \quad (34)$$

$$\overline{AH}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DH}^2 \Leftrightarrow \overline{AH}^2 = l^2 + (l\sqrt{2})^2 = 3l^2 \Rightarrow \overline{AH} = l\sqrt{3} \approx \frac{173}{100}l \quad \blacksquare \quad (35)$$

Apesar de parecer óbvio que o diedro formado por duas faces adjacentes de um cubo é reto, vamos apresentar uma justificativa tomando sem perda de generalidade as faces F_{ABGF} e F_{CBGH} .

Como $ABGF$ é um quadrado, $\overline{AB} \perp \overline{BG}$. Analogamente, $\overline{CB} \perp \overline{BG}$. Assim, a secção reta, formada pelas faces seleccionadas, contém o ângulo \hat{ABC} que é reto. Logo o diedro formado por duas faces adjacentes de um cubo é reto ■

5.2.3 Octaedro Regular

O octaedro regular é formado por oito triângulos equiláteros congruentes. Nos vértices formam-se ângulos tetraédricos. Sem perda de generalidade e para facilitar a identificação dos objetos, vamos considerar o octaedro regular $EABCFD$ da Figura 39 cuja medida da aresta é l .

Vamos, inicialmente, provar que $EBFD$ é um quadrado e assim mostrar que $\overline{EF} = l\sqrt{2}$. Basta mostrar que os vértices são coplanares e que as diagonais são congruentes, pois os lados são quatro arestas do octaedro regular.

Vamos mostrar que $EBFD$ está contido no plano mediador do segmento \overline{AC} .

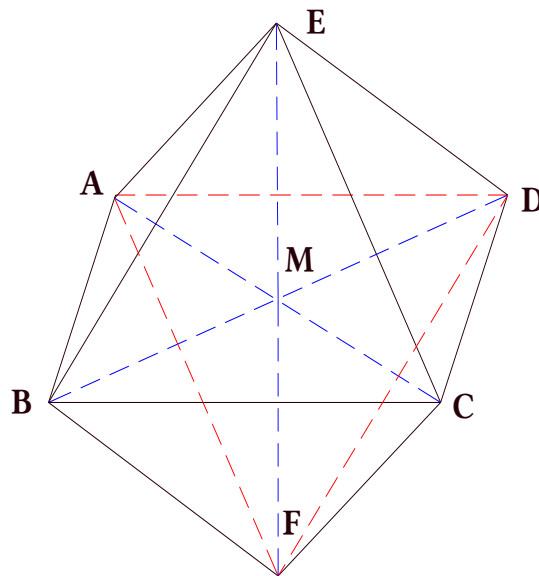


Figura 39: diagonais do octaedro regular
Fonte: o autor

O plano mediador é o L.G. dos pontos do espaço que equidistam de \overline{AC} . Como as arestas são congruentes, temos que:

$$\overline{EC} \cong \overline{EA} \cong \overline{BC} \cong \overline{BA} \cong \overline{FC} \cong \overline{FA} \cong \overline{DC} \cong \overline{DA} = l,$$

logo, os vértices E , B , F e D são equidistantes de A e de C e, portanto, pertencem ao plano mediador do segmento \overline{AC} , assim:

- $EBFD$ é um quadrilátero plano, um losango de lado l ; e
- \overline{AC} é perpendicular a $EBFD$.

Analogamente:

- $ABCD$ é um losango; e
- \overline{EF} é perpendicular a $ABCD$.

Nos triângulos ABC e AEC , temos:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \overline{AB} \cong \overline{AE} = l \\ \bullet \overline{CB} \cong \overline{CE} = l \\ \bullet \overline{AC} \text{ lado comum} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Por LLL os triângulos } ABC \text{ e } AEC \text{ são congruentes. } \blacksquare$$

Analogamente, os triângulos ADC e AFC também são congruentes. Logo, os losangos $ABCD$ e $EBFD$ são congruentes. Assim, são congruentes as diagonais \overline{EF} e \overline{BD} . ■

Falta mostrar que $\overline{EF} \cong \overline{AC}$.

Como $\overline{EF} \perp ABCD$ e as diagonais de um paralelogramo se intersectam no ponto médio [26] vem que:

- $\overline{EM} \perp \overline{AC}$;
- $\overline{EM} \perp \overline{BD}$; e
- M é ponto médio de \overline{EF} , \overline{AC} e de \overline{BD} .

Os triângulos EMA e EMB são retângulos, vamos mostrar que eles são congruentes utilizando um dos casos especiais de congruência de triângulos retângulos: “Dois triângulos retângulos que possuem respectivamente congruentes a hipotenusa e um cateto, são congruentes” [26], vamos chamá-lo de HCR, de fato:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \widehat{AME} \cong \widehat{BME} = 90^\circ \\ \bullet \overline{AE} \cong \overline{BE} = l, \text{ são hipotenusas} \\ \bullet \overline{EM} \text{ é um cateto comum} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Pelo caso especial os triângulos } EMA \text{ e } EMB \text{ são} \\ \text{congruentes, logo: } \overline{AM} \cong \overline{BM} \Leftrightarrow \overline{AC} \cong \overline{BD} \cong \overline{EF}. \quad (36)$$

Portanto, o quadrilátero $EBFD$ é um quadrado. Além disso, mostramos que:

- As diagonais do octaedro regular são congruentes;
- A seção formada no octaedro regular pelo plano mediador de uma diagonal é um quadrado formado pelos demais vértices; e
- Esta última conclusão nos revela que o octaedro regular “é composto” por duas pirâmides quadrangulares regulares, “unidas pela base”, cuja aresta da base é congruente à aresta lateral.

Assim, em cada um dos seis vértices forma-se um ângulo tetraédrico que é vértice de uma pirâmide quadrangular regular, cuja altura é a metade da diagonal do octaedro. Pelo teorema de Pitágoras, sabendo que as medidas são positivas, vem que:

$$d^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow d^2 = 2l^2 \Rightarrow d = l\sqrt{2} \approx \frac{142}{100}l. \quad (37)$$

Assim nessas pirâmides a altura vale $(l\sqrt{2})/2$. Ora, essas pirâmides têm todos os elementos correspondentes (arestas, altura e apótemas) congruentes entre si, logo, elas são congruentes. Portanto, os ângulos poliédricos (tetraédricos) do octaedro regular são todos congruentes ■

5.2.3.1 Calculando o ângulo diédrico do octaedro regular

Para calcular o ângulo diédrico podemos tomar duas alturas de duas faces adjacentes que têm uma aresta comum. Como as faces são triângulos equiláteros cada altura mede $(l\sqrt{3})/2$.

Na Figura 40 tomamos a secção reta do diedro formado pelas faces F_{ECD} e F_{FCD} , que contém o triângulo isósceles ENF de base $\overline{EF} = l\sqrt{2}$, onde l é a medida da aresta do octaedro regular, e os lados congruentes são as alturas \overline{EN} e \overline{FN} das respectivas faces.

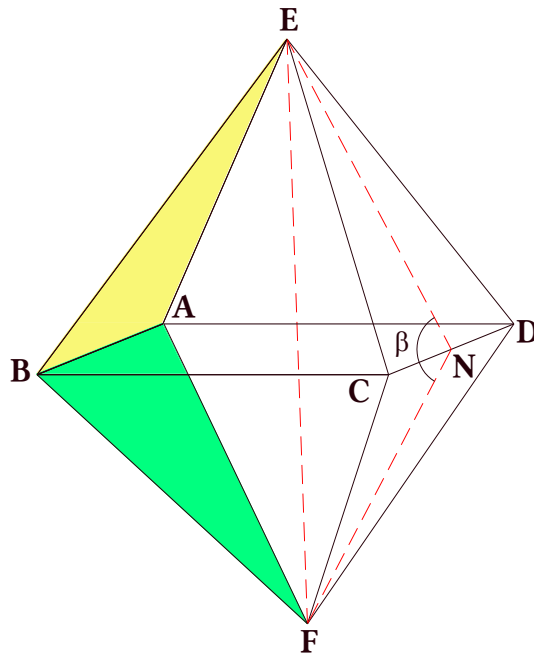


Figura 40: diedro do octaedro regular
Fonte: o autor

Aplicando a lei dos cossenos nesse triângulo isósceles e sabendo que β é obtuso, vem que:

$$\begin{aligned} \overline{EF}^2 &= \overline{NE}^2 + \overline{NF}^2 - 2\overline{NE} \cdot \overline{NF} \cdot \cos \beta && \Leftrightarrow \\ (l\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)\cos \beta && \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$2l^2 = 2\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cos \beta \quad \Leftrightarrow$$

$$2l^2 = 2\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cos \beta \quad \Leftrightarrow$$

$$l^2 = \left(\frac{3l^2}{4}\right) - \left(\frac{3l^2}{4}\right) \cos \beta \quad \Leftrightarrow$$

$$l^2 = \frac{3}{4}l^2(1 - \cos \beta) \quad \Leftrightarrow$$

$$1 = \frac{3}{4}(1 - \cos \beta) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{3} = (1 - \cos \beta) \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos \beta = 1 - \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos \beta = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\beta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109,47122063449069136924599933996^\circ. \quad (38)$$

Assim, a medida do ângulo diédrico formado por duas faces adjacentes de um octaedro regular é aproximadamente $109,5^\circ$ ■

Notamos que o cosseno do ângulo diedro formado pelas faces do tetraedro regular (página 76) é o oposto do formado pelas faces do octaedro regular, de [17], esses ângulos são, de fato, suplementares.

5.2.4 Dodecaedro Regular

O dodecaedro regular é formado por doze pentágonos regulares congruentes. Nos vértices destacam-se ângulos triédricos cujas medidas das faces (medidas dos ângulos entre as arestas comuns a um vértice) são congruentes e iguais ao ângulo interno de um pentágono regular 108° . Portanto, as faces dos triedros, dos vértices do dodecaedro regular, são congruentes e com medida 108° cada (Figura 41).

Se dois triedros possuem três faces respectivamente congruentes, então, esses triedros são congruentes, esse é o caso FFF de congruência de triedros [15].

Assim, todos os triedros do dodecaedro regular são congruentes por FFF, pois todas as faces desses triedros são congruentes. ■ (38)

Como consequência temos que os diedros formados por duas faces adjacentes do decaedro regular são congruentes. Na próxima seção vamos calcular a medida desse diedro.

Observando o dodecaedro regular notamos que na sua superfície destaca-se um sólido que aparenta ser um tronco de pirâmide pentagonal regular.

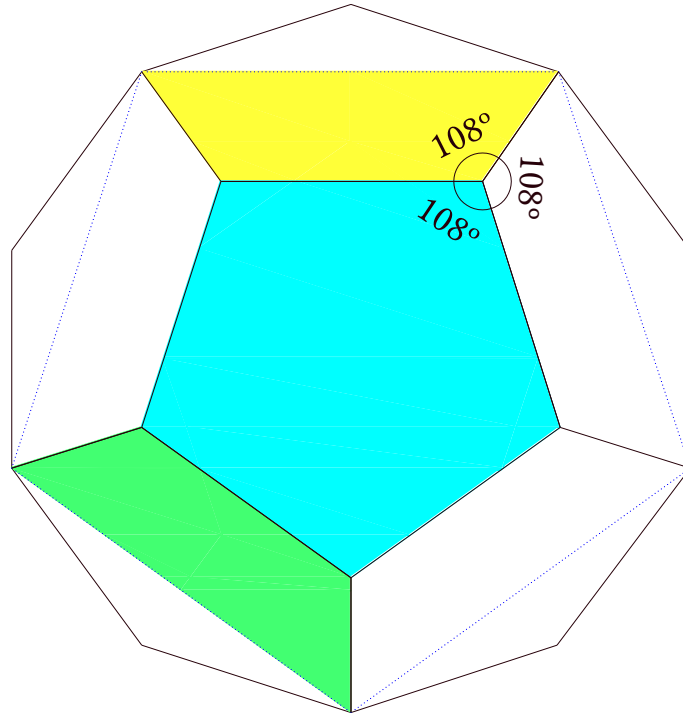


Figura 41: dodecaedro regular
Fonte: o autor

De (17) as faces laterais desse tronco são trapézios isósceles congruentes cuja base menor é a aresta do dodecaedro regular, de medida l , e cuja base maior tem a medida d da diagonal do pentágono regular.

A altura desse trapézio, que vamos chamar de a , pode ser calculada com auxílio da trigonometria. Tomando um vértice da base menor e sua projeção ortogonal sobre a base maior, formamos um triângulo retângulo cujo ângulo agudo de 72° é oposto a a .

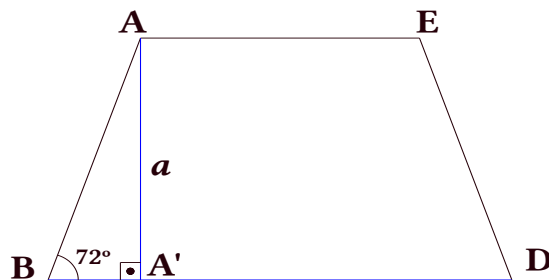


Figura 42: trapézio isósceles no pentágono regular
Fonte: o autor

Agora, aplicando a razão trigonométrica $\text{sen } 72^\circ$, vem que:

$$\text{sen}72^\circ = \frac{a}{l} \Leftrightarrow a = l \cdot \text{sen}72^\circ \Leftrightarrow a \approx \frac{95}{100}l \quad (39)$$

Para que esse sólido seja um tronco de pirâmide pentagonal regular de bases paralelas, os vértices da base maior devem formar um pentágono regular paralelo à base menor e a projeção ortogonal do centro de uma base deve coincidir com o centro da outra. Vamos começar mostrando que esse pentágono é plano.

Sem perda de generalidade e para facilitar a identificação dos objetos geométricos, vamos tomar como referência a Figura 43.

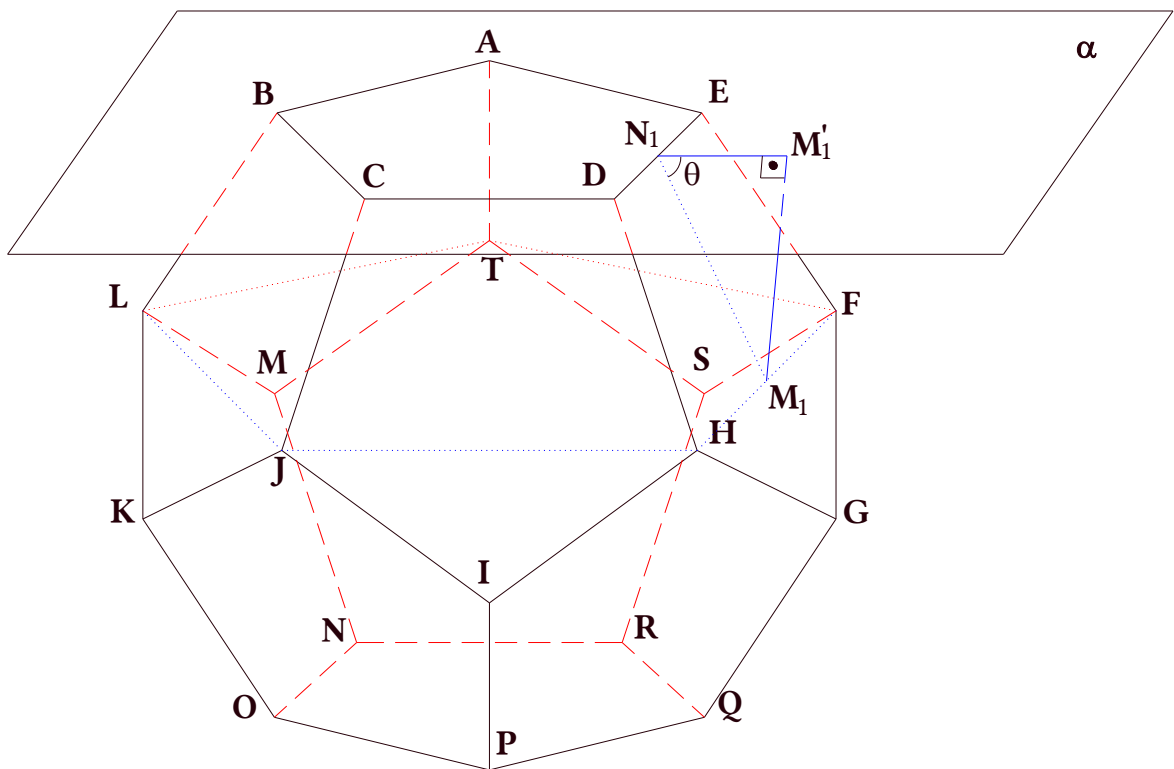


Figura 43: pentágonos paralelos no dodecaedro regular
Fonte: o autor

Como as faces laterais do tronco são trapézios isósceles, os respectivos pares de arestas são paralelos:

$$\overline{AB} \text{ e } \overline{TL}, \overline{BC} \text{ e } \overline{LJ}, \overline{CD} \text{ e } \overline{JH}, \overline{DE} \text{ e } \overline{HF}, \text{ e } \overline{EA} \text{ e } \overline{FT} \quad (40)$$

Vamos chamar de α o plano suporte da face F_{ABCDE} . Uma reta $r \not\subset \pi$ é paralela ao plano π se existe uma reta r' de π que é paralela a r [15].

De (40), temos que para cada aresta da base maior existe uma respectiva aresta na base menor que lhe é paralela, logo:

– Cada aresta da base maior é paralela a α . (41)

Vamos mostrar que elas também estão no mesmo plano. De (41), para determinar as distâncias entre as arestas da base maior e α , basta tomar um ponto qualquer dessas arestas e calcular a distância desse ponto à sua projeção ortogonal sobre α (Figura 43). Sejam:

- M_1 , o ponto médio do segmento \overline{HF} (aresta da base maior, de medida d);
- M'_1 , a projeção ortogonal de M_1 sobre α ;
- N_1 , o ponto médio do segmento \overline{DE} (aresta da base menor, de medida l); e
- $\theta = \widehat{M_1 N_1 M'_1}$.

Por construção, $M_1 \widehat{M'_1} N_1 = 90^\circ$. Vamos calcular $\overline{M_1 M'_1}$, em relação a l , utilizando o $\text{sen } \theta$. Notamos que θ é o suplemento do **ângulo diedro**, que vamos chamar de σ , formado por duas faces adjacentes do dodecaedro regular. Além disso, σ é obtuso e θ é agudo. Na próxima seção vamos mostrar que:

$$\cos \sigma = -\frac{\sqrt{5}}{5}. \quad (66)$$

Da redução ao 1º quadrante temos que $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Agora, aplicando a relação fundamental da trigonometria e sabendo que θ pertence ao primeiro quadrante [17], vem que:

$$(\text{sen } \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 \Leftrightarrow (\text{sen } \theta)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (\text{sen } \theta)^2 = 1 - \frac{1}{5} \Rightarrow \text{sen } \theta = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \blacksquare$$

Aplicando o $\text{sen } \theta$ no triângulo $M_1 M'_1 N_1$, vem que:

$$\text{sen } \theta = \frac{\overline{M_1 M'_1}}{M_1 N_1} \blacksquare \quad (42)$$

Agora, substituindo em (42) os valores de $\text{sen } \theta$ e de a , em (39), vem que:

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\overline{M_1 M'_1}}{a} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\overline{M_1 M'_1}}{l \cdot \text{sen } 72^\circ} \Leftrightarrow \overline{M_1 M'_1} = \frac{2\sqrt{5}}{5} l \cdot \text{sen } 72^\circ \approx \frac{85}{100} l \blacksquare \quad (43)$$

Assim, a distância entre \overline{HF} e α é $l \cdot \text{sen } 72^\circ (2\sqrt{5})/5$. De (38), σ é um ângulo constante para todos os diedros (formados entre faces adjacentes), logo, θ também é constante. Portanto, encontramos, analogamente, esse mesmo comprimento para as respectivas distâncias entre as demais arestas da base maior do tronco e α , logo:

$$d(\overline{FT}, \alpha) = d(\overline{TL}, \alpha) = d(\overline{LI}, \alpha) = d(\overline{IH}, \alpha) = d(\overline{HF}, \alpha) = l \cdot \text{sen } 72^\circ (2\sqrt{5})/5 \blacksquare \quad (44)$$

Vamos mostrar que essas arestas são coplanares. Dois planos são paralelos se duas retas concorrentes de um forem ambas paralelas ao outro [15].

Seja π , o plano que contém os vértices, não colineares, H , J e T . As retas \overleftrightarrow{TH} e \overleftrightarrow{TJ} são concorrentes em T . Vamos mostrar que essas retas são paralelas a α . Vamos mostrar que $\overleftrightarrow{TH} // \alpha$ usando que na Geometria Euclidiana paralelismo implica em equidistância e vice-versa [1].

Dessa forma, basta exibir dois pontos distintos de α equidistantes de \overleftrightarrow{TH} , pois por esses dois pontos passam uma única reta que sendo equidistante de \overleftrightarrow{TH} é paralela a \overleftrightarrow{TH} .

Sejam T' e H' as respectivas projeções ortogonais de T e H sobre α . De (44), temos que:

$$\overleftrightarrow{TT'} \cong \overleftrightarrow{HH'} \quad \blacksquare \quad (45)$$

Agora, de (45), temos que:

$$\left[\left(\overleftrightarrow{TH} // \overleftrightarrow{T'H'} \right) \cap \left(\overleftrightarrow{T'H'} \subset \alpha \right) \right] \Leftrightarrow \left(\overleftrightarrow{TH} // \alpha \right) \blacksquare \quad (46)$$

Analogamente,
$$\left(\overleftrightarrow{TJ} // \alpha \right) \blacksquare \quad (47)$$

Logo, \overleftrightarrow{TH} e \overleftrightarrow{TJ} são retas concorrentes de π , paralelas a α , então, $\alpha // \pi \blacksquare$

Simultaneamente, provamos outra condição de paralelismo entre planos.

– Três pontos não colineares (H , J e T) que estão no mesmo semi-espço determinado por um plano τ e equidistantes de τ , pertencem a um plano $\omega // \tau$. (48)

Esse teorema pode ser reescrito como:

– Um plano ω possui três pontos não colineares e equidistantes de um plano $\tau \Rightarrow \omega // \tau$. (49)

Vamos, agora, provar um lema que será essencial para mostrar que os todos os vértices da base maior do tronco são coplanares.

– Se τ e ω são planos paralelos com $d(\tau, \omega) = b$ e P é um ponto pertencente ao mesmo semi-espço determinado por τ que contém ω , tal que $d(P, \tau) = b$, então $P \in \omega$. (50)

Prova: por um ponto P fora de um plano τ existe um único plano $\kappa // \tau$ tal que $P \in \kappa$ [15]. (51)

Por hipótese, κ e ω pertencem ao mesmo semi-espço determinado por τ e são paralelos a τ , logo, são paralelos entre si [24]. Como paralelismo implica em equidistância:

$$d(\tau, \kappa) = d(\tau, \omega) \pm d(\omega, \kappa). \quad (52)$$

O sinal do último termo é (+) ou (–) conforme κ esteja mais afastado ou mais próximo de τ do que ω . Seja c a distância entre κ e ω , então:

$$d(\tau, \kappa) = b \pm c. \quad (53)$$

Agora, $d(\tau, P) = b$, então, $d(\tau, \kappa) = b$. Substituindo em (53), vem que:

$$b = b \pm c \quad \Leftrightarrow \quad c = 0, \quad (54)$$

logo, κ e ω são coincidentes, isto é, $\kappa = \omega$, portanto $P \in \omega \blacksquare$

O teorema em (50) define que:

– O LG dos pontos que equidistam uma distância b de um plano τ e que estão no mesmo semi-espaço determinado por τ é um plano ω paralelo a τ . (55)

Agora, de (44) e de (55), temos que $F \in \pi$ e $L \in \pi$, logo, o pentágono $TLJHF$ é plano. ■

Para concluir que esse pentágono é regular, falta apenas mostrar que os ângulos internos são todos congruentes, pois os lados são todos congruentes com medida igual à diagonal da face.

Para essa prova, vamos recorrer novamente aos casos de congruência de triedros: se dois triedros possuem ordenadamente congruentes uma Face, um Diedro e uma Face, então, eles são congruentes [15]. Esse é o caso FDF de congruência de triedros.

Tomando novamente como referência a Figura 43, vamos analisar os triedros $T_1 = T_{F(LJC),F(LJH),F(CJH)}$ e $T_2 = T_{F(JHD),F(JHF),F(DHF)}$:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet F(LJC) \cong F(JHD) = 72^\circ \\ \bullet D(BCJL, DCJH) \cong D(CDHJ, EDHF) = \sigma \\ \bullet F(HJC) \cong F(FHD) = 72^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Pelo caso de congruência de triedros FDF:} \\ T_1 \cong T_2 \Rightarrow F(LJH) \cong F(JHF) \quad \blacksquare$$

Analogamente,

$$F(LJH) \cong F(LJH) \cong F(LJH) \cong F(LJH) \cong F(JHF) \quad \blacksquare \quad (56)$$

Por outro lado, essas faces têm, exatamente, as mesmas medidas dos ângulos internos do pentágono plano, base maior do tronco. Assim, os ângulos internos do pentágono $TLJHF$ são todos congruentes. Como esse pentágono tem os lados todos também congruentes, então, ele é regular. ■ (57)

Além disso, $TLJHF$ está contido em π que é paralelo a α , logo, os pentágonos regulares $ABCDE$ e $TLJHF$ são paralelos. Para que o tronco de pirâmide pentagonal $ABCDETLJHF$ seja regular, é necessário, ainda, que o centro de uma base seja a projeção ortogonal do centro da outra base. Vamos destacar (construir) alguns pontos do dodecaedro regular:

- Seja O_1 o centro do pentágono $ABCDE$ e seja O'_1 a sua respectiva projeção ortogonal sobre o pentágono $TLJHF$.
- Sejam: M_1 o ponto médio de \overline{FH} , N_1 o ponto médio de \overline{DE} , M_2 o ponto médio de \overline{LJ} e N_2 o ponto médio de \overline{BC} .

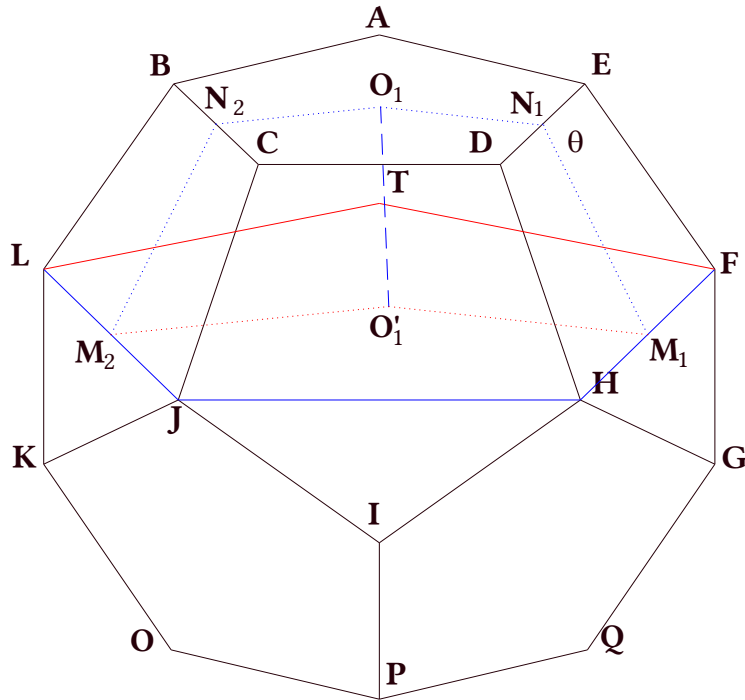


Figura 44: tronco de pirâmide pentagonal regular no dodecaedro regular
Fonte: o autor

Nos triângulos $O_1N_1M_1$ e $O_1N_2M_2$, temos:

$$\left. \begin{array}{l}
 \bullet \overline{O_1N_1} \cong \overline{O_1N_2} = s, \text{ apótema da face} \\
 \bullet O_1\hat{N}_1M_1 \cong O_1\hat{N}_2M_2 = \sigma, \text{ medida do diedro} \\
 \bullet \overline{O_1M_1} \cong \overline{O_1M_2} = a, \text{ altura do trapézio}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Por LAL os triângulos } O_1N_1M_1 \text{ e } O_1N_2M_2 \text{ são congruentes, logo:}$$

$$\overline{O_1M_1} \cong \overline{O_1M_2}. \quad (58)$$

Agora, nos triângulos $O_1M_1O'_1$ e $O_1M_2O'_1$, temos:

$$\left. \begin{array}{l}
 \bullet \overline{O_1M_1} \cong \overline{O_1M_2}, \text{ de (43)} \\
 \bullet \overline{O_1O'_1} = d(\alpha, \pi), \text{ cateto comum} \\
 \bullet O_1\hat{O}'_1M_1 \cong O_1\hat{O}'_1M_2 = 90^\circ, \text{ por construção}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos, os triângulos } O_1M_1O'_1 \text{ e } O_1M_2O'_1 \text{ são congruentes.}$$

Dessa forma, temos que:

$$\overline{O'_1M_1} \cong \overline{O'_1M_2}. \quad (59)$$

Sejam: M_3 o ponto médio de \overline{JH} , M_4 o ponto médio de \overline{LT} e M_5 o ponto médio de \overline{FT} .

Analogamente a (44), vem que:

$$\overline{O'_1M_1} \cong \overline{O'_1M_2} \cong \overline{O'_1M_3} \cong \overline{O'_1M_4} \cong \overline{O'_1M_5}. \quad (60)$$

Assim, O'_1 equidista dos lados do pentágono regular $TLJHF$, logo, O'_1 é o centro desse pentágono. Portanto, a projeção ortogonal do centro da base menor coincide com o centro da base maior, então:

– O poliedro $ABCDEFHJLT$ é um tronco de pirâmide regular. ■ (61)

Notamos que para cada face do dodecaedro regular existe um tronco, logo, são doze troncos de pirâmide pentagonal regular. A base maior desse tronco é fundamental para calcular a medida do ângulo diedral formado entre as faces adjacentes no dodecaedro regular.

5.2.4.1 Cálculo do ângulo formado pelas faces adjacentes do Dodecaedro Regular

Para calcular esse diedro vamos buscar novamente segmentos notáveis nas faces pentagonais regulares do dodecaedro regular. Partindo do ponto médio de uma aresta tomamos duas alturas, cuja medida é h , das duas faces adjacentes que possuem a aresta comum.

Na Figura 45 vamos tomar a aresta \overline{DE} comum às faces $ABCDE$ e $DEFGH$. Seja N_1 o ponto médio da aresta \overline{DE} e tomemos as alturas $\overline{BN_1}$ e $\overline{GN_1}$.

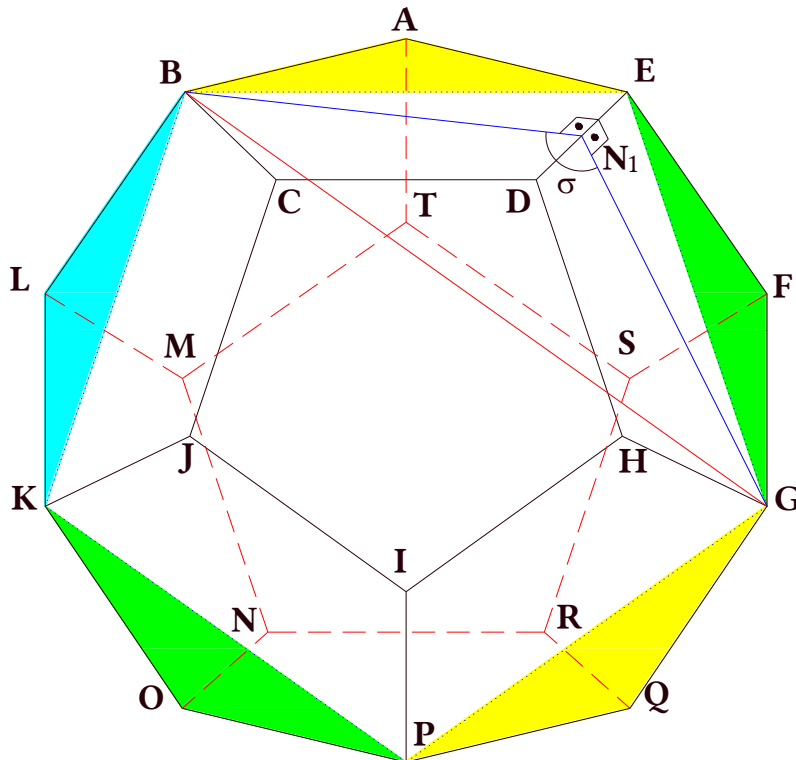


Figura 45: diedro no dodecaedro regular
Fonte: o autor

Notamos que o triângulo isósceles BGN_1 tem a base \overline{BG} com medida igual à diagonal do pentágono regular $BEGPK$ (base maior do tronco de pirâmide pentagonal regular cujo lado tem a medida d da diagonal da face).

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo BGN_1 , vem que:

$$\overline{BG}^2 = h^2 + h^2 - 2h \cdot h \cdot \cos \sigma = 2h^2 - 2h^2 \cdot \cos \sigma = 2h^2(1 - \cos \sigma) \quad \Leftrightarrow$$

$$\overline{BG}^2 = 2h^2(1 - \cos \sigma). \quad (62)$$

Por outro lado, temos de (57) e de (27) que:

$$\left\{ \left[\overline{BG} = d \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \right] \wedge \left[d = l \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \right] \right\} \Leftrightarrow \left[\overline{BG} = l \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) = l \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} \right) \approx \frac{262}{100} l \right]. \quad (63)$$

Assim:

$$\left[\overline{BG} = l \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \right] \Leftrightarrow \left[\overline{BG}^2 = l^2 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = l^2 \left(\frac{14+6\sqrt{5}}{4} \right) = l^2 \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \right) \right]. \quad (64)$$

Temos também, de (31), que:

$$\left[h = l \left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} \right) \right] \Leftrightarrow \left[h^2 = l^2 \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{4} \right) \right]. \quad (65)$$

Agora, substituindo (64) e (65) em (62) e, sabendo que σ é obtuso, vem que:

$$\begin{aligned} l^2 \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \right) &= 2l^2 \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{4} \right) (1 - \cos \sigma) && \Leftrightarrow \\ 2 \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{2}{5+2\sqrt{5}} \right) &= (1 - \cos \sigma) && \Leftrightarrow \\ \cos \sigma &= 1 - \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} \right) && \Leftrightarrow \\ \cos \sigma &= \frac{5+2\sqrt{5} - 7 - 3\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} && \Leftrightarrow \\ \cos \sigma &= \frac{-2 - \sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} \cdot \frac{5-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}} && \Leftrightarrow \\ \cos \sigma &= \frac{-10 + 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 10}{25 - 20} && \Leftrightarrow \\ \cos \sigma &= \frac{-\sqrt{5}}{5} \Rightarrow && (66) \end{aligned}$$

$$\sigma = \arccos \left(\frac{-\sqrt{5}}{5} \right) \approx 116,56505117707798935157219372045^\circ.$$

Assim, a medida do ângulo diédrico formado por duas faces adjacentes de um dodecaedro regular é aproximadamente $116,6^\circ$ ■

5.2.5 Icosaedro Regular

O icosaedro regular é formado por vinte triângulos equiláteros congruentes. Seus ângulos poliédricos são pentaédricos. Vamos começar nosso estudo com a prova de que esses ângulos poliédricos são congruentes, demonstrando que cada vértice é vértice de uma pirâmide pentagonal regular.

Para facilitar a identificação dos objetos, sem perda de generalidade vamos considerar o sólido de aresta l formado a partir de seis vértices no icosaedro regular representado na Figura 46, cuja “aparência” é, de fato, de uma pirâmide regular.

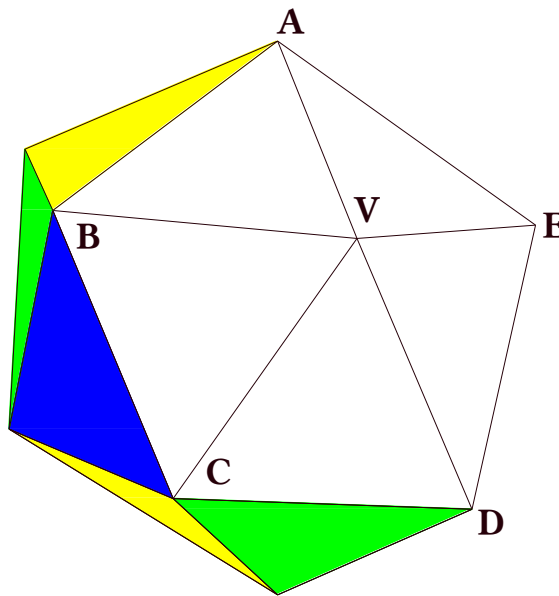


Figura 46: ângulo pentaédrico
Fonte: o autor

O sólido $VABCDE$ tem as arestas congruentes, porém, para que seja uma pirâmide regular é necessário que o polígono $ABCDE$ seja um pentágono regular e que a projeção ortogonal de V coincida com o centro desse polígono. Vamos começar mostrando que pontos A , B , C , D e E são coplanares (a demonstração mais longa deste texto).

Seja α o plano que contém os vértices A , C e D não consecutivos e tomemos o ponto V' , simétrico de V em relação a α (Figura 47). Vamos mostrar, inicialmente, que α é o plano mediador de $\overline{VV'}$.

Como V' é o simétrico de V os ângulos \hat{AMV} e $\hat{AMV'}$ são retos por construção. Assim, nos triângulos AMV e AMV' temos que:

- \overline{AM} é um cateto comum
 - $\widehat{AMV} \cong \widehat{AMV'} = 90^\circ$
 - $\overline{MV} \cong \overline{MV'}$, por construção
- } \Rightarrow Pelo caso LAL os triângulos retângulos AMV e AMV' são congruentes, logo: $\overline{AV} \cong \overline{AV'}$.

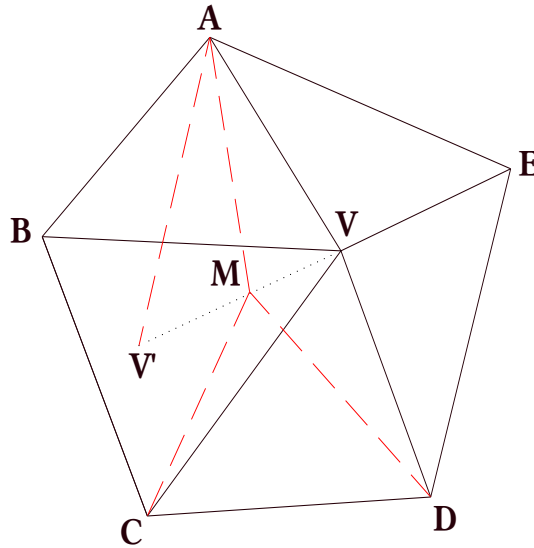


Figura 47: plano formado por três vértices não consecutivos no icosaedro regular
Fonte: o autor

Analogamente:

$$\overline{CV} \cong \overline{CV'} \cong \overline{DV} \cong \overline{DV'} \cong \overline{AV} \cong \overline{AV'} = l \quad \blacksquare \quad (68)$$

Logo, os pontos A , C e D equidistam de V e de V' . Portanto, α é o plano medidor de $\overline{VV'}$ ■

Vamos mostrar agora que o plano medidor de \overline{AD} , que vamos chamar de β , contém a reta \overline{VM} .

Nos triângulos retângulos AMV e DMV temos que:

- $\widehat{AMV} \cong \widehat{DMV} = 90^\circ$
 - $\overline{AV} \cong \overline{DV} = l$, são hipotenusas
 - \overline{VM} é um cateto comum
- } \Rightarrow Por HRC (Secção 3.3.3.3) os triângulos AMV e DMV são congruentes, logo: $\overline{AM} \cong \overline{DM}$. (69)

De (69) A e D equidistam de M e por serem vértices consecutivos A e D equidistam de V . Portanto, V e M pertencem a β logo $\overline{VM} \subset \beta$. Além disso, “dois planos secantes são perpendiculares se uma reta de um for perpendicular ao outro” [24], como $\overline{VM} \perp \alpha$, temos que $\alpha \perp \beta$.

Agora, seja E' um ponto de α equidistante de A , de V e de D , isto é, E' é tal que $\overline{E'A} \cong \overline{E'V} \cong \overline{E'D}$. Além disso, vamos impor que E' pertença ao semi-espaco determinado pelo plano que contém os vértices AVD e que não contém C . Vamos mostrar que $E' = E$.

Como E' é equidistante de A e de D , então, $E' \in \beta$. Assim, $E' \in \{\alpha \cap \beta\} = r$. Além disso, r é mediatriz de \overline{AD} e $\overline{VM} \perp r$, pois $\alpha \perp \beta$.

Seja também $E'' \in r$ tal que $\overline{E''M} \cong \overline{AM}$ e que E'' pertença ao mesmo semiplano determinado por \overline{AD} e que contém E' . Os triângulos $E''MV$ e AMV são congruentes por LAL, de fato:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \overline{VM} \text{ é um cateto comum} \\ \bullet \widehat{VMA} \cong \widehat{VM E''} = 90^\circ \\ \bullet \overline{MA} \cong \overline{ME''}, \text{ por construção} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{VA} \cong \overline{VE''}.$$

Analogamente, $\overline{VD} \cong \overline{VE''}$. Assim, como $E'' \in \alpha$ e equidista de A , de V e de D , temos $E'' = E'$.

Agora, como $\overline{EA} \cong \overline{ED}$, temos que $E \in \beta$ e:

$$\overline{VE} \cong \overline{VA} \cong \overline{VE'} \Leftrightarrow \overline{VE} \cong \overline{VE'} = l. \quad (70)$$

Assim, E e E' pertencem à mesma circunferência Ω de β cujo centro é o vértice V e cujo raio é a aresta do icosaedro: l .

Além disso, $E' \in \Omega \cap \alpha$. Dessa forma, há três possibilidades para o ponto E :

- I. $E' = E$ e está provado que $E \in \alpha$; ou
- II. E pertence ao semi-espaço determinado por α no qual está V ; ou
- III. E pertence ao semi-espaço determinado por α no qual não está V .

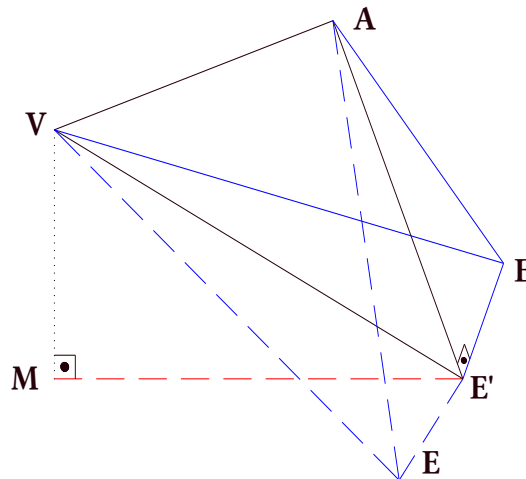


Figura 48: triângulo retângulo com vértice no icosaedro regular
Fonte: o autor

Vamos supor, por absurdo, que $E \neq E'$.

Como $E \in \beta$, $\beta \perp \alpha$ e $E' \in \alpha$, temos, tanto em (II) como em (III), que $\widehat{EE'A} = 90^\circ$. Assim, o triângulo AEE' é retângulo, onde \overline{AE} é a hipotenusa e $\overline{AE'}$ é um cateto. Logo, tanto em (II) como em (III), $\overline{AE'} < \overline{AE}$.

Por outro lado, $\overline{AE} = l$. De (70), $\overline{AE'} \cong \overline{AE}$, contradição, pois $\overline{AE'} < \overline{AE}$.

Essa contradição é devida a proposição de que $E \neq E'$, logo $E = E'$. Assim, $E \in \alpha$. Analogamente $B \in \alpha$, portanto, o pentágono $ABCDE$ é plano e o sólido $FABCDE$ é uma pirâmide. Temos também, analogamente a (69), que:

$$\overline{AM} \cong \overline{DM} \cong \overline{CM} \cong \overline{EM} \cong \overline{BM} \quad \blacksquare \quad (71)$$

Como as distâncias dos vértices de $ABCDE$ ao ponto M são congruentes, logo, esse pentágono é inscrito numa circunferência (circunscrita ao pentágono) cujo centro é M e cujo raio é \overline{AM} .

Falta mostrar que o pentágono $ABCDE$ é regular. Na Secção 3.2.2.3 provamos que se um pentágono convexo possui os lados congruentes entre si e as diagonais congruentes entre si esse pentágono é regular. Embora pudéssemos utilizar essa informação provando antes que as diagonais de $ABCDE$ são congruentes vamos apresentar outra condição para que um pentágono seja regular:

– Um pentágono convexo é regular se for inscrito e seus lados forem congruentes. (72)

Prova. Sem perda de generalidade vamos tomar o pentágono $ABCDE$ base da pirâmide formada no vértice V do icosaedro regular cujos lados são congruentes com medida igual à aresta l e cujo centro da circunferência circunscrita é M . Os triângulos AMB , BMC , CMD , DME , e EMA são isósceles, as bases são as arestas, todos os pares de lados congruentes são congruentes entre si e com medida igual ao raio da circunferência circunscrita. Assim, por LLL é imediato que esses triângulos são congruentes \blacksquare .

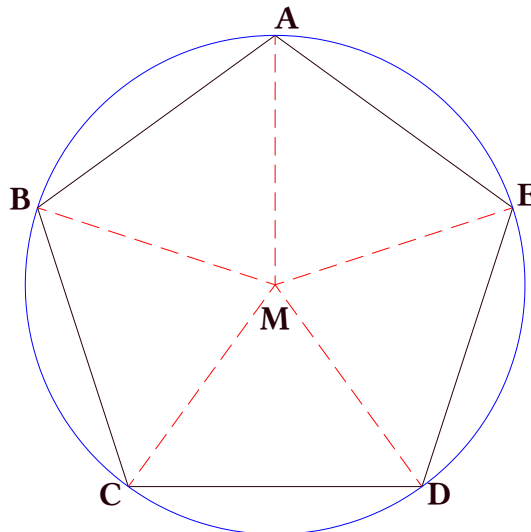


Figura 49: circunferência circunscrita num pentágono regular
Fonte: o autor

Da congruência desses triângulos temos que $\widehat{MAE} \cong \widehat{MAB} \cong \widehat{MBA} \cong \widehat{MBC}$, logo, $\widehat{EAB} \cong \widehat{ABC}$. Analogamente,

$$\widehat{ABC} \cong \widehat{BCD} \cong \widehat{CDE} \cong \widehat{DEA} \cong \widehat{EAB}.$$

Portanto, os cinco ângulos são congruentes ■

Como os lados também são congruentes, temos também que:

– o pentágono $ABCDE$ é regular ■ (73)

Além disso, a projeção ortogonal de V sobre $ABCDE$, M , coincide com o centro da base, logo $VABCDE$ é uma pirâmide reta. Como a base é um polígono regular, esse sólido é uma pirâmide pentagonal regular, cujas arestas laterais e as arestas da base são todas congruentes entre si. Dessa forma:

– Em cada vértice do icosaedro regular forma-se uma pirâmide pentagonal regular ■ (74)

Vamos calcular a altura dessa pirâmide. No triângulo retângulo VME , Figura 48 ($E = E'$), sem perda de generalidade temos:

- \overline{VM} é altura da pirâmide.
- \overline{VE} é a aresta l do icosaedro regular (hipotenusa do triângulo VME).
- \overline{ME} é o raio da circunferência circunscrita $= l/2\cos 54^\circ$ (letra J da Seção 3.2.2.3).

Aplicando o teorema de Pitágoras e sabendo que as medidas são positivas vem que:

$$\begin{aligned} \overline{VE}^2 = \overline{VM}^2 + \overline{ME}^2 &\Leftrightarrow l^2 = \overline{VM}^2 + (l/2\cos 54^\circ)^2 \Leftrightarrow \overline{VM}^2 = l^2 - l^2/(2\cos 54^\circ)^2 \Leftrightarrow \\ \overline{VM}^2 = l^2 \left(1 - \frac{1}{4(\cos 54^\circ)^2} \right) &\Rightarrow \overline{VM} = l \sqrt{1 - \frac{1}{4(\cos 54^\circ)^2}} \approx \frac{53}{100} l \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (75)$$

Como essa relação vale para todos os vértices então, essas pirâmides são congruentes entre si. Portanto, os ângulos pentaédricos formados nos vértices do icosaedro são todos congruentes entre si ■

Além disso, como são doze vértices, são exatamente doze pirâmides pentagonais. Cada uma dessas doze pirâmides tem como base um pentágono regular, logo, no icosaedro regular formam-se doze pentágonos regulares. Em outras palavras, a intersecção de um plano perpendicular à altura dessa pirâmide e que passa a uma distância do vértice igual a essa altura com o icosaedro regular é um pentágono regular ■

Esse pentágono é uma das secções planas notáveis formadas no icosaedro regular, que estudaremos com mais detalhes a partir da próxima seção.

5.2.5.1 Secções planas e diagonais no icosaedro regular

Observando na Figura 50 os pentágonos regulares $ABCDE$ e $FGHIJ$, secções planas no icosaedro regular, notamos que suas diagonais são também diagonais do icosaedro regular, mas há “outro” tipo de diagonal.

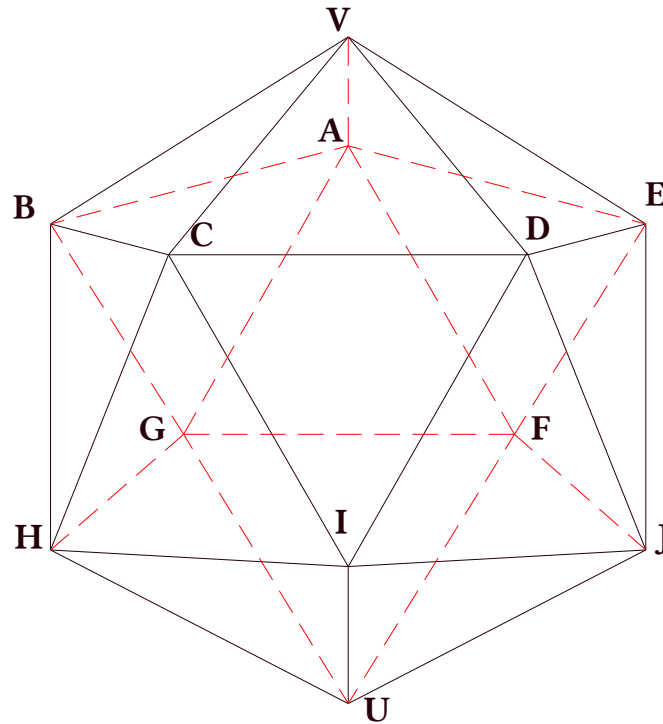


Figura 50: icosaedro regular “pendurado” por um vértice
Fonte: o autor

O icosaedro regular possui doze vértices. Quando destacamos seis para formar a pirâmide pentagonal regular “sobram” outros seis vértices que também irão formar outra pirâmide congruente à anterior.

Observando a Figura 50, notamos, também, que os vértices das duas pirâmides, V e U , parecem formar um eixo que contém os centros dos pentágonos da base. Além disso, esse eixo é uma diagonal maior que a anterior!

Vamos mostrar que os pentágonos que formam as bases são paralelos. Isso será usado na próxima seção para mostrar que as diagonais formadas a partir de vértices de pirâmides “opostas”, à semelhança de \overline{VU} , são congruentes.

Vamos chamar o plano que contém a base $ABCDE$ de α . O plano que contém a base $FGHIJ$ será chamado de γ .

Sem perda de generalidade, vamos tomar como referência a Figura 51. A distância do ponto D ao plano γ é a medida do segmento de reta que une D à sua projeção ortogonal, D' , em γ . O vértice D e a aresta \overline{IJ} formam um triângulo equilátero cuja altura é $l \cdot \sqrt{3}/2$. Vamos utilizar o ângulo θ que a face F_{DIJ} do icosaedro regular faz com o plano γ para determinar essa altura.

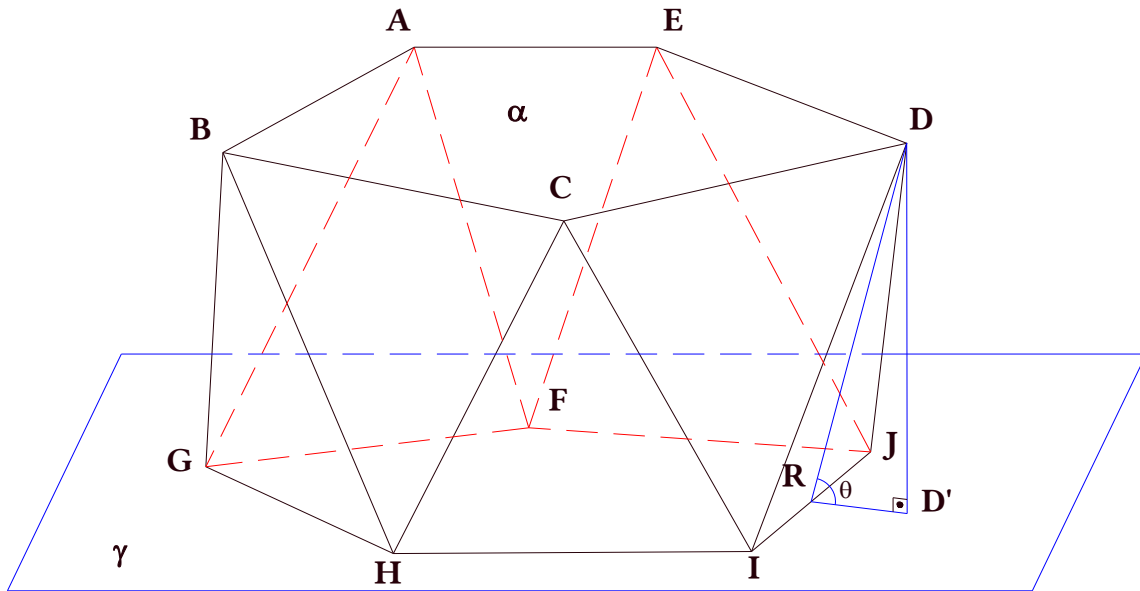


Figura 51: distância entre seções pentagonais no icosaedro regular
Fonte: o autor

Para determinar θ devemos tomar dois segmentos de reta perpendiculares a \overline{IJ} . Seja R o ponto médio de \overline{IJ} , então, $\overline{DR} \perp \overline{IJ}$, pois no triângulo equilátero a mediana coincide com a altura [26]. Vamos mostrar que $\overline{D'R} \perp \overline{IJ}$. Nos triângulos $DD'J$ e $DD'I$ temos:

- $\overline{DD'}$ é um cateto comum
 - $\widehat{DD'J} \cong \widehat{DD'I} = 90^\circ$, por construção
 - $\overline{DJ} \cong \overline{DI} = l$
- } \Rightarrow Os triângulos $DD'J$ e $DD'I$ são congruentes por LAL, logo, $\overline{D'I} \cong \overline{D'J}$ ■

Dessa forma, o triângulo $ID'J$ é isósceles e $\overline{D'R}$ é uma mediana relativa à base. No triângulo isósceles a mediana relativa à base coincide com a altura [26]. Portanto, $\overline{D'R} \perp \overline{IJ}$. Logo,

$$\theta = \widehat{DRD'}. \quad (76)$$

Por construção, $\widehat{DD'R} = 90^\circ$. Aplicando o $\text{sen}\theta$ no triângulo retângulo RDD' , vem que:

$$\text{sen}\theta = \frac{\overline{DD'}}{\overline{DR}} \Leftrightarrow \overline{DD'} = \overline{DR} \cdot \text{sen}\theta \Leftrightarrow \overline{DD'} = l \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}\theta \quad \blacksquare \quad (77)$$

Na Secção 5.2.5.2 vamos provar que os ângulos diedros das faces adjacentes do icosaedro regular são congruentes (98), vamos chamar sua medida de β . Notamos que θ é a soma do suplemento de β com o ângulo formado pelo apótema da pirâmide regular (altura do triângulo equilátero) com o apótema da base pentagonal.

Seja P o centro do pentágono regular $FGHIJ$ e $\{S\} = \overline{UR} \cap \overline{DD'}$.

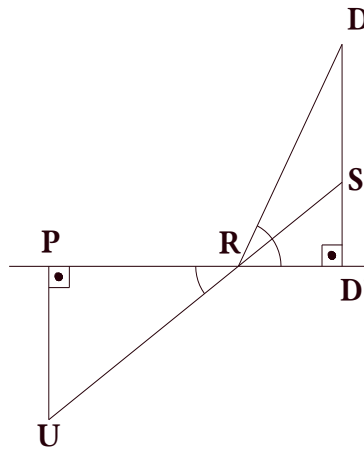


Figura 52: ângulo entre uma face adjacente a uma secção plana pentagonal no icosaedro regular
Fonte: o autor

Na Figura 52:

- \overline{UR} é o apótema da pirâmide pentagonal regular cujas arestas são todas congruentes, sua medida é $\frac{l\sqrt{3}}{2} \approx \frac{87}{100}l$ (altura da face do icosaedro regular de aresta = l);
- \overline{PR} é o apótema do pentágono regular (raio da circunferência inscrita), sua medida é $l \cdot \text{tg}54^\circ/2$ (30);
- \widehat{URP} é o ângulo entre esses apótemas;
- $\widehat{SRD'} \cong \widehat{URP}$, pois são opostos pelo vértice; (78)
- $\widehat{DRU} = \beta$, medida do diedro formado entre duas faces consecutivas no icosaedro regular;
- \widehat{DRS} é o suplemento de \widehat{DRU} ;

Assim,

$$\theta = \widehat{DRD'} = \widehat{DRS} + \widehat{SRD'} \quad \blacksquare \quad (79)$$

Para encontrar o $\text{sen}\theta$ vamos utilizar diversas relações trigonométricas fundamentais [17] que podem ser encontradas com facilidade na referência citada.

Na Secção 5.2.5.2 vamos provar que $\cos(\widehat{DRU}) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ (103), é fácil ver que \widehat{DRU} é obtuso,

logo \widehat{DRS} é agudo. Aplicando a redução ao primeiro quadrante, vem que:

$$\cos(\widehat{DRS}) = -\cos(\widehat{DRU}) = -\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \Rightarrow \cos(\widehat{DRS}) = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \blacksquare \quad (80)$$

Agora, do triângulo retângulo URP e de (78), vem que:

$$\cos(\widehat{SRD'}) = \cos(\widehat{URP}) = \frac{\overline{RP}}{\overline{RU}} = \frac{l \cdot \text{tg}54^\circ/2}{l\sqrt{3}/2} \Rightarrow \cos(\widehat{SRD'}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{tg}54^\circ \quad \blacksquare \quad (81)$$

De (78), de (79) e da fórmula do “seno da soma de dois ângulos”, vem que:

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(D\hat{R}D') = \operatorname{sen}(D\hat{R}S + S\hat{R}D') = \operatorname{sen}(D\hat{R}S)\cos(S\hat{R}D') + \operatorname{sen}(S\hat{R}D')\cos(D\hat{R}S). \quad (82)$$

Vamos agora calcular $\operatorname{sen}(S\hat{R}D')$ utilizando a relação fundamental da trigonometria [17], sabendo que os ângulos $D\hat{R}S$ e $S\hat{R}D'$ são agudos (pertencem ao 1º Quadrante):

$$[\operatorname{sen}(D\hat{R}S)]^2 + [\cos(D\hat{R}S)]^2 = 1 \Leftrightarrow [\operatorname{sen}(D\hat{R}S)]^2 = 1 - [\sqrt{5}/3]^2 \Rightarrow \operatorname{sen}(D\hat{R}S) = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}. \quad (83)$$

$$[\operatorname{sen}(S\hat{R}D')]^2 + [\cos(S\hat{R}D')]^2 = 1 \Leftrightarrow [\operatorname{sen}(S\hat{R}D')]^2 = 1 - [(\sqrt{3}/3)\operatorname{tg} 54^\circ]^2 \Leftrightarrow$$

$$[\operatorname{sen}(S\hat{R}D')]^2 = 1 - \frac{(\operatorname{tg} 54^\circ)^2}{3} \Leftrightarrow [\operatorname{sen}(S\hat{R}D')]^2 = \frac{3 - (\operatorname{tg} 54^\circ)^2}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(S\hat{R}D') = \sqrt{\frac{3 - (\operatorname{tg} 54^\circ)^2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{3 - (\operatorname{tg} 54^\circ)^2}. \quad (84)$$

Agora, substituindo (80), (81), (83) e (84) em (82), vem que:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} 54^\circ + \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{3 - (\operatorname{tg} 54^\circ)^2} \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9} [2\operatorname{tg} 54^\circ + \sqrt{5} \sqrt{3 - (\operatorname{tg} 54^\circ)^2}] \Rightarrow \quad (85)$$

$$\theta \approx 79,19^\circ$$

Finalmente, substituindo (85) em (77), vem que:

$$\overline{DD'} = l \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{9} [2\operatorname{tg} 54^\circ + \sqrt{5} \sqrt{3 - (\operatorname{tg} 54^\circ)^2}] = \frac{l}{6} [2\operatorname{tg} 54^\circ + \sqrt{5} \sqrt{3 - (\operatorname{tg} 54^\circ)^2}] \approx \frac{85}{100} l \blacksquare \quad (86)$$

Agora, de (98), de (79) e analogamente a (77), vem que:

$$\overline{AA'} \cong \overline{BB'} \cong \overline{CC'} \cong \overline{DD'} \cong \overline{EE'} = l \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \theta \approx \frac{85}{100} l \blacksquare \quad (87)$$

Assim, os vértices A , B , C , D e E equidistam de γ . Logo, por (55), pertencem a um plano paralelo a γ , então, os planos α e γ são paralelos, logo as secções $ABCDE$ e $FGHIJ$ também são paralelas e a distância entre eles é (87).

O sólido formado por esses dois pentágonos regulares paralelos (Figura 51) é um antiprisma pentagonal, onde as faces pentagonais são as bases (com respectivas arestas das bases) e as demais arestas são as arestas laterais [12].

Agora, se acrescentarmos o vértice V ou o vértice U ao antiprisma pentagonal (equivalentemente a retirar um vértice do icosaedro regular) forma-se o icosaedro diminuído [13] que é um sólido com todas as arestas congruentes, formado por um antiprisma pentagonal (caixa) mais uma pirâmide pentagonal regular (tampa ou cúpula).

Na próxima seção vamos mostrar que a diagonal \overline{VU} (Figura 50) contém os centros dos pentágonos das bases do antiprisma. Para isso, vamos “cortar” o icosaedro (o antiprisma) com mais um plano.

5.2.5.1.1 O decágono regular e outras pirâmides associadas ao icosaedro regular

Os pontos médios das arestas laterais do antiprisma pentagonal são equidistantes dos planos α e γ (a demonstração é imediata utilizando congruência de triângulos retângulos). Por (55), esses pontos pertencem a um único plano paralelo a α e a γ , que vamos chamar de δ . Portanto, esses pontos são vértices de um **decágono** plano. Como a distância entre os pontos médios de dois lados consecutivos de um triângulo é igual à metade do terceiro lado [27], os lados desse decágono são congruentes e a suas medidas são $l/2$. Vamos chamar os vértices do decágono de K_1, K_2, \dots, K_{10} .

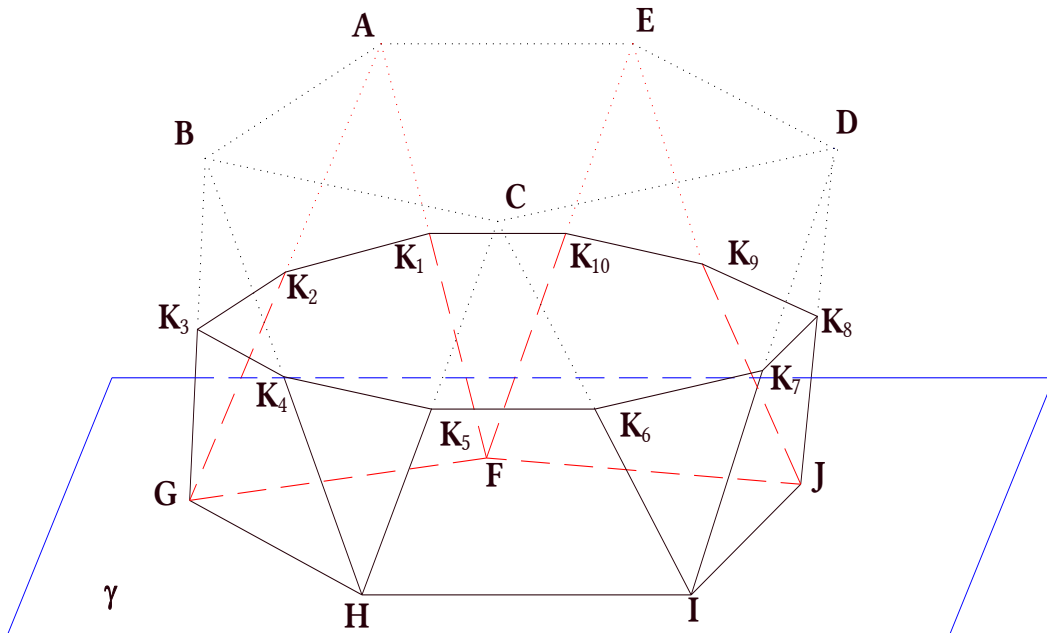


Figura 53: antiprisma pentagonal seccionado por um plano equidistante das bases
Fonte: o autor

Inicialmente, vamos mostrar que esse decágono pertence ao plano mediador de \overline{VU} (Figura 54). Sem perda de generalidade seja K_2 o ponto médio de \overline{AG} . O pentágono $AVCHG$ é regular, portanto, $\widehat{VAK_2} = 108^\circ$. Analogamente, $\widehat{UGK_2} = 108^\circ$. Assim, nos triângulos VAK_2 e UGK_2 :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \overline{VA} \cong \overline{UG} = l \\ \bullet \widehat{VAK_2} \cong \widehat{UGK_2} = 108^\circ \\ \bullet \overline{AK_2} \cong \overline{GK_2} = l/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Os triângulos } VAK_2 \text{ e } UGK_2 \text{ são congruentes por LAL, logo, } \overline{VK_2} \cong \overline{UK_2} \text{ (Figura 54).}$$

Analogamente os demais vértices do decágono equidistam de V e de U , logo δ é o plano mediador de \overline{VU} . Em particular o ponto médio de \overline{VU} pertence a δ . Além disso, o triângulo VK_2U é isósceles com base \overline{VU} .

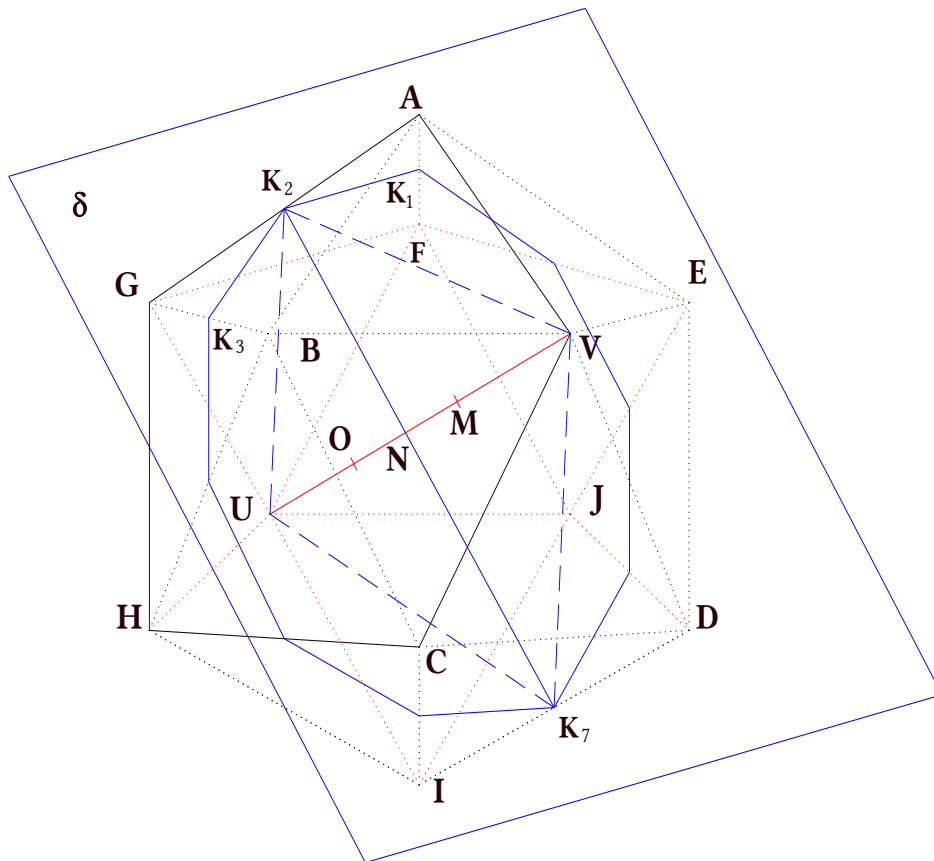


Figura 54: plano mediador da diagonal maior do icosaedro regular
 Fonte: o autor

Da mesma forma são isósceles os triângulos: $VK_1U, VK_3U \dots, VK_{10}U$. Além disso, esses triângulos são congruentes por LLL. (88)

Seja N o ponto médio de \overline{VU} . Como K_2 é o vértice oposto à base \overline{VU} do triângulo isósceles VK_2U , o segmento $\overline{NK_2}$ é mediana e também altura relativa à base \overline{VU} . Da congruência dos triângulos $VK_1U, VK_2U, \dots, VK_{10}U$ (88), temos que as respectivas alturas relativas à base \overline{VU} são congruentes logo:

– O decágono $K_1K_2 \dots K_{10}$ é inscritível e seu centro é N com raio $\varphi_2 = \overline{NK_2}$. (89)

Observando os triângulos isósceles $NK_1K_2, NK_2K_3, \dots, NK_{10}K_1$, notamos que também eles são congruentes por LLL. Portanto, os ângulos adjacentes das bases desses triângulos, NK_iK_{i+1} , são congruentes logo, os ângulos internos são todos congruentes. Assim, O decágono $K_1K_2 \dots K_{10}$ é regular.

Como esse decágono pertence ao plano mediador de \overline{VU} , δ , os seus vértices são equidistantes de V e de U . Ligando os vértices do decágono a V formamos triângulos isósceles com base $l/2$, lado do decágono. Assim, formamos uma pirâmide decagonal regular cuja base é o decágono $K_1K_2\dots K_{10}$. Analogamente formamos outra pirâmide com vértice U .

Assim, construímos duas pirâmides decagonais regulares com base comum e cujos vértices são V e U . Como o decágono regular pertence ao plano mediador de \overline{VU} essas pirâmides têm mesma altura, portanto, são congruentes. Na realidade, é fácil ver que esse sólido é um icosaedro formado por triângulos isósceles congruentes (Figura 55) que vamos chamá-lo de dupla pirâmide decagonal regular. (90)

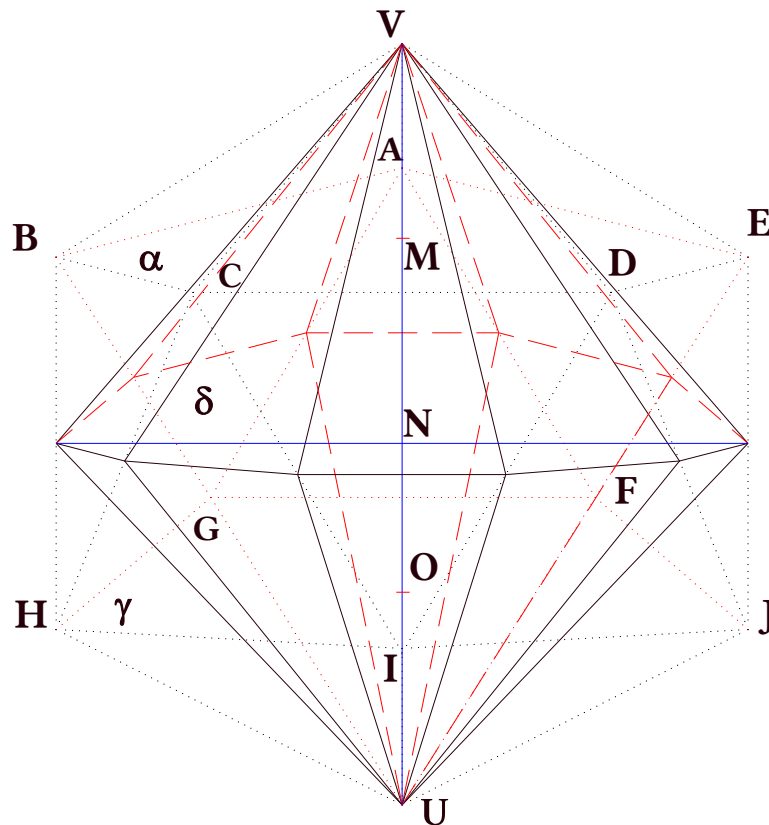


Figura 55: dupla pirâmide decagonal regular
Fonte: o autor

Destacamos agora mais uma pirâmide (Figura 56). O vértice V e a secção $FGHIJ$ formam uma pirâmide pentagonal regular com aresta lateral d_1 e aresta da base l . Analogamente para U e a secção $ABCDE$. Como a razão da aresta lateral para a aresta da base nessas pirâmides é a razão áurea (28) vamos chamar o poliedro $VFGHIJ$ de pirâmide pentagonal áurea. (91)

A planificação desse sólido é uma figura conhecida por pentagrama.

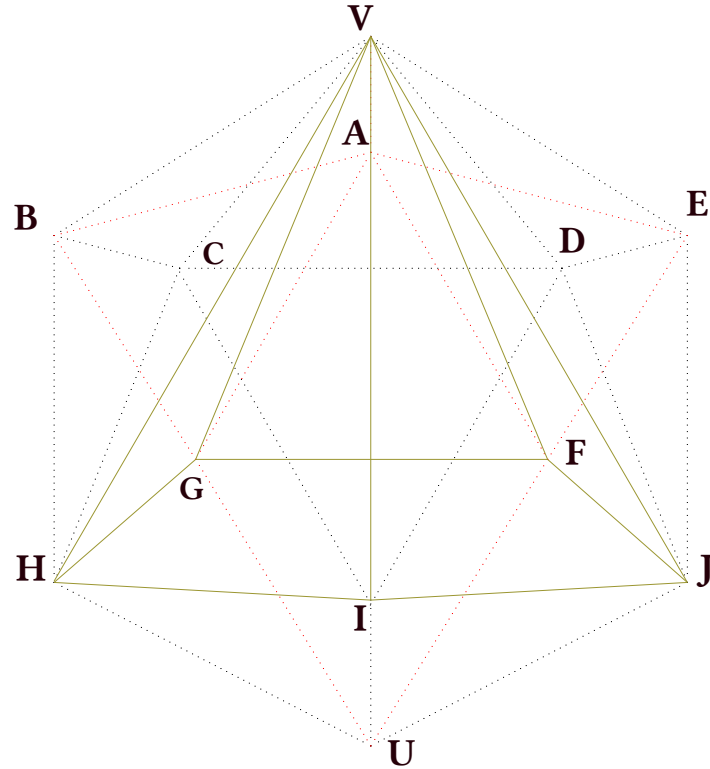


Figura 56: pirâmide pentagonal áurea
Fonte: o autor

Vamos mostrar, agora, que as diagonais homólogas a \overline{VU} são congruentes (Figura 57). Nos triângulos VJU e BUJ temos:

- $\overline{VJ} \cong \overline{BU} = l \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, (27) diagonais do pentágono regular
 - $\widehat{VJU} \cong \widehat{BUJ} = 108^\circ$
 - $\overline{JU} = l$, lado comum
- } \Rightarrow Os triângulos VJU e BUJ são congruentes por LAL, logo, $\overline{VU} \cong \overline{BU}$.

Analogamente,

$$\overline{VU} \cong \overline{BJ} \cong \overline{CF} \cong \overline{EH} \cong \overline{AI} \cong \overline{GD} = 2\varphi_1 \blacksquare \quad (92)$$

Agora, como α , γ e δ são paralelos e $\overline{VU} \perp \delta$, então, $\overline{VU} \perp \alpha$ e $\overline{VU} \perp \gamma$. Como M é projeção ortogonal de V sobre α , então $M \in \overline{VU}$. Analogamente, $N \in \overline{VU}$. Portanto, $\{V, M, N, O, U\} \subset \overline{VU}$. Notamos que a projeção ortogonal de V sobre o plano γ é o ponto O centro do pentágono $FGHIJ$. Assim construímos outra pirâmide pentagonal regular cuja aresta da base mede l e a aresta lateral mede $l(\sqrt{5}+1)/2$ (diagonal do pentágono regular de lado l). Analogamente para o vértice U e o pentágono $ABCDE$. (93)

Agora, de (92) N equidista dos vértices, em particular, equidista dos três vértices de uma face. Dessa forma, N e mais uma face formam uma pirâmide (Figura 57), na próxima secção vamos

calcular a altura dessa pirâmide e provar que ela é regular. Logo, são vinte pirâmides triangulares regulares. Além disso, é fácil ver que essas pirâmides são congruentes.

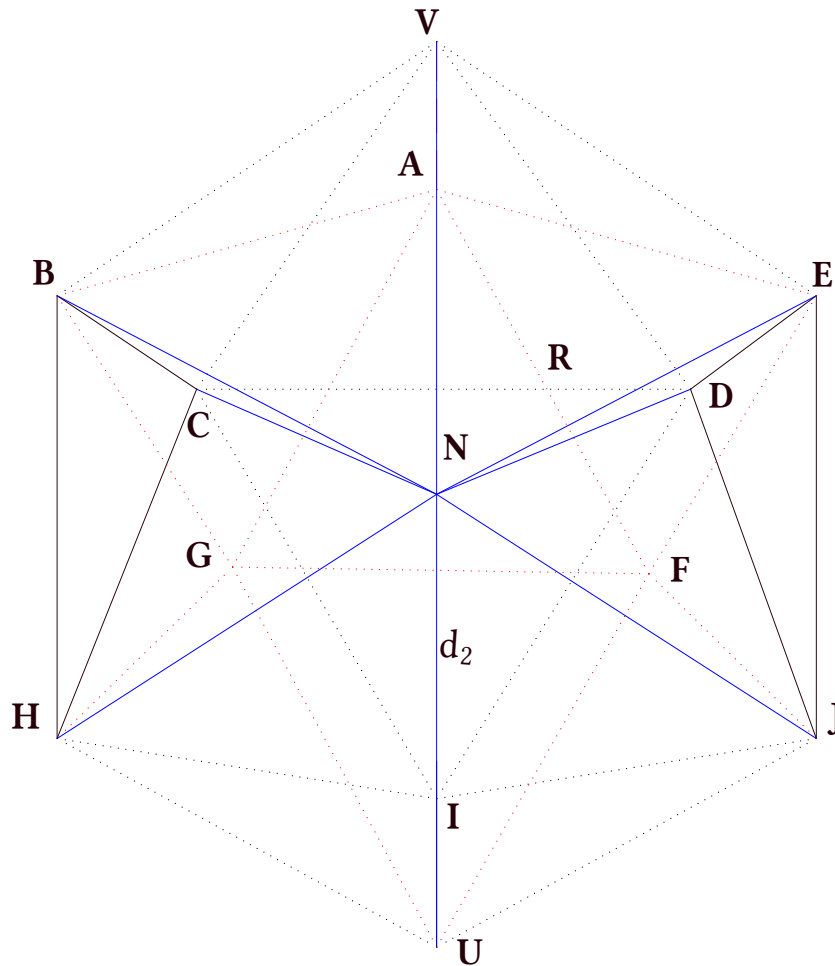


Figura 57: pirâmides triangulares regulares no icosaedro regular
Fonte: o autor

Da congruência dessas pirâmides temos que suas alturas também são congruentes então, a distância de N até uma face é constante, isto é:

$$d(N, F_{BCH}) = d(N, F_{DEJ}) = d(N, F_{VAB}) = \dots = d(N, F_{IJU}) = \varphi_3 \blacksquare \quad (94)$$

Assim, N equidista dos pontos médios das arestas, dos vértices e das faces do dodecaedro regular, portanto:

- N é o centro do icosaedro regular \blacksquare (95)

Dessa forma, uma diagonal maior é um eixo de simetria [14] do icosaedro regular, que contém o conjunto $\{V, M, N, O, U\}$.

Destacamos que de cada vértice do icosaedro regular parte uma diagonal maior. Consequentemente, para cada par de vértices “opostos em relação ao decágono regular” pode-se construir dois pentágonos regulares, quatro pirâmides pentagonais regulares (duas pentagonais

áureas), um antiprisma pentagonal, dois icosaedros reduzidos, um decágono regular e uma dupla pirâmide decagonal regular.

Uma análise simples revela a quantidade total desses objetos notáveis construídos a partir do icosaedro regular:

- Doze pentágonos regulares cujos lados medem l .
- Seis decágonos regulares cujos lados medem $l/2$.
- Doze pirâmides pentagonais regulares cujas arestas todas medem l .
- Doze pirâmides pentagonais áureas.
- Doze icosaedros reduzidos.
- Seis antiprismas pentagonais regulares.
- Seis duplas pirâmides decagonais regulares.

A Figura 58 representa a projeção ortogonal do icosaedro regular sobre o plano δ .

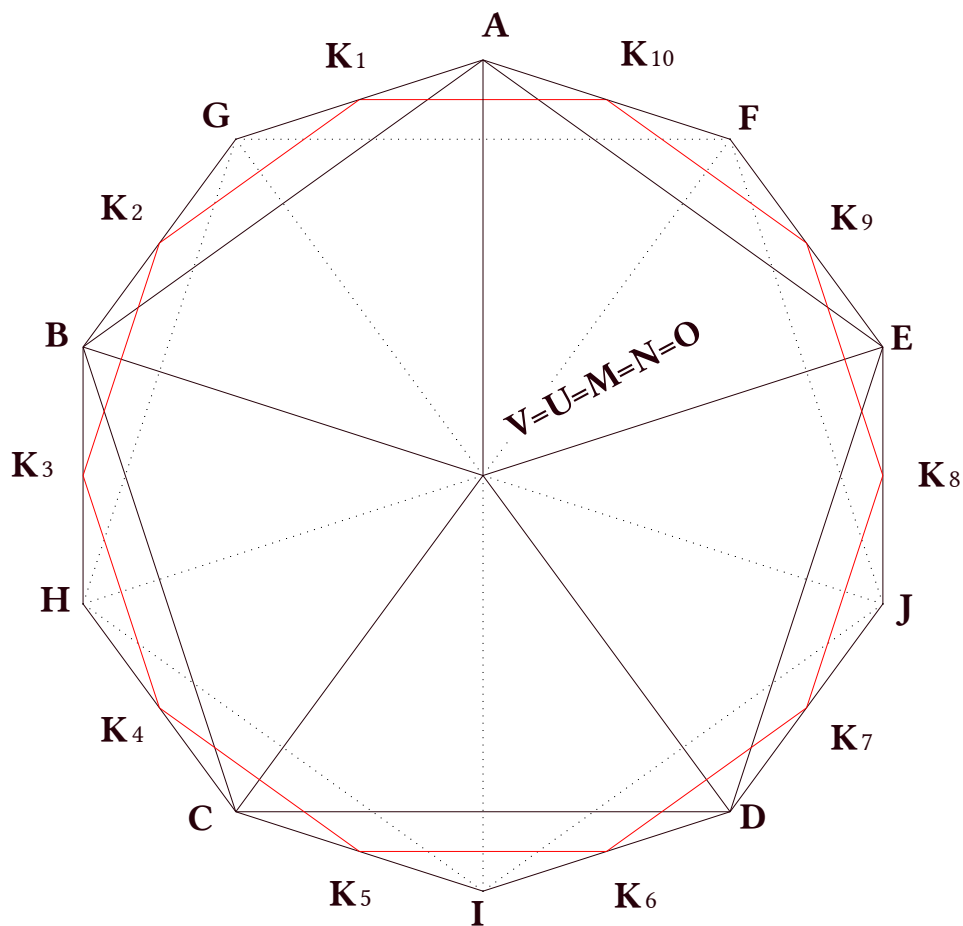


Figura 58: projeção ortogonal de pontos notáveis do icosaedro regular
Fonte: o autor

5.2.5.1.2 As diagonais do icosaedro regular

O icosaedro regular possui dois tipos de diagonais, d_1 e d_2 . A d_1 é a diagonal do pentágono regular (base das pirâmides formadas em cada vértice) e a d_2 é a diagonal maior, eixo de simetria.

Tomando o vértice V notamos que sobram seis vértices para compor as diagonais, pois, os vértices (da base da pirâmide cujo V é o vértice) A, B, C, D e E são consecutivos de V .

Cada um dos cinco vértices F, G, H, I e J (da base da pirâmide “oposta”) formam com V , uma diagonal de um pentágono regular, base de “outra” pirâmide regular. Assim, essas diagonais possuem medida:

$$d_1 = l \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) \approx \frac{162}{100} l \quad \blacksquare \quad (96)$$

De cada vértice partem cinco diagonais com medida d_1 . Como são doze vértices devemos multiplicar 12 por 5 para acharmos o dobro do número de diagonais com essa medida, pois, cada uma das diagonais são contadas duas vezes, $\overline{AF} = \overline{FA}$, logo, são 30 diagonais com medida d_1 .

Para encontrar d_2 vamos mostrar que existem retângulos formados por um par de arestas e um par de diagonais d_1 , onde d_2 é a diagonal desse retângulo. Sem perda de generalidade vamos tomar a Figura 59 como referência para facilitar a identificação dos objetos.

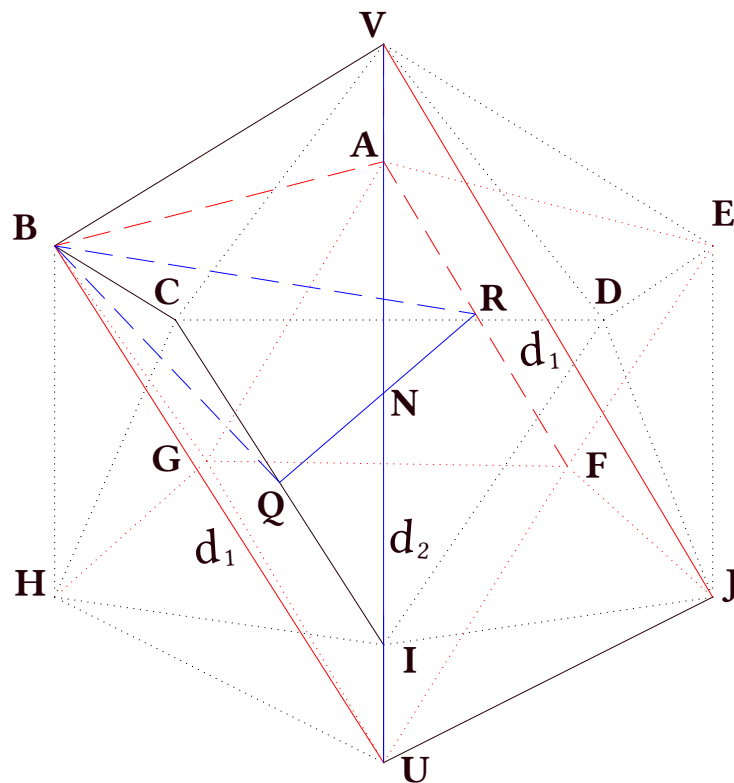


Figura 59: diagonais do icosaedro regular
Fonte: o autor

a) Vamos mostrar que o quadrilátero $VBUJ$ está contido no plano mediador de \overline{QR} . Nos triângulos BCQ e BAR temos:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \overline{BA} \cong \overline{BC} = l \\ \bullet \widehat{BAR} \cong \widehat{BCQ} = 108^\circ \\ \bullet \overline{AR} \cong \overline{CQ} = l/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Os triângulos } BCQ \text{ e } BAR \text{ são congruentes por LAL,} \\ \text{logo, } \overline{BQ} \cong \overline{BR}. \end{array}$$

Analogamente, $\overline{JQ} \cong \overline{JR} \cong \overline{UQ} \cong \overline{UR} \cong \overline{VQ} \cong \overline{VR} \cong \overline{BQ} \cong \overline{BR}$ logo, $VBUJ$ é plano ■

b) Vamos mostrar que $VBUJ$ é um retângulo. Como os lados opostos desse quadrilátero são congruentes (medidas: l, d_1, l, d_1), ele é um paralelogramo. Agora, como as diagonais \overline{VU} e \overline{BJ} são congruentes (92) então, o paralelogramo é inscritível. Em todo quadrilátero inscritível, os ângulos opostos são suplementares e em todo paralelogramo os ângulos opostos são congruentes [26], logo:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet (\widehat{DAG} \cong \widehat{GID} = \omega) \wedge (\widehat{DAG} + \widehat{GID} = 180^\circ) \Rightarrow (2\omega = 180^\circ) \Rightarrow (\omega = 90^\circ) \\ \bullet (\widehat{ADI} \cong \widehat{AGI} = \xi) \wedge (\widehat{ADI} + \widehat{AGI} = 180^\circ) \Rightarrow (2\xi = 180^\circ) \Rightarrow (\xi = 90^\circ) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{AGID é um} \\ \text{retângulo} \end{array} \quad \blacksquare \quad (97)$$

No triângulo retângulo VAU , \overline{VU} é hipotenusa logo, $\overline{VU} = d_2 > d_1$. Agora, vamos calcular d_2 . Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VAU e sabendo que as medidas são positivas, vem que:

$$\begin{aligned} \overline{VU}^2 &= \overline{VA}^2 + \overline{AU}^2 \Leftrightarrow d_2^2 = l^2 + d_1^2 \quad \Leftrightarrow \\ &\left(d_2^2 = l^2 + \left[l \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \right]^2 \right) \Leftrightarrow \left(d_2^2 = l^2 + l^2 \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} \right) \right) \Leftrightarrow \\ &\left(d_2^2 = l^2 + l^2 \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right] \right) \Leftrightarrow \left(d_2^2 = l^2 \left[1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right] \right) \Leftrightarrow \\ &d_2 = l \sqrt{\left[\frac{5+\sqrt{5}}{2} \right]} \approx \frac{190}{100} l \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (98)$$

5.2.5.1.3 Esferas associadas ao icosaedro regular

O lugar geométrico dos pontos, do espaço, que equidistam de um ponto é a superfície esférica ou esfera [24]. Uma esfera que contém os vértices de um poliedro é chamada esfera circunscrita ao poliedro. Se existe uma esfera que tangencia todas as faces de um poliedro essa esfera é

chamada esfera inscrita num poliedro. Por outro lado, quando existe uma esfera que tangencia todas as arestas de um poliedro, ela é chamada de meiasfera do poliedro [2].

O ponto N , ponto médio da diagonal d_2 , equidista das faces, dos pontos médios das arestas e dos vértices (95). Logo, N é respectivamente o centro das esferas: inscrita, meiasfera e circunscrita ao icosaedro regular. Vamos agora, determinar o raio dessas esferas em relação à aresta l .

a) Raio da esfera circunscrita: φ_1 .

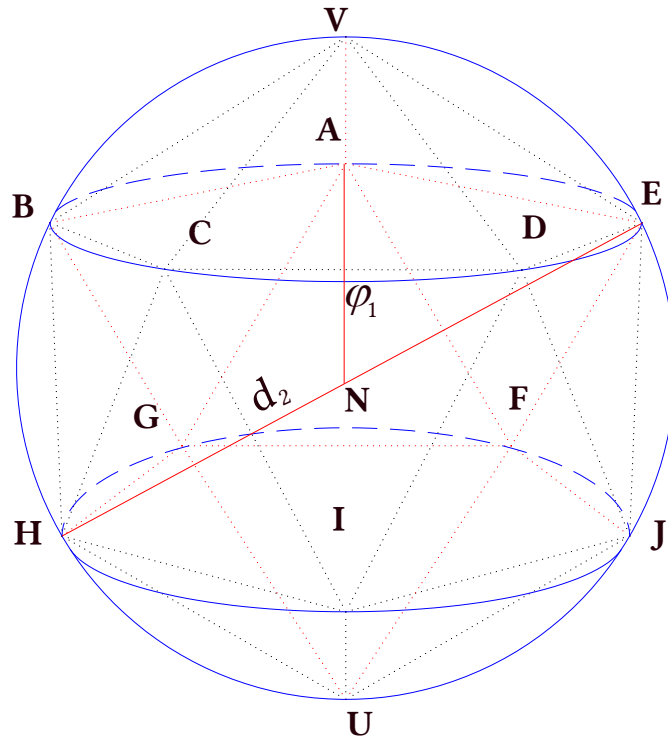


Figura 60: esfera circunscrita ao icosaedro regular
Fonte: o autor

A distância do ponto N até um vértice qualquer do icosaedro é $\overline{VU}/2$ (92), isto é, metade da diagonal d_2 . Essa medida é o raio da esfera circunscrita ao icosaedro regular (Figura 60), de (98), temos:

$$\left[\left(\varphi_1 = \frac{d_2}{2} \right) \cap \left(d_2 = l \sqrt{\left[\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right]} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\varphi_1 = \frac{l}{2} \sqrt{\left[\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right]} \approx \frac{95}{100} l \blacksquare \quad (99)$$

b) Raio da meiasfera: φ_2 .

O diâmetro da meiasfera é a distância entre duas arestas laterais opostas do antiprisma pentagonal (Figura 61). Como essas arestas formam um retângulo (97), essa distância é a medida do lado maior d_1 desse retângulo. Esse diâmetro também é o diâmetro da circunferência circunscrita ao decágono regular (89).

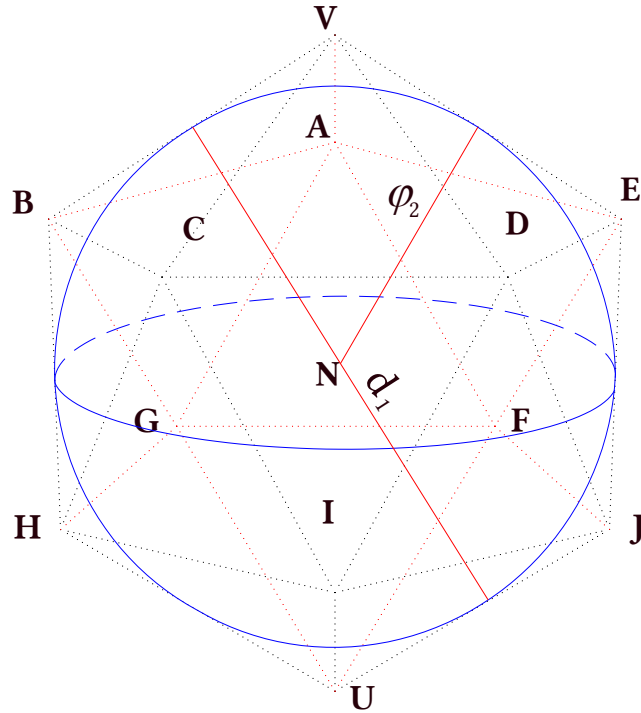


Figura 61: meiasfera do icosaedro regular
 Fonte: o autor

Assim, de (27) e de (89) vem que:

$$\left[\left(\varphi_2 = \frac{d_1}{2} \right) \cap \left(d_1 = l \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \right] \Rightarrow \varphi_2 = l \frac{\sqrt{5}+1}{4} \approx \frac{81}{100} l \blacksquare \quad (100)$$

c) Raio da esfera inscrita: φ_3 .

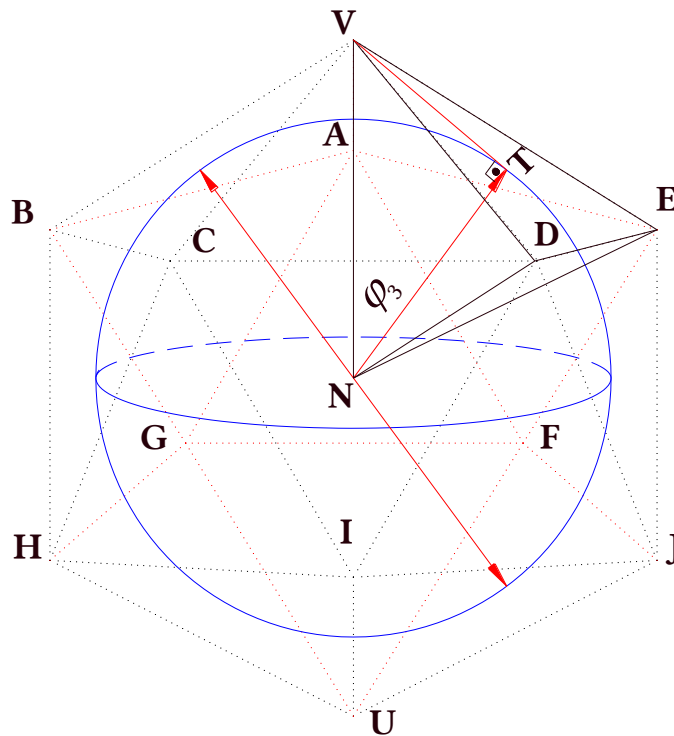


Figura 62: esfera inscrita no icosaedro regular
 Fonte: o autor

O raio da esfera inscrita (Figura 62) é a altura da pirâmide triangular regular cuja base é uma face e o vértice é o centro do icosaedro regular. Além disso, a medida das arestas laterais dessa pirâmide é igual ao raio da esfera circunscrita φ_1 .

Inicialmente vamos provar, sem perda de generalidade, que a projeção ortogonal de N sobre a face F_{VDE} , T , coincide com o centro dessa face. Nos triângulos NTD , NTE e NTV temos:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \overline{ND} \cong \overline{NE} \cong \overline{NV} = \varphi_1 \\ \bullet \overline{NT} \text{ é lado comum} \\ \bullet \widehat{NTD} \cong \widehat{NTE} \cong \widehat{NTV} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Os triângulos } NTD, NTE \text{ e } NTV \text{ são} \\ \text{congruentes pelo caso especial para triângulo} \\ \text{retângulo, logo, } \overline{TD} \cong \overline{TE} \cong \overline{TV} \blacksquare \end{array}$$

Assim, T é o centro da face. Além disso, provamos que a pirâmide $NDEV$ é regular. Vamos agora calcular a altura, a medida do segmento $\overline{NT} = \varphi_3$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo NTV e sabendo que $\varphi_3 > 0$ vem que:

$$\overline{NV}^2 = \overline{NT}^2 + \overline{TV}^2 \Leftrightarrow \overline{NT}^2 = \overline{NV}^2 - \overline{TV}^2. \quad (101)$$

No triângulo equilátero a distância do centro até um vértice é igual a dois terços da altura [26] então:

$$\overline{TV} = \frac{2}{3}l \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{TV}^2 = \frac{l^2}{3}. \quad (102)$$

Agora, substituindo (99) e (102) em (101) e sabendo que $\varphi_3 > 0$ vem que:

$$\begin{aligned} \left(\varphi_3^2 = \varphi_1^2 - \frac{l^2}{3} \right) &\Leftrightarrow \left(\varphi_3^2 = \left(\frac{l}{2} \sqrt{\left[\frac{5+\sqrt{5}}{2} \right]} \right)^2 - \frac{l^2}{3} \right) \Leftrightarrow \\ \varphi_3^2 &= \frac{l^2}{4} \left[\frac{5+\sqrt{5}}{2} \right] - \frac{l^2}{3} \Leftrightarrow \\ \varphi_3^2 &= l^2 \left[\frac{15+3\sqrt{5}-8}{24} \right] \Leftrightarrow \\ \varphi_3 &= \sqrt{l^2 \left[\frac{7+3\sqrt{5}}{24} \right]} \Leftrightarrow \\ \varphi_3 &= \frac{l}{2} \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} \Rightarrow \varphi \approx \frac{76}{100}l \blacksquare \end{aligned} \quad (103)$$

Encerramos nosso estudo do icosaedro regular calculando o ângulo diedro formado por duas faces adjacentes.

5.2.5.2 Cálculo do ângulo diédrico formado pelas faces do icosaedro regular

Lembramos que o ângulo diedro é a medida da secção reta, que pode ser construída tomando-se duas semirretas, cada uma em cada semiplano, com origens comuns e perpendiculares à origem do diedro (reta que é a intersecção dos semiplanos que formam os diedros).

Como as faces são triângulos equiláteros congruentes, então, o ponto médio de uma aresta é ponto médio do lado comum dos dois triângulos equiláteros que formam essas faces adjacentes. Assim, as medianas relativas a essa aresta lhe são perpendicular. Logo, essas duas alturas formam uma secção reta (Figura 63).

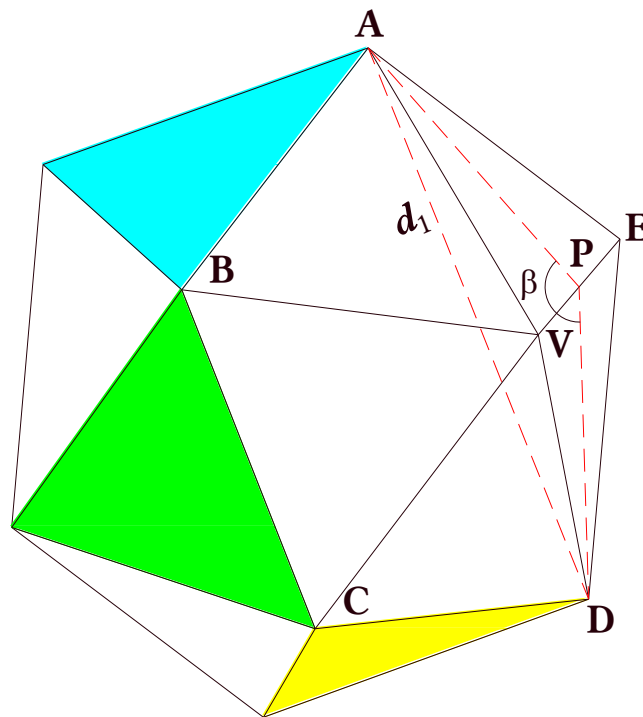


Figura 63: diedro no icosaedro regular
Fonte: o autor

Sejam as faces F_{AEV} e F_{DEV} do icosaedro regular representado na Figura 63, de aresta com medida l , e P o ponto médio da aresta \overline{EV} , comum a essas faces. Seja também β o ângulo entre as faces.

Antes de calcular a medida desse diedro vamos mostrar que todos os diedros homólogos são congruentes. Seja P_1 o ponto médio da aresta \overline{CV} , nos triângulos APD e BP_1D , temos:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \overline{AP} \cong \overline{BP_1} = l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \bullet \overline{DP} \cong \overline{DP_1} = l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \bullet \overline{AD} \cong \overline{BD} = l\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right], \text{ diagonal menor } d_1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Os triângulos } APD \text{ e } BP_1D \text{ são} \\ \text{congruentes por LLL, logo:} \\ \overline{APD} \cong \overline{BP_1D}. \end{array} \quad (98)$$

Calculando β . Aplicando a lei dos cossenos no triângulo APD , vem que:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PD}^2 - 2\overline{AP} \cdot \overline{PD} \cdot \cos \beta$$

Agora, substituindo os valores desses segmentos de reta e sabendo que β é um ângulo obtuso, vem que:

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) l \right]^2 &= \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} \right) \cos \beta \Leftrightarrow \\ \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} \right) l^2 &= 2 \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cos \beta \Leftrightarrow \\ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) l^2 &= 2 \left(\frac{3l^2}{4} \right) [1 - \cos \beta] \Leftrightarrow \\ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) l^2 &= \left(\frac{3l^2}{2} \right) [1 - \cos \beta] \Leftrightarrow \\ (3+\sqrt{5}) &= 3[1 - \cos \beta] \Leftrightarrow \\ \frac{(3+\sqrt{5})}{3} &= (1 - \cos \beta) \Leftrightarrow \\ \cos \beta &= 1 - \frac{(3+\sqrt{5})}{3} \Leftrightarrow \\ \cos \beta &= -\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \end{aligned} \quad (103)$$

$$\beta = \arccos \left(-\frac{\sqrt{5}}{3} \right) \approx 138,18968510422140193414208326942^\circ \blacksquare \quad (104)$$

Assim, a medida do ângulo diédrico formado por duas faces adjacentes de um icosaedro regular é aproximadamente $138,2^\circ$ ■

6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A contextualização e a transversalidade propostas pela legislação brasileira têm proporcionado a reflexão sobre os conteúdos curriculares e as metodologias pedagógicas aplicadas em todas as áreas do conhecimento, inclusive no ensino da Matemática.

Nesse sentido apresentamos uma proposta pedagógica que dinamiza o ensino da Geometria Espacial no Ensino Médio contextualizando os seus respectivos conteúdos utilizando sólidos geométricos segundo o método de Van Hiele (MVH) que propõe o ensino da geometria a partir da

visualização de objetos geométricos.

Nesse sentido na Secção 2 realizamos uma análise sucinta sobre documentos importantes da legislação nacional brasileira e de alguns autores que tratam do ensino e da história da Matemática, onde destacamos a perspectiva construtivista e o MVH. Além disso, destacamos a impressionante regularidade e as curiosidades históricas dos poliedros regulares como fator motivador para o estudo dos objetos geométricos.

Como procuramos mostrar, a Matemática da Educação Básica no Brasil tem sido cada vez mais pressionada por um sentimento de utilitarismo de forma que só é reconhecido, valorizado e considerado válido o conhecimento escolar o qual pode ser aplicado de forma direta pelo cidadão comum nas tarefas cotidianas. Concordamos que o conteúdo escolar vinculado à realidade social pode fortalecer o interesse pelo conhecimento, no entanto, nossa perspectiva de educação matemática vai além da aplicação prática e imediata. A Matemática é muito mais do que um conjunto de ferramentas para minimizar as dificuldades sociais num mundo competitivo e cada vez mais globalizado ou de um instrumento do desenvolvimento do “pensamento lógico-matemático”.

A Matemática e o desenvolvimento científico-tecnológico da humanidade não se separam. A escola tem o dever de ir além, de repassar o conhecimento acumulado por gerações e de incentivar a pesquisa e a curiosidade científica como real benefício para a sociedade. Dessa forma, entendemos que o MVH concilia a necessidade da contextualização com a exigência da abstração inerente ao estudo da Matemática.

A fim de delinear o emprego do MVH apresentamos o Quadro 1 com a proposta de emprego do MVH para ensino de polígonos [28] e a nossa proposta de adaptação do MVH para o ensino dos poliedros regulares (Quadro 2).

Reconhecemos que as curiosidades históricas e a aspecto geral dos poliedros regulares não são suficientes para justificar o estudo aprofundado desses sólidos. Porém, ressaltamos que o estudo das seções planas, dos ângulos diédricos, dos segmentos notáveis, das esferas relacionadas e dos poliedros derivados podem proporcionar uma percepção geométrica diferenciada do espaço físico.

O cerne de nosso trabalho foi o cálculo dos ângulos diedros formados por faces adjacentes dos poliedros regulares. Contudo, entendemos que era necessário fundamentar conceitos geométricos básicos assim como realizar uma sucinta introdução ao raciocínio postulacional e a Axiomática, pois os níveis mais elevados do MVH exigem abstração e o emprego do conceito de prova em Matemática.

Na Secção 3.1.1 mostramos que a criação de regras para o desenvolvimento do pensamento

abstrato foi um grande avanço para a humanidade. Os registros mais antigos dessas regras de abstração foram deixados pela antiga civilização grega que desenvolveu o raciocínio postulacional e a lógica bivalente conhecida como lógica aristotélica.

O raciocínio postulacional é empregado em todas as áreas do conhecimento humano. Partindo de objetos elementares e de relações entre esses objetos que devem ser consideradas (admitidas) verdadeiras, são construídas novas relações, conceitos e objetos. Dessa forma surge um conjunto de conceitos e afirmações que constituem o corpo de conhecimento de uma determinada área. Dentre as diversas contribuições gregas para o raciocínio postulacional destacamos a obra “Os Elementos” que inspirou e ainda inspira estudantes e pesquisadores.

Por outro lado, a lógica aristotélica complementou o raciocínio postulacional proporcionando as regras pelas quais um corpo de conhecimento se desenvolve.

Mostramos que durante a Idade Moderna a representação de sentenças lógicas foi aperfeiçoada pelo desenvolvimento de símbolos e respectivas regras de utilização desses símbolos. Essa lógica simbólica favoreceu a clareza e a concisão das sentenças, principalmente às relacionadas à Matemática.

Além disso, destacamos na Secção 3.1.2 a linguagem dos conjuntos que veio complementar o processo de aperfeiçoamento da escrita de sentenças matemáticas, onde a simplicidade figura como a principal virtude. Além disso, a linguagem dos conjuntos tornou mais clara a noção de elemento primitivo, porém o ensino da geometria tornou-se mais abstrato.

Ressaltamos novamente que adotamos o MVH como metodologia de ensino, pois ele procura fazer uma “ponte” entre a necessidade da visualização/contextualização com a abstração. Assim apresentamos os elementos primitivos utilizando informalmente, isto é, de forma não sistematizada, o MVH a partir da visualização de um bloco retangular, também designado paralelepípedo retângulo, para o entendimento dos conceitos de ponto, reta e plano.

Nas secções 3 e 4 procuramos apresentar os principais conceitos e resultados da geometria utilizados neste trabalho sem a preocupação de estar realizando as referidas provas as quais são encontradas nas referências. Nessas secções priorizamos ilustrações seguidas dos respectivos conceitos relacionados.

Na Secção 3.2 estudamos polígonos, circunferência, círculo e as principais ferramentas da trigonometria essenciais no desenvolvimento deste trabalho. Destacamos pontos e segmentos notáveis, regiões e figuras integrantes desses objetos, destacando os ângulos e as principais unidades de medida de comprimento de segmento de reta e de ângulos.

Neste trabalho necessitávamos relacionar segmentos notáveis do pentágono regular e isto nos motivou a realizar o estudo apresentado na Secção 3.2.2.3, onde demonstramos as relações entre o

lado do pentágono regular e as respectivas diagonais, alturas e raios das circunferências inscrita e circunscrita.

Ainda como consequência do estudo do pentágono regular, calculamos algebricamente o valor numérico do cosseno de 108° e mostramos que para cada diagonal existe um lado que lhe é paralelo, formando trapézios isósceles cujos lados não paralelos e a base menor são congruentes. Além disso, como a razão da base maior (diagonal do pentágono regular) para a base menor, ou qualquer lado não paralelo, é a razão áurea, sugerimos na Secção 5.2.4 que esse trapézio seja conhecido por trapézio áureo (à semelhança do retângulo áureo).

Na Secção 4 procuramos elencar os conceitos básicos da Geometria Espacial onde destacamos as principais posições relativas entre os elementos primitivos e as figuras planas.

O cálculo do diedro formado por duas faces consecutivas de um poliedro regular foi uma proposta pedagógica que concebemos quando ministrávamos Geometria Espacial no primeiro ano do Ensino Médio, em 2009. Na ocasião realizamos o cálculo do ângulo diédrico formado pelas faces do tetraedro regular e elaboramos um instrumento que solicitava os respectivos diedros dos demais poliedros regulares, além da construção de modelos espaciais dos cinco poliedros regulares a partir da respectiva planificação. Naquele instrumento apresentamos, como modelo de resolução, o cálculo do ângulo diedro formado pelas faces consecutivas do octaedro regular.

Na ocasião os alunos apresentaram um desempenho satisfatório onde cerca de 60% dos alunos conseguiram realizar 70% do trabalho sem auxílio do professor.

No entanto, o modelo de resolução daquele instrumento não incluía todo o rigor que ora apresentamos neste trabalho e que caracteriza o 5º Nível do MVH. Na ocasião, a percepção das secções planas fundamentais para o cálculo do diedro era intuitiva e não foi exibida e tampouco exigida a respectiva demonstração. Por outro lado, neste trabalho procuramos justificar formalmente todas as etapas apresentadas nos cálculos.

O trabalho conjunto com nosso orientador decorrente da necessidade de demonstrar todas as etapas recompensou-nos com a descoberta de outras secções planas e poliedros notáveis, assim como o cálculo de distâncias, segmentos e ângulos notáveis:

I. Figuras e secções planas notáveis:

- a) Quadrado formado por quatro arestas coplanares do octaedro regular (5.2.3).
- b) “Trapézio áureo” onde a base menor é um lado do pentágono regular e a base maior é uma diagonal que é paralela a esse lado, Figura 42 (5.2.4).
- c) Pentágono regular formado por diagonais das faces de um dodecaedro regular, Figura 45 (5.2.4.1).
- d) Pentágono regular formado por arestas de um icosaedro regular, Figura 46 (5.2.5).

- e) Decágono regular formado pela interseção de um plano perpendicular a uma diagonal maior do icosaedro regular, Figura 53 (5.2.5.1.1).
- f) Secções retas dos diedros formados por duas faces adjacentes dos poliedros regulares, utilizadas para o cálculo dos respectivos diedros.

II. Poliedros notáveis:

- a) Pirâmide quadrangular regular formada a partir do octaedro regular cuja base é o quadrado destacado na letra (b) de (I).
- b) Tronco de pirâmide pentagonal regular cujas bases são uma face do dodecaedro regular (base menor) e o pentágono regular destacado na letra (d) de (I).
- c) Pirâmide pentagonal regular com todas as arestas congruentes cujo vértice é um vértice do icosaedro regular e cujas arestas laterais são as arestas concorrentes nesse vértice, Figura 46 (5.2.5).
- d) Icosaedro diminuído formado a partir de um icosaedro regular quando lhe é retirado um vértice e as respectivas arestas que lhe são concorrentes e faces correspondentes, Figura 50 (5.2.5.1).
- e) Antiprisma pentagonal formado a partir de um icosaedro regular quando lhes são retirados dois vértices comuns a uma diagonal maior e as respectivas arestas que lhes são concorrentes e faces correspondentes, Figura 51 (5.2.5.1).
- f) Pirâmide decagonal regular cujo vértice é um vértice do icosaedro regular e cuja base é o respectivo decágono regular destacado na letra (e) de (I), Figura 55 (5.2.5.1.1).
- g) Dupla pirâmide decagonal regular, Figura 55 (5.2.5.1.1).
- h) Pirâmide pentagonal áurea cujo vértice é um vértice do icosaedro regular e cujas arestas laterais são as diagonais menores do icosaedro regular concorrentes nesse vértice, Figura 56 (5.2.5.1.1).
- i) Pirâmide triangular regular cuja base é uma face do icosaedro regular e cujo vértice é o centro do icosaedro regular, Figura 57 (5.2.5.1.1).

III. Cálculo de segmentos notáveis:

- a) Diagonal do pentágono regular a partir do lado (3.2.2.3).
- b) Altura do pentágono regular a partir do lado (3.2.2.3).
- c) Raio da circunferência inscrita no pentágono regular a partir do lado (3.2.2.3).
- d) Raio da circunferência circunscrita ao pentágono regular a partir do lado (3.2.2.3).
- e) Diagonal do octaedro regular a partir da aresta (5.2.3).
- f) Altura do “trapézio áureo” a partir da base menor (5.2.4).

- g) Altura do tronco de pirâmide pentagonal regular destacado na letra (b) de (II) (5.2.4).
- h) Diagonal do dodecaedro regular a partir da aresta (5.2.4.1)
- i) Altura da pirâmide pentagonal regular destacada na letra (c) de (II). (5.2.5).
- j) Altura da pirâmide triangular regular destacada na letra (i) de (II). (5.2.5.1.3).
- k) Altura do antiprisma pentagonal regular (5.2.5.1).
- l) Diagonal maior e diagonal menor do icosaedro regular (5.2.5.1.2).
- m) Raio da esfera circunscrita ao icosaedro regular (5.2.5.1).
- n) Raio da meiasfera do icosaedro regular (5.2.5.1).
- o) Raio da esfera inscrita no icosaedro regular (5.2.5.1).

IV. Cálculo de ângulos notáveis:

- a) Ângulo interno de um pentágono regular (3.2.2.2).
- b) Ângulos entre uma diagonal e os lados que lhe são concorrentes de um pentágono regular (3.2.2.2).
- c) Ângulo entre a altura e o lado concorrente que não lhe é perpendicular de um pentágono regular (3.2.2.2).
- d) Suplemento do diedro formado por uma face lateral e uma base do antiprisma pentagonal regular (3.2.2.3).
- e) Diedro formado por duas faces adjacentes em cada um dos cinco poliedros regulares (5.2).

Os cálculos e as demonstrações empregadas na determinação dos objetos listados em (I), (II), (III) e (IV) exigiram o emprego de provas lógicas formais onde foram aplicadas técnicas de prova direta, por redução a um absurdo e com a apresentação de um contraexemplo. Enunciamos e provamos resultados parciais como teoremas de determinação de um plano na Secção 4.1.1 e de pontos notáveis coplanares nas secções 5.2.3, 5.2.4 e 5.2.5.

As demonstrações das secções planas notáveis destacadas nas letras (a), (c), (d) e (e) de (I) demandaram horas de pesquisa e reflexão, esforço recompensado pela grata satisfação de elaborar provas inéditas de pontos coplanares pelo processo sintético [11]. Por outro lado a prova do paralelismo das bases do tronco destacado na letra (b) de (II) demandou a pesquisa de resultados parciais alternativos como a congruência de triedros.

Optamos pelo procedimento sintético por julgarmos que o procedimento analítico [11] demandaria o aprofundamento da Geometria Analítica Espacial num nível que não observamos em nossas referências para o Ensino Médio: [5], [10], [15], [17], [20] e [30].

Com este trabalho esperamos ter alcançado o objetivo de apresentar de forma clara e

detalhada novas possibilidades pedagógicas do emprego dos poliedros regulares seguindo a metodologia criada pelo casal Van Hiele.

Como mencionado anteriormente, este trabalho pretende motivar o estudo da geometria com os poliedros regulares. Dessa forma encorajamos o leitor a estudar:

- a) Secções paralelas, perpendiculares ou oblíquas às secções notáveis apresentadas neste trabalho.
- b) Sólidos notáveis construídos a partir dos elementos dos poliedros.
- c) Esferas e respectivos raios relacionados aos outros poliedros regulares, assim como as condições mínimas para inscrição e circunscrição de sólidos.
- d) Relações entre as diagonais e as arestas dos poliedros.
- e) Relações entre as arestas dos poliedros regulares inscritos e circunscritos numa mesma esfera.
- f) Construção de modelos espaciais dos poliedros construídos a partir dos poliedros regulares seccionados, como forma de melhor visualização das respectivas secções.
- g) Sistemas de coordenadas, cartesianas e cilíndricas, nos poliedros regulares: origem, coordenadas dos pontos notáveis, equações das retas suporte dos segmentos notáveis, ângulos e equações dos planos suporte dos segmentos notáveis.

Sugerimos também como fator motivador, ainda que não fizéssemos referência detalhada neste trabalho, a integração do estudo dos poliedros regulares em outros contextos [13], pois eles estão presentes tanto na natureza como na produção humana.

REFERÊNCIAS

- [1] Barbosa, J. L. M. *Geometria Hiperbólica*. 20º Colóquio Brasileiro de Matemática IMPA, Rio de Janeiro, 24 a 28 de julho de 1995.
- [2] Barison, M. B. *Poliedros Regulares*. Disponível em <http://www.uel.br/cce/mat/geometrica/php/pdf/gd_poli_reg.pdf> Acesso em: 08/06/2016.
- [3] Bini, E. *Timeu e Crítias ou A Atlântida*. Edipro, São Paulo, 2012.
- [4] Boyer, C. B. *História da Matemática*. Tradução Elza Gomide. Edgar Blucher, São Paulo, 1996.
- [5] Brasil Escola. *Matemática – Geometria Espacial – Corpos Redondos*. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/matematica/corpos-redondos.htm>> Acesso em: 12/12/2016.
- [6] Brasil. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei nº 9.394*: promulgada em de 20

- de dezembro de 1996. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf>> Acesso em: 12/07/2015.
- [7] Brasil. *Orientações curriculares para o Ensino Médio*. 2006. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_01_internet.pdf> Acesso em: 12/07/2015.
- [8] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, V. 2*. MEC / SEF, Brasília, 1997.
- [9] Costa, C. *Curso de Instrumentação para o Ensino da Matemática: Argumentação e Conceito de Prova em Matemática*. Centro de Estudos de Pessoal, Rio de Janeiro, 2007.
- [10] Costa, C. Figueiredo L.M.S. *Curso de Instrumentação para o Ensino da Matemática: Instrumentação para o Ensino da Geometria*. Centro de Estudos de Pessoal, Rio de Janeiro, 2007.
- [11] Courant, R. Robbins, H. *O que é a Matemática?* Tradução Adalberto da Silva Brito. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2000.
- [12] Coxeter, H. S. M. *Regular Polytopes*. Dover Publications, New York, 2014.
- [13] Cromwell, P. R. *Polyhedra*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [14] Delgado, J. Frensel, K. Crissaff, L. *Coleção PROFMAT: Geometria Analítica*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.
- [15] Dolce, O. Pompeo, J. N. *Fundamentos da Matemática Elementar 10: geometria espacial e métrica*. Atual Editora, São Paulo, 1980.
- [16] Eves, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução Higyno H. Domingues. Unicamp, Campinas, 2004.
- [17] Iezzi, G. *Fundamentos da Matemática Elementar 3: trigonometria*. Atual Editora, São Paulo, 2013.
- [18] __Instituto Paulo Freire / Programa de Formação Continuada. *Inter-Transdisciplinaridade e Transversalidade*. Disponível em <http://inclusao.com.br/projetos_textos_48.htm>. Acesso em 12/08/2015.
- [19] Ivic, I. *Lev Semionovich Vygotsky*. Recife: Fundação Joaquim Nabuco/Editora Massangana, 2010. 140p. Disponível em: <<http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me4685.pdf>>. Acesso em 03/08/2016.
- [20] Lima, E. L. Carvalho, P. C. P. Wagner, E. Morgado, A. C. *A Matemática no Ensino Médio: Volume 1*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1998.
- [21] __ LIVRO I DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/1parte.html> . Acesso em 19/12/2015.
- [22] __ LIVRO XI DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES. Disponível em:

<http://livros01.livrosgratis.com.br/be00001a.pdf> . Acesso em 29/06/2016.

- [23] Lobato, A. C. *Contextualização e transversalidade: conceitos em debate*. UFMG, Belo Horizonte, 2005.
- [24] Machado, A. S. *Matemática: temas e metas – Volume 4: áreas e volumes*. Atual Editora, São Paulo, 1988.
- [25] Martins, E. O. *O 5º Postulado de Euclides: a definição de uma geometria*. UFF, Niterói, 2009.
- [26] Morgado, A. C. Wagner, E. Jorge, M. *Geometria I*. Livraria Francisco Alves Editora S.A., Rio de Janeiro, 1974.
- [27] Morgado, A. C.. Wagner, E. Jorge, M. *Geometria II*. Livraria Francisco Alves Editora S.A., Rio de Janeiro, 1990.
- [28] Nasser, L. et al. *Geometria segundo a Teoria de Van Hiele – 3. ed.* Instituto de Matemática/ UFRJ - Projeto fundão, Rio de Janeiro, 2000.
- [29] Neto, A. C. M. *Coleção PROFMAT: Geometria*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.
- [30] Paiva, M. *Matemática: Volume Único*. Moderna, São Paulo, 2003.