PROFMAT

Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná

81531-990, Curitiba, PR
Brazil

Bases Intuitivas para a Formação dos Conceitos do Produto Escalar, do Produto Vetorial e do Produto Misto - parte II

por

Andressa Charlene Fernandes Teles

Orientador do Trabalho:

Prof. Carlos Henrique dos Santos

Preprint PROFMAT 01 (2018)

30 de Janeiro, 2018

Disponível via INTERNET:

http://www.mat.ufpr.br

Bases Intuitivas para a Formação dos Conceitos do Produto Escalar, do Produto Vetorial e do Produto Misto - parte II

Andressa Charlene Fernandes Teles

Departamento de Matemática - UFPR

019081-990, Curitiba, PR

Brazil

e-mail: andressamat@yahoo.com.br

1 de março de 2018

Resumo

Neste artigo propomos associar algumas propriedades algébricas com as propriedades geométricas, fazendo um resgate de conceitos que envolvem comprimento, área e volume na Educação Básica, relacionando-os com os conteúdos do curso de Licenciatura em Matemática. Busca-se também fornecer subsídios para a compreensão de conceitos abstratos da Álgebra, da Geometria Analítica e do Cálculo. Para isso, apresentamos conceitos intuitivos utilizando-os para desenvolver demonstrações que não aparecem com frequência na literatura usual. Destacamos como um dos resultados importantes, a área geométrica do paralelogramo determinado por vetores é o módulo do determinante da matriz formada pelas coordenadas desses vetores, baseada em propriedades de áreas equivalentes e, na sequência, apresentamos o produto vetorial. Diante disso, fornecemos embasamento para o professor sentir-se preparado em sua prática docente.

Palavras-Chave: Teorema de Pitágoras - Geometria Analítica - Produto Escalar - Produto Vetorial.

Introdução

O objetivo deste artigo é apresentar uma abordagem alternativa para o desenvolvimento de conceitos geométricos-algébricos relacionados com comprimento, área e volume estudados no Ensino Fundamental, Ensino Médio e nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Os fatos algébricos apareceram de maneira organizada inicialmente na obra *Os Elementos de Euclides* contemplando uma linguagem geométrica quando a Álgebra ainda era desconhecida.

A Álgebra e a Geometria estão relacionadas e ambas podem ser compreendidas com facilidade se os professores fizerem uma relação entre as propriedades algébricas associadas às correspondentes propriedades geométricas no Ensino Fundamental. Uma possibilidade é a utilização de construções geométricas com o objetivo de observar regularidades e adquirir conceitos algébricos.

Como pode-se verificar no exemplo a seguir: Cada segmento abaixo está associado a um número que expressa seu comprimento,

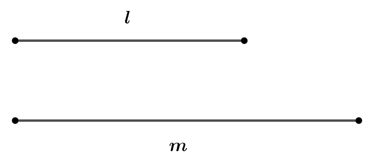

Figura 0.1: Segmentos com seus respectivos comprimentos

Assim, se temos um terceiro segmento cuja a medida s é igual a soma das medidas dos segmentos dados, como podemos associar o tamanho s como a junção dos tamanhos l e m. O esquema representado na figura 1.2 ilustra intuitivamente a propriedade.

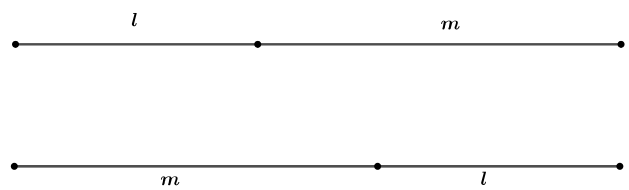

Figura 0.2: Propriedade Comutativa

na qual verifica-se a propriedade comutativa da adição, $l + m = m + l$.

Analogamente, essas correspondências entre as propriedades algébricas e geométricas podem ser feita no Ensino Médio dando subsídio para a abstração de conceitos estudados na graduação nas disciplinas de Cálculo, Geometria Analítica e Álgebra Linear, como se verá ao longo desse trabalho.

O estabelecimento de vínculos entre os conceitos abstratos, estudados na graduação, e os conceitos correspondentes abordados no Ensino Fundamental e Médio poderão preparar de maneira mais eficiente os professores desses níveis de ensino, possibilitando que lecionem com maior segurança. Esses vínculos também fornecerão meios para que os professores realizem a conexão de conteúdos. Muitas vezes o professor se vê obrigado a trabalhar livros didáticos do ínicio ao fim, tópico por tópico, ensinando conteúdos isoladamente sem fazer conexões com o que já foi apresentado.

Uma preocupação evidente no ensino de matemática na Educação Básica consiste em como ensinar com qualidade satisfatória todos os conteúdos propostos nas diretrizes curriculares, dispondo de tão pouco tempo, permitindo ainda que os alunos consigam estabelecer relações entre os conteúdos. Diante dessa situação questiona-se: Como fazer isso? A decisão é do professor que tem a responsabilidade de estruturar.

A motivação para a elaboração deste artigo surgiu na disciplina de Cálculo Integral no Mestrado Profissional de Matemática (PROFMAT) quando o professor Dr. Carlos Henrique dos Santos ministrou aulas buscando relacionar conceitos da Educação Básica com conceitos já estudados na graduação. A partir dessa abordagem, feita na disciplina de Cálculo, optou-se por fazer um trabalho de conclusão de curso com conteúdos da Geometria Analítica. Essa necessidade ocorreu devido à disciplina no mestrado ter sido uma repetição da graduação. Assim gostaríamos através desse artigo apresentar uma proposta de resgate de alguns conceitos algébricos a partir dos geométricos elementares para que o ensino não seja fragmentado.

A ideia é que o professor desenvolva a autonomia do aluno, incentivando-o a descobrir e perceber propriedades, fazendo com que este se aproprie dos conceitos, lembrando-os com clareza quando for necessário utilizá-los novamente na graduação ou até mesmo para o seu crescimento pessoal.

Na pimeira seção apresentamos os conceitos básicos de comprimento, de área e de volume no Ensino Fundamental. Na qual, fizemos uma análise em alguns livros didáticos para verificar qual é a forma que esses conceitos são apresentados. Na segunda seção, estruturamos esses conceitos no modo que são abordados em alguns livros didáticos de Ensino Médio.

Na terceira seção, as ideias intuitivas de comprimento, área e volume, serão citados com uma abordagem voltada para a Licenciatura em Matemática. Neste ambiente os números reais estão fomalizados. De acordo com Moise[10], as definições de comprimento, área e volume estão associadas aos números reais.

O comprimento $a = \|\mathbf{a}\|$ de um vetor $\mathbf{a}$, pode ser expresso através do produto escalar motivado pelo Teorema de Pitágoras, ou seja, $a = \sqrt{a^2} = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$. Tem-se ainda que, em um sistema de coordenadas, se $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$, então, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Como o produto escalar está associado a um número real, vale as propriedades algébricas, ou seja, o produto escalar é simétrico para quaisquer pares de vetores.

De acordo com M. Postnikov [12], produto escalar é uma aplicação que a cada par de vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ está associado o número $\mathbf{a}.\mathbf{b} = a.b.\cos\alpha$, sendo a o comprimento de $\mathbf{a}$ e b comprimento de $\mathbf{b}$ e α o ângulo formado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Neste trabalho a notação empregada para $\mathbf{a}.\mathbf{b} = a.b.\cos\alpha$ será $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a.b.\cos\alpha$.

Na quarta seção apresentamos a relação da área com o produto vetorial, na Geometria Euclidiana. O produto vetorial, depende de uma orientação no espaço, pois leva dois vetores, $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, ao vetor $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (b_1c_2 - b_2c_1, -(a_1c_2 - a_2c_1), a_1b_2 + a_2b_1)$. Nesse caso, o comprimento do vetor $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é a área geométrica do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A área deste paralelogramo é igual ao módulo do determinante da matriz formada pelas coordenadas desses vetores. Desse modo, pelas propriedades de determinantes, o produto vetorial é antissimétrico. As coordenadas do vetor $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ são as áreas algébricas das projeções ortogonais de um paralelogramo no espaço sobre os planos coordenados XY, YZ e XZ.

Por fim, conclui-se o presente artigo apresentando as considerações finais sobre o trabalho proposto.

1 Ensino Fundamental

Nas séries finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) são apresentados aos alunos os conceitos básicos relacionados a comprimento, área e volume, tendo como pressuposto o conjunto dos números reais sem explicitá-los formalmente.

Ao observar como a grandeza comprimento aparece nos livros didáticos analisados, [3], [5], [7], observamos que são citadas as unidades de medidas e é apresentada a palavra medir como uma comparação entre duas grandezas de mesma natureza, verificando quantas vezes uma contém a outra.

Para a abordagem dos conceitos primitivos da geometria como ponto, reta e plano, também segmento de reta e semirreta são feitas representações geométricas. Nesse mesmo contexto, conceituam-se ângulos, como sendo uma figura geométrica formada por duas semirretas de mesma origem.

As propriedades algébricas, da adição e da multiplicação, que são fundamentais, aparecem inicialmente nos livros analisados de 6º ano da seguinte forma:

- Propriedade Comutativa da Adição: $a + b = b + a$.
- Propriedade Associativa da Adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Elemento Neutro da Adição: $a + 0 = 0 + a = a$.
- Propriedade Comutativa da Multiplicação: $a \cdot b = b \cdot a$.
- Propriedade Associativa da Multiplicação: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- Elemento Neutro da Multiplicação: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação à Adição: $(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$

Nos autores consultado não há associação das propriedades algébricas com a interpretação geométrica para justificar algumas delas.

Nos livros analisados, quando trabalham-se sistemas de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas primeiramente são feitas representações de pontos no plano cartesiano, que são chamados de pares ordenados. Esses pontos são correspondentes às soluções de uma equação do primeiro grau com duas incógnitas que formam uma reta. Na sequência, define-se a solução de um sistema de duas equações como um par ordenado que satisfaz simultaneamente essas equações e conclui-se que, graficamente, a solução desse sistema é o ponto de intersecção das duas retas correspondentes às duas equações dadas inicialmente. Cada sistema de duas equações pode ser representado geometricamente por posições relativas entre duas retas no plano de acordo com o número de soluções encontradas.

Observou-se que nos estudos de funções os livros trazem a ideia intuitiva através de situações que relacionam duas grandezas variáveis. A definição de função afim é dada como: "toda função de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de formação pode ser indicada por $y = ax + b$, com a e b reais". Também no estudo da função afim são consolidados os conceitos de grandezas diretamente proporcionais, relacionando-as à função linear.

O ensino de proporcionalidade inicia-se no 7º ano fazendo uma relação de razão com a proporção, da seguinte maneira:

Se duas razões são iguais, elas formam uma proporção. Assim, se a razão entre os números a e b é igual a razão entre os número c e d, dizemos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ , \textit{é uma proporção.}}$$

Uma das propriedades de proporção, conhecida como propriedade fundamental das proporções é a seguinte:

Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow a.d = b.c$$

A continuidade dos estudos sobre proporcionalidade ocorre no 9º ano com conteúdos relacionados a geometria. São abordadas as razões entre segmentos de retas proporcionais e a proporcionalidade existente nas figuras semelhantes quando são reduzidas ou ampliadas.

Nesse mesmo contexto apresenta-se aos alunos uma importante propriedade:

Propriedade 1.1 (Propriedade de um Feixe de Paralelas). *Se um feixe de retas paralelas determina segmentos de reta congruentes sobre uma transversal, também determina segmentos de reta congruentes sobre qualquer outra reta transversal.*

Para a demonstração da propriedade citada, os autores dos livros didáticos analisados utilizam os "casos"de congruência de triângulos estudados no 8ºano. São apresentadas, basicamente ideias intuitivas de congruência, as figuras que têm a mesma forma e o mesmo tamanho e, na congruência de triângulo apresentam os 4 "casos":

1. LAL (lado, ângulo, lado)

2. LLL (lado, lado, lado)

3. ALA (ângulo, lado, ângulo)

4. LAA_o (lado, ângulo, ângulo oposto)

Quando os segmentos de reta determinados por um feixe de paralelas sobre uma transversal não são congruentes, temos o Teorema de Tales:

Teorema 1.2 (Teorema de Tales)**.** *Um feixe de retas paralelas determina, sobre duas transversais, segmentos de reta correspondentes proporcionais.*

Uma importante aplicação do Teorema de Tales é a definição das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Nos conceitos trigonométricos, os autores apresentam o significado da palavra trigonometria como a medida dos triângulos e a proporcionalidade nas medidas dos catetos é decorrente da semelhança dos triângulos retângulos.

Observando o triângulo retângulo ABC como mostra a figura, temos:

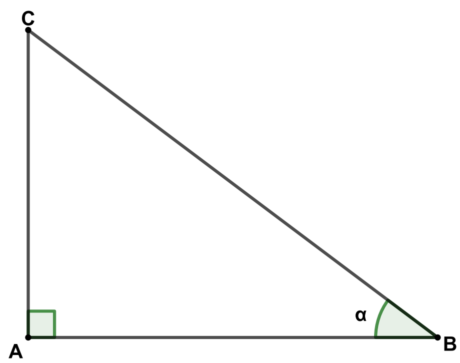

Figura 1.1: Triângulo Retângulo

$\overline{BC}$ é a hipotenusa

$\overline{AB}$ é o cateto adjacente ao ângulo α

$\overline{AC}$ é o cateto oposto ao ângulo α

Considerando a figura uma ideia de tangente do ângulo α é representada pela razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente do triângulo. Assim como a tangente do ângulo, o seno do ângulo α representa a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida da hipotenusa em qualquer triângulo retângulo. O cosseno da ângulo α representa a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo α e a medida da hipotenusa.

Com base nas relações trigonométricas do triângulo retângulo são demonstradas a lei dos senos e a lei dos cossenos.

Lei dos Senos 1.3. *Em qualquer triângulo ABC a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto a ele é constante, ou seja,* $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$, *sendo a, b e c medidas dos lados opostos a $\hat{A}$,$\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente.*

Considerando o triângulo ABC obtém-se:

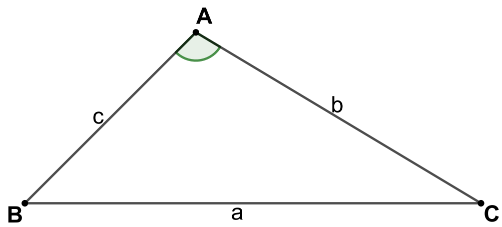

Figura 1.2: Lei dos Senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Lei dos Cossenos 1.4. *Em todo triângulo o quadrado da medida de um dos lados é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo oposto ao primeiro lado.*

Considerando o triângulo ABC, conforme figura (1.3), obtém-se:

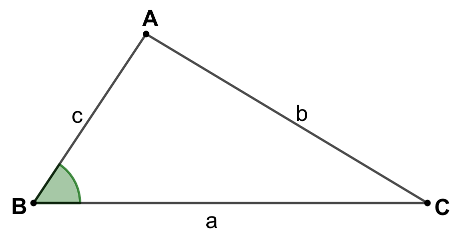

Figura 1.3: Lei dos Cossenos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

Em semelhança de figuras é abordada a semelhança de triângulos que é uma transformação geométrica que preserva a forma das figuras e, nesse caso, a congruência é um caso particular de semelhança.

Para definir semelhança considera-se o triângulo, $\Delta A'B'C'$, como uma ampliação do triângulo ΔABC.

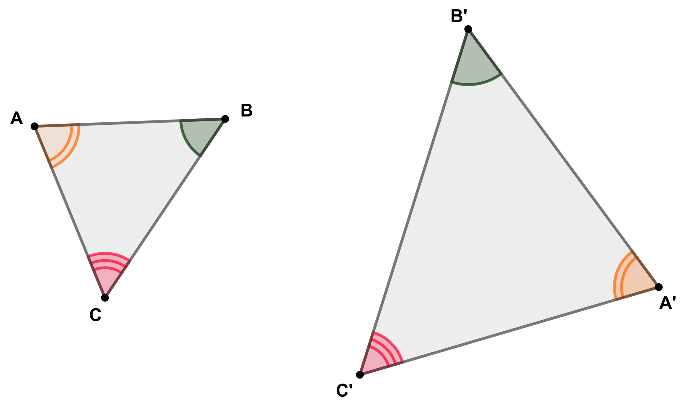

Figura 1.4: Semelhança de Triângulos

Desse modo, dois triângulos são semelhantes quando satisfazem ao mesmo tempo as duas condições: os lados correspondentes têm medidas proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

$$m(\hat{A}') = m(\hat{A})$$

$$m(\hat{B'}) = m(\hat{B})$$

$$m(\hat{C'}) = m(\hat{C})$$

$$\text{e } \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

Uma propriedade muito importante no estudo de semelhança é a propriedade fundamental da semelhança.

Propriedade 1.5 (Propriedade Fundamental da Semelhança)**.** *Se traçarmos um segmento de reta paralelo a qualquer um dos lados de um triângulo e ficar determinado outro triângulo, este será semelhante ao primeiro.*

Com certos movimentos ou transformações de figuras no plano é possível que suas formas ou seus tamanhos sejam conservados. A translação é um movimento que desloca uma figura no plano, de modo que a figura obtida seja congruente à original. A reflexão de uma figura em relação a uma reta gera uma figura simétrica e congruente à original. Outro movimento que transforma a figura em outra de mesma forma e mesma dimensão é a rotação em torno de um ponto.

Uma das transformações geométricas que não preserva a congruência é a homotetia. Os livros didáticos analisados definem homotetia como:

Definição 1.6. *A homotetia de centro O e razão K positiva é uma transformação que leva o ponto P (distinto de O) a um único ponto P' da semirreta OP, de modo que $OP' = K.OP$. Ao ponto P' damos o nome de imagem do ponto P segundo essa homotetia.*

Figura 1.5: Homotetia

A seguir serão apresentadas duas considerações importantes no estudos de área. Nos conceitos de semelhança os autores apresentam as razões entre perímetros e as razões entre áreas de polígonos semelhantes como:

1. Se dois polígonos ou duas regiões poligonais são semelhantes, a razão entre seus perímetros é igual à razão entre quaisquer dois lados correspondentes.

2. Se duas regiões poligonais são semelhantes, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão entre seus elementos correspondentes lineares (lado, perímetro, diagonais, etc.).

Já no 6º ano do Ensino Fundamental é explorado o conceito de área como a medida da superfície de uma figura. Os livros didáticos apresentam regiões planas como figuras que têm apenas duas dimensões: comprimento e largura. Desse modo, calcular a área de uma figura plana é medir a região ou a porção do plano ocupada por essa figura.

Considerando o quadrado de lado 1 centímetro e área de 1 centímetro quadrado como a unidade de medida de área, determinam-se as fórmulas de uma região retangular determinando quantas vezes a figura plana contém a unidade de área tomada. Se representarmos por l a medida do lado de uma região quadrada, a área é l^2. Utilizando a decomposição e a recomposição de figuras com o conceito de áreas equivalentes determinam-se as fórmulas da área do triângulo e a área dos quadriláteros notáveis.

As fórmulas para o cálculo da área de uma região triangular dependem dos dados conhecidos.

- A fórmula $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$ permite calcular a área de uma região triangular, conhecidas as medidas de um lado e da altura correspondente.

- A fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

  sendo $p = \frac{a+b+c}{2}$, a partir das medidas a, b e c dos lados.

- A área da região triangular pode ser calculada, se conhecermos as medidas de dois lados (por exemplo, a e b) e a medida do ângulo($\hat{C}$) formado por eles, pela seguinte fórmula:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \hat{C}}{2}$$

Segundo os autores [3] e [7], trabalham com as propriedades do paralelogramo conceituando da seguinte maneira:

Com duas retas paralelas r e s se tomarmos um segmento de reta $\overline{AB}$ sobre r, todas as regiões limitadas por paralelogramos $ABCD$ com C e D sobre a reta s terão a mesma área, como pode ser observado na figura abaixo:

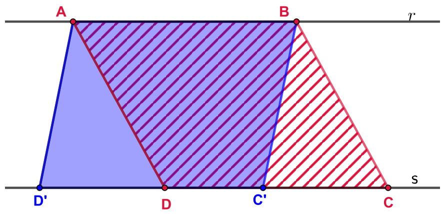

Figura 1.6: Área de Paralelogramos entre Retas Paralelas

A semelhança de triângulos é aplicada nas demonstrações de importantes relações métricas num triângulo retângulo. Questiona-se o fato de não utilizarem a propriedade das paralelas para demonstrar as relações métricas. Uma das relações importantes é o Teorema de Pitágoras que é apresentado no 8º ano e retomado no 9º ano com os estudos das outras relações.

Teorema 1.7 (Pitágoras)**.** *Se as medidas dos lados de um triângulo retângulo são a, b e c, em que a é a maior dos três, então:*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

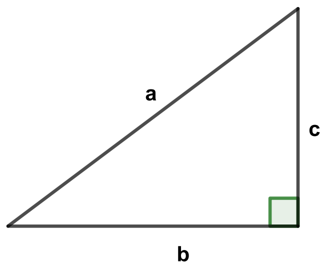

Figura 1.7: Teorema de Pitágoras

Nas demonstrações apresentadas pelos livros didáticos, verifica-se que para obter algumas relações métricas é utilizada a semelhança de triângulos. Depois, fundamentado nessas relações, demonstra-se o Teorema de Pitágoras.

Podemos observar esse resultado a seguir:

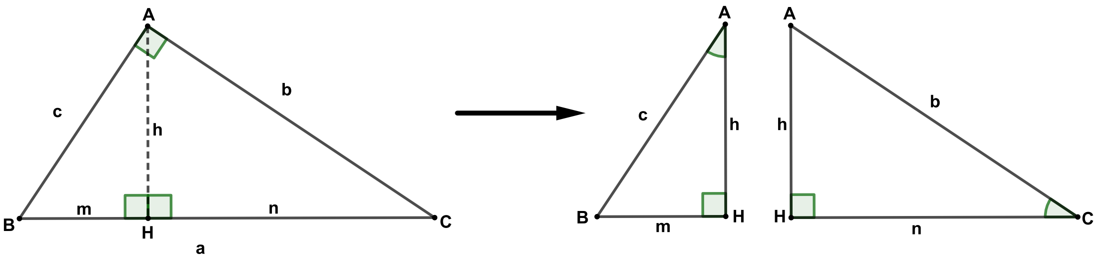

Figura 1.8: Relações Métricas

Nesta figura temos:

$\Delta ABC \sim \Delta HBA$

$\Delta ABC \sim \Delta HAC$ e também

$\Delta HBA \sim \Delta HAC$

Dessas três semelhanças tiramos, pela ordem:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}$$

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} = \frac{c}{b}$$

Assim sendo, temos as seguintes relações:

$$(1) a = m + n$$

$$(2) b^2 = a \cdot n \;\; \text{e} \;\; c^2 = a \cdot m$$

Adicionando os dois membros das igualdades em (2), obtemos:

$$b^2 + c^2 = a(n + m)$$

Como em (1), $a = n + m$, chegamos em:

$$(3)\ b^2 + c^2 = a^2$$

$$(4)\ h^2 = m \cdot n$$

$$(5)\ b.c = a \cdot h$$

Por fim, temos o conceito de volume. Os alunos já têm o conhecimento de figuras tridimensionais: comprimento, largura e altura. O volume expressa quanto espaço ocupa uma figura espacial. Os autores analisados definem poliedros como sólidos geométricos que possuem apenas faces planas. Os corpos redondos são aqueles que apresentam partes não planas, ou seja, arredondadas e que rolam quando colocados em uma superfície plana. Ainda apresentam outros sólidos geométricos, os que não possuem todas as faces planas e não rolam. Porém, os sólidos de interesse são os prismas e as pirâmides.

Para o cálculo de volume de qualquer paralelepípedo é estabelecido uma unidade de volume conveniente e, geralmente, as unidades-padrão são baseadas em cubos. Considerando um cubo cuja aresta medem 1 centímetro e seu volume é 1 centímetro cúbico. Uma forma de determinar a medida do volume de um paralelepípedo é verificar quantos cubinhos são necessários para construí-lo.

Assim a fórmula da medida do volume de um paralelepípedo de dimensões a, b e c é:

$$V = a.b.c$$

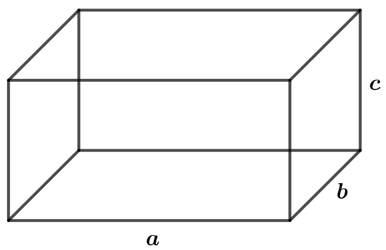

Figura 1.9: Bloco Retangular

O cubo é um caso particular do paralelepípedo, com todas as arestas de mesma medida, portanto a fórmula do volume é:

$$V = a.a.a$$
$$V = a^3$$

2 Ensino Médio

Os conceitos de comprimento, área e volume são estendidos no Ensino Médio. De acordo com os livros didáticos,[4], [6], [13], a ideia de comprimento aparece novamente na proporcionalidade, onde trabalham-se os conceitos de razões trigonométricas, mais especificamente com a lei do seno e a lei do cosseno.

Com a retomada da proporcionalidade nas medidas dos lados homólogos de triângulos semelhantes, definem-se seno, cosseno e tangente por meio da semelhança de triângulos, provando que as razões trigonométricas dependem exclusivamente do ângulo.

Nesse momento, apresentam propriedades das relações entre as razões trigonométricas.

1. A relação fundamental do triângulo retângulo, derivada do Teorema de Pitágoras:

   $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $0° < \alpha < 90°$

2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$, $0° < \alpha < 90°$

3. Se dois ângulos, α e β, são complementares ($\alpha + \beta = 90$), então $\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$ (o seno de um ângulo é igual ao cosseno do ângulo complementar, e vice versa).

Na sequência são apresentadas a lei dos senos e a lei dos cossenos. A lei dos senos é enunciada como:

Em qualquer triângulo ABC, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, ou seja:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

A lei dos cossenos enuncia-se como:

Em qualquer triângulo ABC, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam, ou seja:

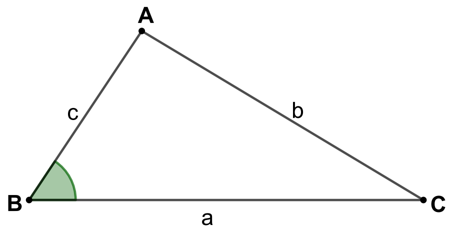

Figura 2.1: Lei dos Cossenos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

Assim como a lei dos senos, a lei dos cossenos é muito importante, enquanto a lei dos senos relaciona dois lados e seus respectivos ângulos opostos, a lei dos cossenos relaciona a medida dos três lados e um ângulo do triângulo.

O conceito de função afim é uma generalização do conceito de proporcionalidade direta. Na sequência dos estudos de função afim, também é estudada a equação da reta, que não é algo novo para o aluno, pois esse conteúdo já foi abordado no 8º ano do Ensino Fundamental, quando foram estudados os sistemas de equações. No Ensino Médio é realizada uma relação com os coeficientes da função afim. Assim,

Seja uma função afim $f(x) = ax+b$, logo $y = ax+b$ é a equação da reta dada pela função.

O coeficiente angular da reta que na função afim é a taxa de variação, pode ser obtida por uma uma aplicação do Teorema de Tales que é dada por $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

A relação entre o coeficiente angular com o ângulo de inclinação α que o eixo OX forma com a reta é:

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Assim, temos a equação da reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e a o coeficiente angular:

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow y - y_0 = a.(x - x_0) \rightarrow y = y_0 + a.(x - x_0)$$

Com a aplicação do Teorema de Pitágoras, obtém-se a fórmula para calcular a distância entre 2 pontos conhecendo suas coordenadas e, ainda define-se a distância entre 2 pontos como a medida do segmento de reta com extremidade nesses pontos. Além disso, conforme os livros consultados, no estudo de Geometria Analítica do Ensino Médio, uma possível abordagem na condição de alinhamento de três pontos, é por meio do teorema de Tales, que dados os 3 pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ a igualdade, $x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2 = 0$. A expressão $x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2$ pode ser considerada o determinante de uma matriz de ordem 3. Por exemplo, a matriz $M = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$.

Logo:

$$\det M = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sendo assim, é possível calcular a área a de uma região triangular Δ, indicada por $a = a(\Delta)$, quando os 3 pontos não são colineares aplicando o determinante acima através da seguinte fórmula, $a(\Delta) = \frac{1}{2}.|\det M|$

Segundo Giovanni [6], defini-se determinantes da seguinte maneira:

O determinante é uma correspondência que a cada matriz quadrada associa um número real.

Se $A = [a]$ o $\det A = a$, se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ o $\det A = ad - bc$. Se A é de ordem 3 aplica-se a regra de Sarrus.

Para o cálculo do determinante faz-se a seguinte apresentação:

Analise a solução do seguinte sistema 2x2,

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª por a' e a 2ª por a obtemos

$$\begin{cases} aa'x + ba'y = ca' \\ aa'x + ab'y = ac' \end{cases}$$

Subtraindo a primeira pela segunda equação, temos:

$$(a'b - ab')y = a'c - ac'$$

Para que exista um único valor de y que satisfaça essa igualdade é necessário que $(a'b - ab')$ não seja nulo. Assim, existirá um único valor de x quando existe um único valor de y, e o sistema será determinado.

Portanto, os valores $(a'b - ab')$ e $a'c - ac'$ determinan o que ocorre com o sistema em termos de solução:

$$\begin{cases} (a)a'b - ab' \neq 0 \\ (b)a'b - ab' = 0 \text{ e } a'c - ac' \neq 0 \\ (c)a'b - ab' = 0 \text{ e } a'c - ac' = 0 \end{cases}$$

De forma análoga, obtém-se o determinante da matriz de ordem 3, e que pode ser calculado de forma prática aplicando a regra de Sarrus.

Tão importante quanto o determinante, são as suas propriedades que tem aplicação no estudo de vetores. De acordo com Giovanni [6], as propriedades dos determinante são:

1^a*Propriedade* - Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz quadrada M forem iguais a zero, seu determinante será nulo, isto é, $\det M = 0$.

2^a*Propriedade* - Se os elementos correspondentes de duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada M forem iguais, seu determinante será nulo, isto é, $\det M = 0$.

3^a*Propriedade* - Se uma matriz quadrada M possui duas linhas (ou duas colunas) proporcionais, seu determinante será nulo, isto é, $\det M = 0$.

4^a*Propriedade* - Se todos os elementos de uma linha (ou uma coluna) de uma matriz quadrada são multiplicados por um mesmo número real k, então seu determinante fica multiplicado por k.

5^a*Propriedade* - Se uma matriz quadrada M de ordem n é multiplicada por um número real k, o seu determinante fica multiplicado por k^n, isto é:
$\det(kM_n) = k^n. \det M_n$

6^a*Propriedade* - O determinante de uma matriz quadrada M é igual ao determinante da sua transposta M_t, isto é, $\det M = \det M_t$.

7^a*Propriedade* - Se trocarmos de posição duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada, o determinante da nova matriz obtida é o oposto do determinante da matriz anterior.

8^a*Propriedade* - Seja A uma matriz quadrada. Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou coluna) pelo mesmo número e somarmos os resultados aos elementos correspondentes de outra linha (ou coluna), formando a matriz B, então $\det A = \det B$ (teorema de Jacobi).

Nos livros didáticos analisados mostram aplicações de matrizes em casos de transformações geométricas: rotação, reflexão, translação e a escala, que é uma transformação que não preserva distâncias.

O cálculo de áreas de figuras planas é retomado no Ensino Médio como uma base para os estudos dos sólidos geométricos.

A fórmula $A = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \hat{C}}{2}$ que aparece no Ensino Fundamental, pode ser demonstrada no Ensino Médio como:

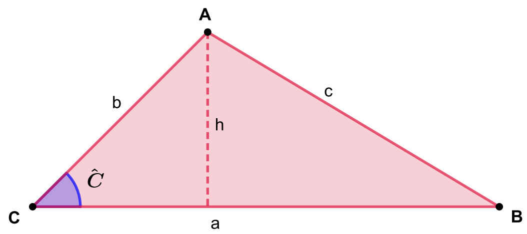

Figura 2.2: Fórmula da área de uma região triangular

Como a área do triângulo é,

$$A = \frac{a \cdot h}{2}$$

e pelas razões trigonométricas temos que $\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{h}{b} \Longrightarrow h = b \cdot \operatorname{sen} \hat{C}$

Assim,

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \hat{C}}{2}$$

O estudo de volume de sólidos é abordado no Ensino Fundamental e retomado de forma mais abrangente no Ensino Médio. Em geral, iniciam-se pelo conceito de poliedros, dizendo que cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de polígonos, chamados faces, e a região do espaço limitada por eles. Na sequência, apresentam definição de prismas e retomam a ideia intuitiva de volume do paralelepípedo retângulo, demonstrando que o volume é dado pelo produto das suas dimensões.

É retomado o conceito de sólidos semelhantes e a razão entre seus volumes. Enunciam-se o princípio de Cavalieri:

Teorema 2.1. *Se dois ou mais sólidos estão apoiados sobre um plano α, de forma que todo plano paralelo a α determine nesses sólidos secções planas de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.*

No cálculo de volume de um prisma qualquer, aplica-se o princípio de Cavalieri, concluindo que o volume é obtido multiplicando a área da base pela altura. E por fim, outro sólido do nosso interesse, que os alunos já conhecem desde o Ensino Fundamental, é a pirâmide. Aplicando o princípio de Cavalieri e a razão entre áreas de polígonos semelhantes, já estudado anteriormente, concluem que:
Pirâmides com áreas das bases iguais e com a mesma altura têm volumes iguais.

Para o cálculo do volume, os autores iniciam com a decomposição de um prisma triangular em 3 pirâmides de bases congruentes e alturas iguais, determinando a fórmula para o cálculo do volume da pirâmide triangular como a terça parte do volume do prisma. A partir dessa conclusão e do princípio de Cavalieri, determinam o volume de uma pirâmide qualquer como o volume da pirâmide triangular, ou seja, um terço do produto da área da base pela altura.

3 Abordagem de conceitos para a Licenciatura em Matemática

Nessa seção vamos apresentar alguns conceitos e propriedades, conforme Moise [10] e [11], que já apareceram anteriormente no Ensino Fundamental e Ensino Médio. Pensando na formação de docentes, serão introduzidos alguns conteúdos básicos, buscando resgatar conceitos para relacioná-los com o que é estudado em um curso de Geometria Analítica fazendo uma conexão para dar significado quando aplicados em outros conteúdos.

Nesse momento daremos uma importância maior ao conjunto dos números reais, abordando-o de maneira mais formal. Os números racionais não preenchem todos os espaços da reta numérica. Existem muitos números que não podem ser expressos como razões de inteiros, se inserirmos esses números de modo que todo ponto da reta esteja associado a um número, então temos o conjunto completo dos números reais, representado por $\mathbb{R}$. Suas propriedades fundamentais, definidas para a adição e multiplicação, são as seguintes:

- A adição é comutativa, $a + b = b + a$, para quaisquer a e $b \in \mathbb{R}$.
- A adição é associativa, $(a + b) + c = a + (b + c)$, para quaisquer a, b, $c \in \mathbb{R}$.
- Existe um único elemento $0 \in \mathbb{R}$, chamado elemento neutro da adição, tal que $a + 0 = a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.
- A cada $a \in \mathbb{R}$ corresponde um único $-a \in \mathbb{R}$, chamado inverso do número a, tal que $a + (-a) = 0$.
- A multiplicação é comutativa, $a \cdot b = b \cdot a$, para quaisquer a e $b \in \mathbb{R}$.
- A multiplicação é associativa, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, para quaisquer a, b, $c \in \mathbb{R}$.
- Existe um único elemento $1 \in \mathbb{R}$, chamado elemento neutro da multiplicação, tal que $a \cdot 1 = a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.
- A cada $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, corresponde um único elemento $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.
- A multiplicação é distributiva com relação à adição, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, para quaisquer a, b, $c \in \mathbb{R}$.

O conjunto dos números reais tem uma relação de ordem segundo a qual é possivel dizer que a é menor que b, $a < b$ quando a está a esquerda de b, com a, $b \in \mathbb{R}$.

3.1 Comprimento

As ideias de ponto, reta, plano e espaço sugerem objetos físicos, portanto, não definimos. Tratamos esses termos fundamentais como conceitos primitivos básicos. Considerando retas e planos formados por conjuntos de pontos e o conjunto de todos os pontos é chamado espaço. Desta forma, seguimos com alguns postulados e definições, conforme Moise [10].

Postulado 3.1. *A cada par de pontos distintos corresponde um único número real positivo.*

Definição 3.2 (Distância). *A distância entre dois pontos é dada por um único número real positivo. Se os pontos são denotados por A e B, a distância será representada por AB.*

Postulado 3.3. *Os pontos pertencentes a uma reta podem ser colocados em correspondência com os números reais de forma que:*

1. *A cada ponto corresponde um único número real.*
2. *Cada número real corresponde um único ponto da reta.*
3. *A distância entre quaisquer dois pontos é o módulo da diferença desses números.*
4. *Dados dois pontos quaisquer há exatamente uma reta que os contém.*

Definição 3.4. *Dados três pontos distintos A, B e C numa mesma reta, B está entre A e C se:*

1. *A, B e C são pontos distintos.*
2. $AB + BC = AC$
3. *Se A, B e C não estão alinhados, $AC < AB + AC$*

Postulado 3.5 (Postulado da Reta). *Para cada par de pontos distintos existe exatamente uma reta que os contém.*

Definição 3.6 (Segmento de reta). *O segmento é determinado por um par de pontos A e B, que são chamados de extremidade de $\overline{AB}$, juntamente com todos os pontos que estão entre A e B.*

Definição 3.7. *O comprimento do segmento $\overline{AB}$ é o número AB.*

Definição 3.8 (Semirreta). *Sejam A e B pontos distintos de uma reta r. A semirreta $\overrightarrow{AB}$ de origem A passando por B é a reunião do segmento $\overline{AB}$ com todo os pontos C para os quais B está entre A e C.*

Definição 3.9. *O conjunto de todos os pontos é chamado espaço.*

Postulado 3.10 (Postulado do Plano). *Três pontos quaisquer pertencem pelo menos a um plano e três pontos não colineares quaisquer pertencem a exatamente um plano.*

Definição 3.11. *Um conjunto A é chamado convexo se, para todo par de pontos P e Q do conjunto, o segmento $\overline{PQ}$ está inteiramente contido no conjunto.*

Definição 3.12. *Dados uma reta l e um ponto E que a contém, os pontos do plano que não pertencem a reta formam dois conjuntos tais que:*
1. Cada um dos conjuntos é convexo.
2. Se P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então o segmento $\overline{PQ}$ intercepta a reta.
Os dois conjuntos são chamados semiplanos, ou lados de l, e l é chamada origem de cada um deles.

Definição 3.13. *Dados dois conjuntos, que são pontos do espaço que não pertencem a um plano dado, tais que:*
1. Cada um dos conjuntos é convexo.
2. Se P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então o segmento $\overline{PQ}$ intercepta o plano.
Esses conjuntos são chamados semi-espaços e o plano dado é chamado de origem de cada um deles.

Definição 3.14 (Ângulos)**.** *Se duas semirretas têm a mesma origem, mas não estão contidas na mesma reta, a sua reunião é um ângulo. As duas semirretas são chamadas de lados e a origem comum delas é chamada de vértice do ângulo.*

Definição 3.15 (Região Angular)**.** *Sejam A, B e C três pontos não colineares pertencentes ao plano. A reta que passa por A e B divide o plano em dois semiplanos e um deles contém C. A reta que passa por A e C divide o plano em dois semiplanos e um deles contém B. Definimos como região angular a interseção dos dois semiplanos. Um deles é o lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que contém B e o outro é o lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que contém C.*

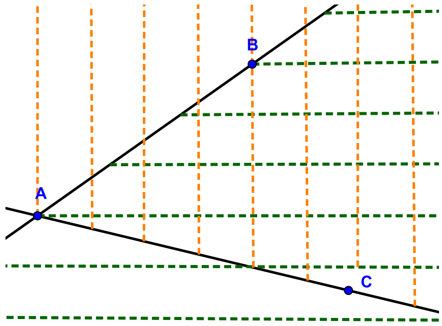

Figura 3.1: Região Angular

3.2 Áreas

Nesse momento vamos apresentar alguns conceitos, postulados e propriedades de áreas, que também já vistos no Ensino Fundamental e Ensino Médio, porém, agora são voltadas para um curso de Licenciatura em Matemática.

Definição 3.16 (Triângulo)**.** *Dados três pontos não colineares a reunião dos segmentos determinados por esse pontos é o triângulo.*

Definição 3.17 (Região Triangular)**.** *É a reunião de um triângulo e a interseção das três regiões angulares.*

Definição 3.18 (Região Poligonal)**.** *Uma região poligonal é uma figura plana formada pela justaposição de um número finito de regiões triangulares, em um plano, de tal modo que, se duas se interseptam, a interseção é um ponto ou um segmento.*

Daqui em diante, nesse artigo, quando mencionarmos uma região, sempre estaremos nos referindo a uma região poligonal.

Postulado 3.19 (Postulado da Área)**.** *A cada região Rdo plano corresponde um único número real positivo $a(R)$, esse número é a área.*

Definição 3.20. *A área de uma região é definida por um único número real que a corresponde*

Postulado 3.21. *Se dois triângulos são congruentes as regiões por eles determinadas terão a mesma área da região.*

Postulado 3.22. *Se A pode ser particionada em duas regiões A_1 e A_2, tais que A_1 e A_2 se interceptam, no máximo, em um número finito de segmentos e pontos, a área da região A é a soma da área da região A_1 com a área da região A_2.*

Postulado 3.23 (Postulado da Unidade). *Se F é uma região quadrada com comprimento l do seu lado, então a área de F é igual a l^2.*

Teorema 3.24 (Área do Retângulo). *A área de um retângulo é o produto de sua base pela sua altura.*

Demonstração. Vamos provar que se um retângulo S tem lados b e h então a sua área é $a(S) = bh$.

Considere um quadrado de lado $b + h$ como mostra a figura 3.2.

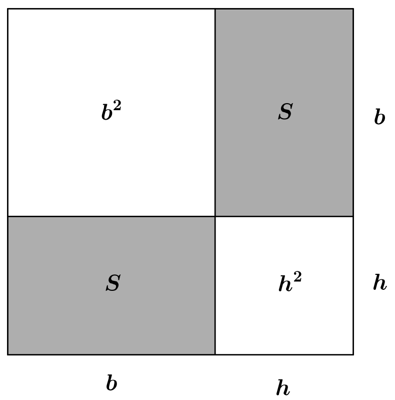

Figura 3.2: Quadrado de lado $b + h$

Pelo postulado da unidade a área da figura total é $(b + h)^2$ e, ainda pelo mesmo postulado, as áreas dos dois quadrados são b^2 e h^2. A área $a(S)$ dos dois retângulos congruentes é desconhecida.

Pelo postulado da adição de áreas, temos:

$$b^2 + a(S) + a(S) + h^2 = (b + h)^2$$

$$b^2 + 2a(S) + h^2 = b^2 + 2bh + h^2$$

$$2a(S) = 2bh$$

Portanto,

$$a(S) = bh.$$

□

Teorema 3.25 (Área do Triângulo Retângulo). *A área de um triângulo retângulo é o semiproduto de seus catetos.*

Demonstração. Vamos provar que $a(S) = \dfrac{b.h}{2}$

Considere o triângulo retângulo ABC de catetos b e h com área $a(S)$.

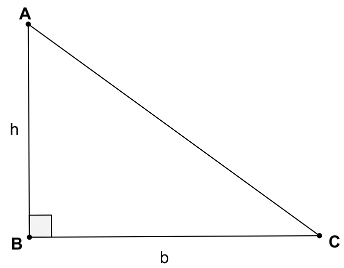

Figura 3.3: Triângulo Retângulo ABC

Construindo um retângulo $ABCD$ conforme a figura.

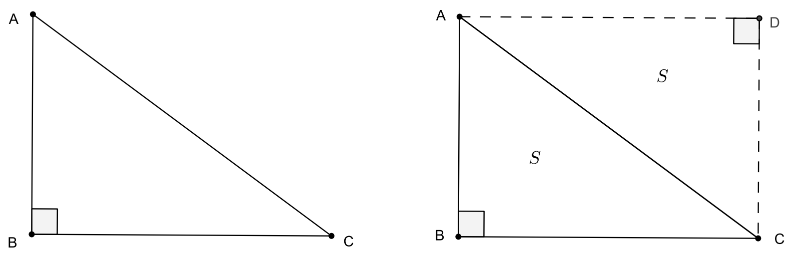

Figura 3.4: Retângulo ABCD

Como $\Delta\ ABC \cong \Delta\ CDA$ então a área do $\Delta\ CDA$ é igual a $a(S)$

Logo:

$$a(S) + a(S) = bh$$
$$2a(S) = bh$$

Portanto,

$$a(S) = \frac{bh}{2}$$

□

Teorema 3.26 (Área de Triângulo)**.** *A área de um triângulo é o semiproduto de qualquer base pela a altura correspondente.*

Demonstração. Vamos provar que $a(S) = \frac{bh}{2}$

Denominando a base como b, a altura como h e área do triângulo ABC como $a(S)$. Há três casos para considerarmos:

1. Se o pé da altura está entre as extremidades de $\overline{BC}$, logo a altura divide o triângulo em dois triângulos retângulos com bases b_1 e b_2 de modo que $b_1 + b_2 = b$.

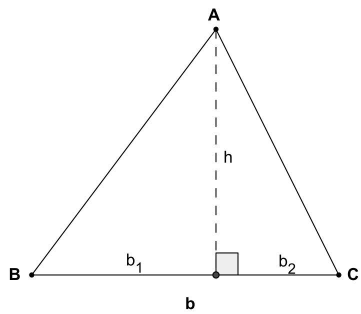

Figura 3.5: Triângulo ABC com altura entre $\overline{BC}$

A área destes dois triângulos são $\frac{b_1 h}{2}$ e $\frac{b_2 h}{2}$.

Pelo postulado de Adição de Áreas, temos:

$$a(S) = \frac{b_1 h}{2} + \frac{b_2 h}{2}.$$
$$a(S) = \frac{(b_1 + b_2)h}{2}$$

Portanto,

$$a(S) = \frac{bh}{2}$$

2. Se o pé da altura é uma das extremidades de $\overline{BC}$, logo o triângulo é retângulo.

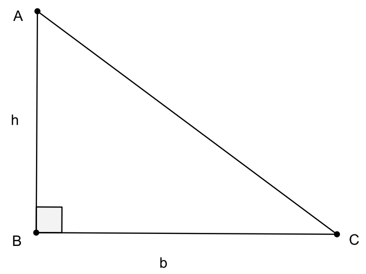

Figura 3.6: Triângulo Retângulo ABC

Portanto,

$$a(S) = \frac{bh}{2}$$

3. Se o pé da altura está fora de $\overline{BC}$ como mostra a imagem, temos que:

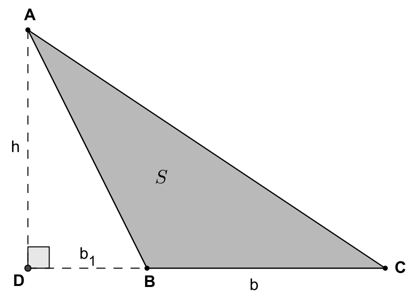

Figura 3.7: Triângulo ABC com altura fora de $\overline{BC}$

A área do triângulo retângulo ADC é $\frac{(b_1+b)h}{2}$

A área do triângulo retângulo ADB é $\frac{b_1h}{2}$

Pelo postulado de Adição de Áreas,

$$\frac{b_1h}{2} + a(S) = \frac{(b_1+b)h}{2}$$
$$\frac{b_1h}{2} + a(S) = \frac{b_1h}{2} + \frac{bh}{2}$$

Portanto,

$$a(S) = \frac{bh}{2}$$

□

Teorema 3.27 (Área de Paralelogramo)**.** *A área de um paralelogramo é o produto de qualquer base pela altura correspondente.*

Demonstração. Vamos provar que $a(S) = bh$

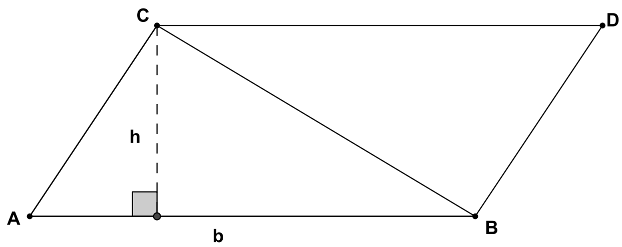

Figura 3.8: Paralelogramo ABCD

A diagonal $\overline{BC}$ divide o paralelogramo em dois triângulos, com a mesma base b e a mesma altura h.

A área do triângulo ABC é $\frac{bh}{2}$.

A área do triângulo CDB é $\frac{bh}{2}$.

Pelo postulado de Adição de Áreas,

$$a(S) = \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2}$$
$$a(S) = \frac{2bh}{2}$$

Portanto,

$$a(S) = bh$$

□

Definição 3.28. *Dois ângulos são congruentes se têm a mesma medida. Dois segmentos são congruentes se têm o mesmo comprimento.*

Uma correspondência $ABC \leftrightarrow A_1B_1C_1$ entre os vértices de dois triângulos ΔABC e $\Delta A_1B_1C_1$, nos dá uma correspondência entre os lados dos triângulos:

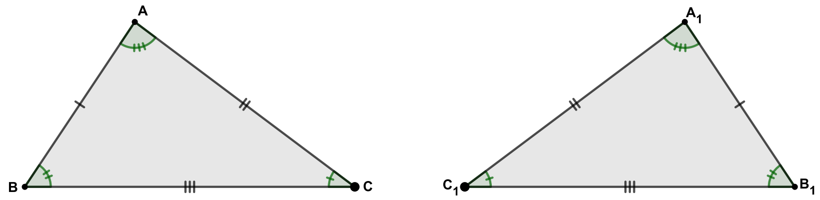

Figura 3.9: Triângulos congruentes

$$\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{A_1B_1}$$

$$\overline{AC} \longleftrightarrow \overline{A_1C_1}$$

$$\overline{BC} \longleftrightarrow \overline{B_1C_1}$$

e nos dá, também uma correspondência entre os ângulos:

$$\hat{A} \longleftrightarrow \hat{A}_1$$

$$\hat{B} \longleftrightarrow \hat{B}_1$$

$$\hat{C} \longleftrightarrow \hat{C}_1$$

Definição 3.29. *Seja dada uma correspondência $ABC \leftrightarrow A_1B_1C_1$ entre os vértices de dois triângulos. Se os pares de lados correspondentes são congruentes e os pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência $ABC \leftrightarrow A_1B_1C_1$ é chamada uma congruência entre os dois triângulos. Podemos escrever: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.*

Se $ABC \leftrightarrow A_1B_1C_1$ é chamada uma correspondência LAL, quando dois lados e o ângulo determinado por eles, do primeiro triângulo são congruentes aos elementos correspondentes do segundo. ("LAL"representa "Lado, Ângulo, Lado"). Neste caso,$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

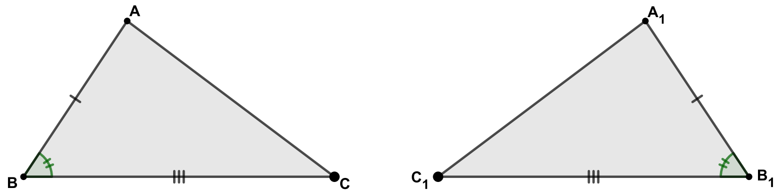

Figura 3.10: Triângulos Congruentes por LAL

Postulado 3.30 (Postulado LAL)**.** *Toda correspondência LAL é uma congruência.*

Se $ABC \leftrightarrow A_1B_1C_1$ é chamada uma correspondência ALA, quando dois ângulos e o lado determinado por eles, no primeiro triângulo são congruentes aos elementos correspondentes do segundo. ("ALA"representa "Ângulo, Lado, Ângulo"). Neste caso,$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

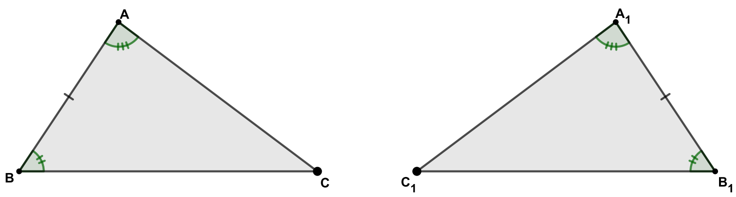

Figura 3.11: Triângulos Congruentes por ALA

Teorema 3.31 (Teorema ALA)**.** *Toda correspondência ALA é uma congruência.*

Se $ABC \leftrightarrow A_1B_1C_1$ é chamada uma correspondência LLL, quando todos os três lados do primeiro triângulo são congruentes aos lados correspondentes do segundo. ("LLL"representa "Lado, Lado, Lado"). Neste caso,$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

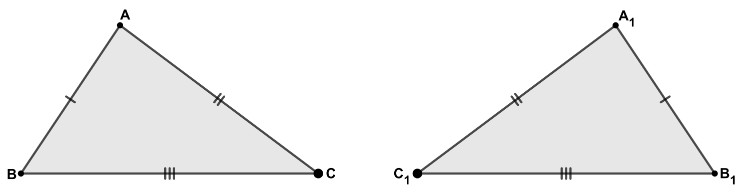

Figura 3.12: Triângulos Congruentes por LLL

Teorema 3.32 (Teorema LLL)**.** *Toda correspondência LLL é uma congruência.*

Se $ABC \leftrightarrow A_1B_1C_1$ é chamada uma correspondência LAA, quando um par de lados correspondentes são congruentes e dois pares de ângulos correspondentes são congruentes. ("LAA"representa "Lado, Ângulo, Ângulo"). Neste caso,$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

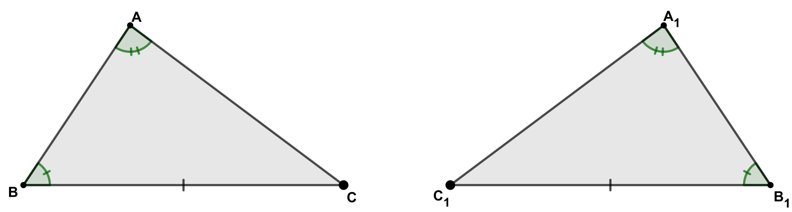

Figura 3.13: Triângulos Congruentes por LAA

Teorema 3.33 (Teorema LAA)**.** *Toda correspondência LAA é uma congruência.*

3.2.1 Semelhança

Vamos apresentar uma definição de semelhança de dois triângulos.

Definição 3.34. *É dada uma correspondência $ABC \leftrightarrow A'B'C'$ entre os vértices dos dois triângulos $\Delta\ ABC$ e $\Delta\ A'B'C'$.*

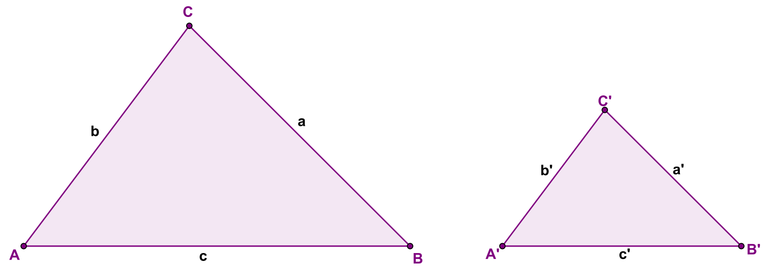

Figura 3.14: Triângulos Semelhantes

Se os ângulos correspondentes forem congruentes e os lados correspondentes forem proporcionais, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$*, então a correspondência é chamada uma semelhança e escrevemos:*

$$\Delta\ ABC \sim \Delta\ A'B'C'.$$

Postulado 3.35 (Unicidade das Paralelas)**.** *Por um ponto fora de uma reta, existe somente uma reta paralela à reta dada.*

Teorema 3.36. *Para todo triângulo, a soma das medidas dos ângulo é* 180^o*.*

Teorema 3.37. *Se dois triângulos têm a mesma altura h, então a razão entre suas áreas é igual a razão entre as suas bases.*

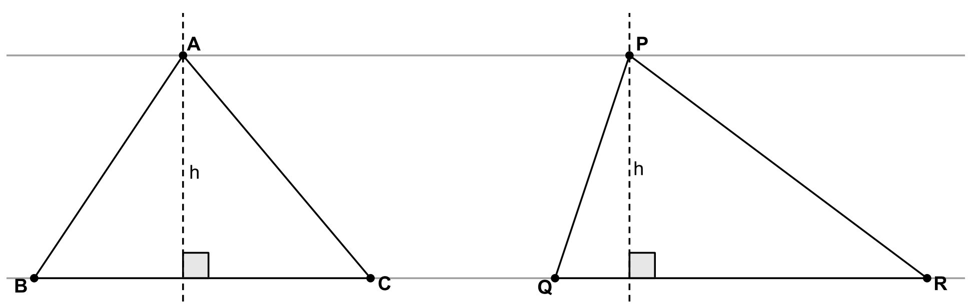

Figura 3.15: Triângulos entre retas paralelas

Seja $\Delta\ ABC$ e $\Delta\ PQR$ de base $\overline{BC}$ e $\overline{QR}$, respectivamente, e altura h.

Então temos que a razão entre as suas áreas é:

$$\frac{a\Delta ABC}{a\Delta PQR} = \frac{\frac{\overline{BC}.h}{2}}{\frac{\overline{QR}.h}{2}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}}$$

Teorema 3.38 (Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade)**.** *Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados.*

Demonstração. Considere um triângulo $\Delta\ ABC$ e um segmento $\overline{DE}$ paralelo a base $\overline{BC}$, com D ponto de $\overline{AB}$ e E ponto de $\overline{AC}$.

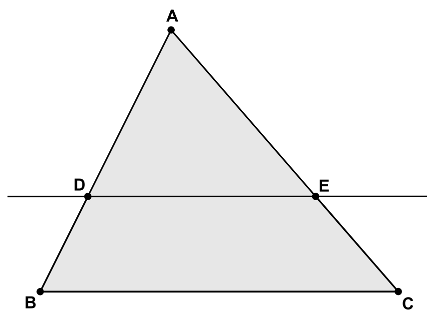

Figura 3.16: Triângulo ABC com segmento $\overline{DE}$ paralelo a base

Vamos provar que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$

Com o segmento $\overline{BE}$ temos os triângulos $\Delta\ ADE$ e $\Delta\ BDE$ de bases $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$

Com uma reta paralela a base passando por E temos que esses triângulos tem a mesma altura.

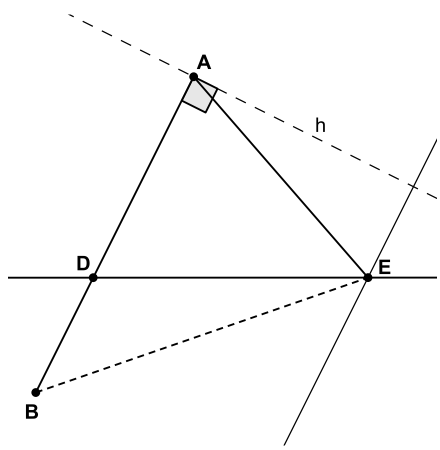

Figura 3.17: Triângulos $\Delta\ ADE$ e $\Delta\ BDE$

Pelo teorema 3.37, a razão entre suas áreas é igual a razão de suas bases.

Assim:

1. $\dfrac{a(\Delta BDE)}{a(\Delta ADE)} = \dfrac{BD}{AD}$

Agora considere os triângulos $\Delta\ ADE$ e $\Delta\ CDE$ de bases $\overline{AE}$ e $\overline{CE}$.

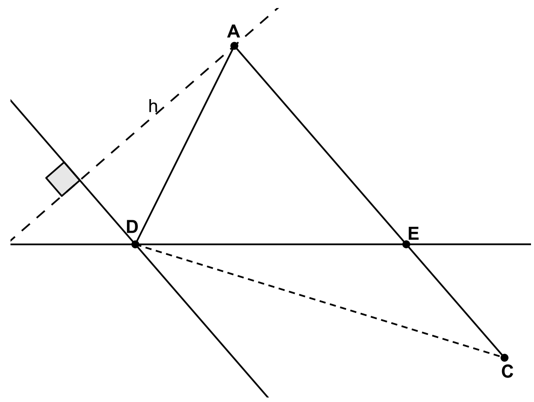

Figura 3.18: Triângulos $\Delta\ ADE$ e $\Delta\ CDE$

Como esses dois triângulos têm a mesma altura, também concluímos que:

2. $\dfrac{a(\Delta CDE)}{a(\Delta ADE)} = \dfrac{CE}{AE}$

Olhando para os triângulos $\Delta\ BDE$ e $\Delta\ CDE$.

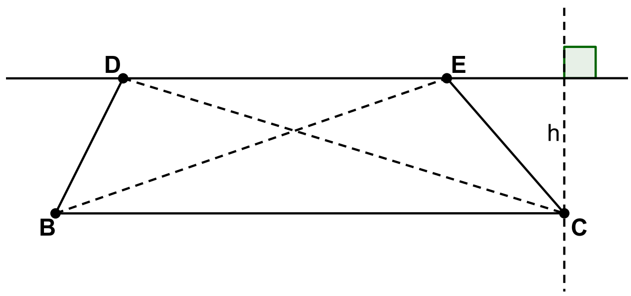

Figura 3.19: Triângulos $\Delta\ BDE$ e $\Delta\ CDE$ de base $\overline{DE}$

Eles têm a mesma base $\overline{DE}$ e a mesma altura porque $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ são paralelos. Como tem a mesma base e a mesma altura, então tem a mesma área.

Portanto:

$$a(\Delta BDE) = a(\Delta CDE)$$

Logo, dos itens 1 e 2, obtemos que: $\dfrac{a(\Delta BDE)}{a(\Delta ADE)} = \dfrac{a(\Delta CDE)}{a(\Delta ADE)}$

Assim $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{CE}{AE}$.

Adicionando 1 a ambos os membros, obtemos:

$$\frac{BD+AD}{AD} = \frac{CE+AE}{AE}$$

Portanto:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Agora provando a recíproca do teorema.

Teorema 3.39. *Se uma reta intercepta dois lados de um triângulo e determina segmentos proporcionais a estes dois lados então ela é paralela ao terceiro lado.*

Vamos considerar o $\Delta\ ABC$, o ponto D entre A e B e o ponto E entre A e C.

Como, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$.

Vamos provar que a reta $\overleftrightarrow{DE}$ é paralela a reta $\overleftrightarrow{BC}$.

Supondo, por absurso, que existe um ponto $C' \neq C$ sobre $\overline{AC}$, tal que a reta $\overleftrightarrow{BC'}$, seja paralela a reta $\overleftrightarrow{DE}$.

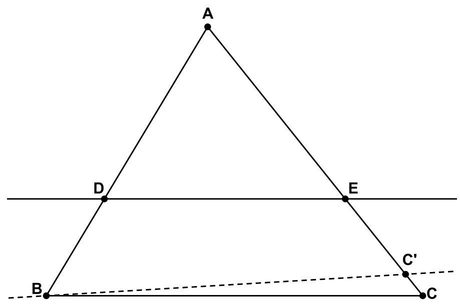

Figura 3.20: Triângulo ABC

Assim, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC'}{AE}$

Como por hipótese, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$ temos:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AC'}{AE}$$

Logo $AC = AC'$ e $C = C'$.

Portanto a reta $\overleftrightarrow{DE}$ é paralela a reta $\overleftrightarrow{BC}$. □

Teorema 3.40 (Teorema Tales)**.** *Se três ou mais paralelas são cortadas por duas transversais, os segmentos determinados nas duas transversais são proporcionais.*

Demonstração. Considere as transversais t_1 e t_2 e r, s e v as paralelas que cortam t_1 e t_2 em A , B, C, D, E e F.

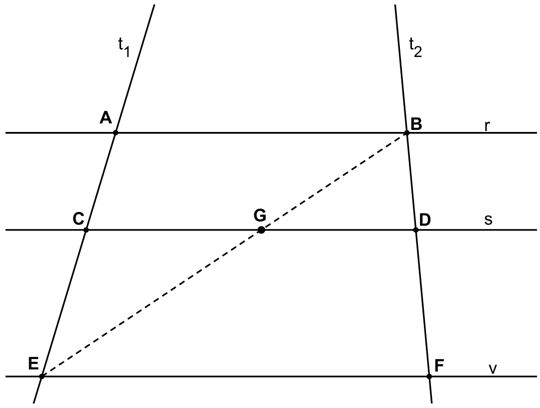

Figura 3.21: Retas paralelas r, s e v e transversais t_1 e t_2

Vamos provar que $\dfrac{AC}{CE} = \dfrac{BD}{DF}$.

Com o segmento $\overline{BE}$, determinamos o ponto G na interseção com a reta s.

Temos os triângulos $\Delta\ BEF$ e $\Delta\ BGD$ e como a reta $\overleftrightarrow{EF}$ é paralela a reta $\overleftrightarrow{GD}$, pelo teorema fundamental da proporcionalidade temos:

$$\frac{BE}{BG} = \frac{BF}{BD} \Longrightarrow \frac{BG+EG}{BG} = \frac{BD+DF}{BD} \Longrightarrow \frac{EG}{BG} = \frac{DF}{BD}$$

Portanto:

$$\frac{BG}{EG} = \frac{BD}{DF} \tag{1}$$

Olhando agora para os triângulos $\Delta\ EBA$ e $\Delta\ EGC$ e como a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a reta $\overleftrightarrow{CG}$, analogamente obtemos:

$\dfrac{AE}{CE} = \dfrac{BE}{EG} \Longrightarrow \dfrac{AC+CE}{CE} = \dfrac{BG+EG}{EG}$

Portanto:

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BG}{EG} \tag{2}$$

Das equações (1) e (2) obtemos:

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}.$$

□

Teorema 3.41 (Teorema sobre Semelhança). *É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes, a correspondência é uma semelhança.*

Demonstração. Seja uma correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ entre $\Delta\ ABC$ e $\Delta\ DEF$. Por hipótese temos que:

$$\hat{A} \cong \hat{D},\ \hat{B} \cong \hat{E} \text{ e } \hat{C} \cong \hat{F}.$$

Vamos provar então que $\Delta\ ABC \sim \Delta\ DEF$.

Primeiramente vamos demonstrar que os lados são proporcionais, ou seja, que:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

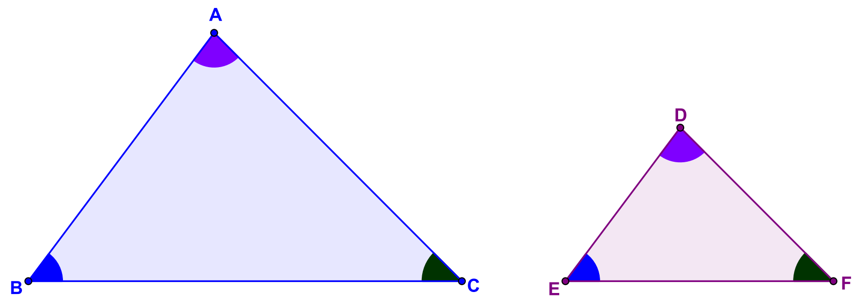

Figura 3.22: Semelhança entre os triângulos

Para a equação $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$, considere E' e F' pontos de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$.

Por LAL temos:

$$\Delta\ AE'F' \cong \Delta\ DEF$$

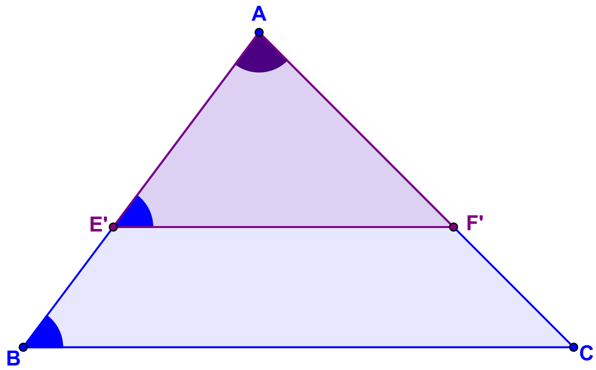

Figura 3.23: Semelhança entre os triângulos

Portanto,

$$\hat{E'} \cong \hat{E}.$$

Por hipótese $\hat{E} \cong \hat{B}$, segue-se que:

$$\hat{E'} \cong \hat{B}$$

Então $\overline{E'F'}$ e $\overline{BC}$ são paralelos.

Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, temos:

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

Como $AE' = DE$ e $AF' = DF$ segue-se que:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$

Analogamente, demonstra-se que:

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \quad \text{e} \quad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}.$$

$\square$

3.2.2 Razões Trigonométricas

Considere dois triângulos retângulos com um par de ângulos agudos congruentes, pelo Teorema 3.41, sabemos que:

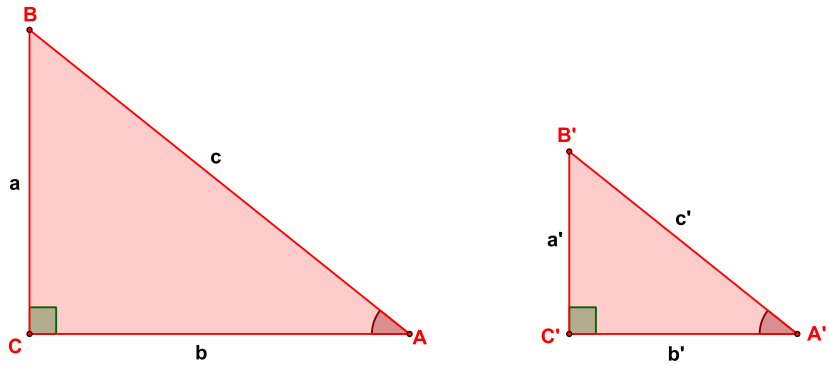

Figura 3.24: Triângulos Semelhantes

$$\Delta\ ABC \sim \Delta\ A'B'C'$$

Assim:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Desse modo:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

.

Portanto, conhecida a medida do $\hat{A}$, as razões $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$ não dependem do tamanho do triângulo.

A razão $\frac{a}{c}$ é chamada seno do $\hat{A}$.

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{c}$$

A razão $\frac{b}{c}$ é chamada cosseno do $\hat{A}$.

$$\cos \hat{A} = \frac{b}{c}$$

A razão é $\frac{a}{b}$ é chamada tangente do $\hat{A}$.

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b}$$

3.2.3 Lei dos Senos

Em todo triângulo, a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto é constante, isto é, é a mesma seja qual for o lado escolhido.

Seja o Δ ABC de base $\overline{BC}$ e altura h com o pé da perpendicular H.

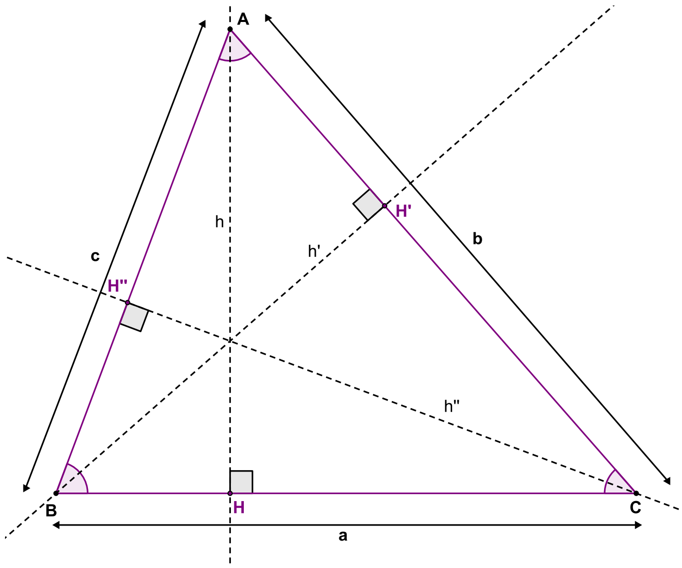

Figura 3.25: Lei dos senos no triângulo ABC

Temos os dois triângulos retângulos Δ ABH e Δ ACH retos em H, logo:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{h}{c} \text{ e } \operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h}{b}$$

Segue que $h = \operatorname{sen}\hat{B} \cdot c = \operatorname{sen}\hat{C} \cdot b$.

Portanto:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \tag{3}$$

Agora considerando $\overline{AC}$ como base do Δ ABC e altura h' com o pé da perpendicular H'.

Obtemos os dois triângulos retângulos Δ BCH' e Δ BAH' retos em H', logo:

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{h'}{c} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h'}{a}$$

Assim:

$$h' = \operatorname{sen}\hat{A} \cdot c = \operatorname{sen}\hat{C} \cdot a$$

Portanto:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \tag{4}$$

Analogamente no $\Delta\ ABC$, de base $\overline{AB}$ e altura h'', com H'' o pé da altura dos triângulos retângulos $\Delta\ CBH''$ e $\Delta\ CAH''$ retos em H'', temos:

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{h''}{b} \text{ e } \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{h''}{a}$$

Logo:

$$h'' = \operatorname{sen} \hat{A} \cdot b = \operatorname{sen} \hat{B} \cdot a$$

Portanto:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \tag{5}$$

Das equações (3), (4) e (5) obtemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

3.2.4 Lei dos Cossenos

Para todo triângulo ABC, o quadrado da medida de um lado qualquer é igual a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, subtraída do dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles, ou seja, em um triângulo onde a, b e c, são as medidas dos lados BC, AC e AB, respectivamente. Temos,

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \alpha.$$

Sendo o $\Delta\ ABC$ um triângulo qualquer, traçando a altura $\overline{AH}$ em relação a base $\overline{BC}$ dividimos ele em dois triângulos retângulos: $\Delta\ AHB$ e $\Delta\ AHC$.

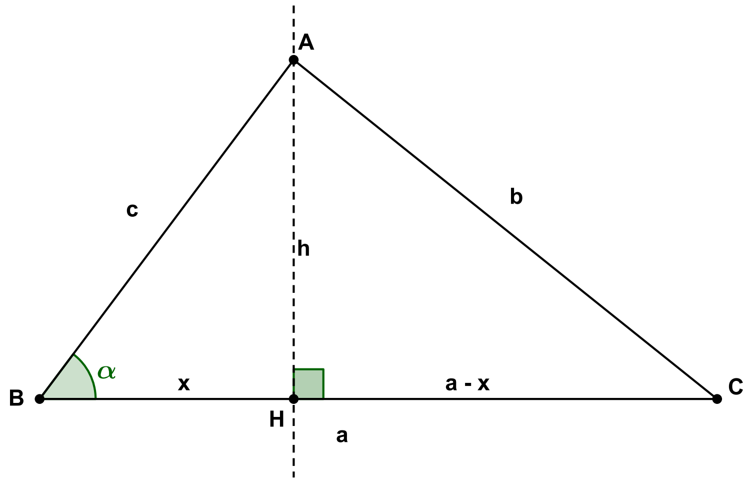

Figura 3.26: Lei dos cossenos no triângulo ABC

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\Delta\ AHB$.

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + x^2 \\ h^2 &= c^2 - x^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\Delta\ AHC$.

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + (a-x)^2 \\ b^2 &= h^2 + a^2 - 2ax + x^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Substituindo (6) em (7)

$$b^2 = c^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 \implies b^2 = c^2 + a^2 - 2ax \tag{8}$$

Usando as razões trigonométricas no $\Delta\ AHB$, temos:

$$\cos\alpha = \frac{x}{c} \implies x = c \cdot \cos\alpha \tag{9}$$

Substituindo (9) em (8)

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \alpha$$

3.3 Volume

Segundo Moise [11], será apresentada a noção intuitiva de volume, que é muito útil para a formação de docentes, possibilitando uma fundamentação para a proposta de produto misto que será desenvolvida na seção 4.

Definição 3.42 (Prismas). *Sejam dois planos paralelos A_1 e A_2, uma região contida em A_1 e uma reta r que intersecta A_1 e A_2. Seja $\overline{PP'}$ o segmento paralelo a r na qual o ponto P está contido na região e P' contido no plano A_2. A reunião de todos os segmentos $\overline{PP'}$ é chamada prisma.*

A região contida no plano A_1 é chamada de base inferior, a parte do prisma que está no A_2 é chamada base superior e a distância entre os planos é chamada de altura do prisma.

Se ré perpendicular a A_1 e A_2, então o prisma é chamado de reto.

Definição 3.43 (Paralepípedo). *Um prisma cuja base é uma região em forma de paralelogramo é chamado paralelepípedo.*
Quando o prisma for retangular reto é nomeado de paralelepípedo retângulo.

Definição 3.44 (Cubo). *Um paralelepípedo retângulo cujas arestas são todas congruentes é chamado de cubo.*

Postulado 3.45 (Postulado da Unidade). *O volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.*

Definição 3.46 (Volume de um prisma qualquer). *O volume de um prisma qualquer é igual ao produto da área da base por sua altura.*

Definição 3.47 (Volume de uma Pirâmide de base triângular). *O volume de uma pirâmide qualquer é um terço do produto da altura pela área da base.*

Vamos considerar um prisma de base triangular $ABCDEF$.

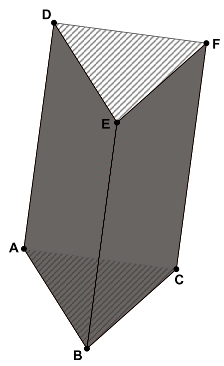

Figura 3.27: Prisma de base triangular

Agora dividindo o prisma em três pirâmides de bases triangulares, como indica a figura.

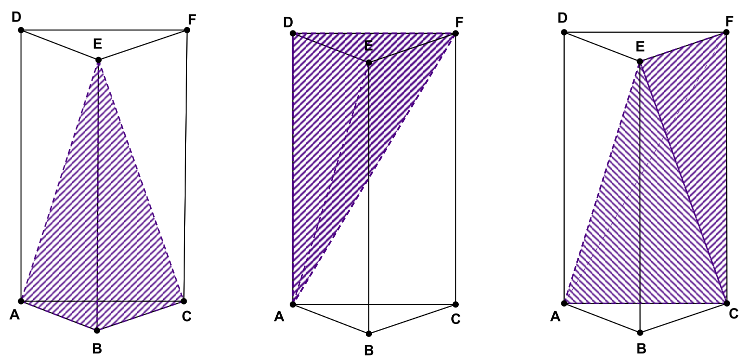

Figura 3.28: Divisão de um prisma de base triangular em três pirâmides de bases triangulares

Assim designaremos como V_1 o volume da pirâmide $ABCE$, V_2 o volume da pirâmide $DEFA$ e V_3 o volume da pirâmide $CEFA$.

1.Vamos provar que $V_1 = V_2$.

Considerando as bases das duas pirâmides determinadas pelos triângulos ABC e DEF. Como os triângulos são congruentes concluímos que as pirâmides $ABCE$ e $DEFA$ têm a mesma área da base. A altura de cada uma é a distância do vértice ao plano que contém as bases, sendo igual a h. Portanto, elas têm o mesmo volume.

2.Vamos provar que $V_1 = V_3$.

Considerando as bases das duas pirâmides determinadas pelos triângulos ABE e CEF.

Sendo os triângulos congruentes concluímos que as pirâmides $ABCE$ e $CEFA$ têm a mesma área da base. A altura h de cada uma é a distância do vértice ao plano que contêm as bases. Portanto, essas pirâmides têm o mesmo volume.

3.De (**1**) e (**2**) concluímos que $V_2 = V_3$.

Sendo assim, o volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do volume do prisma de mesma base e de mesma altura.

$$V_1 = V_2 = V_3 = \frac{V_{prisma}}{3}$$
$$V = \frac{A_b.h}{3}$$

Dessa maneira, podemos considerar esse resultado para pirâmides com base poligonal qualquer, pois sabemos que um polígono pode ser decomposto em n triângulos, os quais servirão de base para as n pirâmides triangulares assim formadas.

Concluímos que o volume de uma pirâmide qualquer é um terço do produto da altura pela área da base.

3.4 Uma Abordagem Vetorial

Nesta seção, conforme os autores [2], [8] e [14], introduz-se intuitivamente o conceito de vetor e suas propriedades básicas. Além disso, apresentam-se definições de transformações lineares, produto escalar, produto vetorial e produto misto.

Definição 3.48. *Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado origem do segmento, o segundo chamado extremidade.*

Definição 3.49. *Dois segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são equipolentes quando o quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo.*

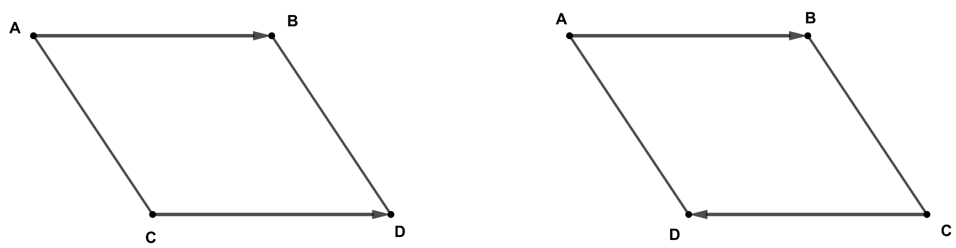

Figura 3.29: Segmentos Equipolentes

Definição 3.50. *Um vetor determinado por um segmento orientado* $\overline{AB}$ *é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a* $\overline{AB}$*, e sua notação é* $\overrightarrow{AB}$.

Um mesmo vetor $\overrightarrow{AB}$ é determinado por uma infinidade de segmentos orientados equipolentes, chamados *representantes* desse vetor, e todos equipolentes entre si. O conjunto dos vetores equipolentes será representado por $\vec{v}$.

Definição 3.51. *Norma ou módulo de um vetor é o comprimento de qualquer um de seus representantes. A norma do vetor* $\vec{v}$ *é indicada por* $\|\vec{v}\|$. *Um vetor é unitário se sua norma é 1.*

Definição 3.52. *Dado um vetor* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$*, o vetor* $\overrightarrow{BA}$ *é oposto de* $\overrightarrow{AB}$ *e se indica por* $-\overrightarrow{AB}$ *ou por* $-\vec{v}$.

Definição 3.53. *Os segmentos nulos, por serem equipolentes entre si, determinam um único vetor, chamado vetor nulo, e que é indicado por* $\vec{0}$.

Um segmento nulo é aquele cuja a extremidade coincide com a origem.

Definição 3.54 (Adição de vetores)**.** *Sejam os vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *representados pelos segmentos orientados* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$*. Os pontos A e C determinam um vetor* $\vec{s}$ *que é, por definição a soma dos vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*, isto é,* $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

Definição 3.55 (Diferença de vetores)**.** *Chama-se diferença de dois vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*, e se representa por* $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$*, ao vetor* $\vec{u} + (-\vec{v})$.

Definição 3.56 (Multiplicação por um escalar)**.** *Se c é um escalar e* $\vec{v}$ *é um vetor, então a multiplicação escalar* $c\vec{v}$ *é o vetor cujo comprimento é* $|c|$ *vezes o comprimento de* $\vec{v}$ *e cuja direção e sentido são os mesmos de* $\vec{v}$ *se* $c > 0$ *e sentido oposto a* $\vec{v}$ *se* $c < 0$ *. Se* $c = 0$ *ou* $\vec{v} = \vec{0}$*, então* $c\vec{v} = \vec{0}$.

Propriedade 3.57 (Vetores)**.** *Se* $\vec{u}$*,* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *são vetores quaisquer e c e d são escalares. Valem as propriedades:*

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- *Existe um único vetor nulo* $\vec{0}$ *tal que para todo vetor* $\vec{v}$ *se tem:* $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$.

- $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$.

- $(c+d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$.

- $c(\vec{u}+\vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$.

- $1\vec{v} = \vec{v}$

3.4.1 Transformações Lineares

De acordo com [8] e [9], nesse item serão explorados alguns conceitos sobre transformações geométricas, as que preservam comprimento, área e consequentemente volume, e semelhança que preserva ângulos. Esses conteúdos já são apresentados no Ensino Fundamental e Ensino Médio que se estende no estudo de vetores.

Uma definição que aparece no livro de Álgebra Linear, [1],é a seguinte:

Definição 3.58. *Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear é uma função de V em W, $F : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:*
i) Quaisquer que sejam u e v em V, $F(u+v) = F(u) + F(v)$.
ii) Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, $F(kv) = k.F(v)$.

Essa definição apresentada, muitas vezes, não permite que um aluno da graduação evidencie com clareza conexão com o conteúdo base de transformações geométricas.

Consideremos alguns conceitos:

Isometrias no Plano

Isometria é uma transformação $F : E^2 \longrightarrow E^2$, que preserva distâncias, ou seja, dado dois pontos P e Q a $d(F(P), F(Q)) = d(P, Q)$. Necessariamente preservam congruências quando rotacionamos, transladamos ou refletimos.

Definição 3.59 (Rotações)**.** *Considere o ponto $P = (x, y)$ no plano OXY e a rotação de centro O e ângulo α que transforma P no ponto $P_1 = (x_1, y_1) = (\cos\alpha x - \operatorname{sen}\alpha y, \cos\alpha y + \operatorname{sen}\alpha x)$.*

Exemplo 3.60. *Seja $T_\alpha : E^2 \longrightarrow E^2$ uma rotação de ângulo α, então $T_\alpha(x, y) = (x_1, y_1)$ $\Longrightarrow T_\alpha(x, y) = P_1$*

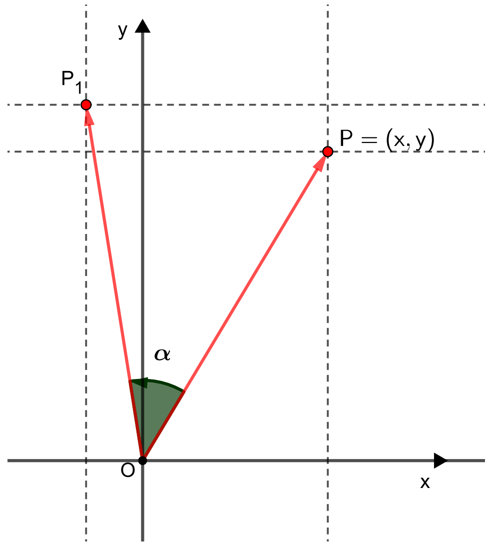

Figura 3.30: Exemplo de rotação

Definição 3.61 (Reflexões). *A reflexão em torno da reta é a transformação T_r que faz corresponder a cada ponto $P = (x, y)$ do plano o ponto $T(P) = P_1 = (x_1, y_1)$, simétrico de P em relação a r.*

Exemplo 3.62. *Seja uma reflexão $T_r : E^2 \longrightarrow E^2$, e uma reta $r : y = ax$ com $(x, y) \in r$. Sendo $r : (x, y) = \lambda(1, a)$, temos $T_r(x, y) = (x_1, y_1) = ((\lambda_1 - 1)x + \lambda_2 y, \lambda_1 ax + \lambda_2(a - 1)y)$*

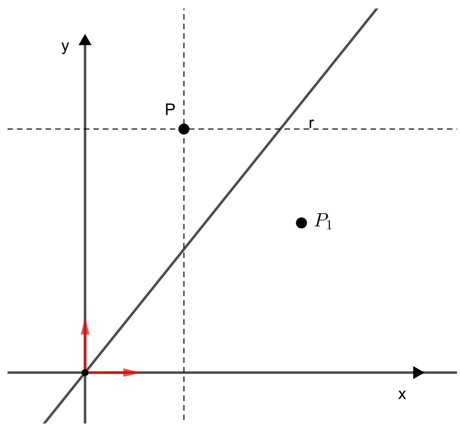

Figura 3.31: Exemplo de Reflexão

Existe uma isometria do plano que não é linear, que é a translação.

Definição 3.63 (Translações). *A translação determinada pelo vetor $v = (\alpha, \beta)$ é a transformação que leva cada ponto $P = (x, y)$ do plano no ponto $T_v(x, y) = (x + \alpha, y + \beta)$.*

Exemplo 3.64. *Seja uma translação $T_v : E^2 \longrightarrow E^2$, logo $T_v(P) = P_1(x_1, y_1)$*

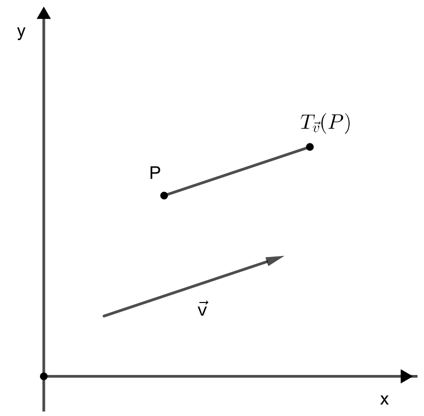

Figura 3.32: Exemplo de translação

Definição 3.65. *A reflexão com deslizamento é a transformação do plano que consiste na reflexão em torno de uma reta r, seguida de uma translação ao longo de um vetor v paralelo a r. Esse tipo de isometria também inverte a orientação do plano.*

Semelhanças

As transformações de semelhanças preservam ângulos, mas não preservam distâncias como as transformações citadas acima.

Definição 3.66. *Seja k um número real positivo. Uma semelhança de razão k no plano E^2 é uma transformação $\theta : E^2 \longrightarrow E^2$ que multiplica por k a distância entre dois pontos P e Q de E^2, isto é:*

$$d(\theta(P), \theta(Q)) = k.d(P, Q)$$

Uma semelhança de razão k=1 é chamada de isometria, neste caso, temos uma congruência de figuras.

3.4.2 Produto escalar

Seja $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base ortonormal, se $\vec{u} = a_1\vec{e_1} + b_1\vec{e_2} + c_1\vec{e_3} = (a_1, b_1, c_1)$ então o comprimento do vetor $\vec{u}$ é a norma indicada por, $||\vec{u}|| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$.

Sendo $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$, tal que $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_B$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_B$, aplicando a lei dos cossenos ao triângulo da figura abaixo:

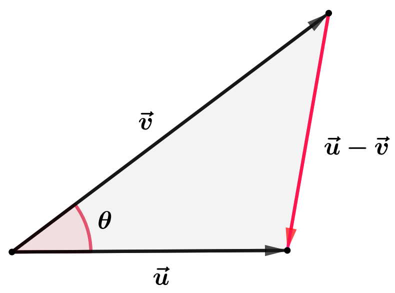

Figura 3.33: Triângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2 \cdot ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta. \tag{10}$$

A fim de calcular as normas, podemos escrever:

$$||\vec{u} - \vec{v}|| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}$$
$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2$$
$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2 + c_1^2 - 2c_1c_2 + c_2^2$$
$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 2(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)$$

Assim,

$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) \tag{11}$$

Comparando (10) e (11), obtemos:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta$$

Segue abaixo uma definição do produto escalar que aparece em livros de Geometria Analítica, Cálculo Diferencial Integral e Álgebra Linear.

Definição 3.67. *O produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, indicado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, é o número real tal que:*
i)Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$
ii)$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$, se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Decorre da definição que se $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, podemos escrever:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

3.4.3 Produto Vetorial

Definição 3.68. *O produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é um vetor $\vec{w}$ indicado por $\vec{u} \times \vec{v}$, tal que:*

1. *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem linearmente dependente então $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, isto é, $\vec{w} = 0$.*
2. *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem linearmente independente e θ é a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então:*
   (a) *$\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ é igual a área de um paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, $\vec{w} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \operatorname{sen}\theta$*
   (b) *$\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$*
   (c) *$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ é uma base positiva de V^3.*

Proposição 3.69. *Seja $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva. Se $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ relativamente a essa base, tem-se*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Para tornar a definição do produto vetorial mais fácil de lembrar, utiliza-se uma notação simbólica de determinantes,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Observa-se ainda que na primeira linha do determinante simbólico, na equação (12), é formada por vetores. Se aplicar a regra de Sarrus como se fosse um determinante comum, obtém-se a representação do produto vetorial.

3.4.4 Produto Misto

Definição 3.70. *O produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, nessa ordem, é um número real $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$, indicado por $\left[\; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \; \right]$:*

Ou seja,

$$\left[\; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \; \right] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Proposição 3.71. *Em relação a uma base ortogonal positiva $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$. Então,*

$$\left[\; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \; \right] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

4 Motivação para conceitos abstratos a partir de conceitos elementares

Nessa seção, iniciaremos com o conceito de figuras equivalentes, ou seja, figuras que têm a mesma área, conforme [16]. Essa propriedade elementar será fundamental para algumas demonstrações na seção 4.2.

Propriedade 4.1. *Seja um paralelogramo $ABCD$ de base AB, sendo CD sobre a reta paralela a base AB.*
A área do paralelogramo não se altera quando CD percorre a reta.
Os paralelogramos $ABCD$ e $ABEF$ têm a mesma área, pois possuem a mesma base e mesma altura.

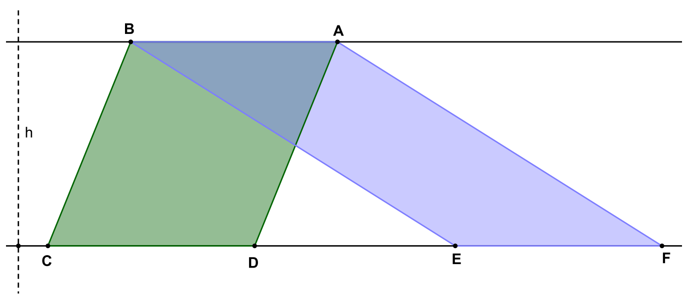

Figura 4.1: Paralelogramos de mesma base entre paralelas

4.1 O Determinante e a Área do Paralelogramo

Os determinantes, na maioria das vezes, são definidos como um número associado a uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, que é obtido por meio de operações que envolvem todos os elementos a_{ij}.

De acordo com [8], através das transformações de paralelogramo em outros paralelogramos com mesma área, tendo como base a propriedade 4.2, e mantendo um vértice na origem, mostraremos que o determinante de uma matriz 2×2 formada por coordenadas dos vértices é a área dos paralelogramos.

1. Considere o retângulo $ABCD$ de vértices D na origem e $A(a, 0)$, $B(a, b)$ e $C(0, b)$.

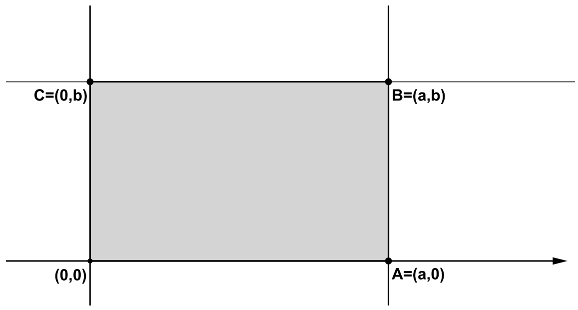

Figura 4.2: Transformação de Paralelogramo

A área desse retângulo é:

$$a(ABCD) = ab = \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}.$$

2. Seja o paralelogramo $AB'C'D$ com $A(a, 0)$, $B'(a_2, b)$, $C'(a_1, b)$ e $D(0, 0)$.

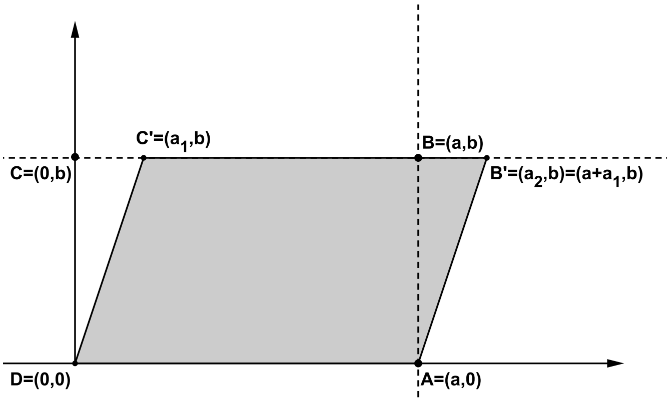

Figura 4.3: Transformação de Paralelogramo

Mantendo a base e a altura do retângulo $ABCD$, temos que a área do paralelogramo é a mesma do retângulo, $a(AB'C'D) = ab = \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ a_1 & b \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ a_1 & b \end{vmatrix}$.

3. Vamos provar que o paralelogramo $A'B''C''D$ tem a mesma área dos casos anteriores e que a área é o determinante da matriz 2×2 formada pelas coordenadas dos vértices A' e C''.

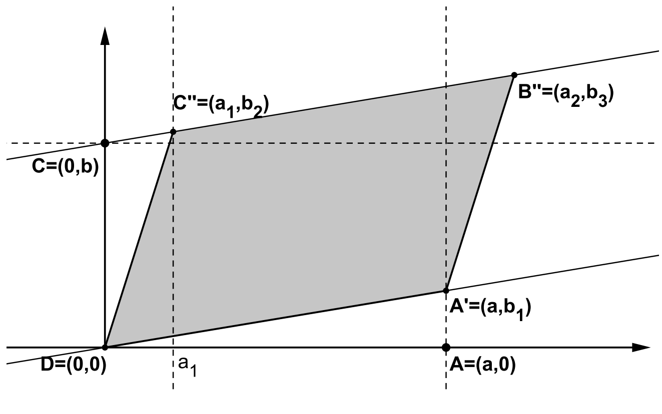

Figura 4.4: Transformação de Paralelogramo

Sejam os vértices $A'(a, b_1)$, $B''(a_2, b_3)$, $C''(a_1, b_2)$ e $D(0, 0)$ do paralelogramo $A'B''C''D$ e $A'(a, b_1)$, $A''(a, b_4)$, $C(0, b)$ e $D(0, 0)$ o paralelogramo $A'A''CD$.

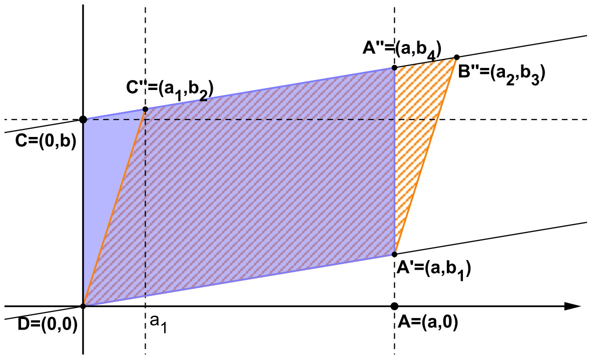

Figura 4.5: Transformação de Paralelogramo

Pela Propriedade 4.1, os paralelogramos $A'B''C''D$ e $A'A''CD$ possuem a mesma base A'D, e estão entre paralelas, portanto têm a mesma área.

Mas, também temos que o paralelogramo $A'A''CD$ e o paralelogramo $ABCD$, pela mesma propriedade, têm a mesma área, pois possuem mesma base CD e mesma altura.

Portanto,

$$a(A'B''C''D) = a(A'A''CD) = a(ABCD)$$

Assim,

$$a(A'B''C''D) = a.b$$

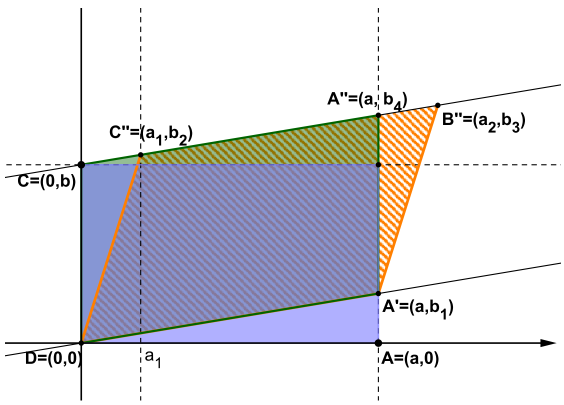

Figura 4.6: Transformação de Paralelogramo

Como a reta $\overleftrightarrow{DA}$ é paralela a $\overleftrightarrow{C''B''}$ então essas retas tem o mesmo coeficiente ângular,

$m = \dfrac{(b_1 - 0)}{(a - 0)} = \dfrac{b_1}{a}$

Obtendo a equação da reta $\overleftrightarrow{B''C''}$, onde $C(0, b)$ pertence a essa reta, temos:

$y - yo = m(x - xo)$

$y - b = \dfrac{b_1}{a}(x - 0)$

$y - b = \dfrac{b_1 x}{a}$

$y = \dfrac{b_1 x}{a} + b$

Substituindo as coordenadas do ponto $C''(a_1, b_2)$ nessa equação, temos:

$$b_2 = \frac{b_1 a_1}{a} + b,$$

resultando em:

$$ab_2 = b_1 a_1 + ab$$
$$ab = |ab_2 - a_1 b_1| = \det \begin{bmatrix} a & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Provamos assim que a área do paralelogramo é igual ao determinante da matriz 2×2 formado pelos vértices A' e C''.

4.1.1 Área do Triângulo

Dadas as coordenadas dos vértices de um triângulo $A(a, b)$, $B(0, 0)$ e $C(a_1, b_1)$. A área do triângulo ABC é a metade da área do paralelogramo $ABCD$.

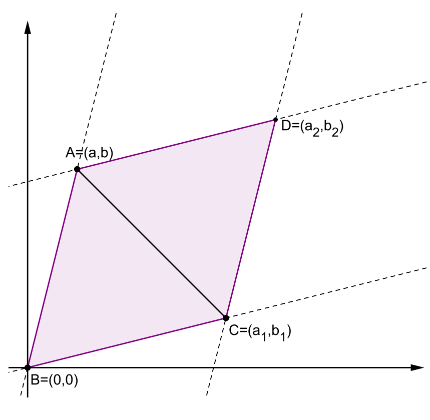

Figura 4.7: Área do triângulo com determinante

Portanto:

$$\text{Área } \Delta(ABC) = \frac{1}{2}|ab_1 - a_1b| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} a_1 & a \\ b_1 & b \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a \\ b_1 & b \end{vmatrix}.$$

4.1.2 Condição de Alinhamento de Três Pontos

Dizemos que três pontos distintos estão alinhados ou que três pontos são colineares, quando existe uma reta r que passa por eles.

Vejamos o que ocorre quando três pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão alinhados.

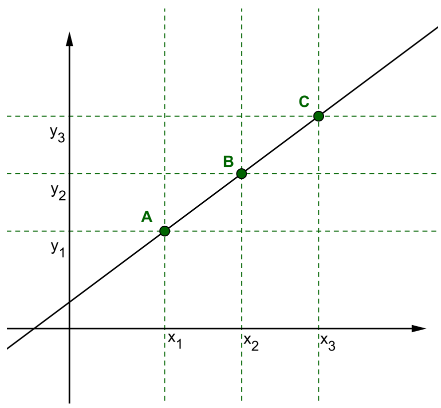

Figura 4.8: Determinante e alinhamento de três pontos

Vamos mostrar que se os 3 pontos são colineares não existe área e, consequentemente, o determinante mostrado anteriormente é nulo. Na página 17 já observou-se essa condição, mas não apresenta justificativa.

Pelo Teorema de Tales:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \tag{13}$$
$$\frac{AB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \tag{14}$$

Comparando (13) e (14), temos:

$$\begin{aligned}\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} =& \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}\\ (x_3 - x_1).(y_2 - y_1) =& (x_2 - x_1).(y_3 - y_1)\\ x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 =& x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_1\\ x_3y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1 - x_1y_2 - x_2y_3 =& 0\end{aligned}$$

$$\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{bmatrix} = 0. \tag{15}$$

4.2 Produto Vetorial

4.2.1 Coordenadas do vetor w

De acordo com Stewart [15] demonstra-se uma justificativa para o item $2(b)$ da definição (3.68) na página 52.

Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x, y, z)$ com $\vec{w} \perp \vec{u}$ e $\vec{w} \perp \vec{v}$, vamos mostrar que o produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são as coordenadas do $\vec{w}$. Ou seja:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1z_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1)$$

Como $\vec{w} \perp \vec{u}$ e $\vec{w} \perp \vec{v}$ o produto escalar de $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$ e $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$ é dado por:

$$\begin{cases} x_1x + y_1y + z_1z = 0\\ x_2x + y_2y + z_2z = 0\end{cases}$$

Multiplicando a 1^a equação por z_2 e a 2^a equação por z_1 obtemos:

$$\begin{cases} x_1z_2x + y_1z_2y + z_1z_2z = 0\\ x_2z_1x + y_2z_1y + z_2z_1z = 0\end{cases}$$

Subtraindo a 1^a equação pela 2^a, temos:

$$(x_1z_2 - x_2z_1)x + (y_1z_2 - y_2z_1)y = 0$$

Uma solução intuitiva para a equação é :

$$x = y_1z_2 - y_2z_1 \text{ e } y = -(x_1z_2 - x_2z_1)$$

Agora, para determinar a coordenada z, temos:

$$\begin{cases} x_1x_2x + y_1x_2y + z_1x_2z = 0 \\ x_2x_1x + y_2x_1y + z_2x_1z = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a 1^a equação pela 2^a, temos:

$$(y_1x_2 - y_2x_1)y + (z_1x_2 - z_2x_1)z = 0$$

Novamente, uma solução direta,

$$y = x_2z_1 - z_2x_1$$
$$z = -(y_1x_2 - y_2x_1)$$

Portanto,

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1z_2 - x_2z_1), y_2x_1 - y_1x_2)$$
$$= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

4.2.2 O Produto Vetorial e a Área

O produto vetorial pode ser demonstrado através da aplicação dos conceitos apresentados anteriormente esclarecendo a o item $2(a)$ da definiç ão (3.68) que aparece na página 52.

Considere o triângulo ABC, de altura $\overline{BH}$, como mostra a figura (4.16).

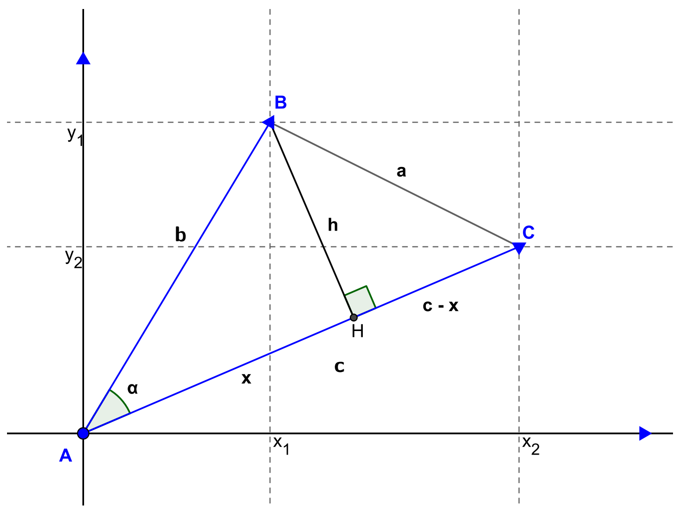

Figura 4.9: Triângulo ABC formado por vetores

Sabemos que a área de um triângulo qualquer é dada por metade do produto das medidas de sua base pela sua altura.

$$\text{área } \Delta = \frac{1}{2}ch$$

Pelas razões trigonométricas, em relação ao ângulo α, teremos que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b} \Longrightarrow h = b \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Portanto,

$$\text{área } \Delta = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen}\alpha$$

Agora, substituindo $b = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}$ e $c = \sqrt{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}$:

Assim:

$$\text{área } \Delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}\sqrt{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)} \operatorname{sen}\alpha$$

Vimos anteriormente, que a norma de um vetor no plano pode ser calculada como:

$$||\vec{b}|| = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}$$
$$||\vec{c}|| = \sqrt{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}$$

Conclui-se que:

$$\text{área } \Delta = \tfrac{1}{2}||\vec{b}||||\vec{c}|| \operatorname{sen}\alpha$$

Por outro lado, sabemos que a área do paralelogramo é o dobro da área do triângulo.
Logo, a área do paralelogramo é $||\vec{b}||||\vec{c}|| \operatorname{sen}\alpha$.
Elevando a área ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned}(||\vec{b}||||\vec{c}|| \operatorname{sen}\alpha)^2 &= ||\vec{b}||^2||\vec{c}||^2(\operatorname{sen}\alpha)^2 \\ (||\vec{b}||||\vec{c}|| \operatorname{sen}\alpha)^2 &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \cdot (\operatorname{sen}\alpha)^2\end{aligned}$$

Dispomos das razões trigonométricas que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

Segue que:

$$\begin{aligned}
(||\vec{b}||||\vec{c}||\operatorname{sen}\alpha)^2 &= (x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)(1-\cos^2\alpha)\\
(||\vec{b}||||\vec{c}||\operatorname{sen}\alpha)^2 &= (x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+x_1^2z_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+y_1^2z_2^2+\\
&\quad z_1^2x_2^2+z_1^2y_2^2+z_1^2z_2^2)-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)(\cos^2\alpha) \quad (16)
\end{aligned}$$

Pela seção 4.3 o produto escalar é,

$$\begin{aligned}
(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2) &= \sqrt{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)}\sqrt{(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}\cos\alpha\\
(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2 &= (x_1^2+y_1^2+z_1^2)\cdot(x_2^2+y_2^2+z_2^2)\cdot\cos^2\alpha
\end{aligned}$$

Substituindo-o em (23), obtemos:

$$\begin{aligned}
(||\vec{b}||||\vec{c}||\operatorname{sen}\alpha)^2 &= (x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+x_1^2z_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+y_1^2z_2^2+\\
&\quad z_1^2x_2^2+z_1^2y_2^2+z_1^2z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2\\
&= x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+x_1^2z_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+y_1^2z_2^2+z_1^2x_2^2+z_1^2y_2^2+\\
&\quad z_1^2z_2^2-x_1^2x_2^2-y_1^2y_2^2-z_1^2z_2^2-2x_1x_2y_1y_2-2x_1x_2z_1z_2-2y_1y_2z_1z_2\\
&= x_1^2y_2^2+x_1^2z_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2z_2^2+z_1^2x_2^2+z_1^2y_2^2-\\
&\quad 2x_1x_2y_1y_2-2x_1x_2z_1z_2-2y_1y_2z_1z_2\\
&= (x_1y_2-x_2y_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2+(y_1z_2-y_2z_1)^2 \quad (17)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$||\vec{b}||||\vec{c}||\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{(x_1y_2-x_2y_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2+(y_1z_2-y_2z_1)^2} = \|u\times v\| \quad (18)$$

5 Considerações Finais

Ao longo desse trabalho tivemos como objetivo conectar fatos geométricos com as propriedades algébricas relacionadas com comprimento, área e volume, estudadas nas séries finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, propondo aos alunos e professores da Licenciatura em Matemática, vincular essas ideias a conceitos do Cálculo, da Álgebra Linear e da Geometria Analítica. Além disso, essas relações auxiliam na compreensão de conceitos abstratos da Matemática.

Um importante resultado obtido foi a dedução das relações métricas no triângulo retângulo baseado em propriedades de áreas equivalentes. Essas propriedades motivaram também a construção de paralelogramos de mesma área e a partir de algumas transformações concluir que as áreas dos paralelogramos são dadas pelo determinante de matrizes 2x2. Com a aplicação desses resultados e as razões trigonométricas demonstrou-se o produto escalar, como consequência do escalar o produto vetorial, e através de uma transformação linear determinou-se o produto misto.

No caminho percorrido para a construção deste trabalho, percebemos como os conteúdos de Matemática estão relacionados e a importância de compreender conceitos e propriedades. Percebemos também, quão importante é para um aluno que o professor consiga instigá-lo a fazer relações entre conteúdos. Como por exemplo, quando os conceitos de matrizes são bem definidos no Ensino Médio, mesmo sem estudar vetores, o aluno chega na graduação tendo condições de entender que os elementos formados pelo produto de duas outras matrizes, nada mais são que os produtos escalares entre dois vetores.

É importante ressaltar que a abordagem de alguns conceitos apresentados nesse trabalho não são indicados para a Educação Básica, mas podem fornecer subsídios para que o professor sinta-se mais seguro em sua prática docente.

Entretanto, a maior dificuldade que encontramos foi a existência de poucas referências bibliográficas que contemplassem essa ideia. A elaboração desse artigo foi uma grande experiência, possibilitando nosso crescimento acadêmico, através de um processo de estudo intenso e de várias discussões sobre o assunto.

Espera-se que esse artigo seja uma ferramenta importante para auxiliar os professores, que amplie seus horizontes, permitindo que vislumbrem uma forma mais significativa de ensinar. Além disso, deseja-se que os professores sejam instigados a modificar a realidade do ensino de Matemática nos dias atuais, formando alunos mais críticos e melhor preparados não apenas para o ingresso na graduação, mas também para o enfrentamento das mais diversas situações no seu crescimento pessoal e profissional.

Esse trabalho é um referêncial inicial para o desenvolvimento de relações mais complexas que podem ser desenvolvidas futuramente.

Referências

[1] BOLDRINI, J.L. *Álgebra Linear.* 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

[2] BOULOS, P.; CAMARGO, I. de. *Geometria Analítica Um tratamento vetorial.* 3.ed.São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[3] DANTE, L.R. *Projeto Teláris: Matemática - Ensino Fundamental.* 2. ed. São Paulo: Ática , 2015.

[4] ______________. *Matemática Contexto & Aplicações.* 3. ed. São Paulo: Ática , 2017.

[5] GIOVANNI, J.R.; GIOVANNI JUNIOR, J.R. ; CASTRUCCI, B. *A Conquista da Matemática - Ensino Fundamental.* São Paulo: FTD, 2015.

[6] GIOVANNI, J.R.; BONJORNO, J.R. *Matemática Uma Nova Abordagem.* São Paulo: FTD, 2007.

[7] IMENES, L.M.; LELLIS, M. *Matemática : Imenes & Leillis - Ensino Fundamental.* 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

[8] LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C. *Coordenadas no plano: Geometria Analítica, vetores e transformações geométricas.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1992.

[9] LIMA, E.L. *Isometrias.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

[10] MOISE, E.E. ; DOWNS JUNIOR, F.L.*Geometria moderna.* Parte I. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1971.

[11] ___________. *Geometria moderna.* Parte II. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1971.

[12] POSTNIKOV, M. *Lições de Geometria Geometria Analítica.* Moscou: Mir, 1988.

[13] SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I. *Matemática Ensino Médio.* São Paulo: Saraiva, 2007.

[14] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Geometria Analítica.* São Paulo: MC Graw-Hill, 1987.

[15] STEWART, J. *Cálculo Tradução da 7 ed. norte-americana.* Vol. 2. São Paulo, Cengage Learning, 2013.

[16] WAGNER, E. *Teorema de Pitágoras e Áreas*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.