Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e
Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Máximos e Mínimos Aplicados em Geometria

Francisco de Paula Santos de Araujo Junior

Teresina

2018

Esta Página é a do “Termo de Ciência e de Autorização para publicação eletrônica do TCC pela Biblioteca da UESPI”, a qual deve ser encadernada no VERSO da página anterior O Formulário desse Termo de Ciência está em anexo.

FRANCISCO DE PAULA SANTOS DE ARAUJO

JUNIOR

MÁXIMOS E MÍNIMOS APLICADOS EM GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Piauí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr Arnaldo Silva Brito.

Teresina

2018

A658m Araujo Junior, Francisco de Paula Santos de.
Máximos e mínimos aplicados em geometria / Francisco de Paula Santos de Araujo Junior. - 2018.
77f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.
"Orientador(a): Prof.(a) Dr. Arnaldo Silva Brito."

1. Desigualdades. 2. Geometria. 3. Máximos e Mínimos.
I. Título.
CDD: 516

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Grasielly Muniz (Bibliotecária) CRB 3/1067

FRANCISCO DE PAULA SANTOS DE ARAUJO JUNIOR

MÁXIMOS E MÍNIMOS APLICADOS EM GEOMETRIA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para à obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA

Aprovado por:

Arnaldo Silva Brito

Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito - Orientador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Afonso Norberto da Silva

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva - Examinador
Universidade Estadual do Piauí -UESPI

Jurandir de Oliveira Lopes

Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes - Examinador externo
Universidade Federal do Piauí - UFPI

TERESINA
Abril/2018

Francisco de Paula Santos de Araujo Junior graduou-se em Matemática pela UFPI - CMRV, concluiu Especialização em Metodologia do Ensino de Matemática pela NEAD/UESPI e depois o curso de Mestrado PROFMAT/UESPI, bolsista pela CAPES. É professor efetivo da rede pública nas prefeituras de Buriti dos Lopes e Luís Correia, no Estado do Piauí; além de ser professor substituto da Universidade Estadual do Piauí - UESPI.

Dedicatória

Dedico este trabalho às mulheres da minha vida: Mãe, Esposa, Filhas, Irmãs, Sogra, Cunhadas e Sobrinhas.

Agradecimentos

Primeiramente, a DEUS, por toda a proteção nas viagens de Parnaíba a Teresina, totalizando mais de 70.000km.

À todos os meus familiares, em especial, MÃE, ESPOSA e FILHAS, que são as pedras fundamentais e motivadoras na construção deste trabalho.

Ao meu cunhado ESMAR TRINDADE, pela acolhida calorosa, sempre de braços abertos, quando chegava em sua residência.

Ao meu amigo RENATO PEREIRA, por ter dedicado seu tempo para me ajudar a consolidar este estudo.

Aos professores do PROFMAT/UESPI, por cada ensinamento tato matemático quanto pessoal, especialmente, ao PEDRO JÚNIOR.

Ao Meu orientador ARNALDO BRITO, que me direcionou com seus conhecimentos e sempre este disponível para me orientar.

A CAPES, pela ajuda financeira pois sem ela tudo seria mais difícil.

À todos os amigos da turma do PROFMAT/UESPI, que de uma forma direta ou indireta nos momentos em que estávamos juntos ou não, contribuíram para a concretização do presente trabalho.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre desigualdades, cálculo diferencial e geometria com o objetivo de resolver alguns problemas clássicos que envolvem o estudo de máximos e mínimos de funções reais. Destacamos os Problemas de Dido, a desigualdade isoperimétrica para polígonos entre outros. Em seguida, com o auxílio do software livre Geogebra, apresentamos passo a passo, uma gama de aplicações sobre o tema estudado, possibilitando assim, as aplicações deste importante recurso computacional aos docentes.

Palavras-chave: Desigualdades, geometria, máximos e mínimos.

Abstract

This work presents a study on inequalities, differential equations and geometry with the objective of solving some classical problems involving the study of maximum and minimum real functions. We highlight the problems of Dido, the isoperimetric inequality for polygons among others. Then, with the help of free software Geogebra, we present step by step, a range of applications on the subject of studied, thus enabling the application of this important computational resource of the teachers.

Keywords: Inequalities, geometry, maximum and minimum.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O presente trabalho tem o objetivo de estudar problemas de máximos e mínimos em geometria plana e espacial, tanto em maximizar ou minimizar elementos geométricos que podem ser, ângulos, segmentos, áreas ou volumes.

A apresentação de tais problemas podem ser vistos como uma oportunidade de aplicar conteúdos estudados pelos alunos e a aproximação destes com a matemática através de exemplos que podem fomentar interesse neles. Também dar a possibilidade de professores que tenham contato com o trabalho, analisem como tratam os conteúdos que vamos estudar e as práticas computacionais.

Historicamente, vários pesquisadores se deparam com esse tipo de problema. Neste trabalho, alguns problemas serão solucionados com o uso de funções quadráticas e desigualdades, e outros com uso de cálculo diferencial. Além disso, vamos trabalhar com o uso de software geogebra.

No Capítulo 1, é apresentado um levantamento histórico sobre o estudo de alguns matemáticos com relação a máximos e mínimos.

No Capítulo 2, apresenta-se a parte teórica do assunto, envolvendo desigualdade e cálculo diferencial, com definições e teoremas.

No Capítulo 3, vamos nos concentrar na solução de dois problemas clássicos, mencionados na parte histórica, no desenvolvimento do estudo de máximos e mínimos em relação à função quadrática, objeto de estudo dos alunos no ensino médio, desigualdade de Cauchy - Schwarz e aplicação em física do movimento uniformemente variado.

No Capítulo 4, temos as aplicações dos conteúdos teóricos de máximos e mínimos apresentados anteriormente para solução de problemas de geometria plana e espacial, sendo: função quadrática, desigualdades, que podem ser resolvidos com matemática básica ou cálculo diferencial.

Nas considerações finais, é realizado uma análise do trabalho bem como, a importância do mesmo para os discentes e docentes do ensino médio.

Referências, lista dos livros, artigo e o trabalhos estudados.

1 História dos máximos e mínimos.

Durante a antiguidade, os matemáticos já demonstravam interesse por problemas de valores extremos (problemas de minimizar e maximizar). Como Pode ser visto em:

> Os primeiros problemas envolvendo máximos e mínimos são encontrados na geometria euclidiana e envolvem perímetros, áreas e volumes. Segundo o históriador Dirk Jan Struik (1894-2000), o primeiro problema de máximo que chegou até nós encontra-se no Livro VI de Os Elementos de Euclides (330-275 a.C.), proposição 27, e consiste na prova que de todos os retângulos de um dado perímetro, o quadrado é o que tem a área máxima.(HERMES e PEREIRA,2013,p.1)

Isso nos mostra que esses problemas estão em paralelo com a história da matemática, pois desde Euclides[1], esses problemas vem sendo estudados por inúmeros matemáticos.

Zenodorus (200 a.C a 140 a.C) estudou a área de uma figura tendo o valor de seu perímetro fixo e o volume de um sólido tendo o valor da superfície fixa. Assim, verificando que entre todos os polígonos com mesmo valor de perímetro, o polígono regular é o que abrange a maior área. Problemas deste tipo vêm sendo abordados pelos matemáticos desde o início da geometria. O que torna seu estudo interessante e ao mesmo tempo instigante.

Destacamos um problema de maximização em geometria dentre os mais antigos que aparece na lenda da criação da cidade de **Cartago**[2] pela princesa Dido. O problema de Dido, como ficou conhecido, é o seguinte: "Entre todas as curvas planas fechadas de um dado comprimento L, encontrar aquela que engloba a maior área". Esse problema já foi solucionado tendo como solução a circunferência, porém em [4] tem como solução o polígono regular de n lados, que este tende a circunferência, solução já citada. A lenda de Dido se tornou conhecida graças a obra épica *Eneida*, escrita pelo grande poeta romano Virgílio (Publius Vergilius Maro, 70 a.C. a 19 a.C.). Dido (Elisa ou Elisha) onde

[1]Euclides de Alexandria foi um escritor, considerado o Pai da Geometria.

[2]Cidade da costa da África do Norte, em uma península próxima da qual se encontra hoje a cidade de Túnis. Foi fundada por colonizadores fenícios Tiro (antes da data tradicional de 814 a.C.

a lenda é sobre a construção da cidade de **Cartago**, região do que é hoje a Tunísia, que historiadores acreditam ter formato circular, o que reforça a lenda matemática. Este problema será solucionado posteriormente fazendo uso de um importante resultado para polígonos, a desigualdade isoperimétrica.

Dentre os problemas clássicos, destacamos o problema de Heron de Alexandria(150 a.C. e 250 d.C.), que além da conhecida forma de determinar a área de um triângulo conhecendo seus lados, tem sua importante obra *"A Métrica"*, que são três livros, mas somente descoberta em 1896 em **Constantinopla;**[3], o primeiro livro trás a dedução da fórmula de Heron de valores extremos que é "Sejam uma reta l e dois pontos P e Q no mesmo lado de l. Determinar um ponto R sobre l de tal forma que a soma $PR + RQ$ seja mínima, ou seja, qual o caminho mais curto de P a Q tocando l.

No século XV, destacamos, o problema de **Regiomotanus**[4] que consiste em calcular a distância de um homem ao pedestal de uma estátua de modo a enxergá-la por um ângulo máximo, está diretamente relacionado com a trigonometria.

Mais um problema bem conhecido deste tópico é o de minimização Pierre de Fermat (1601-1665) a Torricelli (1608-1647) que é: "Determinar um ponto P no plano cuja soma das distâncias deste ponto p com os três pontos dados A, B e C seja mínima". Este problema foi muito estudado por matemáticos famosos como Cavalieri e Simpson. Neste trabalho, apresentamos uma solução para esse problema inspirado na determinação do ponto de Torricelli.

Outro matemático, Giulio Carlo Fagnano dei Toschi (1682-1766), que estudou um problema que leva seu nome, o Problema de Fagnano ou também conhecido como sendo problema do triângulo de Schwarz, problema este que consiste em: "inscrever num triângulo acutângulo um outro triângulo com o menor perímetro possível". Sendo capaz de mostrar existência da solução do problema. Já em 1775, curiosamente, seu filho,também matemático e padre, Giovanni Francesco Fagnano (1715-1797) concluiu a demonstração de seu pai usando o cálculo diferencial. No caso de Fagnano, uma grande diferença em evolução de estudo é o fato de que inicialmente na antiguidade não se estudava o caso de existência de solução, e para a solução, o cálculo diferencial é relativamente "novo", por assim dizer.

[3]O nome da cidade é uma referência ao imperador romano Constantino que tornou esta cidade a capital do Império Romano em 11 de maio do ano 330. Dependendo de seus governantes, teve diferentes nomes no decorrer do tempo.

[4]Johann Müller (1436-1476), um dos maiores matemáticos do século XV, que nasceu na cidade alemã de Köningsberg em Bayern e ficou conhecido pelo nome de Regiomontanus, uma latinização de sua cidade natal.

1.1 Atualmente a relação de máximos e mínimos

Existe uma linha de pesquisa que é a Otimização que estuda máximos e mínimo, que com o desenvolvimento do cálculo contribuiu para a solução de inúmeros problemas, motivado pela sua grande aplicabilidade, como pode ser consultado em:

> Desde sua criação, a grande razão para o sucesso do Cálculo como corpo de conhecimento tem sido sua aplicabilidade a um sem-número de problemas de vários ramos do conhecimento. De fato, o próprio *Principia* obra prima de Newton, publicado em 1687, deixa claro que a grande motivação de Newton para o desenvolvimento dos métodos do Cálculo residiu nas aplicações dos mesmos à Física. (MUNIZ,2015,p.10)

Sendo uma de suas aplicações a busca por a reta tangente a um certo ponto de uma função, derivada ou determinar velocidade instantânea de um corpo, para o trabalho, buscaremos pontos de máximo ou mínimo, ou seja, os pontos onde as retas tangentes ao gráfico nestes pontos são paralelas ao eixo x, sendo uma possibilidade de determinar tais pontos.

O cálculo é um conteúdo de vastas aplicações práticas, onde faremos uso das derivadas aplicadas em geometria plana e espacial, onde por exemplo, existe a possibilidade que o "Problema"da caixa planificada seja levado em consideração para uma fábrica que deseja gastar menos nas suas embalagens, problemas reais que podem ser solucionados via cálculo.

Referente à educação, pois esta é objeto de estudo, segundo [11]

> Alguns dos mais importantes deveres do professor são o de instigar e o de desafiar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes. Atualmente o trabalho docente é marcado pela frustração: os professores têm a sensação de estar forçando os alunos a participarem de ações que visivelmente não os atraem."Sendo uma excelente forma de causar este estímulo a resolução de problemas interessantes."(POLYA,2006,p.15)

Este é outro viés do texto, pois relaciona problemas que são interessantes e podem ser levados à prática, sendo assim, um professor que deseje aproximar seus alunos deste conhecimento pode está usando o mesmo de embasamento.

2 Preliminares.

2.1 Derivada.

Definição 2.1. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função dada. Fixando $x_0 \in I$, diremos que f é **derivável** em x_0 se existir o limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*Nesse caso, tal limite será denominado a **derivada** de f em x_0, sendo denotado por $f'(x_0)$.*

Note que exigir que o limite acima exista é o mesmo que exigir que exista o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

De fato, por um lado, fazendo $x_0 + h = x$, temos $h = x - x_0$; além disso, é claro que $h \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$. Por outro lado, quando escrevemos $f(x_0 + h)$, estamos supondo implicitamente que h é tão pequeno que $x_0 + h$ também pertence a I, mas como estamos calculando o limite e, o domínio I de f é um intervalo aberto, tal suposição não impõe restrição alguma à definição.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemplo 2.1. *Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função constante, então f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x_0) = 0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Solução: Considere $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. *Se $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é $f(x) = x^n$, então f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$*

Solução: Temos, que $f(x) = x^n$ sendo assim segue,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

aplicando em $f(x) = x^n$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

por binômio de Newton,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h}$$

cancelando o primeiro e o último fator já que $\binom{n}{0}x^n h^0 = x^n$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n}{h}$$

onde h é fator comum em cada termo da soma, então simplificando por h temos,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \binom{n}{1}x^{n-1}1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \binom{n}{3}x^{n-3}h^4 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^{n-1},$$

agora aplicando o limite de em que $h \longrightarrow 0$ temos,

$$f'(x) = \binom{n}{1}x^{n-1}1,$$

como $\binom{n}{1} = n$ obtemos,

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Exemplo 2.3. *Se $n \in \mathbb{Z}$ é negativo e $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada (para $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$) por $f(x) = x^n$, então f é derivável em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.*

Solução: Se $n = -m$ com $m > 0$ inteiro, então,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{x^m} - \frac{1}{x_0^m}\right) = -\frac{1}{x^m x_0^m}\left(\frac{x^m - x_0^m}{x - x_0}\right)$$

Daí, pela Definição 2.1 tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= -\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^m x_0^m}\left(\frac{x^m - x_0^m}{x - x_0}\right) \\ &= -\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^m x_0^m}.\lim_{x \to x_0}\left(\frac{x^m - x_0^m}{x - x_0}\right) \\ &= -\frac{1}{x_0^{2m}}.\lim_{x \to x_0}\left(\frac{x^m - x_0^m}{x - x_0}\right). \end{aligned}$$

Fazendo uso do Exemplo 2.2, temos que

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^{2m}}.mx_0^{m-1} = -mx_0^{-m-1} = nx_0^{n-1}.$$

Teorema 2.1. *Sejam I e J intervalos e $f : I \longrightarrow J$ uma bijeção, derivável em todo ponto de I. Para $x \in I$ e $y_0 = f(x_0) \in J$, temos $g(y) = f^{-1} : J \longrightarrow I$ derivável em y_0 se, e só se, $f'(x_0) \neq 0$. Ademais, sendo esse o caso temos,*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demonstração. *Como f é derivável e bijeção, aplicando a Definição 2.1 juntamente com o fato de $g(y) = f^{-1}(x)$ temos,*

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\dfrac{y - y_0}{g(y) - g(y_0)}},$$

e como $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, $x = g(y)$ e $x_0 = g(y_0)$ então obtemos,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f'(x_0)}$$

■

Exemplo 2.4. *Mostre que se $n > 1$ é inteiro e $f : [\,0, +\infty\,) \longrightarrow [\,0, +\infty\,)$ é a função raiz n-ésima, $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, então f não é derivável em $x = 0$ mas é derivável em todo $x > 0$, e $f'(x) = \dfrac{1}{n}.x^{\frac{1}{n-1}}$.*

Solução: O Teorema 2.1 é de grande utilidade na solução deste problema uma vez que a função $f(x) = \sqrt[n]{x}$, raiz n-ésima é inversa de uma função do tipo $g(y) = y^n$ assim,

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n-1}}.$$

Proposição 2.1. *Se $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções deriváveis em $x_0 \in I$, então:*

(a) $f \pm g$ *é derivável em* x_0 *com* $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$*;*

(b) fg *é derivável em* x_0*, com* $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$*;*

(c) Se $g(x_0) \neq 0$*, então* $\frac{f}{g}$ *é derivável em* x_0 *com* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Demonstração. *As demonstrações destas proposições encontra-se em [9], nas páginas 150 e 151.*

■

Teorema 2.2. ***Regra da cadeia***
Sejam e J intervalos abertos e $g : I \longrightarrow J$ *e* $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções dadas. Se g é derivável em* $x_0 \in I$ *e f é derivável em* $g(x_0) \in J$*, então* $f \circ g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *é derivável em* x_0*, com*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Demonstração. *A demonstração deste teorema encontra-se em [9], nas páginas 154 e 155.*

■

Definições referentes a máximos e mínimos com derivadas.

Definição 2.2. *Dado uma função* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$*, dizemos que* $x_0 \in I$ *é* ***ponto de máximo local*** *(res.* ***mínimo local****) para f se existem* $\delta > 0$ *tal que* $f(x_0) \geq f(x)$ *(resp.* $f(x_0) \leq f(x)$*), para todo* $x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*.*

As próximas duas definições também seguem de [9] Temos;

Definição 2.3. *Sejam I contido em* $\mathbb{R}$ *um intervalo e* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função derivável em* $x_0 \in I$*. A* ***reta tangente*** *ao gráfico de f no ponto* $(x_0, f(x_0))$ *é a reta que passa por tal ponto e tem coeficiente angular igual* $f'(x_0)$*.*

Definição 2.4. *Se* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo aberto e* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função derivável, dizemos* $x_0 \in I$ *é um* ***ponto crítico*** *de f se* $f'(x_0) = 0$*.*

Esta definição é importante para obtenção dos pontos de máximo ou mínimo de uma função, visto que a solução da equação $f'(x) = 0$ determina um ponto crítico da função f, sendo assim, este ponto é de máximo, mínimo ou inflexão. O próximo Teorema responde qual destes acontece.

Teorema 2.3. *Sejam I um intervalo aberto,* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função duas vezes derivável e* $x_0 \in I$ *um ponto crítico de* f. *Se* $f'' > 0$ *(resp.*$f'' < 0$*) em I, então* x_0 *é o único ponto de mínimo (resp. máximo) global para* f. *Em particular,* x_0 *é o único ponto crítico de* f.

Demonstração. *A demonstração deste teorema encontra-se em [9] na pagina 173.*

■

Sendo assim a primeira derivada de uma função f nos fornece os pontos críticos, e a segunda derivada $f''(x)$ nos diz se este é de máximo ou mínimo. Onde se $f''(x) > 0$ então este é ponto de mínimo e se $f''(x) < 0$ este é ponto de máximo. Únicos em cada um dos casos.

O caso $f''(x) = 0$ não será analisado, pois não é foco do trabalho.

2.2 Definições e Teoremas referentes a desigualdades

Definição 2.5. *Dados dois números reais positivos* x *e* y *definimos média aritmética destes dois números como sendo* $\frac{x+y}{2}$ *e a média geométrica* $\sqrt{xy}$ *e usemos a seguinte nomenclatura respectivamente para estas,* M_A *e* M_G.

Teorema 2.4. *Para quaisquer dois reais positivos* x *e* y *é válido que* $M_A \geq M_G$ *e a igualdade acontece se* $x = y$.

Demonstração. *Sejam* x *e* y *números reais tais que* $x > 0$ *e* $y > 0$, *temos então que* $\sqrt{x} > 0$ *e* $\sqrt{y} > 0$, *daí segue que* $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ *daí desenvolvendo temos:*

$$\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{x}\sqrt{y}$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$M_A \geq M_G$$

onde se $x = y$ *temos*

$$\frac{x+x}{2} = \sqrt{x.x} \Rightarrow M_A = M_G$$

■

Teorema 2.5. ***(Principio da soma mínima, com produto constante.)*** *Seja P um número real positivo, então dentre todos os pares possíveis de números positivos x e y tais que $x.y = P$, a soma $x + y$ é mínima quando $x = y = \sqrt{P}$.*

Demonstração. *Seja $S = x + y$ e $P = x.y$. Pela desigualdade das médias, obtemos x e $y \in \mathbb{R}_+$, $M_A \geq M_G$ onde $M_A = M_G$ se, somente se $x = y$, daí segue:*

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$x + y \geq \sqrt{xy}$$

$$S \geq \sqrt{xy}$$

onde $S = \sqrt{xy}$ se, somente se $x = y$. Assim se $x = y$ temos que:

$$P = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{P} = y$$

■

Demonstração. *(2) Temos que determinar o valor mínimo da função $f(x) = x + \dfrac{P}{x}$ para $x > 0$. A primeira derivada é $f'(x) = 1 - \dfrac{P}{x^2}$ daí igualando a zero temos:*

$$1 - \frac{P}{x^2} = 0$$

$$\frac{P}{x^2} = 1$$

$$x^2 = P$$

assim, $x = \sqrt{P}$ e segue que $x = y = \sqrt{P}$
onde temos que

$$f''(x) = \frac{2P}{x^3}$$

e sendo assim:

$$f''(\sqrt{P}) = \frac{2P}{\left(\sqrt{P}\right)^3}$$

e como $P > 0$ temos $f''(\sqrt{P}) > 0$, logo este é ponto de mínimo.

$\blacksquare$

Teorema 2.6. ***(Princípio do produto máximo com soma constante.)*** *Dado o número positivo S, prove que entre todos os pares possíveis de números positivos x e y tais que $x + y = S$, o produto xy é máximo quando $x = y = \frac{1}{2}S$.*

Demonstração. *Se $x + y = S$, então $y = S - x$, o produto $xy = x(S - x) = xS - x^2$. Considere a função $f(x) = xS - x^2$. Derivando esta função obtemos:*

$$f'(x) = S - 2x$$

$$\Rightarrow S - 2x = 0$$

$$x = \frac{S}{2} \Rightarrow y = \frac{S}{2}$$

e como $f''(x) = -2 < 0$ temos que este é valor de máximo.

$\blacksquare$

Teorema 2.7. *Se a soma de fatores positivos é constante e o produto destes fatores envolve expoentes naturais, este produto será máximo quando estes fatores forem proporcionais aos seus respectivos expoentes.*

Demonstração. *Seja $x + y = c$ (constante) pretende-se demonstrar que o valor máximo do produto $P = x^n.y^m$ é atingido quando*

$$\frac{x}{y} = \frac{n}{m}$$

onde m e n são números naturais ambos diferentes de zero. Sendo $P = x^n.y^m$ ou seja $P = x.x.x.\cdots x.y.y.y\cdots y$ onde este produto, tem a soma de seus termos sendo, $x + x + \cdots + y + y + \cdots + y = nx + my$, temos que pelo Teorema 2.6 esse produto é máximo quando suas soma tem parcelas iguais, sendo assim P é máximo quando

$$nx = my \Leftrightarrow \frac{x}{m} = \frac{y}{n} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{n}{m}$$

$\blacksquare$

Teorema 2.8. *Entre todos os polígonos regulares com mesmo perímetro o que tem maior área é o polígono regular.*

Demonstração. *A demonstração deste teorema encontra-se em [3], nas páginas 26 e 29.*

■

3 Estudo de máximos e mínimos.

Neste capítulo será solucionado dois dos problemas clássicos, Problema de Dido, que faz com que tenhamos que cometar sobre uma importante desigualdade geométrica, a desigualdade isoperimétrica e, o segundo problema clássico a ser solucionado é o de Fermat. Será feito um estudo do conteúdo de máximos e mínimos que está presente no ensino médio, por exemplo: função quadrática, função esta que será de grande importância para solução dos problemas na parte de aplicações, como também a desigualdade de Cauchy - Schwarz; faremos um estudo de um caso da Física que é o movimento uniformemente variado, assunto este também estudado por alunos do ensino médio, sendo uma aplicação direta de função quadrática, apresentando interdisciplinaridade do conteúdo estudado.

3.1 Solução de problemas clássicos.

3.1.1 Problema de Dido.

O conceito histórico do problema de Dido já foi apresentado na Introdução. Antes de enunciar e solucionar este problema, vamos a um resultado preliminar que será de utilidade para solução deste com relação às áreas de polígonos regulares.

Lema 3.1. *Se $2 < i < j$; i e $j \in \mathbb{N}$, então a área de um polígono regular de i lados é menor do que a área de um polígono regular de j lados, estes tendo o mesmo perímetro P.*

Demonstração. *O que segue será descrito de acordo com a figura abaixo:*

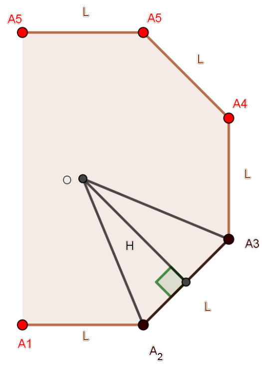

Figura 1: Polígono de n lados.

Sejam L o lado do polígono e H a altura. Vamos definir $A(n)$ como a área deste polígono de n lados regular onde $n > 2 \in \mathbb{N}$, o ponto O como sendo o encontro de todas as mediatrizes do polígono e A_nOA_{n+1} como sendo a área do triângulo com estes três vértices, por exemplo $A(A_2OA_3) = \dfrac{LH}{2}$, que é a área do triângulo com vértices em A_2OA_3 e que está em destaque na Figura 1. Sendo assim $A(n) = n(A_nOA_{n+1})$, pois este polígono de n lados é formado por exatamente n triângulos (A_nOA_{n+1}), onde vale ressaltar que este é só uma forma de contagem e observando que o último triângulo vai ser do tipo A_nOA_1, que não respeita a ordem dita, mas a contagem está correta pois se existem, n lados vamos ter n triângulos congruentes, logo de mesmas áreas, onde todos estes tem base L e altura H, desta forma:

$$A(n) = n\frac{LH}{2} \tag{1}$$

Observe que $\angle A_nOA_{n+1} = \dfrac{2\pi}{n}$, onde o simbolo "$\angle$" ângulo entre os pontos dados com vértice no ponto do centro, visto que o ângulo central 2π será dividido em n partes logo e como H é bissetriz e perpendicular ao lado L no ponto médio de A_nOA_{n+1}, chamaremos este ponto de M_i então $\angle A_nOM_i = \dfrac{\pi}{n}$, sendo assim,

$$tg(\frac{\pi}{n}) = \frac{L}{2H} \Rightarrow \frac{L}{2} = Htg(\frac{\pi}{n}) \tag{2}$$

Com relação ao perímetro tem-se

$$P = nL \Rightarrow L = \frac{P}{n} \tag{3}$$

e com (1), (2) e (3) podemos escrever $A(n)$ em função de P, como segue:

$$\begin{aligned} A(n) &= n.\frac{LH}{2} \\ &= n.\frac{\frac{P}{n}\frac{P}{2n}\frac{1}{tg(\frac{\pi}{n})}}{2} \\ &= \frac{P^2}{4n}.\frac{1}{tg(\frac{\pi}{n})} \\ &= \frac{P^2}{4n\pi}.\frac{1\pi}{tg(\frac{\pi}{2})} \\ &= \frac{P^2}{4n\pi\frac{1}{n}}.\frac{1\pi\frac{1}{n}}{tg(\frac{\pi}{n})} \\ &= \frac{P^2}{4\pi}.\frac{\frac{\pi}{n}}{tg(\frac{\pi}{n})} \end{aligned}$$

Sendo esta uma forma de escrever $A(n)$ em função de P, da qual podemos analisar a função $f(x) = \frac{x}{tgx}$ no intervalo $[\,0, \frac{\pi}{2}\,)$, pois ao analisar neste intervalo podemos obter informações relativas à esta função em $n > 2$, onde para não fazer uso de Cálculo Diferencial, vamos inicialmente analisar a função $g(x) = tgx$, fazendo uso da analise geométrica da $tg\theta$ que é o ponto que pertence a reta paralela ao eixo sen que toca em $(1, 0)$, dado pela reta de abertura θ em relação ao eixo dos cossenos, que toca no arco θ e nesta reta, sendo assim se θ cresce então $tg\theta$ também cresce, ou seja $g(x)$ é estritamente crescente em $[\,0, \frac{\pi}{2}\,)$, consequentemente a função $f(x) = \frac{x}{tgx}$ é estritamente decrescente, daí $A(n)$ é estritamente crescente, quando n cresce logo, chegamos a conclusão que se $i < j$ então $A(i) < A(j)$.

$\blacksquare$

Ou pode ser feito o uso de cálculo diferencial para podemos verificar a derivada da *função* $f(x) = \dfrac{x}{tgx}$, *e assim compreender as condições de crescimento da função.*

3.1.2 Desigualdade Isoperimétrica para polígonos.

Enunciamos tal desigualdade da seguinte forma:

Teorema 3.1. *Para todo polígono de* n *lados,* $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, *área* A *e perímetro* P *temos que* $A < \dfrac{P^2}{4\pi}$.

Demonstração. *Seja* P_n *um polígono regular de* n *lados, com perímetro* P *e área* $A(n)$, *sua área satisfaz* $A(n) < \dfrac{P^2}{4\pi}$ *pelo Lema3.1 anterior, seja* P_Q *um polígono qualquer de* n *lados e mesmo perímetro* P , *com área* A, *temos que* $A \leqslant A(n) < \dfrac{P^2}{4\pi}$ *ou seja* $A < \dfrac{P^2}{4\pi}$

■

Sendo assim, esse resultado é válido para um polígono qualquer e não somente os regulares.

3.1.3 Problema de Dido.

Após esses resultados o problema de Dido fica simples de ser solucionado, sendo este:"Mostrar que a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono de mesmo perímetro."

Solução: Um círculo de perímetro P tem raio igual $\dfrac{P}{2\pi}$, a área deste círculo é:

$$A_c = \pi.\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow A_c = \frac{P^2}{4\pi}$$

e pela desigualdade Isoperimétrica, qualquer polígono de n lados e perímetro P tem a área menor que $\dfrac{P^2}{4\pi}$, sendo assim menor que a do círculo. A solução deste problema pode ser apresentada com base em vários conteúdos ensinados no ensino médio, devendo chamar atenção a solução por meio experimental, pois ao mantermos o perimetro fixo e aumentar o número de lados de um poligono pode- se verificar que o valor da área aumenta, onde a lenda reforça essa solução, e torna o problema mais interessante.

3.1.4 Problema de Fermat.

O problema em questão é "Encontrar um ponto no plano cuja soma das distâncias a três pontos dados A, B e C seja mínima".

Para este problema existem muitas variações, para que seja mais instrutivo que extenso, vamos apresentar uma solução que foi criada pelo matemático Torricelli[5] (1608-1647).

Solução: A resposta para este problema que vai ser apresentada é a criação do ponto de Torricelli. Sejam A, B e C os pontos das quais queremos determinar um quarto ponto P, tal qual a soma $PA + PB + PC$, seja mínima, vamos inicialmente para o caso trivial, onde A, B e C são colineares e $B \in AC$, a solução para este problema é o ponto B, exemplificado na Figura 2.

Figura 2: ABC colineares.

Se estes não forem colineares então são vértices de um triângulo.

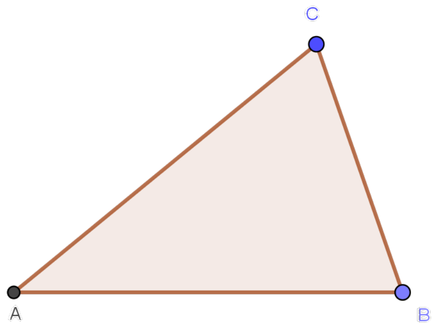

Figura 3: Triângulo ABC.

Assim podemos analisar o local onde o ponto P pode estar, inicialmente fazendo a observação se tal ponto é interno ou externo ao triângulo ABC.

Se este ponto P estiver externo ao triângulo ABC podemos verificar que existe um ponto sob um lado de ABC. Chamemos de P_1, tal que $P_1A < PA$, $P_1B < PB$ e $P_1C < PC$, logo $P_1A + P_1B + P_1C < PA + PB + PC$, como pode ser exemplificado

[5]Evangelista Torricelli foi um físico e matemático italiano, sucessor de Galileu Galilei, que deu inúmeras contribuições teóricas e experimentais para a Ciência.

na Figura 4:

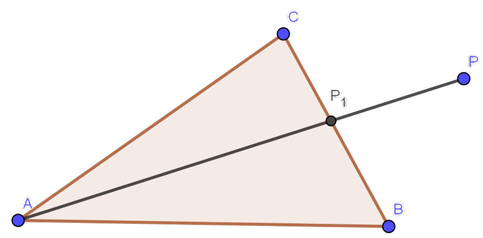

Figura 4: P_1 sob o segmento BC.

Daí temos que este ponto P desejado deve ser interno ao triângulo, ABC, onde segue o método de Torricelli. Construa triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo ABC.

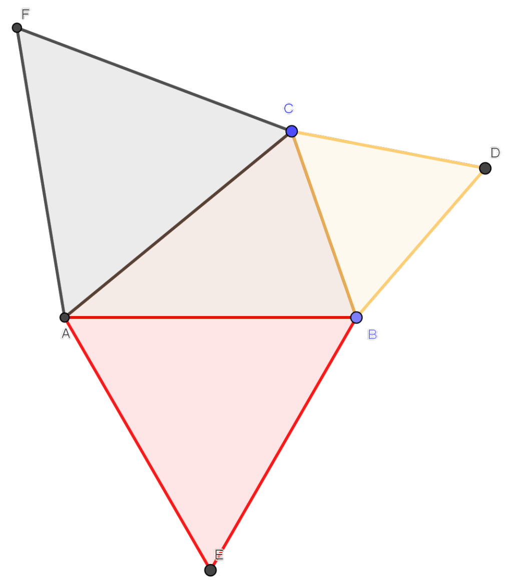

Figura 5: Triângulo equiláteros criados de ABC.

Após, cria-se a circunferências circunscritas a cada um dos triângulos, destes triângulos equiláteros e onde estas três circunferências se encontrarem vai ser o ponto P, que garante a soma $PA + PB + PC$, ser mínima, com restrições determinadas posteriormente que os ângulos internos ao triângulo ABC sejam inferiores a 120°.

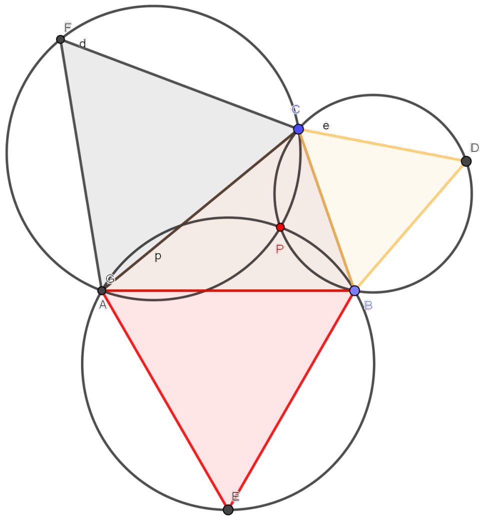

Figura 6: Ponto P.

Ponto este que soluciona o problema, chamado ponto de Torricelli.

A verificação que este ponto tem esta propriedade, pode ser vista em [10], assim como variações para este problema e soluções mais gerais, entre as páginas 61 e 69.

Estes foram dois dos problemas clássicos sitados na Introdução do trabalho 1, selecionados para serem apresentados uma solução. Em seguida será apresentado uma lista de variados problemas, com soluções onde poderão ser vistas as aplicações dos conteúdos (preliminares) apresentados no Capítulo 2.

3.2 Máximos e mínimos para função quadrática.

Nesta subseção, apresentamos a definição de função quadrática, a desigualdade de Cauchy - Schwarz e finalizamos com aplicações em geometria plana e espacial.

3.2.1 Função quadrática

Definição 3.1. *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua com a seguinte lei,* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, onde* a*,* b *e* c*,* $\in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$*, esta é chamada de função quadrática.*

Afim de simplificar a notação chamaremos o número $b^2 - 4ac$ de discriminante e denotamos por Δ.

Exemplo 3.1. *O ponto de máximo ou mínimo de uma função quadrática é* $(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.

Solução 1 (**Por derivadas**) Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ logo $f'(x) = 2ax + b$.Resolvendo a equação $f'(x) = 0$ obtemos:

$$2ax = -b$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

é ponto crítico da função f, além disso, $a \neq 0$ temos $f"(x) = 2a$, e como $a \neq 0$ pelo Teorema 2.3 concluímos que: se $a > 0$ então $f"(x) > 0$ logo o ponto $x = \frac{-b}{2a}$ é um ponto de mínimo da função f, e por outro lado se $a < 0$ o ponto $x = \frac{-b}{2a}$ será ponto de máximo. Calculando a imagem deste ponto pela função f obtemos

$$\begin{aligned} f(\frac{-b}{2a}) &= a(-\frac{b}{2a})^2 + b(\frac{-b}{2a}) + c \\ &= a(\frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= (\frac{b^2}{4a}) - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\ &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\ &= \frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

Solução 2 (**Por forma canônica**) Dado a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos reescrever esta função da seguinte forma

$$\begin{aligned}
f(x) &= a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}) \\
&= a(x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}) \\
&= a((x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})) \\
&= a((x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{4ac - b^2}{4a^2}) \\
&= a((x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})) \\
&= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} \qquad (4)
\end{aligned}$$

para $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{\Delta}{4a}$, podemos escrever

$$f(x) = a(x + m)^2 - k$$

onde temos que $(x+m)^2 \geq 0$ pois o quadrado de qualquer número real é sempre positivo, desta forma se $a > 0$ então $a(x + m)^2 \geq 0$, pois é o produto de dois números reais positivos, daí f tem um valor mínimo que é $-k = \frac{-\Delta}{4a}$, que ocorre quando $x = -m$, já para $a < 0$, temos que $a(x + m^2) \leq 0$, pois é o produto de um número positivo e um negativo, logo esta função vai ter um máximo, que novamente é $-k = \frac{-\Delta}{4a}$, pois vai ser este valor subtraído de outros valores sempre menores que este, que ao realizar esta operação tornam-se menores que ele próprio, sendo assim, assim para $a > 0$, f tem uma valor de mínimo que é $\frac{-\Delta}{4a}$, daí

$$\frac{-\Delta}{4a} = a(x + \frac{b}{2a}) - \frac{\Delta}{4a}$$

$$0 = a(x + \frac{b}{2a})$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

O ponto de mínimo de f é $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$, analogamente para $a < 0$.

Com o conhecimento de função quadráticas, podemos desenvolver a demonstração de uma desigualdade de Cauchy - Schwarz, desigualdade esta que será útil na solução de exemplos posteriores, como segue

3.2.2 Desigualdade de Cauchy - Schwarz

Teorema 3.2. *Se $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ são números reais, então:*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

com a igualdade ocorre se, somente se, $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$*, onde* $b_i \neq 0$

Demonstração. *Para a demonstração dessa desigualdade vamos considerar a seguinte função,* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, onde* a_i *e* b_i *são números reais*

$$f(x) = (a_1 - b_1x)^2 + (a_2 - b_2x)^2 + \cdots + (a_n - b_nx)^2$$

Com relação a função f*, podemos fazer algumas observações:*

(i) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$*, visto que as* n *parcelas de* f *são todas maiores ou igual a zero, já que são quadrados de números reais;*

(ii) Cada parcela de f *é um produto notável;*

(iii) f *é uma função quadrática, já que é uma soma de* n *parcelas de quadrados.*

Desenvolvendo esses produtos notáveis temos:

$$f(x) = a_1^2 - 2a_1b_1x + b_1^2x^2 + a_2^2 - 2a_2b_2x + b_2^2x^2 + \cdots + a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2x^2$$

Colocando x^2 *e* x *em evidência temos*

$$f(x) = (b_1^2 + \cdots + b_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)x + (a_1^2 + \cdots + a_n^2)$$

Logo

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

onde,

$$\begin{cases} a = (b_1^2 + \cdots + b_n^2) \\ b = -2(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) \\ c = (a_1^2 + \cdots + a_n^2) \end{cases}$$

Pela Equação (4) uma função quadrática é maior ou igual a zero somente se $\Delta \leqslant 0$, *onde :*

$$b^2 - 4ac \leqslant 0 \Rightarrow 4(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 - 4(b_1^2 + \cdots + b_n^2)(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \leqslant 0$$

$$\Rightarrow 4(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant 4(b_1^2 + \cdots + b_n^2)(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$$

$$\Rightarrow (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (b_1^2 + \cdots + b_n^2)(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$$

Agora vamos analisar o caso onde $\Delta = 0$, *que equivale dizer que* f *tem apenas um zero, ou seja, existe único* x_0 *tal que* $f(x_0) = 0$, *sendo assim:*

$$(a_1 - b_1x_0)^2 + (a_2 - b_2x_0)^2 + \cdots + (a_n - b_nx_0)^2 = 0$$

Onde por (i), *cada parcela destas é maior ou igual a zero e para esta soma ser zero, temos que ter cada parcela destas igual a zero, sendo assim:*

$$\begin{cases} (a_1 - b_1x_0)^2 = 0 \\ (a_2 - b_2x_0)^2 = 0 \\ \cdots \\ (a_n - b_nx_0)^2 = 0 \end{cases}$$

O que é equivalente em cada linha termos:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{a_1}{b_1} \\ x_0 = \dfrac{a_2}{b_2} \\ \dots \\ x_0 = \dfrac{a_n}{b_n} \end{cases}$$

Daí, podemos concluir que a igualdade estrita acontece em caso de:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

■

3.2.3 Aplicação a Física: MUV- Movimento Uniformemente Variado

Esta seção nos motiva a analisar o fenômeno de corpos caindo no vácuo ou lançamento vertical, sujeitos apenas a ação da gravidade. Um estudo sobre este ponto de vista torna-se interessante na medida em que podemos trabalhar a interdisciplinaridade.

De acordo com Lima (2013,p.144),

> A função quadrática é o modelo matemático que descreve o movimento uniformemente variado
> Ainda tem-se que, sua posição no instante t é dada pela abcissa $f(t)$. O que caracteriza o movimento uniformemente variado é o fato de f ser uma função quadrática:
>
> $$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c \qquad (5)$$
>
> Onde nesta expressão a é a constante de valor da aceleração, b é a velocidade inicial (No instante $t = 0$) e c é a posição inicial do ponto.

Que nos permite determinar o valor da altura em cada movimento de um corpo lançado verticalmente em certas condições conhecidas, em particular, a altura máxima atingida por este. Como por exemplo:

Exemplo 3.2. *Uma bola de futebol é chutada para cima com velocidade igual a* $20m/s$*, determine a altura máxima da bola se considerarmos a gravidade igual a* $10m/s^2$

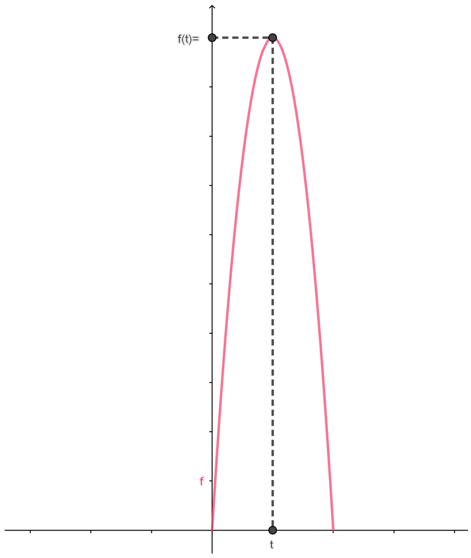

Figura 7: Gráfico da função que descreve o lançamento.

Solução: Temos pelas informações do problema que o valor de $b = 20$ e que $a = -10$,(gravidade) no caso g é o valor da gravidade, onde $a = \frac{1}{2}g$, no momento que a bola esta subindo o movimento da bola é contrário ao sentido da gravidade, por este motivo adotamos o valor negativo, desta forma com os conhecimentos que já temos de função quadrática podemos calcular o valor de t, onde a bola atinge o ponto mais alto, visto que isto acontece no vértice da parábola ao descrever o movimento da Função (5). Para esta função sabemos determinar as coordenadas do vértice que vamos escrever como sendo t_v:

$$t_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow t_v = -\frac{20}{2.\left(\frac{10}{2}\right)} \Rightarrow t_v = 2$$

Nas condições do problema temos que a Função (5) é dada por:

$$f(t) = -5t^2 + 20t,$$

como dito antes está sendo considerado o valor de $-a$ para o movimento logo basta calcular $f(2)$ e obtemos a altura máxima:

$$f(2) = -5(2)^2 + 20.2 \Rightarrow f(2) = 20,$$

desta forma temos que a altura máxima atingida pela bola é de 20m.

Vale salientar que a questão da interdisciplinaridade é interessante do ponto de vista da capacidade de abordagem de problemas variados, sobre o mesmo, adentrando outras áreas do conhecimento, abrindo opções diferentes para trabalhar este assunto em sala de aula por exemplo. Assim, como o próximo estudo que se segue é baseado em interdisciplinaridade.

4 Aplicações.

Neste capítulo mostraremos como determinar valores máximos ou mínimos, em problemas geométricos, sendo dividido na forma de solucionar tais problemas, por desigualdades, com cálculo diferencial e utilizando o Geogebra.

4.1 Aplicações com desigualdades.

Nota: Os exemplos desta subseção foram retirados de [1] e [2].

Exemplo 4.1. *Entre todos os retângulos de mesma área, determinar aquele que tem o perímetro mínimo.*

Solução: Seja ABCD um retângulo conforme representado na Figura 8, onde x e z são dimensões do retângulo, e o perímetro é dado por y, como na figura abaixo:

Figura 8: Retângulo de dimensões x e z.

$$y = 2x + 2z = 2(x + z)$$

Segue do Teorema 2.5 que se o produto xz é constante então a soma $x + z$ é mínima quando $x = z$, o que implica que o retângulo $ABCD$ é, em particular, um quadrado.

Exemplo 4.2. *Num quadrado $ABCD$, inscrever um retângulo $EFGH$, de área máxima onde, $E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CD$ e $H \in DA$*

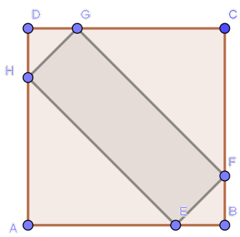

Figura 9: Retângulo EFGH inscrito no quadrado ABCD.

Solução: O retângulo pedido é o da Figura 9 $EFGH$. Os triângulos retângulos BEF e DGH têm hipotenusas iguais e os ângulos agudos E e G iguais por terem lados paralelos e sentidos opostos. Ora, os ângulos $\angle DGH$ e $\angle BFE$ são também iguais, logo $\angle BFE = \angle BEF$, e os 2 triângulos BEF e DGH são congruentes e isósceles.
Temos pois,

$$EB = BF = DG = DH$$

Daí, segue um meio simples de inscrever um retângulo num quadrado. Se tivermos $AB = a$ e $EB = x$ teremos também

$$EF^2 = 2x^2$$

$$EF = x\sqrt{2}$$

$$EF^2 = 2(a-x)^2$$

A área do retângulo y, será

$$y = x\sqrt{2}.(a-x)\sqrt{2} = 2x(a-x)$$

O máximo de y corresponde ao do produto $x(a-x)$.
Como estes fatores têm soma constante, o produto é máximo quando

$$x = a - x$$

$$x = \frac{a}{2}$$

O retângulo de área máxima tem os vértices no ponto médio dos lados do quadrado $ABCD$, logo é um quadrado $EFGH$ inscrito em $ABCD$ e de área igual a sua metade.

Exemplo 4.3. *Num quadrado $ABCD$ quais as dimensões de $EFGH$ inscrito de área minima?*

Solução: Para inscrever, basta ir tomando sobre os lados e, sempre no mesmo sentido, comprimentos AE,BF,CG e DH iguais. Os pontos E,F,G, e H são os vértices do quadrado inscrito. Como mostra na Figura 10,

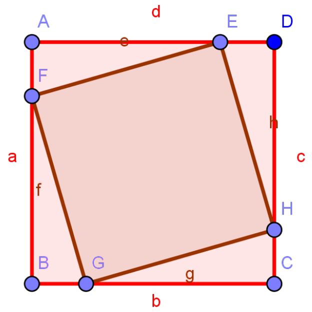

Figura 10: Quadrado EFGH inscrito em ABCD.

Sendo z o lado deste quadrado e y a área que deve ter um valor mínimo, temos

$$y = z^2$$

.
Além disso, se designarmos por a o lado de $ABCD$ e fizermos $BE = x$, teremos $BF = a - x$ e o triângulo EBF dará esta segunda equação

$$z^2 = x^2 + (a - x^2)$$

$$y = 2x^2 - 2ax + a^2$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{2y - a^2}}{2}$$

Para que x seja real, devemos ter

$$2y - a^2 \geq 0$$

O mínimo de y é $\frac{a^2}{2}$. A este mínimo, corresponde $x = \frac{a}{2}$ O retângulo de área máxima inscrito num quadrado é o quadrado de área mínima inscrito no mesmo quadrado 4.1. Este problema será solucionado posteriormente com o uso do GEOGEBRA.

Exemplo 4.4. *Determinar a área máxima do triângulo isósceles que se pode inscrever em uma circunferência em função do raio R do circulo.*

Solução: Se designarmos por y a superfície do triângulo de área máxima, teremos de acordo com a Figura 11,

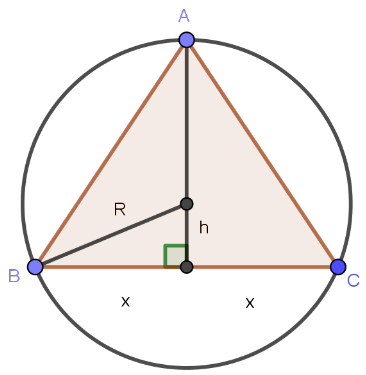

Figura 11: Triângulo ABC isósceles inscrito em circunferência.

$$y = x(R + h) \tag{6}$$

$$x^2 = R^2 - h^2$$

$$x^2 = (R + h)(R - h) \tag{7}$$

Elevando ao quadrado os dois membros da Equação (6), temos

$$y^2 = x^2(R + h)^2 \tag{8}$$

Em (8), substituindo o valor de x^2, tirado de (7), temos

$$y^2 = (R + h)^3(R - h)$$

Como $(R+h)$ e $(R-h)$ tem uma soma constante, y^2 será máximo quando esses fatores forem proporcionais aos respectivos expoentes. Utilizando o resultado do Teorema 2.7. Logo, y^2 será máximo para

$$\frac{R + h}{R - h} = \frac{3}{1}$$

$$h = \frac{1}{2}R$$

A altura H do triângulo ABC é $\dfrac{3R}{2}$ e de $x^2 = R^2 - h^2$ obtemos que $x = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ logo a base do triângulo ABC que é o segmento $BC = R\sqrt{3}$, sendo assim podemos determinar a área deste triângulo, esta pode ser vista em [12] ou [13]:

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{b.h}{2} \\ &= R\sqrt{3}\frac{3R}{2}\frac{1}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \end{aligned}$$

Sendo este o valor da área desejada.

Exemplo 4.5. *Entre todos os triângulos retângulos de mesmo perímetro, determinar o tamanho dos seus catetos em função do perímetro, o que tem a hipotenusa mínima.*

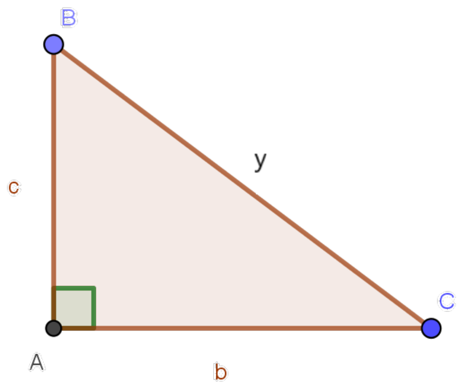

Figura 12: Triângulo retângulo de catetos b, c e hipotenusa y.

Solução: Sejam s o perímetro, b e c os catetos e y, a hipotenusa que deve ser mínima, o enunciado nos dá

$$y + b + c = s \Rightarrow b + c = s - y \tag{9}$$

$$b^2 + c^2 = y^2 \tag{10}$$

porém, temos que

$$(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

$$2bc = (b+c)^2 - (b^2 + c^2)$$

$$2bc = (s-y)^2 - y^2 = s^2 - 2sy$$

logo:

$$bc = \frac{s^2 - 2sy}{2} \tag{11}$$

As equações (9) e (11) mostram que b e c são raízes da equação

$$z^2 - (s-y)z + \frac{s^2 - 2sy}{2} = 0$$

que resolvendo, vem:

$$z = \frac{s - y \pm \sqrt{y^2 + 2sy - s^2}}{2}$$

para que z seja real, devemos ter

$$y^2 + 2sy - s^2 \geq 0$$

As raízes do trinômio em y são

$$y = -s \pm \sqrt{s^2 + s^2} = -s \pm s\sqrt{2}$$

Para z real existir temos que

$$y \leq -s + s\sqrt{2} \text{ e } y \leq -s - s\sqrt{2}$$

O mínimo da hipotenusa y é $y = -s + s\sqrt{2}$ visto que o outro valor de y é negativo, e ao valor de y corresponde $z = \dfrac{2s - s\sqrt{2}}{2}$ os valores de b e c são iguais e cada um sendo $\dfrac{2s - s\sqrt{2}}{2}$, como verificação .

Exemplo 4.6. *Seja (a) a hipotenusa um triângulo retângulo e constante. Determine o valor máximo da sua área em função da hipotenusa, se seus catetos são b e c.*

Solução: Seja y esta área máxima procurada, temos que a área deste triângulo é dada por $y = \dfrac{bc}{2} \Rightarrow bc = 2y$, temos $b^2 + c^2 = a^2$, que podemos deduzir que

$$(b+c)^2 = a^2 + 2bc = a^2 + 4y$$

logo $b + c = \sqrt{a^2 + 4y}$. Assim temos que b e c são raízes de

$$z^2 - \sqrt{a^2 + 4y}z + 2y = 0.$$

Pela relção de soma e produto, resolvendo esta temos que $z = \dfrac{\sqrt{a^2 + 4y} \pm \sqrt{a^2 + 4y - 8y}}{2}$ e para que b e c sejam reais, temos que ter

$$a^2 - 4y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{a^2}{4}$$

Assim, o valor máximo de y é $y = \dfrac{a^2}{4}$ que é valor da área máxima em função de a.

Exemplo 4.7. *Dado um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c,como o da Figura 13*

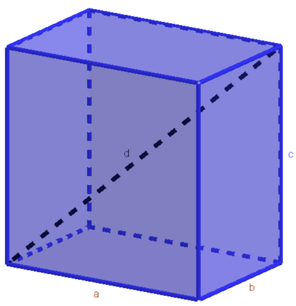

Figura 13: Paralelepípedo de dimensões, a,b e c.

determinar sua diagonal mínima em que caso isso acontece.

Solução: Temos que a diagonal deste paralelepípedo em questão em termos de a, b e c é $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, para tal basta aplicar o Teorema de Pitágoras duas vezes. Sendo assim vamos analisar as seguintes sequências de números reais positivos, (a, b, c) e $(1, 1, 1)$, visto que todo paralelepípedo é múltiplo de algum deste da segunda lista. Aplicando a Desigualdade de Cauchy - Schwarz, para estas duas lista de números temos:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geqslant (a.1 + b.1 + c.1)^2$$

Onde do lado esquerdo temos o quadrado da diagonal multiplicado por 3, e do lado direito um quadrado, como segue

$$d^2.3 \geqslant (a+b+c)^2 \Rightarrow d \geqslant \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$$

Sendo assim devemos usar a razão da desigualdade para verificar se d, chega a este valor, em outras palavras analisar se é válido a igualdade, onde isso deve acontecer pela sequências de números dados se:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1} = k$$

Ou seja,

$$d = \frac{k+k+k}{\sqrt{3}} \Rightarrow d = \frac{3k}{\sqrt{3}} \Rightarrow d = k\sqrt{3}$$

Que é o valor da diagonal de um cubo de lado k, sendo assim esta é mínima quando o paralelepípedo for um cubo.

Exemplo 4.8. *Determine o valor da superfície total de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c, como o da Figura 13.*

Solução: Temos que o valor da superfície total desta que vamos chamar de S_t é $S_t = 2(ab+ac+bc)$. Façamos a escolha das seguintes sequências de números reais positivos (a,b,c) e (b,c,a), aplicando a Desigualdade (Cauchy - Schwarz), para estas sequências de números temos,

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2) \geqslant (ab+bc+ca)^2$$

Analisando esta desigualdade do lado esquerdo temos o produto dos quadrados das diagonais e do lado direito temos metade da superfície total ao quadrado, sendo assim

$$d^2.d^2 \geqslant \left(\frac{S_t}{2}\right)^2 \Rightarrow 4d^4 \geqslant S_t^2 \Rightarrow 2d^2 \geqslant S_t$$

Temos então que a superfície total não supera o de $2d^2$, ainda temos de verificar se atinge este valor, e pela desigualdade em questão, a igualdade vale apenas se,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = k$$

Chamando as frações de k e multiplicando elas temos:

$$\frac{abc}{bca} = k^3 \Rightarrow 1 = k^3 \Rightarrow k = 1$$

Portanto temos que

$$a = b = c = k$$

Vamos atribuir este valor k, igual para todas as dimensões do sólido, desta forma voltando ao valor de S_t, temos

$$d = \sqrt{k^2 + k^2 + k^2} \Rightarrow d = k\sqrt{3}$$

Daí,

$$S_t = 2d^2 \Rightarrow S_t = 2.(k\sqrt{3})^2 \Rightarrow S_t = 6k^2$$

Sendo assim a área S_t máxima tem este valor, que acontece quando o sólido tem todas as arestas de mesmo tamanho, ou seja é um cubo.

Exemplo 4.9. *Determine o volume máximo de um paralelepípedo reto retângulo, de dimensões a, b e c.*

Solução: Novamente fazendo uso da Figura 13 , sabendo que o volume deste sólido é $v = abc$, vamos analisar as seguintes lista de números reais, (a, b, c) e (bc, ac, ab), aplicando a Desigualdade (Cauchy - Schwarz) temos,

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2) \geqslant (abc + bac + cab)^2$$

Onde a expressão da diagonal aparece, basta ver o Exemplo 4.7, desta forma podemos afirmar que,

$$d^2(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2) \geqslant (3abc)^2$$

Temos que todos estes valores são maiores que zero logo, podemos retirar a raiz quadrada de todos estes, assim ficamos com a seguinte expressão,

$$\frac{d\sqrt{(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)}}{3} \geqslant v$$

Sendo assim v não supera este valor, porém ainda resta analisar o caso da igualdade estrita, ou seja, para os valores:

$$\frac{a}{bc} = \frac{b}{ac} = \frac{c}{ab} = k$$

Onde relacionando estas frações chegaremos em,

$$a = b = c = k$$

Desta forma substituindo a, b e c por k o volume fica sendo,

$$v = \frac{d\sqrt{3k^4}}{3} \Rightarrow v = \frac{dk^2\sqrt{3}}{3} \tag{12}$$

Analisando o valor de d, como $a = b = c = k \Rightarrow d = k\sqrt{3}$, substituindo este valor em (11) obtemos,

$$v = k\sqrt{3}.\frac{k^2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow v = k^3$$

Sendo este o volume de um cubo de aresta k.

4.2 Aplicações de Cálculo Diferencial.

Exemplo 4.10. *Dada uma esfera de raio R, em função de R, determine as dimensões do cilindro reto de volume máximo que pode ser nela inscrito.*

Solução: Seja este o cilindro de raio da base r e altura h, o raio da esfera já foi dado como sendo R, então temos que o volume do cilindro é dado por $V(h, r) = \pi.r^2.h$, que é uma função que depende tanto de r com de h não sendo nosso foco de estudo por isso vamos inicialmente usar condições geométricas para escrever essa função dependendo somente de uma das variáveis. Dado a figura:

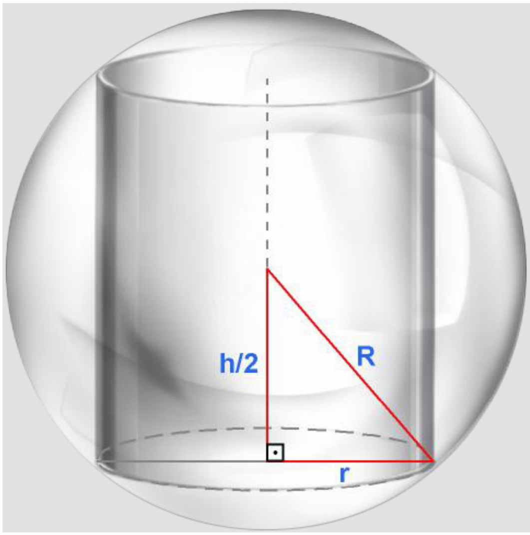

Figura 14: Cilindro inscrito em uma esfera.

Pelo Teorema de Pitágoras temos que $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$. Assim, substituindo o valor de r^2 em $V(h, r)$ temos $V(h) = \pi(hR^2 - \frac{h^3}{4})$ para $0 < h < 2R$. Para determinar o máximo desta função, deve-se derivar e igualar a zero,como segue:

$$V'(h) = \pi(R^2 - \frac{3h^2}{4})$$

$$V'(h) = 0$$

$$h = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$$

e como

$$V''(h) = -\pi\frac{3h}{2}$$

onde

$$V''(h) < 0$$

então este é ponto de máximo e podemos determinar R. Pois,

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - \frac{(\frac{2\sqrt{3}R}{3})^2}{4} \\ &= R^2 - \frac{R^2}{3} \\ &= \frac{3R^2 - R^2}{3} \\ &= \frac{2R^2}{3} \end{aligned}$$

Sendo assim as dimensões do cilindro em função de R são $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $h = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Exemplo 4.11. *Entre os triângulos retângulos ABC de mesma hipotenusa BC, determinar o valor do perímetro máximo em função da hipotenusa.*

Solução: Seja y o perímetro deste triângulo, $BC = a$, sendo a hipotenusa, x um cateto então pelo Teorema de Pitágoras o outro cateto é $\sqrt{a^2 - x^2}$, sendo assim:

$$y = a + x + \sqrt{a^2 - x^2}$$

Aplicando a derivada desta temos

$$y' = 1 + \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

para $y' = 0$ segue

$$x = \sqrt{a^2 - x^2}$$

elevando ao quadrado ambos os lados

$$x^2 = a^2 - x^2$$

$$2x^2 - a = 0$$

$$x = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

então

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

visto que $x > 0$ e como $y'' < 0$ então este ponto é de máximo. Desta forma substituindo x em $\sqrt{a^2 - x^2}$ temos que este triângulo tem lados de tamanhos em função de a a, $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, assim concluímos que o perímetro máximo é obtido somando estes valores.

$$\begin{aligned} y &= a + x + \sqrt{a^2 - x^2} \\ &= a + \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ &= a + a\sqrt{2} \end{aligned}$$

Sendo este o perímetro máximo em função da hipotenusa.

Exemplo 4.12. *Entre todos os triângulos que tem mesma base e perímetro, determinar o que tem área máxima.*

Solução: Seja a base fixa deste e p semi-perímetro fixo onde os outros dois lados são b e x variáveis, por Heron para determinar áreas de triângulos conhecendo seus lados, temos que: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-x)}$ como p e $(p-a)$ são constantes S é máximo quando a função $g(x) = (p-b)(p-x)$ for máxima. onde $b = 2p - a - x$ substituindo segue

$$\begin{aligned} g(x) &= (p-b)(p-x) \\ &= p^2 - px - bp + bx \\ &= p^2 - px - (2p - a - x)p + (2p - a - x)x \\ &= p^2 - px - 2p^2 + ap + xp + 2px - ax - x^2 \\ &= -p^2 + ap + x(2p - a) - x^2 \\ &= -x^2 + x(2p - a) + (ap - p^2) \end{aligned}$$

onde $g'(x) = -2x + 2p - a$ e $g''(x) = -2; g''(x) < 0$ onde ao fazer $g'(x) = 0$ vamos obter o valor de máximo, sendo assim, para tal temos

$$-2x = a - 2p$$

$$x = \frac{2p - a}{2}$$

$$x = \frac{a + b + x - a}{2}$$

$$2x = b + x$$

$$x = b$$

sendo assim o triângulo em questão tem base a e é isósceles de lados iguais a b. Desta forma sua área é, $S = \sqrt{\frac{2b+a}{2}(\frac{2b+a}{2} - a)(\frac{2b+a}{2} - b)(\frac{2b+a}{2} - b)}$ onde,

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{2b+a}{2}(\frac{2b+a}{2} - a)(\frac{2b+a}{2} - b)^2} \\ &= \left(\frac{2b+a}{2} - b\right)\sqrt{(\frac{2b+a}{2})(\frac{2b-a}{2})} \\ &= \frac{a}{4}\sqrt{(2b)^2 - a^2} \end{aligned}$$

onde a é fixo, sendo assim temos esta área dependendo do valor de b, que é o mesmo para os outros dois lados.

Exemplo 4.13. *Dentre todos os retângulos que estão inscritos em uma circunferência de raio r, determinar aquele que tem a área máxima e o valor desta área.*

Solução: Utilizando conhecimentos de geometria analítica e desenhando esta situação de forma a facilitar as contas em um plano de coordenadas conhecidas como na figura 15:

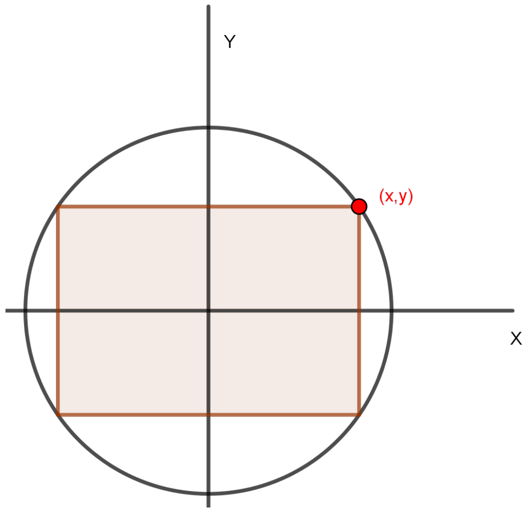

Figura 15: Retângulo inscrito em circunferência.

Desta forma este retângulo tem área $A(x, y)$ igual a $4xy$, visto que este retângulo tem $2x$ de largura e $2y$ de altura e seus vértices estão sobre a circunferência de centro no plano cartesiano, o que favorece escrever que $x^2+y^2 = r^2$ onde r é o raio da circunferência, assim obtemos que $y^2 = r^2 - x^2$, onde o valor não negativo de y é $\sqrt{r^2 - x^2}$, então $A(x) = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$, aplicando as derivadas nesta função de x, obtemos.

$$A'(x) = \frac{4r^2 - 8x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

onde para $A'(x) = 0$ temos,

$$4r^2 - 8x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{r^2}{2} \Rightarrow x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Para determinar a área máxima vamos calcular $A(\frac{r\sqrt{2}}{2})$. Como segue:

$$\begin{aligned} A(\frac{r\sqrt{2}}{2}) &= 4(\frac{r\sqrt{2}}{2})\sqrt{r^2 - (\frac{r\sqrt{2}}{2})^2} \\ &= 2r\sqrt{2}\sqrt{r^2 - \frac{2r^2}{4}} \\ &= 2r\sqrt{2}\sqrt{\frac{r^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2r\sqrt{2}\frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{2}} \\ &= 2r^2 \end{aligned}$$

Sendo assim $2r^2$ é a área máxima, em função do raio r da circunferência circunscrita e este retângulo é na verdade um quadrado de lado $r\sqrt{2}$. Vale ressaltar que deve ser verificado que $A''(\frac{r\sqrt{2}}{2}) < 0$ para constatar que $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ é ponto de máximo para esta função, somente para este pois $r > 0$, como $A'(x) = \frac{4r^2 - 8x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ então derivando novamente temos:

$$\begin{aligned} A''(x) &= \frac{-16x\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}(4r^2 - 8x^2)}{(\sqrt{r^2 - x^2})^2} \\ &= \frac{-16(r^2 - x^2 + x)(4r^2 - 8x^2))}{\sqrt{r^2 - x^2}(r^2 - x^2)} \\ &= \frac{-16xr^2 + 16x^3 + 4xr^2 - 8x^3}{\sqrt{(r^2 - x^2)^3}} \\ &= \frac{-12xr^2 + 8x^3}{\sqrt{(r^2 - x^2)^3}} \\ &= \frac{4x(2x^2 - 3r^2)}{\sqrt{(r^2 - x^2)^3}} \end{aligned}$$

Devemos calcular $A''(\frac{r\sqrt{2}}{2})$, daí

$$\begin{aligned} A''(\frac{r\sqrt{2}}{2}) &= \frac{\frac{4r\sqrt{2}}{2}(2(\frac{r\sqrt{2}}{2})^2) - 3r^2}{\sqrt{(r^2 - (\frac{r\sqrt{2}}{2})^2)^3}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(-2r^2)}{\frac{\sqrt{2}r^3}{4}} \\ &= 2r\sqrt{2}(-2r^2)\frac{4}{\sqrt{2}r^3} \\ &= -16 \end{aligned}$$

ou seja, $A''(\frac{r\sqrt{2}}{2}) < 0$. Este ponto é de máximo. Este problema será solucionado posteriormente com o uso do GEOGEBRA.

Exemplo 4.14. *Dentre todos os retângulos que estão inscritos em um lo de raio r, determinar aquele que tem o perímetro máximo e seu valor.*

Solução: Fazendo uso da Figura 15, este retângulo tem $2x$ de largura e $2y$ de altura, sendo assim seu perímetro $\rho(x, y) = 4x + 4y$ e do Teorema de Pitágoras temos que $x^2+y^2 = r^2$. Após isolar y, como $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, tem-se que $\rho(x) = 4x+4\sqrt{r^2 - x^2}$, onde devemos determinar o mínimo desta função, sendo assim:

$$\rho'(x) = 4 - \frac{4x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

onde para $\rho'(x) = 0$ temos,

$$0 = 4 - \frac{4x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{4x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow 4x = 4\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = r^2 - x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = r^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Sendo assim o retângulo em questão tem $r\sqrt{2}$ de largura e consequentemente como $y = \frac{r\sqrt{2}}{2}$, tem $r\sqrt{2}$ de altura sendo um quadrado, onde para determinar o valor deste perímetro máximo, basta calcular, $\rho(\frac{r\sqrt{2}}{2})$, onde este valor é $2\sqrt{2}r$. E como no exemplo 4.11, devemos calcular $\rho''(x)$ e verificar que $\rho''(\frac{r\sqrt{2}}{2}) < 0$ para constatar quecírcu $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ é ponto de máximo para esta função, como $\rho'(x) = 4 - \frac{4x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ então derivando novamente temos:

$$\begin{aligned}
\rho''(x) &= 0 - \frac{4\sqrt{r^2-x^2} - 4x\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}(-2x)}{r^2-x^2} \\
&= -[\frac{4\sqrt{r^2-x^2} + \dfrac{4x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}}{r^2-x^2}] \\
&= -[\frac{4r^2-4x^2+4x^2}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}}] \\
&= -\frac{4r^2}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}}
\end{aligned}$$

Que podemos concluir que independente de $r > 0$ temos $\rho''(x) < 0$, logo ponto de máximo.

Exemplo 4.15. *Uma caixa tem base na forma de um quadrado e é aberta na parte superior. Se a caixa tem volume de $V cm^3$, determine as dimensões da caixa que minimiza a quantidade de material usado.*

Solução: O que este problema deseja é determinar as dimensões de uma caixa de base quadrada, sem tampa que torna a área lateral dessa caixa a menor possível. Desta forma, observando a figura:

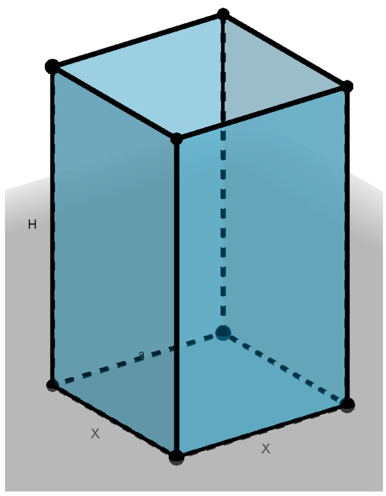

Figura 16: Caixa de base quadrada.

Sendo uma caixa de base quadrada com dimensão x e altura H que devem ser determinadas em função do voluma V de acordo com que a área total(sem a tampa) seja calculada como sendo mínima, desta forma, o volume V da caixa é

$$V = x^2.H \tag{13}$$

e a área total sem a tampa, dependendo de x e H é

$$A(x, H) = 4xH + x^2 \tag{14}$$

isolando H em (10) e substituindo em (11) temos

$$A(x) = \frac{4V}{x} + x^2$$

sendo esta função de x que devemos calcular o mínimo, desta forma segue,

$$A(x) = \frac{4V}{x} + x^2 \Rightarrow A'(x) = \frac{-4V}{x^2} + 2x$$

onde para $A'(x)$=0 temos

$$2x = \frac{4V}{x^2} \Rightarrow 2x^3 = 4V \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V}$$

sendo assim podemos determinar H em função do volume V, pois de (10)temos, $H = \dfrac{V}{x^2}$ e como $x = \sqrt[3]{2V}$, obtêm-se que $H = \dfrac{\sqrt[3]{4V}}{4}$, sendo assim as dimensões pedidas para um volume V são $\{\dfrac{\sqrt[3]{4V}}{4}, \sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\}$, para determinar que este ponto é de mínimo usamos a segunda derivada de $A(x)$, pois

$$A'(x) = \frac{-4V}{x^2} + 2x \Rightarrow A''(x) = \frac{8V}{x^3} + 2$$

onde se calcula $A''(\sqrt[3]{2V})$, como segue:

$$\begin{aligned} A''(\sqrt[3]{2V}) &= \frac{8V}{(\sqrt[3]{2V})^2 + 2} \\ &= \frac{8V}{2v} + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

ou seja $A''(\sqrt[3]{2V}) > 0$ logo este é ponto de mínimo.

4.3 Aplicações com o GEOGEBRA.

Os problemas que serão solucionados utilizando o **Geogebra**[6], são problemas que já foram solucionados anteriormente, desta forma faz com que possamos conferir seus resultados computacionalmente e comprovar a possibilidade de usar esse software em sala.

Outra observação, que destacamos é que as soluções dos problemas anteriores são soluções gerais, escritas em funções de determinadas variáveis e no caso das soluções a seguir, esses valores serão conhecidos, ou seja, será apresentado uma solução numérica, um caso particular da solução encontrada.

Exemplo 4.16. *Num quadrado $ABCD$ inscreva um outro quadrado $EFGH$ de área mínima.*

Solução: Este problema já foi solucionado no Exemplo 4.3 e foi visto que esta área mínima acontece quando o quadrado $EFGH$ é ponto médio de cada segmento de $ABCD$, a verificação desta solução podes ser feita com o Geogebra, inicialmente criamos um quadrado com lado de 4 unidades por exemplo.

[6]GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. Sua distribuição é livre, é escrito em linguagem Java.

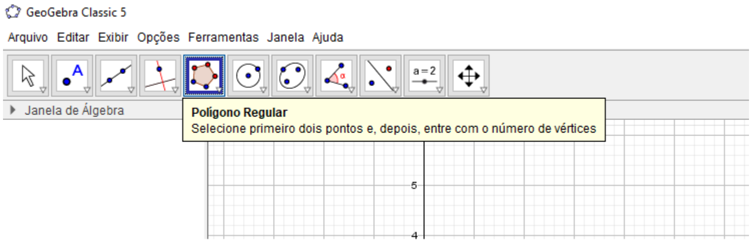

Figura 17: Comando "Polígono Regular".

Outra vantagem do programa é que seus comandos são autoexplicativos, desta forma vamos escolher os pontos $(0,0)$ e $(4,0)$.

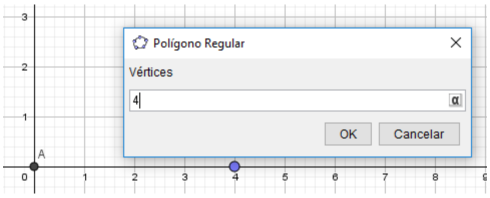

Figura 18: Opção de vértices.

Desta forma, vai ser gerado um quadrado com todos os lados de tamanho 4 *unidades*, conforme figura abaixo

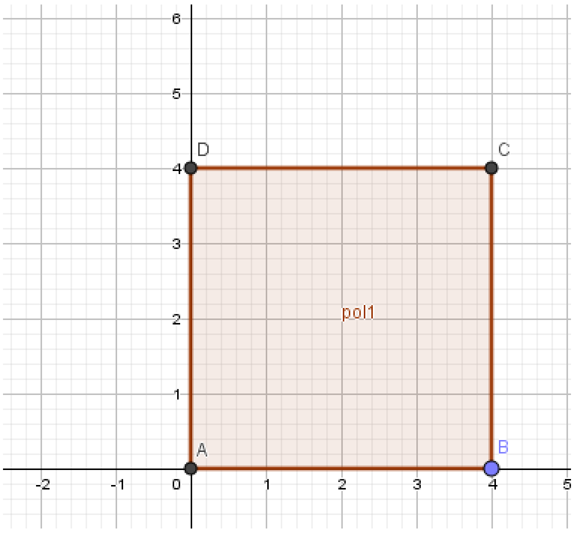

Figura 19: Quadrado ABCD

Para a escolha do quadrado inscrito a este, vamos escolher inicialmente pontos que estão sobre os lados do quadrado $ABCD$ e que dista 1 *unidade* de cada um dos vértices, usando o comando de construção de polígono, obtendo assim a Figura 21,

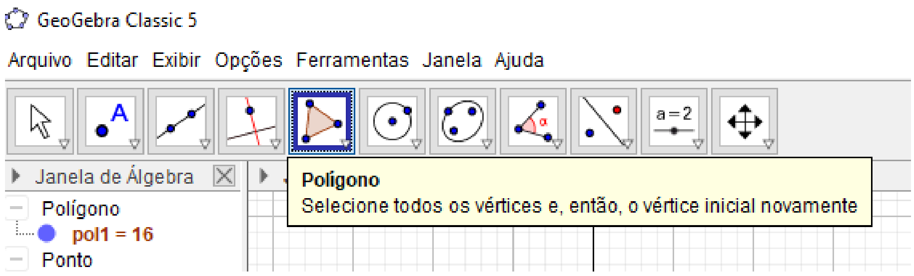

Figura 20: Criar polígonos escolhendo os pontos.

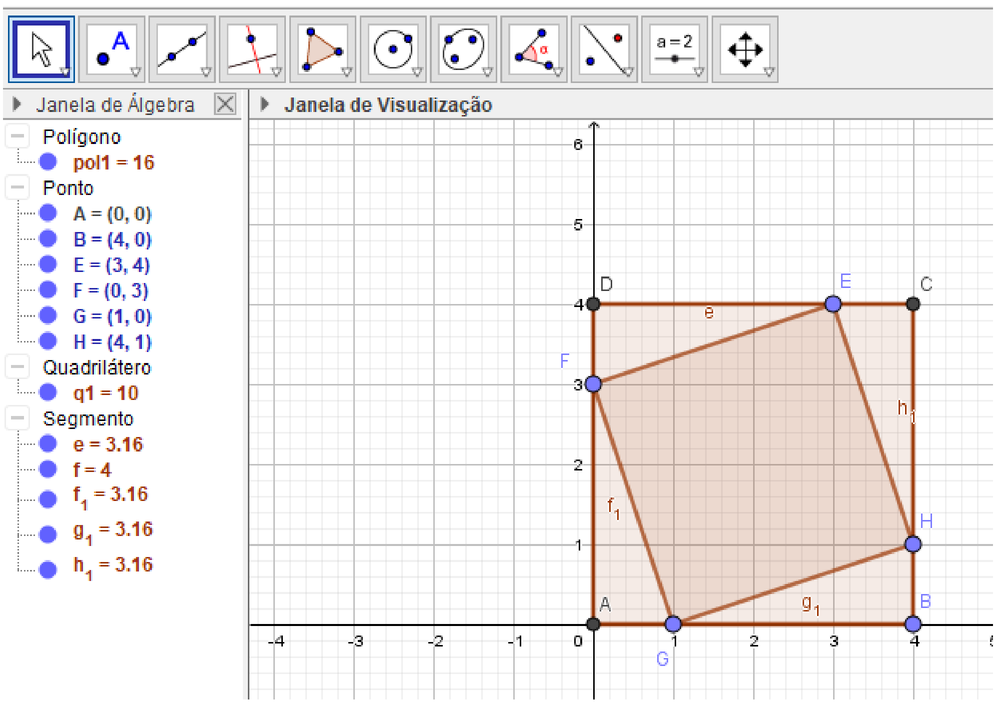

Figura 21: Quadrado EFGH.

Utilizando o comando de área (valor numérico da área), obtemos o valor numérico da área do quadrado $EFGH$, como podemos ver a seguir,

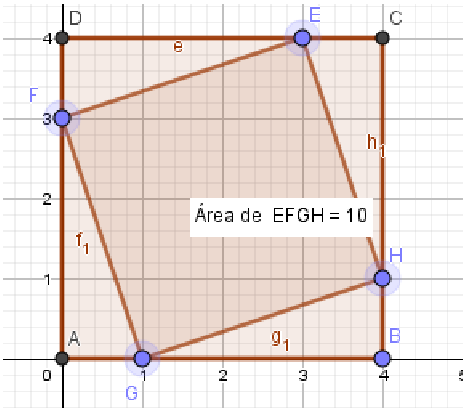

Figura 22: Área de EFGH.

Inicialmente este quadrado tem área 10, agora na (Janela de Álgebra) segurando a tecla *CTRL*, para poder selecionar itens distintos, selecione os vértices de $EFGH$, clica com o botão direito do *mouse* e escolhe a opção "animar".

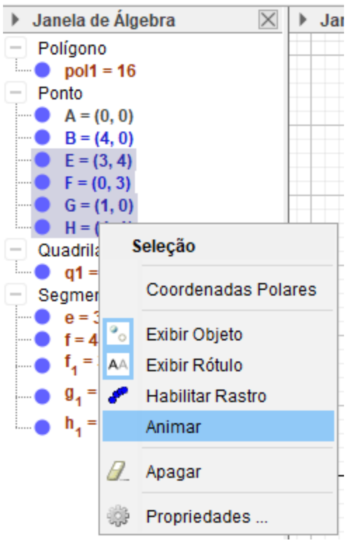

Figura 23: Opção "Animar".

Assim, nota-se que o valor da área do quadrado $EFGH$ muda e que esta vai ser exatamente 8 *unidades* quando os vértices estão sobre os pontos médios de cada um dos lados do quadrado $ABCD$. Como tinha sido respondido no Exemplo 4.3.

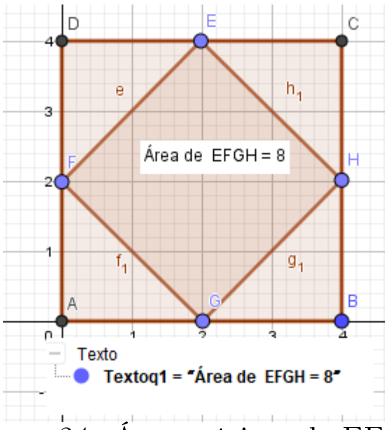

Figura 24: Área mínima de EFGH.

Observe que além de acompanhar o valor da área sobre a figura, na "Janela de Álgebra" este valor também aparece, como está em destaque acima.

Exemplo 4.17. *Dentre todos os retângulos que estão inscritos em uma circunferência de raio r, determinar aquele que tem a área máxima e o valor desta área.*

Solução: De acordo com a solução do Exemplo 4.13, esta área máxima deve ter o valor de $2r^2$, onde r é o raio da circunferência, na qual o retângulo está inscrito. Desta forma, para a utilização so software Geogebra vamos fixar um valor numérico para este raio, por exemplo 5 *unidades*.

Assim, vamos inicialmente determinar uma circunferência de raio 5 *unidades* com o comando:

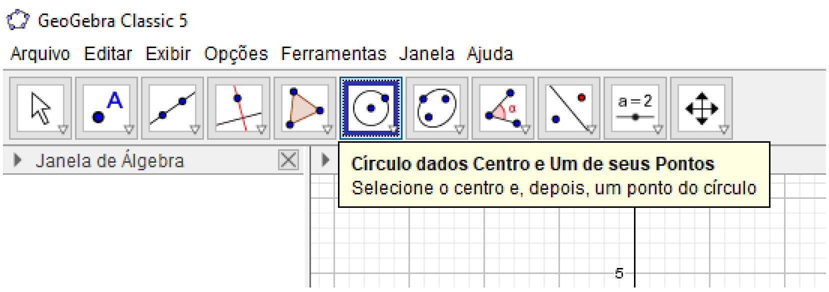

Figura 25: Criar uma circunferência com centro e ponto.

Basta no plano "clicar"em $(0,0)$ e $(5,0)$ com segue:

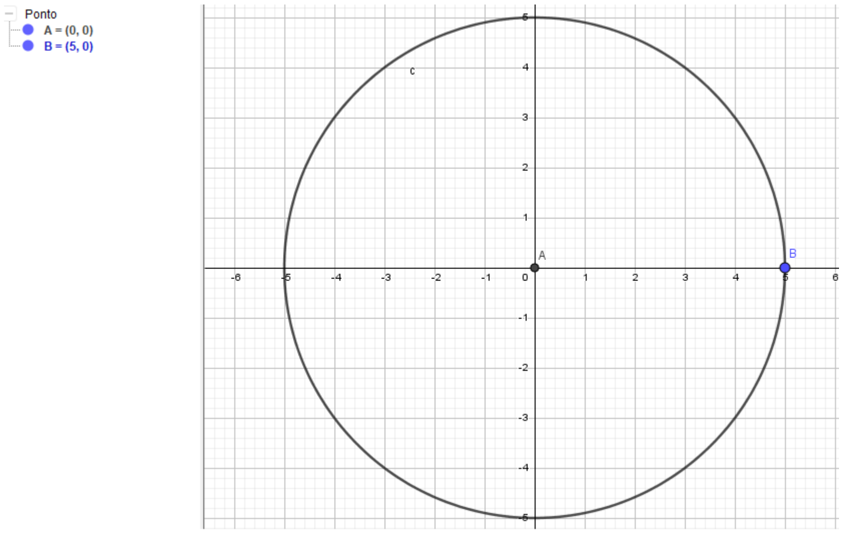

Figura 26: Circunferência de raio fixo.

Agora, utilizando o comando "ponto", determinamos um ponto C sobre o o círculo no primeiro quadrante.

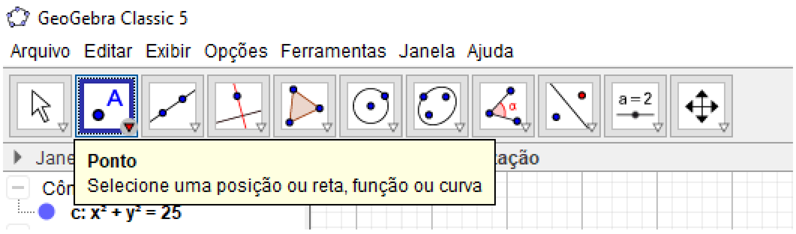

Figura 27: Comando "ponto".

Como segue,

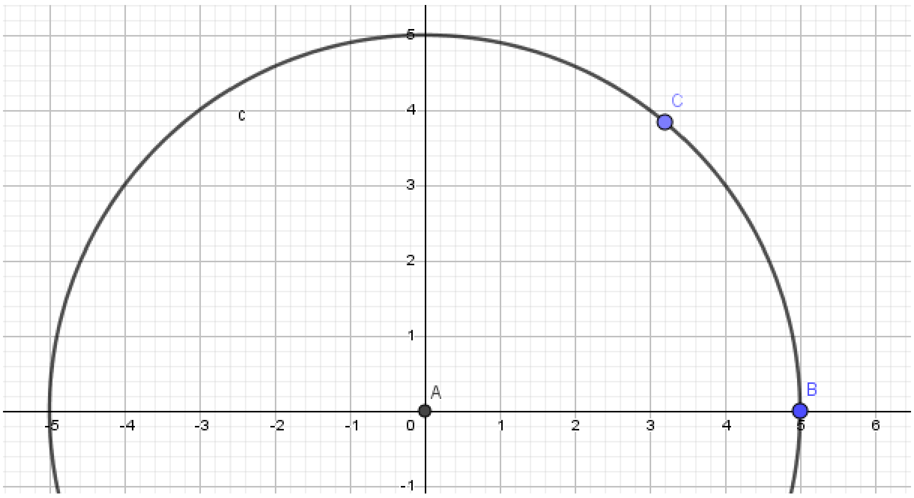

Figura 28: Ponto sob a circunferência no primeiro quadrante.

Fazendo uso do comando "Reflexão em Relação uma Reta",

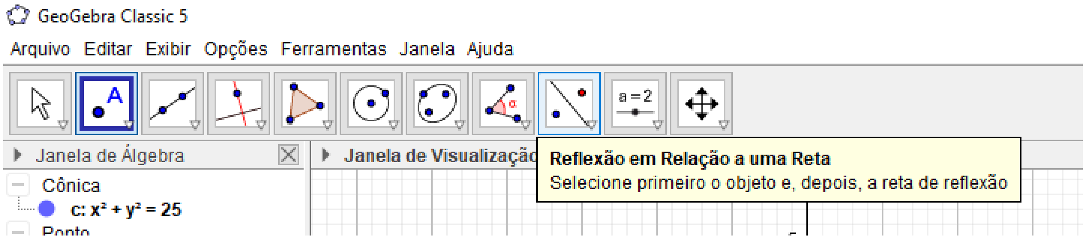

Figura 29: Utilizar o comando de Reflexão em Relação uma Reta em C e o eixo Y.

Aplicado neste ponto C criado anteriormente com relação aos eixo Y um novo ponto C' vai aparecer no 2° quadrante,

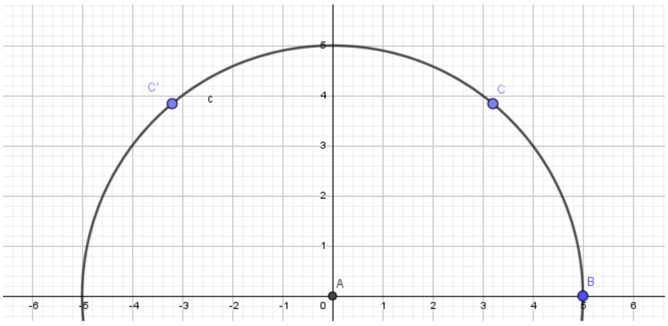

Figura 30: Comando "Reflexão em Relação uma Reta".

Posteriormente, utilizando novamente o comando "Reflexão em Relação uma Reta"com relação ao eixo X, obtemos um ponto C'' no 3° quadrante,

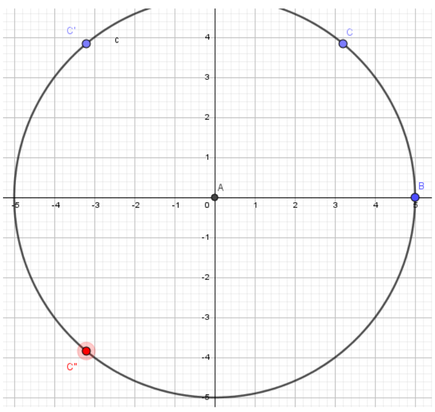

Figura 31: Criando o ponto C”.

Seguindo esta lógica, podemos criar um ponto C''' no 4° quadrante, refletindo o ponto C'' em relação ao eixo Y, como segue:

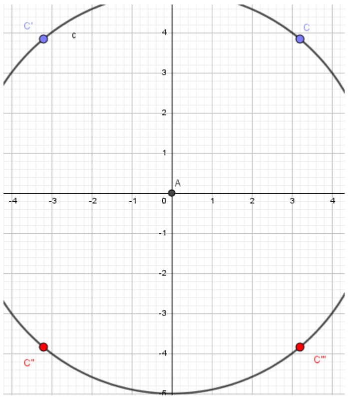

Figura 32: Criando o ponto C"'.

A motivação para tal é que com estes pontos e utilizando o comando "Polígono",

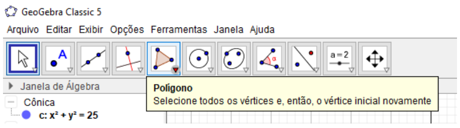

Figura 33: Comando polígono.

Podemos criar com os ponto $\{C, C'C'', C'''\}$ um retângulo inscrito e ao movimentar o ponto C este retângulo continua inscrito no círculo de raio 5 unidades, de forma variável, podendo assim analisar todos os retângulos deste tipo.

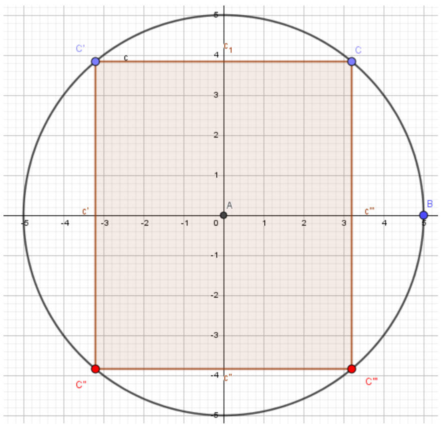

Figura 34: Retângulo CC'C"C"' inscrito em uma circunferência de raio fixo.

Fazendo uso do comando "área"que foi apresentado no Exemplo anterior 4.16, vamos determinar o valor da área deste retângulo , tanto sob a figura como na "Janela de Álgebra"

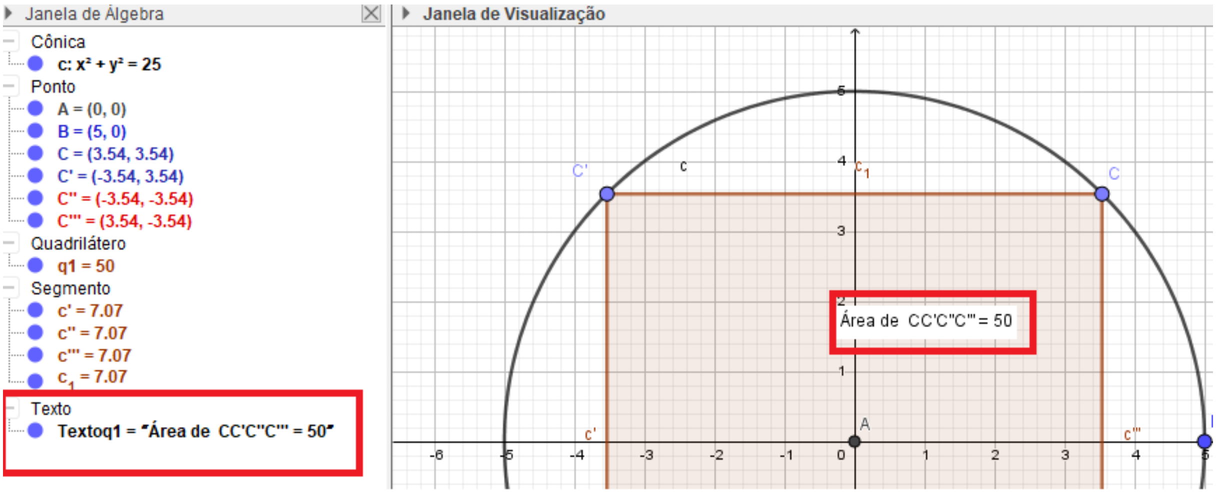

Figura 35: Janela de Álgebra do exemplo 4.13.

Pode-se perceber que ao movimentar o ponto C esta área vai de 0 *unidades* de área ate 50 *unidades* de área que é o valor máximo desta, que pode ser verificado numericamente ao movimentar o ponto C. Por outro lado, tomando o caso particular do raio igual a 5 e fazendo uso da solução apresentada no Exemplo 4.13 obtemos a área máxima também igual a 50.

Podemos conferir que na solução do Exemplo 4.13, é calculado que esta área máxima acontece quando o retângulo é um quadrado de lado $r\sqrt{2}$, que neste caso para $r = 5$ devemos ter que o lado deste quadrado é $5\sqrt{2} = 7,07$, valor este que pode ser conferido na "Janela de Álgebra".

Clicando sobre qualquer lado do retângulo $CC'C''C'''$, na "Janela de Álgebra"vai ficar em destaque o tamanho deste segmento, que neste caso todos têm o valor de $7,07$, como esperado.

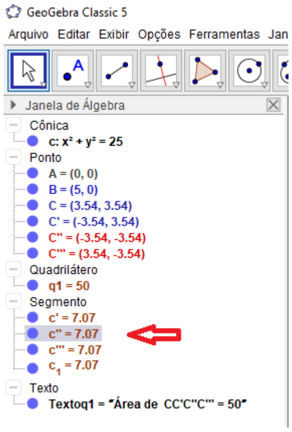

Figura 36: Tamanho do lado do retângulo CC'C"C"'.

Para finalizar esta seção, apresentamos um exemplo e sua solução através do uso do Geogebra, problema esse que não foi abordado ao longo deste trabalho, mostrando mais uma vez que essa ferramenta computacional pode contribuir para o desenvolvimento da geometria em sala de aula.

Exemplo 4.18. *Dado uma folha quadrada de lado* 10 *unidades, retirando-se quatro quadrados de lado x. Determine a planificação tal qual o sólido tem o volume máximo com altura x.*

Solução: Este é o problema da caixa planificada, vamos inicialmente entender como vai acontecer com a planificação ao tornar-se sólido:

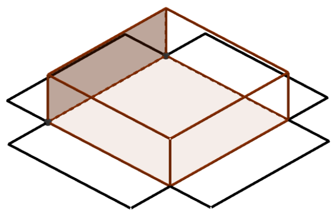

Figura 37: Região da caixa.

Onde pelo que foi informado no problema, este tem área da base $(10-2x)^2$ e altura x. Então vamos construir tais condições no Geogebra.

No plano, selecione dois pontos que distam 10 unidades , digamos $A = (0, 0)$ e $B = (10, 0)$,e utilize o comando "polígono regular".

Agora, faça uso do comando "Controle deslizante", que é um valor variável dentro de um intervalo pré estabelecido, assim, crie o (controle) e chame este de "c"(canto),

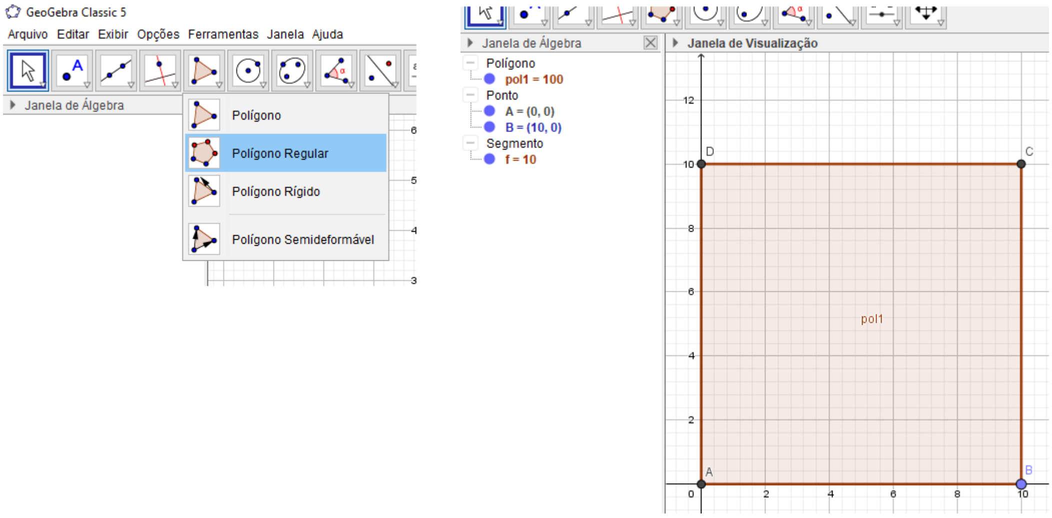

Figura 38: Polígono base.

com variação de 0 ate 5, as opções aparecerão automaticamente, quando for fazendo-o,

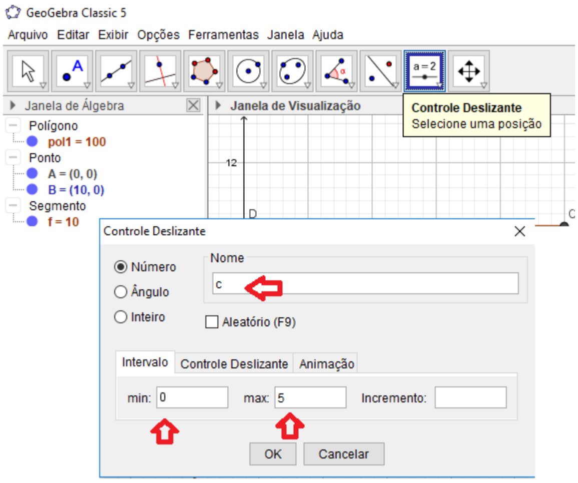

Figura 39: Controle deslizante.

Após isso, temos que criar os pontos variáveis. Para isso, vamos criá-los na (caixa de entrada), opção de digitação, todas as funções feitas ao clicar nos "ícones"podem ser feitas nesta função, que é uma outra forma de criar elementos no Geogebra.

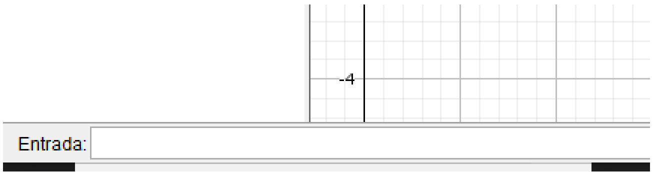

Figura 40: Caixa de entrada.

Digite os seguintes pontos: $E = (0 + c, 10); F = (10 - c, 10); G = (0 + c, 0); H = (10 - c, 0); I = (0, 10 - c); J = (10, +c); K = (0, c)$ e $L = (10, 10 - c)$, a seguir, terá a seguinte configuração, móvel ao variar o controle deslizante:

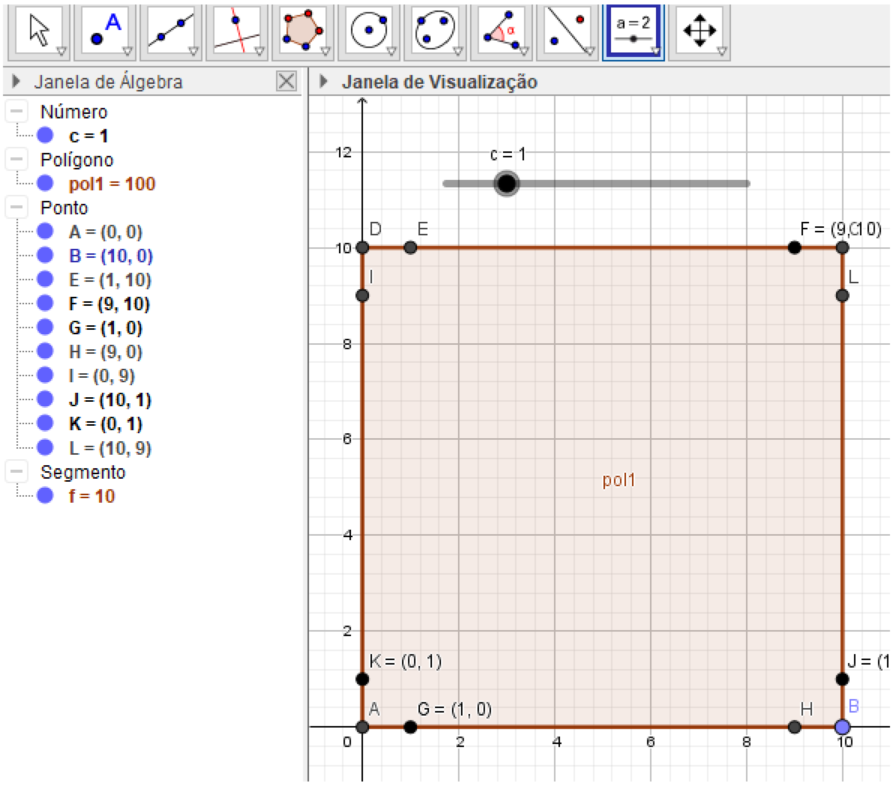

Figura 41: Configuração de pontos, parte 1.

Agora, vamos ligar estes pontos com os pontos nos lados opostos criando segmentos perpendiculares, para que fique da seguinte forma:

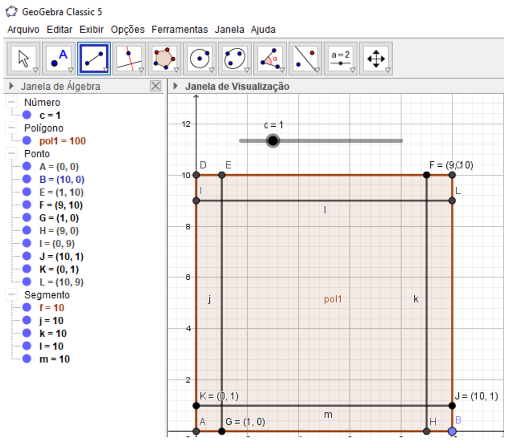

Figura 42: Configuração de pontos, parte 2.

O próximo comando que deve ser usado é o "Caminho poligonal"escolhendo os pontos deixando de fora os cantos,

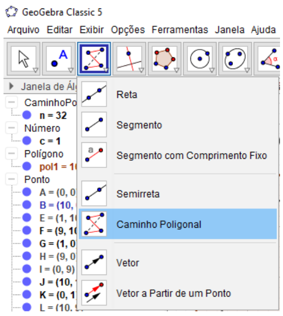

Figura 43: Comando "Caminho poligonal".

Após o uso do "caminho poligonal", devemos apagar os segmentos, pontos, deixando somente o "caminho"para obtermos a seguinte configuração,

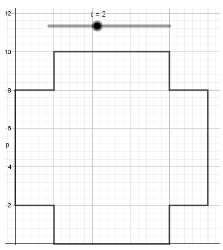

Figura 44: Planificação variável.

Novamente no campo "Entrada", devem digitar a função do volume, que é $v(x) = (10-2x)(10-2x)(x)$, onde assim, a seguinte função vai aparecer,

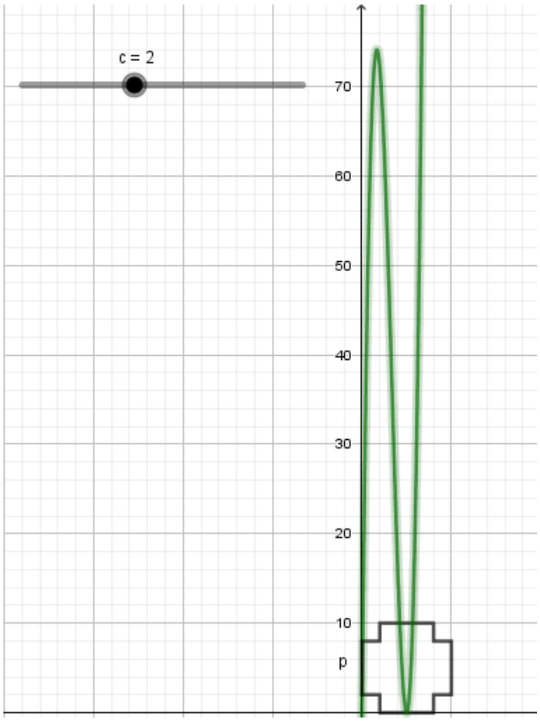

Figura 45: Função volume.

Vamos usar a função otimização em $v(x)$, para podermos determinar visivelmente os pontos de máximo e mínimo desta,

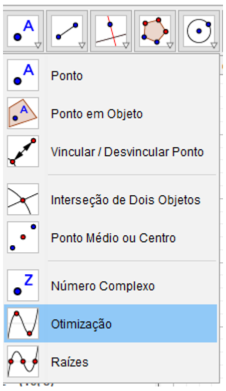

Figura 46: Comando Otimização.

Assim, aparecem os pontos de máximo e mínimo de $v(x)$

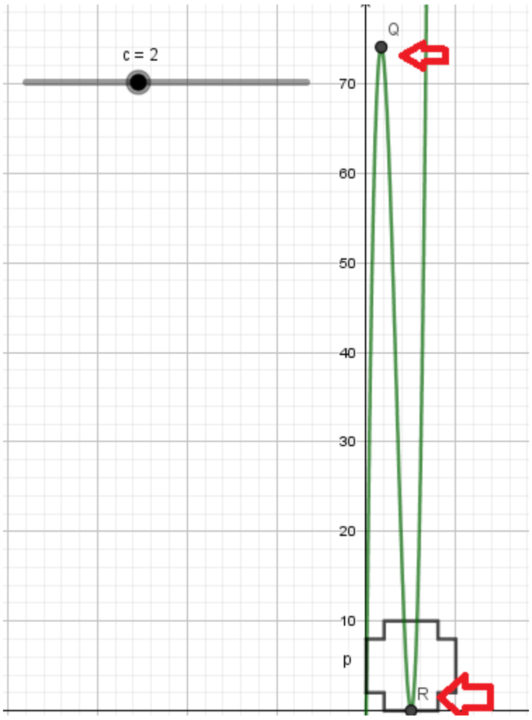

Figura 47: Máximo e mínimo de $v(x)$.

Agora, vamos criar um ponto variável sobre a função $v(x)$, bom trocar a cor deste para ficar bem visível. As coordenadas deste ponto são $T = (c, v(c))$,

Figura 48: Ponto T.

Desta forma, basta movimentar o controle deslizante, até que o ponto T, coincida com o ponto Q, de tal forma que obteremos todos os dados, valor do volume máximo, valor do corte e planificação que satisfaz a condição, que é o objetivo da questão.

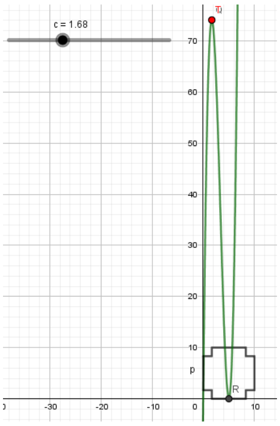

Figura 49: Solução.

Sendo esta a planificação que garante o valor máximo do volume, sendo a solução do problema.

Desta forma, podemos perceber como usar o software (Geogebra), na solução interativa desses problemas de máximo e mínimo, tornando esses exemplos mais interessantes ao ser apresentados aos discentes em sala de aula.

5 Considerações finais.

Neste trabalho, abordamos o estudo de pontos de máximos e de mínimos de funções reais, através de alguns problemas clássicos bem como suas respectivas soluções com o uso de desigualdades, cálculo diferencial e de recursos computacionais. Foi mostrado diversas formas que esses problemas podem ser abordados e sua gama de aplicações.

Destacamos ao final, o uso do software livre Geogebra, onde demonstrado passo a passo como pode-se utilizar essa ferramenta nas aplicações propostas, abrindo dessa forma, a possibilidade desse assunto ser tratado no Ensino Médio, visto que existem várias formas de soluções para esses problemas com a matemática apresentada para os discentes desse nível de ensino. Este trabalho, também é uma proposta educacional aos docentes que queiram trabalhar os pontos de máximos e de mínimos de funções reais com foco em geometria através do uso do Geogebra, pois certamente, tornará suas mais dinâmicas, interativas e propícias ao conhecimento.

Espera-se que o presente estudo, sirva de embasamento, pesquisa e conhecimento para o meio acadêmico matemático e, principalmente, para os estudiosos da matemática.

Exemplo de pesquisa para programa, que busca causar impacto na educação básica.

Referências

1 AGUIAR, Orestes; PROMENT, Erico,*Áivro lgebra Curso superior:Parte do mestre Vol II*,São Paulo: F.T.D, 1912.

2 AGUIAR, Orestes; PROMENT, Erico,*Álgebra Curso superior:Parte do mestre Vol III*,São Paulo: F.T.D, 1912.

3 SILVA, Dênis Aparecido;*Sobre Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana*,Dissertação de mestrado Campus de Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2013.

4 DJAIRO, G de Figueiredo, *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana*,Campinas,SP: UNICAMP, 1989.

5 GEOGEBRA, *Disponível em: <https://www.geogebra.org/download>*

6 Hermes, Antônio Pedroso; Pereira, Juliana Conceicao Precioso,*Máximos e mínimos na geometria euclidiana: uma abordagem histórica. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, v. 2, n. 1, p. 1-17, 2013.*,Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/122659>.

7 LIMA, Elon Lages,*Números e Funções Reais*,Rio de Janeiro: SBM, 2013.

8 LIMA, Elon Lages, et al,*A Matemática do Ensino Médio: Volume 2*,Rio de Janeiro: SBM, 2006.

9 MUNIZ NETO, Antonio Caminha,*Fundamentos de Cálculo*,Rio de Janeiro: SBM, 2015.

10 PASQUALI, Kely Cristina;*Máximos e Mínimos em Geometria Euclidiana Plana*,MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO, Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.

11 POLYA, George, *A arte de resolver problemas*, Rio de Janeiro: In terciência, 2ªEd., 2006.

12 ROCHA, Helder Borges Vieira Laranjeira da, *Problemas Selecionados de Geometria Plana*, Parnaíba-PI: SIEART, 2016.

13 WAGNER, EDUARDO, *Teorema de Pitágoras e Áreas*, Rio de Janeiro: IMPA, 2017.