

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

AGNALDO ANTÔNIO MOREIRA

MOTIVAÇÃO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS
COMPLEXOS: UMA ABORDAGEM COM APLICAÇÕES

CURITIBA

2018

AGNALDO ANTÔNIO MOREIRA

**MOTIVAÇÃO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS
COMPLEXOS: UMA ABORDAGEM COM APLICAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT - como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Olga Harumi Saito

CURITIBA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

M838m
2018

Moreira, Agnaldo Antônio
Motivação para o ensino e aprendizagem dos números complexos : uma abordagem com aplicações / Agnaldo Antônio Moreira.-- 2018.
110 f.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.
Texto em português com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2018.
Bibliografia: f. 97-103.

1. Números complexos - História - Estudo e ensino (Ensino médio). 2. Geometria. 3. Álgebra. 4. Trigonometria. 5. Aprendizagem. 6. Prática de ensino. 7. Motivação na educação. 8. Inovações educacionais. 9. Tecnologia educacional. 10. Matemática - Dissertações. I. Saito, Olga Harumi, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 23 - 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba - UTFPR
Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 51

A Dissertação de Mestrado intitulada *Motivação para o Ensino e Aprendizagem dos Números Complexos: Uma Abordagem com Aplicações*, defendida em sessão pública pelo(a) candidato(a) Agnaldo Antonio Moreira, no dia 20 de abril de 2018, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). Olga Harumi Saito - Presidente - UTFPR

Prof(a). Dr(a). Patricia Hess - UTFPR

Prof(a). Dr(a). Edson Ribeiro Alvares - UFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 20 de Abril de 2018.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

AGRADECIMENTOS

À Profa. Dra. Olga Harumi Saito, pela orientação precisa e pela leitura atenta dos meus textos, sempre com uma dedicação e profissionalismo irrepreensíveis.

Aos meus colegas do PROFMAT, pelo convívio e companheirismo.

Aos professores do PROFMAT, pelas incontáveis lições aprendidas durante toda a formação.

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), por me proporcionar uma experiência tão interessante e desafiadora.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

Para uma aprendizagem eficiente, o aprendiz deve estar interessado no conteúdo que será ensinado e encontrar prazer na atividade de aprender. Este é o Princípio da Melhor Motivação (PÓLYA, 1981).

Para ensinar de uma forma eficaz, um professor deve desenvolver um sentimento pelo conteúdo; ele não pode fazer com que seus estudantes sintam a vitalidade desse conteúdo se ele próprio não a sente. Ele não pode compartilhar seu entusiasmo se não há nenhum entusiasmo para ser compartilhado. Como ele ensina um conteúdo pode ser tão importante quanto o conteúdo que ele ensina; ele deve pessoalmente senti-lo como relevante (PÓLYA, 1977).

George Pólya (1887-1985)

RESUMO

MOREIRA, Agnaldo. **Motivação para o ensino e aprendizagem dos números complexos: uma abordagem com aplicações.** 110 p. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Estudos mostram que motivar professores e alunos para o ensino e aprendizagem de números complexos no Ensino Médio pode ser uma tarefa difícil. Esse trabalho investiga as causas dessa dificuldade e propõe uma abordagem de ensino dos números complexos baseada em história, aplicações e fractais. Além disso, apresenta alguns recursos digitais para explorar lições e atividades mais interativas dos conceitos matemáticos envolvidos.

Palavras-chaves: História dos números complexos; Geometria; Álgebra; Conjunto de Mandelbrot; Conjuntos de Julia; Recursos digitais.

ABSTRACT

MOREIRA, Agnaldo. **Motivation for teaching and learning complex numbers: an approach based on applications.** 110 p. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Literature shows that motivating teachers and students for studying complex numbers in high school can be a challenging task. This work investigates such issue and proposes an approach for teaching complex numbers based on their history, applications and fractals. In addition it provides some digital resources to explore interactive lessons and activities of this content.

Keywords: History of complex numbers; Geometry; Algebra; Mandelbrot Set; Julia Sets; Digital resources.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Questões de Pesquisa	11
1.2	Objetivo Geral	12
1.3	Objetivos Específicos	12
1.4	Estrutura da Dissertação	12
1.5	Recursos Digitais	13
2	A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS	14
2.1	A busca pela solução das equações cúbicas	14
2.2	A construção de uma álgebra para os números complexos	17
2.3	Utilização e crescimento na obscuridade	19
2.4	TFA, interpretação geométrica e aceitação	21
2.5	A evolução dos números	23
2.6	Recursos Digitais	24
3	CONCEITOS BÁSICOS	26
3.1	Conjunto dos números complexos	26
3.2	Forma Algébrica	29
3.3	Forma Polar ou Trigonométrica	35
3.4	Forma Exponencial	43
3.5	Recursos Digitais	44
4	APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA	46
4.1	Geometria	46
4.2	Trigonometria	53
4.3	O TFA e a resolução de equações algébricas	56
4.4	Recursos Digitais	59
5	APLICAÇÕES NO “MUNDO REAL”	61
5.1	Oscilações e Ondas na Física	62
5.2	Engenharia Elétrica	65
5.3	Física Quântica	72
5.4	Recursos Digitais	75
6	FRACTAIS DOS CONJUNTOS DE JULIA E DO CONJUNTO DE MANDÉLBROT	77
6.1	O que são fractais	77

6.2	Iteração de funções complexas	80
6.3	Conjuntos de Julia associados à $f(z) = z^2 + c$	83
6.4	Conjunto de Mandelbrot	86
6.4.1	Catálogo dos Conjuntos de Julia	90
6.5	Ensino de números complexos utilizando fractais	92
6.6	Recursos Digitais	93
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	95
	REFERÊNCIAS	97
	APÊNDICE A – DIMENSÃO FRACTAL	104
	APÊNDICE B – ASPECTOS COMPUTACIONAIS DOS CONJUNTOS DE JULIA E DO CONJUNTO DE MANDELBROT	108

1 Introdução

Em 2017, quando trabalhei na equipe que preparava o material didático de um sistema de ensino, percebi que ensinar o conteúdo números complexos no Ensino Médio é uma tarefa desafiadora para os professores e que apresenta certo desinteresse, resistência e dificuldade de aprendizagem por parte dos alunos.

Ao pesquisar a literatura para entender as razões para esse desinteresse e dificuldade, encontrei várias teorias e possíveis explicações:

- é um conteúdo bastante emblemático no que tange à dificuldade de vê-lo em aplicações cotidianas ou mesmo em relações interdisciplinares, o que faz com que as aulas não tenham uma contextualização adequada e se tornem pouco interessantes para os alunos (SPINELLI, 2011);
- relutância do aluno em aceitar os números complexos como números e como uma extensão do conjunto real (TIROSH; ALMOG, 1989 apud NORDLANDER; NORDLANDER, 2012);
- os estudantes não percebem a necessidade de resolver toda e qualquer equação quadrática; há uma certa aversão a números chamados imaginários; por envolverem métodos algébricos e geométricos para seu pleno entendimento, os números complexos são considerados confusos e difíceis (CHAVEZ, 2014);
- alguns alunos consideram as representações algébrica e geométrica como objetos matemáticos diferentes e autônomos e não como duas maneiras de se representar o mesmo conceito (PANAOURA et al., 2006 apud HUI; LAM, 2013);
- há uma confusão entre as formas de representação algébrica e geométrica: o entendimento de uma forma de representação não leva necessariamente ao entendimento da outra (HUI; LAM, 2013);
- falta de conhecimento prévio do assunto; falha dos professores em fornecer uma introdução mais abrangente do conteúdo (SMITH et al., 2015);
- os alunos consideram as palavras complexo e complicado como sinônimos, o que gera um obstáculo à aprendizagem; a palavra imaginário carrega uma conotação negativa embutida associada a coisas que só existem na mente; as preconceções com essas duas palavras fazem com que os alunos considerem os números complexos como algo sem utilidade prática relacionando-os a quantidades inventadas por matemáticos sem qualquer relação com a realidade (NORDLANDER; NORDLANDER, 2012);
- falta de um significado físico para os números complexos e para a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$ (SPINELLI, 2009);
- a abordagem geométrica no ensino dos números complexos é preterida em relação à algébrica (CARNEIRO, 2004);

- algumas dificuldades e inconsistências conceituais que os matemáticos enfrentaram ao longo da história dos números complexos guardam paralelismo com as que enfrentam os estudantes no processo de aprendizagem desse conteúdo (SALCEDO; ALFONSO, 2005);
- historicamente, os matemáticos levaram um tempo muito grande para aceitar os conceitos, usos e abstrações dos números complexos e, da mesma forma, os alunos também necessitam de um tempo maior do que aquele que é geralmente empregado nas aulas (CIPTOWIYONO, 2015).

Constatei ainda que a discussão sobre a relevância desse conteúdo para estudantes que não estejam diretamente envolvidos no estudo de Matemática Pura ganha espaço (DOYNE, 2011; LAZAROV, 2004) e que, talvez por conta disso, a oportunidade para se estudar os números complexos no Ensino Médio esteja diminuindo nos currículos de Matemática ao redor do mundo (PCMI - IAS, 2011).

No Brasil não são poucas as pessoas que defendem que esse conteúdo não deveria ser ministrado indistintamente a todos os alunos do Ensino Médio. “Toda a teoria a partir dos números complexos poderia ser deixada para o ensino superior”, diz o professor Cláudio Possani da Universidade de São Paulo. “No Ensino Médio, tais assuntos são adequados para dois tipos de estudantes: o que adora a Matemática Pura (isto é, a matemática pelo prazer da Matemática, sem nenhuma outra justificativa), e o que já tem certeza de que vai entrar na faculdade de Física ou de Engenharia” (VIANA; MENDES, 2014).

Esse também é posicionamento da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) que no documento *Contribuição da SBM para discussão do currículo de Matemática* inclui os números complexos como um tema suplementar da área de números e funções, de caráter opcional sem incluí-lo na grade do 3º ano do Ensino Médio.

Essa tendência de flexibilizar e tornar opcional o ensino dos números complexos pode ser observada também nas duas menções diretas a este conteúdo que aparecem nas Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), documento oficial que, a princípio, orienta a elaboração do currículo de Matemática de todas as escolas no Brasil:

Os objetos de estudo são os campos numéricos dos números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais. Para o desenvolvimento desse eixo, são propostas duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria (BRASIL, 2006a, p.117).

Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas (BRASIL, 2006a, p.119).

Talvez por conta dessa tendência de flexibilização, no Brasil esse conteúdo apareça cada vez menos nos exames vestibulares e não seja exigido no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Então, embora a escola não deva apenas preparar o aluno para as avaliações, o atual

modelo de acesso aos cursos superiores acaba por determinar as prioridades dos professores e o ensino dos números complexos acaba por ser relegado a um segundo plano.

Esse desinteresse pelo ensino dos números complexos não é algo novo. Já em 2004, o professor João Paulo Carneiro escrevia na Revista do Professor de Matemática:

Os números complexos ocupam uma posição singular no ensino de Matemática. Não merecem grande atenção nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, por serem considerados como “assunto elementar” de nível médio. Já no Ensino Médio, são evitados, sendo tachados de estranhos, de compreensão difícil e, sobretudo, inúteis. De fato, que utilidade poderiam ter objetos cuja existência é motivada, logo no primeiro contato, pela capacidade que possuem de fornecer uma solução “imaginária” para uma equação que “sabemos” que não tem solução, como nos foi antes demonstrado várias vezes? Pois é assim que quase sempre aprendemos e ensinamos os números complexos (CARNEIRO, 2004).

Além do desinteresse pelo conteúdo, a fala de Carneiro mostra também que a forma usual escolhida para ensinar os números complexos é ineficiente e não motiva professores e alunos. Esse é também o pensamento de NORDLANDER; NORDLANDER que nas conclusões de seu artigo *On the concept image of complex numbers* pontuam:

Aprender um conceito matemático abstrato pode ser um desafio motivador para alguns estudantes interessados. No entanto, na maioria dos casos, com estudantes medianos e em uma turma mediana, a falta de visualização pode gerar severos obstáculos à aprendizagem. O sucesso para ensinar números complexos provavelmente depende da capacidade do professor de deixar para trás a forma clássica de introduzir o conceito. Introduzir o conceito com um método visual e inovador pode ser um modo de promover o crescimento profissional do professor como também uma situação de melhor aprendizagem para o estudante.

Essa falta de motivação para ensinar e aprender os números complexos, expressa nas falas de CARNEIRO e NORDLANDER; NORDLANDER, é, justamente, o objeto de estudo dessa dissertação.

Assumindo como corretas as duas citações de Pólya que constam na epígrafe desse texto, considere o entusiasmo por um conteúdo como elemento fundamental para uma aprendizagem eficaz e procurei, então, investigar formas de apresentar o conjunto dos números complexos de modo a mitigar o desinteresse identificado entre professores e alunos. Adotei uma abordagem que utiliza o contexto histórico, uma maior exploração da interpretação geométrica e a apresentação de algumas aplicações dos números complexos como forma de promover essa motivação, conforme sugestões e resultados encontrados na literatura. Além disso, desenvolvi alguns recursos digitais para ilustrar ideias discutidas no texto e apoiar o ensino e a aprendizagem desse conteúdo no Ensino Médio.

1.1 Questões de Pesquisa

As seguintes questões de pesquisa sobre o processo de ensino-aprendizagem dos números complexos no Ensino Médio nortearam a construção desse trabalho.

- Como os números complexos podem ser introduzidos para que despertem o interesse de estudantes e professores?
- Quais aspectos do ensino dos números complexos podem ser modificados para torná-lo mais intuitivo e interessante?
- Como os recursos digitais podem ser utilizados para fazer o conteúdo números complexos mais atrativo e mais próximo da realidade?

1.2 Objetivo Geral

Investigar o ensino dos números complexos no Ensino Médio e propor uma sequência didática para tornar este conteúdo mais interessante para alunos e professores.

1.3 Objetivos Específicos

- Apresentar o percurso histórico dos números complexos.
- Introduzir o conjunto dos números complexos como uma evolução dos números reais, mostrando que, em sua essência, todos os números são abstrações humanas.
- Detalhar a relação dos números complexos com a Álgebra, a Geometria e a Trigonometria, evitando que as formas de representação sejam apresentadas de forma desconexa.
- Propor e resolver alguns exercícios de Geometria e Trigonometria com a utilização de números complexos para mostrar que eles também podem ser empregados em problemas mais cotidianos.
- Mostrar algumas aplicações dos números complexos nas engenharias e na Física de uma forma mais palatável e simplificada que possa ser compreendida pelos alunos.
- Introduzir e manipular os fractais do Conjunto de Mandelbrot e do Conjunto de Julia como uma aplicação dos números complexos.
- Propor alguns recursos digitais (objetos de aprendizagem) que abordem esse conteúdo.

1.4 Estrutura da Dissertação

Os capítulos dessa dissertação foram estruturados de modo a contemplar alguns dos principais tópicos que podem ser trabalhados para motivar alunos e professores.

No Capítulo 2 apresento um resumo do percurso histórico dos números complexos desde o seu surgimento até sua aceitação pela comunidade matemática.

No Capítulo 3 são introduzidos os conceitos básicos e a fundamentação teórica do conjunto dos números complexos, dando ênfase às formas de representação, sua utilização e à interpretação geométrica.

O Capítulo 4 ilustra algumas das aplicações dos números complexos na própria Matemática, enquanto que o Capítulo 5 é dedicado a mostrar algumas das aplicações existentes no “mundo real”.

No Capítulo 6 abordo os fractais dos Conjuntos de Julia e do Conjunto de Mandelbrot, aplicações dos números complexos que, embora não sejam cotidianas, despertam a curiosidade e o interesse das pessoas.

E, finalmente, no Capítulo 7 apresento minhas considerações finais e algumas reflexões, organizadas ao longo de todo o trabalho, no sentido de responder às questões de pesquisa. Também aponto alguns caminhos que vislumbro como continuidade desse estudo.

1.5 Recursos Digitais

Todos os recursos digitais desenvolvidos no escopo dessa dissertação podem ser visualizados, testados e baixados livremente em <http://complexos.blog.br/>.

Para facilitar a sua localização nesse site, todos esses recursos digitais foram numerados seguindo o padrão RDXYY, onde X se refere ao capítulo onde foram mencionados nesse texto e YY é um número sequencial. Assim, por exemplo, RD402 se refere ao segundo recurso digital do Capítulo 4.

Os aplicativos foram publicados com uma descrição de suas funcionalidades, algumas sugestões de atividades didáticas que podem ser desenvolvidas com eles e uma lista de categorias e *tags* para facilitar a sua classificação e localização por buscadores. Houve também a preocupação de, sempre que possível, permitir a execução dos aplicativos em dispositivos móveis.

Esse site apresenta também uma seleção de recursos digitais produzidos por terceiros que também exploram conteúdos relacionados aos números complexos que podem ser usados em atividades didáticas no Ensino Médio. Essa seleção está disponível no mesmo endereço sob a categoria <links externos>. Esses links externos também foram descritos, comentados e categorizados para facilitar sua procura e utilização.

2 A História dos números complexos

George Pólya acreditava que nós compreendemos melhor a Matemática quando a vemos nascendo, quer seguindo os passos das descobertas históricas, quer nos empenhando nós mesmos nessas descobertas (KILPATRICK, 1987, p.300). Nesse sentido de valorização da História da Matemática no processo de ensino, ele afirmou:

Tendo compreendido como a raça humana adquiriu o conhecimento de certos fatos ou conceitos, nós estamos em uma posição melhor para avaliar como uma criança deve adquirir tal conhecimento (PÓLYA, 1981).

Os números complexos percorreram um longo e tortuoso caminho histórico e, diferentemente de outras áreas da Matemática, essa história está muito bem documentada (CARNEIRO, 2004).

Historicamente, os números complexos sofreram forte e, por vezes, furiosa recepção. A própria expressão *número imaginário*, cunhada por Descartes, tinha um caráter depreciativo. Muitos matemáticos importantes se recusaram a adotar os números complexos que só foram amplamente aceitos no século XIX. Ao conhecer esse percurso histórico, o aluno pode se colocar no papel daqueles que se recusaram a aceitar os números complexos em um primeiro momento e poderá entender o que levou a comunidade matemática à sua adoção posteriormente. Pode ainda se sentir mais confortável ao perceber que não está sozinho quando considera a ideia dos números complexos difícil de entender (EGAN, 2008; CARMO et al., 2005).

Nesse capítulo mostro um resumo dessa história dos números complexos, comentando algumas oportunidades para despertar a curiosidade e o interesse do aluno. Também apresento e discuto alguns recursos digitais que exploram a história dos números complexos e podem ser usados para introduzir esse assunto.

2.1 A busca pela solução das equações cúbicas

O primeiro traço histórico da raiz quadrada de um número negativo aparece no texto *Stereometria* (c.50 d.C.) atribuído a Heron de Alexandria. Depois de ter fornecido a fórmula correta para se calcular o tronco de uma pirâmide de base quadrada, ao aplicá-la a um caso concreto, deveria ter chegado a $\sqrt{81 - 144}$ (na notação atual). No entanto, o autor (ou algum copista) preferiu inverter a ordem dos termos, grafando incorretamente $\sqrt{144 - 81}$, perdendo a oportunidade histórica de ser o primeiro a considerar a existência de raízes quadradas de números negativos (NAHIN, 1998).

Depois de Heron, outras menções às raízes quadradas de números negativos são encontradas na história como, por exemplo, Diofanto (c. 275 d.C.), Mahavira (c. 850 d.C.) e Bhaskara (c.1150 d.C.). Todas essas menções destacavam a impossibilidade da existência de raízes quadradas negativas, justificando que quantidades negativas não geram quadrados (SMITH, 1958).

As raízes quadradas dos números negativos voltariam a aparecer quando do surgimento dos números complexos. Diferentemente do que é afirmado em muitos livros didáticos, foi a busca pela solução das equações cúbicas, e não a resolução de equações quadráticas do tipo $x^2 + 1 = 0$, que levou ao nascimento dos números complexos (KLEINER, 2012; NAHIN, 1998; GARBI, 2010; HAREL, 2013; ROQUE; CARVALHO, 2012).

Foi na Itália Renascentista no começo do século XVI que um grupo de matemáticos italianos empreendeu a busca pela solução das equações cúbicas a partir de seus coeficientes. Sobre esta busca, no final de 1494, o frei franciscano Luca Pacioli afirmou em seu livro *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* que no estado atual da ciência a solução das cúbicas era tão impossível quanto a quadratura do círculo. Sua afirmação se mostrou errada: por volta de 1515, Scipione Del Ferro, um professor e matemático da Universidade de Bolonha, descobriu uma fórmula para a resolução das cúbicas do tipo $x^3 = px + q$. No entanto, Scipione nunca publicou a sua descoberta, o que era um procedimento comum naquela época: mantinha-se o segredo para se obter vantagens financeiras em disputas públicas com os seus rivais propondo-lhes problemas além de seu alcance. Pouco antes de morrer (1526), Scipione Del Ferro passou sua descoberta para seu estudante Antonio Maria Del Fiore (NAHIN, 1998; CAJORI, 1909; O'CONNOR; ROBERTSON, 2002b).

Pouco tempo depois, Del Fiore desafiou o matemático Niccolò Fontana, Figura 2.1, conhecido como Tartaglia (gago, em italiano), para uma disputa na qual cada participante propunha 30 problemas para o outro. Antes da data de entrega dos problemas resolvidos, Tartaglia conseguiu a fórmula para resolver as equações cúbicas e venceu a disputa.



Figura 2.1 – Tartaglia (1500-1557)

Fonte: MacTutor History of Mathematics Archive (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002a)

A notícia que Tartaglia havia vencido Del Fiore e que tinha uma fórmula para resolução das cúbicas chegou ao conhecimento de Girolamo Cardano, Figura 2.2, um matemático, médico, jogador e filósofo italiano que estava preparando um livro de álgebra para publicação. Em

1539 Cardano convidou Tartaglia a visitá-lo em Milão e o persuadiu a contar-lhe a fórmula de resolução das cúbicas. Tartaglia forneceu a Cardano a fórmula, porém não a demonstrou, e exigiu que esse promettesse que não a publicaria. Em 1545, Cardano soube que Scipione Del Ferro havia descoberto a fórmula antes de Tartaglia. Ao obter essa fórmula a partir das anotações de Scipione Del Ferro, Cardano sentiu-se desobrigado a cumprir a promessa feita e publicou a fórmula em seu livro *Ars Magna* (A grande arte - 1545), o que provocou a fúria de Tartaglia (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002b; NAHIN, 1998).



Figura 2.2 – Girolamo Cardano (1501-1576)

Fonte: Wikimedia Commons - Domínio Público (COMMONS, 2011)

Não se pode acusar Cardano de plágio, uma vez que ele deu os créditos da descoberta da fórmula a Tartaglia e a Scipione Del Ferro, mencionando o primeiro três vezes em seu livro (NAHIN, 1998; MAZUR, 2003; TOSCANO, 2012).

Ars Magna foi um marco na História da Matemática, sendo considerado a maior realização no campo da Álgebra desde que os babilônios estabeleceram como resolver as equações quadráticas 3000 anos antes. Nesse livro, Cardano além de descrever e demonstrar o método algébrico para resolver as equações cúbicas, incluiu também um método para resolução das equações de 4º grau (quárticas)* que foi obtido por um aluno seu, Ludovico Ferrari (1522-1565).

Cardano foi o primeiro a introduzir os números complexos na Álgebra, embora tivesse algumas dúvidas sobre eles (MERINO, 2006). No capítulo 37 de *Ars Magna*, ele dá o seguinte exemplo:

Divida 10 em duas partes de tal modo que o produto delas seja 40. É claro que esse problema é impossível. No entanto, nós trabalharemos assim: dividimos 10 em duas partes iguais obtendo cinco em cada parte. Elevamos essas partes ao quadrado e obtemos 25. Subtraia 40 de 25 como mostrado no capítulo sobre

*O método de Ferrari para resolução das quárticas consiste em reduzir o problema a uma equação cúbica por meio de uma substituição e da introdução de uma variável auxiliar.

operações no livro VI, obtendo o resto -15, cuja raiz adicionada ou subtraída a 5 dará as partes cujo produto é 40. Estas partes serão $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ (CARDANO, 1968).

Após demonstrar esse problema, Cardano acrescenta que “essa sutileza aritmética é tão refinada quanto inútil” (CARDANO, 1968).

Em notação atual, a fórmula de Cardano (Del Ferro/Tartaglia) para a equação cúbica

$$x^3 + px + q = 0 \quad (2.1)$$

é dada por:

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (2.2)$$

Nesse tipo de cúbica sempre que a equação tem duas raízes reais distintas, o termo (discriminante) $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ é negativo, levando ao aparecimento de raízes quadradas de números negativos na fórmula. Ocorre, portanto, um comportamento oposto àquele observado na fórmula para resolução das equações de 2º grau (GARBI, 2010).

Assim, por exemplo, quando aplicada ao exemplo histórico $x^3 = 15x + 4$ chegamos a:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad (2.3)$$

Embora Cardano tenha dito que sua fórmula geral não se aplicasse nesse caso, por conta do aparecimento de $\sqrt{-121}$, as raízes quadradas de números negativos não puderam mais ser completamente ignoradas, pois sabia-se, por simples inspeção, que $x = 4$ é uma solução real dessa equação. Mais ainda: as outras duas raízes, $-2 \pm \sqrt{3}$, também são números reais. Restava, então, o desafio de encontrar um modo de aplicar a fórmula de Cardano para encontrar as raízes reais desses casos irreduzíveis (KLEINER, 2012).

2.2 A construção de uma álgebra para os números complexos

Foi Rafael Bombelli, Figura 2.3, um engenheiro hidráulico italiano, quem conseguiu encontrar uma forma de resolver a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ aplicando a fórmula de Cardano.

Bombelli considerou que como 4 era uma raiz e que em (2.3) os radicandos diferiam apenas no sinal, o mesmo deveria acontecer em suas raízes cúbicas, o que o levou a fazer:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$$

e

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$$

Então, aplicando manipulações algébricas, de acordo com as regras estabelecidas para os números reais, ele encontrou os valores $a = 2$ e $b = 1$ e mostrou que, de fato:

$$2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$



Figura 2.3 – Rafael Bombelli (1526-1572)

Fonte: MacTutor History of Mathematics Archive (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002a)

Bombelli foi, portanto, a primeira pessoa a escrever regras para as operações de adição, subtração e multiplicação de números complexos. Na notação dessa álgebra para os números complexos, ele chama $\sqrt{-1}$ como p.dm (abreviação para *più de meno*, em italiano) e $-\sqrt{-1}$ como m.dm (abreviação para *meno de meno*, em italiano).

Ele mostrou assim, usando a manipulação dos números complexos que soluções reais para equações cúbicas podiam ser obtidas a partir da fórmula de Cardano mesmo quando raízes quadradas de números negativos apareciam nesta fórmula (ROQUE; CARVALHO, 2012; O'CONNOR; ROBERTSON, 2002c).

Estes resultados foram publicados no livro *L'Algebra* em 1572, lançando as bases da teoria dos números complexos. Embora seu livro tenha sido bastante lido, os números complexos permaneceram envoltos em mistério, pouco compreendidos e, principalmente, completamente ignorados por cerca de mais dois séculos e meio. Em 1585, o matemático belga Simon Stevin (1548-1620) explicitou sua desconfiança com os números complexos da seguinte maneira:

Existe assunto legítimo suficiente para exercitar-se, até mesmo demais, sem necessidade de se ocupar e perder tempo em incertezas (KLEINER, 2012).

2.3 Utilização e crescimento na obscuridade

Embora as dúvidas sobre o significado e a legitimidade dos números complexos tenham persistido, isso não impediu que, a partir dos resultados de Bombelli, eles fossem muito usados e que muitos trabalhos matemáticos sobre eles fossem produzidos (KLEINER, 2012).

Em 1620, Albert Girard (1595-1632) foi um dos primeiros a afirmar, sem demonstrar, que uma equação algébrica de grau n teria n raízes. No entanto, tal forma de afirmar o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) era ainda vaga e não muito clara (KLEINER, 2012).

René Descartes (1596-1650) foi outro grande matemático a contribuir com a história dos números complexos, devendo-se a ele o uso dos termos real e imaginário. Descartes associou os números imaginários com impossibilidades geométricas e também relacionou os números complexos com o número de raízes de equações algébricas (TFA) sem contudo demonstrar essa afirmação (MERINO, 2006; GREEN, 1976).

Tanto as verdadeiras quanto as falsas [negativas] raízes não são sempre reais, mas algumas vezes são somente imaginárias, isto é, pode-se imaginar tantas raízes para cada equação quanto eu previ [quanto indica o grau da equação], mas algumas vezes não existe uma quantidade correspondente àquelas raízes que imaginamos (DESCARTES, 1954).

Leibniz e Johann Bernoulli empregaram os números complexos como ajuda para calcular integrais, o que levou a uma controvérsia entre eles sobre o significado do logaritmo de números negativos e complexos. Essa controvérsia só foi esclarecida posteriormente por Euler que mostrou que $\log(-1) = i(\pi + 2n\pi)$ (complexo e multivalorado).

Em 1698, Abraham de Moivre (1667-1754) menciona que Isaac Newton já conhecia por volta de 1676 o equivalente da fórmula que hoje é conhecida como Fórmula de De Moivre:

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$$

Os números complexos foram usados, também, por Johann Lambert para fazer projeções de mapas; por Jean D'Alembert na hidrodinâmica; e por Lagrange, Laplace, Euler e D'Alembert em demonstrações (incorretas) do Teorema Fundamental da Álgebra (KLEINER, 2012; CARMO et al., 2005).

Leonhard Euler, Figura 2.4, foi responsável por alavancar as pesquisas sobre o TFA e os números complexos, tendo provado que se um número complexo $a + bi$ é raiz de uma equação, então, o seu conjugado, $a - bi$, também é. Mostrou em seguida que toda equação de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real e que todas as raízes não reais são da forma $a + bi$, sendo necessário para isso estudar as operações com números complexos, incluindo as potências imaginárias, logaritmos e funções trigonométricas. Com Euler, pode-se dizer que a álgebra dos números complexos atingiu sua forma atual. Euler, por sinal, foi também quem introduziu o símbolo i para representar $\sqrt{-1}$ [†] (CARMO et al., 2005).

[†]O uso de i para representar a unidade imaginária, no entanto, só se popularizou após sua utilização por Gauss em 1801.



Figura 2.4 – Leonhard Euler (1707-1783)

Fonte: Wikimedia Commons - por Jakob E. Handmann - Domínio Público (COMMONS, 2014b)

No entanto, o comportamento ambíguo da comunidade matemática com os números complexos pode ser visto também com Euler. Embora tenha produzido trabalhos de fundamental importância como o que relaciona os números complexos com as funções exponenciais e trigonométricas pela fórmula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, ele chega a afirmar:

Como todos os números concebíveis são maiores ou menores que zero ou iguais a zero, fica então claro que as raízes quadradas de números negativos não podem ser incluídas entre os números possíveis. E esta circunstância nos leva ao conceito de tais números que, por sua natureza, são impossíveis, e que são comumente chamados de imaginários ou imaginados, pois existem somente na imaginação (KLEINER, 2012).

No fim do século XVIII, os matemáticos já podiam efetuar operações bem avançadas com os números complexos. Porém, ainda há alguma reserva da parte deles, o que pode ser observado na *Encyclopédie*, organizada por Diderot, D'Alembert e outros filósofos franceses com a intenção de ser um inventário de todo o conhecimento humano da época, que em seus artigos sobre Matemática, redigidos pelo próprio D'Alembert, não mencionam esses números (CARMO et al., 2005).

Nessa época, o anseio por encontrar uma explicação lógica para os números complexos, fosse ela de caráter filosófico ou prático, era premente. Com a Idade da Razão, os matemáticos tinham sido alçados a modelos a serem seguidos nas ciências naturais, na filosofia e no pensamento político e social e era, portanto, inadequada a falta de uma explicação racional para os números complexos. A busca por uma justificativa lógica para as operações com os números negativos e complexos era também uma preocupação pedagógica em locais como, por exemplo, a Universidade de Cambridge (KLEINER, 2012). Urgia, portanto, uma explicação convincente que levasse à aceitação sem reservas dos números complexos.

2.4 TFA, interpretação geométrica e aceitação

A primeira demonstração correta do TFA foi feita por Gauss, Figura 2.5, em 1799 em sua tese de doutorado. Ao longo de sua vida, Gauss forneceria ainda mais três demonstrações diferentes para esse teorema (CARMO et al., 2005).

Um significado para as quantidades imaginárias, no entanto, só foi obtido a partir de sua interpretação geométrica no começo do século XIX. A interpretação geométrica para os números complexos foi proposta por diferentes matemáticos como, por exemplo, Argand, Carnot, Buée, Wessel e Gauss. Credita-se o conceito empregado atualmente de representar um número complexo como um ponto em um plano a Caspar Wessel que publicou a ideia em 1799. Porém, ninguém deu importância ao trabalho de Wessel e o suíço Jean Robert Argand também publicou em 1806 uma representação semelhante obtida de forma independente. O trabalho de Argand permaneceu anônimo até 1813 e teve pouca repercussão depois disso.



Figura 2.5 – Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Fonte: Wikimedia Commons - Domínio Público (COMMONS, 2018)

A exemplo de Argand e Wessel, os outros matemáticos também eram pouco conhecidos e foi necessário o prestígio de Gauss para difundir e tornar aceita a representação geométrica dos números complexos. Há indicações que ele já conhecia a representação geométrica desde 1796 e que este material tenha permanecido não publicado. É provável que a ideia de representar geometricamente os complexos tenha ocorrido a Gauss ao demonstrar o TFA, mesmo que ele não tenha utilizado isso em sua demonstração (CARMO et al., 2005).

No entanto, a publicação da representação dos complexos como pontos no plano por Gauss ocorreu em conexão com seu trabalho sobre a Teoria dos Números e só se deu após ele ter superado seu escrúpulo metafísico com relação às quantidades imaginárias (KLEINER, 2012). A obra *Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda* foi submetida à Real Sociedade de Göttingen em 1831 e nela Gauss refere-se à interpretação geométrica dos números complexos como a verdadeira metafísica das quantidades imaginárias (CARMO et al., 2005; ROQUE;

CARVALHO, 2012).

Ele foi o primeiro matemático influente e renomado a defender publicamente as quantidades imaginárias. Foi ele também quem cunhou pela primeira vez a expressão *números complexos*. A associação dos números complexos ao plano é enfatizada por Gauss como por nenhum outro matemático antes dele (ROQUE; CARVALHO, 2012; MERINO, 2006).

A representação geométrica, chancelada por Gauss, dispersou o mistério e a obscuridade que envolviam os números complexos que, dali por diante, tornaram-se entidades reconhecidas como tais e com lugar na Matemática (MERINO, 2006).

Sobre a obscuridade que envolveu os números complexos, Gauss atribuiu parte da culpa à terminologia adotada:

Que este assunto [números imaginários] até agora tenha sido cercado por misteriosa escuridão deve ser atribuído em grande parte a uma terminologia mal adaptada. Se, por exemplo, $+1$, -1 , e $\sqrt{-1}$ tivessem sido chamados de direto, inverso e lateral, em vez de positivo, negativo e imaginário (ou, pior ainda, de impossível), tal obscuridade estaria fora de questão (NAHIN, 1998; MERINO, 2006).

Os trabalhos de Hamilton e Cauchy, Figura 2.6, na primeira metade do século XIX complementaram e ajudaram a consolidar os números complexos, ratificando sua legitimidade.



Figura 2.6 – Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Fonte: MacTutor History of Mathematics Archive (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002a)

Em 1833, William Rowan Hamilton (1805-1865) deu uma descrição algébrica rigorosa dos números complexos como pares ordenados de números reais (x, y) dotados de operações de soma e multiplicação explicitamente definidas. Em 1814, Augustin-Louis Cauchy iniciou o seu trabalho sobre o que hoje conhecemos como a moderna Teoria das Funções Complexas que foi publicado em 1925. Em 1947 ele fornece uma descrição algébrica dos números complexos em termos de classes de congruência de polinômios reais de módulo $x^2 + 1$ (KLEINER, 2012).

Houve ainda, entretanto, alguns matemáticos que continuaram resistindo à aceitação dos números complexos. Em 1831, Augustus de Morgan declarava em seu livro *On the Study and Difficulties of Mathematics*: “Nós temos mostrado que o símbolo $\sqrt{-1}$ é vazio de significado ou um tanto contraditório e absurdo”. Em 1854, George Boole chamava $\sqrt{-1}$ de “símbolo não interpretável” e em 1858, George Airy foi ainda mais enfático em um artigo da revista *Transactions* da Sociedade Filosófica de Cambridge: “Eu não tenho a menor confiança em qualquer resultado que seja obtido essencialmente pelo uso de símbolos imaginários.”(NAHIN, 1998).

Ao final do século XIX, a maioria dos vestígios de mistério e desconfiança sobre os números complexos tinham desaparecido, havendo apenas uma leve resistência no começo do século XX por parte de autores de livros didáticos que complementavam as demonstrações que usavam números complexos com outras que não os utilizavam (KLEINER, 2012).

2.5 A evolução dos números

Costumamos construir o sistema numérico começando com os números naturais e depois ir expandindo a estrutura gradativamente para incluir os números inteiros, os números racionais, os números reais e, finalmente, os números complexos. Não foi assim, no entanto, que o conceito de número se desenvolveu historicamente. Já na antiguidade, os números racionais e alguns irracionais (π e algumas raízes, por exemplo) eram conhecidos. O sistema de números (positivos) racionais e irracionais também foi descrito teoricamente por filósofos e matemáticos gregos, mas no âmbito de uma teoria autônoma de proporções comensuráveis e incomensuráveis, e não como uma extensão dos números naturais (EBBINGHAUS et al., 1991).

Quando os números complexos começaram a aparecer no século XVI com os algebristas italianos, os matemáticos não tinham ainda formalizado os conceitos de números negativos e irracionais. Até o século XIX, quando Gauss publicou a interpretação geométrica dos números complexos, ainda havia matemáticos que discutiam se os números negativos realmente existiam (CARMO et al., 2005). Uma descrição formal e lógica dos números negativos só ocorreu no final do século XIX, muito embora eles já fossem usados de uma forma ou de outra por mais de dois milênios (KLEINER, 2012).

Sobre essa forma errática da evolução dos números, Tobias Dantzig nos ensina em seu clássico livro *Número - a linguagem da ciência* de 1930:

A sistemática exposição de um livro didático em Matemática é baseada na continuidade lógica e não na sequência histórica; mas o ensino secundário e mesmo o curso superior em Matemática falham em mencionar este fato e, portanto, deixam no estudante a impressão que a evolução histórica do número se deu na ordem que os capítulos dos livros foram escritos. Esta impressão é largamente responsável pela opinião generalizada que a Matemática não tem nenhum elemento humano. Parece que é uma estrutura que foi construída sem um andaime: ela simplesmente se levantou em sua majestade congelada, camada por camada. Sua estrutura não teria falhas porque seria baseada na razão pura e suas paredes seriam impenetráveis porque elas teriam sido criadas sem tolices,

erros ou mesmo hesitações, pois a intuição humana não teria tido nenhuma parte.

(...)

A História da Matemática revela a falácia de tal noção. Ela mostra que o progresso da Matemática foi o mais errático e que a intuição teve um papel predominante nele. Pontos avançados distantes foram conquistados antes que o território intermediário tivesse sido explorado, frequentemente até antes que os exploradores soubessem que havia um território intermediário (DANTZIG, 2005, p.188).

A introdução do plano complexo alargou consideravelmente o conceito de número. Antes da interpretação geométrica dos complexos, todos os números conhecidos estavam restritos a uma dimensão, o chamado eixo real. Depois disso, o domínio de todos os possíveis números expandiu para um plano bidimensional e infinito em todas as direções.

De uma certa forma, com os números complexos a construção do sistema numérico está terminada: os números complexos são completos [fechados] sob as operações aritméticas usuais. Isto significa que nós sempre obteremos um número complexo como resultado de uma adição, subtração, multiplicação, divisão, radiciação, etc... em outro número complexo (NAHIN, 1998).

Os números complexos não se encaixam imediatamente nas noções dos estudantes do que é um número e o significado do que é um número também mudou ao longo dos séculos (KLEINER, 2012). Esses dois fatos podem levá-los a questionar se existem números além dos complexos. Sobre esse ponto, DANTZIG, ao finalizar um tópico sobre os quatérnios esclarece:

(...) extensões além do domínio do número complexo são possíveis apenas à custa do Princípio da Permanência[‡]. O domínio dos números complexos é a última fronteira desse princípio. Além dele [o conjunto dos números complexos], ou a comutatividade das operações ou o papel que o zero desempenha na aritmética deve ser sacrificado (DANTZIG, 2005, p.211).

2.6 Recursos Digitais

De acordo com Gagné, é importante conquistar a atenção dos estudantes no início de uma lição para que o ensino e a aprendizagem sejam exitosos (GAGNÉ, 1985). Nesse sentido, pode-se utilizar a história da Matemática para despertar a curiosidade dos alunos sobre um determinado tópico.

Os seguintes recursos digitais exploram parte do conteúdo da história dos números complexos que vimos nesse capítulo e podem, portanto, ser utilizados como uma introdução do assunto para despertar o interesse dos alunos já no primeiro contato com o tema.

- RD201 - Um breve resumo da história dos números complexos

Este livro eletrônico ilustrado mostra resumidamente os principais episódios da história dos números complexos. Trata-se uma sequência de slides que o professor poderá utilizar,

[‡]Em sua forma mais simples, o Princípio da Permanência afirma que, dada uma função analítica $f(z)$ definida em um subconjunto aberto (e conectado) U dos números complexos \mathbb{C} e uma sequência convergente a_n cujo limite L pertence a U , tal que $f(a_n) = 0$ para todo n , então $f(z)$ é uniformemente zero em U .

de forma integral ou parcial, como introdução do assunto números complexos em suas aulas. São mostradas passagens significativas dessa história como a busca pela fórmula de resolução das equações cúbicas, a sistematização feita por Bombelli, a construção da interpretação geométrica por diferentes matemáticos e a caracterização essencialmente algébrica de Hamilton. Mostra ainda como os números complexos foram tratados de maneira depreciativa ao longo de toda a sua história, inclusive por grandes matemáticos.

- RD202 - Usando a fórmula de Cardano

Um *applet* do Geogebra que mostra como utilizar a fórmula de Cardano para resolução das equações cúbicas. Além de dar explicações sobre a utilização da fórmula, permite resolver alguns dos problemas históricos propostos por Tartaglia, Antonio Maria Del Fiore e Ludovico Ferrari. Permite ainda transformar qualquer cúbica da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ na forma utilizada pela fórmula de Cardano ($x^3 + px + q = 0$), detalhando o processo dessa transformação. Em outra tela, mostra a transformação que deve ser aplicada em uma equação quártica para reduzi-la a uma equação cúbica e, assim, deixá-la na forma ideal para ser resolvida pela fórmula de Cardano.

- RD203 - Estudo do discriminante da fórmula de Cardano

Este é um *applet* do Geogebra que ilustra o papel do termo discriminante da fórmula de Cardano. A partir de controles deslizantes, o aluno consegue variar os valores de p e q em $x^3 + px + q = 0$ e, assim, obter a fórmula de Cardano para esses valores, o valor do discriminante e as soluções (reais e complexas) desta equação.

- RD204 - Introdução à representação geométrica de um número complexo

Trata-se de um *applet* do Geogebra que apresenta o plano complexo aos alunos na forma de um jogo. O aluno tem que mover pontos dentro do plano complexo para fazê-los coincidirem com os números complexos dados. Os movimentos no plano complexo podem ser corrigidos quantas vezes forem necessárias até que o aluno consiga o posicionamento correto. O objetivo desse jogo é fornecer uma noção da interpretação geométrica dos números complexos já na introdução do assunto, juntamente com o contexto histórico.

3 Conceitos básicos

Nesse capítulo apresento os conceitos básicos do conjunto dos números complexos (\mathbb{C}), definindo seus elementos, suas propriedades, formas de representação, operações e alguns resultados que serão úteis para o entendimento dos próximos capítulos.

A introdução desse novo conjunto será feita seguindo a ideia, vista ao longo do capítulo 2, que a extensão de domínios numéricos (por exemplo, de \mathbb{N} para \mathbb{Z} , de \mathbb{Z} para \mathbb{Q} e de \mathbb{Q} para \mathbb{R}) foi motivada pela necessidade de estender operações sobre os elementos desse domínio. Assim, o conjunto dos números complexos será apresentado como uma extensão do conjunto dos números reais (\mathbb{R}) na qual é possível operar com raízes negativas de índice par.

Na medida do possível, procurei apresentar também a interpretação geométrica dos conceitos mostrados e caracterizar as formas de representação como modos diferentes de se exibir o mesmo conceito. A teoria aqui apresentada pode ser encontrada em muitos livros didáticos com pequenas variações de notação entre um e outro. O texto a seguir compila as ideias presentes em (ANDREESCU; ANDRICA, 2014; LIMA et al., 2006; MURRAY, 1995; NEVES, 2014).

3.1 Conjunto dos números complexos

Definição 3.1. *Seja $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, isto é, o conjunto dos pares ordenados (x, y) com x e y reais. Tomando dois elementos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de \mathbb{R}^2 , definimos a igualdade e as operações de adição e multiplicação da seguinte maneira:*

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2 \text{ (igualdade),}$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ (adição),}$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ (multiplicação).}$$

Definição 3.2. *O conjunto dos pares ordenados de \mathbb{R}^2 para os quais valem a igualdade, a adição e a multiplicação, tal como estabelecidas na Definição 3.1, é chamado de conjunto dos números complexos e representado por \mathbb{C} . Cada par ordenado $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ é chamado de um número complexo.**

A partir da Definição 3.2, podemos mostrar que o conjunto \mathbb{C} dos números complexos satisfaz as seguintes propriedades (axiomas):

- em relação à adição

(A1) Comutatividade: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(A2) Associatividade: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

(A3) Existência do elemento neutro: existe um único número complexo $0 = (0, 0)$ tal que $z + 0 = 0 + z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

*Esta descrição dos números complexos como pares ordenados é devida a William Rowan Hamilton, conforme mencionado no Capítulo 2.

(A4) Existência do inverso aditivo: para todo número complexo $z = (x, y)$ existe um único $-z = (-a, -b) \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

• em relação à multiplicação

(M1) Comutatividade: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(M2) Associatividade: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

(M3) Existência do elemento neutro: existe um único número complexo $I = (1, 0)$ tal que $z \cdot I = I \cdot z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$

(M4) Existência do inverso multiplicativo: para todo número complexo $z \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ existe um único $z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = I$.

(M5) Distributividade em relação à soma: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Dizemos que o conjunto \mathbb{C} , por obedecer essas propriedades da adição e da multiplicação (A1 a A5 e M1 a M4), juntamente com essas duas operações, constitui um *corpo*, uma estrutura algébrica fundamental da Matemática bastante utilizada na Álgebra e Teoria dos Números.

3.1.1 A unidade imaginária i

Chamamos de unidade imaginária e representamos por i ao número complexo imaginário puro $(0, 1)$. Observe que a unidade imaginária i satisfaz a propriedade que motivou a descoberta dos números complexos, isto é, $i^2 = -1$.

Demonstração. Aplicando a definição de multiplicação de números complexos (3.1), temos:

$$\begin{aligned} i^2 &= i \cdot i \\ &= (0, 1)(0, 1) \\ &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ &= (-1, 0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

■

3.1.2 \mathbb{R} como um subconjunto de \mathbb{C}

Se tomarmos o subconjunto $\mathbb{C}' = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ de \mathbb{C} , temos que a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}'$ com $f(x) = (x, 0)$ é uma bijeção e preserva a adição e multiplicação em \mathbb{R} , isto é, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = f(x_1) + f(x_2), \\ f(x_1 \cdot x_2) &= (x_1 \cdot x_2, 0) = (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = f(x_1) \cdot f(x_2). \end{aligned}$$

Essas duas características fazem de \mathbb{R} e \mathbb{C}' conjuntos isomorfos que, para todos os efeitos práticos, comportam-se como \mathbb{R} fosse de fato um subconjunto de \mathbb{C} , isto é, podemos operar com os elementos $(x, 0)$ de \mathbb{C}' como se estivéssemos operando com os elementos x de \mathbb{R} e vice-versa.

Podemos usar, por conta da bijeção f , a notação $(x, 0) = x$ e considerar que o conjunto dos reais \mathbb{R} está incluído no conjunto dos números complexos.

Devemos observar, no entanto, que a ordem de \mathbb{R} não pode ser estendida para o conjunto dos complexos. A relação de ordem estabelece que para quaisquer elementos a e b de um conjunto, somente um dos seguintes casos é verdadeiro: $a > b$, $a < b$ ou $a = b$.

Para termos um corpo ordenado, os seguintes axiomas devem ser respeitados:

- i) se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$;
- ii) se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$;
- iii) se $a < b$ e $c > 0$, então $a \cdot c < b \cdot c$.

Supondo $i > 0$, temos que $i^2 = -1 < 0$, o que contradiz (iii). Então, devemos ter $i < 0$. Porém, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1 > 0$, o que também contradiz (iii). Logo, não pode haver nenhuma relação de ordem em \mathbb{C} que obedeça os axiomas de (i) a (iii), o que mostra que \mathbb{C} não é um corpo ordenado.

3.1.3 Tipos de números complexos

De maneira análoga, podemos destacar também o subconjunto $\mathbb{C}'' = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\}$ de \mathbb{C} , conhecido como o subconjunto dos números complexos imaginários puros. Assim, podemos considerar três tipos distintos de números complexos, conforme mostrado na Figura 3.1:

- $(x, 0)$ - são os números complexos reais ou, simplesmente, reais;
- $(0, y)$ - são os números complexos imaginários puros ou, simplesmente, imaginários puros;
- (x, y) , com $x \neq 0, y \neq 0$ - é a diferença entre \mathbb{C} e os subconjuntos dos reais e dos imaginários puros.

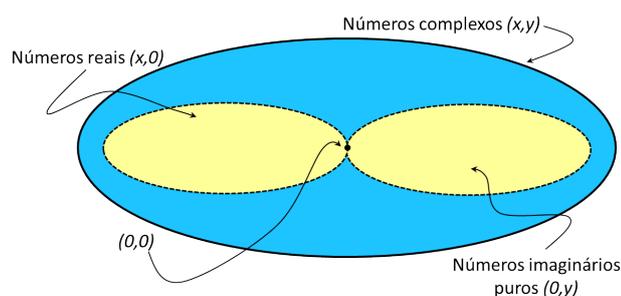


Figura 3.1 – Números reais e imaginários puros como subconjuntos de \mathbb{C}

Fonte: elaborado pelo autor

Observe que o número complexo $0 = (0, 0)$ é, simultaneamente, real e imaginário puro.

3.2 Forma Algébrica

Pares ordenados são convenientes para uma definição rigorosa dos números complexos. No entanto, para manipulação algébrica e para executar cálculos com números complexos, outras formas de representação são mais adequadas como, por exemplo, a forma algébrica que veremos a seguir.

Proposição 3.3. *Todo número complexo $z = (x, y)$ pode ser unicamente representado na forma $z = x + yi$, onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, isto é, $i^2 = -1$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} z &= (x, y) \\ &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) + (y, 0)(0, 1) \\ &= x + yi \end{aligned}$$

■

A expressão $z = x + yi$ é chamada de forma algébrica de um número complexo.

Definição 3.4. *O número real x é chamado de parte real do número complexo $z = x + yi$ e o número real y é chamado de parte imaginária de z . Notação: $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$.*

Definição 3.5. *Para qualquer número complexo $z = x + yi$, o número $\bar{z} = x - yi$ é chamado de conjugado do número z .*

3.2.1 Operações na forma algébrica

Quando usamos a forma algébrica $z = x + yi$ em vez do par ordenado (x, y) , não precisamos memorizar as operações de adição e multiplicação presentes na Definição 3.1, uma vez que essas operações são realizadas da mesma forma que operamos com binômios.

● Adição e subtração

A adição e a subtração de dois números complexos $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$ é feita realizando-se separadamente a soma ou a subtração das partes reais e imaginária, o que decorre da Definição 3.1 e, no caso da subtração, da propriedade do inverso aditivo. Temos, então:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \quad (3.1)$$

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 + y_1i) + (-x_2 - y_2i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \quad (3.2)$$

Isto é, $Re(z_1 \pm z_2) = Re(z_1) \pm Re(z_2)$ e $Im(z_1 \pm z_2) = Im(z_1) \pm Im(z_2)$.

Exemplo 3.6. Efetue as seguintes adições e subtrações:

a) $(3 + 4i) + (7 - i) = (3 + 7) + (4 - 1)i = 10 + 3i.$

b) $(3 - 2i) + 2 = (3 + 2) + (-2 + 0)i = 5 - 2i.$

c) $(3 + i) - (1 + 2i) = (3 + i) + (-1 - 2i) = (3 - 1) + (1 - 2)i = 2 - i.$ ■

• Multiplicação

Para realizar a multiplicação de $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$, usamos a propriedade distributiva e levamos em conta que $i^2 = -1$. Temos assim:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) \\ &= x_1(x_2 + y_2i) + y_1i(x_2 + y_2i) \\ &= x_1x_2 + x_1y_2i + y_1x_2i + y_1y_2i^2 \\ &= x_1x_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)i - y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i \end{aligned} \quad (3.3)$$

Exemplo 3.7. Efetue as seguintes multiplicações na forma algébrica:

a) $(3 + 4i)(7 - i) = 3(7 - i) + 4i(7 - i) = 21 - 3i + 28i + 4 = 25 + 25i.$

b) $(1 - 2i)(4 - 3i) = 1(4 - 3i) - 2i(4 - 3i) = 4 - 3i - 8i - 6 = -2 - 11i.$

c) $(3 + i)(1 + 2i) = 3(1 + 2i) + i(1 + 2i) = 3 + 6i + i - 2 = 1 + 7i.$ ■

• Divisão

Podemos calcular o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ de dois números complexos z_1 e z_2 , com $z_2 \neq 0$, obtendo $\frac{1}{z_2}$ (inverso multiplicativo de z_2) e realizando a multiplicação $z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$.

No entanto, podemos realizar a divisão $\frac{z_1}{z_2}$ mais facilmente, sem a necessidade de memorizarmos o inverso multiplicativo, utilizando a seguinte propriedade do conjugado de um número complexo: $z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$.

Assim, sabendo que o produto de um número complexo z por seu conjugado \bar{z} resulta em um número real, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador e teremos transformado o problema em uma multiplicação. Temos, assim:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} \\ &= \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} \cdot \frac{x_2 - y_2i}{x_2 - y_2i} \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (-x_1y_2 + y_1x_2)i}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{(-x_1y_2 + y_1x_2)}{x_2^2 + y_2^2}i \end{aligned} \quad (3.4)$$

Exemplo 3.8. Efetue as seguintes divisões na forma algébrica:

a) $\frac{1+i}{1-i}$

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \\ &= \frac{2i}{2} \\ &= i\end{aligned}$$

b) $\frac{3+2i}{2-2i}$

$$\begin{aligned}\frac{3+2i}{2-2i} &= \frac{3+2i}{2-2i} \cdot \frac{2+2i}{2+2i} \\ &= \frac{2+10i}{8} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{5i}{4}\end{aligned}$$

■

● Potências de i

As potências de i com expoente inteiro seguem um padrão[†]. Vejamos:

$$\begin{array}{llll} i^0 = 1 & i^1 = i & i^2 = -1 & i^3 = i^2 \cdot i = -i \\ i^4 = i^3 \cdot i = 1 & i^5 = i^4 \cdot i = i & i^6 = i^5 \cdot i = -1 & i^7 = i^6 \cdot i = -i \end{array}$$

Podemos provar por indução em $n \in \mathbb{N}$ que o padrão ilustrado acima se mantém, isto é: $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ e $i^{4n+3} = -i$. Assim, para determinarmos o valor de uma potência inteira de i , basta que determinemos o resto da divisão do expoente por 4.

Exemplo 3.9. Calcular o valor de $i^{1302797}$

O resto da divisão de 1302797 por 4 é igual ao resto da divisão de 97 (últimos dois dígitos) por 4. Como o resto da divisão de 97 por 4 é igual a 1, temos que $i^{1302797} = i^1 = i$. ■

Este padrão também se aplica para as potências negativas, pois $i^{-n} = \frac{1}{i^n}$. Assim, por exemplo, $i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{1}{-i} = i = i^7$.

3.2.2 Representação Geométrica

A exemplo dos números reais que podem ser representados pelos pontos de uma reta numérica, também é possível ter uma representação geométrica para os números complexos. A

[†]Esse padrão está relacionado à interpretação geométrica da multiplicação por i que veremos mais à frente nesse capítulo.

Definição 3.2 caracteriza cada número complexo como um par ordenado de números reais. Então, é bastante natural considerar um plano para colocar esses pares ordenados em um sistema de coordenadas xOy semelhante ao sistema cartesiano. O plano adotado para esta representação é chamado de Plano de Argand-Gauss ou Plano Complexo e consiste de um sistema de coordenadas com um eixo horizontal para os números reais e um eixo vertical para os números imaginários.

Definição 3.10. *Como os números complexos são pares ordenados de números reais, então existe um único ponto M do plano complexo associado a cada par ordenado $z = (x, y)$. Esse ponto M do plano complexo é chamado de afixo ou imagem geométrica do número complexo z , Figura 3.2.*

O número complexo $z = x + yi$ é chamado de coordenada complexa do ponto M .

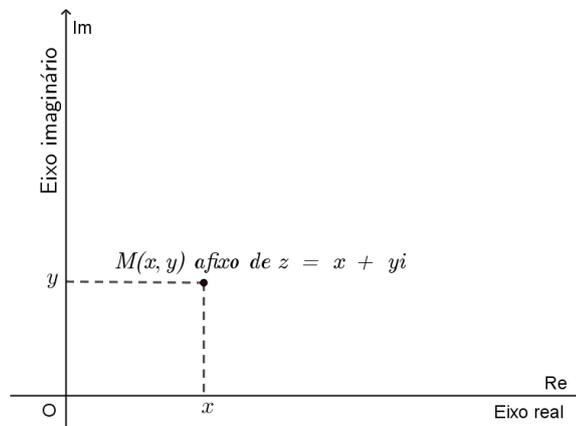


Figura 3.2 – Representação de z no plano complexo

Fonte: elaborado pelo autor

A Figura 3.3 mostra algumas representações geométricas no plano complexo: (a) o conjugado de um número z , (b) o inverso aditivo de um número complexo e (c) o vetor que representa um número complexo.

A imagem geométrica do conjugado de $z = x + yi$ é o ponto $M'(x, -y)$ (afixo M') que é a reflexão do ponto $M(x, y)$ em relação ao eixo x , conforme Figura 3.3 (a).

A imagem geométrica do inverso aditivo $-z$ de um número complexo $z = x + yi$ é a reflexão $M''(-x, -y)$ em torno da origem do ponto $M(x, y)$, conforme Figura 3.3 (b).

Uma vez que os números complexos podem ser representados por pontos em um plano, é natural associá-los a vetores em duas dimensões. Podemos, então, identificar o número complexo $z = x + yi$ com o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$, onde $M(x, y)$ é a imagem geométrica do número complexo z , como ilustrado na Figura 3.3 (c).

Assim, números complexos podem ser representados por vetores ou representá-los. Veremos a seguir que esta associação com vetores está relacionada com a interpretação geométrica das operações com os números complexos.

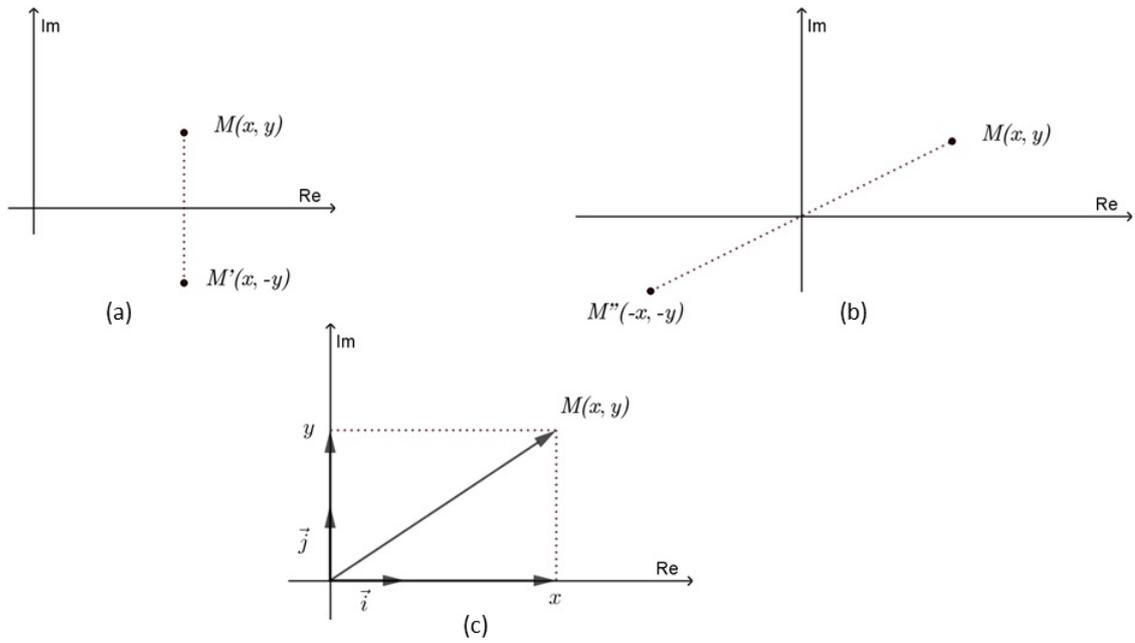


Figura 3.3 – Representação Geométrica: (a) conjugado (b) inverso aditivo (c) vetor associado

Fonte: Adaptado de (ANDREESCU; ANDRICA, 2014, p.23-24)

3.2.3 Interpretação geométrica das operações algébricas

• Soma e subtração

A soma de dois números complexos z_1 e z_2 corresponde geometricamente à soma dos vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 que os representam, Figura 3.4.

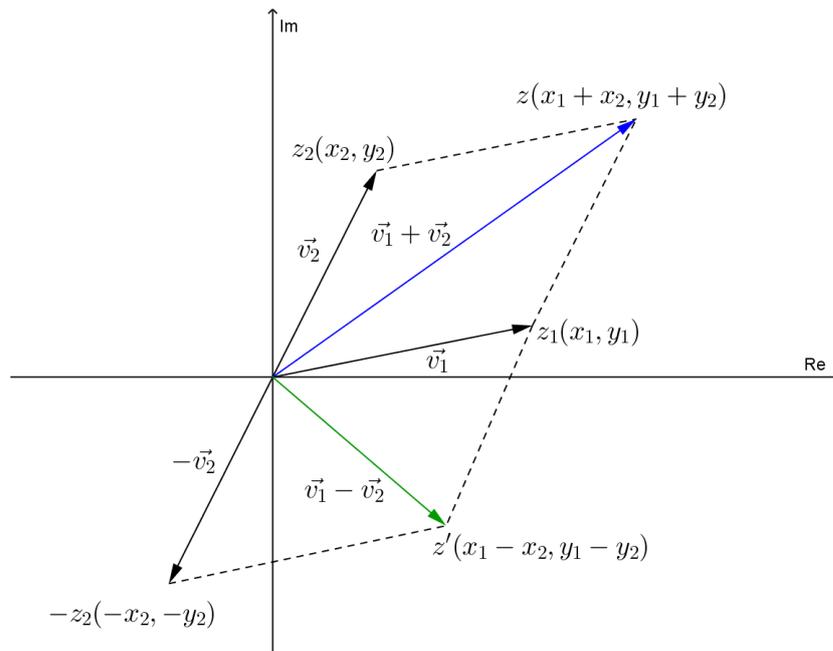


Figura 3.4 – Soma e subtração de vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2

Fonte: elaborado pelo autor

Essa correspondência pode ser comprovada observando-se que $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ e que a soma dos vetores é $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (y_1 + y_2)\vec{e}_2$, onde \vec{e}_1 e \vec{e}_2 são os vetores unitários dos eixos x e y , respectivamente.

Como a subtração de dois números complexos z_1 e z_2 é a soma de z_1 com o inverso aditivo de z_2 , isto é, $z_1 - z_2$ é igual a $z_1 + (-z_2)$, podemos concluir que a subtração de dois números complexos corresponde à subtração dos vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 que os representam, Figura 3.4.

Observando novamente a Figura 3.4, percebemos que, geometricamente, a adição (e subtração) de z_1 e z_2 podem ser visualizadas usando a regra do paralelogramo para adição de vetores. Nessa regra, o vetor soma é representado pela diagonal do paralelogramo formado pelos dois vetores originais, cuja origem coincide com a origem dos vetores.

• Multiplicação por i

Consideremos a multiplicação de um número complexo $z = x + yi$ pela unidade imaginária i . O produto será o número complexo $z \cdot i = -y + xi$. Os vetores que representam z e $z \cdot i$ são perpendiculares, pois $\langle x, y \rangle \langle -y, x \rangle = -xy + yx = 0$ (produto interno igual a zero).

Assim, a multiplicação por i corresponde a uma rotação de 90° no sentido anti-horário do vetor que representa z . A Figura 3.5 mostra o que acontece com o vetor que representa z quando realizamos sucessivas multiplicações por i .

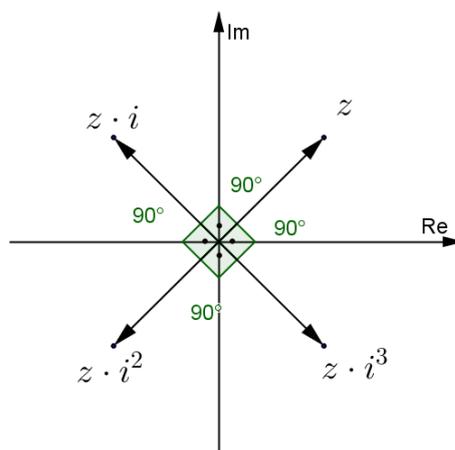


Figura 3.5 – Interpretação geométrica da multiplicação de z por i

Fonte: elaborado pelo autor

De maneira completamente análoga, podemos mostrar que a multiplicação de z por $-i$ corresponde a uma rotação de 90° no sentido horário do vetor que representa z .

• Multiplicação de z por $k \in \mathbb{R}$

A Figura 3.6 mostra o que acontece geometricamente quando multiplicamos um número

complexo z por um número real k . Podemos interpretar essa multiplicação como o produto do vetor que representa z por um escalar $k \in \mathbb{R}$.

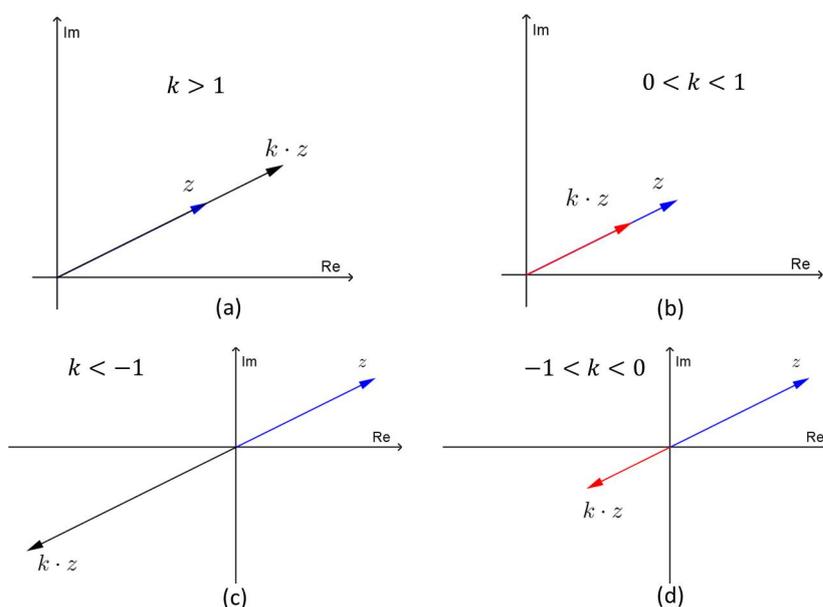


Figura 3.6 – Interpretação geométrica da multiplicação de z por k
 (a) $k > 1$ (b) $0 < k < 1$ (c) $k < -1$ (d) $-1 < k < 0$

Fonte: elaborado pelo autor

Se $k > 0$, então o produto $k \cdot z$ é representado por um vetor que tem a mesma direção e sentido do vetor que representa z , conforme Figura 3.6 (a) e (b).

Se, no entanto, $k < 0$, então o vetor que representa $k \cdot z$ tem a mesma direção, porém tem sentido oposto ao vetor que representa z , conforme Figura 3.6 (c) e (d).

A norma ou comprimento do vetor que representa $k \cdot z$ depende do módulo de k . Se $0 < |k| < 1$, a norma do vetor que representa $k \cdot z$ é menor do que a norma do vetor que representa z , como mostrado na Figura 3.6 (b) e (d). Se, no entanto, $|k| > 1$, a norma do vetor que representa $k \cdot z$ é maior do que a norma do vetor que representa z , conforme pode ser visto na Figura 3.6 (a) e (c).

3.3 Forma Polar ou Trigonométrica

A representação geométrica com coordenadas cartesianas não é a única forma de se representar um número complexo no plano. Podemos, por exemplo, em vez de coordenadas cartesianas, utilizar coordenadas polares.

As coordenadas polares tomam como referência uma distância a partir de uma origem (módulo) e uma direção (dada por um ângulo medido no sentido anti-horário em relação à horizontal).

Seja o número complexo $z = x + yi$ representado em um sistema de coordenadas no plano pelo vetor $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ conforme mostrado na Figura 3.7.

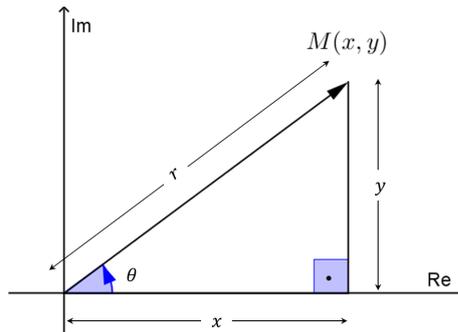


Figura 3.7 – Um número complexo z em um sistema de coordenadas polares

Fonte: elaborado pelo autor

Definição 3.11. O módulo ou valor absoluto de um número complexo $z = x + yi$, indicado por $|z|$ ou por r , é um número não negativo dado por: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$. É, portanto, a norma do vetor que representa o número complexo z , ou seja, a distância de sua imagem geométrica à origem.

Definição 3.12. Chamamos de argumento de um número complexo z não nulo, e representamos por $\arg(z)$, ao ângulo θ entre a parte positiva do eixo real e o vetor que representa z , medido no sentido anti-horário.

É fácil perceber por essa definição e pela Figura 3.8 que se θ é o argumento de um número complexo z , então $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ também é. Logo, um número complexo z tem infinitos argumentos. Se $0 \leq \theta < 2\pi$, então θ é chamado de argumento principal do número complexo z .

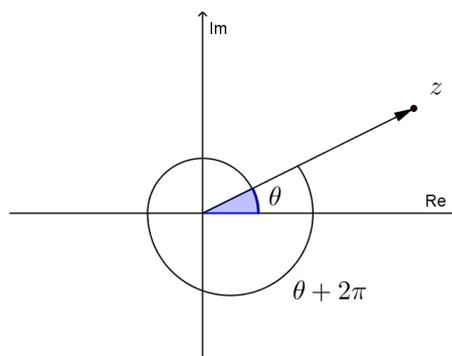


Figura 3.8 – Dois dos infinitos argumentos de um número complexo z

Fonte: elaborado pelo autor

Definição 3.13. Seja θ um argumento de um número complexo $z = x + yi$ não nulo e seja $r > 0$ o seu módulo. Então, temos que $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Logo, podemos escrever z como:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (3.5)$$

que é chamada de forma polar ou trigonométrica do número complexo z .

Os números r e θ são as coordenadas polares do ponto $z = M(x, y)$.

3.3.1 Propriedades do módulo de z

A partir da correspondência da soma de vetores com a soma de números complexos, podemos provar as seguintes propriedades:

P1 - A desigualdade triangular vale para os números complexos, isto é,

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (3.6)$$

Demonstração. Se os vetores que representam z_1 e z_2 não têm a mesma direção, para somá-los formamos um triângulo com os lados $|z_1|$, $|z_2|$ e $|z_1 + z_2|$. Como em um triângulo, cada lado é menor que soma dos outros dois e maior que a diferença dos outros dois, temos:

$$||z_1| - |z_2|| < |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|.$$

Se os vetores têm a mesma direção e o mesmo sentido, temos:

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Se os vetores têm a mesma direção e sentidos contrários, temos:

$$||z_1| - |z_2|| = |z_1 + z_2|.$$

Então, em qualquer dos três casos, vale: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. ■

P2 - Se z_1 e z_2 são dois números complexos com afixos Z_1 e Z_2 , respectivamente, então a distância entre eles é igual ao módulo de sua diferença, $|z_2 - z_1|$.

Demonstração. Quer os vetores que representam z_1 e z_2 tenham a mesma direção ou não, a distância entre eles será dada pelo módulo do vetor $\overrightarrow{Z_1 Z_2}$, ou seja:

$$d(z_1, z_2) = |\overrightarrow{Z_1 Z_2}| = |z_2 - z_1|.$$

■

3.3.2 Operações na forma polar

A forma polar de representação simplifica consideravelmente as operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números complexos.

• Multiplicação

Proposição 3.14. *Sejam dois números complexos $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$. O produto entre eles é dado por $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\
 &= r_1 \cdot r_2(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot i \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cdot i \operatorname{sen} \theta_2) \\
 &= r_1 \cdot r_2(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot i \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) \\
 &= r_1 \cdot r_2[(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) + i(\cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2)] \\
 &= r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

com $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ■

Podemos demonstrar por indução que a relação (3.7) pode ser estendida para n números complexos, $n \geq 2$, o que leva a:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)] \quad (3.8)$$

Interpretação geométrica - Da relação (3.7), podemos concluir que a multiplicação de números complexos $z_1 \cdot z_2$ pode ser interpretada geometricamente como uma homotetia (dilatação ou contração) de razão $|z_2|$ e uma rotação de ângulo $\arg(z_2)$ aplicadas ao vetor que representa z_1 . Assim, o número complexo $z_1 \cdot z_2$ tem módulo $|z_1| \cdot |z_2|$ e argumento $\theta_1 + \theta_2$, como na Figura 3.9.

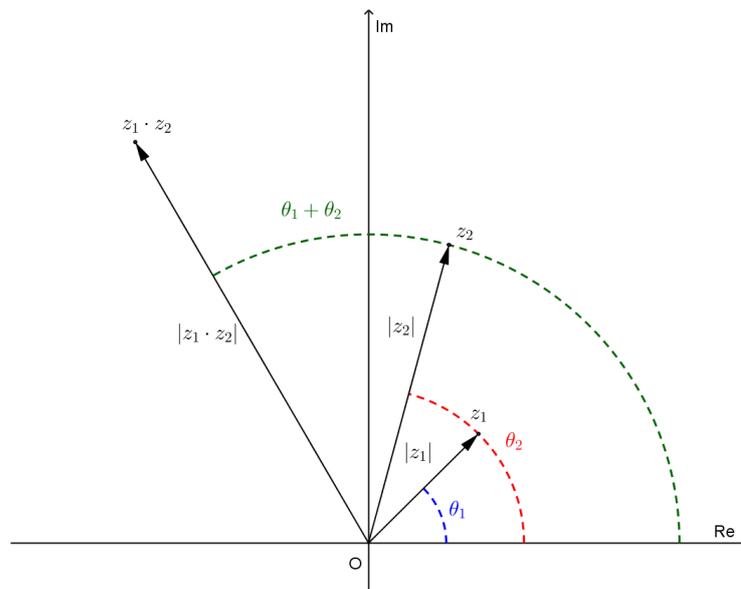


Figura 3.9 – Multiplicação de dois números complexos z_1 e z_2

Fonte: elaborado pelo autor

Particularmente, se tomarmos z_1 com módulo unitário, o vetor que representa o produto $z_1 \cdot z_2$ é o resultado de uma rotação do vetor que representa z_2 em torno da origem de um ângulo igual a θ_1 , conforme ilustrado na Figura 3.10.

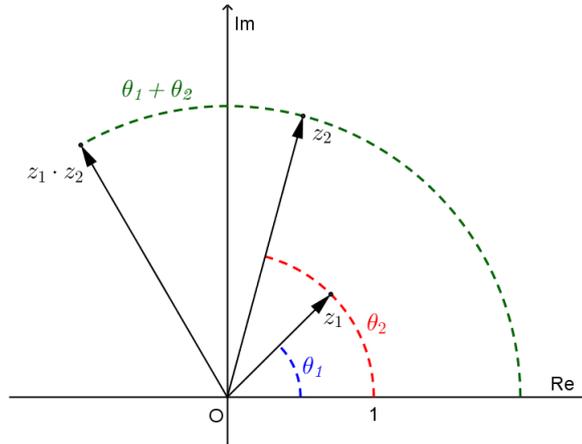


Figura 3.10 – Multiplicação de dois números complexos z_1 (módulo unitário) e z_2

Fonte: elaborado pelo autor

• Divisão

Proposição 3.15. *Sejam dois números complexos $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \neq 0$. Então, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)} \\
 &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)} \\
 &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{r_2(\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2)} \\
 &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)] \\
 &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

com $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ■

Exemplo 3.16. *Seja $z_1 = 5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ e $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$. Efetue as seguintes multiplicações e divisões:*

a) $z_1 \cdot z_2$

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= 5 \cdot 3 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\
 &= 15 \left(\cos\frac{5\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{z_1}{z_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{5}{3} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \frac{5}{3} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{c) } \frac{z_2^2}{z_1}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_2^2}{z_1} &= \frac{3 \cdot 3}{5} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= \frac{9}{5} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

■

• Potenciação

A seguinte relação, conhecida como Teorema ou Fórmula de De Moivre, fornece uma forma simples de se calcular uma potência inteira de um número complexo. Ela foi nomeada em homenagem a Abraham De Moivre (1667-1754). De Moivre mencionou em um artigo de 1698 que Isaac Newton já conhecia uma expressão equivalente a essa fórmula por volta de 1676. Embora De Moivre tenha utilizado essa relação em seus trabalhos, ela só foi explicitamente publicada em 1748 por Leonhard Euler que a obteve a partir da Fórmula de Euler (3.12) (NAHIN, 1998).

Proposição 3.17. (Teorema/Fórmula de De Moivre)

Sejam $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $n \in \mathbb{Z}$. Então,

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]. \quad (3.10)$$

Demonstração. A verificação para $n = 0$ e $n = 1$ é direta. Para $n \geq 2$, a demonstração consiste em aplicar $n - 1$ vezes a relação para multiplicação de dois números complexos (3.7) ou aplicar a relação (3.8). Resta, então, demonstrarmos para $n < 0$. Tomando $n = -m$, $m > 0$, temos:

$$\begin{aligned} z^n &= [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^{-m} \\ &= \frac{1}{[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^m} \\ &= \frac{1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)}{r^m [\cos(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta)]} \\ &= \frac{1}{r^m} [\cos(0 - m\theta) + i \operatorname{sen}(0 - m\theta)] \\ &= r^{-m} [\cos(-m\theta) + i \operatorname{sen}(-m\theta)] \\ &= r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)] \end{aligned}$$

com $\arg(z^n) = n \arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

■

Exemplo 3.18. Calcule $z = (\sqrt{3} + i)^6$.

$\sqrt{3} + i$ é igual a $2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)$ na forma polar.

Aplicando a Fórmula de De Moivre, temos:

$$z = 2^6 \left(\cos \frac{6\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{6} \right) = -64. \quad \blacksquare$$

• Radiciação

A Fórmula de De Moivre fornece um modo de se obter as raízes n -ésimas de um número complexo z .

Seja $w = \sqrt[n]{z}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$. Temos que $w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z$.

Então, encontrar as raízes n -ésimas ($n \geq 2$) de $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ consiste em encontrar todos os distintos números w da forma $w = |w|(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$ de modo que $w^n = z$. Temos, então:

$$[|w|(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)]^n = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Aplicando a Fórmula de De Moivre, temos:

$$|w|^n [\cos(n\phi) + i \operatorname{sen}(n\phi)] = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Como números complexos iguais têm módulos iguais e argumentos congruentes, obtemos que $|w|^n = r$ e $n\phi = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $|w| = \sqrt[n]{r}$ e $\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$. Então, as n raízes de z têm a forma:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \quad (3.11)$$

Da relação (3.11), podemos observar as seguintes propriedades das raízes de um número complexo:

- i) todas as raízes têm o mesmo módulo e pertencem à circunferência de raio $\sqrt[n]{r}$ e centro em $z = 0$;
- ii) os argumentos principais das raízes formam uma progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$;
- iii) se $r \neq 0$ e $n \geq 3$, as imagens das raízes são os vértices de um polígono regular de n lados, inscrito na circunferência de raio $\sqrt[n]{r}$ e centro em $z = 0$.

Exemplo 3.19. Determine $\sqrt[8]{-128 + 128\sqrt{3}i}$ e represente essas raízes no plano complexo.

Solução: $-128 + 128\sqrt{3}i = 256 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right)$ na forma polar.

Pela relação (3.11), $\sqrt[8]{256 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right)}$ tem as seguintes raízes:

$$\text{Para } k = 0: w_0 = \sqrt[8]{256} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{8} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{8} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} \right).$$

$$\text{Para } k = 1: w_1 = \sqrt[8]{256} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{8} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right).$$

$$\text{Para } k = 2: w_2 = \sqrt[8]{256} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{8} \right) = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{12} \right).$$

$$\text{Para } k = 3: w_3 = \sqrt[8]{256} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{8} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \right).$$

$$\text{Para } k = 4: w_4 = \sqrt[8]{256} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 8\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{2\pi}{3} + 8\pi}{8} \right) = 2 \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{13\pi}{12} \right).$$

$$\text{Para } k = 5: w_5 = \sqrt[8]{256} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 10\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{2\pi}{3} + 10\pi}{8} \right) = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right).$$

$$\text{Para } k = 6: w_6 = \sqrt[8]{256} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 12\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{2\pi}{3} + 12\pi}{8} \right) = 2 \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{19\pi}{12} \right).$$

$$\text{Para } k = 7: w_7 = \sqrt[8]{256} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 14\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{2\pi}{3} + 14\pi}{8} \right) = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} \right).$$

As raízes estão posicionadas no círculo centrado na origem e raio 2, conforme Figura 3.11.

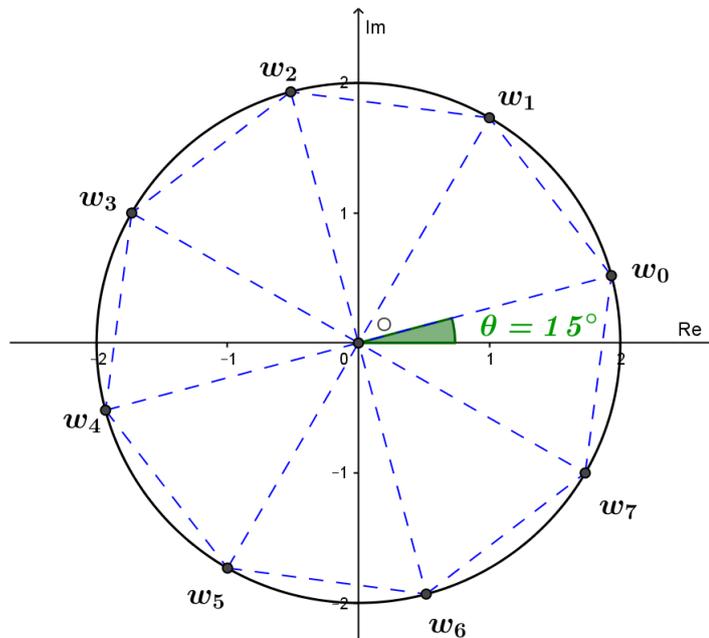


Figura 3.11 – Localização de $\sqrt[8]{-128 + 128\sqrt{3}i}$ no plano complexo

Fonte: elaborado pelo autor

3.4 Forma Exponencial

Vimos que a n -ésima potência de $\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ pode ser obtida pela Fórmula de De Moivre (3.10) multiplicando-se o argumento θ por n . Este comportamento, o fato que $f(x)^n = f(nx)$, é uma das propriedades que caracterizam as funções exponenciais. De fato, $\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ é uma função exponencial, o que foi demonstrado pelo matemático Leonhard Euler (1707-1783) através da seguinte relação:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \quad (3.12)$$

A Fórmula de Euler (3.12) é praticamente onipresente na Matemática, Física e Engenharia, tendo sido considerada por FEYNMAN como a mais notável fórmula da Matemática. Uma vez que a função exponencial é ilimitada, enquanto as funções trigonométricas seno e cosseno são limitadas e periódicas, não havia, antes da adoção dos números complexos, nenhuma razão para supor que essas funções pudessem estar relacionadas de alguma forma. Uma demonstração bastante simples dessa fórmula, feita a partir da expansão das funções $\operatorname{sen} \theta$, $\cos \theta$ e e^x em séries de Taylor, pode ser encontrada em (TRALIE, 2013).

A partir da Fórmula de Euler (3.12) e da forma polar de representação (3.5), podemos reescrever o número complexo z de uma forma mais compacta, conhecida como forma exponencial de representação.

$$z = r e^{i\theta}, \quad (3.13)$$

onde θ é um argumento de z e r o seu módulo.

Tomando a equação (3.13) com $r = 1$, temos, geometricamente, que o número $z = e^{i\theta}$ está situado no círculo de raio unitário e centro na origem, como mostrado na Figura 3.12. É fácil ver também que a equação $z = r e^{i\theta}$ é uma representação paramétrica do círculo $|z| = r$ (centro na origem e raio r).

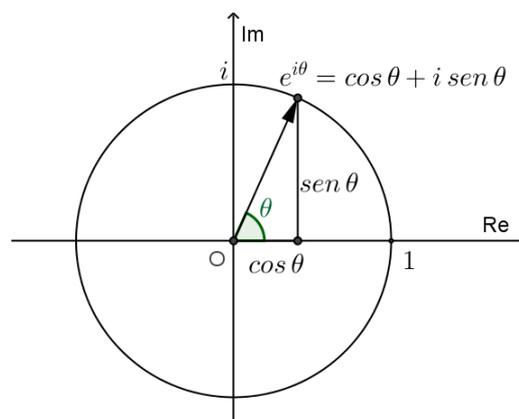


Figura 3.12 – Interpretação geométrica da Fórmula de Euler

Fonte: elaborado pelo autor

3.4.1 Operações na forma exponencial

Com a forma exponencial (3.13), podemos utilizar as propriedades básicas dos expoentes para obter outras relações para operar com os números complexos. Isso, geralmente, resulta em relações mais simples, especialmente para as operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

As seguintes relações são obtidas diretamente a partir de (3.13):

- Multiplicação: $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$;
- Inverso Multiplicativo: $\frac{1}{z} = z^{-1} = (re^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$, $z \neq 0$;
- Divisão: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$, $z_2 \neq 0$;
- Potenciação: $z^n = r^n e^{i(n\theta)}$ (Fórmula de De Moivre na forma exponencial);
- Radiciação: $w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$;
- Conjugado: $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

A forma exponencial não simplifica as operações de adição e subtração, sendo mais fácil realizar essas operações na forma algébrica.

3.5 Recursos Digitais

A seguir apresento os recursos digitais que foram produzidos para explorar os conceitos vistos nesse capítulo. Fundamentalmente, esses recursos trabalham com as formas de representação, as operações em cada forma e reforçam a interpretação geométrica dessas operações.

- RD301 - Interpretação geométrica da unidade imaginária i
Alinhado com o que é proposto em (CARNEIRO, 2004), esse *applet* Javascript explora o uso da interpretação geométrica dos números complexos, caracterizando-os, já a partir do contexto histórico, como operadores de transformações geométricas. A unidade imaginária $\sqrt{-1}$ é apresentada de tal forma que o aluno possa determinar o seu comportamento geométrico intuitivamente, a partir da observação e comparação de transformações geométricas aplicadas em ilustrações cotidianas.
- RD302 - Identidade de Euler
Este *applet* do Geogebra permite visualizar aquela que é considerada por muitos cientistas como a equação mais bonita da Matemática, a Identidade de Euler. O *applet* mostra o número complexo $z = e^{i\theta}$ no plano complexo, permitindo que se varie o ângulo θ com um

controle deslizante. A variação do ângulo θ é mostrada no plano e na Fórmula de Euler (3.12). Quando $\theta = \pi$, obtemos:

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi \\ &= -1 + 0i \\ e^{i\theta} + 1 &= 0 \quad (\text{Identidade de Euler}) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Na Identidade de Euler aparecem cinco dos mais fundamentais números da Matemática ($0, 1, e, i, \pi$) e três das operações básicas da Aritmética (adição, multiplicação e potenciação). Além da Identidade de Euler, propriamente dita, esse *applet* permite visualizar a interpretação geométrica das formas de representação polar e exponencial.

- RD303 - Inclusão de \mathbb{R} em \mathbb{C} e operações na forma algébrica
Este *applet* mostra no plano complexo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão na forma algébrica e sua interpretação geométrica. Além disso, a sequência didática e as questões propostas por esse *applet* do Geogebra levam o aluno a trabalhar nessas operações com os três tipos de números complexos (reais, imaginários puros e complexos, propriamente ditos), possibilitando, assim, que ele entenda que o conjunto dos números complexos é uma extensão do dos números reais.
- RD304 - Interpretação geométrica da multiplicação e operações na forma polar
Em linha com o recomendado por CARNEIRO, este *applet* do Geogebra permite realizar as operações de multiplicação e divisão nas formas algébrica e polar no plano complexo, deixando claro, geometricamente, a homotetia e a rotação envolvidos nessas operações. É possível também observar no plano complexo a aplicação do Teorema de De Moivre para as operações de potenciação (3.10) e radiciação (3.11) na forma polar, visualizando, assim, sua interpretação geométrica.
- RD305 - Conjugado, Módulo, Inverso Aditivo e Argumento de z
Este *applet* do Geogebra permite visualizar e determinar o conjugado, o inverso aditivo, o módulo e o argumento principal de um número complexo z . É possível também visualizar algumas propriedades do módulo e do conjugado de um número complexo z .
- RD306 - Conversor de Forma de Representação
Este *applet* é uma calculadora complexa que permite realizar as operações básicas na forma algébrica. Permite ainda converter um número complexo expresso em uma forma de representação para outra.

4 Aplicações na Matemática

(NORDLANDER; NORDLANDER, 2012) afirmam que quando os números complexos são percebidos pelos alunos como um artifício matemático, sua imagem conceitual é dissociada da realidade, sendo reduzida a uma invenção humana para facilitar cálculos e para forçar a existência de soluções de equações que de outro modo seriam insolúveis. Pontuam também que os alunos, ao perceberem um conceito matemático como um artifício criado pelo homem, podem adotar uma atitude negativa diante dele e, por conta disso, bloquear sua compreensão e desenvolvimento.

Assim, geralmente, quando um aluno pergunta por que deve estudar um determinado conceito matemático, ele está à procura de exemplos que mostrem a utilidade desse conteúdo no “mundo real”, entendendo-se aí o mundo fora da Matemática. Algumas aplicações dos números complexos no “mundo real” serão apresentadas no Capítulo 5. Por ora, não podemos ignorar que a Matemática é também uma disciplina por si só e que os números complexos, auge dos sistemas numéricos nas palavras de (STROGATZ, 2010), têm um papel estruturante nela e que o PCN recomenda:

Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas (BRASIL, 2006b, p.40).

Então, mesmo considerando o que foi colocado por NORDLANDER; NORDLANDER, nesse capítulo apresentarei alguns exemplos de aplicações dos números complexos na Geometria, na Trigonometria e na resolução de equações algébricas para que o aluno consiga estabelecer conexões e perceber a validade deles também dentro da própria Matemática.

4.1 Geometria

Os números complexos fornecem simetria e generalidade na formulação e descrição de vários ramos da Geometria, o que pode ser usado para demonstração de muitos de seus resultados. Um exemplo histórico dessa utilização se deu quando Gauss para demonstrar que o polígono regular de 17 lados pode ser construído apenas com régua e compasso se valeu dos números complexos (KLEINER, 2012).

É usual nos valermos da Geometria Analítica quando nos deparamos com problemas que apresentam uma resolução mais complicada quando utilizamos apenas conceitos de geometria elementar. No entanto, muitas vezes podemos resolver esses mesmos problemas de maneira ainda mais simples se utilizarmos os números complexos porque, além de podermos utilizá-los para representar vetores no plano, podemos ainda multiplicá-los, o que os tornam especialmente

úteis para manipulação de ângulos e rotações. Um exemplo dessa característica é a multiplicação por i e $-i$ que é equivalente a rotações de 90° no sentido anti-horário e horário, respectivamente.

Além da multiplicação, outras propriedades dos números complexos podem ser utilizadas na resolução de problemas geométricos. Os seguintes exemplos ilustram essa conexão dos números complexos com a geometria, destacando algumas de suas propriedades que tornam essa manipulação mais simples.

Exemplo 4.1. Triângulo no flanco de dois quadrados

Os quadrados ABDE e ACFG são erguidos sobre os lados do triângulo ABC, Figura 4.1. Mostre que o comprimento EG é duas vezes maior que a mediana AM. Mostre ainda que EG é perpendicular a AM.

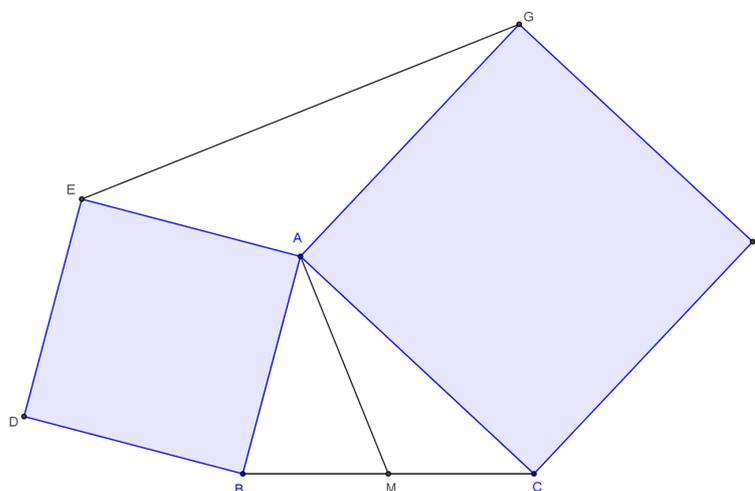


Figura 4.1 – Dois quadrados com um vértice comum

Fonte: elaborado pelo autor

Solução: Este é um problema bastante conhecido, tendo sido proposto por Boris Pritsker em 1996, de acordo com HONSBERGER. Embora existam diversas formas de resolvê-lo geometricamente (BOGOMOLNY, 2018), podemos também resolvê-lo de forma bastante simples utilizando números complexos e vetores, como mostrado em (HONSBERGER, 2003).

Seja A a origem do plano complexo e sejam os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} iguais a \vec{v} e \vec{w} , respectivamente. Como a multiplicação por i corresponde a uma rotação do vetor de 90° no sentido anti-horário, temos que $\overrightarrow{AG} = i\vec{w}$ e $\overrightarrow{AE} = i^3\vec{v} = -i\vec{v}$. Então:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE} \\ &= i(\vec{w} + \vec{v})\end{aligned}\tag{4.1}$$

Como $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$ e $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, obtemos que:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AM} &= \vec{w} + \vec{v} \\ \overrightarrow{AM} &= \frac{\vec{w} + \vec{v}}{2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Esses resultados podem ser vistos na Figura 4.2.

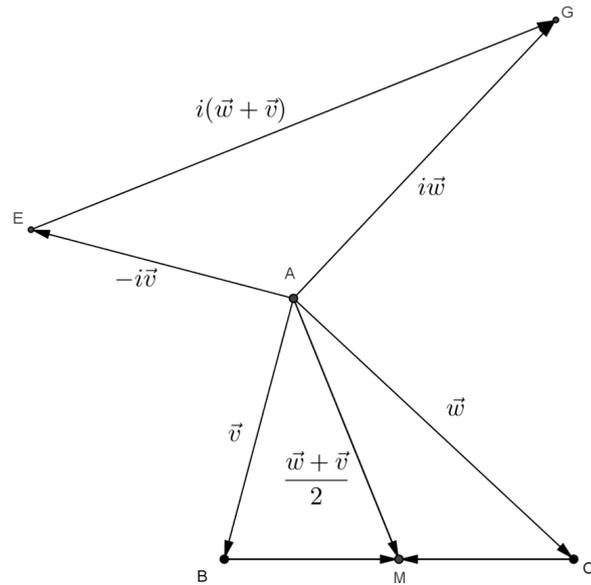


Figura 4.2 – Solução usando números complexos

Fonte: elaborado pelo autor

Lembrando que a multiplicação de um vetor por i indica uma rotação de 90° , obtemos a partir de (4.1) e (4.2) que $\|\overrightarrow{EG}\| = 2\|\overrightarrow{AM}\|$ e $\overrightarrow{EG} \perp \overrightarrow{AM}$. ■

Exemplo 4.2. O problema dos três quadrados

Na Figura 4.3 mostre que $\alpha = \beta + \gamma$, ou, equivalentemente, que $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

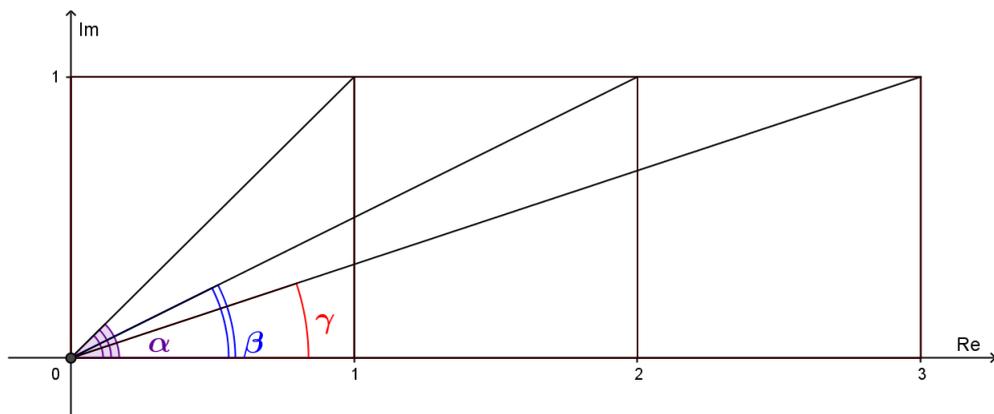


Figura 4.3 – Três quadrados contíguos

Fonte: elaborado pelo autor

Solução: Esse é um problema clássico que aparece em (GARDNER, 1979). Muitos são os modos de resolvê-lo usando Geometria e Trigonometria. No entanto, se lembrarmos que a soma $\alpha + \beta + \gamma$ é o argumento do produto de três números complexos, temos:

$$z = (1 + i)(2 + i)(3 + i) = 10i. \text{ Logo,}$$

$$z = 10(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) \text{ (z na forma polar ou trigonométrica).}$$

$$\text{Portanto: } \alpha + \beta + \gamma = \operatorname{Arg}(z) = 90^\circ. \quad \blacksquare$$

Exemplo 4.3. Semelhança de triângulos(ANDREESCU; ANDRICA, 2014)

A semelhança de triângulos, um dos conceitos mais fundamentais da Geometria, pode ser verificada de uma maneira simples se localizarmos esses triângulos no plano complexo.

Sejam os seguintes pontos $Z_1(z_1), Z_2(z_2), Z_3(z_3), W_1(w_1), W_2(w_2), W_3(w_3)$ no plano complexo. Os triângulos $Z_1Z_2Z_3$ e $W_1W_2W_3$ são semelhantes se o ângulo em Z_k é igual ao ângulo em $W_k, k \in \{1, 2, 3\}$. Dizemos que dois triângulos semelhantes, $Z_1Z_2Z_3$ e $W_1W_2W_3$, têm a mesma orientação se ambos estão no sentido horário ou ambos no sentido anti-horário.

Mostre que os triângulos $Z_1Z_2Z_3$ e $W_1W_2W_3$ são semelhantes com a mesma orientação, se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. Dois triângulos são semelhantes com a mesma orientação se, e somente se, as razões entre dois lados correspondentes são iguais e os ângulos entre os lados correspondentes são congruentes (inclusive a orientação), isto é:

$$\begin{aligned} \Delta Z_1Z_2Z_3 \sim \Delta W_1W_2W_3 &\iff \frac{Z_1Z_2}{Z_1Z_3} = \frac{W_1W_2}{W_1W_3} \text{ e } \widehat{Z_3Z_1Z_2} \equiv \widehat{W_3W_1W_2} \\ &\iff \left| \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right| = \left| \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right| \text{ e } \operatorname{arg} \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \operatorname{arg} \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}, \\ &\iff \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \\ &\iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Decorre daí que os triângulos $Z_1Z_2Z_3$ e $W_1W_2W_3$ são semelhantes com orientação oposta, se, e somente se, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{w_1} & \overline{w_2} & \overline{w_3} \end{vmatrix} = 0$, onde $\overline{w_1}, \overline{w_2}$ e $\overline{w_3}$ são os conjugados de w_1, w_2 e w_3 , respectivamente. Isso se dá porque $\Delta \overline{W_1} \overline{W_2} \overline{W_3}$ têm orientação oposta a $\Delta W_1W_2W_3$, uma vez que um é reflexão do outro em relação ao eixo real. \blacksquare

Exemplo 4.4. Caracterização de triângulos equiláteros (ANDREESCU; ANDRICA, 2014)

Mostre que os complexos z_1, z_2, z_3 são vértices de um triângulo equilátero se, e somente se, $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$ ou $z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0$, onde ω é uma raiz cúbica da unidade diferente de 1 (isto é, $1 + \omega + \omega^2 = 0$).

Solução: $\Delta z_1 z_2 z_3$ é equilátero se, e somente se, for semelhante ao triângulo formado pelas três raízes cúbicas da unidade, Figura 4.4, no sentido horário ou no sentido anti-horário, isto é, se $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 \omega \omega^2$ ou se $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 \omega^2 \omega$.

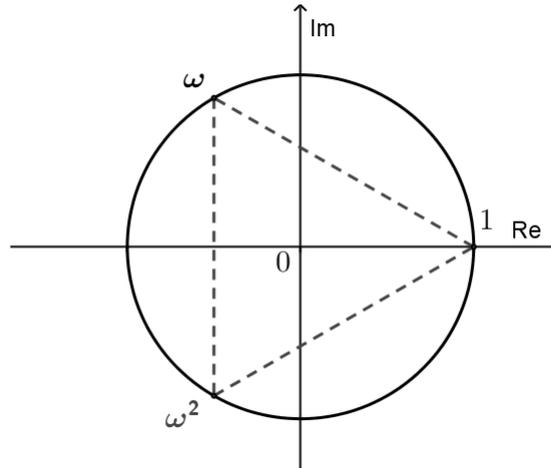


Figura 4.4 – Triângulo equilátero formado pelas três raízes cúbicas de 1

Fonte: elaborado pelo autor

Utilizando a condição de semelhança do exemplo 4.3 para o primeiro caso temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \iff z_1(\omega - \omega^2) + z_2(\omega^2 - 1) + z_3(1 - \omega) = 0$$

Multiplicando ambos os membros por ω e substituindo $\omega^3 = 1$, temos

$$\begin{aligned} z_1(\omega^2 - \omega^3) + z_2(\omega^3 - \omega) + z_3(\omega - \omega^2) &= 0 \\ z_1(\omega^2 - 1) + z_2(1 - \omega) + z_3(\omega - \omega^2) &= 0 \\ -z_1 + z_1\omega^2 + z_2 - z_2\omega + z_3\omega - z_3\omega^2 &= 0 \\ -z_1 - \omega z_2 - \omega^2 z_3 + \frac{1}{\omega}(z_1\omega^3 + z_2\omega + z_3\omega^2) &= 0 \\ \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3) &= 0 \\ z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

pois $\left(\frac{1}{\omega} - 1\right) \neq 0$, uma vez que ω é diferente de 1.

A demonstração para o segundo caso (outro sentido do triângulo) é análoga e leva a

$$z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0 \quad (4.5)$$

■

Exemplo 4.5. O Teorema de Napoleão (MOTTA, 1999)

No exterior de cada lado de um triângulo $z_1 z_2 z_3$, constrói-se um triângulo equilátero, Figura 4.5. Prove que os baricentros desses três triângulos equiláteros são vértices de outro triângulo equilátero.

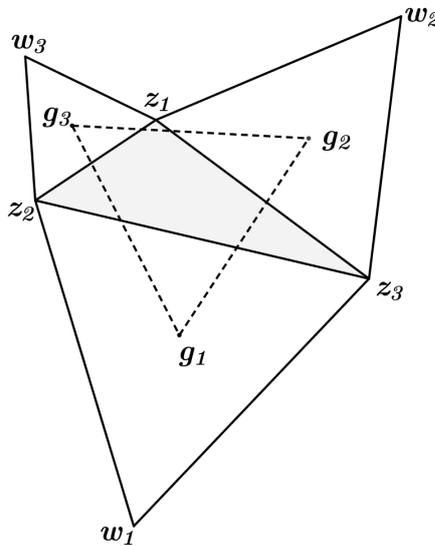


Figura 4.5 – Três triângulos equiláteros sobre os lados de um triângulo qualquer

Fonte: elaborado pelo autor

Solução: Sem perda de generalidade, sejam os triângulos equiláteros $\Delta w_1 z_3 z_2$, $\Delta z_3 w_2 z_1$, $\Delta z_2 z_1 w_3$ com a mesma orientação que $\Delta 1 \omega \omega^2$ e sejam g_1, g_2, g_3 , os baricentros desses triângulos. A condição (4.4) vale para cada um dos três triângulos equiláteros. Temos, então:

$$w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2 = 0$$

$$z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1 = 0$$

$$z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3 = 0$$

Para provar que o triângulo $\Delta g_1 g_2 g_3$ é equilátero, testamos a condição (4.4). Lembrando

da relação para cálculo do baricentro de um triângulo no plano complexo*, temos:

$$\begin{aligned} g_1 + \omega g_2 + \omega^2 g_3 &= \frac{1}{3}(w_1 + z_3 + z_2) + \frac{\omega}{3}(z_3 + w_2 + z_1) + \frac{\omega^2}{3}(z_2 + z_1 + w_3) \\ &= \frac{1}{3}[(w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2) + (z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1) + (z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $\Delta g_1 g_2 g_3$ é um triângulo equilátero. ■

Exemplo 4.6. Fórmula de Herão (WILSON, 2013)

Demonstre que a área de um triângulo ABC de lados a , b e c e semiperímetro p é dada por $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}^\dagger$.

Solução: Considere o triângulo ABC, com incentro em I, dividido em 3 pares de triângulos retos e congruentes ($\Delta AIF \sim \Delta AIE$, $\Delta BIF \sim \Delta BID$, $\Delta CID \sim \Delta CIE$) de tal modo que seus lados sejam $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$, conforme mostrado na Figura 4.6.

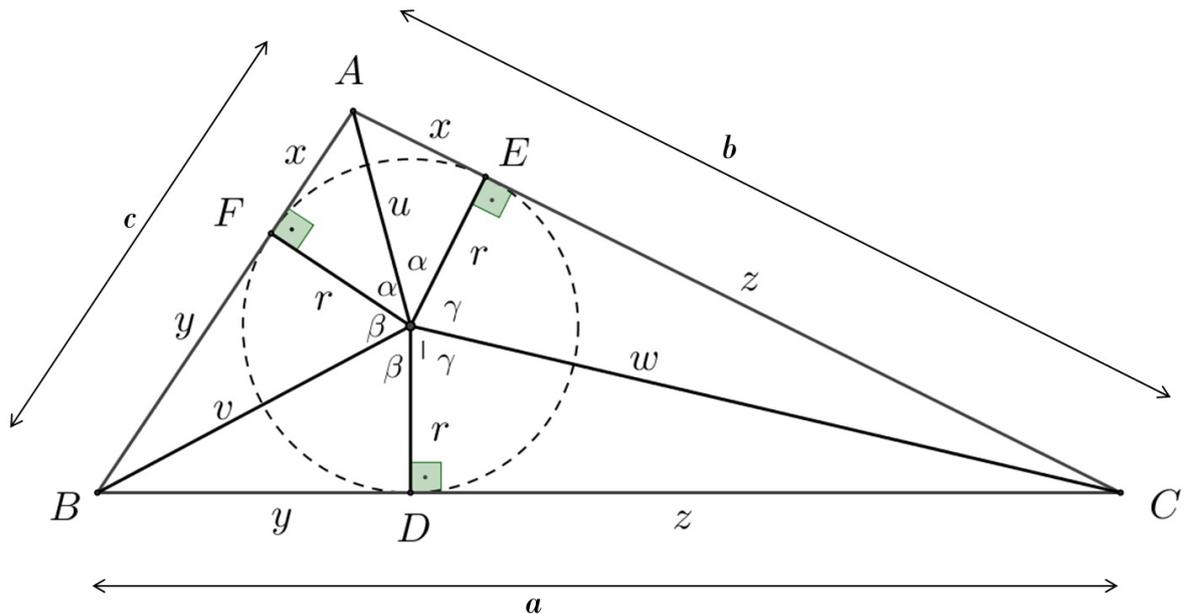


Figura 4.6 – Triângulo ABC de lados a , b e c e incentro I

Fonte: elaborado pelo autor

Observe que o semiperímetro de ΔABC é $p = \frac{a+b+c}{2} = x+y+z$. As áreas dos triângulos retos são $\frac{rx}{2}$, $\frac{ry}{2}$, $\frac{rz}{2}$ e, portanto, a área do triângulo ABC vale rp .

Sejam α, β, γ os ângulos de vértice I com $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi$ e, portanto, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

*O baricentro de um Δabc qualquer é dado por $g = \frac{a+b+c}{3}$.

†Esta relação é conhecida como fórmula de Herão, atribuída ao matemático grego Herão de Alexandria (séc.I d.C.).

Observe que :

$$(r + ix)(r + iy)(r + iz) = (ue^{i\alpha})(ve^{i\beta})(we^{i\gamma}) = uvwe^{i\pi} = -uvw$$

Logo, a parte imaginária desse produto é 0. Temos, então:

$$\text{Im}[(r + ix)(r + iy)(r + iz)] = 0$$

$$r^2(x + y + z) - xyz = 0$$

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}$$

$$rp = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

■

Abordar os números complexos com um enfoque geométrico não é uma prática comum em nossas escolas como relata (CARNEIRO, 2004). Mostrar exemplos de como os números complexos podem ser usados para resolver problemas geométricos pode ajudar a mudar esse quadro e, como destaca (GARFUNKEL, 1967), é uma forma de fornecer evidências adicionais para o aluno do Ensino Médio que os números imaginários têm, sim, uso real.

4.2 Trigonometria

Também podemos nos beneficiar do uso dos números complexos para simplificar a obtenção de relações e identidades trigonométricas. Isso se dá por conta do relacionamento existente entre a função exponencial complexa e as funções trigonométricas (seno e cosseno) que aparece na Fórmula de Euler (3.12).

Veremos a seguir alguns exemplos de relações trigonométricas obtidas a partir da Fórmula de Euler.

Exemplo 4.7. Paridade das funções seno e cosseno

Mostre que $\cos(-\theta) = \cos \theta$ e $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$, isto é, mostre que o cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar.

Solução: Utilizando a Fórmula de Euler para $-\theta$, temos:

$$\begin{aligned}
 \cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta) &= e^{-i\theta} \\
 &= (e^{i\theta})^{-1} \\
 &= \frac{1}{e^{i\theta}} \\
 &= \frac{1}{\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)} \\
 &= \frac{1}{\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)} \frac{\cos(\theta) - i\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta) - i\operatorname{sen}(\theta)} \\
 &= \frac{\cos(\theta) - i\operatorname{sen}(\theta)}{\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)} \\
 &= \cos(\theta) - i\operatorname{sen}(\theta)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Observando que a parte real e a parte imaginária permanecem as mesmas, pois nenhuma manipulação pode transformar a parte real de um complexo em imaginária e vice-versa, obtemos as relações desejadas igualando as partes real e imaginária de (4.6).

$$\begin{aligned}
 \cos(-\theta) &= \cos(\theta) \\
 i\operatorname{sen}(-\theta) &= -i\operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 4.8. Seno e cosseno em termo de funções exponenciais complexas

Obtenha o seno e o cosseno em termo de funções exponenciais complexas.

Solução: Para se obter o seno e o cosseno em termos da função complexa, partimos da Fórmula de Euler e lembrando que $\cos(-\theta) = \cos \theta$ e $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$ (exemplo 4.7), obtemos o seu conjugado:

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta} &= \cos \theta + i\operatorname{sen} \theta \\
 e^{-i\theta} &= \cos \theta - i\operatorname{sen} \theta
 \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos a função seno:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{4.7}$$

Somando as duas equações, obtemos a função cosseno:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \tag{4.8}$$

■

Exemplo 4.9. Seno e cosseno da soma/diferença

Obtenha as relações para se calcular o seno e o cosseno da soma e da diferença de dois ângulos a e b .

Solução: Aplicando a Fórmula de Euler para a soma de dois ângulos a e b , obtemos:

$$\begin{aligned} \cos(a + b) + i\operatorname{sen}(a + b) &= e^{i(a+b)} \\ &= e^{ia} e^{ib} \\ &= [\cos(a) + i\operatorname{sen}(a)][\cos(b) + i\operatorname{sen}(b)] \\ &= \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) + i[\operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b)] \end{aligned}$$

Igualando as partes real e imaginária dos dois lados da equação, obtemos as relações para o seno e o cosseno da soma de dois ângulos:

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b) \quad (4.9)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) \quad (4.10)$$

Adotando um procedimento análogo para a diferença de dois ângulos a e b , obtemos

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \cos(a)\operatorname{sen}(b) \quad (4.11)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) \quad (4.12)$$

■

Exemplo 4.10. Arco duplo

Obtenha as relações para se calcular o seno e o cosseno do arco duplo a partir da Fórmula de Euler.

Solução: Aplicando a Fórmula de Euler para 2θ , obtemos:

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) + i\operatorname{sen}(2\theta) &= e^{i2\theta} \\ &= (e^{i\theta})^2 \\ &= [\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)]^2 \\ &= \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) + i[2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)] \end{aligned}$$

Igualando as partes real e imaginária dos dois lados da equação, obtemos as relações para o seno e o cosseno do arco duplo:

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) \quad (4.13)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) \quad (4.14)$$

■

Exemplo 4.11. Arco metade

Obtenha as relações para se calcular o seno e o cosseno da metade de um ângulo θ a partir da Fórmula de Euler.

Solução: Aplicando a Fórmula de Euler para $\frac{\theta}{2}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \cos(\theta/2) + i\operatorname{sen}(\theta/2) &= e^{i\frac{\theta}{2}} \\ \cos(\theta/2) + i\operatorname{sen}(\theta/2) &= \sqrt{(e^{i\theta})} \end{aligned}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, temos

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2) + i2\cos(\theta/2)\operatorname{sen}(\theta/2) &= e^{i\theta} \\ \cos^2(\theta/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2) + i2\cos(\theta/2)\operatorname{sen}(\theta/2) &= \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta) \end{aligned}$$

Igualando a parte real dos dois lados da equação, temos

$$\cos^2(\theta/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2) = \cos(\theta) \quad (4.15)$$

Substituindo $\cos^2(\theta/2)$ por $[1 - \operatorname{sen}^2(\theta/2)]$ em (4.15), obtemos a relação para o seno do arco metade.

$$\operatorname{sen}(\theta/2) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}} \quad (4.16)$$

Substituindo $\operatorname{sen}^2(\theta/2)$ por $[1 - \cos^2(\theta/2)]$ em (4.15), obtemos a relação para o cosseno do arco metade.

$$\cos(\theta/2) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}} \quad (4.17)$$

■

A obtenção de relações trigonométricas a partir da Fórmula de Euler é mais simples do que o procedimento habitual porque podemos utilizar algumas propriedades da função exponencial e , assim, diminuir a manipulação necessária para se chegar ao resultado final.

Os exemplos dessa seção foram baseados em (CARMO et al., 2005; TRALIE, 2013).

4.3 O TFA e a resolução de equações algébricas

Vimos no Capítulo 2 que durante séculos os matemáticos tentaram encontrar as soluções (raízes) para equações algébricas de graus cada vez maiores, o que foi um dos grandes desafios da História da Matemática. Essa busca por métodos gerais para resolução de equações algébricas foi responsável por grandes conquistas matemáticas, incluindo aí, a descoberta dos números complexos.

Fornecer solução para qualquer equação algébrica é uma das mais importantes aplicações dos números complexos na Matemática como destacam LIMA et al.:

Mas o principal papel dos números complexos não é computacional e sim estrutural: a consideração das raízes complexas no estudo das equações algébricas permite uma teoria muito mais elegante do que a possível considerando-se apenas as raízes reais (ainda que possamos estar interessados apenas nas raízes reais) (LIMA et al., 2006, p.229).

Foi o matemático Albert Girard em *L'invention Nouvelle en l'Algèbre* de 1629 quem primeiro afirmou que há sempre soluções (possivelmente repetidas) para tais equações. Nessa obra Girard lançou, sem demonstrar, o problema de determinar o número de raízes de uma equação qualquer, afirmando que todas as equações têm tantas raízes quanto o maior grau dela. Esta afirmação consiste no teorema que, dada a sua importância, é conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). Para admitir esse número de soluções, foi necessário aceitar as raízes complexas que ele chamava de impossíveis (ROQUE; CARVALHO, 2012).

(...) Poderíamos perguntar para que servem as soluções que são impossíveis, respondo que para três coisas: para a certeza da regra geral, para a certeza de que não há outra solução, e por sua utilidade (GIRARD, 1629 apud ROQUE; CARVALHO, 2012).

Para entender a estruturação que os números complexos trouxeram à resolução das equações algébricas, veremos a seguir o Teorema Fundamental da Álgebra e o Teorema da Decomposição. O TFA[‡] garante a existência de pelo menos uma raiz para todo polinômio de grau maior ou igual a 1 e, em conjunto com o Teorema da Decomposição, fornece um modo de determinar o número de soluções existentes.

Teorema 4.12. Teorema Fundamental da Álgebra

Todo polinômio complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

Teorema 4.13. Teorema da Decomposição

Todo polinômio complexo $p(x)$ de grau $n \geq 1$, isto é,

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ (com $a_n \neq 0$) pode ser decomposto de modo único, a menos da ordem dos fatores, na forma $p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ onde x_1, x_2, \dots, x_n são raízes complexas de $p(x)$ (não necessariamente distintas).

Demonstração. O TFA assegura que $p(x)$ tem ao menos uma raiz complexa x_1 . Logo, $p(x_1) = 0$ e, portanto, $p(x)$ é divisível por $(x - x_1)$.

Assim, podemos escrever $p(x)$ como $p(x) = (x - x_1)q_1(x)$, com $q_1(x)$ um polinômio com grau $n - 1$ e coeficiente dominante a_n .

Aplicando o TFA novamente, obtemos que $q_1(x)$ tem ao menos uma raiz complexa x_2 . Assim, $q_1(x_2) = 0$ e, portanto, $q_1(x)$ é divisível por $(x - x_2)$.

[‡]A demonstração desse teorema está além do escopo desse trabalho e pode ser encontrada, por exemplo, em (OLIVEIRA, 2017).

Logo, podemos escrever $p(x)$ como $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)q_2(x)$, sendo $q_2(x)$ um polinômio de grau $n - 2$ e coeficiente dominante a_n .

Repetindo esse procedimento n vezes, obtemos $p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)q_n(x)$, com $q_n(x)$ um polinômio de grau $n - n = 0$, isto é, $q_n(x) = a_n$.

Logo, temos que $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, que é a decomposição desejada.

Resta ainda demonstrar que essa decomposição é única, a menos da ordem. Para isso, vamos supor que $p(x)$ tenha duas decomposições diferentes:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \\ p(x) &= a_m(x - x'_1)(x - x'_2) \dots (x - x'_m) \end{aligned}$$

Igualando as duas decomposições (já ordenadas e reduzidas) e comparando o termo de mais alto grau, verificamos que $a_n = a_m$ e $n = m$.

Ficamos, então, com a igualdade

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = (x - x'_1)(x - x'_2) \dots (x - x'_n) \quad (4.18)$$

Calculando os dois lados para $x = x_1$, obtemos $0 = (x - x'_1)(x - x'_2) \dots (x - x'_n)$, o que indica que um dos números x'_1, x'_2, \dots, x'_n é igual a x_1 . Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_1 = x'_1$. Substituindo $x_1 = x'_1$ em (4.18), obtemos:

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = (x - x_1)(x - x'_2) \dots (x - x'_n)$$

Como $x - x_1$ é comum aos dois lados da igualdade, temos que ela só se verificará se, e somente se,

$$(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) = (x - x'_2)(x - x'_3) \dots (x - x'_n)$$

Aplicando repetidamente o mesmo procedimento, conseguimos identificar em cada rodada um par de termos idênticos em cada lado da igualdade ($x_2 = x'_2, x_3 = x'_3, \dots, x_n = x'_n$), estabelecendo uma correspondência entre cada termo das duas decomposições, o que demonstra a sua unicidade. ■

Este resultado nos leva diretamente a outra forma de se enunciar o TFA: um polinômio complexo $p(x)$ de grau $n \geq 1$ tem exatamente n raízes (não necessariamente distintas). Assim, embora o TFA não indique quais são as raízes de uma equação algébrica, ele nos fornece mecanismos que podem facilitar a busca dessas soluções.

Os seguintes exemplos mostram como o TFA e os números complexos ajudam a resolver equações algébricas.

Exemplo 4.14. Mostre que os polinômios $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ e $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ não são idênticos.

Solução: Os dois polinômios têm grau 4 e, portanto, têm 4 raízes. As quatro raízes do primeiro polinômio são 1, 2, 3, 4. As quatro raízes do segundo polinômio são $-1, -2, -3, -4$. Como dois polinômios idênticos têm as mesmas raízes, conclui-se que eles são distintos. ■

Exemplo 4.15. Determine as raízes do polinômio $x^4 - 1$

Solução: Podemos fatorar esse polinômio da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}x^4 - 1 &= (x^2 - 1)(x^2 + 1) \\ &= (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1) \\ &= (x + 1)(x - 1)(x + i)(x - i)\end{aligned}$$

Logo, as quatro raízes são: $-1, 1, -i$ e i . ■

Exemplo 4.16. $2i$ e $-2i$ são duas das raízes do polinômio $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 12$. Determine as demais raízes.

Solução: Podemos fatorar esse polinômio da seguinte maneira:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 12 = (x + 2i)(x - 2i)(x^2 - 2x - 3)$$

Como 3 e -1 são raízes de $x^2 - 2x - 3$, temos

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 12 = (x + 2i)(x - 2i)(x - 3)(x + 1)$$

Logo, as quatro raízes são: $-3, 1, 2i$ e $-2i$. ■

4.4 Recursos Digitais

Os seguintes recursos digitais foram desenvolvidos para trabalhar os conceitos vistos nesse capítulo.

- RD401 - Problema dos Três Quadrados

Este applet do Geogebra mostra a resolução do *Problema dos Três Quadrados* de três formas diferentes: a primeira usando apenas geometria elementar, outra usando trigonometria e a terceira utilizando os números complexos. O objetivo desse recurso digital é mostrar a simplificação que os números complexos podem proporcionar à resolução de problemas geométricos simples e, assim, convencer os alunos que existem usos bem triviais para eles.

- RD402 - A Ilha do Tesouro

Este applet do Geogebra mostra a resolução do problema da Ilha do Tesouro extraído do livro *One two three ... Infinity* de George Gamow publicado em 1947 (GAMOW, 1947). No aplicativo é possível escolher entre a resolução baseada em números complexos e a

resolução que utiliza apenas elementos de trigonometria, permitindo a comparação entre ambas. Ao comentar a resolução desse clássico problema, CARNEIRO destaca:

Difícilmente ocorrerá ao estudante aplicar números complexos a problemas de Geometria. Sobre este ponto, a experiência didática tem sido muito ilustrativa. Um exemplo típico é o célebre “problema da ilha do tesouro”, várias vezes apresentado para alunos de licenciatura ou em cursos de formação continuada para professores. Não somente não ocorre aos cursistas usar complexos para resolver este problema, como os mesmos ficam extremamente surpreendidos em saber que números complexos tenham alguma aplicação a um problema “real” (CARNEIRO, 2004).

- RD403 - O TFA e o número de raízes de equações algébricas

Este é um *applet* bastante simples que explora a ideia central do TFA que uma equação de grau n tem exatamente n raízes. O *applet* propõe algumas equações algébricas simples de graus variados e pede para o aluno responda quantas são as raízes reais e quantas são as raízes complexas. Trata-se um *applet* para ser usado na etapa inicial de um curso sobre números complexos, quando apenas uma abordagem histórica do TFA foi fornecida, não necessitando que o aluno conheça ainda nenhuma técnica para resolver equações algébricas.

- RD404 - Uma visualização de uma demonstração do TFA

Este *applet* do Geogebra permite visualizar uma conhecida prova topológica do TFA, utilizando um polinômio de grau 4. Mesmo que os alunos do Ensino Médio não conheçam ainda os detalhes topológicos necessários para compreender uma demonstração formal, esse *applet* reforça a validade do TFA ao menos de forma visual.

5 Aplicações no “mundo real”

A relação entre a Matemática e o “mundo real” é um tema bastante discutido na Educação Matemática. Se o ensino de Matemática se dá sem dialogar com o contexto, de forma completamente abstrata, aumenta o nível de dificuldade de seu aprendizado (DELVAL, 1998 apud ROSSO, 2010).

Quando apoiado exclusivamente nos seus elementos de natureza lógica, o ensino de Matemática tem apresentado obstáculos que interferem em seu aprendizado, uma vez que os alunos não veem significado e utilidade em um conhecimento com essas características. Um modo de evitar que esses obstáculos interfiram no aprendizado da Matemática consiste em inverter os procedimentos utilizados e trabalhá-los como uma maneira de explicar problemas concretos enfrentados pelos sujeitos na sociedade (ROSSO, 2010).

Essa abordagem baseada em aplicações e casos concretos aparece também no PCN que estabelece entre as finalidades do ensino de Matemática que o aluno deva ser levado a aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas (BRASIL, 2006b, p.40).

Alinhado com esse pensamento, George Pólya recomenda no prefácio de seu livro *Variáveis Complexas*:

Depois de ter lecionado sobre variáveis complexas por várias décadas para futuros engenheiros e físicos, eu tenho uma ideia definida e, espero que realista, de suas necessidades e preferências. Comece com algo que seja familiar, útil ou desafiador, que tenha alguma conexão com o mundo que nos rodeia, da perspectiva de uma aplicação ou de uma ideia intuitiva (PÓLYA; LATTA, 1974).

No entanto, as aplicações dos números complexos não são muito conhecidas. Em sua dissertação de doutorado, Spinelli comenta que os professores têm dificuldade de encontrar aplicações para ilustrar suas aulas, pois números complexos não reais não fazem parte da experiência cotidiana de adolescentes do Ensino Médio (SPINELLI, 2011). Esse desconhecimento é comprovado nos estudos quantitativos que foram conduzidos por NORDLANDER; NORDLANDER e NOBRE. Em (NORDLANDER; NORDLANDER, 2012), os autores relatam que os estudantes pareciam confusos quando perguntados sobre aplicações dos números complexos e que a maioria não tinha nenhuma ideia de como eles podiam ser usados na vida real. Em (NOBRE, 2013), o autor aplica um questionário a 50 professores, 50 alunos que terminaram o Ensino Médio e ingressaram em cursos superiores de Matemática ou Engenharia e 50 alunos que ingressaram em cursos diferentes de Matemática ou Engenharia. Nas respostas tabuladas dos 3 grupos, a parcela que desconhecia as aplicações dos números complexos era sempre majoritária.

Apesar de passarem despercebidas por alunos e professores, as aplicações com números complexos existem e são muitas, embora não sejam fáceis de serem contextualizadas para

estudantes do Ensino Médio. Engenheiros civis e mecânicos os usam rotineiramente para analisar as vibrações em passarelas, arranha-céus e outras estruturas (STROGATZ, 2010). Aplicações com números complexos aparecem também, por exemplo, na Engenharia Elétrica, na Física Quântica, na dinâmica dos fluidos, em fractais e na Engenharia Aeronáutica.

Nesse capítulo apresento algumas dessas aplicações dos números complexos no “mundo real”, discutindo formas de utilizá-las nas aulas do Ensino Médio. Ao final, apresento alguns recursos digitais relacionados às aplicações do capítulo e que podem ser usados para mostrar que eles estão bastante presentes em nosso cotidiano.

5.1 Oscilações e Ondas na Física

Oscilações e ondas são fenômenos físicos bastante presentes em nosso dia a dia. Movimento de planetas e partículas, sistemas elétricos, forças fundamentais e, praticamente, todas as formas de comunicação que utilizamos envolvem esses fenômenos.

Uma oscilação é uma perturbação em um sistema físico que é repetitiva no tempo, enquanto uma onda é definida como uma perturbação em um sistema físico espacialmente estendido e contínuo que é repetitiva no tempo e periódica no espaço. Oscilações envolvem, geralmente, um contínuo fluxo entre dois diferentes tipos de energia. Uma onda envolve também um fluxo repetitivo similar de energia, mas, adicionalmente, é capaz de transmitir energia (e informação) de um lugar para outro. Embora ondas e oscilações possam ter origens em distintos mecanismos físicos, elas compartilham muitas propriedades comuns e, como um fator de ligação, são descritas pelo mesmo conjunto de equações matemáticas (FITZPATRICK, 2012).

Para entendermos por que os números complexos são utilizados para analisar oscilações e ondas, consideremos a forma exponencial de representação $z = re^{i\theta}$ (3.13). Então, se tomarmos os números complexos no plano, a função $e^{-i\omega t}$ representará um ponto que contorna o círculo unitário a uma velocidade angular constante ω (movimento circular uniforme) no sentido horário, Figura 5.1.

O componente x desse número varia ao longo do tempo como uma onda senoidal, o que o torna conveniente para a modelagem de processos periódicos, como ondas sonoras, ondas eletromagnéticas, circuitos eletrônicos oscilantes e massas balançando para cima e para baixo em molas. Então, basicamente, sempre que houver um fenômeno oscilatório ou ondulatório, os números complexos são uma ferramenta ideal para descrevê-lo e analisá-lo mais facilmente (FOWLER, 2007).

O plano complexo nos ajuda a entender o comportamento das ondas e oscilações. Quando se quer mostrar como o número complexo muda em função do tempo, basta acrescentar um eixo de tempo. O sinal dentro de um telefone celular, por exemplo, pode ser visualizado como a espiral da Figura 5.2 (PORTER, 2014).

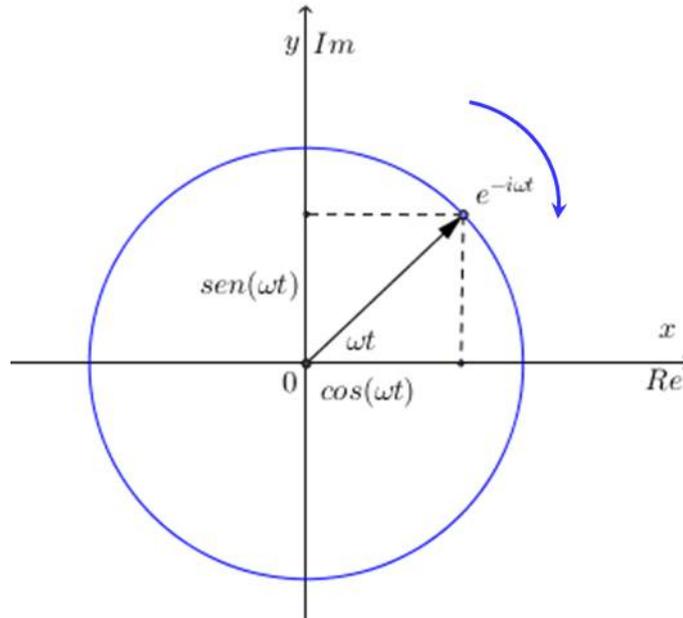


Figura 5.1 – Um número complexo no círculo unitário

Fonte: elaborado pelo autor

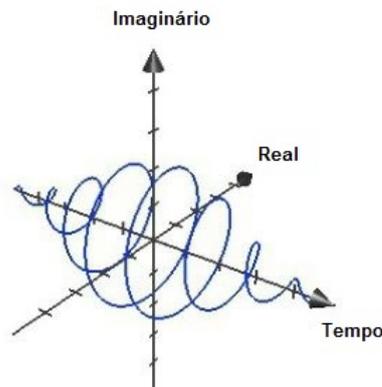


Figura 5.2 – Representação de uma onda

Fonte: Complex Numbers made simple (PORTER, 2014)

5.1.1 Representação de ondas usando números complexos

A Fórmula de Euler (3.12) que mostra os componentes do número complexo $z = e^{i\theta}$ expressos pelas funções seno e cosseno é fundamental para entendermos porque os números complexos são tão úteis para descrever os fenômenos ondulatórios e oscilatórios que, por conta de sua periodicidade, levam ao aparecimento de funções senoidais. É a partir da Fórmula de Euler que obtemos a representação de ondas usando números complexos.

Uma típica função de onda (unidimensional) tem a forma geral:

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi), \quad (5.1)$$

onde $A > 0$ é a amplitude, ω é a velocidade angular e k é o número de onda.

Considerando fixos a frequência e o comprimento de onda (como, por exemplo, acontece com a luz de uma determinada cor), as informações que determinarão as propriedades da onda serão a amplitude A e a fase ϕ .

Comparando a expressão (5.1) com a Fórmula de Euler (3.12), notamos que apenas a parte real do segundo membro aparece, o que nos leva a:

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= A \cos(kx - \omega t + \phi) \\ &= \operatorname{Re}[Ae^{i(kx - \omega t + \phi)}] \\ &= \operatorname{Re}[Ae^{i\phi} e^{i(kx - \omega t)}] \\ &= \operatorname{Re}[ze^{i(kx - \omega t)}]\end{aligned}\tag{5.2}$$

onde $z = Ae^{i\phi}$ e Re indica a parte real de um número complexo.

Assim, as informações sobre a amplitude e a fase da função de onda são combinadas em uma única amplitude complexa z que multiplica $e^{i(kx - \omega t)}$.

Dessa expressão obtemos uma interpretação geométrica para representação complexa, ao observar que $e^{i(kx - \omega t)}$ é apenas um número complexo no círculo unitário que contorna a origem no sentido horário a uma velocidade constante, Figura 5.1. A parte real (componente x) de $e^{i(kx - \omega t)}$ é uma função senoidal. Quando nós o multiplicamos pelo número complexo z , o produto (outro número complexo) contorna um círculo de raio A (a amplitude da parte real é A , portanto) com o ângulo deslocado por ϕ relativo à onda original, conforme vimos em (3.7) ao estudar a multiplicação de números complexos na forma trigonométrica.

A grande vantagem de usar a representação complexa da função de onda em vez da forma geral (funções senoidais) fica evidente quando nós queremos somar ondas, especialmente quando estão defasadas. Isto porque a adição (ou superposição) de duas ou mais ondas que têm a mesma direção, mas diferentes amplitudes e fases, é facilmente resolvida somando suas amplitudes complexas.

A adição pode ser feita algebricamente, somando as partes reais e imaginárias de sua amplitude; ou graficamente, considerando as amplitudes complexas como vetores bidimensionais no plano complexo. A amplitude complexa assim obtida tem a fase e a amplitude de uma única onda equivalente à soma das ondas originais (ELMORE; HEALD, 1969).

5.1.2 Expansão do uso na Física

O uso dos números complexos para modelar as ondas e as oscilações é uma forma mais simples e elegante de representá-las. No entanto, eles não são essenciais. Em (FITZPATRICK, 2012), por exemplo, o autor prefere adiar o uso dos números complexos até que os alunos compreendam completamente como representar oscilações e ondas usando as funções trigonométricas. Para esse autor, embora a representação complexa das oscilações e ondas facilite

enormemente os cálculos e seja mais conveniente, ela é (ao menos, inicialmente) um obstáculo ao desenvolvimento da compreensão física desses fenômenos por ser mais abstrata.

A partir do Século XIX, houve uma expansão do uso dos números complexos na Física, simplificando cálculos, explorando sua bidimensionalidade e suas propriedades em outros fenômenos físicos como, por exemplo, na Óptica e na Mecânica Quântica. Não há uma interpretação física única para esses números, sendo esta determinada, caso a caso, em cada fenômeno físico que eles estão modelando. Sobre essa “complexificação da Física”, Salomon Bochner comenta:

Qualquer conjunto de relações na Matemática e Física que envolva os números complexos pode ser substituído por um conjunto equivalente no qual apenas números reais ocorram. No entanto, como no caso de números reais, também no caso de números complexos, o que é crucialmente decisivo para a Física é o fato de que eles podem ser multiplicados um pelo outro. Nós vimos no início deste capítulo como a Mecânica do século XVII criou o importante conceito de momento fazendo, matematicamente, não mais que multiplicar dois números reais um pelo outro. A situação equivalente no caso de números complexos é ainda mais notável e filosoficamente insondável. Não podemos mais do que simplesmente relatar como um fato a maneira como as partes real e imaginária dos números complexos estão ligadas entre si. A regra de multiplicação, de alguma forma, dota o sistema dos números complexos com uma variedade de poder, eficácia e flexibilidade que, na Matemática, é inesgotável e inexplicável, e que tem afetado o curso e desenvolvimento da Física profunda e, até mesmo, radicalmente (BOCHNER, 1966).

5.2 Engenharia Elétrica

Os problemas nas engenharias que envolvem oscilações, vibrações e ondas são bastante comuns. Por conta disso, os números complexos são usados rotineiramente em aplicações nessas áreas como, por exemplo, nos cálculos de ressonâncias de estruturas, projetos das asas de aviões, detecção de abalos sísmicos e processamento de sinais.

Na Engenharia Elétrica, eles são geralmente usados quando alguma grandeza tem uma fase e uma amplitude, o que ocorre, por exemplo, nos circuitos de corrente alternada. (JOHNSON, 2014) enfatiza que os números complexos são utilizados para tornar os cálculos mais fáceis e que não há necessidade de se intimidar tentando vislumbrar o que um número imaginário é. Recomenda ainda: “o estudante deve perceber que não há nada de imaginário na fase da forma de onda de uma voltagem e que os números complexos devem ser encarados como uma ferramenta útil a qual ele deve começar a se acostumar”.

Nessa seção apresentarei duas aplicações dos números complexos na Engenharia Elétrica: o cálculo da impedância complexa em circuitos de corrente alternada com resistores, indutores e capacitores (RLC) e o uso da Análise e da Transformada de Fourier no processamento digital de sinais.

O cálculo da impedância complexa de um circuito RLC mostrado a seguir sintetiza os conceitos apresentados em (CIPTOWIYONO, 2015; NAVE, 2017).

5.2.1 Impedância Complexa em Circuitos RLC

A necessidade e a justificativa para o uso dos números complexos ficam claras quando analisamos a corrente e a tensão em circuitos de corrente alternada (AC). A Figura 5.3 mostra dois sinais de mesma amplitude e frequência. No entanto, não podemos dizer que esses sinais sejam iguais, pois suas fases são diferentes. A tensão do sinal 2 está defasada 90° ($\frac{\pi}{2}$ radianos) em relação à tensão do sinal 1.

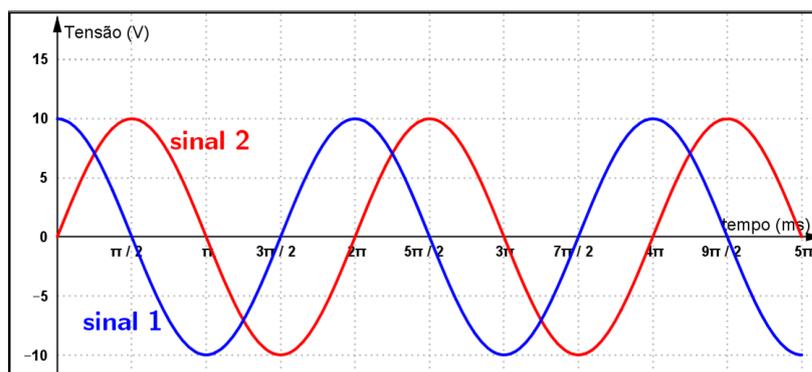


Figura 5.3 – Dois sinais com a mesma amplitude e frequência (mas diferentes fases)

Fonte: elaborado pelo autor

Podemos, então, modelar essas duas tensões da seguinte maneira:

Tensão do sinal 1: 10 V (eixo real)

Tensão do sinal 2: $10j$ V (eixo imaginário)*

Foi o matemático e engenheiro Charles Proteus Steinmetz, Figura 5.4, quem introduziu os números complexos na resolução de circuitos de corrente alternada. Antes da publicação de seu trabalho, a resolução de circuitos de corrente alternada tinha que ser feita usando cálculo diferencial em um processo demorado e trabalhoso. Steinmetz transformou a complicada teoria dos circuitos AC em problemas simples de Álgebra, utilizando o conceito de fasores (uma representação de ondas senoidais com números complexos).

Ao representar as voltagens e correntes com fasores, Steinmetz definiu o conceito de impedância, uma medida da oposição que um componente faz à passagem da corrente em circuitos AC, conceito análogo ao de resistência em circuitos de corrente contínua (DC) (CIPTOWIYONO, 2015).

*Na Engenharia Elétrica convencionou-se que a unidade imaginária é representada pela letra j , uma vez que a letra i é utilizada para representar a corrente elétrica.



Figura 5.4 – Charles Steinmetz (1865-1923)

Fonte: Wikimedia Commons - por: Richard A. Norton - Domínio Público (COMMONS, 2014a)

Além dos resistores, há mais dois outros componentes que são comumente encontrados em circuitos de corrente alternada: os indutores e os capacitores. Os circuitos de corrente alternada que consistem de resistores, indutores e capacitores recebem o nome de circuitos RLC.

A impedância de um componente elétrico é a divisão da tensão complexa pela corrente complexa (Lei de Ohm). Ao aplicarmos uma tensão alternada a um resistor, a tensão e a corrente terão a mesma fase. Logo, a impedância em um resistor será um número real R . Já nos capacitores e indutores, a impedância será um número imaginário puro, pois tensão e corrente estão defasadas de 90° .

A impedância de um capacitor é um número imaginário puro negativo, o que ocorre porque a tensão em um capacitor está atrasada 90° em relação à corrente.

$$Z_C = -X_C j$$

A impedância de um indutor é número imaginário puro positivo, pois a tensão está adiantada de 90° em relação à corrente.

$$Z_L = X_L j$$

As quantidades X_C e X_L são, respectivamente, as reatâncias do capacitor e do indutor e são medidas em ohms (Ω).

Assim, a impedância Z de um circuito RLC de corrente alternada é um número complexo dado por:

$$Z = R + (X_L - X_C)j$$

O Quadro 5.1 exemplifica como a impedância destes 3 componentes deve ser modelada em um circuito RLC.

Componente	Símbolo	Modelado como	Impedância
Resistor		Real	1Ω
Indutor		Imaginário Puro Positivo	$1j\Omega$
Capacitor		Imaginário Puro Negativo	$-1j\Omega$

Quadro 5.1 – Componentes de um circuito RLC

Considere, por exemplo, o circuito RLC da Figura 5.5.

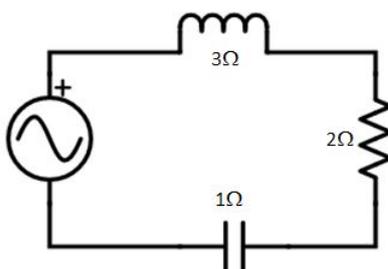


Figura 5.5 – Um típico circuito RLC

Fonte: elaborado pelo autor

Considerando que a fonte de tensão, representada pelo símbolo  tem impedância zero (fonte de tensão ideal), temos que a impedância desse circuito será:

$$Z = 2 + (3 - 1)j$$

$$Z = (2 + 2j)\Omega$$

Assim como uma combinação de resistores em série e em paralelo pode ser representada por um único resistor equivalente, um circuito contendo uma combinação arbitrária de resistores, indutores e capacitores pode ser representado por uma impedância total. As expressões matemáticas para as associações de impedâncias são semelhantes às expressões de associações de resistores estudadas na Física do Ensino Médio. No entanto, os cálculos de associações de impedâncias envolvem números complexos.

a) Associação em série: neste tipo de circuito, a corrente flui por um único caminho. Para encontrar a impedância de um circuito em série, some a impedância de cada um dos componentes do circuito. A associação total é a soma de cada impedância:

$$Z_{Total} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n$$

b) Associação em paralelo: neste tipo de circuito, a corrente flui por mais de um caminho. Para calcular a impedância de um circuito em paralelo com dois caminhos, primeiro determine a impedância Z_1 e Z_2 de cada um dos caminhos separadamente, tratando-os como circuitos em série. A impedância total é calculada segundo a fórmula.

$$\frac{1}{Z_{Total}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

Exemplo 5.1. Considere o circuito da Figura 5.6.

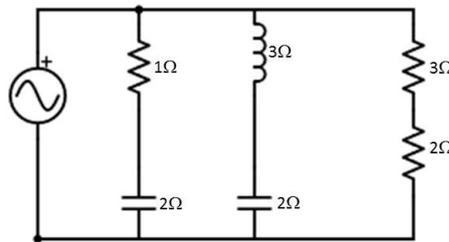


Figura 5.6 – Circuito RLC com associações de componentes em série e em paralelo

Fonte: elaborado pelo autor

Nesse circuito, temos que a impedância total é de:

$$Z_1 = R_1 + C_1 = 1 - 2j \text{ (Impedância do primeiro caminho)}$$

$$Z_2 = L_1 + C_2 = 3j - 2j = 1j \text{ (Impedância do segundo caminho)}$$

$$Z_3 = R_2 + R_3 = 3 + 2 = 5 \text{ (Impedância do terceiro caminho)}$$

Portanto, a impedância total (ou impedância equivalente) desse circuito é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{Total}} &= \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_{Total}} &= \frac{1}{1 - 2j} + \frac{1}{1j} + \frac{1}{5} \\ \frac{1}{Z_{Total}} &= \frac{1 + 2j}{5} - j + \frac{1}{5} \\ \frac{1}{Z_{Total}} &= \frac{2 - 3j}{5} \\ Z_{Total} &= \frac{5(2 + 3j)}{13} = \frac{10 + 15j}{13} \Omega \end{aligned}$$

■

5.2.2 A Análise de Fourier e o processamento digital de sinais

Outro uso intensivo dos números complexos na Engenharia Elétrica se dá nas aplicações que utilizam a Análise de Fourier, ramo da Matemática que estuda como uma função pode ser decomposta em uma soma de funções trigonométricas mais simples. Essa teoria permite decompor qualquer sinal (uma função dependente do tempo) em um somatório de suas ondas componentes (com frequências, amplitudes e fases diferentes) expressas como funções senoidais. A Figura 5.7 é um exemplo dessa decomposição para uma onda quadrada.

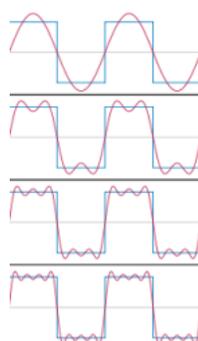


Figura 5.7 – Aproximações iniciais da série de Fourier na decomposição de uma onda quadrada

Fonte: Wikimedia Commons - Domínio Público

A Análise de Fourier originou-se em 1807 quando, para explicar um problema de transferência de calor, o matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier, Figura 5.8, mostrou que uma onda arbitrária periódica podia ser representada (aproximada) como um soma infinita ponderada de funções senoidais. Essa representação de uma função periódica como um somatório de funções senoidais é conhecida atualmente como Série de Fourier.



Figura 5.8 – Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) - matemático e físico

Fonte: Wikimedia Commons - Domínio Público

Os números complexos aparecem na forma moderna da Série de Fourier que expressa a função periódica como somas infinitas de exponenciais complexas em vez de funções senoidais,

para valer-se das simplificações de cálculos obtidas a partir da Fórmula de Euler (3.12).

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\omega_0 t} \quad (5.3)$$

onde:

T é o período da função,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ e}$$

$$c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

Uma extensão da Série de Fourier permite representar (aproximar) tanto as funções periódicas quanto as não periódicas. Essa extensão é o principal resultado dessa teoria e é conhecido como a Transformada de Fourier.

A Transformada [Contínua] de Fourier para funções contínuas representa qualquer função integrável $f(t)$ como a soma de exponenciais complexas com frequência angular ω e amplitude complexa $F(\omega)$ e é dada por:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5.4)$$

$$f(t) = F^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.5)$$

As equações (5.4) e (5.5) representam a Transformada de Fourier e sua inversa na forma complexa para funções contínuas e unidimensionais. A essas equações muitas outras se juntam para descrever outras formas da Transformada de Fourier. Toda as equações dessa família de Transformadas de Fourier têm uma versão na forma real e uma versão complexa (SMITH, 1999). Mesmo essas duas equações podem aparecer de formas diferentes por conta de diferentes convenções usadas na Matemática, na Física ou na Engenharia (MEIKLE, 2004). No entanto, a ideia intuitiva por trás das equações da Transformada de Fourier é basicamente a mesma: considerar um padrão baseado no tempo, medir cada ciclo possível e retornar a amplitude, fase e frequência de cada ciclo encontrado, fornecendo, assim, os componentes dessa função (JAMES, 2011).

Uma vez que temos muitos fenômenos que oscilam no universo, é bastante comum que a informação esteja codificada nas senoides que compõem um sinal, quer esses sinais sejam naturais ou artificialmente criados pelo homem. A Transformada de Fourier fornece o meio de extrair essa informação e, assim, processar esse sinal (SMITH, 1999). Atualmente, esse processamento é feito de forma digital mesmo para os sinais que sejam analógicos em sua origem. Alguns exemplos de aplicações da Transformada de Fourier no processamento digital de sinais incluem:

- construção de filtros para manipular ondas sonoras;
- sistemas de redução de ruídos;
- eletrocardiogramas;

- processamento de sinais sísmicos;
- processamento de imagens;
- compressão de dados.

Entre os profissionais de processamento digital de sinais, a forma complexa da Transformada de Fourier é preferida em relação à forma real. SMITH lista as seguintes razões para esta preferência: equações mais compactas, simetria entre as equações de síntese e análise, simetria entre as equações no domínio de tempo e de frequência, inclusão de frequências negativas e o fato de serem pontos de partida para as transformadas de Laplace.

LANGTON; LEVIN se valem de uma analogia para explicar a razão do uso dos números complexos no processamento de sinais:

Os sinais que viajam pelo ar são sinais reais e é apenas o processamento que é feito no domínio complexo. Existe uma analogia muito real que deixará isso claro. Quando você ouve um som, o processamento é feito por nossos cérebros com dois receptores ortogonalmente colocados, as orelhas. As orelhas ouvem o som com uma fase e tempo ligeiramente defasados. O sinal recebido pelas duas orelhas é diferente e, com isso, nossos cérebros podem obter uma quantidade razoável de informações sobre a direção, amplitude e frequência do som. Então, embora sim, a maioria dos sinais sejam reais, o processamento geralmente é feito em um plano complexo, se for preciso obter o máximo de informação.

Além de aplicações no processamento de sinais, a Transformada de Fourier aparece em muitos campos diferentes de diferentes disciplinas, sendo útil para resolver problemas de análise numérica, estatística, probabilidade, criptografia, física, análise da estrutura de proteínas, sistema de controle, entre outros. É um daqueles conceitos que, como e e a razão áurea, desafiam fronteiras e aparecem em todos os lugares (LANGTON; LEVIN, 2017).

5.3 Física Quântica

Física Quântica ou Mecânica Quântica[†] é a parte da física moderna que estuda a luz, as partículas atômicas e subatômicas, suas interações e propriedades. Constitui todo um corpo de conhecimento desenvolvido a partir do início do século XX e que trata fundamentalmente dos fenômenos que ocorrem microscopicamente e como eles se refletem na escala macroscópica.

O físico alemão Max Planck (1858-1947), para resolver o problema da radiação do corpo negro, foi forçado a atribuir propriedades quânticas à luz, supondo que ela não era uma onda contínua como todos acreditavam e que pudesse existir somente com quantidades específicas, ou quanta (plural de quantum) de energia. Essa descoberta de 1900 é considerada como marco inicial da Física Quântica (WEBBER; RICCI, 2006).

[†]Os termos Física Quântica, Mecânica Quântica e Teoria Quântica são considerados sinônimos e usados indistintamente nesse texto.

Quando estudamos o comportamento dessas partículas microscópicas, as equações da Mecânica Clássica não funcionam mais. Algumas propriedades dessas partículas, como posição, velocidade e cor, podem ocorrer em quantidades específicas (quanta), como se um seletor alterasse essas propriedades de um número inteiro para outro, sem estágios intermediários, o que contradiz um princípio da Mecânica Clássica que previa que tais propriedades deveriam existir em um espectro contínuo.

A vida moderna seria bem diferente sem a Mecânica Quântica. Foi a compreensão da natureza quântica do elétron que levou à descoberta dos chips semi-condutores que controlam nossos computadores, dos transistores, do raio laser, smartphones, imagens por ressonância magnética, relógios atômicos, GPS, comunicações por fibras óticas, entre outros dispositivos tão presentes em nosso cotidiano (ORZEL, 2009).

Apresentar a Física Quântica como uma das aplicações mais importantes dos números complexos no mundo real é uma tarefa árdua para o professor de Matemática do Ensino Médio, quer pela ausência desse conteúdo no currículo de Física, quer pela dificuldade e estranheza inerentes ao assunto mesmo quando desconsideramos toda a avançada parte matemática e nos concentramos apenas na parte conceitual da teoria.

Eu acho que posso dizer seguramente que ninguém entende a Física Quântica. (Richard Feynman - físico americano ganhador do prêmio Nobel de Física em 1965)(FEYNMAN, 1964).

PINTO; ZANETIC já em 1999 elencavam essas dificuldades e pontuavam que ao final do século XX a Física desenvolvida nele estava longe de comparecer às aulas de nossas escolas.

Para contornar essas dificuldades e mostrar essa relação dos números complexos com a Física Quântica, o professor de Matemática pode se valer dos conteúdos de ondas e oscilações (SMITH, 2010), estes, sim, presentes no currículo de Física; e privilegiar os conceitos fundamentais sem exigir grande matematização, conforme sugerido em (TERRAZZAN, 1992) e (CHIARELLI, 2006). Sobre essa conexão entre ondas, oscilações e a Mecânica Quântica, (SMITH, 2010) destaca:

O movimento senoidal está realmente ao nosso redor, e é algo que qualquer cientista deve compreender profundamente. No entanto, há outro motivo, talvez até mais importante, para se estudar as oscilações e ondas: as ferramentas matemáticas e a intuição que se desenvolvem durante este estudo são exatamente o que você precisa para a Mecânica Quântica. Isso não é surpreendente, uma vez que grande parte da Mecânica Quântica trata do estudo da função de onda, que descreve a natureza das ondas de objetos como, por exemplo, o elétron.

Em (ORZEL, 2009), Chad Orzel destaca que são quatro os princípios básicos da Mecânica Quântica, isto é, para compreendê-la efetivamente, deve-se aceitar estes princípios centrais:

- Funções de onda: cada objeto no universo é descrito por uma função de onda quântica;

- Estados permitidos: um objeto pode ser observado somente em um estado de um número limitado de estados possíveis;
- Probabilidade: a função de onda de um objeto determina sua probabilidade de ser encontrado em cada um dos estados permitidos;
- Medição: medir o estado de um objeto o determina de forma absoluta.

Esses princípios centrais também aparecem em (CHIARELLI, 2006) que descreve uma abordagem para ensinar Mecânica Quântica para uma turma do terceiro ano do Ensino Médio onde foram apresentados de forma conceitual os seguintes pontos: dualidade, princípio da incerteza, caráter probabilístico de resultados de medida e superposição de estados.

A dualidade onda-partícula estabelece que sob determinadas condições a radiação eletromagnética apresenta propriedades que são típicas das ondas (difração, interferência, polarização, entre outras). No entanto, sob outras condições, a radiação eletromagnética comporta-se como se fosse constituída por um feixe de partículas, o que mostra um aspecto corpuscular da luz revelados em experimentos realizados nas primeiras décadas do século XX (WEBBER; RICCI, 2006).

O Princípio da Incerteza de Heisenberg afirma que não se pode medir a posição e o momento de uma partícula simultaneamente (WILCZECK, 2015).

A superposição dos estados quânticos afirma que um sistema físico (como um elétron, por exemplo) existe simultaneamente em todos os estados teoricamente permitidos até ser medido. Quando é medido, todas as superposições se juntam em um único estado e o sistema fica determinado (ORZEL, 2009).

Ao explorar de forma conceitual esses princípios, o professor de Matemática se deparará com os números complexos. Diferentemente do que ocorre na Física Clássica, na Mecânica Quântica, os números complexos são essenciais, uma necessidade concreta e não apenas uma mera conveniência. A equação de Schrödinger, considerada a equação fundamental da Mecânica Quântica, tem uma unidade imaginária nela. As soluções da equação de Schrödinger, chamadas de funções de onda (ψ), têm a forma $\psi = Ae^{i\theta}$, e são, portanto, números complexos assim como praticamente todas as outras quantidades necessárias à formulação da Mecânica Quântica (STACK, 2013; MAYNARD, 2015).

Embora existam estudos teóricos que afirmem ser possível se formular toda Mecânica Quântica usando apenas números reais, o esforço necessário para isto levaria a construções matemáticas mais complicadas e que, ao final, apenas reproduziriam de algum modo as propriedades e os resultados obtidos com o uso dos números complexos (MAYNARD, 2015).

Sobre esse predomínio na Mecânica Quântica, o físico americano Frank Wilczek, ganhador do prêmio Nobel de Física em 2004, ao definir e comentar para leitores não familiarizados o verbete *números complexos*, finaliza assim:

Na Teoria Quântica, os números complexos são onipresentes. Eles são os números de Deus (WILCZECK, 2015).

Assim, se considerarmos essa onipresença dos números complexos na Física Quântica e que toda partícula é descrita por uma função de onda quântica (complexa), então, podemos concluir que eles estão presentes em todos os lugares do mundo real.

5.4 Recursos Digitais

Os recursos digitais desenvolvidos para ilustrar aplicações dos números complexos reforçam algumas das ideias que foram abordadas ao longo desse capítulo: 1) eles são usados como simplificadores de cálculos; 2) o uso mais comum deles é para representar fenômenos periódicos (ondas e oscilações, por exemplo); 3) não há um significado físico único para os números complexos; 4) eles estão bastante presentes em nosso dia a dia.

A seguir, elencamos e descrevemos os recursos digitais que foram construídos para auxiliar o professor de Matemática a levar para a sala de aula algumas das aplicações dos números complexos no “mundo real”.

- RD501 - Representação complexa de uma onda

Este *applet* do Geogebra mostra o número complexo $e^{i\omega t}$ deslocando-se, em sentido anti-horário, em movimento circular uniforme ao longo do tempo. Podemos observar que esse número complexo segue um caminho espiralado centrado em uma reta paralela ao eixo do tempo. As partes real e imaginária de $e^{i\omega t}$ são exibidas como projeções de seno e cosseno, mostrando, na prática, a decomposição existente na Fórmula de Euler (3.12). Controles deslizantes permitem variar os parâmetros da onda (frequência, amplitude e fase) e, assim, simular o que acontece quando multiplicamos essa expressão por um número complexo z , obtendo a representação complexa de uma onda.

- RD502 - Impedância em Circuitos RLC

Este aplicativo simula um circuito RLC simples com um resistor, um indutor e um capacitor. O professor pode variar os valores da resistência e das reatâncias capacitiva e indutiva manipulando os controles deslizantes. A partir dos valores selecionados, o aplicativo calcula automaticamente o valor complexo da impedância do circuito. O aplicativo pode ser usado para conferir os cálculos simples desse tipo de circuito AC, mas também para reforçar o conceito que a resistência é modelada como um número real, a reatância indutiva como um imaginário puro positivo e a reatância capacitiva como um imaginário puro negativo.

- RD503 - Associação de Impedâncias

Este *applet* traz um conjunto de circuitos RLC para que o aluno calcule a sua impedância utilizando as regras para a associação em série e em paralelo dos componentes do circuito. As regras de associação permitem que o aluno pratique as operações com números complexos na forma algébrica. O aplicativo mostra passo a passo os valores para cada uma das associações do circuito, permitindo que o aluno confira os cálculos realizados.

6 Fractais dos Conjuntos de Julia e do Conjunto de Mandelbrot

O cientista não estuda a natureza porque ela é útil; ele a estuda porque se deleita. E ele se deleita porque ela é bonita. Se a natureza não fosse bonita, não valeria a pena conhecê-la, e se não valesse a pena conhecê-la, a vida não valeria a pena.

Henri Poincaré

Nos capítulos 4 e 5 vimos algumas aplicações dos números complexos. O grande número de aplicações existentes, quer na Matemática, quer no “mundo real”, já seriam, por si só, suficientes para tornar mais tangível o seu ensino. No entanto, como nos lembra Henri Poincaré na epígrafe desse capítulo, além da utilidade propriamente dita, também a beleza de um assunto desperta o nosso interesse e nos motiva a estudá-lo.

Indo ao encontro desse ponto de vista, a adoção de fractais no ensino de Matemática tem sido defendida por muitos autores. Benoit Mandelbrot, por exemplo, argumenta em (MANDELBROT; FRAME, 2002) que a geometria fractal tem o apelo visual e o conteúdo para despertar grande interesse e para engajar os estudantes de um modo sério e em um grau maior que qualquer outra disciplina.

Nesse capítulo apresento os fractais dos Conjuntos de Julia e do Conjunto de Mandelbrot, Figura 6.1, que são conhecidos por terem algumas das mais belas e intrincadas imagens de toda a Matemática e cuja origem está essencialmente relacionada com os números complexos.

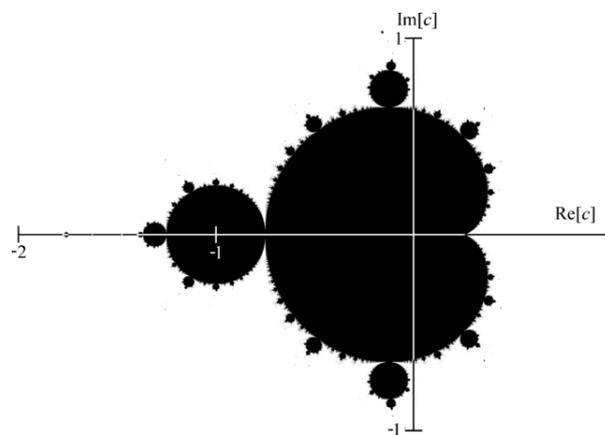


Figura 6.1 – Conjunto de Mandelbrot no plano complexo

Fonte: Wikimedia Commons - Domínio Público - autor: Connelly Barnes

6.1 O que são fractais

As formas da geometria euclidiana - círculos, esferas, cubos, quadrados e retas, por exemplo - não são as formas que aparecem na natureza. Quando nos deparamos com estas

formas, estamos, geralmente, diante de objetos criados pelo homem. As formas da natureza não são moldadas com bordas lisas e regulares (LESMOIR-GORDON et al., 2013).

Um fractal é uma forma geométrica áspera, rugosa e fragmentada que pode ser dividida em partes menores e estas partes menores, de alguma forma, reproduzem o todo em escala reduzida. Existem muitas estruturas matemáticas que são fractais como os mostrados na Figura 6.2; assim como também existem muitos elementos no “mundo real” que podem ser modelados como fractais como, por exemplo, montanhas, nuvens, cursos de rios, galhos de árvores, turbulências e artérias do nosso corpo.

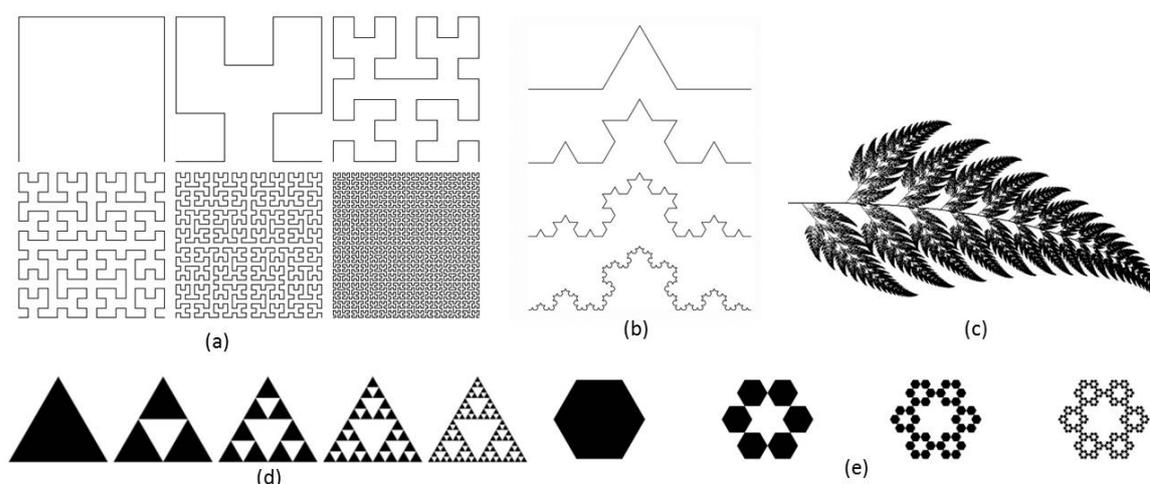


Figura 6.2 – Exemplos de fractais: (a) Curva de Hilbert, (b) Curva de Koch, (c) Samambaia de Barnsley, (d) Triângulo de Sierpinski e (e) Hexágono de Sierpinski

Fonte: elaborado pelo autor

Teoricamente, essa auto-similaridade dos fractais pode ser estendida infinitamente e quando consideramos os comportamentos que envolvem o infinito, podem surgir alguns paradoxos na Matemática. Considere, por exemplo, o fractal do triângulo de Sierpinski que a cada iteração (repetição do processo) triplica o número de triângulos que o compõe e tem um quarto de sua área reduzida. Quando o número de iterações tende ao infinito, temos um objeto composto de infinitos triângulos (bidimensionais, portanto) e com área zero, o que é paradoxal à luz da geometria euclidiana.

Conjuntos e funções que não eram suficientemente lisos ou regulares já eram conhecidos há algum tempo, mas eram utilizados como objetos patológicos e contra-exemplos em cálculo por conta dos paradoxos que produziam. Mais recentemente houve uma mudança de atitude e percebeu-se que esses conjuntos irregulares fornecem uma representação melhor para muitos fenômenos naturais (FALCONER, 2013). Grande parte das ideias matemáticas que envolvem os fractais, incluindo o conceito fundamental de dimensão fracionária tem mais de um século. No entanto, foi a partir do final da década de 1960 que estas estruturas começaram a ser estudadas de maneira sistemática, grande parte devido aos esforços de Benoit Mandelbrot, Figura 6.3,

conhecido como o pai dos fractais (HAYES, 2013).



Figura 6.3 – Benoit Mandelbrot (1924-2010)

Fonte: Rama, Wikimedia Commons, Cc-by-sa-2.0-fr

O termo *fractal* foi cunhado por Mandelbrot a partir do adjetivo latino *fractus* cujo verbo correspondente, *frangere*, significa quebrar, criar fragmentos irregulares (MANDELBROT, 1983). Ainda não existe um consenso para uma definição matemática do que é um fractal. As tentativas para se chegar a essa definição se baseiam no conceito de dimensão*. O apêndice A detalha o conceito de dimensão fractal, uma extensão do conceito de dimensão topológica para os fractais e que é central no estudo da geometria fractal.

Em (FALCONER, 2014), Kenneth Falconer fala sobre a definição de fractal proposta por Benoit Mandelbrot e sugere uma forma alternativa para conceituá-los:

Em seu artigo original, Mandelbrot definiu um fractal como um conjunto cuja dimensão fractal (dimensão de Hausdorff, nesse caso) fosse estritamente maior que sua dimensão topológica. Essa definição se mostrou insatisfatória, pois excluía um número de conjuntos que claramente deveriam ser considerados como fractais. Várias outras definições foram propostas, mas todas elas parecem ter o mesmo inconveniente.

O meu sentimento pessoal é que a definição de um “fractal” deve ser considerada da mesma maneira que um biólogo considera a definição de “vida”. Não há uma definição rigorosa e rápida, mas apenas uma lista de propriedades características de uma coisa viva, como a capacidade de reproduzir ou mover ou existir em certa medida independentemente do ambiente. A maioria dos seres vivos tem a maioria das características na lista, embora haja coisas vivas que sejam exceções para cada uma delas. Do mesmo modo, me parece melhor considerar um fractal como um conjunto que tem propriedades como as listadas abaixo, em vez de procurar uma definição precisa que quase certamente excluirá alguns casos interessantes.

A seguir, Falconer lista as seguintes características como sendo, tipicamente, definidoras de um conjunto F como um fractal:

*A dimensão topológica de um objeto corresponde à nossa noção intuitiva de dimensão. A dimensão topológica de um ponto é 0, de uma reta é 1, de um plano é 2 e de um cubo é 3 (FELDMAN, 2012).

- F tem uma estrutura fina, ou seja, pode ser detalhado em escalas arbitrariamente pequenas;
- F é muito irregular, localmente e globalmente, para ser descrito pela linguagem geométrica tradicional;
- F geralmente tem alguma forma de auto-similaridade, podendo essa ser apenas aproximada ou estatística;
- geralmente, a dimensão fractal de F (definida de algum modo) é maior que sua dimensão topológica;
- na maioria dos casos de interesse, F é definido de um modo muito simples, geralmente recursivo.

No mundo real, não há fractais perfeitos como aqueles encontrados na Matemática. No entanto, isso não significa que os fractais matemáticos não sejam úteis para descrever processos e fenômenos naturais. Ao tratar do que pode ser feito com fractais e sobre o papel dessas estruturas altamente irregulares dentro da Matemática e da ciência, Falconer (FALCONER, 2013) nos lembra que as questões que foram levantadas por séculos para as formas geométricas tradicionais são as mesmas que atualmente são feitas para os fractais e que sempre há diferenças entre os objetos matemáticos idealizados e os fenômenos que eles representam. Nesse sentido, um fractal matemático não seria, por exemplo, diferente de um círculo: os fenômenos naturais, físicos ou econômicos por eles modelados podem ser considerados válidos dentro de um escopo apropriado de escalas, o que deixa de ser verdade quando os examinamos muito de perto.

6.2 Iteração de funções complexas

A técnica utilizada para gerar as formas e produzir as imagens dos fractais dos Conjuntos de Julia e do Conjunto de Mandelbrot baseia-se na iteração de funções. Esse método analisa uma sequência de números Z_n gerada a partir da relação $Z_{n+1} = f(Z_n)$, onde f é uma função complexa.

A maior parte da teoria das iterações de funções complexas é bastante anterior ao estudo dos fractais e foi desenvolvida na França no começo do século XX.

Em 1915, a Academia de Ciências em Paris publicou que o tema do Grand Prix de 1918 seria as propriedades globais da iteração de funções. Corria a I Guerra Mundial e Gaston Julia (1893-1978), Figura 6.4, então um sub-tenente do exército francês, teve seu rosto seriamente ferido no conflito. Mesmo assim, ele conseguiu continuar sua produção matemática no hospital e em dezembro de 1918 foi agraciado com o prêmio. O matemático Pierre Fatou (1878-1929) também estava trabalhando nesse assunto, embora não tenha participado da competição.



Figura 6.4 – Gaston Julia (1893-1978) - matemático francês

Fonte: MacTutor History of Mathematics Archive

Tanto Julia quanto Fatou estavam interessados no que acontecia com a órbita de um número quando se aplicava repetidamente uma regra: se ela se aproximava de algum valor finito (convergência) ou se tendia para o infinito (divergência). Julia e Fatou, de forma independente, publicaram livros sobre a iteração de funções no plano, fornecendo as descrições do que hoje conhecemos como os Conjuntos de Julia.

Definição 6.1. *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio de grau maior que 1 com coeficientes complexos, isto é, $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, $n > 1$. Seja f^k a k -ésima composição de f , isto é, $f \circ \dots \circ f$, de modo que $f^k(z)$ seja a k -ésima iteração $f(f(\dots(f(z))\dots))$ de z . Seja K_f o conjunto de pontos em \mathbb{C} cujas órbitas não divergem para k suficientemente grande.*

$$K_f = \{z \in \mathbb{C} \mid f^k(z) \not\rightarrow \infty\}$$

K_f é chamado de *Conjunto de Julia Preenchido* associado à função f .

O Conjunto de Julia Preenchido de uma função é o conjunto das condições iniciais que quando iteradas com f não vão para o infinito. Essas condições iniciais podem ser atraídas por um ponto fixo ou ficar oscilando, periódica ou caoticamente, permanecendo, no entanto, limitadas (FALCONER, 2014; FELDMAN, 2012).

Definição 6.2. *O conjunto J_f dos pontos na fronteira de K_f é chamado de *Conjunto de Julia* associado à função f . Então, $z \in J_f$ se em cada vizinhança de z existem pontos v e w tais que $f^k(v) \rightarrow \infty$ e $f^k(w) \rightarrow \infty$ para k suficientemente grande.*

Embora Gaston Julia tenha se tornado um matemático famoso na década de 1920, seu trabalho permaneceu essencialmente adormecido por muitos anos, por não haver computação gráfica suficientemente desenvolvida para exibir as intrincadas formas dos Conjuntos de Julia. Por volta de 1980, Benoit Mandelbrot, trabalhando para a IBM (International Business Machines

Corporation) e com amplo acesso aos recursos computacionais dessa empresa, se interessou pela mais simples transformação possível do Conjunto de Julia: a função quadrática $f(z) \rightarrow z^2 + c$. A Figura 6.5 mostra um exemplo dos Conjuntos de Julia associado a uma função quadrática.

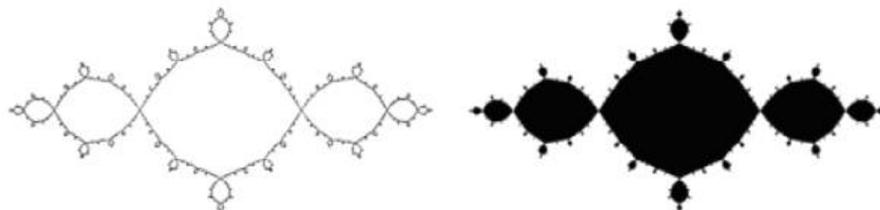


Figura 6.5 – Conjunto de Julia e Conjunto de Julia Preenchido da função $f(z) = z^2 - 1$

Fonte: elaborado pelo autor

Como resultado de sua pesquisa nos Conjuntos de Julia, Benoit Mandelbrot descobriu o que hoje é conhecido como o Conjunto de Mandelbrot. As primeiras imagens que indicavam a complexidade dos Conjuntos de Julia e do Conjunto de Mandelbrot foram publicadas por ele em 1980.

A simplicidade da função quadrática utilizada na geração dos Conjuntos de Julia e do Conjunto de Mandelbrot é um dos aspectos que chama a atenção dos matemáticos. Michael Frame em (FRAME et al., 2017) pontua que “de uma perspectiva filosófica, o Conjunto de Mandelbrot desafia as noções familiares de simplicidade e complexidade: como pode uma fórmula tão simples, envolvendo apenas multiplicação e adição, produzir uma forma de tão grande beleza orgânica e infinita variação sutil?”.

Essa contradição entre a simplicidade da função quadrática e a complexidade dos conjuntos gerados por ela também é destacada por Adrien Douady (DOUADY, 1986, p.161):

Eu devo dizer que em 1980 sempre que eu dissesse para meus amigos que eu estava começando com J. H. Hubbard um estudo de polinômios de grau 2 em uma variável complexa (e mais especificamente aquelas da forma $z \mapsto z^2 + c$), eles todos me olhavam fixamente e perguntavam: vocês esperam encontrar alguma coisa nova? É, no entanto, esta simples família de polinômios que é responsável por produzir estes objetos que são tão complicados - não caóticos, mas, ao contrário, rigorosamente organizados de acordo com sofisticadas leis combinatórias.

Processo Iterativo: Para geração dos Conjuntos de Julia e do Conjunto de Mandelbrot, considere a função complexa quadrática da forma:

$$z \mapsto z^2 + c$$

onde z e c são números complexos.

Escolha arbitrariamente um número complexo z_0 e outro número complexo c e calcule, então, a sequência de números complexos $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0^2 + c \\ z_2 &= z_1^2 + c \\ z_3 &= z_2^2 + c \\ &\dots \\ z_{n+1} &= z_n^2 + c \end{aligned} \quad (6.1)$$

Em seguida, observe e determine se i) a sequência se torna ilimitada: os elementos da sequência saem de qualquer círculo ao redor da origem; ou ii) a sequência permanece limitada, isto é, existe um círculo em torno da origem que nunca é transposto pela sequência.

Nas próximas seções veremos como a aplicação desse algoritmo, de maneira diferente para cada um dos casos, nos leva aos elementos dos Conjuntos de Julia e de Mandelbrot.

6.3 Conjuntos de Julia associados à $f(z) = z^2 + c$

Os Conjuntos de Julia quadráticos são gerados pela iteração $z_{n+1} = z_n^2 + c$, para um valor fixo de c e, portanto, há um número infinito desses conjuntos: um para cada número complexo c .

6.3.1 Calculando os Conjuntos de Julia $f(z) = z^2 + c$

Podemos calcular se um número complexo pertence ou não a um determinado Conjunto de Julia Preenchido (associado a uma função $f(z) = z^2 + c$), aplicando o processo iterativo (6.1) descrito anteriormente e considerando a definição 6.1. Observe que, nesse caso, o valor de c é conhecido e queremos testar se um valor inicial z_0 pertence a esse Conjunto de Julia dado. Os exemplos 6.3, 6.4 e 6.5 ilustram a aplicação desse algoritmo.

Exemplo 6.3. Determine se os seguintes números complexos pertencem ao Conjunto de Julia associado à função $f(z) = z^2$.

a) $z_0 = 2 - i$

b) $z_0 = 0,4 - 0,3i$

c) $z_0 = -i$

Este é o caso mais simples da função quadrática, pois $c = 0 = 0 + 0i$. A Tabela 6.1 mostra os primeiros passos do processo iterativo para cada um das condições iniciais (z_0).

z_k	Órbita	z_k	Órbita	z_k	Órbita
z_0	$2 - i$	z_0	$0,4 - 0,3i$	z_0	$-i$
$z_1 = z_0^2 + c$	$3 - 4i$	$z_1 = z_0^2 + c$	$0,07 - 0,24i$	$z_1 = z_0^2 + c$	-1
$z_2 = z_1^2 + c$	$-7 - 24i$	$z_2 = z_1^2 + c$	$-0,0527 - 0,0336i$	$z_2 = z_1^2 + c$	1
$z_3 = z_2^2 + c$	$-527 + 336i$	$z_3 = z_2^2 + c$	$0,00164833 + 0,00354144i$	$z_3 = z_2^2 + c$	1
$z_4 = z_3^2 + c$	$164833 - 354144i$	$z_4 = z_3^2 + c$	$-0,0000098248 + 1,167 \times 10^{-5}i$	$z_4 = z_3^2 + c$	1
$z_5 = z_4^2 + c$...	$z_5 = z_4^2 + c$...	$z_5 = z_4^2 + c$...

(a) $z_0 = 2 - i$

(b) $z_0 = 0,4 - 0,3i$

(c) $z_0 = -i$

Tabela 6.1 – Iteração dos 3 pontos iniciais para $z \mapsto z^2$

z_k	Órbita	$ z $
z_0	$1 + i$	$\sqrt{2}$
$z_1 = z_0^2 + c$	$2i$	$\sqrt{2}$
$z_2 = z_1^2 + c$	$2i$	$\sqrt{2}$
$z_3 = z_2^2 + c$	$2i$	$\sqrt{2}$
$z_4 = z_3^2 + c$	$2i$	$\sqrt{2}$
$z_5 = z_4^2 + c$

(a) $z_0 = 1 + i$

z_k	Órbita	$ z $
z_0	$1 - i$	$\sqrt{2}$
$z_1 = z_0^2 + c$	$1 - 3i$	$\sqrt{10}$
$z_2 = z_1^2 + c$	$-7 - 7i$	$\sqrt{98}$
$z_3 = z_2^2 + c$	$1 + 97i$	$\sqrt{9410}$
$z_4 = z_3^2 + c$	$-9407 + 193i$	$\sqrt{88528898}$
$z_5 = z_4^2 + c$

(b) $z_0 = 1 - i$

z_k	Órbita	$ z $
z_0	0	0
$z_1 = z_0^2 + c$	$1 - i$	$\sqrt{2}$
$z_2 = z_1^2 + c$	$1 - 3i$	$\sqrt{10}$
$z_3 = z_2^2 + c$	$-7 - 7i$	$\sqrt{98}$
$z_4 = z_3^2 + c$	$1 + 97i$	$\sqrt{9410}$
$z_5 = z_4^2 + c$

(c) $z_0 = 0$

Tabela 6.3 – Iteração dos 3 pontos iniciais para $z \mapsto z^2 + 1 - i$

Adotando raciocínio análogo aos dois exemplos anteriores, conclui-se que dos 3 números testados apenas $1 + i$ pertence ao Conjunto de Julia associado à função $f(z) = z^2 + 1 - i$. ■

As imagens dos fractais dos Conjuntos de Julia Preenchidos são obtidas quando repetimos muitas vezes, com o auxílio de computadores, o procedimento mostrado nos exemplos 6.3, 6.4 e 6.5, isto é, quando testamos uma quantidade muito grande de condições iniciais z_0 para um determinado c fixo. Quando uma condição z_0 não diverge, marcamos (plotamos) esse ponto no plano complexo e repetimos o teste para outro número na vizinhança. A Figura 6.6 mostra alguns Conjuntos de Julia Preenchidos associados à $f(z) \mapsto z^2 + c$ obtidos a partir desse procedimento.

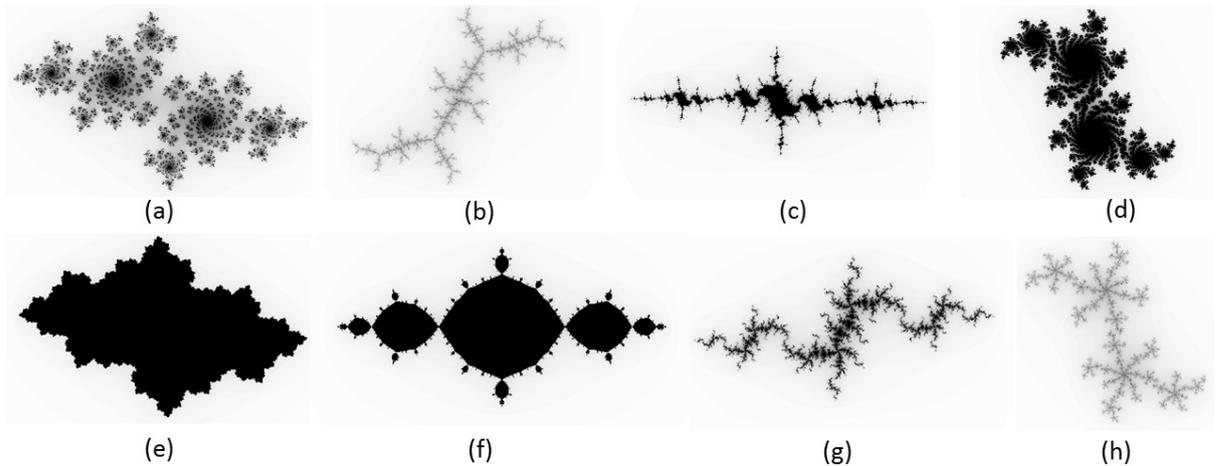


Figura 6.6 – Conjuntos de Julia Preenchidos para diferentes valores de c :
 (a) $-0,65 + 0,4i$ (b) $-0,1 - 0,9i$ (c) $-1,3 + 0,05i$ (d) $0,2 + 0,55i$
 (e) $-0,6 + 0,2i$ (f) $-1,0 + 0i$ (g) $-1,01 + 0,28i$ (h) $0,16 + 0,66i$

Fonte: elaborado pelo autor

Observe na Figura 6.6 que todos os valores de c mostrados geraram fractais. De fato, para quase todo valor de c , a função $f(z) = z^2 + c$ quando usada para gerar Conjuntos de Julia, gera um fractal. Duas exceções são conhecidas: $c = 0$ e $c = -2$. O primeiro caso ($f(z) = z^2$) leva a um círculo e no segundo ($f(z) = z^2 - 2$), temos um segmento de reta. Permanece aberto determinar se existem outras exceções (WEISSTEIN, n.d.).

A definição dos Conjuntos de Julia não estabelece quantas vezes precisamos iterar a função complexa para concluir que a órbita de z_0 divergiu. Um resultado matemático nos ajuda a

determinar um critério de escape para a órbita de z_0 : pode-se provar que se um elemento z_k da sequência estiver a uma distância maior que 2 da origem, isto é, $|z_k| > 2$, então a distância da origem dos próximos elementos da sequência irá crescer de forma ilimitada, isto é, a órbita de z_0 irá divergir.

Assim, na prática, a cada iteração devemos testar se $|z_k| > 2$ para concluir se devemos continuar executando o procedimento iterativo. Este resultado é conhecido como critério de escape, cujo teorema e sua demonstração, além do escopo desse texto, podem ser encontrados em (PEITGEN et al., 1992), por exemplo.

6.4 Conjunto de Mandelbrot

Um dos resultados mais interessantes da teoria das iterações das funções complexas, demonstrado tanto por Gaston Julia quanto por Pierre Fatou por volta de 1919, é conhecido como o Teorema da Dicotomia Fundamental[†]. Esse teorema mostra que para cada valor de c , o Conjunto de Julia Preenchido associado a função $f(z) = z^2 + c$ é ou um conjunto conexo (uma única parte) ou totalmente desconexo (infinitos pontos desconectados, um Conjunto de Cantor distorcido) (FRAME et al., 2017; DEVANEY, 1998). A Figura 6.7 mostra essas duas únicas situações possíveis. Não há, portanto, resultados intermediários, isto é, não existem Conjuntos de Julia associados à $f(z) = z^2 + c$ compostos de $2, 3 \dots n$ partes.

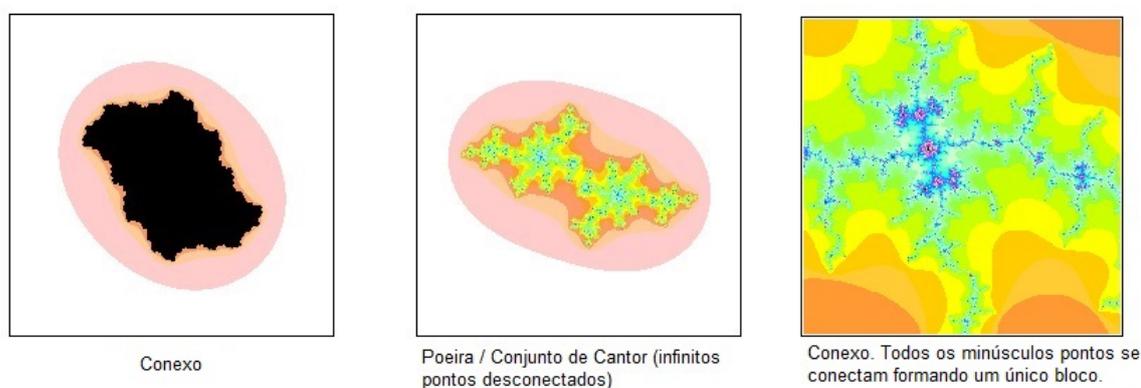


Figura 6.7 – Exemplo da dicotomia dos Conjuntos de Julia

Fonte: FRAME et al.

O Teorema da Dicotomia Fundamental afirma que se a órbita de 0 diverge, então o Conjunto de Julia é infinitamente desconexo (topologicamente semelhante ao Conjunto de Cantor). Se, no entanto, a órbita de 0 é limitada, então o Conjunto de Julia é conexo. Assim, não precisamos desenhar todo um Conjunto de Julia para determinar se ele é conexo, bastando observar o que acontece com a órbita de 0 (iteração $z \mapsto z^2 + c$ partindo de $z_0 = 0$).

[†]A demonstração do Teorema da Dicotomia Fundamental está além do escopo dessa dissertação e envolve Análise Complexa e o Critério de Escape.

Por volta de 1979, Benoit Mandelbrot teve a ideia de plotar esta dicotomia do Conjunto de Julia no plano complexo, o que levou diretamente à figura do que viria posteriormente ser conhecido como o Conjunto de Mandelbrot. Ele coloriu cada ponto do plano complexo de preto se ele gerava um Conjunto de Julia conexo e deixava-o em branco se gerava uma poeira de Cantor. O resultado foi uma imagem em preto e branco que, por conta da tecnologia gráfica da época, não se mostrava promissora ou impressionante. Porém, Mandelbrot percebeu que tinha feito uma grande descoberta e, persistindo sua pesquisa, deu início à revitalização desse campo da Matemática (PEITGEN et al., 1992).

A complexidade do Conjunto de Mandelbrot é mentalmente desafiante e suas propriedades matemáticas estão longe de serem totalmente compreendidas. No entanto, sua definição é bastante simples e plotá-lo requer poucas linhas de programação, Figura 6.8 (FALCONER, 2013).

Definição 6.6. *O Conjunto de Mandelbrot é o conjunto de todos os números complexos c para os quais a iteração $z \rightarrow z^2 + c$, tomada a partir de $z_0 = 0$, não diverge para o infinito ou, equivalentemente, é o conjunto de números complexos c para os quais o Conjunto de Julia associado à $f(z) = z^2 + c$ é conexo (FRAME et al., 2017).*

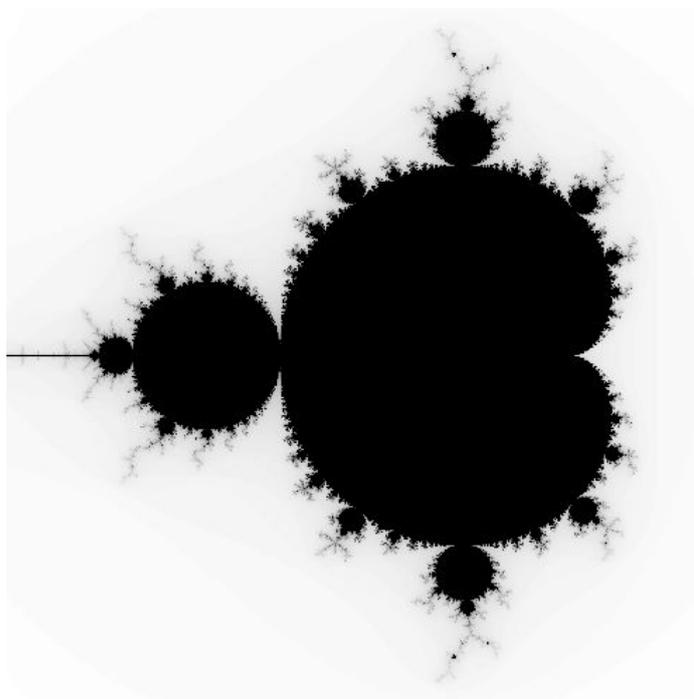


Figura 6.8 – O Conjunto de Mandelbrot

Fonte: elaborado pelo autor

O Conjunto de Mandelbrot é, portanto, definido usando-se a iteração da mesma função complexa dos Conjuntos de Julia, porém aplicada de uma forma diferente. Os exemplos 6.7 e 6.8

mostram como aplicar essa iteração para determinar se um ponto c pertence ou não ao Conjunto de Mandelbrot.

Exemplo 6.7. Determine se $c = 1 + i$ pertence ao Conjunto de Mandelbrot.

Temos $z_0 = 0$ (pela definição) e $c = 1 + i$. Logo:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = z_0^2 + c = 0^2 + 1 + i = 1 + i$$

$$z_2 = z_1^2 + c = (1 + i)^2 + 1 + i = 1 + 3i$$

...

Como $|z_2| = \sqrt{10} > 2$ (critério de escape), concluímos que a órbita de z_0 diverge e, portanto, o ponto $c = 1 + i$ não pertence ao Conjunto de Mandelbrot. ■

Exemplo 6.8. Determine se $c = i$ pertence ao Conjunto de Mandelbrot.

Temos $z_0 = 0$ (pela definição) e $c = i$. Logo:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = z_0^2 + c = 0^2 + i = i$$

$$z_2 = z_1^2 + c = i^2 + i = -1 + i$$

$$z_3 = z_2^2 + c = (-1 + i)^2 + i = -i$$

$$z_4 = z_3^2 + c = (-i)^2 + i = -1 + i$$

$$z_5 = z_4^2 + c = (-1 + i)^2 + i = -i$$

...

A partir de z_4 , a órbita de z_k fica oscilando entre $-1 + i$ e $-i$. Logo, a órbita não diverge e $c = i$ pertence ao Conjunto de Mandelbrot. Como essa órbita ficou oscilando entre dois pontos ($-1 + i$ e $-i$), dizemos que o seu período é 2. ■

Exemplo 6.9. O ponto $c = -0,12 + 0,75i$ pertence ao Conjunto de Mandelbrot. A partir de z_{31} sua órbita começa a repetir um ciclo. Qual o período dessa órbita? Onde esse ponto está localizado no Conjunto de Mandelbrot?

Temos $z_0 = 0$ (pela definição) e $c = -0,12 + 0,75i$. Logo:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = z_0^2 + c = (0 + 0i)^2 - 0,12 + 0,75i = -0,12 + 0,75i$$

...

$$z_{31} = -0,120125280497591 + 0,749964931223315i$$

$$z_{32} = -0,668017315050167 + 0,569820504546885i$$

$$z_{33} = 0,00155172580476665 + -0,0112999270158831i$$

$$z_{34} = -0,120125280497591 + 0,749964931223315i$$

$$z_{35} = -0,668017315050167 + 0,569820504546885i$$

$$z_{36} = 0,00155172580476665 + -0,0112999270158833i$$

$$z_{37} = -0,120125280497591 + 0,749964931223315i$$

$$z_{38} = -0,668017315050167 + 0,569820504546885i$$

$$z_{39} = 0,00155172580476665 + -0,0112999270158833i$$

...

Olhando as iterações, percebemos que $z_{31} = z_{34}$, $z_{32} = z_{35}$ e $z_{33} = z_{36}$ e assim por diante. Essa órbita não diverge e a partir de z_{31} fica oscilando entre 3 valores de z . Logo, o seu período é 3. Plotando $c = -0,12 + 0,75i$ no Conjunto de Mandelbrot, observaremos que esse ponto fica dentro de um dos seus bulbos primários (na Figura 6.11 é o bulbo superior marcado com o número 3). ■

O Conjunto de Mandelbrot é considerado por muitos pesquisadores, incluindo aí o próprio Benoit Mandelbrot, como o objeto mais complexo de toda a Matemática (GLEICK, 1989, p.212),(DEWDENEY, 1985). Embora essa afirmação possa ser debatida (HORGAN, 1990) ou considerada exagerada (FELDMAN, 2012, p.261), ele é um objeto de incríveis propriedades matemáticas, que mostra uma ordem e estrutura intrincadas e que a cada detalhamento revela novas e diferentes formas.

Embora sejam definidos pela iteração da mesma função $f(z) = z^2 + c$, o Conjunto de Mandelbrot é muito mais complexo que qualquer um dos Conjuntos de Julia. Ao se detalhar as proximidades de sua fronteira, revela-se uma rica estrutura fina com formas que se assemelham a cavalos marinhos, espirais e moinhos de vento. Em princípio, pode-se ampliar a fronteira do Conjunto de Mandelbrot indefinidamente e a variedade de formas que surgirá é também interminável, Figura 6.9 (FALCONER, 2013).

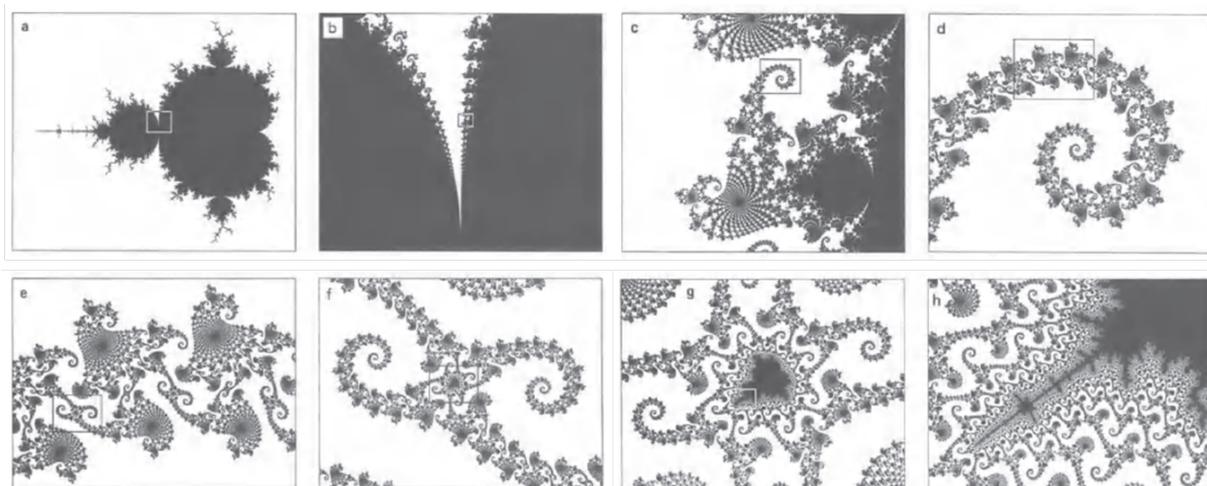


Figura 6.9 – Sucessivas ampliações na fronteira do fractal de Mandelbrot

Fonte: PEITGEN et al.,p.428

6.4.1 Catálogo dos Conjuntos de Julia

Cada ponto do Conjunto de Mandelbrot é um valor c que pode ser usado para construção de um Conjunto de Julia conexo. Porém, o relacionamento do Conjunto de Mandelbrot com os Conjuntos de Julia vai muito além de estabelecer a conexidade destes. De fato, o Conjunto de Mandelbrot fornece uma grande quantidade de informação geométrica sobre os Conjuntos de Julia, constituindo-se em um catálogo de formas e propriedades geométricas encontradas neles.

A Figura 6.10 mostra alguns Conjuntos de Julia com a respectiva posição do parâmetro c no Conjunto de Mandelbrot.

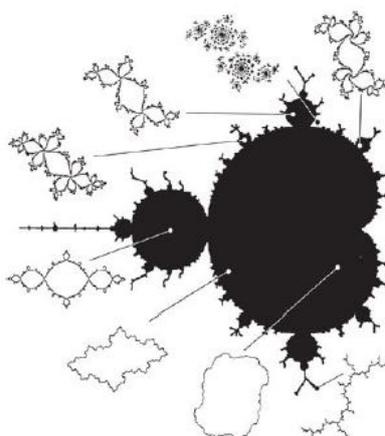


Figura 6.10 – Alguns Conjuntos de Julia obtidos a partir de valores do Conjunto de Mandelbrot

Fonte: FALCONER,p.78

Alguns exemplos de informação dos Conjuntos de Julia catalogada pelo Conjunto de

Mandelbrot incluem:

- Para os valores de c dentro do cardioide, o Conjunto de Julia correspondente será sempre uma figura mais simples com um único circuito fechado (FALCONER, 2013).
- Os bulbos primários (botões circulares grudados no corpo principal) do Conjunto de Mandelbrot têm um período n associado a eles, Figura 6.11. Para os valores de c dentro dos bulbos primários, o Conjunto de Julia correspondente será um fractal conexo composto de infinitos pontos de junção e cada um desses pontos terá exatamente n regiões conectadas nele. A Figura 6.12 mostra fractais do Conjunto de Julia gerados a partir de c no interior de bulbos com períodos 4, 5, e 7 do Conjunto de Mandelbrot. Observe que cada um dos pontos de junção conecta 4, 5 e 7 regiões.

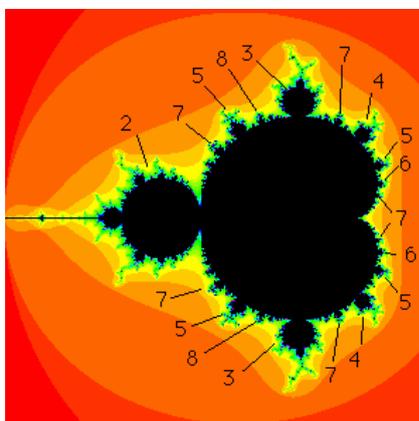


Figura 6.11 – Período dos maiores bulbos do Conjunto de Mandelbrot

Fonte: DEVANEY

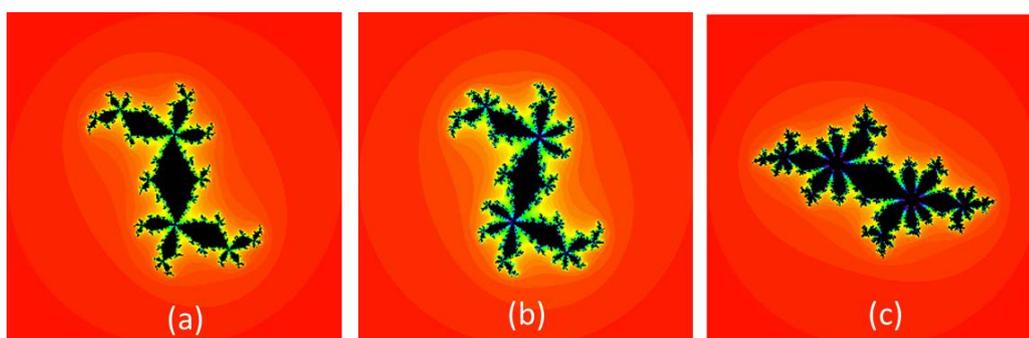


Figura 6.12 – Conjuntos de Julia gerados a partir de c no interior de bulbos primários do Conjunto de Mandelbrot (a) período 4 (b) período 5 (c) período 7

Fonte: DEVANEY

- Os filamentos que se estendem para fora dos bulbos (botões) e do corpo principal do conjunto Mandelbrot correspondem aos valores de c em que o Conjunto de Julia é um dendrito (DEVANEY, 1998).

- Os Conjuntos de Julia correspondentes a valores c na borda do Conjunto de Mandelbrot ou muito perto dela requerem computação mais delicada e têm uma estrutura mais exótica. Os Conjuntos de Julia com c na fronteira de Mandelbrot, embora conexos, estão fazendo uma transição para se tornarem infinitamente desconexos e alguns deles podem ser altamente intrincados (FALCONER, 2013).

6.5 Ensino de números complexos utilizando fractais

Em (MANDELBROT; FRAME, 2002, p.26) Benoit Mandelbrot menciona o interesse em aprender números complexos que uma reportagem sobre fractais publicada pela revista *Scientific American* em abril de 1985 despertou na população. De fato, para entender e calcular os Conjuntos de Julia e o Conjunto de Mandelbrot, os estudantes devem estar familiarizados com os números complexos. Geralmente, ao introduzir esses conjuntos, os livros de Geometria Fractal fornecem uma introdução sobre os números complexos e sua álgebra. Essa é a abordagem utilizada, por exemplo, em (PEITGEN et al., 1992; FALCONER, 2014; FALCONER, 2013; FELDMAN, 2012; SULTAN; ARTZT, 2011).

É natural, portanto, pensar em utilizar a Geometria Fractal como um instrumento motivador no ensino dos números complexos. Como justificativa para essa abordagem, elenco as razões que o matemático americano Lynn Arthur Steen (1941-2015) apresenta ainda no prefácio de (MANDELBROT; FRAME, 2002) para a inclusão de fractais na Educação Matemática:

- Os primeiros passos são muito divertidos. Explorar os fractais cria um entusiasmo sem precedentes para a aprendizagem entre professores e alunos.
- Os fractais são bonitos. Os visuais impressionantes atraem os olhos da mente e criam uma contagiosa demanda pela exploração continuada.
- Qualquer um pode participar. A exploração da geometria dos fractais tem apelo entre os estudantes de todas as idades, da escola primária ao ensino universitário e além.
- Os fractais estimulam a curiosidade. Regras simples, facilmente modificadas, criam tentações incontroláveis de explorar diferentes opções para ver que padrões surpreendentes irão surgir.
- Ideias simples levam a uma complexidade inesperada. Os fractais são mais conectados com a realidade do que outros objetos estudados em outras partes da Matemática; eles, portanto, sensibilizam muitos estudantes que consideram a Matemática tradicional como fria e rigorosa.
- Muitos problemas fáceis ainda não foram resolvidos. Os fractais são ricos de conjecturas abertas que levam a conhecimentos matemáticos mais profundos. Além disso, a distância entre os passos elementares e os problemas não resolvidos é muito curta.
- A inspeção cuidadosa traz recompensas imediatas. Ideias, inspirações e conjecturas surgem prontamente quando nossa bem desenvolvida intuição visual é aplicada às imagens dos fractais. Ao estudar fractais, as crianças podem observar e fazer conjecturas tão bem quanto os adultos.
- Os computadores aprimoram a aprendizagem. O impacto visual dos gráficos computadorizados tornam inesquecíveis as imagens dos fractais enquanto que as implacáveis requisições lógicas dos programas de computador fornecem importantes lições sobre o valor do pensamento rigoroso.

Em 1997 FORSTER planejou uma série de aulas sobre números complexos usando fractais para alunos do Ensino Médio de uma escola australiana. Em uma abordagem construtivista, semanas antes de introduzir o assunto números complexos, a sala de aula foi decorada

com imagens coloridas dos fractais dos Conjuntos de Julia e do Conjunto de Mandelbrot. Em seguida, foi dito aos alunos que eles próprios gerariam imagens semelhantes com o auxílio de computadores, o que foi feito logo depois que os principais conceitos de números complexos tivessem sido apresentados e que os alunos tivessem aprendido a calcular e desenhar os fractais a mão.

Outra iniciativa semelhante é descrita em ANDERSON. Neste trabalho, o professor Dan Anderson descreve suas aulas que ensinam tópicos como aritmética dos números complexos, forma polar de representação, diagrama de Argand, fórmula de De Moivre, sequências numéricas e representação no plano complexo usando os fractais do Conjunto de Mandelbrot.

Essas duas iniciativas têm em comum o fato de se valerem dos computadores para realizar os muitos cálculos necessários para produzir as imagens dos fractais. De fato, no estudo desses fractais a utilização de computadores é, praticamente, essencial. Além disso, alguns aspectos e limitações computacionais envolvidos nos cálculos devem ser compreendidos pelos alunos para tirar maior proveito dos recursos tecnológicos disponíveis. O apêndice B aborda alguns desses aspectos computacionais relacionados aos cálculos dos fractais dos Conjuntos de Julia e do Conjunto de Mandelbrot.

Outro ponto em comum entre os dois trabalhos é que a beleza das imagens geradas, embora seja realçada, não é o foco das aulas. Destacar apenas a beleza dos fractais nas aulas é uma abordagem equivocada. Em seu livro *Chaos in the classroom* (DEVANEY, 1998), Robert Devaney alerta:

Muitos pesquisadores matemáticos se encolhem de medo diante da perspectiva de “mais um outro fractal”. Na maioria das vezes, as discussões de caos e fractais degeneram para simples “apresentações de imagens bonitas”, desprovidas de qualquer conteúdo matemático. Como consequência, os alunos têm a ideia de que a Matemática moderna é semelhante a um *videogame* - muita ação gerada por computador, mas, na melhor das hipóteses, uma atividade sem sentido.

Esta atitude é lamentável e desnecessária. Há matemática por trás das belas fotos e, mais do que isso, grande parte é bastante acessível para estudantes do ensino médio. Além disso, a Matemática por trás das imagens é muitas vezes ainda mais bonita do que as próprias imagens. Nesse sentido, é uma tragédia que os alunos cheguem tão perto de ver alguns temas emocionantes e contemporâneos em Matemática, mas o percam no final.

6.6 Recursos Digitais

Os recursos digitais apresentados a seguir podem ajudar o professor a introduzir os números complexos com o auxílio dos fractais do Conjunto de Mandelbrot e dos Conjuntos de Julia. Ao explorar interativamente as propriedades e o relacionamento existente entre os Conjuntos de Julia e o de Mandelbrot, são também exploradas as operações e propriedades do conjunto dos números complexos.

- RD601 - Planilha para cálculo das iterações e órbitas

Esta planilha realiza as iterações necessárias para se determinar se um ponto pertence ou não a um Conjunto de Julia dado ou ao Conjunto de Mandelbrot, bastando para isso fornecer os parâmetros iniciais (c , z_0 e o número de iterações). Essa ferramenta permite que o professores confirmem os cálculos que são realizados para plotagem dos fractais.

- RD602 - Mandelbrot Js

Este *applet* Javascript, baseado no algoritmo apresentado em (PETERS, 2013), permite plotar o Conjunto de Mandelbrot e aplicar *zoom* em sua fronteira. Alguns parâmetros podem ser modificados pelo estudante permitindo que este compreenda, por exemplo, como funciona o número máximo de iterações e o esquema de cores utilizado. Como o programa Javascript tem o código aberto, o aluno que conheça um pouco de programação poderá se aventurar a modificá-lo e, assim, gerar novos fractais.

- RD603 - Julia Js

Este *applet* Javascript plota na tela o Conjunto de Julia para um dado c . Permite salvar a imagem gerada em jpg e aplicar zoom em sua fronteira.

- RD604 - Mandelbrot \times Julia Js

Este *applet* explora o relacionamento existente entre o Conjunto de Mandelbrot e os Conjuntos de Julia. Ao clicar em uma posição c do Conjunto de Mandelbrot no plano complexo, o Conjunto de Julia correspondente será exibido à direita juntamente com o valor de c que deu origem a essa imagem. Esse procedimento pode ser repetido várias e várias vezes, permitindo que o aluno faça conjecturas sobre as informações geométricas do Conjunto de Julia que são “catalogadas” pelo Conjunto de Mandelbrot.

7 Considerações Finais

Nesse último capítulo analiso o trabalho realizado sob dois pontos de vista: o primeiro, de natureza mais específica, aborda as questões de pesquisa e objetivos do projeto; e o segundo, de natureza mais ampla, busca sintetizar os conhecimentos que coletei ao longo dessa pesquisa e refletir sobre possíveis desdobramentos futuros de um eventual seguimento dela.

Durante o desenvolvimento dos capítulos desse trabalho, procurei responder às questões de pesquisa à luz das razões e teorias elencadas no Capítulo 1, buscando formas de promover a motivação entre professores e alunos. O resultado final apresenta os números complexos a partir de uma contextualização histórica, uma conceituação teórica que explora as diferentes formas de representação (especialmente, a sua interpretação geométrica) e de suas muitas aplicações (nem sempre cotidianas).

Os recursos digitais, introduzidos para reforçar o contexto de cada um dos capítulos, podem ser utilizados para desenvolver atividades cujos processos de resolução conduzam a reflexões sobre os conceitos matemáticos envolvidos, e são independentes da tecnologia utilizada, em linha com o procedimento recomendado e adotado por GIRALDO et al.. Houve também a preocupação que esses recursos pudessem ser reusados de forma modularizada em diferentes contextos de aprendizagem, não limitando os alunos e professores às atividades propostas no texto, o que atende a ideia fundamental inerente ao conceito de objeto de aprendizagem (conforme WILEY).

É fácil perceber que há uma variedade muito grande de formas de ensinar: uma técnica que funciona em um contexto pode ser completamente disfuncional em outro, pois uma boa aula depende de variáveis que podem mudar a cada momento. O mesmo também pode ser dito sobre a motivação: o que motiva um aluno ou um professor pode ser completamente diferente daquilo que motiva outro. Além disso, as técnicas para se avaliar a motivação de ensino e aprendizagem são heurísticas e, portanto, não asseguram as melhores soluções, mas buscam soluções válidas, aproximadas, que nem sempre são possíveis de serem justificadas logicamente.

Tendo isso em mente, as ideias contidas nesse trabalho devem ser encaradas como sugestões para apoiar o ensino e a aprendizagem dos números complexos e, portanto, como bem pontuado em (KLEINER, 2012, p.268), “quando se trata de sugestões para uso em sala de aula, fica muito claro que o professor é quem deve julgar como, quando, em que nível e em qual contexto esses recursos podem ser utilizados”.

Ao longo da realização desse trabalho, me deparei com alguns aspectos interessantes que podem vir a complementar os estudos realizados, indicando novos caminhos para pesquisa futura. Destaco aqui apenas três desses aspectos.

O primeiro desses aspectos surgiu logo no começo, ao estudar a História dos Números Complexos (Capítulo 2). Percebi que a riqueza do longo percurso histórico dos números

complexos permite que muitos outros *applets* sejam construídos para investigar essa conexão entre História e Matemática. Assim, um prosseguimento interessante desse trabalho seria fazer um levantamento histórico mais minucioso, explorando mais algumas passagens como, por exemplo, a interpretação geométrica dos números complexos por matemáticos diferentes em épocas distintas, para encontrar exemplos e informações necessárias para produção de outros recursos digitais.

Também merece uma exploração maior o uso dos números complexos para resolver problemas geométricos elementares que abordei em uma seção do Capítulo 4 com a apresentação de alguns exemplos. Embora existam muito boas referências sobre esse assunto, senti falta de um texto que apresentasse uma sistematização, indicando quando os números complexos devem ou não ser usados para resolver esse tipo de problema, e que apresentasse os diferentes exemplos agrupando-os por categorias.

Outro ponto que gostaria de continuar estudando diz respeito ao uso de fractais para ensinar números complexos. Embora no Capítulo 6 eu tenha me limitado ao fractais do Conjunto de Mandelbrot e dos Conjuntos de Julia associados à função quadrática, muitos outros fractais podem ser utilizados para esse fim como, por exemplo, os fractais de Collatz que usam uma função complexa que reproduz as condições da Conjectura de Collatz. Assim, em um futuro próximo pretendo expandir esse capítulo, incluindo outros conjuntos e transformações no plano complexo que também geram fractais.

Os recursos digitais desenvolvidos não foram ainda exaustivamente experimentados e testados em ambiente de sala de aula. No entanto, a forma como eles foram publicados permite uma interação muito grande com os usuários finais. Há, por exemplo, espaço para que os professores e estudantes façam comentários (moderados), avaliações e sugiram mudanças. Tão logo, essas informações de aplicação adquiram um volume que permita analisá-las, será necessário refletir sobre o melhor meio de fazê-lo e, após essa validação, definir quais as alterações e melhoramentos devem ser introduzidos.

Como trabalho futuro, pretendo continuar construindo e testando recursos digitais que explorem os números complexos em seus diversos contextos, pois acredito que essa abordagem mais visual, mais aplicada e mais conceitual, pode, sim, ajudar a despertar o interesse de alunos e professores por esse tema.

Referências

- ANDERSON, D. **Using the Mandelbrot Set to teach pre-calculus**. 2015. Notas de aula online. Disponível em: <<http://recursiveprocess.com/mandelbrot/>>. Acesso em: 19 de março de 2018.
- ANDREESCU, T.; ANDRICA, D. **Complex Numbers from A to...Z**. 2. ed. New York: Birkhäuser, 2014.
- BOCHNER, S. **The role of Mathematics in the rise of science**. 1. ed. Princeton: Princeton Press, 1966.
- BOGOMOLNY, A. **Properties of Flank Triangles from Interactive Mathematics Miscelany and Puzzles**. 2018. Disponível em: <<https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/PropertiesOfFlankTriangles.shtml>>. Acesso em: 19 de março de 2018.
- BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2006. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2006. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>.
- CAJORI, F. **A History of Mathematics**. 1. ed. New York: The Macmillan Company, 1909.
- CARDANO, G. **Ars Magna or the rules of Algebra**. Tradução de T. Richard Witmer. 1. ed. New York: Dover, 1968. Disponível em: <[https://albeniz-matematicas-acaro.wikispaces.com/file/view/Richard+Witmer+\(1968\)+Girolamo+Cardano+ARS+Magna+or+the+Rules+of+Algebra.pdf](https://albeniz-matematicas-acaro.wikispaces.com/file/view/Richard+Witmer+(1968)+Girolamo+Cardano+ARS+Magna+or+the+Rules+of+Algebra.pdf)>. Acesso em: 19 de março de 2018.
- CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria - Números Complexos**. Notas históricas de João Bosco Pitombeira de Carvalho. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).
- CARNEIRO, J. P. A geometria e o ensino dos números complexos. **Revista do Professor de Matemática**, n. 55, 2004.
- CHAVEZ, E. G. **Teaching complex numbers in high school**. Dissertação (Mestrado) — Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College, 2014.
- CHIARELLI, R. Ávilla. **Física moderna e contemporânea no ensino médio: é possível abordar conceitos de Mecânica Quântica?** Dissertação (Mestrado) — UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.
- CIPTOWIYONO, I. Engineering students difficulties in learning complex numbers. In: EUROPEAN SOCIETY FOR ENGINEERING EDUCATION. **Proceedings of the 43rd Annual SEFI Conference**. Orléans - France, 2015.
- COMMONS, W. **File:Girolamo Cardano.jpg — Wikimedia Commons, the free media repository**. 2011. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Girolamo_Cardano.jpg&oldid=55612594>. Acesso em: 19 de março de 2018.

COMMONS, W. **File:Charles_Proteus_Steinmetz.jpg — Wikimedia Commons, the free media repository**. 2014. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Charles_Proteus_Steinmetz.jpg>. Acesso em: 19 de março de 2018.

COMMONS, W. **File:Leonhard_Euler_by_Handmann.png — Wikimedia Commons, the free media repository**. 2014. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_by_Handmann.png>. Acesso em: 19 de março de 2018.

COMMONS, W. **File:Carl Friedrich Gauss.jpg — Wikimedia Commons, the free media repository**. 2018. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg&oldid=286337627>. Acesso em: 19 de março de 2018.

DANTZIG, T. **Number - the language of science**. 4. ed. New York: Plume, 2005.

DELVAL, J. **Crescer e pensar: a construção do conhecimento na escola**. 1. ed. Porto Alegre: Artesw Médicas, 1998.

DESCARTES, R. **The Geometry of René Descartes: with a Facsimile of the First Edition**. Tradução de David Eugene Smith e Marcia Latham. 1. ed. New York: Dover, 1954.

DEVANEY, R. L. **The Fractal Geometry of the Mandelbrot Set**. Boston University, 1993. Notas de aula do Chaos Club da Boston Technical High School. Disponível em: <<http://math.bu.edu/DYSYS/FRACGEOM/FRACGEOM.html>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

DEVANEY, R. L. Chaos in the classroom. In: LEHRER, R.; CHAZAN, D. (Ed.). **Designing learning environments for developing understanding of geometry and space**. New York: Routledge, 1998. cap. 4, p. 91–103.

DEWDENEY, A. K. A computer microscope zooms in for a look at the most complex object in mathematics. **Scientific American**, v. 252, n. 5, p. 16–25, 1985. Disponível em: <https://www.scientificamerican.com/media/inline/blog/File/Dewdney_Mandelbrot.pdf>. Acesso em: 19 de março de 2018.

DOUADY, A. Julia sets and the mandelbrot set. In: PEITGEN, H.-O.; RICHTER, P. H. (Ed.). **The Beauty of fractals**. Berlin: Springer-Verlag, 1986. p. 161–173.

DOYNE, S. Do we need a new way to teach Math? **The New York Times**, 2011. Disponível em: <<https://learning.blogs.nytimes.com/2011/08/26/do-we-need-a-new-way-to-teach-math/>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

EBBINGHAUS, H. et al. **Numbers**. 1. ed. New York: Springer, 1991. (Graduate texts in Mathematics).

EGAN, D. **Complex Numbers**. The Imaginative Education Research Group, 2008. Estudo de caso sobre como ensinar números complexos. Disponível em: <<http://ierg.ca/wp-content/uploads/2014/01/Complex-Numbers-Unit-Plan.pdf>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

ELMORE, W. C.; HEALD, M. A. **Physics of waves**. 1. ed. New York: McGraw-Hill, 1969.

FALCONER, K. **Fractals - a very short introduction**. 1. ed. Oxford: Oxford, 2013.

FALCONER, K. **Fractal Geometry - Mathematical Foundation and Applications**. 3. ed. Chichester: Wiley, 2014.

FELDMAN, D. P. **Chaos and Fractals - an elementary introduction**. 1. ed. Oxford: Oxford, 2012.

FEYNMAN, R. **The Feynman Lectures on Physics - Algebra**. 1963. Lecture 23 - Algebra. Disponível em: <http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_22.html>. Acesso em: 19 de março de 2018.

FEYNMAN, R. **Probability and Uncertainty: The Quantum Mechanical View of Nature - The Character of Physical Law**. 1964. Messenger Lecture 6. Disponível em: <<http://www.cornell.edu/video/richard-feynman-messenger-lecture-6-probability-uncertainty-quantum-mechanical-view-nature>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

FITZPATRICK, R. **Oscillations and waves: an introduction**. 1. ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

FORSTER, P. Using fractals to teach complex numbers with a constructivist approach. **Australian Senior Mathematics Journal**, v. 11, n. 1, p. 14–22, 1997.

FOWLER, M. **Lectures on Oscillations and Waves**. University of Virginia, 2007. Notas de aula do curso Physics 152: Oscillations and waves. Disponível em: <<http://galileo.phys.virginia.edu/classes/152.mf1i.spring02/OscWavesIndex.htm>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

FRAME, M.; MANDELBROT, B.; NEGER, N. **Fractal Geometry**. Yale University, 2017. Coleção de páginas para apoiar um primeiro curso em geometria fractal. Disponível em: <http://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/>. Acesso em: 19 de março de 2018.

GAGNÉ, R. M. **The Conditions of Learning and Theory of Instruction**. 4. ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1985.

GAMOW, G. **One two Three...Infinity**. 1. ed. New York: Viking Press, 1947.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GARDNER, M. **Mathematical Circus**. 1. ed. Middlesex: Penguin Books, 1979.

GARFUNKEL, J. Solving problems in Geometry by using complex numbers. **The Mathematics teacher**, v. 60, n. 7, p. 731–734, 1967.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

GIRARD, A. **Invention nouvelle en l'algèbre**. 1. ed. Amsterdam: [s.n.], 1629.

GLEICK, J. **Caos - a criação de uma nova ciência**. 16. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1989.

GREEN, D. The historical development of complex numbers. **The Mathematical Gazette**, v. 60, n. 412, p. 99–107, 1976.

HAREL, G. DNR-based curricula: the case of complex numbers. **Journal of Humanistic Mathematics**, v. 3, 2013. Disponível em: <<http://scholarship.claremont.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1133&context=jhm>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

HAYES, B. Father of fractals. **Scientific American**, v. 101, n. 1, p. 60, 2013. Disponível em: <<https://www.americanscientist.org/article/father-of-fractals#>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

HONSBERGER, R. **Mathematical Diamonds**. 1. ed. Washington DC: American Mathematical Society, 2003. (Dolciani Mathematical Expositions).

HORGAN, J. Mandelbrot set-to. **Scientific American**, v. 262, n. 4, 1990. Disponível em: <<https://www.scientificamerican.com/article/mandelbrot-set-1990-horgan/>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

HUI, T. S.; LAM, T. T. On the teaching of the representation of complex numbers in the Argand Diagram. **Learning Science and Mathematics**, v. 8, p. 75–86, 2013. Disponível em: <http://www.recsam.edu.my/lsm/2013/75-86_Toh%20Tin%20Lam.pdf>. Acesso em: 19 de março de 2018.

JAMES, J. F. **A student's guide to Fourier Transforms with applications in physics and engineering**. 3. ed. New York: Cambridge, 2011.

JOHNSON, R. **Using complex numbers in circuit analysis**. University of California Santa Cruz, 2014. Notas de aula do curso Physics 160: Practical Electronics. Disponível em: <<http://scipp.ucsc.edu/~johnson/phys160/ComplexNumbers.pdf>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

KILPATRICK, J. George Pólya's influence on Mathematics Education. **Mathematics Magazine**, v. 60, n. 5, p. 299–300, 1987.

KLEINER, I. **Excursions in the History of Mathematics**. 1. ed. New York: Springer, 2012.

LANGTON, C.; LEVIN, V. **The intuitive guide to Fourier analysis and spectral estimation: with Matlab**. 1. ed. [S.l.]: Mountcastle, 2017.

LAZAROV, B. Comparing two ways of elaboration of complex numbers. **The Teaching of Mathematics**, VII, n. 2, p. 103–106, 2004. Disponível em: <<http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/13/tm724.pdf>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

LESMOIR-GORDON, N.; ROOD, W.; EDNEY, R. **Introducing fractals: a graphical guide**. 1. ed. London: Icon, 2013.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 3. (Coleção do Professor de Matemática, v. 3).

MANDELBROT, B. B. **The fractal geometry of nature**. 1. ed. New York: W.H. Freeman, 1983.

MANDELBROT, B. B.; FRAME, M. L. **Fractals, Graphics, and Mathematics Education**. 1. ed. Washington: The Mathematical Association of America, 2002.

MAYNARD, G. **Complex numbers in quantum theory**. Tese (Doutorado) — University of North Texas, Denton, 08 2015.

MAZUR, B. **Imagining numbers**. 1. ed. New York: Farrar Straus Giroux, 2003.

MEIKLE, H. D. **A new twist to Fourier Transform**. 1. ed. Weinheim: Wiley-VCH, 2004.

MERINO, O. **A short story of complex numbers**. University of Rhode Island, 2006. Artigo online. Disponível em: <<http://www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

MOTTA, E. Aplicações dos números complexos à Geometria. **Revista Eureka**, v. 1, n. 6, p. 33–34, 1999. Disponível em: <<http://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka6.pdf>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

MURRAY, D. **Lecture Notes on Complex Algebra**. University of Oxford, 1995. Disponível em: <<https://www.robots.ox.ac.uk/~dwm/Courses/index.html>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

NAHIN, P. J. **An imaginary tale - the history of $\sqrt{-1}$** . 1. ed. Princeton: Princeton University, 1998.

NAVE, C. R. **Hyperphysics - RLC Series Circuit**. Georgia State University, 2017. Conteúdo online. Disponível em: <<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/rlcser.html>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

NEVES, R. C. **Aplicações de números em geometria**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014.

NOBRE, W. R. **Números complexos e algumas aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, 2013.

NORDLANDER, M. C.; NORDLANDER, E. On the concept image of complex numbers. Gävle, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2011.633629>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. The mactutor history of mathematics archive. **The MacTutor History of Mathematics Archive**, 2002. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Quadratic, cubic and quartic equations. **The MacTutor History of Mathematics Archive**, 2002. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Quadratic_etc_equations.html>. Acesso em: 19 de março de 2018.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Rafael bombelli biography. **The MacTutor History of Mathematics Archive**, 2002. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bombelli.html>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

OLIVEIRA, O. R. B. de. **Teorema Fundamental da Álgebra**. IME-USP, 2017. Palestra para professores do Ensino Médio. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~oliveira/TFACOLEGIAL5.pdf>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

ORZEL, C. **How to teach quantum physics to your dog**. 1. ed. New York: Scribner, 2009.

PANAOURA, A.; ELIA, I.; GAGATSI, A.; GIATILIS, G. P. Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 37, n. 6, p. 681–706, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/00207390600712281>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

PCMI - IAS. **Complex Numbers in Teacher Education: Connecting Mathematics and Pedagogy**. 2011. Obra coletiva. Disponível em: <<https://pcmi.ias.edu/files/Complex%20Numbers%20in%20Teacher%20Education.pdf>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

PEITGEN, H.-O.; JURGENS, H.; SAUPE, D. **Fractals for the classroom - Part 1 and Part 2**. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1992.

PETERS, K. **Playing with chaos - programming fractals and strange attractors in Javascript**. 1. ed. Seattle: Amazon, 2013.

PINTO, A. C.; ZANETIC, J. É possível levar a física quântica para o ensino médio? **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 16, n. 1, 04 1999.

PÓLYA, G. **Mathematical Methods in Science**. 1. ed. Washington: The Mathematical Association of America, 1977.

PÓLYA, G. **Mathematical Discovery - On understanding, learning and teaching problem solving**. 1. ed. New York: John Wiley & Sons, 1981. v. 2.

PÓLYA, G.; LATTA, G. **Complex Variables**. 1. ed. New York: John Wiley & Sons, 1974.

PORTER, J. **Complex Numbers made simple**. 1. ed. Isle of Wight: J Porter, 2014.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

ROSSO, A. J. **Modelagem matemática - uma perspectiva para a Educação Básica**. Organizadores: Célia Finck Brandt, Dionísio Burak e Tiago Emanuel Klüber. 1. ed. Ponta Grossa: UEPG, 2010.

SALCEDO, T. P.; ALFONSO, B. G. La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. **Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM**, p. 251–260, 2005. Disponível em: <<https://core.ac.uk/download/pdf/12341773.pdf>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

SMITH, D. E. **History of Mathematics**. 1. ed. New York: Dover, 1958. v. 2.

SMITH, E. M.; ZWOLAK, J. P.; MANOGUE, C. A. Student difficulties with complex numbers. In: AMERICAN ASSOCIATION OF PHYSICS TEACHERS. **2015 PERC Proceedings**. Maryland - USA, 2015.

SMITH, S. W. **The scientist and engineer's guide to digital signal processing**. 2. ed. San Diego: California Technical, 1999.

SMITH, W. F. **Waves and Oscillations - a prelude to quantum mechanics**. 1. ed. Oxford: Oxford, 2010.

SPINELLI, W. Nem tudo é abstrato no reino dos complexos. **Seminários de Ensino de Matemática - FE - USP**, 2009. Disponível em: <<http://www.nilsonjosemachado.net/sema20091027.pdf>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

SPINELLI, W. **A construção do conhecimento entre o abstrair e o contextualizar: o caso do ensino da Matemática**. Tese (Doutorado) — USP - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

STACK, J. **Complex numbers in quantum mechanics**. University of Illinois, 2013. Notas de aula do curso Physics 580: Quantum Mechanics I. Disponível em: <https://courses.physics.illinois.edu/phys580/fa2013/susy_v2.pdf>. Acesso em: 19 de março de 2018.

STROGATZ, S. Finding your roots. **New York Times**, 3 2010. Disponível em: <<https://static01.nyt.com/packages/pdf/opinion/opinionator/FindingYourRoots.pdf>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

SULTAN, A.; ARTZT, A. F. **The Mathematics that every secondary school math teacher needs to know**. 1. ed. New York: Routledge, 2011.

TERRAZZAN, E. A. A inserção da física moderna e contemporânea no ensino de Física na escola de 2º grau. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 9, n. 3, 12 1992.

TIROSH, D.; ALMOG, N. Conceptual adjustments in progressing from real to complex numbers. In: **Proceeding of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Paris - France: [s.n.], 1989. v. 3, p. 221–227.

TOSCANO, F. **A fórmula secreta**. 1. ed. Campinas: Unicamp, 2012.

TRALIE, C. J. **Trig Identities and Euler's Formula**. 2013. Notas de aula online. Disponível em: <<http://www.ctralie.com/Teaching/Euler/#trig>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

VIANA, A.; MENDES, R. Ensino Médio: o curso de Matemática ideal. **Revista Cálculo**, v. 4, n. 44, p. 30–31, 2014.

WEBBER, M. C. M.; RICCI, T. F. Inserção de mecânica quântica no ensino médio: uma proposta para professores. **Textos de apoio ao professor de Física**, v. 17, n. 5, 2006.

WEISSTEIN, E. W. **Julia Set**. MathWorld, n.d. Artigo online do Wolfram Web Resource. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/JuliaSet.html>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

WILCZECK, F. **A beautiful question - finding nature's deep design**. 1. ed. New York: Penguin, 2015.

WILEY, D. A. Connecting learning objects to instructional design theory: a definition, a metaphor, and a taxonomy. In: WILEY, D. A. (Ed.). **The Instructional Use of Learning Objects: Online Version**. [s.n.], 2000. Disponível em: <<http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

WILSON, J. **A demonstration of Heron's formula using complex numbers**. University of Georgia, 2013. Notas de aula do curso EMAT 4600/6600. Disponível em: <<http://www.ctralie.com/Teaching/Euler/#trig>>. Acesso em: 19 de março de 2018.

APÊNDICE A – Dimensão Fractal

Um dos conceitos centrais da geometria fractal é o de dimensão. O conceito de dimensão fractal estende a noção de dimensão topológica para essas classes de conjuntos. Grosso modo, uma dimensão fractal indica, de algum modo, quanto espaço um conjunto ocupa na vizinhança de cada um de seus pontos (FALCONER, 2014).

Por volta de 1890, Giuseppe Peano construiu uma curva que se contorcia de tal modo que passava por todos os pontos do plano, dando origem a uma classe de curvas conhecidas como curvas de preenchimento espacial ou Curvas de Peano, Figura A.1. A descoberta das curvas de preenchimento espacial representou um marco no desenvolvimento do conceito de dimensão. Elas confrontavam a noção intuitiva de curvas como objetos unidimensionais, pois preenchiam completamente o plano, um objeto que intuitivamente é tido como bidimensional. Esta contradição durou décadas no começo do século XX e levou à definição do conceito de dimensão por diversos matemáticos diferentes (PEITGEN et al., 1992).

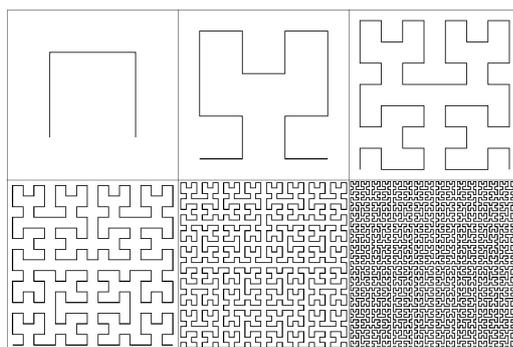


Figura A.1 – 6 iterações da Curva de Hilbert - uma curva de preenchimento espacial

Fonte: Wikimedia Commons, usuário:Brainrain0000, CC BY-SA 3.0

Existe uma variedade muito grande de modos de se definir e calcular a dimensão fractal como, por exemplo, dimensão Hausdorff, método da contagem de caixas, fórmula de Moran, relações de área e perímetro, dimensão da distribuição de massa e dimensão de auto-similaridade. Todos esses métodos, embora definidos de forma diferente, envolvem medir o fractal em várias escalas e observar como estas medidas se comportam quando a escala se torna cada vez menor ou cada vez maior (FRAME et al., 2017).

De todas as variedades de “dimensões fractais” existentes, a dimensão de Hausdorff é a mais antiga e, provavelmente, a mais importante. Tem como vantagem ser definida para qualquer conjunto e ser baseada em medidas matematicamente convenientes de se trabalhar. Por outro lado, tem o inconveniente de ser difícil de se calcular por métodos computacionais. Calcular a dimensão fractal a partir das definições, em particular a dimensão de Hausdorff, pode envolver muitas páginas de complicadas manipulações e estimativas que fornecem esclarecimento pouco intuitivo (FALCONER, 2014).

Neste apêndice apresento somente como calcular a dimensão fractal de auto-similaridade,

cuja aplicação restringe-se aos fractais que têm auto-similaridade estrita, isto é, aqueles fractais cujas partes são reduções por um mesmo fator do objeto original. A escolha por detalhar o cálculo da dimensão fractal de auto-similaridade, embora seja marginal ao tema dos números complexos, reforça um conceito importante para compreensão dos fractais e alinha-se com um entendimento de Benoit Mandelbrot apontado em (MANDELBROT; FRAME, 2002):

É difícil imaginar um curso introdutório sobre fractais que não inclua calcular dimensões de fractais auto-similares. Os cálculos são diretos e requerem uma habilidade dominada sem esforço excessivo. Além disso, essa ideia obtém dados a partir de experimentos, abrindo o caminho para uma variedade de projetos de estudantes.

Cálculo da dimensão fractal de auto-similaridade

A Figura A.2 mostra uma linha que foi ampliada por um fator de ampliação 3. A nova linha contém 3 cópias exatamente iguais à original. Em seguida, o processo de ampliação com fator 3 é aplicado a um quadrado e a um cubo. O novo quadrado contém 9 cópias do quadrado original, enquanto o novo cubo tem 27 cópias do cubo menor.

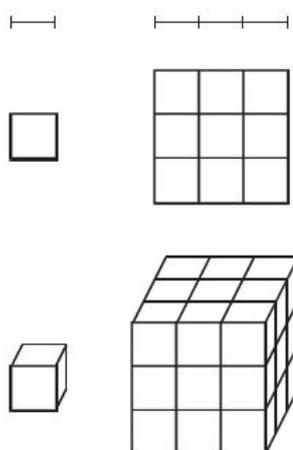


Figura A.2 – Número de cópias menores dentro de um objeto maior

Fonte: FELDMAN, p.164

Se definirmos a dimensão de auto-similaridade (D) como a propriedade que determina qual o número de cópias menores (N) que cabe dentro de um objeto maior ampliado por um fator de ampliação R , obtemos a seguinte relação:

Número de cópias menores = (fator de ampliação)^{dimensão}

ou, em símbolos: $N = R^D$

Decorre daí que para um fractal auto-similar, composto de N cópias dele mesmo, cada uma delas reduzidas por fator de redução r , a dimensão fractal é dada por:

$$D = -\frac{\log(N)}{\log(1/r)} \quad (\text{A.1})$$

Aplicando (A.1) para calcular a dimensão da linha, do quadrado e do cubo da Figura A.2, obtemos os valores esperados para a dimensão topológica desses objetos, isto é:

$$\text{Dimensão da linha} = -\frac{\log(N)}{\log(1/r)} = -\frac{\log(3)}{\log(1/3)} = 1$$

$$\text{Dimensão do quadrado} = -\frac{\log(N)}{\log(1/r)} = -\frac{\log(9)}{\log(1/3)} = 2$$

$$\text{Dimensão do cubo} = -\frac{\log(N)}{\log(1/r)} = -\frac{\log(27)}{\log(1/3)} = 3$$

Os exemplos a seguir mostram a aplicação de (A.1) para calcular a dimensão de três fractais auto-similares: a poeira de Cantor, a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski.

Exemplo A.1. A poeira de Cantor é obtida dividindo-se um segmento em 3 partes congruentes e retirando-se a parte central. Na Figura A.3 observamos que o número de cópias menores dobra de uma iteração para outra e que o fator de redução é $1/3$.



Figura A.3 – Fractal do Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor

Fonte: elaborado pelo autor

Então, a dimensão da Poeira de Cantor é:

$$D = -\frac{\log(N)}{\log(1/r)} = -\frac{\log(2)}{\log(1/3)} \approx 0,6309$$

■

A dimensão entre 0 e 1 mostra que a Poeira de Cantor, em alguns aspectos, comporta-se como uma linha (dimensão 1) e em outros, como um conjunto de pontos desconectados (dimensão 0).

Exemplo A.2. O passo básico para se construir a curva de Koch consiste em: a) dividir o segmento em 3 partes, b) retirar a parte do meio e c) substituir a parte removida pelos dois outros lados de um triângulo equilátero. Na Figura A.4 observamos que o número de cópias menores quadruplica de uma iteração para outra e que o fator de redução é $1/3$.

Então, a dimensão da Curva de Koch é:

$$D = -\frac{\log(N)}{\log(1/r)} = -\frac{\log(4)}{\log(1/3)} \approx 1,2619$$

■

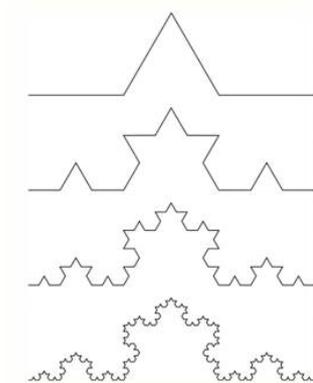


Figura A.4 – Fractal Curva de Koch

Fonte: elaborado pelo autor

A dimensão encontrada, entre 1 e 2, também está dentro do esperado, uma vez que a curva original tem dimensão 1 e à medida que as iterações acontecem ela vai preenchendo o espaço (dimensão 2).

Exemplo A.3. A construção do triângulo de Sierpinski é uma iteração do seguinte passo básico: a) marcar os pontos médios de cada lado de um triângulo equilátero, b) unir os pontos marcados formando um novo triângulo equilátero e c) remover este novo triângulo equilátero. Na Figura A.5, observamos que o número de cópias menores triplica de uma iteração para outra e que o fator de redução é $1/2$.



Figura A.5 – Fractal Triângulo de Sierpinski

Fonte: elaborado pelo autor

Então, a dimensão do triângulo de Sierpinski é:

$$D = -\frac{\log(N)}{\log(1/r)} = -\frac{\log(3)}{\log(1/2)} \approx 1,5850$$

■

O valor da dimensão encontrado também está dentro do esperado (entre 1 e 2), uma vez que o triângulo original tem uma área completamente preenchida (dimensão 2). À medida que as iterações vão ocorrendo, o preenchimento da área do triângulo original vai diminuindo.

APÊNDICE B – Aspectos computacionais dos Conjuntos de Julia e do Conjunto de Mandelbrot

Os computadores foram e são essenciais para o estudo dos fractais dos Conjuntos de Julia e do Conjunto de Mandelbrot. Foi somente quando recursos computacionais mais poderosos se tornaram disponíveis que foi possível realizar imagens razoáveis desses conjuntos. Ao perceberem a complexidade visual desses objetos, houve um ressurgimento do interesse dos matemáticos para explicar a estrutura deles, o que atraiu a atenção de renomados pesquisadores para o estudo das funções complexas (FALCONER, 2013).

Embora faça sentido matematicamente, a definição dos Conjuntos de Julia que envolve, teoricamente, infinitos números complexos e infinitas iterações, tem que ser adaptada para tirar proveito dos recursos finitos dos computadores. Veremos a seguir alguns dos aspectos computacionais envolvidos nos cálculos e produção das imagens dos Conjuntos de Julia e do Conjunto de Mandelbrot.

Resolução finita

A tela dos monitores dos computadores é subdividida em pixels (*pictures elements*) que é a menor porção que pode ser manipulada computacionalmente para produzir imagens. A contagem do número de pixels é, usualmente, conhecida como a resolução do equipamento.

Na prática, consideramos apenas uma pequena parte do plano complexo (a janela na qual a figura está sendo renderizada, geralmente) para realização dos cálculos e exibição do conjunto. Para cada pixel é associado um único ponto z_0 , geralmente no centro do pixel, o que determina o número de condições iniciais a ser testado. Assim, por exemplo, uma janela de 500×500 pixels testará 25000 condições iniciais z_0 .

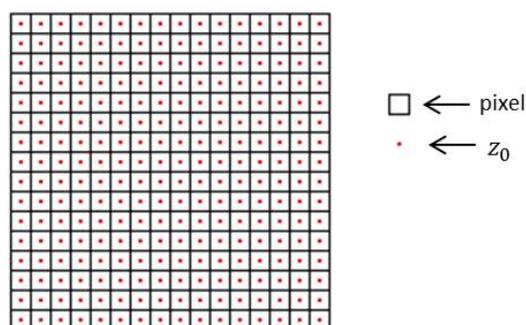


Figura B.1 – Matriz de pixels

Fonte: FRAME et al.

Para exibir as imagens de fractais em escalas menores (teoricamente infinitas) são aplicadas técnicas de *zoom* que focam apenas em uma pequena seção da imagem, aumentando o

seu tamanho para exibi-la com maior detalhamento.

Tempo de processamento e precisão dos cálculos

O critério de escape ($|z_k| > 2$) nos possibilita identificar imediatamente quando uma órbita de z_0 diverge. No entanto, não podemos concluir que uma órbita não vá divergir se ela se mantiver dentro da distância estabelecida pelo critério de escape depois de um número k de iterações, pois podemos estar lidando com um z_0 que necessite de mais iterações para divergir. Isto nos leva à possibilidade de, incorretamente, concluir que um z_0 pertença a um determinado Conjunto de Julia Preenchido.

A Figura B.2 mostra como o número de iterações influencia a determinação dos elementos de um Conjunto de Julia. Observe que quanto maior o número de iterações, menos elementos são exibidos.



Figura B.2 – Fractal do Conjunto de Julia Preenchido $c = -0,5 + 0,5i$ com 2, 5, 10, 50 e 100 iterações, respectivamente

Fonte: elaborado pelo autor

Assim, quanto maior o número de iterações, menor é o número de erros que cometemos. No entanto, um número maior de iterações requer um maior esforço computacional e um maior tempo de processamento para gerar a figura. Na prática, os programas de computadores estabelecem um número máximo de iterações para cada z_0 testado, de acordo com a precisão desejada para a imagem.

Algoritmos para coloração

A maioria dos números complexos testados irá divergir, indicando que não pertencem ao Conjunto de Julia Preenchido. No entanto, a velocidade com que esses números divergem também fornece informação para produzir imagens interessantes quando adotamos algoritmos para colorir esses pontos divergentes.

Existem muitos modos de se colorir as imagens dos fractais dos Conjuntos de Julia, mas a ideia mais básica consiste em se colorir os pontos divergentes com cores diferentes que indicam o número de iterações que foram necessárias para se concluir pela divergência da órbita desse ponto. Um algoritmo simples de coloração que adota essa ideia é proposto no curso de Geometria Fractal da Universidade de Yale (FRAME et al., 2017):

“Se as iterações de z_0 falham em satisfazer o critério de escape, nós assumimos que z_0 pertence ao Conjunto de Julia Preenchido e pintamos de preto o pixel que o contém. Se as iterações de z_0 satisfazem o critério de escape, nós usualmente pintamos o pixel que o contém com uma cor indicando quantas iterações foram necessárias para que ele ficasse a uma distância maior que 2 da origem. Por exemplo:

Pinte o pixel que contém z_0 de branco se z_1 está a uma distância maior que 2 da origem.

Pinte esse pixel variando de rosa claro a rosa escuro se forem necessárias mais algumas iterações para que a distância seja maior que 2 a partir da origem.

Pinte esse pixel de cores variando de laranja a amarelo se forem necessárias ainda mais iterações para que a distância seja maior que 2 da origem.

Pinte esse pixel de cores variando de verde a azul se, novamente, forem necessárias ainda mais iterações para que a distância seja maior que 2 da origem. E, assim, por diante.”

O resultado da aplicação desse algoritmo de coloração é ilustrado na Figura B.3 que mostra o fractal produzido e algumas ampliações de sua borda.

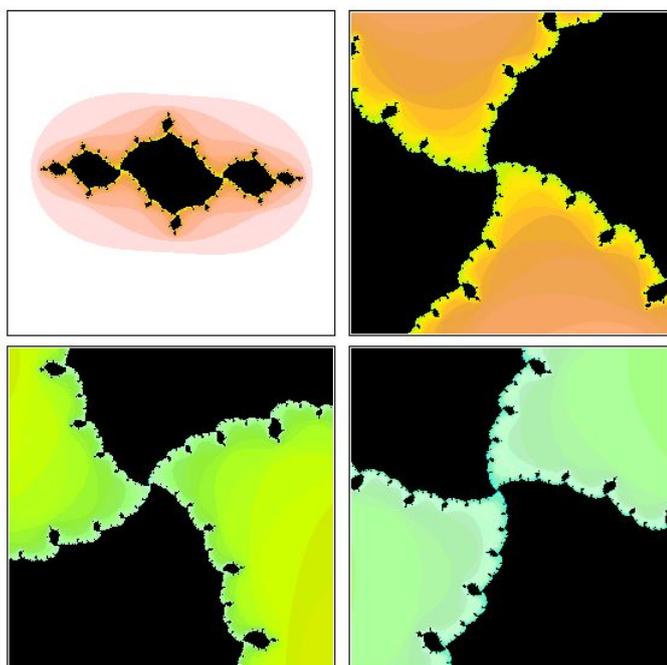


Figura B.3 – Fractal do Conjunto de Julia Preenchido $c = -1 + 0,16i$, colorido de acordo com o número de iterações necessárias para a velocidade de divergência

Fonte: FRAME et al.