UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

DANIEL ALARCON

Desenvolvimento do raciocínio lógico: uma abordagem pelo estudo de Grupos e pela resolução de problemas de olimpíadas de Matemática

Campinas

2018

Daniel Alarcon

Desenvolvimento do raciocínio lógico: uma abordagem pelo estudo de Grupos e pela resolução de problemas de olimpíadas de Matemática

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Claudina Izepe Rodrigues

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Daniel Alarcon e orientada pela Profa. Dra. Claudina Izepe Rodrigues.

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

AL12d

Alarcon, Daniel, 1992-
Desenvolvimento do raciocínio lógico : uma abordagem pelo estudo de grupos e pela resolução de problemas de olimpíadas de matemática / Daniel Alarcon. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Claudina Izepe Rodrigues.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Raciocínio. 2. Matemática - Competições. 3. Aprendizagem baseada em problemas. 4. Teoria dos grupos. 5. Sequências didáticas. 6. Educação matemática. I. Rodrigues, Claudina Izepe, 1953-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Development of the logical reasoning : an approach by the study of groups and the solution of problems from math olympiads
Palavras-chave em inglês:
Reasoning
Mathematics - Competitions
Problem-based learning
Groups theory
Didactic sequences
Mathematics education
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Claudina Izepe Rodrigues [Orientador]
Antônio Carlos do Patrocínio
Emília de Mendonça Rosa Marques
Data de defesa: 22-02-2018
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado profissional defendida em 22 de fevereiro de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Prof(a). Dr(a). ANTONIO CARLOS DO PATROCINIO

Prof(a). Dr(a). EMÍLIA DE MENDONÇA ROSA MARQUES

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

A Deus que me protege todos os dias.
Aos meus pais, Reginaldo e Silene, razão da minha existência.
À Patrícia Cristina Vitor, meu amor!

Agradecimentos

A Deus e à Maria Desatadora dos Nós, que me iluminam, protegem e abençoam todos os dias da minha vida.

À Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) por aderir ao PROFMAT e também por proporcionar um ensino de excelência.

À CAPES pelo apoio financeiro durante o período do mestrado.

Àos professores do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) que contribuíram para minha formação desde a graduação.

À professora Claudina Izepe Rodrigues que continuou a minha orientação e contribuiu muito durante todo o processo sempre com bastante atenção, dedicação, profissionalismo e paciência. Agradeço por todos os ensinamentos.

Ao professor Antônio Carlos do Patrocínio que aceitou me orientar, compartilhou muitas experiências de vida e contribuiu para minha formação.

Aos professores Antônio Carlos do Patrocínio e Emília que contribuíram com seus ensinamentos tanto na Defesa quanto na pós graduação. Obrigado por tudo.

A todos os meus familiares que me apoiaram durante esta jornada, especialmente meu pai, Reginaldo Afonso Alarcon, e minha mãe, Maria Silene da Silva Alarcon, que sempre me apoiaram em tudo na vida com bastante carinho e amor.

À Patrícia Cristina Vitor por me ajudar e por estar sempre ao meu lado em todos os momentos com muito amor, carinho e paciência.

Aos meus amigos, alunos e pessoas próximas que me apoiaram de inúmeras formas, meu muito obrigado.

A todos os outros que fizeram parte da minha vida e que me ajudaram a me tornar uma pessoa melhor.

"A filosofia está escrita nesse grandioso livro que se mantém continuamente aberto perante os nossos olhos (quero dizer, o Universo), mas não se pode entendê-lo se primeiramente não se cuida de entender a língua e conhecer os caracteres em que está escrito. Está escrito em linguagem matemática, e os caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é impossível entender humanamente alguma palavra; sem estes meios é dar volta em vão num obscuro labirinto."

(Galileu Galilei, O Ensaiador)

Resumo

Este estudo se propôs a responder o seguinte problema: “Como auxiliar os alunos a desenvolver o raciocínio lógico em Matemática?”. A pesquisa envolveu alunos das redes pública e particular de ensino e adotou como estratégias a “aprendizagem baseada em problemas” e a aplicação de sequências didáticas de temática definida, no caso, o recorte do estudo de Grupos, propriedades e operações. Foram aplicadas atividades na Educação Básica relacionadas ao desenvolvimento do raciocínio lógico, às relações entre a língua materna e a linguagem Matemática, às resoluções de problemas olímpicos e ao estudo de Grupos. Tais atividades permitiram responder à problemática levantada e também auxiliaram a compreender melhor o processo de ensino e aprendizagem de Matemática com base no contexto escolar, especialmente o da escola pública.

Palavras-chave: Raciocínio lógico. Olimpíadas de Matemática. Aprendizagem baseada em problemas. Grupos. Sequências didáticas.

Abstract

This research intended to study the following problem: “How can we help the students develop the logic reasoning in math?”. This study involved students from public and private schools and adopted as a learning strategy the “problem-based learning” and the application of teaching sequences with a specific theme, in this case, the study of groups, properties and math operations. Activities in the Basic Education were applied about the development of logical reasoning, relations between the mother language and the mathematics language, problem solving and study of groups. These activities helped us respond the original problem and have a better understanding of the teaching and learning process in mathematics based on the school context, especially the public one.

Keywords: Logical reasoning. Mathematical Olympiads. Problem-based learning. Groups. Didactic sequences.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Torre de Hanói 32
Figura 2 – Torre de Hanói - Passos para resolução com 5 discos 33
Figura 3 – Jogo das Cartas 38
Figura 4 – Movimentos dos cavalos no tabuleiro 57
Figura 5 – Movimentos dos cavalos 57
Figura 6 – Problema dos Gafanhotos 76
Figura 7 – Divisão do plano com círculos 77
Figura 8 – Divisão do plano em triângulos 82
Figura 9 – Atividade 1 - Como estruturar o raciocínio lógico 85
Figura 10 – Problema 4.1: Cubos e cubos - OBMEP 86
Figura 11 – Problema 4.2: 3 pontos colineares - OBMEP 86
Figura 12 – Uso do powerpoint para aplicação da atividade 3 92
Figura 13 – Processo de instalação do Eclipsecrossword - Atividade 3 94
Figura 14 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 1 102
Figura 15 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 2 103
Figura 16 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 4 104
Figura 17 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 5 105
Figura 18 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 6 106
Figura 19 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 7 106
Figura 20 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 8 107
Figura 21 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 8 108
Figura 22 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 8 108
Figura 23 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 9 - Grupo 3 109
Figura 24 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 9 - Grupo 1 110
Figura 25 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 10 110
Figura 26 – Atividade 2 - Resenha - leitura dos textos 113
Figura 27 – Atividade 3 - Grupos e suas representações - Conjuntos 114
Figura 28 – Atividade 3 - Grupos e suas representações - Elemento neutro 115
Figura 29 – Atividade 3 - Grupos e suas representações - Elemento neutro 116
Figura 30 – Atividade 3 - Grupos e suas representações - Exemplos de Grupos . . . 117
Figura 31 – Gráfico - Atividade 3 - Pergunta 2 119
Figura 32 – Gráfico - Atividade 3 - Pergunta 4 120
Figura 33 – Gráfico - Atividade 3 - Pergunta 6 121
Figura 34 – Gráfico - Atividade 3 - Pergunta 7 122
Figura 35 – Gráfico - Atividade 3 - Pergunta 8 123
Figura 36 – Gráfico - Atividade 3 - Pergunta 9 123

Figura 37 – Atividade 4 - Preenchimento do questionário 126
Figura 38 – Atividade 4 - Workshop - apresentação 128
Figura 39 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 1 129
Figura 40 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 2 129
Figura 41 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 3 130
Figura 42 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 4 131
Figura 43 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 6 132
Figura 44 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 7 133
Figura 45 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 9 135
Figura 46 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 11 136
Figura 47 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 12 137
Figura 48 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 13 138
Figura 49 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 14 139
Figura 50 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 15 140
Figura 51 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 16 141
Figura 52 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 17 141
Figura 53 – Gráfico - Atividade 4 - Perguntas 19, 20 e 21 143
Figura 54 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 22 144
Figura 55 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 24 146
Figura 56 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 25 147
Figura 57 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 26 147
Figura 58 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 27 150
Figura 59 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 28 151
Figura 60 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 29 152
Figura 61 – Atividade 5 - Aula inaugural 155
Figura 62 – Premiações olímpicas (2017): Canguru, RioPlatense (OMR) e OPM . . 157
Figura 63 – Gráfico - Atividade 5 - Pergunta 3 158
Figura 64 – Gráfico - Atividade 5 - Pergunta 6 159
Figura 65 – Gráfico - Atividade 5 - Pergunta 7 160

Lista de tabelas

Tabela 1 – Movimentos da Torre de Hanói 33
Tabela 2 – Movimentos da Torre de Hanói com 4 e 5 discos 34
Tabela 3 – Divisão do plano em regiões a partir de triângulos 81
Tabela 4 – Divisão do plano em regiões a partir de triângulos 83
Tabela 5 – Atividade 1 - Pergunta 9 - Grupo 2 109
Tabela 6 – Atividade 3 - Pergunta 7 121
Tabela 7 – Atividade 4 - Número de alunos entrevistados 125
Tabela 8 – Atividade 4 - Pergunta 6 132
Tabela 9 – Atividade 4 - Pergunta 8 134
Tabela 10 – Atividade 4 - Pergunta 10 136
Tabela 11 – Atividade 4 - Pergunta 12 137
Tabela 12 – Atividade 4 - Pergunta 15 139
Tabela 13 – Atividade 4 - Pergunta 26 148
Tabela 14 – Atividade 4 - Perguntas 27 150
Tabela 15 – Planejamento Olímpico - Equipe A 165
Tabela 16 – Planejamento Olímpico - Equipe B 166
Tabela 17 – Planejamento Olímpico - Equipe C 167

Sumário

	Introdução	**15**
1	**CONCEITOS TEÓRICOS**	**20**
1.1	**Conjuntos**	**20**
1.1.1	Descrição de um conjunto	21
1.1.2	Relação de Inclusão	22
1.1.3	Operações entre conjuntos	25
1.1.4	Axiomas de Peano e Indução Matemática	27
1.1.5	Adição e multiplicação nos naturais	35
1.1.6	Relação de ordem nos naturais	36
1.2	**Conceitos de divisibilidade**	**37**
2	**GRUPOS**	**40**
2.1	**Grupos**	**40**
2.2	**Subgrupos**	**46**
2.3	**Isomorfismos e Homomorfismos**	**50**
3	**APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS**	**54**
3.1	**Noção de competência**	**54**
3.2	**Compreensão de situações-problema**	**56**
3.2.1	Aprendizagem Baseada em Problemas	56
3.2.2	Estrutura de uma situação-problema	59
3.3	**Problemas olímpicos do Ensino Básico**	**60**
3.3.1	Passo 1: Compreensão do Problema	60
3.3.1.1	Importância da Analogia	62
3.3.1.2	Identificação da Condicionante	63
3.3.2	Passo 2: Estabelecimento do plano	63
3.3.2.1	Escolha do Problema Correlato	63
3.3.2.2	Identificação da Incógnita	66
3.3.2.3	Reconstrução de um problema	69
3.3.2.4	Definição dos termos	70
3.3.2.5	Demonstrações por absurdo	73
3.3.3	Passo 3: Execução do plano	74
3.3.3.1	Como iniciar um problema	75
3.3.3.2	Condicionante	75
3.3.3.3	Elementos auxiliares	77

3.3.3.4 Intuição ou demonstração . . . 79
3.3.4 Passo 4: Retrospecto . . . 79
3.3.4.1 Generalizações . . . 80

4 ATIVIDADES NO ENSINO BÁSICO . . . 84
4.1 Atividade 1 - Como estruturar o raciocínio lógico . . . 84
4.2 Atividade 2 - Artigos de Matemática . . . 88
4.3 Atividade 3 - Grupos - Jogo das Palavras Cruzadas . . . 90
4.4 Atividade 4 - Questionário avaliativo da aprendizagem . . . 96
4.5 Atividade 5 - Grupo Olímpico de Matemática . . . 98

5 RESULTADOS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS . . . 100
5.1 Resultados da Atividade 1 . . . 100
5.1.1 Questionário da Atividade 1 . . . 101
5.2 Resultados da Atividade 2 . . . 111
5.3 Resultados da Atividade 3 . . . 114
5.3.1 Questionário da Atividade 3 . . . 118
5.4 Resultados da Atividade 4 . . . 124
5.4.1 Workshop - Atividade 4 . . . 127
5.4.2 Questionário da Atividade 4 . . . 128
5.5 Resultados da Atividade 5 . . . 154
5.5.1 Questionário da Atividade 5 . . . 157

Considerações Finais . . . 161

REFERÊNCIAS . . . 162

A – JOGO - ATIVIDADE 4 . . . 164

B – PLANEJAMENTO - EQUIPE A . . . 165

C – PLANEJAMENTO - EQUIPE B . . . 166

D – PLANEJAMENTO - EQUIPE C . . . 167

Introdução

O primeiro capítulo apresenta conceitos que darão suporte ao desenvolvimento teórico e à aplicação das atividades. A apresentação se constrói, inicialmente, através da álgebra de conjuntos e suas operações, seguindo pela relação entre conjuntos e proposições lógicas e pelo comentário de alguns métodos de demonstração. Seu propósito é reunir elementos que aparecem nos problemas olímpicos de Matemática. Há também a referência aos axiomas de Peano, à construção dos números naturais e suas operações e ao Princípio da Indução Finita, que é ilustrado através de alguns exemplos, como a Torre de Hanói. O princípio, embora não seja estudado na educação básica, pode ser apresentado em grupos olímpicos afim de contextualizar a construção dos números naturais. O capítulo se encerra apresentando alguns conceitos de divisibilidade e o teorema da divisão euclidiana, pois são muitos os problemas olímpicos nos quais ele está envolvido.

O segundo capítulo aproveita a apresentação dos conjuntos numéricos e da relação de pertinência e operações entre conjuntos para oferecer um recorte do estudo de Grupos e de suas propriedades. Estabelece-se assim que o objetivo da dissertação não é fazer um estudo sobre Grupos, mas apresentar um recorte de uma parte estudada na graduação e compreender como alguns conceitos teóricos podem ser adaptados ao ensino básico a fim de colaborar com o estudante na construção de seu raciocínio lógico. O capítulo se inicia com a definição de operação interna entre conjuntos e, em seguida, apresenta a definição de Grupo junto de exemplos numéricos, como permutações e classes residuais. Aqui, o propósito não é introduzir o estudo de Grupos na educação básica, mas fomentar a discussão sobre os motivos pelos quais temas que são tratados de maneira tão relevante no ensino superior não são nem sequer comentados na educação básica. O objetivo, de fato, é propor estratégias de ensino através das quais o estudante, já na educação básica, tenha um conhecimento (mesmo que simples) sobre o conceito, saiba fazer alguns testes (verificação de hipóteses) e estruture o raciocínio lógico adequadamente. Esta necessidade acentua-se, principalmente, quando alunos iniciam a graduação em ciências extas e sentem que a Matemática estudada na educação básica não é suficiente para acompanhar os estudos.

São apresentadas também várias operações matemáticas em que são testadas a associatividade, comutatividade, elemento neutro e inverso e distributividade. Muitas dessas propriedades são estudadas no ensino básico sem contextualização ou aprofundamento. O recorte de Grupos realizado serve, portanto, como material bibliográfico que auxiliará o leitor a propor atividades ou metodologias ativas de aprendizagem que, de fato, contribuam para o desenvolvimento do aluno em Matemática.

O terceiro capítulo se preocupa em desenvolver o conceito de competência e destacar a principal diferença entre um exercício e um problema em Matemática. Além disso, apresenta-se a noção de situações-problema, o que se espera dos alunos ao resolvê-las, quais os objetivos dos atores (professores e alunos) ao se depararem com um problema, entre outros.

Nota-se, com frequência, que os alunos questionam os professores na educação básica sobre a importância de estudar determinados conceitos teóricos e sobre sua aplicação na vida prática. Muitas dessas perguntas, embora sejam relevantes, são difíceis de serem respondidas e ocorrem, pois, justamente no momento da aprendizagem, o problema é visto como consequência, e não como um fator de motivação para a curiosidade sobre o estudo de determinado assunto.

O capítulo aborda, também, a aprendizagem baseada em problemas, considerando sua estrutura, seus objetivos e suas referências. Em seguida, é apresentada uma seção com problemas de olimpíadas de Matemática que podem ser trabalhados com os alunos como forma de motivá-los a estudar.

Há diversas formas de possibilitar que o aluno desenvolva o raciocínio lógico. A aprendizagem baseada em problemas é uma delas, pois o aluno, ao atribuir significado para o que está sendo estudado, passa a compreender o assunto de outra forma - com mais proximidade.

A seção sobre problemas olímpicos divide-se em quatro subseções e conta como referencial teórico a obra “A arte de resolver problemas” de Polya (2006). A primeira aborda a compreensão do problema e busca auxiliar os alunos a identificar a incógnita, dados e condicionante.

A segunda subseção estabelece um plano de ação. Os exercícios de Matemática utilizados na educação básica, muitas vezes, buscam a simples memorização de conceitos e se baseiam na aprendizagem por repetição para a realização de provas ou exames vestibulares.

Na terceira subseção, é apresentada uma série de problemas olímpicos que podem ser propostos aos alunos. Não se busca dizer que listas com exercícios operatórios sejam desnecessários. Eles são necessários até porque carregam a objetividade e a clareza. Em muitos momentos da aprendizagem é importante que os estudantes saibam calcular, usar teoremas ou propriedades corretamente, mas também é importante que esse conhecimento não seja entendido como fragmentado, isto é, que sejam também apresentadas aos estudantes situações significativas de aprendizagem em que precisem mobilizar conhecimentos e relacioná-los a fim de resolver problemas maiores.

A última subseção do capítulo apresenta o retrospecto e destaca a importância da verificação das resoluções, passo importante, dado que é usual que os alunos não confiram os passos de suas resoluções, pois se concentram não em compreender o processo utilizado, mas em chegar na resposta correta. Também são apresentados alguns problemas recursivos que englobam o conceito de generalizações.

O capítulo quatro apresenta cinco atividades aplicadas em duas escolas na cidade de Campinas (SP): uma da rede estadual e outra da rede particular. Nesta as atividades foram aplicadas com alunos que faziam parte do grupo olímpico de Matemática, naquela com alunos do ensino fundamental e médio (incluindo os alunos da Educação de Jovens e Adultos - EJA).

O objetivo do capíulo é compreender como conceitos teóricos podem ser adaptados ao ensino básico sem perder a objetividade e a clareza na exposição, utilizando uma linguagem que seja acessível para o estudante do ensino fundamental e médio. É importante mencionar que a linguagem matemática (simbólica) usada no ensino superior não deve ser utilizada na educação básica, pois o estudante ainda está desenvolvendo esta capacidade de argumentação, mas deve sim ser adaptada até se tornar compreensível para os alunos.

A primeira atividade foi aplicada tanto com os alunos da escola pública quanto os da particular. Seu objetivo é reunir elementos para saber se os alunos sabem estruturar o raciocínio lógico e relacionar problemas (ou exercícios) entre si. Observou-se por meio dela que tanto os alunos da rede pública quanto da particular apresentaram dificuldade em seguir cada um dos passos realizados. Os alunos do grupo olímpico tiveram mais facilidade por conta das aulas olímpicas em que problemas semelhantes já tinham sido trabalhados, enquanto os alunos da escola pública tiveram dificuldades. Notou-se que eles não conheciam os conceitos de problema, exercício e os métodos para sua resolução.

A segunda atividade foi elaborada a partir da constatação de que os alunos leem pouco na educação básica e também produzem pouco. Foram disponibilizados vários artigos de Matemática e os alunos deveriam produzir uma resenha (texto) comentando sobre. Os textos apresentados aos alunos abordavam as relações entre língua materna e linguagem matemática e as articulações entre as diferentes disciplinas (componentes curriculares). Conclui-se, por meio da atividade, que os alunos leem pouco, possuem dificuldades de interpretação e, por isso, apresentam dificuldade em Matemática. Além disso, constatou-se que os alunos compreendem as disciplinas de maneira fragmentada, atribuindo à Matemática tudo o que tem número ou conta. Ao fim, os alunos compreenderam que é possível solucionar um problema escrevendo-o de forma literal e que a leitura é essencial na interpretação de problemas matemáticos. Como resultado da atividade, um dos grupos da Educação de Jovens e Adultos conseguiu se mobilizar e discutir ativamente sobre o assunto, compreendendo as relações que podem ser estabelecidas entre a Matemática e outras áreas do conhecimento humano, socialmente e historicamente produzido.

A terceira atividade reúne alguns dos conceitos teóricos apresentados no capítulo dois e apresenta como eles podem ser adaptados e aplicados com alunos no ensino fundamental ou médio. Sua proposta, a partir do recorte feito, é explorar com os estudantes algumas propriedades estudadas em Grupos e dar significado a alguns assuntos que são estudados de maneira muito superficial na educação básica. Ela foi aplicada somente com os alunos das olimpíadas de Matemática.

Ela traz um passo-a-passo sobre como foi estruturada (assim como as demais) para que o leitor possa aplicá-la em outras escolas. O método de avaliação da aprendizagem foi um jogo de palavras cruzadas realizado com um software gratuito. Além disso, os alunos responderam um questionário e comentaram sobre o que acharam da atividade e se ela contribuiu na formação deles. Verificou-se que os estudantes gostaram da atividade, aprenderam e revisaram alguns termos que já tinham sido aprendidos anteriormente, mas sem a ênfase destacada. No questionário, alunos assinalaram que o jogo das palavras cruzadas serviu como uma síntese da aula e que conteúdos como esse contribuem para que o estudante desenvolva o raciocínio lógico, aprenda técnicas ou métodos de demonstração e relacione os conceitos aprendidos em Matemática.

A quarta atividade compreendeu dois momentos: a realização de um workshop e a aplicação de um questionário.

Por meio do questionário, procurou-se coletar informações gerais para estabelecer um diagnóstico dos fatores que dificultam a aprendizagem da Matemática. Participaram da atividade 266 alunos que responderam questões que perguntavam sobre sexo, idade, etnia ou raça, média salarial, trabalho, apoio familiar, estudo e aprendizagem de Matemática.

Sabe-se que algumas dessas questões não determinam se os alunos aprenderão ou não Matemática, mas elas auxiliam a compreender melhor a escola, os alunos e como alguns fatores externos podem interferir na aprendizagem dos alunos.

A partir do questionário, foi constatado que os estudantes disponibilizam poucas horas de estudo por semana, principalmente em Matemática. Isto sugere ao professor ou ao gestor que repense as estratégias de ensino. Sobre o apoio familiar, os alunos declararam que os pais acompanham pouco sua aprendizagem, no entanto, a maioria desses pais estudou apenas até o ensino médio, o que dificulta uma relação de suporte aos filhos. E com relação à aprendizagem de Matemática, foi constatado que o ensino da Matemática é muito pautado na memorização de fórmulas e os estudantes são pouco questionados sobre diversos pontos levantados ao longo desta dissertação.

A quinta atividade apresenta o projeto do Grupo Olímpico (Olimpíadas de Matemática) e os eventos dos quais os alunos participaram em 2017. O projeto teve início em 2016 e contou com a participação de alunos desde o sexto ano do ensino fundamental até a terceira série do ensino médio.

Comparativamente, verificou-se que os alunos que fazem parte dos grupos olímpicos apresentam maior destreza na escrita matemática e conseguem compreender melhor a importância de estruturar e pensar logicamente em relação aos demais alunos. Isso acontece por conta do trabalho que é realizado e porque, quando o aluno se depara com problemas mais desafiadores, ele enxerga que somente o conhecimento pontual que é desenvolvido em sala de aula não é suficiente para resolver problemas complexos.

Os alunos participantes do grupo olímpico (todos da escola particular) se envolveram tanto na primeira quanto na terceira atividade. A quinta atividade destaca alguns resultados importantes que foram conquistados com o grupo de olimpíadas de Matemática em 2017. Na seção de anexos, há o planejamento anual que pode ser seguido pelos professores para desenvolver atividades como essas em outras escolas.

Muitas são as dificuldades de aprendizagem de Matemática que são reveladas e que fomentam discussões sobre possíveis soluções que podem ser aplicadas para reverter. Contudo, pouco se conhece sobre o contexto escolar e quais são as reais necessidades dos alunos ou da escola pública.

1 Conceitos teóricos

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos iniciais de Álgebra que servirão de base para o estudo dos conceitos teóricos de Grupos (Capítulo 2 - Grupos, página 40) e para a resolução de problemas de Olimpíadas de Matemática (Capítulo 3 - Aprendizagem baseada em problemas, página 54).

1.1 Conjuntos

As noções de conjunto e pertinência segundo Dean (1974, p. 4) serão aceitas como noções primitivas. Um conjunto é formado por objetos, nomes, letras, números, substantivos, etc.

Exemplo 1.1. *Eis alguns exemplos de conjuntos:*

(i) Conjunto das vogais;

(ii) Conjunto dos algarismos romanos;

(iii) Conjunto dos números pares positivos;

(iv) Conjunto dos planetas do sistema solar;

(v) Conjunto dos números primos positivos;

(vi) Conjunto dos naipes de um baralho;

Conforme Iezzi (1977, p. 19), cada membro ou objeto que entra na formação de um conjunto é chamado de elemento. No exemplo 1.1, cada um dos conjuntos citados têm os seguintes elementos:

(i) a, e, i, o, u

(ii) I, V, X, L, C, D, M

(iii) $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots$

(iv) $Mercúrio,\ Vênus,\ Terra,\ Marte,\ \dots$

(v) $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$

(vi) $paus,\ ouros,\ copas,\ espada$

Observação 1.1. *É usual ao representar conjuntos listar alguns de seus elementos e segui-los com três pontos ($\dots$) para indicar que o conjunto pode ter mais elementos que não tivemos o cuidado de escrever ou para indicar a infinitude (DEAN, 1974, p. 5). A fim de simplificar a escrita, adota-se como notação de um conjunto uma letra maiúscula A, B, C, D, $\dots$ e de um elemento uma letra minúscula a, b, c, d, $\dots$.*

Dado um conjunto A e um objeto qualquer a, a única pergunta cabível, segundo Lima (2013, p. 3) é se a é ou não um elemento do conjunto A. A pertinência é denotada pelo símbolo "$\in$" e a escrita simbólica usual é

$$a \in A \tag{1.1}$$

que significa qualquer uma das sentenças a seguir:

(i) O elemento a é um membro do conjunto A;

(ii) O elemento a pertence ao conjunto A;

(iii) a está em A;

Para indicar que a não é elemento do conjunto A escrevemos $a \notin A$, como nos exemplos a seguir:

Exemplo 1.2. *Seja A o conjunto dos meses que têm 31 dias, isto é,*

$$A = \{\textit{janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro}\}.$$

Neste exemplo, temos que o elemento janeiro pertence ao conjunto A e escrevemos janeiro $\in A$. Neste caso, fevereiro $\notin A$.

Exemplo 1.3. *Seja B o conjunto dos números ímpares positivos, isto é, $B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. Usando a notação de pertinência, temos que $5 \in B$, mas $2 \notin B$.*

1.1.1 Descrição de um conjunto

Conforme Dean (1974, p. 4), um conjunto pode ser concebido como uma entidade independente que é uma coleção de seus elementos. No exemplo 1.2, *agosto* é um elemento do conjunto A, visto que está entre os meses do ano que possuem 31 dias.

Um conjunto pode ser representado enumerando seus elementos, citando uma propriedade, uma condição ou característica comum aos seus elementos. Quando pretendemos descrever um conjunto A por uma propriedade (ou condição) comum aos seus elementos, escrevemos:

$$A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } P\} \tag{1.2}$$

Exemplo 1.4. *$\{x \mid x$ é estado da região sul do Brasil$\}$ é uma maneira de indicar o conjunto $\{$Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul$\}$.*

Exemplo 1.5. *$\{x \mid x$ é divisor inteiro de $3\}$ é uma maneira de indicar o conjunto $\{1, -1, 3, -3\}$.*

Um conjunto pode ser finito ou infinito e denota-se por $\mid A \mid$ o número de elementos do conjunto A. No exemplo 1.2 temos que $\mid A \mid = 7$, pois o conjunto possui sete elementos.

Definição 1.1 (**Conjunto vazio**). *O conjunto vazio, denotado por $\varnothing$, é o conjunto cuja propriedade que o define é logicamente falsa, ou seja, uma contradição.*

Exemplo 1.6. *A contradição posta na aqui, $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$, é um exemplo de conjunto vazio.*

Exemplo 1.7. *O conjunto $\{x \mid x > 0 \text{ e } x < 0\}$ é vazio.*

Definição 1.2 (**Conjunto unitário**). *Dado um objeto x, o conjunto unitário $\{x\}$ é aquele que tem como único elemento o objeto x.*

Exemplo 1.8. *O conjunto dos números primos positivos que são pares é unitário e denotado por $\{2\}$.*

Exemplo 1.9. *O conjunto dos estados brasileiros que fazem fronteira com o Uruguai é unitário e denotado por {Rio Grande do Sul}.*

Definição 1.3 (**Conjunto universo**). *Quando vamos desenvolver um assunto em Matemática, admitimos a existência de um conjunto U ao qual pertencem todos os elementos utilizados no desenvolvimento deste assunto. Esse conjunto U recebe o nome de conjunto universo.*

Observação 1.2. *Conforme Iezzi (1977, p. 23), se procuramos soluções reais de uma equação, nosso conjunto universo é $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais). O mesmo é válido para outros conjuntos numéricos como $\mathbb{N}$ (naturais), $\mathbb{Z}$ (inteiros), $\mathbb{Q}$ (racionais), $\mathbb{I}$ (irracionais) e $\mathbb{C}$ (complexos).*

1.1.2 Relação de Inclusão

Definição 1.4 (**Subconjunto**). *Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é um subconjunto de B, que A está contido em B, ou que A é parte de B. Para indicar este fato, usa-se a notação $A \subset B$.*

Exemplo 1.10. *$\{a, b\}$ é subconjunto do conjunto $\{a, b, c, d\}$ e escrevemos $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$.*

Exemplo 1.11. *O conjunto P formado por todos os números primos positivos é subconjunto do conjunto dos números naturais, em que $P = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$, assim $P \subset \mathbb{N}$.*

Exemplo 1.12. *Sejam A o conjunto de todos os números inteiros múltiplos de 6 e $\mathbb{Z}$ o conjunto de todos os inteiros. Temos que A é subconjunto de $\mathbb{Z}$ e escreve-se $A \subset \mathbb{Z}$.*

Conforme Lima (2013, p. 5), a relação $A \subset B$ é chamada de relação de inclusão. Escreve-se $A \not\subset B$ quando A não for subconjunto de B. Isto significa que nem todo elemento de A pertence a B ou existe pelo menos um elemento em A que não está em B.

Exemplo 1.13. *$\{a, b, c\}$ não é subconjunto do conjunto $\{b, c, d, e\}$ e escrevemos $\{a, b, c\} \not\subset \{b, c, d, e\}$.*

Exemplo 1.14. *Sejam A o conjunto dos números pares e B o conjunto dos múltiplos de 3. Como $2 \in A$, mas $2 \notin B$, segue que $A \not\subset B$. Também temos que $3 \in B$, mas $3 \notin A$, ou seja, $B \not\subset A$.*

A relação de inclusão entre conjuntos está relacionada com a implicação lógica. Conforme Lima (2013, p. 7), sejam P e Q propriedades aplicáveis a elementos de um conjunto U. Essas propriedades que definem o conjunto A, formado pelos elementos de U que têm P; e B formado pelos elementos de U que têm a propriedade Q, se todos os elementos que possuem a propriedade P também têm a propriedade Q, dizemos que a propriedade P implica a propriedade Q e escrevemos $P \Rightarrow Q$. Isto é equivalente a dizer que todo elemento que pertence a A também pertence a B, isto é, que $A \subset B$.

Observação 1.3. *Mostrar que um conjunto está contido em outro equivale a mostrar que a propriedade que define o primeiro implica na propriedade que define o segundo ($P \Rightarrow Q$).*

Exemplo 1.15. *Sejam A e B os conjuntos definidos a seguir:*

(i) $A = \{x \mid x$ *é uma pessoa que nasceu no Estado de São Paulo*$\}$;

(ii) $B = \{x \mid x$ *é uma pessoa que nasceu no Brasil*$\}$.

Todos os elementos do conjunto A têm a propriedade P de terem nascido no Estado de São Paulo. Analogamente, todos de B têm a propriedade Q de terem nascido no Brasil. Como todos os elementos que possuem a propriedade P também têm a propriedade Q, escrevemos que $P \Rightarrow Q$ e, além disto, $A \subset B$.

Definição 1.5 (Conjuntos iguais). *Um conjunto A é igual a um conjunto B quando ambos possuem os mesmos elementos, ou seja, quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A. Usando uma notação simbólica, tem-se:*

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A \tag{1.3}$$

ou seja, A está contido em B e B está contido em A.

Observação 1.4. *Quando são verdadeiras ambas as implicações $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$, dizemos "P se, somente se, Q", ou "P é equivalente a Q" ou, ainda, "P é necessário e suficiente para Q". Neste caso escreve-se*

$$P \Leftrightarrow Q \tag{1.4}$$

Em linguagem de conjuntos, isto significa que o conjunto dos elementos que têm a propriedade P é igual ao conjunto dos elementos que têm a propriedade Q.

Exemplo 1.16. *Dados os conjuntos A e B definidos por $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \ x \text{ é divisor de } 30\}$ e $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, temos que $A \subset B$ e $B \subset A$. Pela definição 1.5, segue que $A = B$.*

Observação 1.5. *Sejam A e B conjuntos. Quando A não é igual a B, denotamos $A \neq B$ e isto ocorre quando há pelo menos um elemento pertencente a um dos conjuntos e que não pertence ao outro. Por exemplo: $\{a, b, c\} \neq \{a, b, c, d\}$.*

Observação 1.6. *Na definição 1.5 não tem relevância a ordem dos elementos do conjunto, ou seja,*

$$\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\} = \{b, a, c, d\} \tag{1.5}$$

Observação 1.7. *Os Diagramas de Venn são formas de representação de conjuntos em que os elementos são representados por pontos interiores de uma linha fechada. Veja alguns exemplos nas definições 1.6, 1.7 e 1.8.*

Propriedade 1.1. *Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Valem que:*

(i) $\varnothing \subset A$

(ii) $A \subset A$ *(reflexiva)*

(iii) $A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$ *(antissimétrica)*

(iv) $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ *(transitiva)*

Demonstração. Seguem as demonstrações da propriedade 1.1 da relação de inclusão:

(i) Hipoteticamente, suponha por absurdo que $\varnothing \not\subset A$. Portanto, existe $x \in \varnothing$ tal que $x \notin A$, o que é um absurdo, pois $\varnothing$ é o conjunto vazio.

(ii) Seja A um conjunto. Para todo $x \in A$, a implicação $x \in A \Rightarrow x \in A$ é verdadeira. Então, $A \subset A$;

(iii) Sejam A e B conjuntos. Pela definição 1.5, dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A. Seja $x \in A$. Como $A \subset B$, segue que $x \in B$. Reciprocamente, como $B \subset A$ e $x \in B$, segue que $x \in A$. Portanto, $A = B$.

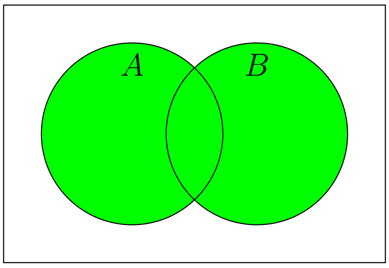
(iv) Sejam A, B e C conjuntos e $x \in A$. Como $A \subset B$, segue que $x \in B$. Novamente, como $x \in B$ e $B \subset C$, segue que $x \in C$. Portanto, $A \subset C$.

□

Exemplo 1.17. *Observemos que a propriedade 1.1 é válida entre alguns conjuntos numéricos, tais como: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e ainda $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.*

1.1.3 Operações entre conjuntos

Definição 1.6 (Reunião entre dois conjuntos). *O conjunto dos elementos que pertencem a um conjunto A ou a um conjunto B será denotado por $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ e chamado de união de A e B.*



Conforme Iezzi (1977, p. 29), o conjunto $A \cup B$ pode ser lido da seguinte forma: "A reunião B" e é formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B, isto é, ocorre ao menos uma das condições: $x \in A$ ou $x \in B$.

Observação 1.8. *A palavra "ou", conforme Lima (1980, p. 5), é sempre utilizada em Matemática no sentido lato: ao dizer "$x \in A$ ou $x \in B$", quer-se afirmar que pelo menos uma dessas duas alternativas é verdadeira sem ficar excluída a possibilidade de que ambas o sejam, isto é, ao mesmo tempo $x \in A$ e $x \in B$.*

Propriedade 1.2. *Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Valem as seguintes propriedades:*

(i) $A \cup A = A$ *(idempotente)*

(ii) $A \cup \varnothing = A$ *(elemento neutro)*

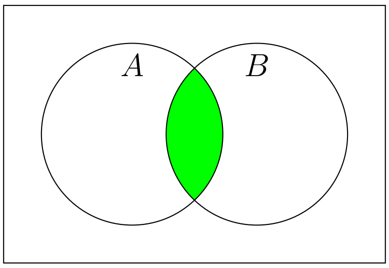
(iii) $A \cup B = B \cup A$ *(comutativa)*

(iv) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(associativa)*

Observação 1.9. *As demonstrações das propriedades 1.2 podem ser obtidas a partir das definições 1.5 e 1.6.*

Exemplo 1.18. *Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais e $\mathbb{I}$ dos números irracionais. Temos que a reunião deles é o conjunto dos números reais, ou seja, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.*

Definição 1.7. *O conjunto dos elementos pertencentes simultaneamente a um conjunto A e a um conjunto B será denotado por $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$ e chamado de intersecção de A e B.*



Conforme Iezzi (1977, p. 30), o conjunto $A \cap B$ pode ser lido da seguinte forma: "A inter B", e é formado pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos A e B, simultaneamente. O conectivo "e" colocado entre duas condições indica que elas devem ser satisfeitas simultaneamente.

Propriedade 1.3. *Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Valem as seguintes propriedades:*

(i) $A \cap A = A$ *(idempotente)*

(ii) $A \cap U = A$ *(elemento neutro)*

(iii) $A \cap B = B \cap A$ *(comutativa)*

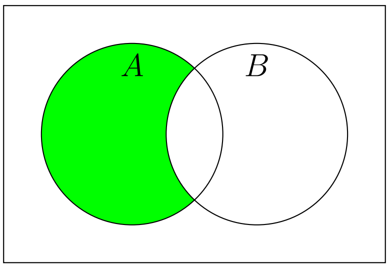
(iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(associativa)*

Observação 1.10. *As demonstrações da propriedade 1.3 podem ser obtidas a partir das definições 1.5 e 1.7.*

Exemplo 1.19. *Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, b\}$, temos: $A \cap B = \{a, b\}$.*

Observação 1.11. *Dois conjuntos A e B são disjuntos se $A \cap B = \varnothing$, ou seja, se A e B não têm elementos em comum. Por exemplo: $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ são disjuntos.*

Definição 1.8. *Dados dois conjuntos A e B, chama-se de diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B, denotado por $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.*



Exemplo 1.20. *Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{b, c, d\}$, tem-se: $A - B = \{a\}$.*

Definição 1.9. *Dado um conjunto A (isto é, um subconjunto de U), chama-se complementar de A ao conjunto A^C formado pelos elementos de U que não pertencem a A.*

$$A^C = \{x \in U \mid x \notin A\} \tag{1.6}$$

Uma vez fixado o conjunto A, para cada $x \in U$, vale uma, e somente uma, das alternativas:

$$x \in A \text{ ou } x \notin A \tag{1.7}$$

Não existe outra alternativa além das que foram apresentadas na relação (1.7), sendo ela conhecida como Princípio do Terceiro Excluído. Além disto, as alternativas $x \in A$ e $x \notin A$ não podem ser ambas verdadeiras e esta regra chama-se Princípio da Não Contradição. Temos as regras operatórias:

(i) Para todo conjunto $A \subset U$, tem-se $(A^C)^C = A$ (Todo conjunto é complementar do seu complementar);

(ii) Se $A \subset B$, então $B^C \subset A^C$ (Se um conjunto está contido em outro, seu complementar contém o complementar do outro);

Na presença da regra (i), a regra (ii) pode ser reforçada, valendo a equivalência:

$$A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C \tag{1.8}$$

Da relação (1.8), seja A o conjunto dos elementos de U que têm a propriedade P e B o conjunto dos elementos de U que têm a propriedade Q. As propriedades que definem os conjuntos A^C e B^C são, respectivamente, a negação de P, denotada por $\sim P$, e a negação de Q, denotada por $\sim Q$. Assim, dizer que um objeto x tem a propriedade $\sim P$ significa afirmar que x não tem a propriedade P. Portanto,

$$P \Rightarrow Q \text{ se, e somente se, } \sim Q \Rightarrow \sim P \tag{1.9}$$

Exemplo 1.21. *Observe as afirmações a seguir: (i) Todo número primo maior do que* 2 *é ímpar; (ii) Todo número par maior do que* 2 *é composto. As afirmações (i) e (ii) são idênticas.*

Solução. As afirmações (i) e (ii) são idênticas por (1.9). Elas poderiam ser reescritas da seguinte forma: dado $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$:

$$n \text{ primo } \Rightarrow n \text{ é ímpar } \textbf{ se, e somente se, } \underbrace{\sim (n \text{ ímpar})}_{\text{n é par}} \Rightarrow \underbrace{\sim (n \text{ primo})}_{\text{n é composto}} \tag{1.10}$$

□

1.1.4 Axiomas de Peano e Indução Matemática

Conforme Lima (1980, p. 26), embora o conjunto dos números naturais denotado por $\mathbb{N}$ seja fácil de ser descrito, torna-se difícil provarmos propriedades matemáticas definidas neste conjunto somente com a noção intuitiva. Uma alternativa para este problema é definí-lo com base em três axiomas, conhecidos como **axiomas de Peano**.

Axioma 1.1 (Axiomas de Peano). *São dados, como objetos não definidos, um conjunto* $\mathbb{N}$*, cujos elementos são chamados números naturais e uma função* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$*. Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, conforme Lima (1980, p. 26), o número* $s(n)$*, valor que a função* s *assume no ponto* n*, é chamado o sucessor de* n*. A função* s *satisfaz aos seguintes axiomas:*

(i) $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *é injetiva. Em outros termos:* $m, n \in \mathbb{N}, s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$*. Ou, em palavras, dois números que têm o mesmo sucessor são iguais;*

(ii) $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ *consta de um só elemento. Ou seja, existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Ele se chama "um" e é representado pelo símbolo* 1*. Assim, qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$*, tem-se que* $1 \neq s(n)$*. Por outro lado, se* $n \neq 1$ *então existe um (único)* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $s(n_0) = n$*.*

(iii) (Axioma da Indução) Se $X \subset \mathbb{N}$ *é um subconjunto tal que* $1 \in X$ *e, para todo* $n \in X$ *tem-se também* $s(n) \in X$*, então* $X = \mathbb{N}$*.*

Uma outra maneira de compreender os axiomas de Peano é expressá-lo na linguagem corrente, tal como segue:

(i) Todo número natural possui um único sucessor que também é um número natural;

(ii) Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes;

(iii) Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de número um.

(iv) Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e também contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$, isto é, contém todos os números naturais.

A partir desta formalização denota-se o sucessor de 1 por 2 e leia-se: "dois". Da mesma maneira, o sucessor de 2 por 3 e leia-se: "três", e assim sucessivamente.

O Princípio da Indução, enunciado a seguir, é útil quando pretende-se demonstrar proposições (sentenças matemáticas) que carregam em si argumentos que fazem referência a "e assim por diante" ou "assim sucessivamente". Seu papel principal é poder ser visto como um método de demonstração. Denotemos $p(n)$ como sendo a afirmação em relação ao número natural n, podendo ser verdadeira ou falsa.

Conforme Oliveira (2010, p. 204), o Princípio da Boa Ordenação (1.2, página 31) e o Princípio da Indução são independentes e equivalentes. Se considerarmos o Princípio da Boa Ordenação como sendo um axioma, podemos deduzir o Princípio da Indução e, reciprocamente, se considerarmos o Princípio da Indução como sendo um axioma, podemos deduzir o Princípio da Boa Ordenação. Primeiramente consideremos o Princípio da Boa Ordenação como axioma.

Teorema 1.1 (Princípio da Indução Matemática). *Considere* n_0 *um inteiro não negativo. Suponhamos que, para cada inteiro* $n \geqslant n_0$*, seja dada uma proposição* $p(n)$*. Suponha que se pode verificar as seguintes propriedades:*

(a) $p(n_0)$ *é verdadeira;*

(b) se $p(n)$ é verdadeira, então $p(n+1)$ também é verdadeira, para todo $n \geqslant n_0$;

Então $p(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geqslant n_0$.

Observação 1.12. *A afirmação (a) é chamada de base da indução e a (b) de passo indutivo. O fato de que $p(n)$ é verdadeira no item (b) é chamado de hipótese de indução.*

Demonstração. Definamos o conjunto

$$V = \{m \text{ inteiros não negativos} \mid m \geqslant n_0 \text{ e } p(m) \text{ é verdadeira}\}$$

Notemos que V é não vazio, pois a condição (a) nos assegura que $n_0 \in V$. A prova do teorema é equivalente a mostrarmos que

$$V = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \dots\}$$

ou equivalentemente, a provarmos que o conjunto $F = \{$m inteiros não negativos $\mid m \geqslant n_0$ e $p(m)$ é falsa$\}$ é vazio. Suponhamos que F é não vazio. Pelo Princípio da Boa Ordenação existe um menor elemento $m_0 \in F$, em que $p(m_0)$ é falso. Observemos que,

- $m_0 \geqslant n_0 + 1$. De fato, $m_0 \geqslant n_0$, porém a possibilidade $m_0 = n_0$ contradiz (a);
- $m_0 - 1 \in V$. Com efeito, $p(m_0 - 1)$ é verdadeira, pois caso contrário, $m_0 - 1 \in F$ e, além disso, $m_0 - 1 < m_0$, contradizendo isto à minimalidade de m_0.

Finalmente, como $p(m_0 - 1)$ é verdadeira, segue da condição (b) que $p(m_0)$ também é verdadeira, o que é impossível pela definição de m_0. Portanto, o conjunto F é vazio, concluindo-se assim a prova. $\square$

Exemplo 1.22. *Definamos a seguinte proposição nos números naturais:*

$$p(n): \ \textit{a soma dos cubos dos } n \textit{ primeiros números naturais é igual } \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$$

A propriedade $p(n)$ é verdadeira para qualquer n natural.

Solução. Primeiramente testaremos se a propriedade $p(n)$ é verdadeira para os números naturais n de 1 a 4:

(i) $p(1): 1^3 = 1 = 1^2 = \left(\dfrac{1\cdot 2}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$;

(ii) $p(2): 1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = \left(\dfrac{2\cdot 3}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{2\cdot(2+1)}{2}\right)^2$;

(iii) $p(3): 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = \left(\dfrac{3\cdot 4}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3\cdot(3+1)}{2}\right)^2$;

(iv) $p(4) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2 = \left(\dfrac{4 \cdot 5}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{4 \cdot (4+1)}{2}\right)^2;$

Para números naturais de 1 a 4 a propriedade $p(n)$ é verdadeira. Verifiquemos usando o Princípio da Indução (1.1, página 28) que a propriedade é verdadeira para todos os números naturais n.

(i) $p(1)$ é verdadeira, pois $\left(\dfrac{1 \cdot (1+1)}{2}\right)^2 = 1 = 1^3$.

(ii) Precisamos agora provar o passo indutivo, isto é, assumimos que $p(k)$ é verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$. (Hipótese de Indução).

(iii) Será que $p(k+1)$ também é verdadeira?

Assumir que $p(k)$ é verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$ significa supormos que é verdade que a soma dos k primeiros números naturais é igual a $\left(\dfrac{k \cdot (k+1)}{2}\right)^2$, ou seja,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k \cdot (k+1)}{2}\right)^2 \tag{1.11}$$

Para verificarmos se $p(k+1)$ é verdadeira, adicionamos $(k+1)^3$ em ambos os lados da equação (1.11) e no lado esquerdo dela teremos a soma dos cubos dos $(k+1)$ primeiros naturais, que corresponde à afirmação $p(k+1)$.

$$p(k+1) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k \cdot (k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \tag{1.12}$$

$$\frac{k^2 \cdot (k+1)^2 + 4 \cdot (k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2 \cdot [k^2 + 4 \cdot (k+1)]}{4} = \left(\frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}\right)^2 \tag{1.13}$$

Pelo Princípio da Indução Matemática foi possível verificar que a propriedade $p(n)$ é verdadeira para qualquer n natural. □

Exemplo 1.23. *Mostremos que $n! > 2^n$, se $n \geqslant 4$ e n é natural.*

Solução. Definimos a proposição $p(n)$ por: $n! > 2^n$, para n natural e $n \geqslant 4$. Usaremos o Princípio da Indução para mostrar a validade de $p(n)$.

(i) Seja $n_0 = 4$. Será que $p(4)$ é verdadeira?

$$p(4) : 4! = 24 > 16 = 2^4 \Rightarrow 4! > 2^4, \text{ logo é verdadeira.}$$

(ii) Suponhamos que $p(k)$ seja verdadeira para um certo $k > 4$ e $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $k! > 2^k$.

(iii) Devemos mostrar que $p(k+1)$ também é verdadeira. Note que, como $k \geqslant 4$, então $(k+1) > 2$, logo,

$$(k+1)! = (k+1) \cdot k! > 2 \cdot k! > 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \Rightarrow (k+1)! > 2^{k+1}$$

□

Definição 1.10. *Seja X um conjunto de números naturais. Diz-se que um número $p \in X$ é o menor elemento de X (ou elemento mínimo de X) quando se tem $p \leqslant n$ para todo $n \in X$.*

Exemplo 1.24. *O número 1 é o menor elemento do conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais. Com maior razão, qualquer que seja $X \subset \mathbb{N}$ com $1 \in X$, 1 é o menor elemento de X.*

Proposição 1.1 (Unicidade do menor elemento). *Seja $X \subset \mathbb{N}$. O menor elemento do conjunto X é único.*

Demonstração. Dado $X \subset \mathbb{N}$. Hipoteticamente, suponha por absurdo que $p \in X$ e $q \in X$ sejam ambos menores elementos de X. Então $p \leqslant q$ e $q \leqslant p$, o que resulta $p = q$. Assim, o menor elemento de um conjunto é único. □

Definição 1.11. *Seja $X \subset \mathbb{N}$. Um número $p \in X$ chama-se o maior elemento de X (ou elemento máximo de X) quando se tem $p \geqslant n$ para todo $n \in X$.*

Exemplo 1.25. *Nem todo conjunto de números naturais possui um elemento máximo, por exemplo, o conjunto $\mathbb{N}$. Se existir um elemento máximo de um conjunto $X \subset \mathbb{N}$, de modo análogo ao que foi demonstrado na proposição 1.1, ele é único.*

Teorema 1.2 (Princípio da Boa Ordenação). *Todo subconjunto não vazio $A \subseteq N$ possui um elemento mínimo.*

Demonstração. Usando a notação $I_n = \{p \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant p \leqslant n\}$, consideremos o conjunto $X \subset \mathbb{N}$, formado pelos números $n \in \mathbb{N}$ tais que $I_n \subset \mathbb{N} - A$ (Assim, dizer que $n \in X$ significa afirmar que $n \notin A$ e que todos os números naturais menores do que n também não pertencem a A). Se tivermos $1 \in A$, o teorema está demonstrado pois 1 será o menor elemento de A. Se, porém, $1 \notin A$, então $1 \in X$. Por outro lado, temos $X \neq \mathbb{N}$ (pois $X \subset \mathbb{N} - A$ e $A \neq \varnothing$). Assim, X cumpre a primeira parte da hipótese (iii) do axioma 1.1 (página 27) , contém 1, mas não satisfaz à conclusão (iii) do axioma 1.1 (página 27), pois não é igual a $\mathbb{N}$. Logo não pode cumprir a segunda parte da hipótese. Isto quer dizer: deve existir algum $n \in X$ tal que $n+1 \notin X$. Seja $a = n+1$. Então todos os inteiros desde 1 até n pertencem ao complementar de A, mas $a = n+1$ pertence a A. Dessa maneira, a é o menor elemento do conjunto A, o que demonstra o teorema. □

Muitas vezes, conforme Oliveira (2010, p. 214), para conseguir mostrar que a hipótese $p(n+1)$ é verdadeira, precisamos supor que $p(k)$ é verdadeira para todos os números naturais $n_0 \leqslant k \leqslant n$. Isto é a base do Segundo Princípio da Indução e que decorre do Princípio da Boa Ordenação 1.2.

Teorema 1.3 (**Segundo Princípio da Indução**). *Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade: dado $n \in \mathbb{N}$, se X contém todos os números naturais m tais que $m < n$, então $n \in X$. Nessas condições, $X = \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $Y = \mathbb{N} - X$. Afirmamos que $Y = \varnothing$. Com efeito, se Y não fosse vazio, existiria um elemento mínimo $p \in Y$. Então, para todo número natural $m < p$, seria $m \in X$. Pela hipótese feita sobre X, teríamos $p \in X$, uma contradição. □

Exemplo 1.26 (**Torre de Hanói**). *Pedro tem um brinquedo de criança. O brinquedo tem três pinos presos em uma base com n anéis em um dos pinos. Os anéis estão arrumados por tamanho, com o maior embaixo de todos. O jogo consiste em transferir a pilha de discos para uma outra haste, deslocando um disco de cada vez, de modo que, a cada passo, a regra enunciada seja obervada.*

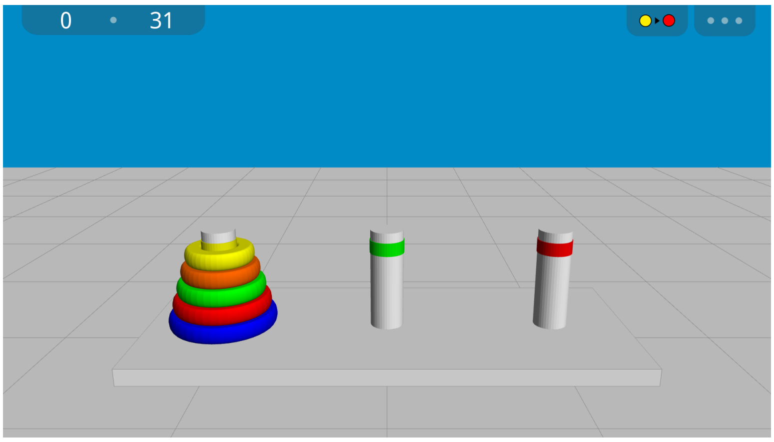


Figura 1 – Torre de Hanói

(a) É possível mover todos os anéis para um dos pinos vazios?

(b) Pedro pode fazer isto com $2^n - 1$ movimentos?

Solução. Consideremos o problema de descobrir quantos movimentos são necessários para mover n discos ($n \in \mathbb{N}_+$) de uma haste para a outra. Dividiremos o problema inicial em casos mais simples para alguns discos e, em seguida, será utilizado o Princípio da Indução Finita para generalizar para n discos. Usaremos a notação $m(D_i, H_j)$ para representar o movimento do i-ésimo disco ($1 \leqslant i \leqslant n$) para a j-ésima ($1 \leqslant j \leqslant 3$) haste. Na primeira haste, do menor para o maior, os discos serão denotados por D_1, D_2, D_3 até D_n, que é o maior disco do jogo.

Conforme Oliveira (2010, p. 224), se há somente um disco, basta movimentá-lo para qualquer uma das outras hastes com um único movimento. Se há dois discos e pretende-se movê-los para a haste 3 (direita), move-se o menor deles para a haste 2 (central), o maior para a haste 3 e, finalmente, o menor para a haste 3. Seguindo a mesma lógica, para movimentar quatro discos da haste 1 para a haste 3, movimenta-se os três menores discos para a haste 2, o maior para a haste 3 e, finalmente, os três menores para a haste 3.

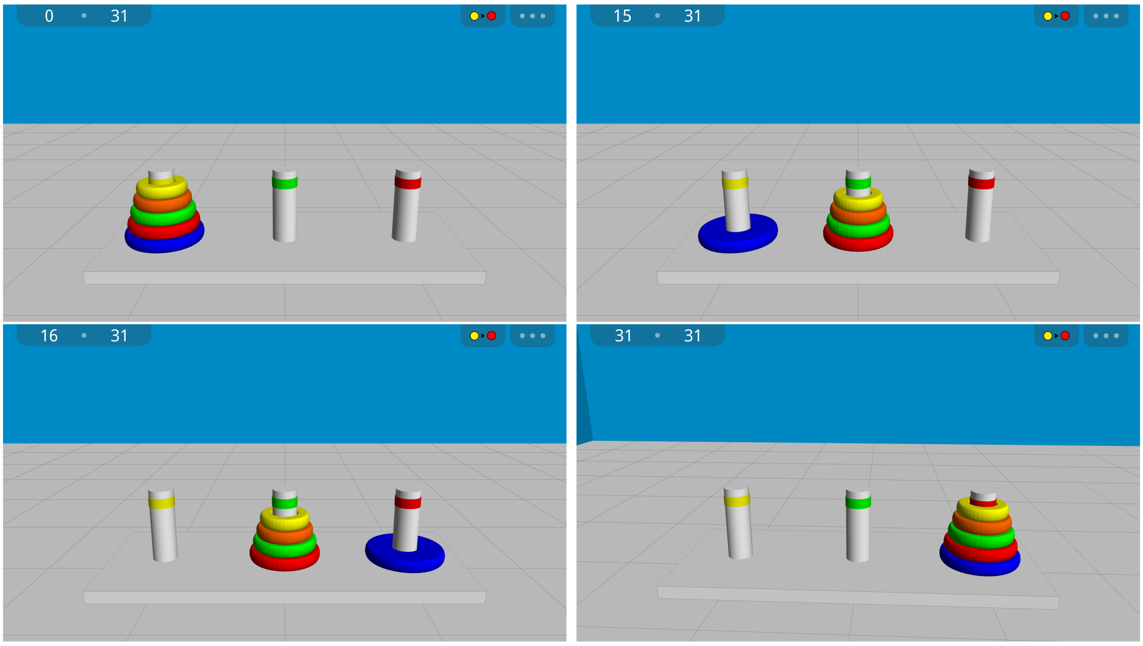


Figura 2 – Torre de Hanói - Passos para resolução com 5 discos

D	**Sequência de movimentos com D discos**
1	$m(D_1, H_3)$; **(1 movimento)**
2	$m(D_1, H_2), m(D_2, H_3), m(D_1, H_3)$; **(3 movimentos)**
3	$m(D_1, H_3), m(D_2, H_2), m(D_1, H_2), m(D_3, H_3), m(D_1, H_1), m(D_2, H_3), m(D_1, H_3)$; **(7 movimentos)**
4	$m(D_1, H_2), m(D_2, H_3), m(D_1, H_3), m(D_3, H_2), m(D_1, H_1), m(D_2, H_2), m(D_1, H_2),$ $m(D_4, H_3), m(D_1, H_3), m(D_2, H_1), m(D_1, H_1), m(D_3, H_3), m(D_1, H_2), m(D_2, H_3),$ $m(D_1, H_3)$; **(15 movimentos)**
5	$m(D_1, H_3), m(D_2, H_2), m(D_1, H_2), m(D_3, H_3), m(D_1, H_1), m(D_2, H_3), m(D_1, H_3),$ $m(D_4, H_2), m(D_1, H_2), m(D_2, H_1), m(D_1, H_1), m(D_3, H_2), m(D_1, H_3), m(D_2, H_2),$ $m(D_1, H_2), m(D_5, H_3), m(D_1, H_1), m(D_2, H_3), m(D_1, H_3), m(D_3, H_1), m(D_1, H_2)$ $m(D_2, H_1), m(D_1, H_1), m(D_4, H_3), m(D_1, H_3), m(D_2, H_2), m(D_1, H_2), m(D_3, H_3)$ $m(D_1, H_1), m(D_2, H_3), m(D_1, H_3)$ **(31 movimentos)**

Tabela 1 – Movimentos da Torre de Hanói

Em todo momento o jogo se resume a, tendo n discos situados na primeira haste, movimentamos $(n-1)$ discos para uma das hastes livres, o maior para a haste que não possui discos encaixados e, finalmente, movimentamos os $(n-1)$ discos, que estão juntos, para a haste que contém o maior de todos.

Se denotarmos por $m([D_i, D_j], H_k)$ o movimento do i-ésimo disco $(1 \leqslant i \leqslant j)$ até o j-ésimo disco $(i \leqslant j \leqslant n)$ para a k-ésima coluna $(1 \leqslant k \leqslant 3)$, com i, j e k todos naturais, podemos simplificar a tabela 1 como segue:

D	**Sequência de movimentos com D discos**
4	$m([D_1, D_3], H_2), m(D_4, H_3), m([D_1, D_3], H_3)$
5	$m([D_1, D_3], H_3), m(D_4, H_2), m([D_1, D_3], H_2), m(D_5, H_3), m([D_1, D_3], H_1),$ $m(D_4, H_3), m([D_1, D_3], H_3)$

Tabela 2 – Movimentos da Torre de Hanói com 4 e 5 discos

Com base na tabela 2, se denotarmos por a_n o menor número de movimentos necessários para movimentarmos n discos situados na haste 1 para qualquer uma das outras duas hastes, teremos:

$$\begin{cases} a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}, n > 1 \\ a_1 = 1 \end{cases} \tag{1.14}$$

A seguir resolveremos a relação de recorrência (1.14) até encontrarmos uma fórmula, em função da variável n, que retorne qual o menor número de passos necessários que torne possível transferir n discos da primeira haste para alguma das outras hastes.

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \cdot a_{n-1} + 1 \\ &= 2 \cdot a_{n-1} + 1 = 2 \cdot (2 \cdot a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 \cdot a_{n-2} + 2^1 + 1 \\ &= 2^2 \cdot a_{n-2} + 2^1 + 1 = 2^2 \cdot (2 \cdot a_{n-3} + 1) + 2^1 + 1 = 2^3 \cdot a_{n-3} + 2^2 + 2^1 + 1 \\ &\vdots \\ &= 2^{n-1} \cdot a_{n-(n-1)} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^1 + 1 \\ &= 2^{n-1} \cdot a_1 + \left(\frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} \right) \\ &= 2^{n-1} \cdot a_1 + 2^{n-1} - 1 \\ &= 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-1} - 1, \ \text{pois } a_1 = 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} - 1 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Usando o Princípio da Indução Matemática 1.1 (página 28), verificaremos se a proposição $p(n)$ enunciada a seguir é válida para todo n natural:

$p(n)$: o menor número de movimentos necessários para movimentar n discos da haste 1 para qualquer uma das outras hastes é igual a $2^n - 1$

Definida a proposição $p(n)$ relativa aos números naturais, observemos que ela vale para $n = 1$ (base da indução):

- Para $n = 1$: é necessário somente um movimento que corresponde a movimentar o disco diretamente para a haste pretendida. No caso, $a_1 = 2^1 - 1 = 1$ movimento.
- Suponhamos que $p(k)$ é verdadeira para um certo $k \in \mathbb{N}$, com $k > 1$. (Hipótese de indução)
$$a_k = 2^k - 1, \text{ para algum k natural maior do que 1} \tag{1.16}$$
- Tese: devemos verificar se $p(k+1)$ também é verdadeira.

Se há $(k+1)$ discos na primeira haste e sabemos mover k discos de uma haste para a outra usando a_k movimentos (menor possível), então devemos realizar os seguintes movimentos para movermos os $(k+1)$ discos para alguma das hastes livres:

- Dos $k+1$ discos, movimentamos os k menores para alguma das hastes livres. Por hipótese de indução, precisaremos, no mínimo, de a_k movimentos;
- Movimentamos o maior de todos os discos para a haste que não tem nenhum disco usando 1 movimento;
- Movimentamos todos os k discos que encontram-se juntos para a haste onde se encontra o maior de todos usando a_k movimentos.

Portanto, foram necessários $a_k + 1 + a_k = 2 \cdot a_k + 1$ movimentos, ou seja,

$$a_{k+1} = (2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2 \cdot 2^k - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1 \tag{1.17}$$

Usando o Princípio da Indução, verificamos que a propriedade $p(n)$ é verdadeira para qualquer n natural positivo. $\square$

1.1.5 Adição e multiplicação nos naturais

A seguir definiremos as operações de **adição** e **multiplicação** no conjunto dos números naturais. Para isto façamos corresponder a cada par de números naturais (m, n) a soma $m + n$. A multiplicação é a operação que associa o par (m, n) com o produto $m \cdot n$. Estas operações são caracterizadas pelas seguintes igualdades, que lhes servem de definição:

$$\begin{cases} m + 1 = s(m) \\ m + s(n) = s(m+n), \text{ isto é, } m + (n+1) = (m+n) + 1 \quad \textbf{(Adição)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \cdot 1 = m \\ m \cdot (n+1) = m \cdot n + m \quad \textbf{(Multiplicação)} \end{cases}$$

Propriedade 1.4 (Adição e da multiplicação). *Usa-se o princípio da indução para demonstrar as propriedades básicas da adição e multiplicação no conjunto dos números naturais. São válidas para quaisquer $m, n, p \in \mathbb{N}$:*

- ***Associatividade:*** $(m+n)+p = m+(n+p), \quad m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$
- ***Distributividade:*** $m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p$
- ***Comutatividade:*** $m + n = n + m, \quad m \cdot n = n \cdot m$
- ***Lei do corte:*** $m + n = m + p \Rightarrow n = p, \quad m \cdot n = m \cdot p \Rightarrow n = p$

1.1.6 Relação de ordem nos naturais

A relação de ordem nos números naturais é definida com base na adição. Sejam m e n dois números naturais quaisquer. Temos que

$$m < n \tag{1.18}$$

e leia-se "m é menor do que n", caso exista $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Diz-se, também, que n é maior do que m, e escreve-se $n > m$. A notação $m \leqslant n$ significa que m é menor do que ou igual a n, ou seja, $m < n$ ou $m = n$.

Propriedade 1.5 (Relação de ordem nos naturais). *A relação de ordem nos números naturais tem as seguintes propriedades para $m, n, p \in \mathbb{N}$:*

(i) ***Transitividade:*** *se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$;*

(ii) ***Tricotomia:*** *somente uma das alternativas pode ocorrer: $m = n, m < n$ ou $n > m$;*

(iii) ***Monotonicidade da adição:*** *se $m < n$, então $m + p < n + p$;*

(iv) ***Monotonicidade da multiplicação:*** *$m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$;*

Observação 1.13. *As demonstrações das propriedades 1.4 e 1.5 serão omitidas, mas podem ser consultadas em Lima (1980).*

1.2 Conceitos de divisibilidade

Definição 1.12. *Dados dois números inteiros a e b, dizemos que a divide b, escrevendo $a \mid b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$. Neste caso, diremos também que a é um divisor ou um fator de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a.*

Exemplo 1.27. 2 *é divisor de* -6*, pois existe* $-3 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $-6 = -3 \cdot 2$*. No caso, escreve-se* $2 \mid -6$*.*

Proposição 1.2. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Então temos: $a \mid b$ e $c \mid d \Rightarrow a \cdot c \mid b \cdot d$.*

Demonstração. Se $a \mid b$ e $c \mid d$, então $\exists f, g \in \mathbb{Z}$ tais que $b = f \cdot a$ e $d = g \cdot c$. Portanto, $b \cdot d = (f \cdot g) \cdot (a \cdot c)$, logo $a \cdot c \mid b \cdot d$. □

Observação 1.14. *Em particular, para todo $c \in \mathbb{Z}$, se $a \mid b$, então $a \cdot c \mid b \cdot c$.*

Proposição 1.3. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tais que $a \mid b \pm c$. Então $a \mid b \Leftrightarrow a \mid c$.*

Demonstração. Suponhamos que $a \mid b + c$. Então existe $f \in \mathbb{Z}$ tal que $b + c = f \cdot a$. Agora, se $a \mid b$ temos que existe $g \in \mathbb{Z}$ tal que $b = g \cdot a$. Juntando as duas igualdades acima, temos:

$$g \cdot a + c = f \cdot a$$

donde segue que $c = (f - g) \cdot a$, logo $a \mid c$. A prova da implicação contrária é análoga. Por outro lado, se $a \mid b - c$ e $a \mid b$, pelo caso anterior, temos $a \mid -c$, o que implica que $a \mid c$. □

Proposição 1.4. *Se a e b são inteiros positivos e se a divide b, então $a \leqslant b$*

Demonstração. De fato, se $a \mid b$, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$. Como $a, b > 0$, segue-se que $c \in \mathbb{N}$. Como $1 \leqslant c$, segue-se que $a \leqslant a \cdot c = b$. □

Teorema 1.4 (**Algoritmo de Euclides**)**.** *Se a é um inteiro positivo e b é qualquer inteiro, então existem inteiros q e r tais que*

$$b = a \cdot q + r \text{ onde } 0 \leqslant r < a \tag{1.19}$$

Demonstração. Suponha que b seja positivo. Se $b < a$, basta tomar $q = 0$ e $r = b$. Se $b = a$, então tomemos $q = 1$ e $r = 0$. Assim, assumiremos também que $b > a > 0$. Consideremos o conjunto

$$R = \{b - aq \in \mathbb{Z} \mid b - aq \geqslant 0\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{1.20}$$

Notemos que o conjunto R é não vazio, pois $b - a \in \mathbb{R}$, já que $b - a > 0$. Desse modo, pelo princípio da boa ordenação 1.2 (página 31), temos que R admite um menor elemento, que denotaremos por r. Claramente $r = b - aq \geqslant 0$, para algum $q \geqslant 0$. Além disso, $r < a$ pois caso contrário

$$r = b - aq \geqslant a \Rightarrow b - a(q+1) \geqslant 0 \tag{1.21}$$

Por outro lado,

$$a > 0 \Rightarrow b - a(q+1) < b - aq \tag{1.22}$$

Das desigualdades (1.21) e (1.22), segue que

$$0 \leqslant b - a(q+1) < b - aq$$

contradizendo o fato de que $r = b - aq$ é o menor elemento não negativo de R.

Agora provaremos o fato de que r e q, escolhidos desta forma, são únicos. Com efeito, suponhamos que existam outros inteiros r_1 e q_1 tais que

$$b = aq_1 + r_1 \; 0 \leqslant r_1 < a$$

Então resulta que $aq + r = aq_1 + r_1$, logo,

$$(r - r_1) = (q_1 - q)a \tag{1.23}$$

sendo assim, $r - r_1$ é múltiplo de a. Mas, em virtude de $-a < r - r_1 < a$, o único valor que $r - r_1$ pode tomar, sendo este múltiplo de a, é $r - r_1 = 0$. Portanto, $r = r_1$, de onde se deduz diretamente de (1.23) que $q = q_1$. □

Observação 1.15. *Os números q e r no enunciado do teorema 1.4 são chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão de b por a.*

Exemplo 1.28. *Estefânea tem cinco cartas marcadas com as letras A, B, C, D e E, empilhadas nessa ordem de cima para baixo. Ela embaralha as cartas pegando as duas de cima e colocando-as, com ordem trocada, embaixo da pilha. A figura mostra o que acontece nas duas primeiras vezes em que ela embaralha as cartas.*

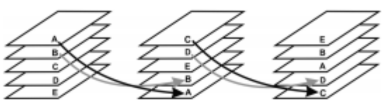


Figura 3 – Jogo das Cartas

Se Estefânea embaralhar as cartas 74 vezes, qual carta estará no topo da pilha?

Solução. As primeiras pilhas de cinco cartas que podem ser obtidas são:

$$(ABCDE), (CDEBA), (EBADC), (ADCBE), (CBEDA), (EDABC)$$

Após um novo embaralhamento, a próxima pilha será igual à inicial e a cada 6 pilhas a sequência se repete. Pelo teorema 1.4 (página 37), ao dividir 74 por 6, obteremos quociente e resto iguais a 12 e 2, nessa ordem. Portanto, após 74 repetições e como o resto na divisão foi igual a 2, temos que a sequência de cartas da pilha será $(EBADC)$ e, com isto, a carta de cima será a E. □

Corolário 1.1. *Dados dois números naturais a e b com $1 < a \leqslant b$, existe um número natural n tal que*

$$na \leqslant b < (n+1)a \tag{1.24}$$

Demonstração. Pelo teorema 1.4, existem únicos $q, r \in \mathbb{N}$ com $0 \leqslant r < a$ tais que $b = aq + r$. Assim

$$aq \leqslant b = aq + r < aq + a = a(q+1) \tag{1.25}$$

Basta agora tomar $q = n$ para obter o resultado. □

Definição 1.13 (Número primo). *Um inteiro p distinto de 0 e de ± 1 é chamado primo se, para todos os inteiros a e b, sempre que $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$. Um inteiro distinto de 0 e de ± 1 e que não é primo é chamado composto.*

Teorema 1.5. *Seja p um inteiro tal que $p \neq 0, \pm 1$. Temos que p é primo se, e somente se, para todos os inteiros a e b, verifica-se o seguinte: se $p = ab$, então $p = \pm a$ ou $p = \pm b$.*

Outros conceitos teóricos que não foram abordados nesta seção podem ser consultados nos livros que serviram de referência para o estudo de Divisibilidade. As principais obras consultadas foram: Hefez (2016) e Oliveira (2010).

2 Grupos

Embora o objetivo não seja fazer um estudo de toda a teoria de Grupos, foram trabalhados conceitos teóricos que serviram de referência para algumas atividades aplicadas na educação básica visando o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos com base na aprendizagem em resolução de problemas. O presente capítulo apresenta a definição de Grupos, operações e alguns exemplos que podem ser adaptados aos alunos na educação básica por meio de algumas atividades adequadas à série ou ano escolar.

2.1 Grupos

Definição 2.1. *Seja G um conjunto não vazio onde está definida a operação entre pares de G, denotada por,*

$$\begin{array}{rrcl} * : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x,y) & \longmapsto & x * y \end{array}$$

Dizemos que o par $(G,*)$ é um grupo se possui as seguintes propriedades:

(i) $x * (y * z) = (x * y) * z,\ \forall x, y, z, \in G$ *(A operação é associativa);*

(ii) $\exists e \in G$ *tal que* $x * e = e * x = x,\ \forall x \in G$ *(Existe o elemento neutro em relação à operação $*$);*

(iii) $\forall x \in G, \exists y \in G$ *tal que* $x * y = y * x = e$ *(Existência do inverso de cada elemento de G em relação à operação $*$).*

Observação 2.1. *O inverso y do elemento $x \in G$ será denotado por x^{-1}.*

Exemplo 2.1. *O par $(\mathbb{Z}, *)$, em que $*$ é a operação de subtração usual de inteiros, não é grupo, pois ela não é associativa, tal como o exemplo a seguir:* $(2-5)-4 = -3-4 = -7 \neq 1 = 2-1 = 2-(5-4)$, *isto é,* $(2-5)-4 \neq 2-(5-4)$.

Exemplo 2.2. *O conjunto $G = \{1,2,3,4,5\}$ munido da operação $*$ de adição de números inteiros $+ : G \times G \longrightarrow G$, denotado por $(G,+)$, não é grupo, pois 2 e 5 pertencem a G, mas $2+5 = 7 \notin G$.*

Exemplo 2.3. *Considere a operação $*$ definida na tabela de dupla entrada no conjunto finito $A = \{0,1,2\}$. O par $(A,*)$ é um grupo.*

$$\begin{array}{lll} 0*0=0 & 0*1=1 & 0*2=2 \\ 1*0=1 & 1*1=2 & 1*2=0 \\ 2*0=2 & 2*1=0 & 2*2=1 \end{array}$$

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Definição 2.2. *Seja $(G,*)$ um grupo, $a \in G$ e $k \geqslant 1$ natural. Definimos:*

$$\begin{array}{lll} a^0 & = & e \\ a^1 & = & a \\ a^2 & = & a*a \\ a^3 & = & a*a^2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a^k & = & a*a^{k-1} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} a^{-1} & = & (a^{-1})^1 \\ a^{-2} & = & (a^{-1})^2 \\ a^{-3} & = & (a^{-1})^3 \\ a^{-4} & = & (a^{-1})^4 \\ \vdots & = & \vdots \\ a^{-k} & = & (a^{-1})^k \end{array}$$

Definição 2.3. *Seja $(G,*)$ um grupo que tem a propriedade $x*y = y*x$ para todo $x, y \in G$. Então G é chamado grupo abeliano ou comutativo.*

Exemplo 2.4. *O par $(M_2(\mathbb{R}),*)$ em que $*$ é a operação de adição de matrizes, é grupo abeliano. Dadas as matrizes $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, segue que $A*B = B*A$.*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} * \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}}_{B} * \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A}$$

Exemplo 2.5. *O par $(\mathbb{Q}_+ - \{0\},*)$, munido da operação $* : \mathbb{Q}_+ - \{0\} \times \mathbb{Q}_+ - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q}_+ - \{0\}$ dada pela operação $a*b = \dfrac{a \cdot b}{2}$, é grupo, com "$\cdot$" sendo a operação de multiplicação usual no conjunto. Para facilitar, denotemos o produto usual $a \cdot b$ de dois elementos a, b do conjunto por ab.*

Solução. Verificaremos se as condições da definição 2.1 são satisfeitas:

(i) Associatividade: $(a*b)*c = a*(b*c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}$.

$$(a*b)*c = \left(\frac{ab}{2}\right)*c = \frac{\left(\frac{ab}{2}\right)\cdot c}{2} = \frac{\frac{abc}{2}}{2} = \frac{a\cdot\left(\frac{bc}{2}\right)}{2} = a*\left(\frac{bc}{2}\right) = a*(b*c) \tag{2.1}$$

(ii) Existência do elemento neutro: para todo elemento $a \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}$, existe um elemento $e \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}$ tal que $a*e = e*a = a$. Seja $a \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}$:

Queremos mostrar a existência do elemento $e \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}$ tal qual ocorre:

$$a*e = \frac{ae}{2} = \frac{ea}{2} = e*a = a \Leftrightarrow \frac{ae}{2} = a \Leftrightarrow ae = 2a \Leftrightarrow a\cdot(e-2) = 0 \tag{2.2}$$

Como $a \cdot (e-2) = 0$ é equivalente a $a = 0$ ou $e - 2 = 0$, segue que o elemento neutro existe e é igual a 2.

(iii) Existência do elemento inverso: existe o elemento $a' \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}$ para todo elemento $a \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}$ do grupo tal que $a * a' = a' * a = 2$. Seja $a \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}$:

Queremos mostrar a existência do elemento $a' \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}$ tal qual ocorre:

$$a * a' = \frac{aa'}{2} = \frac{a'a}{2} = a' * a = 2 \Leftrightarrow a \cdot a' = 4 \tag{2.3}$$

Como $a \cdot a' = 4$ é equivalente a $a' = \dfrac{4}{a}$ $(a \neq 0)$, segue que o inverso de $a \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}$ existe e é igual a $\dfrac{4}{a}$.

Como as condições da definição 2.1 foram satisfeitas, segue que $(\mathbb{Q}_+ - \{0\}, *)$ é um grupo. Mostraremos agora que também é abeliano:

(iv) Comutatividade: $a * b = b * a, \ \forall a, b \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}$.

$$a * b = \frac{ab}{2} = \frac{ba}{2} = b * a, \ \forall a, b \in \mathbb{Q}_+ - \{0\} \tag{2.4}$$

$\square$

Propriedade 2.1. *Seja $(G, *)$ grupo abeliano e $x, y \in G$. Para qualquer m inteiro, é válido que $(x * y)^m = x^m * y^m$.*

Demonstração. Usando o Princípio da Indução Finita, primeiramente iremos justificar que a propriedade 2.1 é válida para qualquer m inteiro positivo.

(i) Para $m = 1$, a propriedade é válida, pois $(x * y)^1 = x * y = x^1 * y^1$;

(ii) Suponha a propriedade 2.1 seja válida para $m - 1$, isto é, $(x * y)^{m-1} = x^{m-1} * y^{m-1}$;

(iii) Verificaremos se a propriedade 2.1 é válida para m:

$$\begin{aligned}
(x * y)^m &= (x * y) * (x * y)^{m-1} && \text{(pela definição 2.2)}\\
&= (x * y) * (x^{m-1} * y^{m-1}) && \text{(pela Hipótese de Indução)}\\
&= (x * y) * (y^{m-1} * x^{m-1}) && \text{(pela comutatividade do grupo G)}\\
&= x * (y * y^{m-1}) * x^{m-1} && \text{(pela associatividade do grupo G)}\\
&= x * y^m * x^{m-1} && \text{(pela definição 2.2)}\\
&= y^m * x * x^{m-1} && \text{(pela comutatividade do grupo G)}\\
&= y^m * x^m && \text{(pela definição 2.2)}\\
&= x^m * y^m && \text{(pela definição 2.3)}
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, $(x * y)^m = x^m * y^m$ é válida para qualquer inteiro m. Para m inteiro negativo, utilizando a definição 2.2 e o fato já provado para m positivo, a demonstração é análoga. $\square$

Exemplo 2.6. *O par* $(\mathbb{Q}_+ - \{0\}, *)$, *em que* $*$ *é a operação de multiplicação usual, é grupo abeliano.*

Exemplo 2.7. *O par* $(B, *)$, *em que* $B = \{1, -1\}$ *e* $*$ *é a operação de multiplicação usual, é grupo abeliano.*

Propriedade 2.2. *Sejam* $(G, *)$ *um grupo e* $a \in G$. *Para quaisquer inteiros* m *e* n, *são válidas: (i)* $a^m * a^n = a^{m+n}$ *e (ii)* $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Demonstração. Usando o Princípio da Indução Finita, primeiramente iremos justificar que a propriedade 2.2 é válida para qualquer n inteiro positivo.

Propriedade (i):

(i) Para $n = 1$, vale $a^m * a^1 = a^{m+1}$, pela definição 2.2;

(ii) Suponha que a propriedade (i) seja válida para $n - 1$, isto é, $a^m * a^{n-1} = a^{m+(n-1)}$;

(iii) Verifiquemos se a propriedade (i) é válida para n:

$$\begin{aligned}
a^m * a^n &= a^m * (a^{n-1} * a) && \text{(pela definição 2.2)} \\
&= (a^m * a^{n-1}) * a && \text{(pela associatividade do grupo G)} \\
&= a^{m+(n-1)} * a && \text{(pela Hipótese de Indução)} \\
&= a^{m+(n-1)+1} && \text{(pela definição 2.2)} \\
&= a^{m+n}
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, $a^m * a^n = a^{m+n}$ é válida para m e n inteiros positivos. Também, em outras situações em que m e n não são necessariamente positivos, podemos usar o fato já provado e a definição 2.2 para justificar a validade.

Propriedade (ii):

(i) Para $n = 1$, vale $(a^m)^1 = a^m$, pela definição 2.2;

(ii) Suponha que a propriedade (ii) seja válida para $n - 1$, isto é, $(a^m)^{n-1} = a^{m \cdot (n-1)}$;

(iii) Verifiquemos se a propriedade (ii) é válida para n:

$$\begin{aligned}
(a^m)^n &= a^m * (a^m)^{n-1} && \text{(pela definição 2.2)} \\
&= a^m * a^{m \cdot (n-1)} && \text{(pela Hipótese de Indução)} \\
&= a^{m+m \cdot (n-1)} && \text{(pela propriedade (i) já demonstrada)} \\
&= a^{m+m \cdot n-m} \\
&= a^{m \cdot n}
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, a propriedade $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ é válida para qualquer n inteiro positivo. Nas situações em que m e n não são necessariamente positivos podemos usar o fato já provado e a definição 2.2 para justificar a validade. □

Propriedade 2.3. *O elemento neutro de um grupo G munido da operação $*$ é único.*

Demonstração. Hipoteticamente, suponha por absurdo que o elemento neutro $e \in G$ não seja único, isto é, exista também um segundo elemento neutro $e' \in G$ $(e \neq e')$. Então:

$$\begin{aligned} e &= e * e' && (e' \text{ é elemento neutro do grupo G}) \\ &= e' && (e \text{ é elemento neutro do grupo G}) \end{aligned}$$

Portanto, o elemento neutro do grupo G munido da operação $*$ é único. □

Propriedade 2.4. *O inverso de um elemento de um grupo G munido da operação $*$ é único.*

Demonstração. Hipoteticamente, suponha por absurdo que o inverso $y \in G$ de um elemento $x \in G$ não seja único, isto é, exista também um segundo elemento inverso $y' \in G$ $(y \neq y')$. Então temos:

$$\begin{aligned} y &= y * e && (\text{pela definição } 2.1) \\ &= y * (x * y') && (\text{pela definição } 2.1) \\ &= (y * x) * y' && (\text{pela associatividade em G}) \\ &= e * y' && (\text{pela definição } 2.1) \\ &= y' && (\text{pela definição } 2.1) \end{aligned}$$

Portanto, o elemento inverso do grupo G munido da operação $*$ é único. □

Teorema 2.1. *Se o par $(G, *)$ é um grupo e a e b são quaisquer dois elementos de G, existe um único elemento $c \in G$ tal que $a * c = b$ e existe um único elemento $d \in G$ tal que $d * a = b$.*

Demonstração. Seja $c = a^{-1} * b$. Então, $a * c = a * (a^{-1} * b) = (a * a^{-1}) * b = e * b = b$, em que e é o elemento neutro do grupo G. Isto mostra que existe pelo menos uma solução. Por outro lado, se $a * c = b$ e $a * c' = b$, temos:

$$c = e * c = (a^{-1} * a) * c = a^{-1} * (a * c) = a^{-1} * b = a^{-1} * (a * c') = (a^{-1} * a) * c' = e * c' = c'$$

Como $c = c'$, segue que a equação $a * c = b$ tem solução única. Notemos que temos essencialmente multiplicado $a * c = b$ e $a * c' = b$ à esquerda por a^{-1}. Analogamente, existe um único elemento $d \in G$ tal que $d * a = b$ tem solução única. □

Corolário 2.1. *Sejam $(G, *)$ um grupo e $a, b, c \in G$. É válido que*

$$se\ a * b = a * c\ ou\ b * a = c * a,\ \ então\ b = c$$

Demonstração. Esta é a asserção de unicidade do teorema 2.1. □

Exemplo 2.8. *O par* $(\mathbb{Z}, *)$ *com a operação* $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *dada por* $a * b = a^2 \cdot b$ *não é grupo, pois a operação* $*$ *não é associativa. Vejamos:* $(a * b) * c = (a^2 \cdot b) * c = (a^2 \cdot b)^2 \cdot c = (a^2)^2 \cdot b^2 \cdot c = (a^2)^2 \cdot (b^2 \cdot c) = (a^2)^2 \cdot (b * c) = a^2 * (b * c) \neq a * (b * c)$.

Exemplo 2.9. *No conjunto* $\mathbb{Z}$ *munido da operação* $*$ *definida por*

$$\begin{array}{rccc} * : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (a, b) & \longmapsto & a + b + 2 \end{array}$$

temos que o par $(\mathbb{Z}, *)$ *é grupo.*

Solução. Verifiquemos se as condições da definição 2.1 são satisfeitas:

(i) Associatividade: $(a * b) * c = (a + b + 2) * c = (a + b + 2) + c + 2 = a + b + 2 + c + 2 = a + (b + 2 + c) + 2 = a + (b + c + 2) + 2 = a * (b + c + 2) = a * (b * c)$.

(ii) Existência do elemento neutro: para todo elemento $a \in \mathbb{Z}$, existe um elemento $e \in \mathbb{Z}$ tal que $a * e = e * a = a$. Seja $a \in \mathbb{Z}$:

$$a * e = a + e + 2 = e + a + 2 = e * a = a \Leftrightarrow e + 2 = 0$$

Como $e + 2 = 0$ é equivalente a $e = -2$, segue que o elemento neutro existe e é igual a -2.

(iii) Existência do elemento inverso: existe o elemento $a' \in \mathbb{Z}$ para todo $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a * a' = a' * a = -2$. Seja $a \in \mathbb{Z}$:

$$a * a' = a + a' + 2 = a' + a + 2 = a' * a = -2 \Leftrightarrow a + a' + 2 = -2$$

Como $a + a' + 2 = -2$ é equivalente a $a' = -4 - a$, segue que o inverso do elemento $a \in \mathbb{Z}$ é o elemento $a' = -4 - a$.

Portanto, como as condições da definição 2.1 são satisfeitas, segue que o par $(\mathbb{Z}, *)$ é grupo. □

Teorema 2.2. *Dado um grupo* $(G, *)$*, é válido que* $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ *para todos os elementos* $a, b \in G$.

Demonstração. Sejam $a, b \in G$. Pela definição 2.1, tem-se que $(a * b) \in G$. Como G é grupo, existe o inverso de todo elemento $(a * b) \in G$, denotado por $(a * b)^{-1}$ tal que $(a * b) * (a * b)^{-1} = (a * b)^{-1} * (a * b) = e$, em que $e \in G$ é o elemento neutro. Além disto, b^{-1} e a^{-1} são elementos de G, o que resulta que $(b^{-1} * a^{-1}) \in G$.

Então, temos: $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = (a * e) * a^{-1} = a * a^{-1} = e$, isto é, $(b^{-1} * a^{-1})$ é o inverso de $(a * b)$. De modo análogo pode ser verificado também que o produto $(a * b)^{-1} * (a * b) = e$. Pela propriedade 2.4, concluímos que $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$. □

Exemplo 2.10. *O par* $(\mathbb{N}, *)$ *com a operação* $* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *dada por* $a * b = a^b$ *não é grupo, pois a associatividade não é válida. Por exemplo:* $1, 2, 3 \in \mathbb{N}$*, mas* $(2 * 1) * 3 = 2^1 * 3 = 2 * 3 = 2^3 = 8 \neq 2 = 2^1 = 2 * 1 = 2 * (1^3) = 2 * (1 * 3)$.

Exemplo 2.11. *O par* $(\mathbb{R}, *)$ *com a operação* $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $a * b = a + b^2$ *não é grupo. Por exemplo:* $1, 2, 3 \in \mathbb{R}$*, mas* $1 * (2 * 3) = 1 * (2 + 3^2) = 1 * (11) = 1 + 11^2 = 122 \neq 14 = 5 + 3^2 = 5 * 3 = (1 + 2^2) * 3 = (1 * 2) * 3$.

Definição 2.4. *Seja* G *um grupo e* $a \in G$*. A ordem (ou período) de* a *é o menor inteiro positivo* n *tal que* $a^n = e$*. Se não existe tal inteiro, dizemos que* a *tem ordem infinita.*

Definição 2.5. *O número de elementos de um grupo* G *será chamado de ordem de* G *e denotado por* $\mid G \mid$*. O grupo* G *é denominado finito ou infinito se sua ordem é, respectivamente, finita ou infinita.*

Definição 2.6. *Dizemos que* G *é um grupo cíclico se existe um elemento* $a \in G$ *tal que* $G = \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ *e escrevemos* $G =< a >$*. Todo elemento* $a \in G$ *que satisfaz esta condição é denominado elemento gerador do grupo cíclico* G*.*

Definição 2.7. *Seja* $G =< a >$ *um grupo cíclico. Se existe um menor inteiro positivo* n *tal que* $a^n = e$*, dizemos que* G *é um grupo cíclico finito de ordem* n*. Caso contrário, dizemos que* G *é um grupo cíclico infinito.*

Exemplo 2.12. *Sejam* $A = \{1, i, -1, -i\}$ *e o par* $(A, *)$ *em que* $*$ *é a operação de multiplicação nos números complexos. O par* $(A, *)$ *é grupo cíclico de ordem* 4 *pela definição 2.5 e como todos os elementos do conjunto* A *podem ser escritos como potências de* $i \in A$*, segue que* i *é elemento gerador do grupo* A *pela definição 2.6.*

$$1 = i^0; \quad i = i^1; \quad -1 = i^2; \quad -i = i^3; \quad 1 = i^4$$

2.2 Subgrupos

Definição 2.8. *Seja* $(G, *)$ *um grupo e* H *um subconjunto não vazio de* G*. Dizemos que* H *é um subgrupo de* G *se* H *for ele próprio um grupo com a mesma operação de* G*. Denota-se que* H *é subgrupo de* G *por* $H < G$*.*

Propriedade 2.5. *Seja* $(G, *)$ *um grupo e* H *um subconjunto não vazio de* G*. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) H *é um subgrupo de* G*;*

(b) Valem: (i) $e \in H$*, (ii)* $a * b \in H$ *para quaisquer dois elementos* $a, b \in H$ *e (iii)* $a^{-1} \in H$ *para qualquer elemento* $a \in H$*;*

(c) $H \neq \varnothing$ *e* $a * b^{-1} \in H$ *para quaisquer dois elementos* $a, b \in H$.

Demonstração. Serão feitas as demonstrações das seguintes implicações:

- $(a) \Rightarrow (b)$: decorre da definição 2.1 e das propriedades 2.3 e 2.4;
- $(b) \Rightarrow (a)$: pelas definições 2.1 e 2.8, H é subgrupo de G;
- $(b) \Rightarrow (c)$: por (i), como $e \in H$, segue que $H \neq \varnothing$. De (iii), como b é elemento de H, segue que $b^{-1} \in H$. Pela condição (ii) conclui-se que $a * b^{-1} \in H$;
- $(c) \Rightarrow (b)$: se $H \neq \varnothing$, existe $a \in H$. Portanto, $e = a * a^{-1} \in H$. Se $a \in H$, segue que $a^{-1} = e * a^{-1} \in H$ e, finalmente, se $a, b \in H$, temos que $a, b^{-1} \in H$ e $a * b = a * (b^{-1})^{-1} \in H$ (pelo lema 2.1 a seguir), o que completa a demonstração da propriedade 2.5.

□

Lema 2.1. *Se* G *é um grupo, então para todo* $a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$.

Demonstração. Sejam o par $(G, *)$ um grupo munido da operação $*$ e $a \in G$. Pela definição 2.1, $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, em que $e \in G$ é o elemento neutro de G. Como todo elemento do grupo possui inverso, se $a^{-1} \in G$, então $(a^{-1})^{-1} \in G$ e, novamente pela definição 2.1, temos que

$$(a^{-1}) * (a^{-1})^{-1} = e = a * a^{-1} = a^{-1} * a \tag{2.5}$$

Pelo corolário 2.1, segue da relação 2.5 que $(a^{-1})^{-1} = a$, para todo elemento $a \in G$. □

Observação 2.2. *Note que na demonstração da propriedade 2.5 bastaria termos provado que* $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

Exemplo 2.13. *O par* $(\mathbb{Z}, *_1)$, *em que* $*_1$ *é a operação de adição usual nos inteiros, é subgrupo do grupo* $(\mathbb{Q}, *_2)$, *em que* $*_2$ *é a operação de adição usual nos racionais. Este, por sua vez, é subgrupo do grupo* $(\mathbb{R}, *_3)$, *em que* $*_3$ *é a operação de adição usual nos reais.*

Exemplo 2.14. *Sejam* $(H_1, *)$ *e* $(H_2, *)$ *dois subgrupos do grupo abeliano* $(G, *)$. *Denotemos por* L *o conjunto* $L = \{a * b \mid a \in H_1 \text{ e } b \in H_2\}$. *O par* $(L, *)$ *é subgrupo de* $(G, *)$.

Solução. Para mostrar que L é subgrupo de $(G, *)$, devemos verificar a validade de alguma das condições da propriedade 2.5. Como H_1 e H_2 são subconjuntos não vazios de G, existem $a \in H_1$ e $b \in H_2$, assim temos que $a * b \in L$, ou seja, $L \neq \varnothing$. Sejam $a, b \in L$:

$$a \in L \Rightarrow \exists x_1 \in H_1 \text{ e } y_1 \in H_2 \text{ tal que } a = x_1 * y_1$$

$$b \in L \Rightarrow \exists x_2 \in H_1 \text{ e } y_2 \in H_2 \text{ tal que } b = x_2 * y_2$$

(i) $a * b = (x_1 * y_1) * (x_2 * y_2) = x_1 * (y_1 * x_2) * y_2 = x_1 * (x_2 * y_1) * y_2 = \underbrace{(x_1 * x_2)}_{\in H_1} * \underbrace{(y_1 * y_2)}_{\in H_2} \in L$

(ii) $a^{-1} = (x_1 * y_1)^{-1} = y_1^{-1} * x_1^{-1} = x_1^{-1} * y_1^{-1} \in L$, $\forall a \in L$, ou seja, todo elemento $a \in L$ tem inverso.

Portanto, pela definição 2.8, $(L, *)$ é subgrupo do grupo abeliano $(G, *)$. □

Exemplo 2.15. *O par $(n\mathbb{Z}, *)$, em que $n\mathbb{Z} = \{n \cdot k \mid k \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}\}$ e $*$ é a operação de multiplicação usual nos inteiros, é um subgrupo do grupo $(G, *)$.*

Exemplo 2.16. *Sejam H_1 e H_2 subgrupos de um grupo $(G, *)$. Tem-se que $H_1 \cap H_2$ é um subgrupo de G.*

Solução. Identifiquemos inicialmente a hipótese e a tese:

- **Hipótese:** H_1 e H_2 são subgrupos de um grupo G munido da operação $*$.
- **Tese:** $H_1 \cap H_2$ é subgrupo de G munido da operação $*$.

Pela propriedade 2.5, inicialmente devemos mostrar que $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$. Sejam $e_1 \in H_1$ e $e_2 \in H_2$ os elementos neutros de H_1 e H_2. Como a propriedade 2.3 garante a unicidade do elemento neutro do grupo $(G, *)$, segue que $e = e_1 = e_2$, logo:

$$e \in H_1 \text{ e } e \in H_2 \Rightarrow e \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$$

(i) Sejam $h_1, h_2 \in H_1 \cap H_2$. Por consequência, $h_1, h_2 \in H_1$ e $h_1, h_2 \in H_2$. Como H_1 e H_2 são subgrupos de G com relação a operação $*$ e, pela condição (b) da propriedade 2.5, segue que $h_1 * h_2 \in H_1$ e $h_1 * h_2 \in H_2$, logo, $h_1 * h_2 \in H_1 \cap H_2$.

(ii) Seja $h \in H_1 \cap H_2$. Por consequência, $h \in H_1$ e $h \in H_2$. Como H_1 e H_2 são subgrupos de G e todo elemento pertencente a um subgrupo possui inverso, temos que h^{-1} pertence a H_1 e a H_2, o que resulta que $h^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

□

Exemplo 2.17. *A união $H_1 \cup H_2$ de dois subgrupos H_1 e H_2 de um grupo $(G, *)$ não é, necessariamente, subgrupo de G.*

Solução. Seja o par $(\mathbb{Z}, *)$ um grupo em que $*$ é a operação de adição usual nos inteiros. Sejam H_1 o conjunto dos números que são múltiplos inteiros de 3 e H_2 o conjunto dos múltiplos inteiros de 5. Da definição 1.6 (página 25), tem-se que $H_1 \cup H_2$ é o conjunto dos números inteiros que são múltiplos de 3, de 5 ou de ambos. Para que $H_1 \cup H_2$ com a operação

$*$ seja subgrupo de $(\mathbb{Z}, *)$, é necessário que a condição (ii) do item (b) da propriedade 2.5 seja satisfeita, o que não é verdade, pois $3 \in H_1$ e $5 \in H_2$, mas $3 + 5 = 8 \notin H_1 \cup H_2$. $\square$

Exemplo 2.18. *O par $(\Re, *)$ em que $*$ é a operação de multiplicação de matrizes e $\Re$ é o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 e da forma $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, com $\theta \in \mathbb{R}$. O par $(\Re, *)$ é subgrupo do grupo $(GL_2(\mathbb{R}), *)$, denominado grupo das matrizes invertíveis de ordem 2 com coeficientes reais.*

Solução. Seja $\Re$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 e invertíveis com coeficientes reais. Para mostrar que $(\Re, *)$ é subgrupo de $(GL_2(\mathbb{R}), *)$, verificaremos que as condições do item (b) da propriedade 2.5 são satisfeitas. Quando necessário, para facilitar a escrita, denotaremos o produto $x \cdot y$ por xy, sendo x e y números reais. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(i) $\Re \neq \varnothing$, pois se $\alpha = 0 \in \mathbb{R}$, segue que e $I_2 = \begin{pmatrix} \cos(0) & \operatorname{sen}(0) \\ -\operatorname{sen}(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Re$

(ii) Dadas as matrizes $A, B \in \Re$, verifiquemos se $A * B \in \Re$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ -\operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \operatorname{sen}(\beta) \\ -\operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Como $*$ é a operação de multiplicação de matrizes, calculemos $A * B$:

$$A * B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\ \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) & \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\ \cos(\beta) \\ -\operatorname{sen}(\alpha)\ \cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) + \cos(\alpha)\ \cos(\beta) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \\ -\operatorname{sen}(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \in \Re \tag{2.8}$$

(iii) Existência do elemento neutro: verifiquemos se para qualquer matriz $A \in \Re$, existe a matriz $B \in \Re$ tal que $A * B = B * A = A$. Seja $B \in \Re$ a matriz definida abaixo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ -\operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{=A} * \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=B} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ -\operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{=A}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Analogamente, podemos verificar também que $B * A = A$ para qualquer matriz $A \in \Re$. A matriz B é chamada de matriz identidade de ordem 2 e denotada por I_2.

(iv) Existência do elemento inverso: verifiquemos a existência da matriz $A^{-1} \in \Re$, denotada inversa da matriz $A \in \Re$ tal que $A * A^{-1} = A^{-1} * A = I_2$. Dada uma matriz $A \in \Re$ como a apresentada no passo (2.6), como o $\det(A) = \cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 \neq 0$, então a matriz A é invertível, isto é, admite inversa e satisfaz a condição (iii) do item (b) da propriedade 2.5.

Portanto, o par $(\Re, *)$ em que $*$ é a operação de multiplicação de matrizes é subgrupo do grupo $(GL_2(\mathbb{R}), *)$. □

2.3 Isomorfismos e Homomorfismos

Sejam G_1 e G_2 conjuntos não vazios nos quais estão definidas as operações entre pares denotadas por:

$$\begin{array}{rcccl} * & : & G_1 \times G_1 & \longrightarrow & G_1 \\ & & (x,y) & \longmapsto & x * y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcccl} \circ & : & G_2 \times G_2 & \longrightarrow & G_2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & x \circ y \end{array}$$

Vimos que os pares $(G_1, *)$ e $(G_2, \circ)$ são grupos se as condições da definição 2.1 (página 40) são satisfeitas.

Definição 2.9. *Sejam $(G_1, *)$ e $(G_2, \circ)$ grupos. Estes grupos são isomorfos se:*

(i) Pode ser definida uma aplicação bijetiva φ de G_1 sobre G_2 tal que

(ii) $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ para todo $a, b \in G_1$.

Se G_1 e G_2 são grupos isomorfos, denotamos $G_1 \cong G_2$. Uma aplicação $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ é chamada de isomorfismo se valem (i) e (ii).

Exemplo 2.19. *Sejam os pares $(\mathbb{Z}, *)$ e $(2\mathbb{Z}, \circ)$ grupos com as operações*

$$\begin{array}{rcccl} * & : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & (a,b) & \longmapsto & a + b \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcccl} \circ & : & 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} & \longrightarrow & 2\mathbb{Z} \\ & & (c,d) & \longmapsto & c + d \end{array}$$

Dada a aplicação $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}$ definida por $\varphi(x) = 2x$, temos que $\mathbb{Z}$ e $2\mathbb{Z}$ são isomorfos.

Solução. Denotamos por $2\mathbb{Z}$ o conjunto de todos os inteiros pares. Os dois grupos $(\mathbb{Z}, *)$ e $(2\mathbb{Z}, \circ)$ são isomorfos, pois pode ser definida uma aplicação (ou correspondência) bijetiva $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}$ dada por $\varphi(x) = 2x$ em que $x \in \mathbb{Z}$ e que satisfaça as condições (i) e (ii) da definição 2.9:

(i) A aplicação $\varphi(x) = 2 \cdot x$ é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva;

(ii) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\varphi(a * b) = 2 \cdot (a * b) = 2 \cdot (a + b) = 2a + 2b = \varphi(a) \circ \varphi(b) \tag{2.9}$$

Portanto, $\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}$. □

Exemplo 2.20. *Sejam* $(\mathbb{R}_+, *)$ *e* $(\mathbb{R}, \circ)$ *dois grupos com as seguintes operações:*

$$\begin{array}{rcl} * : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (a,b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} \circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (c,d) & \longmapsto & c + d \end{array}$$

Dada a aplicação $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $\varphi(x) = \log(x)$*, temos que* $\mathbb{R}_+$ *e* $\mathbb{R}$ *são isomorfos.*

Solução. Os dois grupos $(\mathbb{R}_+, *)$ e $(\mathbb{R}, \circ)$ com as operações $*$ e $\circ$ são isomorfos, pois pode ser definida uma aplicação bijetiva $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = log(x)$ que satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 2.9:

(i) A aplicação $\varphi(x) = log(x)$ é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva;

(ii) Sejam quaisquer $a, b \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(a * b) = log(a * b) = log(a \cdot b) = log(a) + log(b) = \varphi(a) \circ \varphi(b) \tag{2.10}$$

Portanto, $\mathbb{R}_+ \cong \mathbb{R}$. □

Exemplo 2.21. *Sejam* $(\mathbb{R}, *)$ *e* $(\mathbb{R}_+, \circ)$ *dois grupos com as seguintes operações:*

$$\begin{array}{rcl} * : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & a + b \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} \circ : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (c,d) & \longmapsto & c \cdot d \end{array}$$

A aplicação $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *definida por* $\varphi(x) = 2^{x-1}$ *não é isomorfismo, embora no exemplo 2.20 foi mostrado que* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R}_+$ *são isomorfos pela aplicação* $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $\varphi(x) = \log(x)$*.*

Solução. A aplicação $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $\varphi(x) = 2^{x-1}$ é bijetiva, mas não é isomorfismo, porque $\varphi(1) = 1$ e $\varphi(2) = 2$, já

$$\varphi(1 * 2) = \varphi(1 + 2) = \varphi(3) = 2^{3-1} = 2^2 = 4 \neq 2 = 1 \cdot 2 = \varphi(1) \circ \varphi(2) \tag{2.11}$$

□

Segundo Dean (1974, p. 56), o conceito de isomorfismo foi apresentado para responder a seguinte questão: "Quando grupos diferentes são intrinsecamente os mesmos?". O primeiro pré-requisito era que houvesse uma aplicação (ou correspondência) bijetiva entre os dois grupos apresentados. A segunda condição era a preservação da operação de grupo. Quando a segunda condição é preservada, parte da estrutura de grupo também será preservada. Apresentaremos a seguir o conceito de homomorfismo de grupos que é o caso em que esta condição é preservada, mas a correspondência deixa de ser bijetiva.

Definição 2.10. *Sejam $(G_1, *)$ e $(G_2, \circ)$ grupos. Uma aplicação φ de G_1 em G_2, denotada por $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$, é chamada de homomorfismo de G_1 em G_2 (ou de G_1 sobre G_2) se φ é uma aplicação sobrejetiva e*

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b) \tag{2.12}$$

para todos os pares (a, b) de $G_1 \times G_2$.

Observação 2.3. *Conforme Dean (1974, p. 57), isto significa que se a imagem de a sob φ é $\varphi(a)$ e a imagem de b é $\varphi(b)$, então a imagem de $(a * b)$ é $\varphi(a) \circ \varphi(b)$. Esta condição será chamada a condição de homomorfismo. A imagem de φ é denotada por $\varphi(G_1)$ e chamada homomorfa de G_1 sob φ. Observe que um isomorfismo é um caso especial de um homomorfismo.*

Exemplo 2.22. *Sejam $(\mathbb{Z}, *)$ e $(G, \circ)$ grupos com as seguintes operações em que $G = \{1, -1\}$:*

$$\begin{array}{rcl} * : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (a, b) & \longmapsto & a + b \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} \circ : G \times G & \longrightarrow & G \\ (c, d) & \longmapsto & c \cdot d \end{array}$$

Temos que $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ dada por $\varphi(n) = \begin{cases} 1, & se \quad n \text{ é par} \\ -1, & se \quad n \text{ é ímpar} \end{cases}$ é homomorfismo de grupos.

Solução. A aplicação entre os grupos $(\mathbb{Z}, *)$ e $(G, \circ)$ é um exemplo de homomorfismo, pois as condições da definição 2.10 são satisfeitas, ou seja, a aplicação φ é sobrejetiva e, dados $n, m \in \mathbb{Z}$, temos quatro casos possíveis:

(i) n e m são pares: $\varphi(n * m) = \varphi(n + m) = 1 = 1 \cdot 1 = \varphi(n) \circ \varphi(m)$;

(ii) n e m são ímpares: $\varphi(n * m) = \varphi(n + m) = 1 = (-1) \cdot (-1) = \varphi(n) \circ \varphi(m)$;

(iii) n é par e m é ímpar: $\varphi(n * m) = \varphi(n + m) = -1 = 1 \cdot (-1) = \varphi(n) \circ \varphi(m)$;

(iv) n é ímpar e m é par: $\varphi(n * m) = \varphi(n + m) = -1 = (-1) \cdot 1 = \varphi(n) \circ \varphi(m)$.

Portanto, a aplicação φ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}$ em G. □

Exemplo 2.23. *Sejam $(\mathbb{R}, *)$ e $(\mathbb{R}_+, \circ)$ grupos com as seguintes operações em que $G = \{1, -1\}$:*

$$\begin{array}{rcl} * : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a, b) & \longmapsto & a + b \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} \circ : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (c, d) & \longmapsto & c \cdot d \end{array}$$

Temos que $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $\varphi(x) = 2^x$ é homomorfismo de grupos.

Solução. A aplicação $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $\varphi(x) = 2^x$ em que $x \in \mathbb{R}$ é um exemplo de homomorfismo do grupo $(\mathbb{R}, *)$ em $(\mathbb{R}_+, \circ)$, pois as condições da definição 2.10 são satisfeitas, ou seja, φ é sobrejetiva e

$$\varphi(a * b) = \varphi(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = \varphi(a) \circ \varphi(b) \tag{2.13}$$

Portanto, a aplicação φ é um homomorfismo de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$. $\square$

Exemplo 2.24. *Sejam $(M_2(\mathbb{R}), *)$ e $(\mathbb{R}, \circ)$ grupos com as seguintes operações:*

$$\begin{array}{rcccl} * & : & M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & & (A, B) & \longmapsto & A + B \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcccl} \circ & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

Dada a aplicação $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$, temos que $M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$ são isomorfos.

Solução. A aplicação φ definida a seguir é um exemplo de homomorfismo do grupo $(M_2(\mathbb{R}), *)$ em $(\mathbb{R}, \circ)$, pois as condições da definição 2.10 são satisfeitas, ou seja, φ é sobrejetiva e

$$\varphi(A * B) = \varphi(A + B) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{(a_1 + a_2) + (d_1 + d_2)}_{=(a_1+d_1)+(a_2+d_2)} = \varphi(A) \circ \varphi(B)$$

em que $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ dadas por $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

Portanto, a aplicação φ é um homomorfismo de $M_2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}$. $\square$

Embora no estudo de Grupos o desenvolvimento dos conceitos teóricos de homomorfismo continue, os principais conceitos necessários para o desenvolvimento das atividades propostas na Educação Básica foram trabalhados até o momento. A continuação deste assunto e que serviu de referência para este estudo pode ser encontrada nas obras "Elementos de Álgebra Abstrata" de Richard A. Dean, "Tópicos de Álgebra" de I. Herstein e "Introdução à Álgebra" de Adilson Gonçalves.

3 Aprendizagem Baseada em Problemas

Neste capítulo, discutiremos o que é a Aprendizagem Baseada em Problemas, como formular uma situação problema e como identificar um problema relevante. Também serão sugeridos problemas olímpicos e estratégias de ensino que podem auxiliar os alunos no desenvolvimento dos raciocínios lógico, indutivo e dedutivo.

3.1 Noção de competência

No ensino básico, especialmente na Matemática, é comum que os alunos sejam apresentados a conteúdos que são trabalhados na seguinte ordem: começa-se com uma visão geral, como, por exemplo, possíveis aplicações do conceito teórico, a motivação histórica ou exemplos numéricos que visam a estabelecer um diálogo com o estudante; em seguida, introduz-se o conceito teórico (algumas vezes se omitem as demonstrações formais) e é realizada uma série de exercícios de fixação para verificar se o aluno entendeu o conceito estudado.

É interessante questionar se esse modelo linear de ensino gera distorções na aprendizagem ou se possibilita que dúvidas como “Onde vou usar isso na minha vida?” ou “Pra quê estou estudando isso?” se manifestem. Tais dúvidas são bastante relevantes se compreendermos que há um contexto por trás delas: é possível que os alunos que as formulam não tenham compreendido a relevância do conhecimento teórico estudado enquanto objeto de construção humana e histórica. Essa ausência de significação gera distorções e, por consequência, banaliza o estudo de uma ciência, transformando-o em simples memorização de métodos de resolução práticos.

Mesmo sem romper com essa linearidade no ensino de Matemática, é importante sugerir outras metodologias que possam contribuir e complementar os modelos já existentes para que os alunos aprendam de maneira mais próxima, significativa e interiorizada nos seus projetos de vida. Vale destacar que há diferentes estratégias que podem ser utilizadas pelo professor de Matemática na sala de aula e que cabe a ele compreendê-las e situá-las a fim de possibilitar o prosseguimento dos estudos aliado ao desenvolvimento do aluno.

Uma metodologia é a Aprendizagem Baseada em Problemas ou Projetos. Nela, primeiramente, é apresentado um problema que, em si, os alunos não sabem resolver pelo fato de não terem trabalhado com os conhecimentos teóricos necessários. A partir dele, levantam-se hipóteses que serão discutidas, trabalhadas e testadas a fim de solucioná-lo. Para uma compreensão mais adequada, é necessário esclarecer o significado de problema em Matemática e definir a noção de competência.

Quando nos deparamos com uma situação e precisamos resolvê-la, devemos pôr em ação vários recursos cognitivos, entre eles os conhecimentos que são aprendidos historicamente. De acordo com Perrenoud (1999, p. 7), o esforço a fim de realizar determinada tarefa chama-se sinergia. Quase toda ação demanda conhecimentos, às vezes superficiais, outras vezes aprofundados, vindos da experiência pessoal, do senso comum, da cultura partilhada ou do próprio conhecimento científico e tecnológico.

Conforme Perrenoud (1999, p. 7), embora admita múltiplos significados, a competência é "uma capacidade de agir eficazmente em um determinado tipo de situação, apoiada em conhecimento, mas sem limitar-se a eles". No processo de ensino, competência e o conhecimento se complementam, uma vez que apenas a apropriação dos conhecimentos por parte do sujeito não permite sua mobilização em situações de ação. Por exemplo: um médico precisa ter conhecimento sobre processos clínicos que vão além da memorização simplista ou de lembranças de teorias correlatas, pois, ao enfrentar uma situação problema, é exigido dele fazer relações, interpretações, interpolações, inferências, invenções e pôr em prática muitas ações que exigem conhecimentos profundos, dos quais se destaca a habilidade de construir uma hipótese e verificá-la.

Em Matemática, em especial nas olimpíadas, os alunos são estimulados a formular hipóteses, experimentá-las, testá-las, abstrair ideias e refletir sobre as inúmeras dúvidas que podem ser formuladas e solucionadas ao longo de um problema.

A noção de competência que pretendemos abordar aqui compreende-se como a tomada de decisões, mobilização de recursos, construção, coordenação, aplicação de esquemas, tomada de consciência e atualização de hábitos e conhecimentos previstos como situação-problema. Todas elas capacidades que os alunos precisam desenvolver na sua vida cotidiana escolar, de modo que trabalhar com problemas olímpicos é uma ferramenta importante para o desenvolvimento das competências e do próprio conhecimento.

Um exemplo interessante é a diferença entre um campeão de xadrez e um computador. Este pode armazenar em sua memória um grande número de jogos, ações, combinações, situações claras de jogo e jogadas eficazes, que se tornam difíceis de serem vencidas em situações clássicas, ou seja, repertoriadas. Já o campeão de xadrez, em uma situação inédita, pode utilizar-se da capacidade de reconhecer e adentrar uma situação inédita e não prevista pelo computador. Ao aliar seus conhecimentos do jogo com a competência de mobilizar ações a fim de atingir o que se projeta, o jogador consegue superar o conhecimento analógico da máquina.

Essa capacidade de articulação em situações que exigem uma mudança de postura e a tomada de ações é bastante vivenciada quando os alunos são perturbados com certos questionamentos nos problemas de Matemática a eles apresentados.

3.2 Compreensão de situações-problema

Problematizar, muitas vezes, pode ser entendido como fazer com que o que estamos trabalhando se torne algo problemático, isto é, complicado ou difícil de executar. Lidamos cotidianamente com problemas diversos, sejam eles nossos relacionamentos, trabalho ou questões de ordem social e política. Se nos retermos ao campo científico, será que problematizar é equivalente a tornar algo mais problemático?

Essa leitura no âmbito educacional gera distorções, pois alimenta o estereótipo de que a Matemática é difícil de ser estudada por lidar somente com problemas difíceis. É importante que o professor esclareça e mostre com seriedade (e sinceridade) que há problemas matemáticos cujas soluções não são triviais e, por consequência, muitas vezes são considerados difíceis de serem solucionados, mas que não significa que serão objetos de estudo no ensino básico ou que todo problema matemático não seja possível de ser resolvido.

A proposta de problematizar no ensino básico é apresentar uma situação para o aluno que gere significado, seja clara, objetiva e que proporcione a ele um momento rico de aprendizagem, despertando assim sua curiosidade para aprender cada vez mais. Lidar com problemas nem sempre é fácil, prático ou rápido de executar.

A partir dessa interpretação, *problematizar* é também escolha e formulação adequada de problemas que permitem a introdução de um novo conhecimento para o aluno. Representa, portanto, um processo em que tanto o aluno quanto o professor aprendem juntos promovendo a discussão em sala de aula, com a finalidade de localizar possíveis contradições e até limitações apresentadas. Por fim, significa produzir atividades que por si próprias não se resumem somente ao momento da resolução, uma vez que a conceituação teórica ainda não foi desenvolvida. São problemas que buscam despertar a curiosidade nos alunos e o conhecimento, conforme coloca Delizoicov (2001):

> São (...) problemas que devem ter o potencial de gerar no aluno a necessidade de apropriação do conhecimento que ele ainda não tem e que ainda não foi apresentado pelo professor. É preciso que o problema formulado tenha uma significação para o estudante, de modo a conscientizá-lo de que a sua solução exige um conhecimento que, para ele, é inédito. (DELIZOICOV, 2001, p. 6).

3.2.1 Aprendizagem Baseada em Problemas

Abaixo destacamos alguns problemas de Matemática (e também olímpicos) que podem ser apresentados aos alunos do ensino fundamental como estratégia para despertar o interesse deles na aprendizagem e, por consequência, para que aprendam o conceitos teóricos necessários para solucioná-los. O problema a seguir pode ser consultdo em Oliveira (2010, p. 17).

Problema 3.1. *Sabendo que em cada jogada o movimento do cavalo consiste em se deslocar duas casas na horizontal e uma na vertical ou duas na vertical e uma na horizontal, decidir se é possível sair da configuração apresentada no tabuleiro (a) e chegar à configuração apresentada no tabuleiro (b) sem que em algum momento existam dois cavalos na mesma casa.*

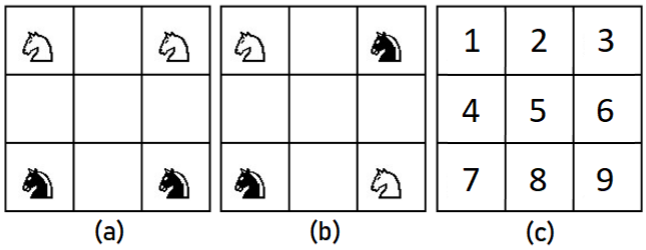


Figura 4 – Movimentos dos cavalos no tabuleiro

Comentários: Nesse problema é importante que o professor dê tempo para o aluno brincar, experimentar e sentir se é possível ou não movimentar os cavalos até os tornar alternados. O obstáculo está em enxergar o problema de outro ângulo, alterando sua representação. Primeiro enumeramos cada casa do tabuleiro por números naturais de 1 a 9 (figura 3.1 (c)) e associamos o tabuleiro (figura 3.1 (a)) com o conjunto de 9 pontos (figura 3.1 (c)). Consoante Oliveira (2010), se for possível partir de uma casa i e chegar à casa j com apenas um movimento do cavalo, colocaremos um segmento (representação) ligando os dois pontos. Por exemplo: o número 1 está ligado ao 6 e ao 8, pois é possível sair da casa 1 e chegar à casa 6 ou 8 com apenas um movimento. Se analisarmos todos os segmentos que podem ser obtidos, teremos a representação gráfica a seguir.

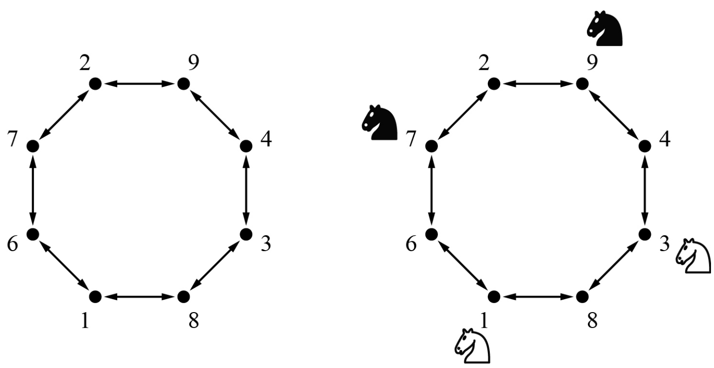


Figura 5 – Movimentos dos cavalos

Observe que no tabuleiro há um cavalo preto na casa 7 e outro na 9. Também há um cavalo branco na casa 1 e outro na 3. Portanto, como os segmentos representam os possíveis caminhos que podem ser percorridos pelos cavalos saindo da casa i até a j, concluímos que não podemos trocar a posição dos cavalos branco e preto sem que, em algum momento, eles ocupem a mesma casa. □

O problema a seguir faz parte da prova da Primeira Fase da Olimpíada Paulista de Matemática (OPM) de 2015 realizada com os alunos do Nível Alfa, ou seja, uma única prova para os alunos que cursavam na época o sexto ou sétimo ano do Ensino Fundamental.

Problema 3.2. *Os testes de divisibilidade são muito importantes para verificar se números (geralmente grandes) são divisíveis por outros números sem efetuar a divisão. O Método de Zbikowski serve para testar se certo número é divisível por um número* $\boldsymbol{p}$ *que possui dígito das unidades igual a* $1, 3, 7$ *ou* 9*. O primeiro passo é multiplicar* p *por* $1, 7, 3$ *ou* 9*, respectivamente, de modo que o resultado seja um número com dígito das unidades* 1*, ou seja, que pode ser escrito na forma* $10 \cdot k + 1$*. Por exemplo, consideremos* $p = 37$*. Esse número possui dígito das unidades igual a* 7 *e, portanto, vamos multiplicá-lo por* 3*. Temos então como resultado* $111 = 10 \cdot 11 + 1$*, ou seja,* $k = 11$*.*

Seja $n = 10 \cdot a + b$ *o número que queremos verificar se é múltiplo de* p*. Pode-se concluir que* p *divide* $10 \cdot a + b$ *se, e somente se,* $\boldsymbol{p}$ *divide* $a - k \cdot b$*. Com isso, podemos trocar o número* n *por um número cada vez menor, até que mentalmente possamos realizar a divisão. Por exemplo, para verificar se* 2035 *é divisível por* 37*, sem realizar a divisão, lembrando que já obtivemos* $k = 11$*, temos:*

- $2035 = 10 \cdot 203 + 5$ *é divisível por* $37 \Leftrightarrow 203 - 11 \cdot 5 = 148$ *é divisível por* 37*. Nesse caso,* $a = 203$ *e* $b = 5$*.*
- $148 = 10 \cdot 14 + 8$ *é divisível por* $37 \Leftrightarrow 14 - 11 \cdot 8 = -74$ *é divisível por* 37*.*

Desse modo, seguimos os passos $2035 \Rightarrow 148 \Rightarrow -74$ *e, como* $-74 = 37 \cdot (-2)$ *é múltiplo de* 37*, então* 2035 *é divisível por* 37*. Observe que se, após os passos, tivéssemos um número que não fosse múltiplo de* 37*, então o número que começou o processo não seria divisível por* 37*.*

Item (a): *Usando o método de Zbikowski, verifique se o número* 22423 *é divisível por* 17*. Lembre-se de expressar na sua resposta cada um dos números intermediários usados e o número final de dois dígitos, possivelmente negativo, que é ou não divisível por* 17*. Em alguns casos, a multiplicação por* k *se torna trabalhosa. Uma opção é usar o número* $a + (p - k) \cdot b$ *no lugar do número* $a - k \cdot b$*. Então, quando* $k < p - k$*, utiliza-se o número* $a - k \cdot b$ *e, quando* $k > p - k$*, utiliza-se* $a + (p - k) \cdot b$*.*

Item (b): *Para* $p = 23$ *verifique qual dos números* k *ou* $p - k$ *é menor. Usando o método de Zbikowski, verifique se o número* 31721 *é divisível por* 23*. Novamente, lembre-se de expressar na sua resposta cada um dos números intermediários.*

Item (c): *Usando o método de Zbikowski, verifique se* 19 *e* 41 *são divisores do número* 155059*. Novamente, lembre-se de expressar na sua resposta cada um dos números intermediários.*

Conforme escreve Perrenoud (1999, p. 59), é interessante também que o professor questione seus alunos sobre detalhes que passam despercebidos no momento da aula sem perder a clareza e a objetividade no conteúdo estudado. Por exemplo: ao abordar o número de interseções entre duas retas no plano, o professor pode propor aos seus alunos uma atividade investigativa a fim de compreender qual a visão geométrica de retas no plano. Será que ela admite espessura? Como eles a imaginam: como duas rodovias que se cruzam num ângulo não necessariamente reto? Como esclarece Perrenoud (1999),

> O trabalho por "situações-problema" não pode utilizar os atuais meios de ensino, concebidos em uma outra perspectiva. Não há necessidade de cadernos de exercícios ou fichas de perder de vista, mas sim de situações interessantes e pertinentes, que levem em conta a idade e o nível dos alunos, o tempo disponível, as competências a serem desenvolvidas. (PERRENOUD, 1999, p. 61).

Vale ressaltar, quando o autor tomou como referência o termo "nível", ele não se mostra favorável ao processo de ensino e aprendizagem numa perspectiva de um balde vazio que vai se enchendo de conhecimento. O professor deve saber selecionar, formular e propor situações-problema que de fato levem o aluno a mobilizar suas competências a fim de resolver o problema apresentado, adquirindo para si a necessidade da apropriação do conhecimento, suas significações e relações.

3.2.2 Estrutura de uma situação-problema

É importante que o professor também realize um processo de reflexão sobre suas concepções e práticas na aprendizagem baseada em problemas. A formulação dela leva em conta vários aspectos relevantes que devem ser antes estudados, tais como:

1. Qual é a referência, a meta ou o objetivo da questão?
2. Qual é o contexto que localiza, situa, fornece informações, em favor da referência? Contexto ou pretexto?
3. Qual é o obstáculo (grande, médio ou pequeno) que a questão coloca para se alcançar a solução do problema?
4. Qual é a relação entre o obstáculo e as dificuldades da pessoa avaliada?

As situações problemas podem ser resolvidas individual ou coletivamente. Temos a seguir a estrutura de uma situação problema:

- O sujeito, ao realizar uma **tarefa**, encontra um **obstáculo**;
- O sujeito é orientado pela tarefa, o educador pelo obstáculo;

- A transposição do obstáculo deve representar um **patamar no desenvolvimento cognitivo** do sujeito;
- Para efetuar a mesma operação mental, cada um deve poder utilizar uma **estratégia diferente**;
- A concepção e a aplicação da situação-problema devem ser reguladas por um conjunto de dispositivos de **avaliação**.

3.3 Problemas olímpicos do Ensino Básico

A seguir, apresentaremos uma série de problemas olímpicos de Matemática que podem ser trabalhados com os alunos a fim de desenvolver o raciocínio lógico e demonstrativo tendo como referencial os conceitos teóricos estudados em Grupos. A referência bibliográfica adotada foi a obra "A arte de resolver problemas" de Polya (2006).

3.3.1 Passo 1: Compreensão do Problema

Quando lidamos com situações-problema, é imprescidível, no decorrer da resolução, termos sempre bem traçado o nosso objetivo, isto é, "O que pretendemos alcançar?". Isso equivale a dizer, conforme Polya (2006, p. 5), "Qual é a incógnita?".

Ambas as indagações tendem a provocar no leitor a mesma operação mental, isto é, buscam auxiliá-lo a organizar o pensamento lógico sem perder a objetividade na resolução, ou seja, o ponto de chegada. Para isso, também é importante que ele relacione a incógnita com os dados fornecidos com a maneira como esses dados estão relacionados com o que pretende-se alcançar.

Nessa primeira etapa, o mais importante é saber compreender o problema como um todo. Para isso, é importante que o professor estimule seus alunos a encontrarem a incógnita, a explicitarem quais são os dados fornecidos e como eles estão associados, ou seja, a compreender qual é a condicionante.

Em Matemática, quando o aluno se depara com uma situação-problema, é interessante que o professor o estimule a refletir se no decorrer da sua trajetória escolar, alguma vez, ele já se deparou com um problema semelhante que tinha a mesma incógnita. Essa abordagem consiste em escolher um problema correlato que o irá ajudar a resolver o problema proposto, pois conforme Polya (2006),

> A compreensão incompleta do problema, em consequência da falta de concentração, talvez seja a deficiência mais comum. No que diz respeito à concepção do plano e à visualização de uma ideia geral da resolução, dois defeitos opostos são muito frequentes: alguns alunos atiram-se aos cálculos e ao desenho sem qualquer plano ou ideia geral; outros, esperam

> desajeitadamente que surja alguma ideia e nada fazem para apressar a sua aparição. (POLYA, 2006, p. 67).

O problema a seguir foi retirado da prova da Terceira Fase da Olimpíada de Matemática da Unicamp (OMU) de 2015 referente ao Nível Beta.

Exemplo 3.1. *Foi observado em laboratório que a quantidade de uma determinada bactéria, num meio de cultura, a cada dia é diretamente proporcional ao número de bactérias do dia anterior mais um número constante de bactérias. Por simplicidade vamos denotar por k a constante de proporcionalidade, por s o número de bactérias somadas a cada dia e por $B(1)$ o número de bactérias no primeiro dia. Determine o número de bactérias no quarto dia de cultura, considerando $k = 3, s = 4$ e $B(1) = 10$.*

Comentários. **Possível solução:** Vejamos como esse problema pode ser trabalhado com os alunos:

- **Qual é a incógnita?** Ele quer descobrir o número de bactérias no quarto dia, ou seja, o valor de $B(4)$.
- **Qual é a hipótese?** $B(1) = 10$ e que $B(n) = k \cdot B(n-1) + s,\ n = 0, 1, \ldots$

1. $B(1) = 10$ bactérias no 1° dia.
2. $B(2) = 3 \cdot B(1) + 4 = 34$ bactérias no 2° dia.
3. $B(3) = 3 \cdot B(2) + 4 = 106$ bactérias no 3° dia.
4. $B(4) = 3 \cdot B(3) + 4 = 322$ bactérias no 4° dia.

Portanto, o número de bactérias no quarto dia é igual a 322. □

Esse primeiro passo para resolver uma situação problema consiste na elaboração de um plano. Verificar quais são os passos e cumprir com atenção e de maneira organizada e estrutural auxilia o aluno a resolver o problema com mais nitidez e confiança. É desejável que o aluno pule passos com a certeza de que os métodos de resolução foram aplicados corretamente. Além disso, é necessário que o aluno esteja engajado no processo de resolução, pois, conforme Polya (2006),

> É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. (POLYA, 2006, p. 5).

Para cada um dos passos realizados pelo aluno durante a resolução de um problema, é natural surgirem dúvidas sobre a validade dos passos. Essa questão é natural e deve ser acompanhada do seguinte questionamento pelo professor: *O que justifica a validade desse passo: intuição ou raciocínio formal?* Para responder à essa pergunta, o aluno deve ser questionado e levado a pensar no seguinte problema: "é possível perceber que o passo está certo?" ou "É possível mostrar que o passo está errado?"

Após a verificação de todos os passos, conforme Polya (2006, p. 12), o estudante deve avaliar a veracidade dos resultados encontrados. Essa etapa consiste numa importante situação de aprendizagem, uma vez que proporciona a apropriação de técnicas e métodos de resolução que podem ser aplicados em diferentes situações e problemas matemáticos. Nessa etapa final, cabe também ao professor questionar os alunos se é possível resolver o problema por um caminho diferente, pois

> Um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros, de que nenhuma relação têm com qualquer outra coisa. Surge uma oportunidade natural de investigar as relações de um problema quando fazemos o retrospecto de sua resolução. (POLYA, 2006, p. 13).

Quando um professor questiona seus alunos, a intervenção deve ser pensada para auxiliar o estudante a resolver o problema apresentado. É natural que os alunos apresentem soluções para aquele problema específico, cabendo ao professor apresentar soluções também gerais e que possam ser aplicadas na resolução de outros tipos de problemas, inclusive aqueles ainda não apresentados para o aluno. As sugestões devem desenvolver a capacidade do estudante de resolver problemas de todos os tipos, e não somente problemas específicos.

É sugerido ao professor estar consciente ao interferir na aprendizagem do aluno. É importante que o estudante sinta que, ao terminar de resolver a situação proposta, o trabalho foi seu, embora o professor o tenha auxiliado com sugestões que, de certa forma, culminaram com a resolução do problema proposto.

3.3.1.1 Importância da Analogia

Dizer que duas coisas são análogas nos remete a relações de correspondência entre objetos, coisas ou pessoas distintas. Por exemplo: embora exerçam funções distintas, há uma correpondência - analogia - entre o trabalho de um jornalista e o de um escritor. Usamos analogia quando pretendemos estabelecer comparações para tomarmos decisões, sejam elas de cunho matemático ou não.

Em Matemática, para resolver uma situação-problema que exija grau de observação maior, muitas vezes recorremos à analogia com problemas mais simples que nos permitem resolver situações mais complexas. Buscar um problema semelhante, mais simples, e que mantém as mesmas características é fazer uso da analogia. Por exemplo: trabalhar com medidas de um paralelepípedo retangular é muito parecido com trabalhar com retângulos, por conta das propriedades, e exemplifica como o pensamento análogo pode nos auxiliar a resolver problemas que envolvam cálculos de diagonais. Isso exemplifica que o pensamento análogo pode nos auxiliar a resolver problemas que envolvam cálculo de diagonais, entre outros.

Em Matemática, conforme Polya (2006, p. 38), realizar uma *inferência por analogia* consiste em considerar semelhanças entre dois objetos matemáticos e, a partir dessa conjectura, formalizar o conhecimento entre eles associados. Conforme o autor em questão explicita, seria tolice acreditar fortemente na certeza da inferência, contudo, mais tolice ainda é ignorar sua existência e desconsiderá-las como plausíveis. De acordo com Polya (2006),

> A inferência por analogia parece ser o tipo mais comum de conclusão e é o essencial. Proporciona conjecturas mais ou menos plausíveis que podem ou não ser confirmadas pela experiência e pelo raciocínio mais rigoroso. Um historiador, ao estudar a influência das mais famosas personalidades do passado sobre a nossa geração, chega a conclusões por analogia. (POLYA, 2006, p. 38)

3.3.1.2 Identificação da Condicionante

Parafraseando Polya (2006, p. 41), a condicionante é uma das partes essenciais ao lidarmos com problemas de determinação. Ela pode ser redundante, contraditória ou insuficiente. Por exemplo: ao resolvermos um problema que envolve equacionamento, se há menos equações do que se acredita ser o necessário, dizemos que a condicionante (o que amarra a hipótese com a incógnita) é insuficiente. Caso ela seja exatamente igual, então a condicionante é suficiente. No entanto, se for possível obter mais equações além do que se pretende no problema, dizemos que a condicionante é redundante.

3.3.2 Passo 2: Estabelecimento do plano

3.3.2.1 Escolha do Problema Correlato

Ainda conforme Polya (2006, p. 41), durante a nossa trajetória escolar somos apresentados a uma série de exercícios e problemas sobre diversos assuntos em Matemática. Quando nos deparamos com um problema que ainda não nos foi apresentado, é natural surgir insegurança e receio de não o resolver por ser difícil ou por não termos conhecimento suficiente para lidar com esse tipo de situação.

Nessas ocasiões, é importante relembrar de exercícios que possuem a mesma incógnita. Há diversos exercícios que possuem a mesma pergunta de um problema mais elaborado, mas seus dados estão amarrados de formas diferentes. O principal, neste momento, é, dentre uma gama de exercícios, escolher um que nos seja útil e estudar o seu método de resolução.

Nos problemas de determinação, a escolha do problema correlato é mais fácil. Já em problemas de demonstração, é interessante que o professor instrua seus alunos a buscarem teoremas que possam ser úteis para a resolução do problema exposto por meio do questionamento "Conhece algum teorema que possa ser útil?"

O problema a seguir foi extraído da prova da Segunda Fase da Olimpíada de Matemática da Unicamp (OMU), Nível Beta do ano de 2015. Omitiram-se os itens (b) e (c) para maior objetividade.

Exemplo 3.2. *Vamos denotar por $B(n)$ o número de bactérias no n-ésimo dia em uma determinada cultura, e que no início da cultura, isto é, no dia $n = 0$, tenhamos $B(0) = 80$. Considere que nessa cultura de bactérias o número de bactérias cresça 100% a cada dia e que a partir do segundo dia, isto é, a partir do dia $n = 2$, essa população apresente uma mortalidade de 75% do número total de bactérias de dois dias anteriores. Determine o número de bactérias no quarto dia, isto é, no dia $n = 4$.*

Comentários. Observe que um problema correlato ou semelhante é o 3.1, situado na página 61. A incógnita é a mesma: calcule o número de bactérias quando $n = 4$. O aluno que resolveu o primeiro exercício, mesmo com a ajuda do professor, deve ser questionado sobre quais as semelhanças entre os dois problemas e se é possível relacioná-los.

No exemplo 3.2, cabe ao professor questionar seus alunos a identificarem com objetividade o que o problema apresenta como informações e o que ele pede (incógnita). Nota-se claramente que, no primeiro item, ele pede para calcular o valor de $B(4)$, isto é, o número de bactérias no quarto dia. Para isto, o aluno precisa saber como é o processo de crescimento dela e o número inicial de bactérias. Todas essas informações que constituem as hipóteses do problema estão bem esclarecidas no enunciado.

Solução: Vejamos uma possível solução que pode ser explorada com os alunos:

- **Qual é a incógnita?** Ele quer descobrir o número de bactérias no quarto dia, ou seja, o valor de $B(4)$.

- **Qual é a hipótese?** $B(0) = 80$ (corresponde ao primeiro dia) e que o número de bactérias dobra a cada dia, mas com mortalidade de 75% do número de bactérias de dois dias anteriores a partir do segundo dia.

  1. $B(0) = 80$ (número inicial de bactérias)
  2. $B(1) = 2 \cdot B(0) = 2 \cdot 80 = 160$ bactérias no 1° dia.
  3. $B(2) = 2 \cdot B(1) - 75\% \cdot B(0) = 2 \cdot 160 - 0,75 \cdot 80 = 260$ bactérias no 2° dia.

4. $B(3) = 2 \cdot B(2) - 75\% \cdot B(1) = 2 \cdot 260 - 0,75 \cdot 160 = 400$ bactérias no 3° dia.
5. $B(4) = 2 \cdot B(3) - 75\% \cdot B(2) = 2 \cdot 400 - 0,75 \cdot 260 = 605$ bactérias no 4° dia.

□

O problema a seguir foi retirado do simulado preparatório para a prova da terceira fase da Olimpíada de Matemática da Unicamp (OMU), do Nível Beta (Ensino Médio) em 2011.

Exemplo 3.3. *Mostre que $\sqrt{2}$ é um número irracional, isto é, não pode ser escrito na forma*

$$\frac{a}{b}$$

*onde **a** e **b** são números inteiros positivos, com $b \neq 0$.*

Comentários. No problema acima, há a proposição "o número $\sqrt{2}$ é um número irracional". O professor, no papel de provocador dos alunos, pode levá-los a pensar: somente há duas possibilidades para $\sqrt{2}$: ou ele é racional ou é irracional. Podemos supor que ele seja racional e usar uma série de implicações lógicas que, se nos levarem a uma contradição, revelarão que em algum momento da construção lógica assumimos algo falso, no caso, a afirmação da racionalidade do número $\sqrt{2}$.

Possível solução: Hipoteticamente, vamos supor que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Então existem números $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ e $mdc(a, b) = 1$ tais que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \tag{3.1}$$

Da equação 3.1, multiplicando por b em ambos os lados da equação, chegamos na relação $a = \sqrt{2} \cdot b$ que é equivalente a $a^2 = 2 \cdot b^2$ $(\star)$. Como o segundo membro é igual ao número inteiro b^2 multiplicado por dois, segue que a^2 é par. Analisando a paridade em que P é a notação para número par, e I para ímpar, temos:

- **Possibilidade 1:** $P \times P = P$
- **Possibilidade 2:** $P \times I = P$
- **Possibilidade 3:** $I \times I = I$
- **Possibilidade 4:** $I \times P = P$

As únicas possibilidades para que a^2 seja par são a primeira, a segunda e a quarta. Como $a^2 = a \cdot a$ e a possuem uma única paridade, segue que a única possibilidade é a primeira, logo a é um número par.

Se a é par, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2 \cdot k$. Substituindo na relação indicada por $(\star)$, temos: $(2 \cdot k)^2 = 2 \cdot b^2 \Leftrightarrow 4 \cdot k^2 = 2 \cdot b^2 \Leftrightarrow 2 \cdot k^2 = b^2$.

Novamente, como o conjunto dos números inteiros munidos da operação de multiplicação é fechado, então k^2 é também um número inteiro, e sendo multiplicado por 2 resulta que b^2 é também par e, por analogia, tem-se que b é par.

Portanto, se a e b são números pares, segue que $\frac{a}{b}$ não é uma fração irredutível como proposto inicialmente. Portanto, $\sqrt{2}$ não é racional e, logo, é irracional. $\square$

3.3.2.2 Identificação da Incógnita

Trataremos como incógnita não somente o termo desconhecido que pretendemos determinar, mas também os objetivos que nos motivam a resolver o problema matemático apresentado. A incógnita norteia o trabalho, uma vez que exige do estudante a capacidade de mobilizar ações a fim de sintetizar e concretizar o que se pretende, no caso, resolver o problema apresentado.

A incógnita, do modo como nos referimos aqui, pode ser entendida como a meta do exercício, isto é, a conclusão que ele exige. Para encontrá-la, é importante que o professor estimule seus alunos a refletirem sobre as seguintes questões:

1. Quais são os meios para atingir este fim?
2. Como podemos chegar a ele? Como podemos obter um resultado desse tipo?
3. O que geralmente se faz para obter resultados como este?
4. Procure pensar num problema conhecido e que tenha a mesma incógnita ou semelhante ou procure pensar num teorema conhecido que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.

Nos problemas de determinação, encontrar um problema correlato significa encontrar um problema que esteja relacionado com o objeto estudado. Por exemplo: encontrar um problema que possua a mesma incógnita é um bom exemplo de problema correlato. Nesse caso, podemos nos atentar mais ao que é perguntado do que propriamente à condicionante.

Muitos problemas em Matemática diferem entre si por apresentarem dados que em outros são omitidos ou até ressignificados. A ressignificação decorre de um processo criativo e, muitas vezes, interessante por conta da maneira como ele foi elaborado e é apresentado ao leitor. Cabe ao professor, nessa situação, estimular o aluno a pensar em problemas correlatos (mais simples, de preferência) questioná-lo: *É possível utilizá-lo?* Se não for possível, *deve-se introduzir algum elemento auxiliar para possibilitar a sua utilização?* Conforme coloca Polya (2006),

> Relembrando problemas já anteriormente resolvidos e que tenham a mesma incógnita ou outra semelhante (teoremas já anteriormente demonstrados e que tenham a mesma conclusão ou outra semelhante), teremos uma boa possibilidade de começar na direção certa e poderemos conceber um plano de resolução. (POLYA, 2006, p. 46).

O problema a seguir foi extraído da Prova Final da Olimpíada Paulista de Matemática (OPM) de 2010 do Ensino Médio. Vejamos:

Exemplo 3.4. *Os celulares com tecnologia CDMA utilizam como princípio de funcionamento os Códigos de Walsh, que permitem que vários celulares utilizem a mesma banda de frequências ao mesmo tempo, sem interferências. Por exemplo, para uma estação base se comunicar com dois celulares, digamos A e B, ela envia um bit de cada vez o qual pode ser interpretado por ambos, mas será válido para apenas um deles. Cada celular possui um código que é uma 2^k-upla cujos elementos são todos iguais a -1 ou 1. Cada bit de informação também é transmitido via uma 2^k-upla, chamada vetor de informação. No nosso caso, sejam $(1,1)$ o código de A e $(1,-1)$ o código de B. É então realizado o produto escalar, $(x,y) \otimes (w,z) = xw + yz$, entre o seu código e o vetor de informação que chegar. Assim, quando A recebe o vetor (a,b), onde* ***a*** e **b** *podem ser -1 ou 1, ele realiza a seguinte operação, cujo resultado será o bit recebido: $\dfrac{(1,1)\otimes(a,b)}{2} = \dfrac{1\cdot a + 1\cdot b}{2}$. Se $(a,b) = (1,1)$, o bit lido por A é $\dfrac{(1,1)\otimes(1,1)}{2} = \dfrac{(1\cdot 1 + 1\cdot 1)}{2} = 1$ e B lê $\dfrac{(1,-1)\otimes(1,1)}{2} = \dfrac{1\cdot 1 + (-1)\cdot 1}{2} = 0$, o que não é um bit válido, isto é, esse bit deve ser apenas considerado pelo celular A. Evita-se dessa forma que ocorra a interferência.*

Outra característica importante desse sistema é que os vetores de informação podem ser sobrepostos. Novamente, vejamos um exemplo: o bit -1 corresponde ao vetor de informação $(-1,-1)$ para o celular A (verifique!) e o bit 1 corresponde ao vetor de informação $(1,-1)$ para o celular B (verifique!). Basta transmitirmos o vetor resultante $(-1,-1)+(1,-1)=(0,-2)$, e ambos celulares recebem os bits adequados (verifique!), como se a informação enviada para o outro celular não existisse. Tal propriedade é fruto dos códigos apresentados, $(1,1)$ e $(1,-1)$, serem ortogonais, ou seja, o produto escalar dos dois é zero (pode confiar que garantimos que está certo!).

Conjuntos de 2^k-uplas cujas entradas são iguais a -1 ou 1 e são ortogonais duas a duas são denominadas Códigos de Walsh de ordem 2^k. Tais conjuntos devem ainda ter exatamente 2^k elementos.

Para a resolução dos itens a seguir, observe que a definição generalizada de produto escalar é:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \otimes (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n \tag{3.2}$$

Uma estação base envia os seguintes vetores de informação para quatro celulares distintos X, Y, Z e W: $(2,2,2,-2), (1,-1,-1,1), (1,-3,1,1), (1,-1,-1,-3)$. Preencha a tabela a seguir, em que indicamos os códigos de ordem 4. Determine, em cada instante, os bits recebidos por cada um deles. O produto escalar deve ser dividido por 4 nesse caso.

Código	*bit 1*	*bit 2*	*bit 3*	*bit 4*
$X = (1, 1, 1, 1)$				
$Y = (1, -1, 1, -1)$				
$Z = (1, 1, -1, -1)$				
$W = (1, -1, -1, 1)$				
Celulares que recebem bits válidos				

Comentários. O problema 3.4 não é recomendado para ser trabalho com alunos do ensino médio regular na tentativa de auxiliá-los a desenvolver o raciocínio lógico. Isso se deve ao fato da complexidade do problema, que é mais adequado para alunos que frequentam aulas olímpicas de Matemática.

Nota-se que o texto do problema traz muitas informações para o leitor e que o desenvolvimento das ideias no texto é complexa. O estudante que não possui um amadurecimento tanto na língua materna quanto no uso da simbologia matemática pode apresentar dificuldades para compreendê-lo. É usual que os estudantes, de maneira geral, sintam-se perdidos com as informações do texto e isso gere desestímulo ao aprendizado de Matemática.

O problema apresentado torna-se relevante quando o professor o apresenta para a turma não para solucioná-lo, mas para identificar certos pontos que são esquecidos por conta do imediatismo da maioria dos estudantes. Na ânsia de quererem solucioná-lo sem identificar a incógnita, as hipóteses, a condicionante e traçar um plano de ação, os estudantes sentem-se perdidos e podem vir a utilizar as informações do texto de maneira errônea.

O ideal é que o estudante, antes de ler o enunciado, entenda o problema como um todo e identifique o que ele pergunta, isto é, qual é a incógnita. Em seguida ele irá buscar no texto as informações que são mais relevantes e que possibilitam determinar o que o exercício pede.

- **Qual é a incógnita?** Preencher a tabela com os bits.
- **Qual é a hipótese?** São fornecidos os vetores de informação para quatro celulares X, Y, Z e W e também uma "fórmula" que permite calcular os bits a partir destas informações.
- **Qual é a condicionante?** Para encontrar os bits, deve-se usar a relação matemática 3.2 e os dados da tabela e, em seguida, dividir por 4.

Possível solução: Construiremos uma tabela para sintetizar as informações do problema. O cálculo se resume a efetuar o produto escalar entre os vetores de cada linha e coluna, respectivamente.

Código	$(2,2,2,-2)$	$(1,-1,-1,1)$	$(1,-3,1,1)$	$(1,-1,-1,-3)$
$(1,1,1,1)$	1	0	0	-1
$(1,-1,1,-1)$	1	0	1	1
$(1,1,-1,-1)$	1	0	-1	1
$(1,-1,-1,1)$	-1	1	1	0
Celulares (bits válidos)	X,Y,Z,W	W	Y,Z,W	X,Y,Z

Os dados da segunda coluna foram obtidos calculando-se os respectivos produtos escalares. Os demais cálculos foram omitidos pelo fato do raciocínio ser análogo.

- $(2,2,2,-2) \otimes (1,1,1,1) = \dfrac{2+2+2+2}{4} = 1$
- $(2,2,2,-2) \otimes (1,-1,1,-1) = \dfrac{2-2+2-2}{4} = 1$
- $(2,2,2,-2) \otimes (1,1,-1,-1) = \dfrac{2+2-2+2}{4} = 1$
- $(2,2,2,-2) \otimes (1,-1,-1,1) = \dfrac{2-2-2-2}{4} = -1$

□

3.3.2.3 Reconstrução de um problema

Ao resolver um problema, há diversas formas de "atacá-lo", isto é, de começar a analisá-lo. É comum os estudantes começarem pelos detalhes, o que pode dificultar o trabalho. Ler, observar e refletir sobre o problema como um todo, antes de analisar as partes da condicionante são etapas geralmente esquecidas pelos alunos. O excesso de detalhes, que muitas vezes compõem um problema de Matemática, pode induzir o aluno ao erro justamente porque ele pode querer, antes de reorganizar os detalhes, encontrar a incógnita. É o que esclarece Polya (2006),

> Quem entra em detalhes corre o risco de neles se perder. As particularidades muito numerosas ou minuciosas constituem uma sobrecarga mental. Podem impedir que se dê a devida atenção ao ponto principal, ou mesmo que se perceba este ponto. É bom lembrar do homem que não podia ver a floresta por causa das árvores. (POLYA, 2006, p. 47).

Caso o professor se depare com o questionamento: "Por onde devo começar?", é preferível que oriente o aluno a ler mais atentamente o problema, a identificar o que ele pede e a selecionar quais informações são relevantes. Elas podem ser separadas em diversas partes que auxiliarão o estudante na resolução, de modo que examiná-las separadamente é uma boa estratégia.

As possibilidades de recombinação, conforme Polya (2006. p. 46), são ilimitadas. Em especial, os problemas mais desafiadores exigem do solucionador uma estratégia quase inovadora, que combine sua criatividade, sua experiência com problemas anteriores e, inclusive, sua originalidade na concepção de ideias. Para essa reconstrução, podem ser adotadas as seguintes estratégias:

(1) Manter a incógnita e mudar o restante (os dados e a condicionante);

(2) Manter os dados e mudar o restante (a incógnita e a condicionante);

(3) Manter a incógnita e os dados;

Para cada um dos casos citados acima, principalmente quando se pretende alterar a incógnita, é importante avaliar se a introdução de uma nova incógnita no problema auxilia o aluno no processo para encontrar a incógnita inicial, tornando-o mais fácil.

Outra estatégia que pode ser útil é separar a condicionante em diversas partes e estudá-las separadamente. Isso ajuda o aluno a se ater menos aos detalhes do exercício e o auxilia a estruturar o raciocínio lógico. A incógnita, por sua vez, fica menos restrita e, ao retornar com as partes da condicionante, alguns detalhes que poderiam passar despercebidos passam a ter atenção especial.

3.3.2.4 Definição dos termos

Quando definimos algo, atribuímos significado através de suas características. Para isso, podemos definir com base em outros termos já definidos anteriormente. Em Matemática, ao definirmos, geralmente usamos termos anteriores que já foram apresentados e fornecem subsídios para definição de novos termos. Como qualquer outra área do conhecimento humano, a Matemática também dispõem de termos técnicos, ou seja, representações próprias, que, muitas vezes, exigem do aluno uma gramática específica e que, para outras pessoas, pode não ser facilmente compreendida.

As definições que um dicionário genérico de língua portuguesa faz dos termos que explicita é diferente das definições matemáticas, pois essas não carregam valor semântico, mas o significado matemático. Por exemplo: o Dicionário Aurélio Online (2017) atribui ao termo “Parábola” os seguintes significados

> Narração alegórica que envolve algum preceito de moral, alguma verdade importante; Curva plana cujos pontos distam igualmente de um ponto fixo (foco) e de uma reta fixa (diretriz); Dobadoura com duas ordens de travessas cruzadas. (DICIONÁRIO AURÉLIO ONLINE, 2017).

Em Matemática, há diferentes formas de escrever a definição de um objeto. Em muitas delas, aparecem termos já definidos anteriormente, ou até termos primitivos.

Por exemplo: a esfera é geralmente definida como lugar geométrico de todos os pontos equidistantes de um ponto dado. Nesse caso, para definir a esfera precisou-se da definição de ponto (termo primitivo). Entende-se ponto como uma unidade indivisível e que pode ser localizado no espaço por meio de suas coordenadas. A interpretação geométrica auxiliou, nesse caso, a compreender o que se pretende definir por esfera.

Uma pergunta também pertinente ao ler as definições de termos em Matemática é: "Levou em consideração todas as noções essenciais que interessam ao problema?". Muitos termos carregam em si detalhes que podem passar despercebidos, conforme Polya (2006),

> A volta às definições constitui uma importante operação mental. Se desejamos compreender a importância das palavras, precisamos primeiro sentir que as palavras são importantes. Dificilmente podemos raciocinar sem o auxílio de palavras, ou de signos, ou de símbolos de qualquer espécie. Assim, palavras e signos têm poder. (POLYA, 2006, p. 59).

O problema a seguir foi retirado da Prova da Segunda Fase (Nível Beta) da Olimpíada de Matemática da Unicamp (OMU) de 2014.

Exemplo 3.5. ***Definição 1:*** *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Definimos* ***potenciação*** *para expoentes naturais da seguinte forma:*

$$A^0 = I_n \quad , \quad A^1 = A \quad , \quad A^2 = AA \quad , \quad A^{k+1} = AA^k \tag{3.3}$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Definição 2: *Seja R uma matriz real quadrada de ordem n. Dizemos que R é uma matriz* ***auto-reflexiva*** *se $R^2 = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.*

Definição 3: *Seja P uma matriz real quadrada de ordem n. Dizemos que P é uma matriz* ***idempotente*** *se $P^2 = P$.*

(a) Seja R uma matriz auto-reflexiva de ordem n. Determine os valores dos parâmetros α e β de modo que a matriz $P = \alpha R + \beta I_n$ seja uma matriz idempotente.

(b) Mostre que a matriz R é auto-reflexiva e escreva explicitamente a matriz idempotente $P = \alpha R + \beta I_2$.

$$R = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Comentários. Novamente temos o caso de um problema indicado para ser trabalhado com turmas olímpicas de Matemática. Nele, pode-se constatar a presença de três definições. Na primeira, para definir "potenciação", usa-se a noção de expoentes de números naturais, isto é, a definição de um termo mais abrangente requer o conhecimento de termos já estudados anteriormente. Também é possível verificar a mesma relação nas outras duas definições que compõe o problema.

Possível solução: Primeiro vamos sintetizar as informações do problema a fim de solucioná-lo. Comecemos pelo item (a):

- **Qual é a incógnita?** Valor dos parâmetros α e β.
- **Qual é a hipótese?** R é uma matriz auto-reflexiva de ordem n e P é uma matriz idempotente.
- **Qual é a condicionante?** Os parâmetros α e β podem ser encontrados a partir da relação $P = \alpha R + \beta I_n$
  - **Hipótese 1:** Se P é idempotente de ordem n, então $P^2 = P$
  - **Hipótese 2:** Se R é auto-reflexiva de ordem n, então $R^2 = I_n$

$$P^2 = (\alpha R + \beta I_n)^2 = \alpha^2 \cdot I_n + (2 \cdot \alpha \cdot \beta) \cdot R \cdot I_n + \beta^2 \cdot I_n^2 \tag{3.4}$$

$$P = \alpha R + \beta I_n = (2\alpha\beta) \cdot R + (\alpha^2 + \beta^2) \cdot I_n \Leftrightarrow \alpha = 2\alpha\beta \;\text{ e }\; \alpha^2 + \beta^2 = \beta \tag{3.5}$$

Da primeira equação, temos: $\alpha = 2\alpha\beta \Leftrightarrow 1 = 2\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}$, desde que $\alpha \neq 0$. E da segunda equação, temos: $\alpha^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{1}{2}$. Portanto, as duas possibilidades para a matriz P são:

$$P = \frac{1}{2} \cdot R + \frac{1}{2} \cdot I_n \qquad P = -\frac{1}{2} \cdot R + \frac{1}{2} \cdot I_n \tag{3.6}$$

Item (b): Queremos verificar se a matriz R é idempotente, ou seja, $R^2 = I_n$. Partindo da matriz R dada no enunciado, temos:

$$R^2 = \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Da relação 3.7, concluímos que R é, de fato, uma matriz idempotente. Para escrever a expressão, usaremos as relações obtidas no passo 3.6:

$$P = \pm\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

□

3.3.2.5 Demonstrações por absurdo

Trata-se de um método bastante usado em demonstrações matemáticas. Conforme o Wikipédia (2017), o nome provém do latim *reductio ad absurdum*, também conhecido como *método do terceiro excluído*. Ele se baseia no seguinte princípio: uma afirmação que não pode ser falsa deverá ser consequentemente verdadeira. Para utilizá-lo, de maneira geral, segue-se o roteiro:

- **Passo 1:** Assumimos a **validade da hipótese**;
- **Passo 2:** Supomos que a **tese** seja **falsa**;
- **Passo 3:** Usando as duas afirmações anteriores, concluímos por meio de argumentos verdadeiros que uma afirmação é falsa. Como tal fato não poderá ocorrer, segue que nossa tese é verdadeira.

Na linguagem usual, a demonstração por absurdo assemelha-se à ironia. Esta consiste na utilização de palavras que manifestam um sentido contrário ao sentido literal ou original. A ironia afirma o contrário do que se pretende dizer com o intuito de manifestar determinada opinião sobre determinado fato ou objeto. Conforme Polya (2006, p. 62), "Temos de examinar a situação hipotética na qual todas as partes da condicionante são satisfeitas, embora tal situação pareça extremamente improvável".

Conforme Polya (2006, p. 65), a demonstração por absurdo, em alguns casos, pode se tornar também uma ferramente difícil de trabalhar, uma vez que todas as deduções feitas no processo são corretas, mas as situações que devemos enfrentar são impossíveis. Para utilizá-la, recomenda-se o uso incansável de palavras como: hipoteticamente, supostamente, presumidamente. Polya (2006) explica muito bem essa dificuldade

> Mas parece difícil que, de uma demonstração por absurdo, possa resultar alguma coisa de verdadeiro. O procedimento parte de uma suposição falsa e daí deduz consequências que o são igualmente - talvez ainda mais visivelmente - falsas, até chegar à última consequência, esta flagrantemente falsa. (POLYA, 2006, p. 64).

O problema abaixo exemplifica muito bem como a demonstração pode ser útil. Ele foi extraído da prova da terceira fase da Olimpíada de Matemática da Unicamp (OMU) dos alunos do Nível Beta (Ensino médio) de 2011.

Exemplo 3.6. *Mostre que se p é um número primo, então $\sqrt{p}$ é um número irracional, isto é, não pode ser escrito na forma*

$$\frac{a}{b},$$

onde a e b são números positivos, com $b \neq 0$.

Comentários. Observe que um problema correlato a este é o 3.3, situado na página 65. Da mesma forma como foi demonstrado que $\sqrt{2}$ é um número irracional, pode-se mostrar que a raiz quadrada de qualquer número primo também o é.

Possível solução: Hipoteticamente, suponha por absurdo que $\sqrt{p}$ seja um número racional, isto é, existam inteiros positivos a e b, com $b \neq 0$ e $mdc(a,b) = 1$ tal que $\sqrt{p} = \dfrac{a}{b}$. Temos:

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a = \sqrt{p} \cdot b \Leftrightarrow \underbrace{a^2 = p \cdot b^2}_{(\star)} \Leftrightarrow p \mid a^2 \text{ e como } mdc(p,a) = 1 \Leftrightarrow p \mid a \tag{3.9}$$

Da relação anterior, como p é divisor de a, então existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = q \cdot p$. Substituindo "a" na relação indicada por $(\star)$, temos:

$$(q \cdot p)^2 = p \cdot b^2 \Leftrightarrow q^2 \cdot p^2 = p \cdot b^2 \Leftrightarrow q^2 \cdot p = b^2 \Leftrightarrow p \mid b^2 \text{ e como } mdc(p,b) = 1 \Leftrightarrow p \mid b \tag{3.10}$$

Desse modo, como p divide a e p divide b, então $mdc(a,b) \neq 1$ e chegamos a uma contradição. Mostramos assim que $\sqrt{p}$ é um número irracional. □

3.3.3 Passo 3: Execução do plano

Após refletir sobre a compreensão do problema como um todo, chega o momento do estudante executá-lo, isto é, a hora de colocar em prática todo o traçado que foi feito. Para isto, Polya (2006, p. 67) orienta sobre a ausência de organização na aprendizagem dos alunos:

> Na execução do plano, o defeito mais frequente é o desleixo, a falta de paciência para verificar cada passo. A omissão da verificação do resultado é muito comum: o aluno contenta-se em obter uma resposta, põe de lado o lápis e não se espanta com os resultados, por mais disparatados que eles forem. (POLYA, 2006, p. 68).

Algumas provocações como "É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível vê-lo num relance?" podem auxiliar o aluno a executar diferentes planos para uma mesma situação problema apresentada.

Resolver um problema em Matemática significa preencher o espaço vazio entre os dados e a incógnita. Mais do que pensar em diferentes maneiras de resolvê-lo, o ponto principal está em como iniciá-lo e como trabalhar com as informações de maneira objetiva e clara.

3.3.3.1 Como iniciar um problema

O início exige leitura atenta e compreensão do problema como um todo. Saber identificar a incógnita, a condicionante e os dados fornecidos é um bom começo. Em seguida, é preciso pensar qual é a relação que os dados possuem com a incógnita. Essa relação é chamada de condicionante e é o que permitirá, junto com outras informações fornecidas, transpor esse espaço vazio e resolver a situação problema apresentada.

Durante toda resolução, é importante que o estudante não se esqueça da frase: "Considere sua incógnita!". É muito comum encontrarmos em resoluções dos alunos diversas tentativas de solucioná-lo, mas poucas delas são objetivas. Para evitar isso, é importante que o estudante não se esqueça do seu alvo ou objeto de ação. Em seguida, é importante que ele pense em problemas semelhantes ou correlatos que possuam a mesma incógnita. Isso permite que o aluno relembre dos métodos que foram utilizados anteriormente e que podem ser aplicados ou adaptados para resolver o novo problema.

Quando o aluno é estimulado a pensar na incógnita, pode ser interessante que ele comece a refletir sobre o problema a partir do que é pedido. Entretanto, quando o estudante dá mais atenção para os dados ou para os detalhes do problema, geralmente o trabalho tende a ser mais exaustivo.

3.3.3.2 Condicionante

A condicionante, no sentido genérico da palavra, expressa uma condição para que determinado fato aconteça. Por exemplo: o pagamento é uma **condicionante** da conclusão da obra de um servidor assalariado.

Em Matemática, a condicionante é o que permite fazer a ligação entre o que é fornecido num problema, a hipótese, e o objeto alvo do problema, que é a incógnita.

Um problema bem formulado exige que essa relação entre os dados e a incógnita não admita falhas ou ambiguidade, isto é, a condicionante deve ser necessária e suficiente para determinar a solução proposta. Durante a resolução de um problema, é importante que o aluno pense na seguinte questão: "A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou é redundante? Será que é contraditória?" (POLYA, 2006, p. 73). Conforme explica o autor,

> Encontrar a solução de um problema constitui uma descoberta. Se o problema não for difícil, a descoberta não será memorável, mas não

> deixará de ser descoberta. Ao fazermos uma descoberta, por mais modesta que seja, não devemos deixar de investigar se não haverá mais alguma coisa por detrás dela, não devemos perder as possibilidades oferecidas pelo novo resultado, devemos tentar utilizar de novo o procedimento adotado. (POLYA, 2006, p. 73).

Na obra "Círculos Matemáticos" de Fomin (2012, p. 9), encontra-se o seguinte problema, enumerado com o número 30:

Exemplo 3.7. *Gafanhotos estão brincando de pular carniça ao longo de uma reta. Em cada vez, um gafanhoto pode pular sobre um outro gafanhoto, mas não sobre dois outros gafanhotos. Os gafanhotos podem voltar às suas posições relativas depois de* 1991 *pulos?*

Figura 6 – Problema dos Gafanhotos

Comentários. Começaremos o problema evidenciando a incógnita, os dados e a condicionante. Vejamos:

- **Qual é a incógnita?** Saber se a sequência de gafanhotos após 1991 pulos será a mesma que a primeira.
- **O que é dado?** Uma sequência de três gafanhotos dispostos em linha reta.
- **Qual é a condicionante?** Para encontrar a sequência de gafanhotos após 1991 pulos, sabe-se que a cada vez um gafanhoto pode pular sobre um outro gafanhoto, mas não sobre dois outros gafanhotos.

Possível solução: Podemos pensar numa *notação adequada* para agirmos com maior clareza. Denotaremos os gafanhotos por A, B e C, da esquerda para a direita, respectivamente. O problema pede a sequência que obteremos após os gafanhotos executarem 1991 pulos e pergunta se ela coincide com a inicial. Um *problema correlato* e que pode nos auxiliar é o 1.28 na página 38, pois ambos possuem a mesma incógnita.

As possíveis configurações são: ABC, BCA e CAB. Como essa sequência se repetirá para os próximos saltos, ao dividir 1991 por 3, teremos quociente e resto iguais a 663 e 2, respectivamente. Portanto, após 1991 saltos, a sequência obtida será CAB, que é diferente da sequência ABC. Portanto, a resposta do problema é que a sequência se difere da inicial. $\square$

3.3.3.3 Elementos auxiliares

Introduzir elementos auxiliares significa acrescentar novos elementos no problema trabalhado. Esse acréscimo deve ser muito bem pensado, uma vez que, ao introduzi-los, novas informações poderão ser obtidas.

Ao encontrar um problema correlato, embora o problema novo e o velho (correlato) possuam a mesma incógnita, às vezes, é difícil utilizá-lo na sua integridade devido à maneira como as informações estão amarradas. Introduzir novos elementos pode ser uma boa alternativa quando se pretende utilizar os mesmos métodos (ou semelhantes) que foram usados no problema correlato, mas tomando-se o cuidado de não alterar a essência do problema, pois

> As tentativas de utilizar resultados conhecidos e a volta às definições estão entre os melhores motivos para introduzir elementos auxiliares, mas não são os únicos. Podemos acrescentar elementos auxiliares à nossa concepção do problema, a fim de torná-la mais rica, mais sugestiva, mais familiar, muito embora mal saibamos como utilizar os elementos introduzidos. (POLYA, 2006, p. 80).

Problema 3.3. *Qual é o maior número de regiões em um plano que pode ser dividido por n círculos?*

Comentários. A fórmula matemática que retorna o maior número de regiões obtidas em um plano dividido por n círculos é $n \cdot (n-1) + 2$, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 1$. Para obter esses resultados, introduzimos um círculo pontilhado a fim de nos auxiliar a identificar quantas regiões a mais são obtidas com o novo círculo.

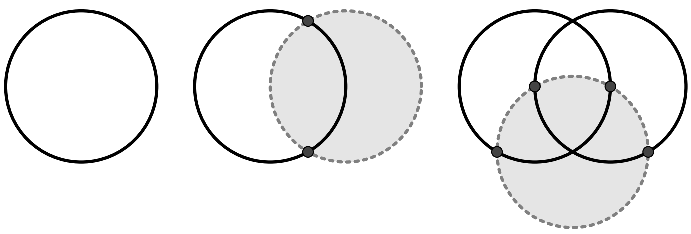


Figura 7 – Divisão do plano com círculos

Olhando para a figura 7, comecemos a estudá-la a partir do primeiro círculo situado à esquerda. Se ignorarmos o restante da figura, temos que um círculo divide o plano em duas regiões.

No centro, há dois círculos que dividem o plano em, no máximo, quatro regiões. À direita notamos que três círculos dividem o plano em, no máximo, oito regiões. Para encontrar a fórmula que retorna o número máximo de regiões que podem ser obtidas a partir de n círculos que dividem o plano, observemos:

- Ao introduzir uma nova circunferência (representada pela linha cinza pontilhada) ela intersecta cada uma das circunferências anteriores, no máximo, em dois pontos.
- O número de pontos de intersecção da nova circunferência com as demais já existentes é o número de regiões formadas a mais em relação à anterior.

Possível solução: Suponha que tenhamos um desenho com $(k-1)$ circunferências desenhadas, sendo $k \in \mathbb{N}$ e $k \geqslant 1$. Ao introduzir a k-ésima circunferência, esta irá intersectar as $(k-1)$ circunferências em, no máximo, dois pontos distintos cada uma, e o número de intersecções obtidas da k-ésima circunferência com todas as demais será igual a $2 \cdot (k-1)$. Se denotarmos por k o número de circunferências no plano, e por a_k o maior número de divisões do plano com as k circunferências, temos as seguintes relações:

$$\begin{array}{ccccccc} a_2 & = & a_1 & + & 2 & \cdot & (2-1) \\ a_3 & = & a_2 & + & 2 & \cdot & (3-1) \\ a_4 & = & a_3 & + & 2 & \cdot & (4-1) \\ a_5 & = & a_4 & + & 2 & \cdot & (5-1) \\ a_6 & = & a_5 & + & 2 & \cdot & (6-1) \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ a_k & = & a_{k-1} & + & 2 & \cdot & (k-1) \end{array} \Rightarrow \sum_{i=2}^{k} a_i = \sum_{i=2}^{k} (a_{i-1} + 2 \cdot (i-1)) \tag{3.11}$$

Da igualdade anterior, simplificando os termos de cada lado, obtemos: $a_k = a_1 + 2 \cdot ((2-1) + (3-1) + (4-1) + \cdots + (k-1)) = 2 + 2 \cdot ((2+3+\cdots+k) - (k-1) \cdot 1) = 2 + 2 \cdot \left(\left(\frac{2+k}{2} \right) \cdot (k-1) - (k-1) \cdot 1 \right) = 2 + (2+k) \cdot (k-1) - 2 \cdot (k-1) = 2 + (k-1) \cdot ((2+k) - 2) = 2 + k \cdot (k-1)$. Essa relação coincide com a fórmula matemática que retorna o maior número de regiões em que o plano pode ser dividido com n círculos.

Provemos agora que a relação $a_k = 2 + k \cdot (k-1)$ é válida para todo número natural $k \geqslant 1$ usando o Segundo Princípio da Indução.

- $p(k=1)$ é verdadeira? Sim, pois, se $k=1$, teremos, de fato, que o número máximo de regiões em que o plano pode ser dividido é igual a $2 = 2 + 1 \cdot (1-1) = a_1$
- Suponhamos que a relação $a_{k'} = 2 + k' \cdot (k'-1)$ seja válida para qualquer $k' \in \mathbb{N}$ no intervalo $1 \leqslant k' \leqslant k$.
- Será que $p(k+1)$ é verdadeira? Sim, pois ao incluir o $(k+1)$-ésimo círculo, ele irá intersectar cada um dos k círculos anteriores, no máximo, em dois pontos e, com isso, o número de regiões do plano poderá variar no máximo, $2 \cdot (k)$. Portanto, $a_{k+1} = a_k + 2k = 2 + k \cdot (k-1) + 2k = 2 + k \cdot ((k-1) + 2) = 2 + k \cdot (k+1)$

$\square$

3.3.3.4 Intuição ou demonstração

A intuição configura-se como a capacidade de identificar ou pressupor afirmações que não dependem necessariamente de um conhecimento empírico. Trata-se de um conhecimento imediato que não requer o auxílio de um raciocínio que demonstre sua veracidade.

Principalmente em problemas que envolvem construções geométricas, a intuição é uma ferramenta importante quando o aluno está envolvido numa situação em que não consegue demonstrar com clareza, objetividade e formalidade, mas sabe que, de alguma forma, seus conhecimentos prévios o levam a crer na veracidade da afirmação.

Agir sobre uma intuição, no âmbito matemático, não significa se convencer da veracidade dela, mas sim buscar argumentos formais que justifiquem aquela passagem que, a princípio, não se exterioriza com tamanha clareza. No entanto, deve-se tomar cuidado para não sobrecarregar com demasiados detalhes, numa visão euclidiana, o que acabaria tornando o processo confuso.

3.3.4 Passo 4: Retrospecto

Rever o problema e verificar a veracidade da solução encontrada é, na maioria dos casos, deixado de lado pelos alunos e professores, de modo que não é difícil encontrar soluções de alunos que retornam números que não condizem com a realidade. "Os resultados numéricos de problemas matemáticos podem ser verificados pela comparação com números observados ou por estimativa judiciosa de números observáveis." (POLYA, 2006, p. 76).

A *verificação dos argumentos* em cada passo do exercício é vital para encontrar a passagem na qual se gerou o duvidoso e que culminou em erro. O conhecimento de ordem experimental é aquele que o aluno adquire ao longo da sua trajetória escolar após resolver problemas de diversos assuntos. Isso favorece o aluno a encontrar possíveis erros durante a resolução de um problema, conforme nos apresenta Polya (2006),

> Na concepção do plano de resolução, não devemos temer muito o raciocínio heurístico, que é apenas plausível. Tudo estará certo, desde que nos conduza à ideia certa. Mas precisamos mudar este ponto de vista quando iniciamos a execução de um plano e, aí, somente devemos aceitar os argumentos conclusivos e rigorosos. (POLYA, 2006, p. 91).

É sensato que o aluno não se prenda somente às demonstrações formais, mas que também saiba justificar os passos e relacioná-los com outros resultados que já foram verificados.

Exemplo 3.8. *Encontre as soluções no conjunto dos números reais da seguinte equação:*

$$x = 2x + 1 \tag{3.12}$$

Comentários. Nesse exemplo, pretendemos ilustrar o aparecimento de falsas raízes partindo da seguinte igualdade "$x = 2x + 1$" ($\star$). Possivelmente, a maioria dos estudantes diriam que a solução encontrada é -1. Para mostrar aos alunos a importância do retrospecto, o professor pode apresentar a resolução que "produz" uma raiz falsa e verificar com eles o que justifica o aparecimento dela.

Deixamos claro que $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$. Elevando ambos os lados da equação ($\star$) ao quadrado, temos:

$$x = 2x + 1 \tag{3.13}$$

$$x^2 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \tag{3.14}$$

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \tag{3.15}$$

$$x_1 = -1 \text{ ou } x_2 = -\frac{1}{3} \tag{3.16}$$

De fato, x_1 é raiz da equação $x = 2x + 1$, enquanto que x_2 não é. Essa raiz é denominada **raiz falsa** e foi obtida porque as equações (3.13) e (3.14) não são equivalentes, isto é, apresentam conjuntos soluções distintos. A implicação (3.13) $\Rightarrow$ (3.14) é verdadeira, mas a recíproca é falsa, já que

$$-\frac{1}{3} \neq 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} \qquad \text{(Restrospecto)}$$

$\square$

3.3.4.1 Generalizações

A generalização é a passagem da apreciação referente a um determinado elemento para um conjunto que preserva as características desse elemento. A ação de generalizar trata-se de uma extensão de determinado objeto do conhecimento a patamares maiores. Por exemplo: no problema 1.26, enunciado na página 32, o movimento dos discos pode ser estendido para um número de discos superior ao que, manualmente, é possível manipular.

É comum que os alunos, por meio da inferência, realizem afirmações sem se preocupar se elas serão verdadeiras se forem considerados mais casos. Esses momentos não podem ser esquecidos pelo professor e devem ser questionados e debatidos em aula.

O exemplo a seguir destaca um importante momento histórico, no qual Pierre de Fermat (1601-1665) afirmou ter encontrado uma fórmula que identificava se um número era ou não primo.

Exemplo 3.9. *Fermat nasceu em* 1601 *e morreu em* 1665 *e tinha como passatempo a Matemática. Fermat é lembrado com bastante intensidade em teoria dos números, em particular pelo Último Teorema de Fermat, o qual diz que* $x^n + y^n = z^n$ *não possui nenhuma solução inteira (diferente de zero) para* x, y *e* z*, sendo* $n > 2$.

Durante toda a sua vida, Fermat apresentou persuasão de ter encontrado uma fórmula geradora de números primos tal como segue:

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.17}$$

De fato, essa fórmula se revelou verdadeira ao tomarmos valores naturais de zero a quatro, mas Leonhard Euler mostrou que, para $n = 5$*, a fórmula não gerava um número primo, pois* F_5 *pode ser decomposto como produto de números primos, logo é composto.*

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

O problema a seguir é uma variação do problema 3.3, situado na página 77.

Exemplo 3.10. *Qual é o maior número de regiões em um plano que pode ser obtido por* n *triângulos equiláteros?*

Comentários. Esse problema pode ser trabalhado no ensino médio e requer um raciocínio mais abstrato dos alunos. Comecemos a estudá-lo montando a tabela a seguir:

Número de triângulos	**Total de regiões obtidas (maior possível)**
1	2
2	$8 = 2 + 6$
3	$20 = 8 + 12$
4	$38 = 20 + 18$

Tabela 3 – Divisão do plano em regiões a partir de triângulos

Na figura 8 da página 82, observamos que, na primeira imagem (superior à esquerda), há somente um triângulo que divide o plano em, no máximo, duas regiões (interna e externa a ele).

Na imagem superior do canto direito, ao inserir o triângulo azul, cada lado deste intersecta cada lado do primeiro triângulo em dois pontos distintos, logo, em seis pontos ao total. Observe também que cada sequência de dois pontos faz aparecer uma nova região no plano. Há, nesse caso, 6 novas regiões em relação à anterior.

Na imagem inferior à esquerda, insere-se o triângulo em amarelo. Cada lado dele intersecta cada um dos lados dos dois triângulos anteriores em dois pontos diferentes. Portanto, o total de intersecções obtidas com os três triângulos é igual a $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$. Novamente, nota-se que o número de regiões obtidas, em relação à imagem anterior é,

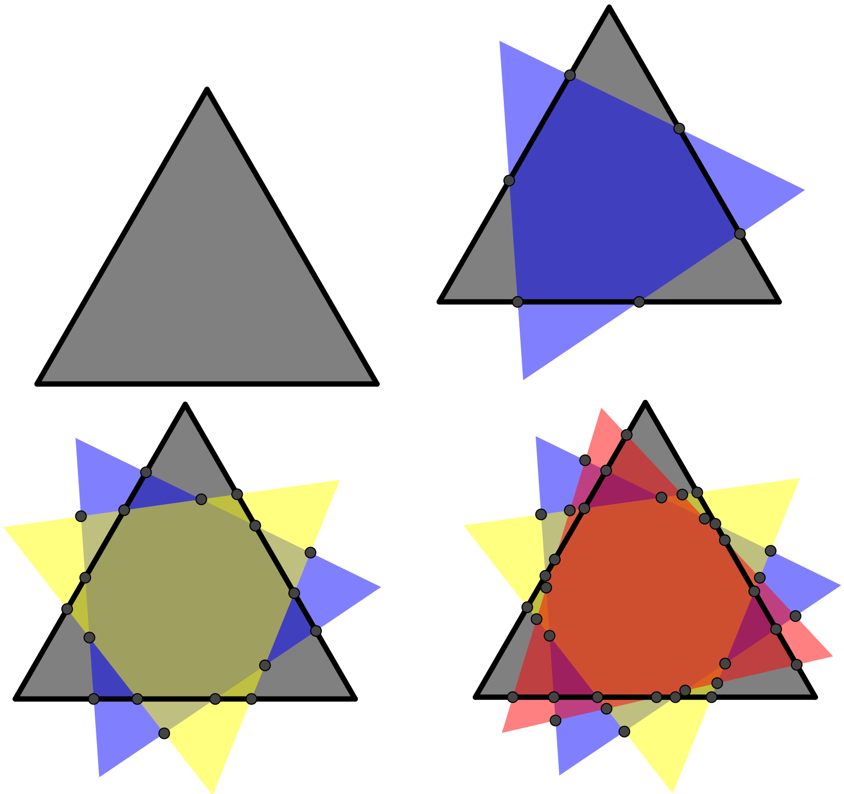


Figura 8 – Divisão do plano em triângulos

no máximo, igual ao número de intersecções entre as arestas dos triângulos. Na imagem inferior à direita, o raciocínio se repete, sendo agora o número de intersecções entre os triângulos igual a $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Com base na observação anterior, o maior número de regiões, denotado por a_n, em que o plano pode ser dividido com n triângulos, pode ser pode ser dado pela seguinte relação matemática:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 6 \cdot (n-1), \ \forall n \in \mathbb{N}, n > 1 \\ a_1 = 2 \end{cases} \tag{3.18}$$

Da relação de recorrência 3.18, situada na página 82, ao somarmos todas as equações do sistema linear abaixo e cancelar termos iguais de ambos os lados, encontraremos a fórmula desejada que retorna o maior número de regiões em que um plano pode ser dividido com n triângulos no plano.

$$+\begin{cases} a_2 & = & a_1 + 6 \cdot (2-1) \\ a_3 & = & a_2 + 6 \cdot (3-1) \\ a_4 & = & a_3 + 6 \cdot (4-1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & = & a_{n-2} + 6 \cdot ((n-1)-1) \\ a_n & = & a_{n-1} + 6 \cdot (n-1) \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=2}^{n} a_i = \sum_{i=2}^{n} (a_{i-1} + 6 \cdot (i-1)) \tag{3.19}$$

Aplicando a lei do cancelamento em ambos os lados da equação acima, encontramos uma fórmula que permite calcular quantas são as regiões em que o plano é dividido sem precisar desenhar e fazer a contagem de cada região.

$$\left.\begin{array}{rcl} a_n & = & a_1 + 6\cdot(2-1) + 6\cdot(3-1) + \cdots + 6\cdot(n-1) \\ & = & a_1 + 6\cdot((2+3+\cdots+n)) - 6\cdot(n-1) \\ & = & a_1 + 6\cdot\left(\dfrac{(2+n)\cdot(n-1)}{2}\right) - 6\cdot(n-1) \\ & = & a_1 + 3\cdot(n+2)\cdot(n-1) - 6\cdot(n-1) \\ & = & a_1 + 3\cdot(n-1)\cdot((n+2)-2) \\ & = & a_1 + 3\cdot(n-1)\cdot n \\ & = & 2 + 3\cdot n\cdot(n-1),\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1 \end{array}\right. \Rightarrow a_n = 2 + 3\cdot n\cdot(n-1) \quad (3.20)$$

Novamente, a fórmula $a_n = 2 + 3\cdot n\cdot(n-1)$ representa bem os dados da tabela 3, mas será que ela pode ser utilizada quando tivermos mais do que quatro triângulos? Vejamos:

Número de triângulos	**Total de regiões obtidas (maior possível)**
1	$a_1 = 2 + 3\cdot 1\cdot 0 = 2$
2	$a_2 = 2 + 3\cdot 2\cdot 1 = 8$
3	$a_3 = 2 + 3\cdot 3\cdot 2 = 20$
4	$a_4 = 2 + 3\cdot 4\cdot 3 = 38$

Tabela 4 – Divisão do plano em regiões a partir de triângulos

Para garantir que a generalização esteja correta, usaremos o Segundo Princípio da Indução Finita. Seja $P(n)$ a propriedade referente a expressão $a_n = 2 + 3\cdot n\cdot(n-1)$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 1$. Queremos verificar se a propriedade se estende a todos os naturais.

- **Passo 1:** Será que $P(1)$ é verdadeira? Sim, pois $P(1) = 2 + 3\cdot 1\cdot 0 = 2$ regiões.
- **Passo 2:** Suponha que a propriedade se mantenha válida para qualquer $n' \in \mathbb{N}$ com $1 \leqslant n' \leqslant n$.
- **Passo 3:** Será que a $P(n+1)$ é verdadeira?

Ao introduzirmos o $(n+1)$-triângulo, temos que ele intersectará cada um dos três lados dos n triângulos anteriores em dois pontos diferentes, totalizando 6 intersecções por triângulo. Como há n triângulos na figura, o total de interseções obtidas será $6n$.

$$P(n+1):\ a_{n+1} = a_n + 6n = 2 + 3\cdot n\cdot(n-1) + 6n = 2 + 3\cdot n\cdot((n-1)+2) = 2 + 3\cdot(n+1)\cdot(n)$$

Portanto, $P(n)$ é válida para qualquer n natural, com $n \geqslant 1$. $\square$

4 Atividades no Ensino Básico

O objetivo deste capítulo é apresentar ao leitor algumas atividades avaliativas de aprendizagem de alunos a partir do referencial teórico apresentado no início do trabalho. A proposta de trabalhar com sequências didáticas tem por objetivo possibilitar que o aluno compreenda os objetivos e o processo de cada atividade proposta. Todas as atividades foram desenvolvidas e aplicadas em duas escolas de Campinas-SP, sendo uma pública e a outra particular. O estudo dos resultados é apresentado no capítulo seguinte.

4.1 Atividade 1 - Como estruturar o raciocínio lógico

Orientações básicas	**Atividade 1**
1. **Tempo necessário:** 5 aulas de 50 minutos cada.	
2. **Materiais necessários:** Projetor, folha impressa e internet.	
3. **Espaço:** Sala de aula e laboratório de informática.	

Título: Estruturando o raciocínio lógico: a importância do professor como provocador nas aulas de resolução de problemas.

Público alvo: Alunos da $1^a, 2^a$ ou 3^a série do Ensino Médio/Alunos do EJA.

Problematização: Com base no que é vivenciado dentro da escola e levando-se em consideração as dificuldades dos alunos em iniciarem problemas de Matemática, a presente atividade busca responder à seguinte questão: No ensino básico os alunos aprendem a resolver situações problema?

Objetivo geral: Descrever como os alunos se mobilizam ao resolver situações problema que demandam raciocínio lógico e dedutivo.

Objetivos específicos:

- Fomentar a discussão sobre técnicas ou métodos voltados a resolver problemas de Matemática;
- Apresentar para os alunos problemas e questioná-los sobre como resolvê-los;
- Angariar dados que possibilitem inferir como é trabalhada a estruturação do raciocínio matemático na educação básica;

Teses: Busca-se, por meio desta atividade, verificar a validade ou não das seguintes teses:

- **Tese 1:** Os professores de Matemática, de maneira geral, tendem a ser pouco questionadores nas aulas de resolução de problemas;
- **Tese 2:** Os alunos apresentam dificuldade ao estruturar o raciocínio lógico;

Conteúdos: Problemas diversos de Matemática.

Dinâmica: A atividade se inicia com duas aulas expositivas nas quais são discutidos tópicos do livro "A arte de resolver problemas", de Polya (2006). Em seguida, são aplicadas atividades que fazem o aluno refletir sobre os pontos levantados pelo autor. Por fim, no laboratório de informática, os alunos preenchem um questionário usando a plataforma digital "Google Forms" com base na atividade proposta.

Passo 1: Suponha que você, por alguma razão inusitada, se encontre perdido na mata abaixo e precise sair dela. Você não possui equipamentos eletrônicos que te auxiliam a realizar a tarefa. Responda, então: O que você observa a princípio? Cite algumas ações que você poderia tomar.

Figura 9 – Atividade 1 - Como estruturar o raciocínio lógico

Passo 2: Com base no seguinte fragmento, responda às questões a seguir:

> Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares. (PCN+, 2002, p. 121).

(a) Realize uma pesquisa e escreva o que você entendeu sobre: definição, teorema, proposição, lema, corolário, regra, lei, princípio, algoritmo, paradoxo, conjectura e demonstração.

(b) Dê um exemplo de cada uma das terminologias apresentadas no item anterior.

Passo 3: Em aula foram trabalhados o conceito de **hipótese, incógnita** e **condicionante**. Identifique-os em cada um dos problemas a seguir sem resolvê-los.

Problema 4.1. *Bráulia cortou um cubo em muitos cubinhos de aresta* 1*cm, através de cortes paralelos às suas faces. Por exemplo, se este cubo tivesse* 4*cm de lado, os cortes produziriam:*

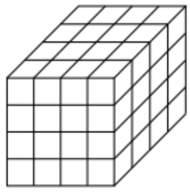


Figura 10 – Problema 4.1: Cubos e cubos - OBMEP

Entretanto, o comprimento da aresta do cubo é desconhecido. Após cortá-lo, Bráulia contou os cubinhos de 1*cm de lado, os quais eram* 512*. Qual era o comprimento da aresta do cubo?*

Problema 4.2. *Nove pontos são desenhados em uma folha de papel, como mostrado na seguinte figura:*

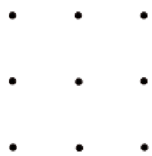


Figura 11 – Problema 4.2: 3 pontos colineares - OBMEP

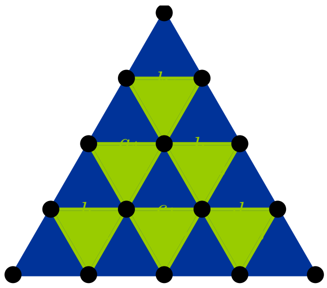
(a) De quantas maneiras é possível escolher três pontos colineares?

(b) De quantas maneiras é possível escolher quatro pontos de modo que três deles sejam colineares?

Passo 4: Trabalhamos em aula que, antes de resolver um problema, é importante traçar um plano de ação. Em exercícios de determinação, podemos lembrar de um problema correlato (possui a mesma incógnita) e que nos auxilie a resolver o problema inicial. Em problemas de demonstração há teoremas, proposições ou sentenças matemáticas que podem nos auxiliar. Com base nisso, **resolva:**

Problema 4.3. *Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem* $3cm$ *de largura,* $18cm$ *de comprimento e* $4cm$ *de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato do cubo é igual a:* ***(a)*** $5cm$ ***(b)*** $6cm$ ***(c)*** $12cm$ ***(d)*** $24cm$ ***(e)*** $25cm$

Problema 4.4. *Dada a imagem abaixo, quantos triângulos é possível escolher na figura?*



Passo 5: Considere a seguinte afirmação: "O problema 4.3 é correlato ao problema 4.1, e o problema 4.4 é correlato ao 4.2". Você concorda com a afirmação? Justifique.

Passo 6: Encontre a solução dos problemas 4.1 e 4.2.

Passo 7: Reveja os cálculos realizados nos exercícios anteriores e estude a solução encontrada. Responda: Como é possível utilizar esses resultados para resolver novos problemas?

Passo 8: A partir dos problemas apresentados, formule uma nova incógnita para cada um deles.

Passo 9: Após responder às perguntas desta atividade, utilize o laboratório de informática ou o seu computador para responder ao questionário de avaliação usando os recursos do Google Forms.

Passo-a-passo sobre como elaborar a atividade: os professores podem sugerir aos seus alunos duas atividades diferentes: lista de exercícios e uma lista com problemas.

Sugestão 1: Há um acervo grande de problemas que podem ser trabalhados com os alunos. Seguem algumas sugestões de competições de Matemática:

- Canguru de Matemática (www.cangurudematematicabrasil.com.br)
- Olimpíada de Matemática da Unicamp (www.olimpiada.ime.unicamp.br)
- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (www.obmep.org.br)
- Olimpíada Paulista de Matemática (www.opm.mat.br)

Sugestão 2: Disponibilizar aos alunos links com acesso a diversos materiais de apoio. Por exemplo: Portal da Matemática por meio do link "https://matematica.obmep.org.br"

Sugestão 3: Utilizar as ferramentas do google (por exemplo: Google Classroom) para criar um ambiente virtual de aprendizagem onde os alunos possam postar suas dúvidas e acessar materiais complementares.

Sugestão 4: Estimular os alunos a relacionar as duas listas (exercícios e problemas), a registrar suas dúvidas e observações, a estudar a complexidade das questões abordadas, a procurar problemas correlatos e a formular novas incógnitas.

Sugestão 5: O professor pode utilizar a plataforma "Google Docs" (www.docs.google.com) e criar documentos que possam ser compartilhados com todos os estudantes. A vantagem do uso dos recursos é que o professor pode acompanhar em tempo real as alterações que os alunos fazem e também sugerir modificações possibilitando o aprendizando em diferentes espaços, tempos e momentos.

4.2 Atividade 2 - Artigos de Matemática

Orientações básicas	**Atividade 2**
1. **Tempo necessário:** 4 aulas de 50 minutos cada.	
2. **Materiais necessários:** Folha impressa.	
3. **Espaço:** Sala de aula ou de leitura.	

Título: Língua materna e linguagem matemática: trabalhando a competência leitora e escritora e suas relações com base nas vivências dos alunos.

Público alvo: Alunos da $1^a, 2^a$ ou 3^a série do Ensino Médio/Alunos do EJA.

Problematização: Partindo do que é vivenciado no contexto escolar e levando-se em consideração as dificuldades na aprendizagem em Matemática dos alunos, a presente atividade reúne questões que possibilitam responder ao seguinte problema: "A perda do encantamento para aprender Matemática é consequência do distanciamento entre a língua materna e a linguagem matemática?"

Objetivo geral: Auxiliar o aluno a compreender as relações entre a língua materna e a linguagem matemática em diferentes contextos.

Objetivos específicos:

- Relatar experiências de aprendizagem dos alunos em Matemática;
- Desepertar nos alunos o interesse pela leitura com o auxílio de referenciais que promovam a discussão e reflexão;

- Proporcionar momentos de aprendizagem significativa para o aluno no âmbito escolar.
- Avaliar como os alunos compreendem a relação entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento.

Teses: Busca-se verificar a validade ou não das seguintes teses:

- **Tese 1:** O uso exclusivo da linguagem simbólica gera dificuldades de compreensão nos alunos;
- **Tese 2:** Alunos que leem pouco tendem a apresentar maior dificuldade em ciências exatas;

Conteúdos: Linguagem matemática: proposições lógicas, conjuntos, símbolos e notação matemática.

Dinâmica: A sala será organizada em grupos e cada grupo será responsável pela leitura de um texto. Juntos, os integrantes deverão ler o texto previamente sugerido pelo professor, discutir a temática levantada e elaborar uma única resenha.

A resenha é uma **análise interpretativa**, isto é, uma síntese de um texto ou livro e, por isso, em sua elaboração, é necessário prestar atenção ao tema que será discutido e às considerações feitas a respeito dele. O objetivo da resenha é informar outros leitores sobre a obra estudada, a partir do ponto de vista do resenhista. A resenha deverá conter:

- Tema (título) a ser analisado;
- Identificação da obra e do autor (referência bibliográfica da obra);
- Breve síntese sobre o conteúdo que será resenhado;
- Aprofundamento e contextualização do tema;
- Avaliação crítica: argumentação e opinião pessoal sobre o tema;

Observação 4.1. *Para a realização da resenha, o modelo é o dos **textos dissertativos argumentativos** que devem conter: introdução, desenvolvimento e conclusão.*

Observação 4.2. *A resenha fornece ao leitor informações sobre uma determinada obra, permitindo que ele decida se sua leitura é ou não pertinente. Textos desse gênero devem ser claros e objetivos em sua exposição e apresentação das ideias. Devem ser evitadas expressões do tipo: "Eu gostei" e "Eu não gostei".*

Avaliação: Os alunos serão avaliados de maneira contínua por meio de relatos de casos, questionários usando plataformas digitais e também por meio da resenha.

Sugestões de questões que podem ser embarcadas no texto:

- Em que medida o ensino da língua contribui para a a aprendizagem de Matemática?
- De que forma o ensino de Matemática contribui para a compreensão de uma língua?
- Qual é a influência da simbologia formal matemática na resolução de problemas?

Passo-a-passo sobre como elaborar a atividade: infelizmente, é usual que os alunos no ensino básico leiam pouco - principalmente textos sobre Matemática. Para tentar solucionar esse problema, sugerimos que os professores utilizem plataformas digitais de aprendizagem para compartilhar artigos ou textos que possam ser lidos pelos alunos.

Passo 1: Há diversos serviços de armazenamento em nuvem (dropbox, oneDrive, googleDrive, entre outros) que podem ser utilizados pelo professor. Escolha um que seja mais prático.

Passo 2: Nesta atividade, o serviço escolhido foi o Dropbox, que pode ser acessado pelo endereço eletrônico "www.dropbox.com". É necessário efetuar um cadastro.

Passo 3: O sistema reúne seus arquivos de forma centralizada e é possível escolher quais serão compartilhados com os estudantes. Você pode montar uma pasta exclusiva para determinada turma e compartilhar, por meio de um link, o endereço dela. Assim, os alunos terão acesso a todos os materiais disponibilizados dentro dela. Há também a opção de criar link somente para um arquivo.

Passo 4: Após clicar em "compartilhar", o professor escolhe se deseja enviar o link por e-mail ou disponibilizá-lo de outra maneira. Há diversos recursos que podem ser utilizados pelo professor para que o aluno tenha acesso ao link: Google Classroom, Google Sites, etc.

Passo 5: Para a escolha dos textos a serem lidos pelos estudantes, há diversas opções, entre elas: busca pelo "Google Acadêmico" por meio do link "www.scholar.google.com.br" ou pelo site "www.dominiopublico.gov.br".

4.3 Atividade 3 - Grupos - Jogo das Palavras Cruzadas

Orientações básicas	**Atividade 3**
1. **Tempo necessário:** 3 aulas de 50 minutos cada.	
2. **Materiais necessários:** Eclipsecrossword, computador, folha impressa e internet.	
3. **Espaço:** sala de aula ou ambiente onde os alunos possam se organizar.	

Título: Conceitos teóricos do estudo de Grupos: aplicações no ensino básico em Matemática.

Público alvo: Alunos que participam de grupos olímpicos de Matemática do 8° e 9° ano do Ensino Médio.

Problematização: A presente atividade reúne algumas questões que procuram responder ao seguinte problema: é possível trabalhar conceitos teóricos aprendidos no estudo de Grupos no ensino básico?

Objetivo geral: Explorar com os estudantes conceitos teóricos de Grupos por meio do jogo das Palavras Cruzadas.

Objetivos específicos :

- Servir como instrumento facilitador do processo de ensino-aprendizagem e estimular o estudo da Matemática;
- Explorar elementos da álgebra a partir de conceitos teóricos estudados em Teoria dos Grupos;
- Auxiliar o aluno a identificar propriedades, conceitos e definições na construção do raciocínio lógico e dedutivo;

Teses: Busca-se, por meio desta atividade, verificar a validade ou não das seguintes teses:

- **Tese 1:** Os alunos, de maneira geral, são pouco estimulados a escrever passo a passo a resolução de um problema;
- **Tese 2:** É possível antecipar conteúdos na Educação Básica a fim de que o aluno desenvolva a capacidade de argumentação que o ajudará caso curse o ensino superior;
- **Tese 3:** Os estudantes que participam de grupos olímpicos ou atividades semelhantes apresentam maior destreza na escrita matemática.

Conteúdos: Conjuntos numéricos e operações matemáticas;

Descrição da atividade: O professor pode, antes da realização desta atividade, retomar com os alunos conceitos ligados a conjuntos, relações de pertinência, inclusão e noção intuitiva de funções. Após esta etapa, recomenda-se que o professor elabore uma aula expositiva e apresente para os alunos alguns exemplos do uso da associatividade, comutatividade, elementos neutro e inverso e, em seguida, apresente o conceito de Grupos.

Após a abordagem teórica e da organização dos alunos em grupos, estes deverão se mobilizar para preencher os espaços disponíveis do jogo das “Palavras Cruzadas”. É importante que o professor acompanhe o jogo e questione seus alunos para que formulem exemplos, novas hipóteses ou dúvidas para serem esclarecidas em aula. O professor também pode propor que criem novas operações matemáticas e verificar quais delas satisfazem as propriedades contidas no jogo das "Palavras Cruzadas".

Passo-a-passo sobre como elaborar a aula expositiva:

Embora cada professor tenha uma metodologia para trabalhar com os alunos, sugerimos que o professor, se for da escola pública do Estado de São Paulo, utilize os recursos digitais que estão acessíveis aos professores, como o pacote Office. Para ter acesso a ele, seguem abaixo as instruções:

Passo 1: Acesse o site da Secretaria Escolar Digital (SED) por meio do endereço eletrônico www.sed.educacao.sp.gov.br.

Passo 2: No canto superior direito há o e-mail institucional (via Microsoft). Você irá utilizá-lo para a instalação do Pacote Office no seu computador.

Passo 3: Acesse o endereço www.office.com e, em seguida, clique em "Sign in". Digite o nome do usuário e a senha, a mesma da SED. Faça o login.

Passo 4: Você encontrará uma tela na qual haverá a possibilidade de baixar o pacote Office de maneira gratuita e rápida para o professor. Os recursos digitais possibilitarão que sua aula seja mais criativa e motivadora para os alunos.

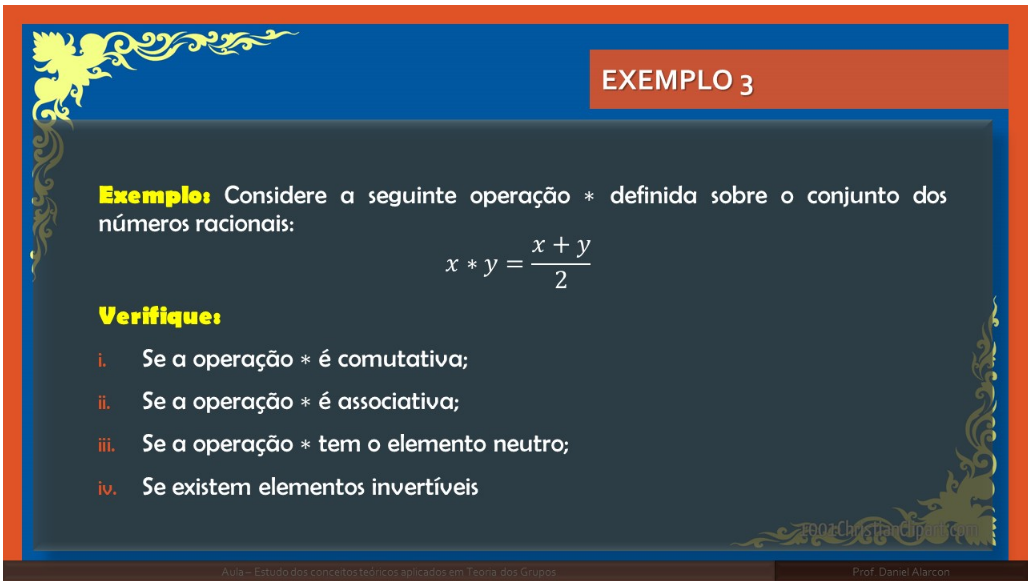


Figura 12 – Uso do powerpoint para aplicação da atividade 3

Passo-a-passo sobre como elaborar o jogo:

Passo 1: Digitar na ferramenta de busca do Google: "EclipseCrossword" e abrir o endereço: "www.eclipsecrossword.com".

Passo 2: Fazer o download do EclipseCrossword de acordo com o sistema operacional do seu computador e instalar o programa. O procedimento pode ser diferente de acordo com a versão do programa.

Passo 3: Na tela inicial há duas opções: você pode gerar um novo jogo ou abrir um que já foi salvo inicialmente. Caso queria começar, selecione a primeira opção e, em seguida, clique em “Next”.

Passo 4: No “Step 2” você poderá incluir quantas palavras quiser (no mínimo duas) para formar as palavras cruzadas. O programa se encarrega automaticamente de definir se elas estarão na vertical ou na horizontal. Também é permitido inserir espaços em branco, por exemplo: “ELEMENTO INVERSO”. Para inseri-las, escreva no campo “Word” a palavra que será “adivinhada” pelo aluno e no campo “Clue for this word:” a dica para o aluno chegar até a palavra. Em seguida, clique em “Add word to list”. Você também pode editar ou excluir após a inclusão de uma palavra na lista.

Passo 5: Você pode dar um nome para as palavras cruzadas e preencher as informações pedidas com o seu nome.

Passo 6: Você pode definir o tamanho da malha de acordo com a sua preferência, e o programa se encarrega de gerá-la.

Passo 7: No último passo, há algumas opções para a utilização do jogo. Cabe ao professor, olhando para o contexto escolar, e também para as possibilidades de aprendizagens dos alunos, determinar qual o modelo ideal. Veja:

- **Save crossword:** salva de maneira que você possa fazer alterações posteriores. É interessante o professor criar um banco de dados e aplicar a mesma atividade em outras turmas atualizando o que achar necessário.
- **Save wordlist:** redireciona para a tela na qual são feitas as alterações na lista.
- **Print crossword:** opção de imprimir o jogo e escolher o número de cópias.
- **Save as a web page:** há três opções nesta tela:
  - **Interactive with JavaScript:** o jogo pode ser disponibilizado para os alunos usando computador. A opção é interessante caso a escola tenha um laboratório de informática.
  - **Empty grid and clues:** opção interessante para os alunos que usam tablets, smartphones ou outras ferramentas que substituam a folha impressa e que os possibilitem escrever diretamente nos quadros em branco.
  - **Answer key grid:** o jogo já vem resolvido.
- **Publish crossword:** exportar o jogo para outras plataformas.

– **Rich text format (RTF):** possibilidade de exportar o jogo para outros programas.

– **Windows metafile (WMF):** exporta o grid (malha com as barras horizontais e verticais).

– **Across Lite TEXT format:** salva o puzzle num arquivo formato text.

Na figura 13 da página 94, destacamos as principais etapas do processo de instalação do Eclipsecrossword. O software pode sofrer alterações na sua versão (atualmente gratuita e compartilhada com todos), inclusive no seu endereço eletrônico.

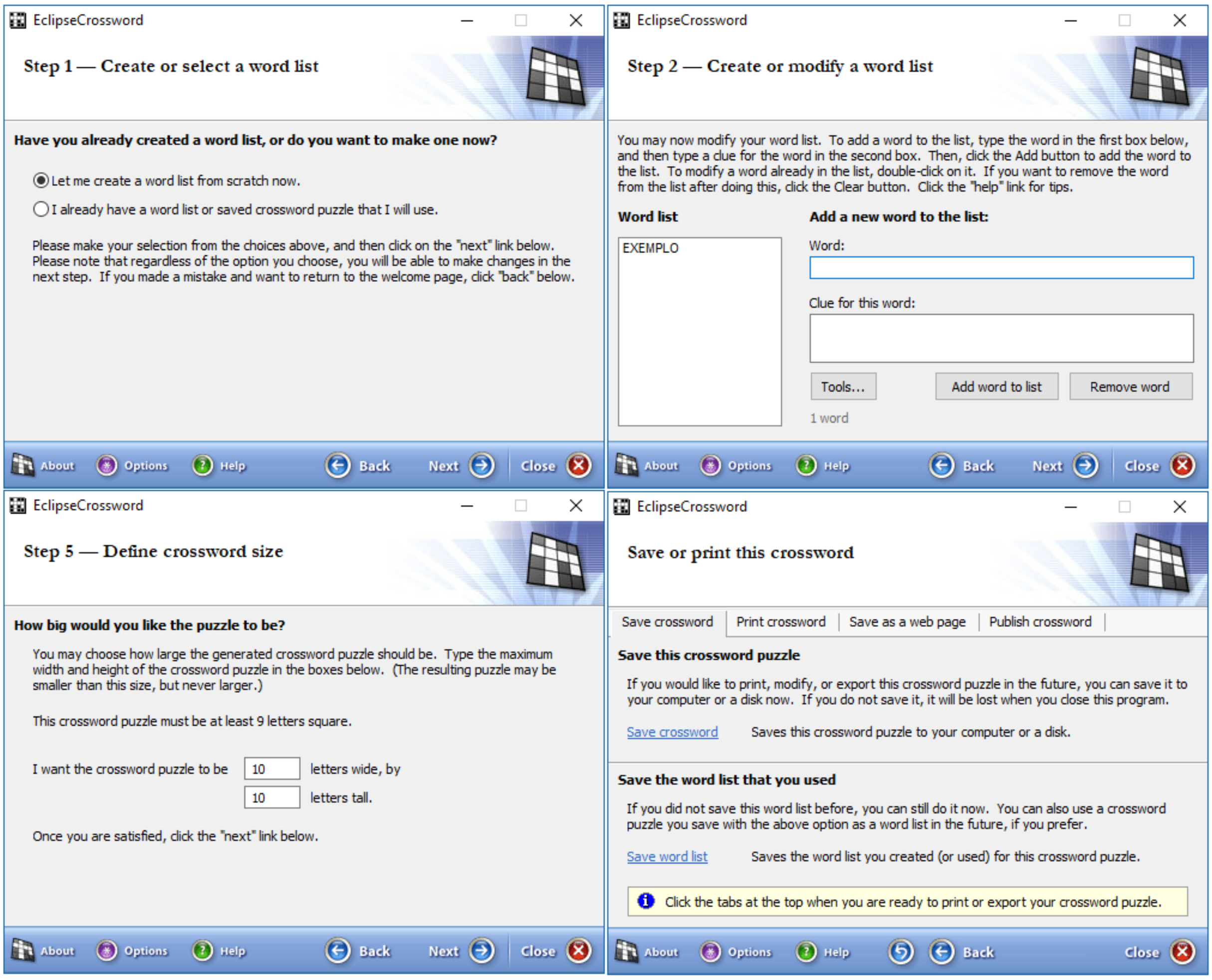


Figura 13 – Processo de instalação do Eclipsecrossword - Atividade 3

Palavras cruzadas: seguem, abaixo, as dicas que compõem o jogo das palavras cruzadas. Há palavras que estão dispostas ou na vertical, ou na horizontal. O número ao lado de cada sentença representa a coluna ou linha em que cada uma está situada.

1. Nome que se dá a um Grupo G munido de uma operação binária e que torna verdadeira a condição $A * B = B * A$, para quaisquer dois elementos A e B do Grupo

G. Exemplo: no conjunto dos números inteiros munidos da operação de adição, tem-se: $3 + 5 = 5 + 3$. **Resposta:** abeliano.

2. É o nome que se dá para a função f de A em B quando é injetiva e sobrejetiva. **Resposta:** bijetiva.

3. Nome do método, com base lógica, que permite decidir sobre a validade ou não de uma indução vulgar, isto é, de uma generalização de determinada propriedade após a verificação de que a propriedade é válida em alguns casos particulares. **Resposta:** princípio da indução.

4. É o nome de um conjunto não vazio munido de uma operação binária que satisfaz as seguintes condições: associatividade, elemento neutro e inverso. **Resposta:** Grupo.

5. Nome da operação matemática que associa pares de vetores e que não vale a associatividade. **Resposta:** produto vetorial.

6. É o nome da operação matemática tal que, para quaisquer dois elementos A e B pertencentes a um determinado conjunto, tem-se: $A * B = B * A$. Por exemplo: nos naturais é válido que $2 + 5 = 5 + 2$. **Resposta:** comutatividade.

7. Conjunto numérico associado ao processo de contagem. É formado pelos números $0, 1, 2, 3$ e assim sucessivamente. **Resposta:** naturais.

8. Dados dois conjuntos A e B, não vazios, é o nome da relação de A em B definida de modo que para todo x pertencente a A, existe um só y em B tal que $f(x) = y$. **Resposta:** função.

9. Nome do conjunto que possui um único elemento. Por exemplo: o conjunto $A = \{2\}$. **Resposta:** unitário.

10. Nome do conjunto que não possui elemento. Por exemplo: conjunto em que todos os seus elementos são diferentes deles próprios. **Resposta:** vazio.

11. É o nome da operação matemática tal que, para quaisquer três elementos A, B e C de um determinado conjunto, tem-se: $(A*B)*C = A*(B*C)$. Por exemplo: no conjunto dos naturais, é válido que $2 + (5 + 7) = (2 + 5) + 7$. **Resposta:** associatividade.

12. Nome que se dá à função f de A em B tais que, para quaisquer x e y pertencentes ao conjunto A, tem-se: se x é diferente de y, então $f(x)$ é diferente de $f(y)$. **Resposta:** injetora.

13. Dados dois conjuntos A e B, é o nome do conjunto formado pelos elementos que pertencem a ambos os conjuntos. **Resposta:** intersecção.

14. Dados dois conjuntos A e B, sendo B subconjunto de A, é o nome do conjunto dos elementos de A que não pertencem a B. **Resposta:** diferença.

15. Nome que se dá para a função f de A em B tal que o contradomínio da função é igual ao conjunto imagem. **Resposta:** sobrejetiva.

16. Conjunto numérico que contém elementos com representação fracionária. **Resposta:** racionais.

17. Denominação que se dá para um elemento X pertencente a um determinado conjunto tal que, para qualquer elemento Y do mesmo conjunto, tem-se: $X * Y = Y * X = e$, sendo e o elemento neutro do conjunto. Por exemplo: no conjunto dos inteiros munidos da operação de adição, tem-se: $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$. **Resposta:** elemento inverso.

18. É o nome do conjunto formado pelos elementos que pertencem aos conjuntos A e B. **Resposta:** união.

19. Nome que se dá a dois conjuntos A e B tais que, todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B também pertence a A. **Resposta:** iguais.

20. Dados dois conjuntos A e B, é o nome que se dá ao conjunto B de maneira que todo elemento de B também pertence a A. **Resposta:** subconjunto.

4.4 Atividade 4 - Questionário avaliativo da aprendizagem

Orientações básicas	**Atividade 4**
1. **Materiais necessários:** folhas impressas.	
2. **Espaço:** sala de aula.	

Título: Avaliação da aprendizagem de Matemática: influência dos fatores externos na aprendizagem dos alunos.

Público alvo: 9° ano do Ensino Fundamental até a 3^a série do Ensino Médio e alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Problematização: A presente atividade reúne algumas questões que procuram responder ao seguinte problema: qual a influência dos fatores externos (sociais, econômicos e culturais) na aprendizagem de Matemática?

Objetivo geral: Compreender de que forma fatores externos intervêm na aprendizagem de Matemática dos alunos.

Objetivos específicos :

- Traçar o perfil social, econômico e cultural dos alunos de uma escola da rede pública do Estado de SP;
- Relacionar os dados obtidos no questionário com as ações voltadas para a aprendizagem de Matemática;
- Sugerir ações que motivem os alunos a estudar Matemática e que auxiliem no desenvolvimento do raciocínio lógico.

Teses: Busca-se, por meio dessa atividade, verificar a validade ou não das seguintes teses:

- **Tese 1:** Os alunos dedicam poucas horas de estudo semanal à disciplina de Matemática;
- **Tese 2:** A maioria dos alunos do período noturno trabalham para sustentar a família, o que interfere nos estudos;
- **Tese 3:** Os alunos entendem que a importância do estudo da Matemática é a memorização de fórmulas;
- **Tese 4:** As famílias dos alunos acompanham pouco a aprendizagem dos seus filhos;
- **Tese 5:** Os alunos são pouco questionados sobre diversos assuntos que poderiam contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Descrição da atividade: A atividade avaliativa foi proposta na forma de um questionário, com trinta perguntas, que versavam sobre aspectos econômicos, culturais e sociais que permeiam o cotidiano dos alunos de uma escola estadual em Campinas-SP. Busca-se, por meio dessa atividade, compreender o contexto escolar e as ações pedagógicas que podem ser elaboradas pensando no público alvo da escola.

Metodologia: Por conta do espaço limitado do laboratório de informática, foi decidido, em reunião do HTPC (hora de trabalho pedagógico coletivo) com os demais professores, que a data para aplicação da atividade nas salas de aula ocorreria dia 31 de outubro de 2017 (terça-feira) com turmas da manhã e da noite. Os alunos receberam a atividade impressa e tiveram o acompanhamento de professores (não especificamente de Matemática) que os auxiliaram durante o preenchimento.

Divulgação dos resultados: Os alunos tiveram o conhecimento de alguns resultados do questionário por meio de um workshop realizado na escola no dia 6 de novembro de 2017 com a parceria de outros professores.

4.5 Atividade 5 - Grupo Olímpico de Matemática

Objetivo geral: Estimular o estudo da Matemática pelos alunos como forma de incentivá-los à busca constante pelo conhecimento.

Objetivos específicos:

1. Preparar os alunos para as competições ou olimpíadas de Matemática;
2. Formar jovens talentos em Matemática;
3. Desenvolver o raciocínio lógico, as competências e habilidades em Matemática.

Justificativa: Perante uma sociedade que entende a Matemática com uma ciência enigmática e difícil de ser aprendida, buscamos, através do "GrupOlímpicO" motivar os alunos a resolver problemas desafiadores, estabelecer relações entre as diversas áreas do conhecimento, encantar outros jovens por meio da difusão do conhecimento socialmente, humanamente e historicamente produzido e contribuir para o ensino e aprendizagem da Matemática no ensino básico. Buscou-se proporcionar momentos de aprendizagem significativa para os alunos na busca pelo desenvolvimento do raciocínio lógico, no aprendizado de cálculos matemáticos e na construção de sua formação humana. Percebe-se que os alunos que se envolvem com atividades como esta maximizam seus conhecimentos e se tornam inspiração para outros alunos.

Organização dos horários e turmas: As aulas olímpicas ocorrem semanalmente, com duração de 90 minutos e em períodos complementares aos já previstos no ensino regular. É sugerido que o aluno dedique, pelo menos, quatro horas semanais de estudo para a Matemática olímpica. No tocante à formação das equipes, o número máximo de integrantes de cada turma é de vinte alunos e a sua formação depende do número de alunos inscritos no início do ano.

- **Equipe A**: Alunos do 6° ou 7° ano - Ensino Fundamental II;
- **Equipe B**: Alunos do 8° ou 9° ano - Ensino Fundamental II;
- **Equipe C**: Alunos da $1^a, 2^a$ ou 3^a série - Ensino Médio.

O ideal é que os alunos comecem a se preparar para fazer uma Olimpíada de Matemática o mais cedo possível. Quando o aluno é mais novo, seu processo de desenvolvimento cognitivo e afetivo está em formação e isso contribui de maneira significativa para o desenvolvimento de sua maturidade Matemática.

Observação 4.3. *A forma de ingresso nas atividades se faz mediante processo seletivo, declaração de interesse ou à critério do professor.*

Observação 4.4. *É permitido que o aluno frequente outra turma desde que procure o professor anteriormente. Não é recomendado que o horário destinado para o projeto seja usado como plantão de dúvidas.*

Observação 4.5. *O projeto é voltado para alunos que manifestam interesse em aprender algo a mais em Matemática, estando ciente de que não se trata de um projeto de reforço.*

Observação 4.6. *Como o projeto dura o ano letivo inteiro, será firmado um combinado pedagógico com os alunos no começo do trabalho.*

Oportunidades oferecidas: Nas aulas olímpicas os alunos terão contato com diversos problemas de Matemática que contribuirão para o desenvolvimento de competências imprescindíveis no processo de construção do conhecimento. Inseridos na Aprendizagem Baseada em Problemas, os alunos serão convidados a participar das seguintes competições:

- Projeto Canguru de Matemática Brasil;
- Olimpíada de Matemática da Unicamp - OMU;
- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP;
- Olimpíada Paulista de Matemática - OPM;
- Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM;

Observação 4.7. *Outras competições de Matemática poderão ser incluídas de acordo com a disponibilidade dos alunos e o consenso do professor e equipe gestora.*

Referencial teórico: Na internet, o aluno encontra um grande acervo voltado para as olímpiadas de Matemática. Há diversos sites oficiais que compartilham materiais que auxiliam os estudantes. Os alunos também terão a oportunidade, junto ao professor, de construir um material olímpico com alguns dos problemas trabalhados nas quatro áreas: álgebra, geometria, combinatória e aritmética. Durante as aulas, os alunos estudarão temas previstos nos conteúdos programáticos de cada uma das competições acima.

5 Resultados das atividades propostas

Neste capítulo, estão os resultados das atividades realizadas no ensino básico, os métodos abordados durante a pesquisa e os resultados gerais que puderam ser inferidos a partir de uma amostra de alunos.

5.1 Resultados da Atividade 1

Resultados	**Atividade 1**
Tese 1: verdadeira. Os professores de Matemática, de maneira geral, assumem o papel de transmissor do conhecimento, ao invés do papel de provocador ou questionador. **Tese 2:** verdadeira. Os alunos da escola estadual apresentaram dificuldade ao estruturar o raciocínio lógico, principalmente ao identificar a hipótese e a incógnita.	

Após a aplicação da atividade, os resultados foram colhidos no laboratório de informática usando a plataforma da Google conhecida como "Google Forms". Cada aluno preencheu o questionário com a tutoria do professor responsável. O cenário ideal é que todos os alunos que preenchessem o questionário já tivessem feito a atividade proposta e também assistido à aula expositiva que dão suporte à avaliação.

Como a atividade foi desenvolvida com alunos do ensino médio noturno em uma escola estadual, alguns empecilhos surgiram durante a sua realização. O principal se deu pela frequência dos alunos. O ensino público noturno geralmente recebe alunos que trabalham durante o dia e que têm a noite para estudar. Por conta disso, tivemos alunos que não participaram da atividade proposta ou que precisaram de um tempo maior para a entrega da atividade.

A atividade em si está prevista para ocorrer em cinco aulas de cinquenta minutos cada. Como no ensino noturno as aulas têm duração menor, tivemos que estender esse prazo para que eles pudessem ter o suporte necessário para resolver as questões propostas.

Embora o perfil de cada aluno seja diferente até mesmo dentro da própria sala de aula, a atividade (aula expositiva e atividade roteirizada) foi aplicada com os alunos que fizeram parte dos grupos 1 e 3. Os alunos do **grupo 2** preencheram somente o questionário de avaliação com uma breve explicação do que se tratava o questionário. O objetivo da atividade era investigar como trabalhar com tais atividades contribui para a aprendizagem dos alunos.

- **Grupo 1:** Alunos da primeira série do ensino médio, primeiro e segundo termo da Educação de Jovens e Adultos. (Escola Estadual - 28 alunos).
- **Grupo 2:** Alunos do terceiro termo do ensino médio da Educação de Jovens e Adultos. (Escola Estadual - 15 alunos)
- **Grupo 3:** Alunos do ensino médio que participaram das atividades olímpicas (Escola particular - 8 alunos)

A partir do questionário alguns dados foram coletados e se pôde observar, comparativamente, os resultados colhidos com os três grupos analisados. O total de alunos que participaram da atividade aparece ao lado da descrição de cada grupo.

5.1.1 Questionário da Atividade 1

Pergunta 1: Ao resolver um problema de Matemática, o que você entende ser mais difícil de compreender nele?

- ( ) Enunciado do problema;
- ( ) Linguagem matemática;
- ( ) Ordem de representação das informações (organização dos dados);
- ( ) Formas de representação (tabelas, desenhos, gráficos, etc);
- ( ) Números (principalmente os decimais);
- ( ) Conteúdos de Matemática;

O círculo externo, isto é, com maior raio, retrata os dados do grupo 3. O do meio, por sua vez, o grupo 2, e o menor, o grupo 1. Pode-se notar que, enquanto os alunos dos grupos 2 e 3 afirmaram que a maior dificuldade está em interpretar o enunciado de um problema, a maior parte dos alunos do grupo 1, algo em torno de 39%, relatou que a dificuldade maior está em compreender a linguagem matemática que é apresentada com uma notação específica.

Os alunos do grupo 3, por exemplo, se depararam com problemas mais desafiadores (como os da Olimpíada Paulista de Matemática) que também também geravam dúvidas nos alunos.

Já os alunos do grupo 2 apresentaram mais dificuldade neste quesito em relação aos alunos do grupo 1, evidenciando que esses alunos em específico conseguiram compreender melhor como interpretar um problema de Matemática tendo como base a aula expositiva. Em algumas perguntas não foi possível obter informação a partir da coleta de dados.

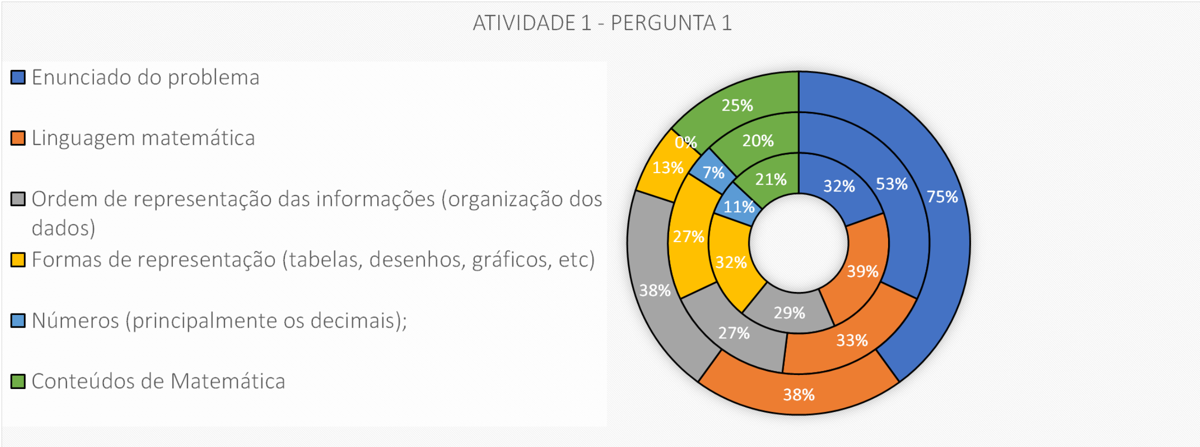


Figura 14 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 1

Pergunta 2: Como são as aulas de resolução de problemas?

- [ ] Pouco problematizadoras e geralmente os problemas são exercícios de repetição que buscam avaliar se aprendi ou não determinado conceito;
- [ ] Não são problemas, mas exercícios simples de compreensão que podem ser resolvidos, na maioria das vezes, com o uso de fórmulas matemáticas;
- [ ] O professor adota um papel questionador e orienta seus alunos a resolver os problemas propostos;
- [ ] Constituem situações significativas de aprendizagem, momentos de discussão, levantamento de hipóteses, execução de planos de ação e verificação das soluções;
- [ ] Não há aulas de resolução de problemas.

Nessa pergunta, os alunos podiam assinalar mais de uma resposta. Nesse caso, do grupo 1, 39% das respostas indicaram que durante as aulas são realizados exercícios simples e a maioria deles podem ser solucionados com fórmulas.

Já 93% dos alunos do grupo 2 afirmou que as aulas de resolução de problemas constituem situações significativas de aprendizagem e que eles aprendem com elas. Os alunos do grupo 3 tiveram a mesma opinião, mas com uma porcentagem menor, igual a 75%.

Alguns alunos do grupo 3 possivelmente fizeram referência às aulas olímpicas, embora o questionário avaliasse o ensino regular. A partir dessa pergunta, pode-se concluir que as aulas de resolução de problemas, na educação básica, na maioria das vezes, são momentos voltados para discutir exercícios de memorização de algoritmos, regras ou aplicação de fórmulas.

Não se busca inferir que as aulas que ensinam os alunos a aplicar algoritmos ou que sejam operatórias são ruins para a aprendizagem, mas é recomendável que o professor saiba pontuar qual o momento de intervir na aprendizagem de cada aluno e adotar uma estratégia que possibilite que o aluno aprenda.

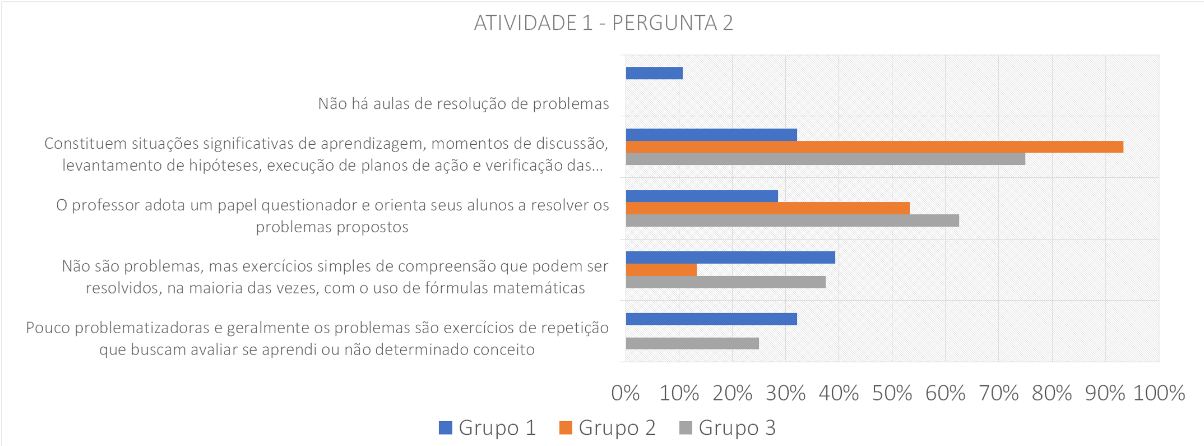


Figura 15 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 2

Pergunta 3: Embora não exista uma receita que permita resolver problemas de Matemática, há algumas etapas que, se seguidas, podem auxiliar o estudante a encontrar soluções para problemas mais elaborados. A primeira delas é a compreensão do problema. Com base nisso, com que frequência os termos a seguir estão presentes nas aulas de Matemática?

- ( ) Leitura atenta do enunciado;
- ( ) Interpretar corretamente;
- ( ) Pensar em um exemplo semelhante;
- ( ) Reformular o problema;
- ( ) Traçar uma figura;
- ( ) Notação;
- ( ) Condicionante;
- ( ) Dados;
- ( ) Incógnita;

Nessa pergunta, os alunos assinalaram que se deparavam com esses termos sempre, quase sempre, frequentemente, ocasionalmente, raramente ou não se aplica. Não houve distorção significativa a ponto de poder concluir algo por conta da dificuldade que os alunos apresentaram (especialmente dos grupos 1 e 2 ao se depararem com tais termos). O que se pôde observar é que termos como "notação" e "condicionante" aparecem com menos frequência nas aulas de resolução em Matemática no ensino básico, segundo os alunos.

Pergunta 4: A segunda etapa para resolução de um problema é o estabelecimento de um plano de ação. Nela, o aluno é levado a pensar de qual forma iniciará a resolução do problema proposto. Com base nisso, responda:

- ( ) Procuro pensar na conexão entre os dados e o que o exercício pede (incógnita);
- ( ) Procuro buscar exercícios auxiliares (correlatos) que me ajudem a resolver o exercício proposto;
- ( ) Introduzo elementos auxiliares que me permitam resolver o que foi pedido;
- ( ) Verifico se utilizei todos os dados do exercício;

Para cada uma das afirmações acima, os alunos assinalaram sim, não ou às vezes. Os resultados mais expressivos foram os dos alunos do grupo 3, em que 88% deles afirmaram que procuram estabelecer conexões entre a hipótese e a incógnita, mas que apenas às vezes verificam se utilizaram todos os dados do exercício.

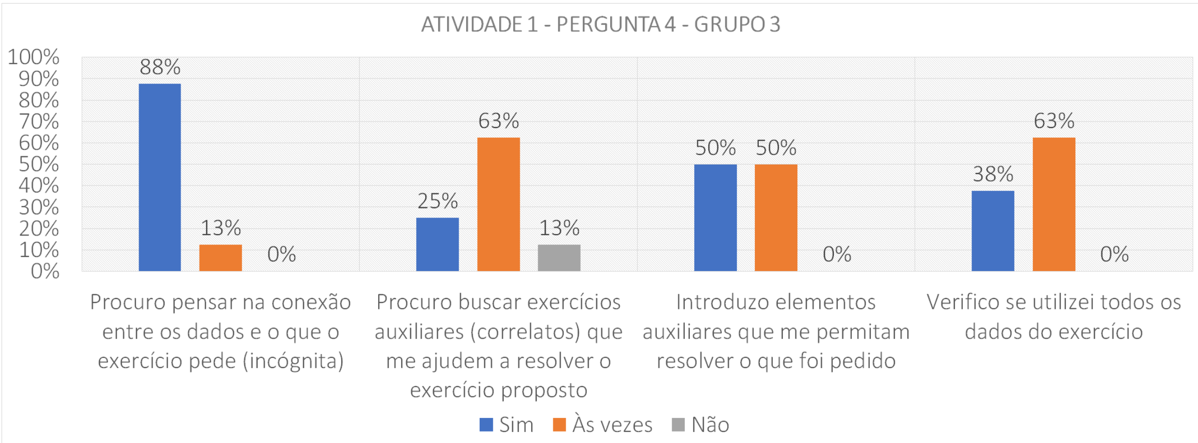


Figura 16 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 4

Há alunos do grupo 3 que chegam ao projeto e relatam que tais questionamentos (presentes no gráfico 16) não são realizados no ensino médio. Nas escolas particulares, por exemplo, isso se deve a uma série de fatores, de modo que um deles é a necessidade do aluno aprender algoritmos ou exercícios que preparem exclusivamente para os exames vestibulares.

Pergunta 5: A terceira etapa constitui a execução do plano que foi pensado anteriormente. É nessa etapa que você colocará em prática o que foi pensado ou planejado. Responda:

- ( ) Tenho o hábito de verificar cada passo da minha resolução;
- ( ) Demonstro cada passo que fiz para verificar se ele está correto;
- ( ) Procuro pensar se o plano de ação me auxiliará a encontrar a solução;
- ( ) Sinto-me perdido ao resolver um problema;

Para cada uma das afirmações, os alunos podiam assinalar: sim, às vezes ou não. Nessa pergunta, eles foram questionados se possuem o hábito de verificar cada passo na demonstração (inclusive demonstrando), se elaboram um plano de ação e se apresentam dificuldade em resolver problemas de Matemática.

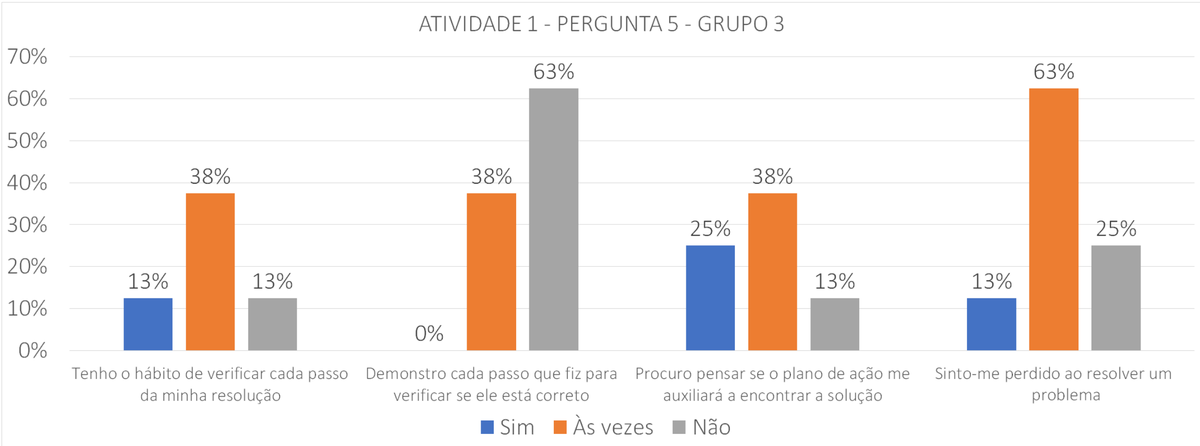


Figura 17 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 5

Nota-se, a partir do gráfico 17, que 63% dos alunos declararam que não têm o hábito de demonstrar a veracidade de uma sentença, mas que, às vezes, fazem quando necessário. 25% afirmou que, geralmente, pensa num plano de ação antes de iniciar um problema, e 63% deles afirmaram, às vezes, apresentar dificuldade em resolver um problema por se sentir perdido.

Pergunta 6: Após encontrar a solução procurada num problema, é interessante que o aluno adquira o hábito de examiná-la. Com base nisso, responda ao que se pede:

- ( ) Verifico o resultado encontrado;
- ( ) Resolvo o mesmo exercício de formas diferentes;
- ( ) Utilizo o resultado ou o método de resolução para resolver outros exercícios ou problemas;

Nessa pergunta, os alunos assinalaram, para cada sentença, sim, às vezes ou não. Se compararmos os resultados dos três grupos que assinalaram "sim" na primeira sentença, temos 68% do grupo 1, 33% do grupo 2 e 38% do grupo 3. Essas estatísticas mostram que, comparativamente, os alunos do grupo 2 que tiveram acesso somente ao questionário sem acompanhar todo o processo tendem a realizar menos o retrospecto dos exercícios do que os demais alunos.

Na segunda sentença, os resultados foram próximos em relação aos alunos que assinalaram "sim", e, especificamente na última, aproximadamente 63% dos alunos do

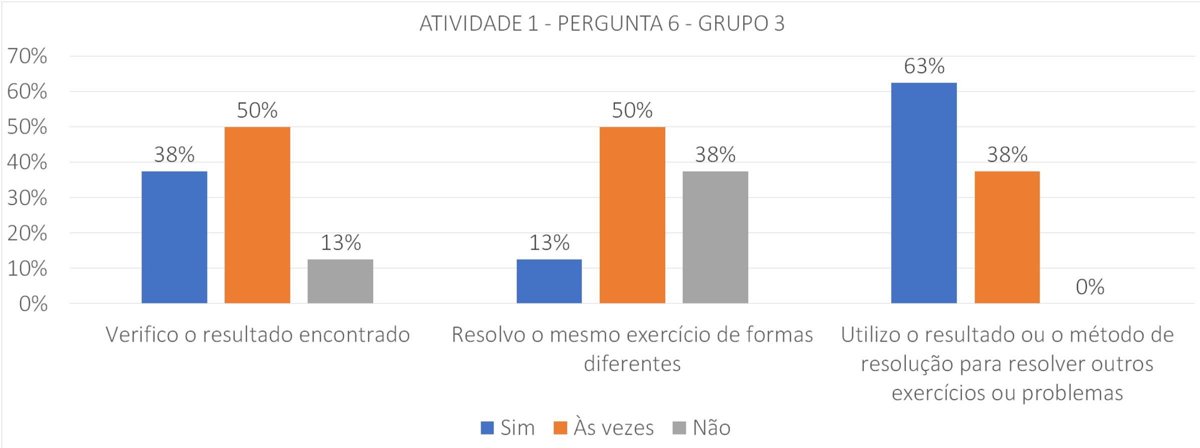


Figura 18 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 6

grupo 3 declararam que sim e os demais do mesmo grupo que "às vezes". Principalmente nos problemas de olimpíadas de Matemática, é usual os alunos testarem métodos de resolução anteriores para resolver outros mais elaborados.

Pergunta 7: Em uma escala de 1 a 5, com que frequência você busca/são apresentados problemas de Matemática desafiantes a fim de resolvê-los?

- ( ) 1
- ( ) 2
- ( ) 3
- ( ) 4
- ( ) 5

A aproximação ao número 1 correspondia a "raramente", enquanto a proximidade ao número 5 a "frequentemente". O grupo 3 está representado pelo círculo externo, isto é, o de maior raio. O do meio corresponde ao grupo 2 e o de menor raio ao grupo 1.

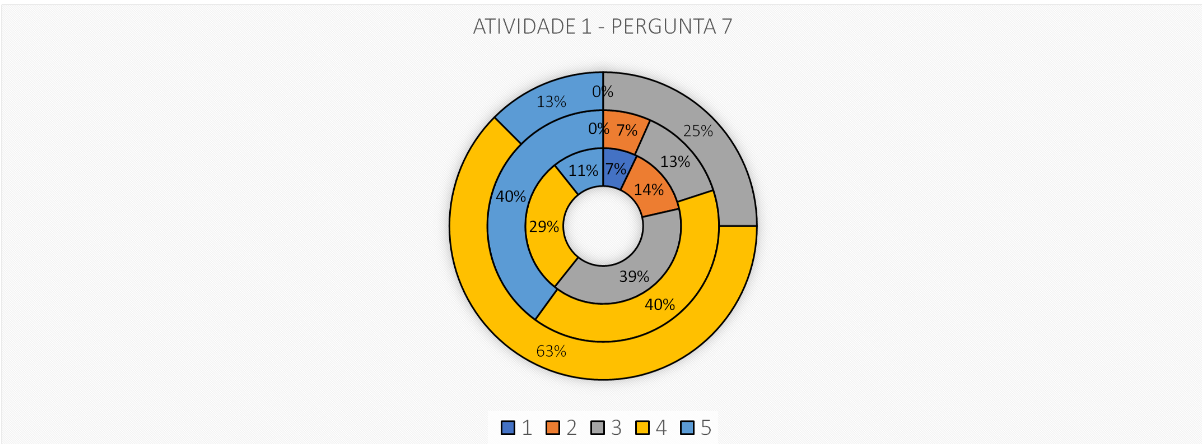


Figura 19 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 7

Pode-se notar do gráfico 19 que a maioria dos alunos que participam das olimpíadas de Matemática buscam problemas desafiadores e trazem para o momento da aula. A porcentagem é menor nos demais grupos. O aluno que traz para aula suas dúvidas, compreende melhor a Matemática.

Pergunta 8: Compare as duas situações apresentadas e responda:

- **Situação 1:** Megan tinha várias bolinhas de gude. Em um jogo ela ganhou 17 e agora está com 43. Quantas bolinhas ela tinha antes da partida?
- **Situação 2:** Calcule quantas bolinhas de gude Megan tinha se ela ganhou 20 durante o jogo e agora está com 35 bolinhas.

Com base nas duas situações, os alunos analisavam cada uma das sentenças a seguir e assinalaram se ela se relacionava à primeira situação, à segunda ou se era indiferente para as duas, isto é, não se relacionava.

- [ ] Enunciado mais claro;
- [ ] Números mais simples;
- [ ] Mais difícil pensar num problema correlato;
- [ ] Apresentou a necessidade de traçar uma figura;
- [ ] Apresentou necessidade de usar uma notação adequada;
- [ ] Demorou mais tempo para ser solucionado;

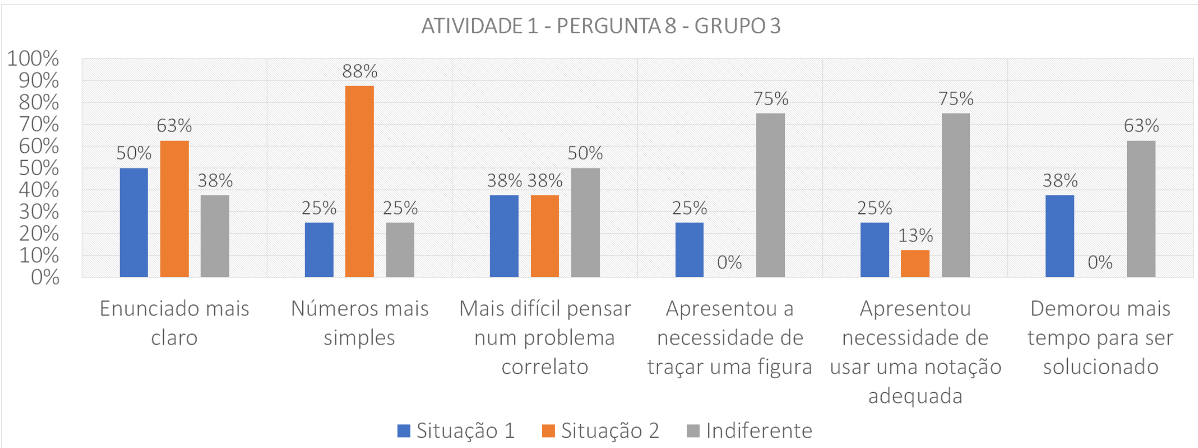


Figura 20 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 8

Do gráfico 22, nota-se que a maioria dos alunos do grupo 3 acharam a formulação do enunciado da situação 2 mais simples de ser compreendida, inclusive pelos números utilizados. Sobre pensar no problema correlato, 50% dos alunos desse mesmo grupo acharam indiferente por se tratar de um exercício rápido, e 75% deles assinalaram ser indiferente fazer uma figura para solucioná-lo.

Sobre os alunos do grupo 2, a maioria deles achou indiferente a clareza do enunciado em ambas as situações, assim como o cálculo numérico realizado. Um dado interessante foi que todos os alunos disseram ser indiferente traçar uma figura para o problema, e 80% também afirmou que o uso de uma notação adequada era indiferente.

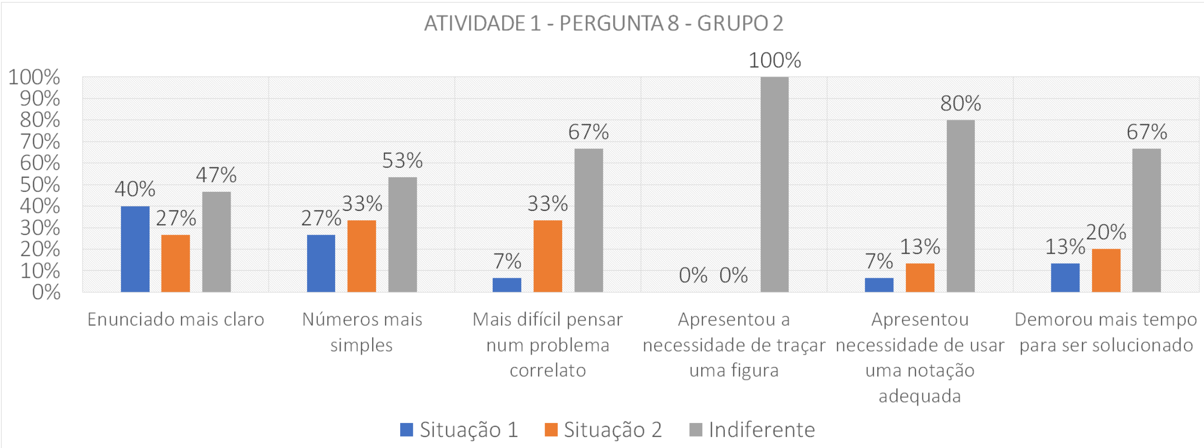


Figura 21 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 8

Finalmente, no grupo 1, 71% dos alunos acreditam que a situação 1 apresenta um enunciado mais claro para resolver, mas que a situação 2 apresentava números mais simples. A metade deles afirmou que é indiferente pensar na dificuldade em encontrar um problema correlato, sendo até desnecessário pela simplicidade do exercício. Nota-se tambem que a situação 1 exigiu um tempo maior de resolução que a situação 2.

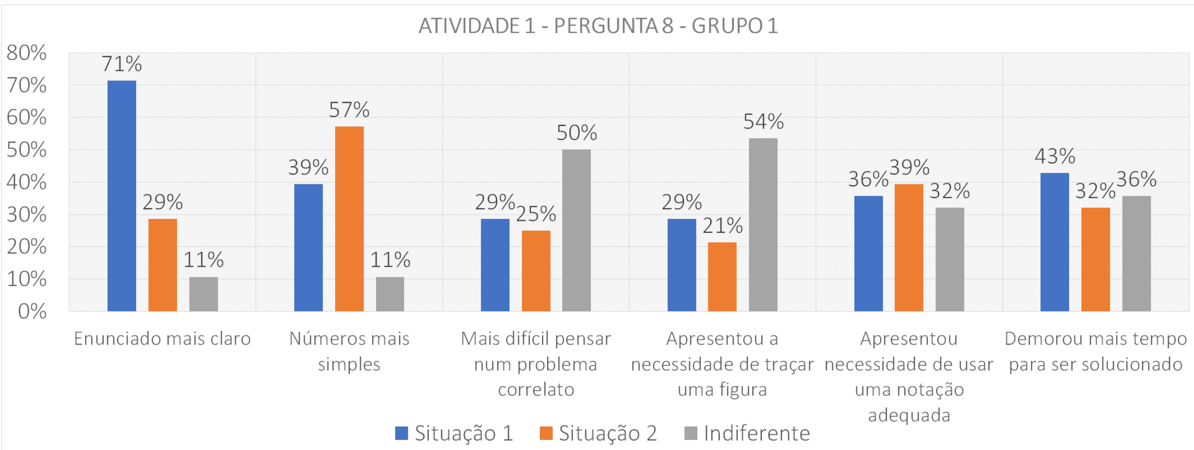


Figura 22 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 8

Pergunta 9: Compare as duas situações apresentadas e responda.

- **Situação 1:** Comprei 4 cadernos por 5 reais cada um e paguei no caixa de número 4. Quanto gastei ao todo?

- **Situação 2:** Um sítio cria 22 cavalos e 42 vacas. Quantos sacos de ração o sitiante precisa comprar para alimentar esses animais?

- [ ] O enunciado apresenta mais dados do que é necessário (1);
- [ ] Há ausência de dados (a condicionante não é suficiente) (2);
- [ ] A solução é igual a vinte (3);

Do grupo 3, todos os alunos assinalaram que a situação 1 apresenta mais dados do que é necessário, pois a informação referente ao número do caixa onde o pagamento foi efetuado não era necessária. Todos os alunos disseram que a solução do problema é igual a vinte. Nota-se também que 88% dos alunos declararam que a situação 2 apresenta dados insuficientes.

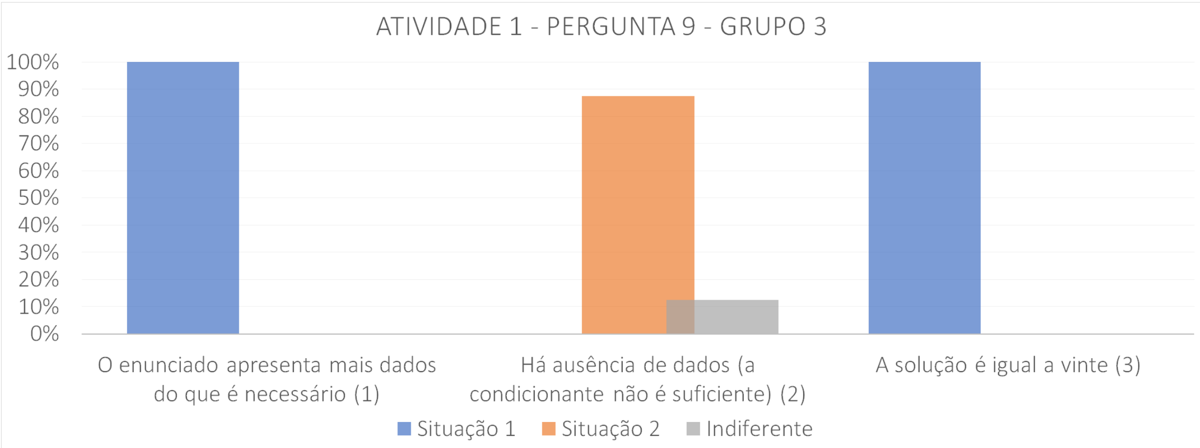


Figura 23 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 9 - Grupo 3

Do grupo 2, a maioria dos alunos acredita que a situação 1 apresenta mais dados do que é necessário, e que na situação 2 há ausência de dados.

Sentenças	Situação 1	Situação 2	Indiferente
1	87%	7%	7%
2	0%	93%	7%
3	93%	0%	7%

Tabela 5 – Atividade 1 - Pergunta 9 - Grupo 2

Os alunos do grupo 1, em comparação aos demais, apresentaram mais dificuldade para analisar ambas as situações (inclusive separadamente). O gráfico 24 sintetiza os dados coletados.

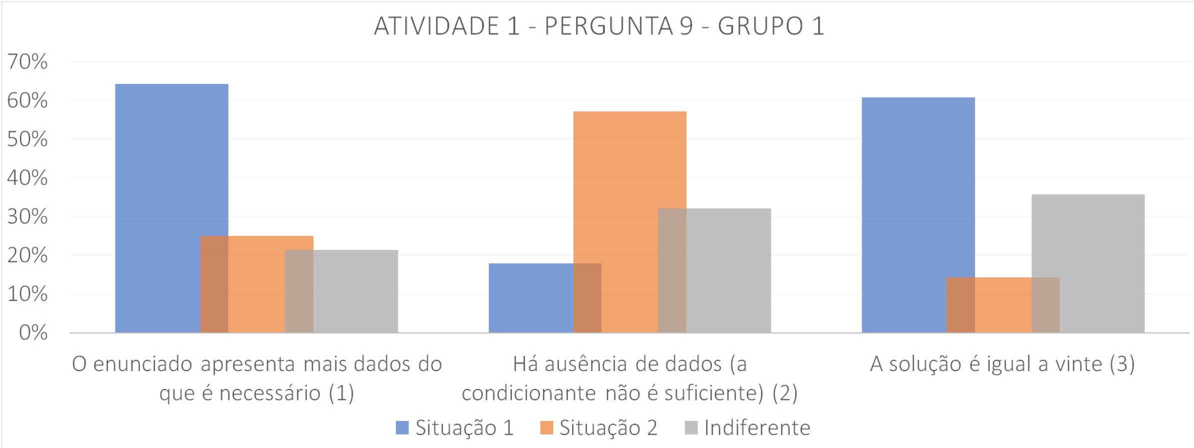


Figura 24 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 9 - Grupo 1

Pergunta 10: Observe o seguinte exercício e assinale a alternativa que retorna os cálculos que podem ser feitos para resolvê-lo: "A padeira Mirela precisa preparar 260 pães. Se 245 já estão prontos, falta assar quantos?"

- [ ] 260 + 245
- [ ] 260 − 245
- [ ] 245 + 100 + 15
- [ ] 115
- [ ] 145 + 115 = 260
- [ ] Ela precisa assar 115 pães

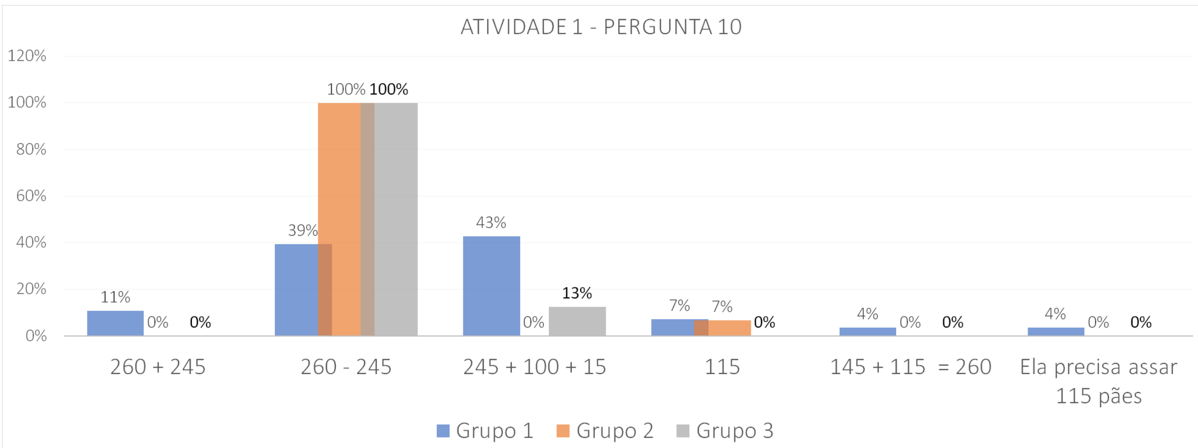


Figura 25 – Gráfico - Atividade 1 - Pergunta 10

Conclusão da atividade: Com base na atividade e nas respostas do questionário, notamos que os alunos, principalmente os dos grupos 1 e 2, apresentaram dificuldade nas atividades que exigiram que eles interpretassem ou fizessem comparações entre duas situações apresentadas. Durante a atividade, embora estivesse escrito passo a passo o que deveria ser feito, muitos alunos apresentavam dificuldade ao seguir as orientações. Também pode-se dizer que os alunos dos três grupos não estavam acostumados a fazer relações entre os dados do exercício ou mesmo pensar sobre as diferentes “etapas” que podem contribuir para resolver exercícios ou problemas de Matemática. A atividade serviu como um “start” para os alunos começarem a pensar nestas questões.

5.2 Resultados da Atividade 2

Resultados	**Atividade 2**
Tese 1: falsa. Não foi constatado o uso exclusivo da linguagem simbólica nas aulas de Matemática, embora a linguagem corrente seja pouco explorada nas aulas da disciplina. **Tese 2:** falsa. Não foi possível encontrar uma relação direta que afirme que os alunos que leem mais interpretam melhor problemas de Matemática. O que se concluiu é que os alunos que leem mais conseguiram realizar a atividade de leitura dos artigos de Matemática com mais facilidade.	

Para a realização da atividade dois, os alunos, separados em grupos, se organizaram desde o processo de formação dos integrantes dos grupos, escolha dos textos a serem lidos e organização da escrita. A atividade teve início com a apresentação da proposta da atividade, discussão sobre os objetivos propostos, hipóteses levantadas e orientações gerais.

No laboratório de informática da escola, usando a plataforma “Google Planilhas”, os alunos fizeram a escolha dos integrantes de cada grupo e do artigo. Após duas aulas expositivas, os alunos, ao se ambientarem melhor com a atividade proposta, iniciaram a leitura do texto e a discussão em grupo. Paralelamente a isso, foram solicitados relatos de sala dos alunos, isto é, observações que os alunos tiveram durante a atividade.

Dentre os relatos de sala, destacaremos alguns escritos dos alunos identificando-os por letras maiúsculas:

- **Aluno A:** “Texto muito longo, pouco tempo para ler e concretizar”;
- **Aluno B:** “A leitura exige muita concentração, um pouco difícil de entender”;

O relato de sala abaixo foi extraído de um dos grupos que fazem parte da Educação de Jovens e Adultos (EJA), todos estudantes do primeiro termo (ou primeiro ano do ensino médio). Observe nas falas dos alunos que eles apresentaram melhor organização em relação ao grupo anterior até pela maneira como se organizaram para concretizar a atividade.

> O texto que lemos em sala de aula fala sobre a comunicação em matemática. Juntamos o nosso grupo, lemos trechos e após discutimos o que entendemos, todos trabalharam no texto e comentaram super bem participando assim das discussões em sala. Não tivemos tanto trabalho com a turma porque eles participaram, comentaram e interpretaram

> super bem a única dificuldade que tivemos foi que a maioria do pessoal da turma trabalhavam então não conseguimos fazer nada em casa, mas fizemos o trabalho super bem em sala. (GRUPO 1, 2017).

Os alunos do grupo usaram a aula para se organizarem, e também se comunicaram usando as redes sociais. A dinâmica adotada foi separar o texto e dividir a leitura para economizar tempo. Nas palavras do grupo, destacamos o seguinte trecho da resenha:

> Os alunos precisam ter possibilidades, aprender, organizar, explorar e esclarecer seu pensamento e a tirar suas dúvidas. Sendo assim, os alunos precisarão crescer sabendo mais e melhor, quando eles leem e se comunicam e sem medo de tirar suas dúvidas. (GRUPO 1, 2017).

A partir do fragmento acima podemos destacar vários elementos que corroboram a proposta da atividade. É importante que o professor proporcione atividades, de fato, significativas para os alunos e que eles sejam estimulados à reflexão. No campo matemático, os alunos destacaram a importância do professor que estimula a comunicação e é receptivo quando o aluno apresenta dúvidas. Os alunos também destacaram num dos trechos a seguinte fala:

> A matemática é muito importante, temos que ter mais interesse, ser encorajados pelos pais e professores a se comunicar e conversar sobre a linguagem matemática. Temos que incentivar as crianças, dentro e fora da sala de aula a ler bons livros, na comunicação é importante e ajuda no aprendizado e interpretação de textos, na resolução de problemas matemáticos. As crianças precisam perder o medo da matemática. (GRUPO 1, 2017).

Os demais grupos que realizaram a atividade apresentaram dificuldade em relação à escrita e interpretação da proposta. Há grupos que, por não dominar adequadamente o uso da escrita e por apresentar dificuldade em Matemática, não realizaram a tarefa ou copiaram textos disponibilizados na internet. Embora tenha sido ressaltado que a cópia de textos não fosse permitida, é usual que alunos adotem essa estratégia e não se envolvam tal como o grupo comentado acima fez. Foram verificados os seguintes pontos:

- Os alunos não possuem o hábito de ler textos ou artigos que explicitem uma temática específica;
- Os professores trabalham pouco a leitura com os alunos e não os encorajam a ler textos de diferentes autores e assuntos;
- Dificuldade dos alunos do período noturno se organizarem por múltiplas razões: trabalho, questões sociais e econômicas, etc.
- Dos alunos que compreenderam a proposta da atividade, todos demonstram uma proximidade maior com a leitura;

Um ponto que merece destaque é a dificuldade de propor estratégias de ensino e aprendizagem para alunos que frequentam o ensino médio noturno na escola estadual. As aulas possuem duração de quarenta minutos e as salas de aula não são equipadas com projetor ou computador. Isso dificulta bastante, pois, para realizar algumas tarefas, há um tempo considerável da aula que é utilizado para preparar a sala para a realização da atividade.

Além disso, o ensino noturno conta com a ausência de professores por diversos motivos, o que prejudica o trabalho, uma vez que os demais professores precisam "subir aula", isto é, os alunos ou são liberados ou um professor precisa estar em mais do que uma sala ao mesmo tempo. Esses são alguns fatores que interferem diretamente na aprendizagem dos alunos e também no trabalho docente.

Em alguns momentos, a atividade foi prolongada por esses motivos ou outros imprevistos que aconteceram. É importante mencionar que a frequência dos alunos no ensino noturno não é regular e vários alunos não participaram do processo todo da atividade.

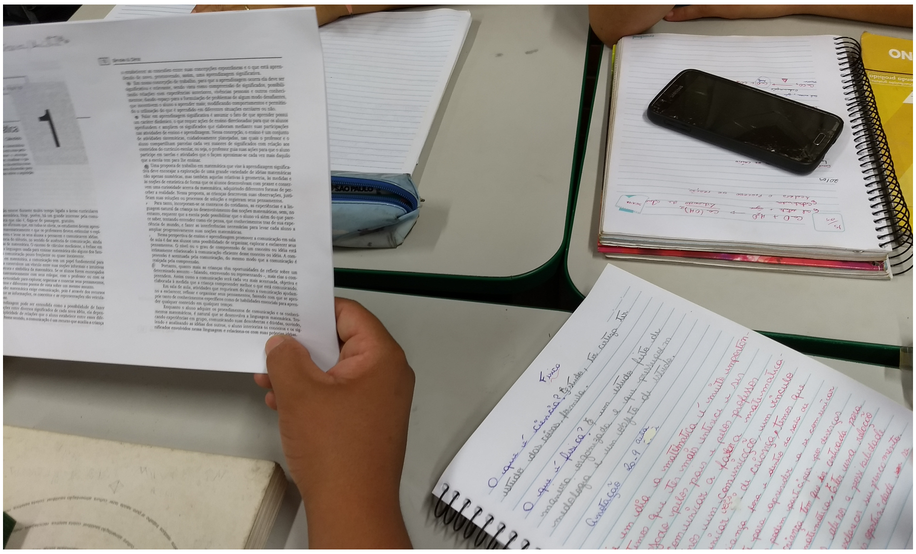


Figura 26 – Atividade 2 - Resenha - leitura dos textos

5.3 Resultados da Atividade 3

Resultados	**Atividade 3**
Tese 1: falsa. Os professores solicitam que os alunos façam a resolução completa e não sinalizem somente a resposta final, indicando em cada passo qual o raciocínio utilizado. **Tese 2:** verdadeira. É possível antecipar assuntos estudados na graduação para o ensino básico desde que sejam adaptados à série ou ano escolar. **Tese 3:** verdadeira. Os alunos que participam dos grupos olímpicos apresentam maior destreza na escrita matemática.	

Na atividade 3, foi feito um recorte da temática "Grupos" estudada no ensino superior. A atividade total teve duração de duas aulas simples e foi aplicada com os alunos que participavam do grupo olímpico das seguintes séries: Equipe B (8° e 9° ano juntos) e Equipe C (todas as séries do ensino médio juntas).

No primeiro momento, para a realização da atividade foram revisados conceitos teóricos básicos de conjuntos, tais como relação de pertinência entre elemento e conjunto, noções primitivas, notação para conjuntos e relações de inclusão. Além da representação de conjuntos, foram apresentados os conceitos de subconjunto, união e intersecção.

Figura 27 – Atividade 3 - Grupos e suas representações - Conjuntos

No segundo momento, foram estudadas algumas propriedades de Grupos que podem ser trabalhadas no ensino básico. Começamos a falar sobre Operação Binária, resgatando o conhecimento que eles tinham por terem estudado funções. Em seguida, por meio de exemplos numéricos, os alunos recordaram operações matemáticas que são estudadas muito rapidamente no ensino básico, tais como: associatividade, comutatividade, existência do elemento neutro e inverso e a distributividade. Em todos os casos, foram destacados quais conjuntos numéricos estavam sendo usados e qual a operação matemática atribuída a cada um deles.

Durante a explicação, os alunos também foram provocados sobre a veracidade da proposição caso o conjunto numérico ou a operação associada a ele fosse alterada. Por exemplo: o zero é o elemento neutro da adição dos inteiros, mas será que nos números racionais a proposição continua verdadeira? Com isso, os alunos elaboraram gradualmente conjecturas e afirmações sobre a temática estudada.

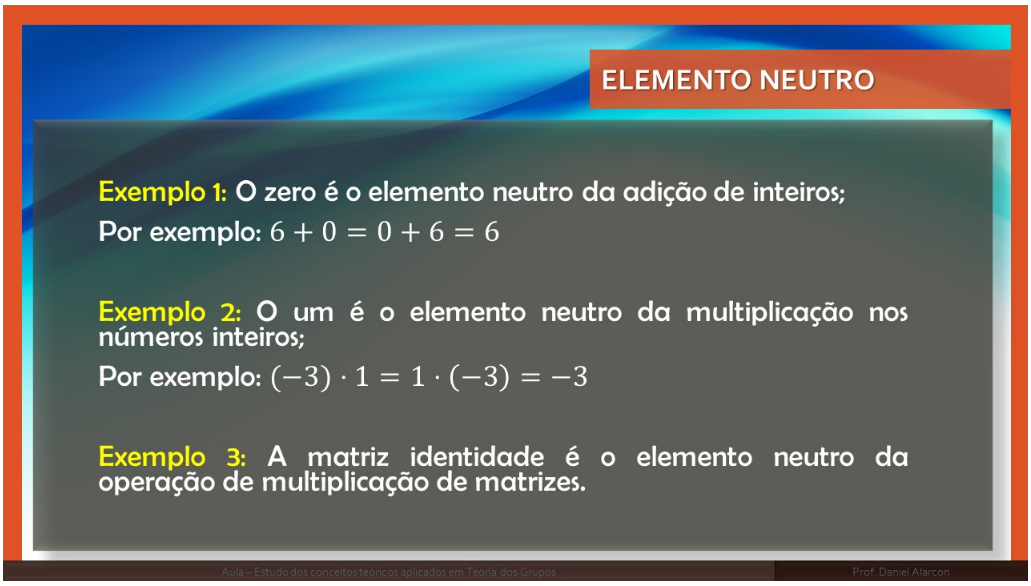


Figura 28 – Atividade 3 - Grupos e suas representações - Elemento neutro

Após os alunos pensarem sobre essas situações, foi proposto a eles um desafio que devia ser resolvido sem a realização de cálculos numéricos. O exemplo apresentado está ilustrado a seguir:

Exemplo 5.1. *Considere a operação $*$ definida no conjunto A (naipes de um baralho) cuja tábua está representada abaixo. Verifique:*

(a) *Se o conjunto A admite elemento neutro;*

(b) *Se a operação $*$ é comutativa;*

(c) *Quais são os elementos de A que são invertíveis.*

Como o baralho é um jogo que os estudantes frequentemente jogam quando reunidos, utilizá-lo como instrumento pedagógico faz com que eles se apresentem para a aula com maior disposição e interesse pelos conteúdos abordados. Os alunos, num ambiente de competição saudável, demonstraram bastante interesse e empenho ao realizar a atividade. Em poucos minutos apresentaram as soluções do problema.

Após o problema, foi apresentado outro análogo, dessa vez, utilizando números. Os alunos conseguiram fazer com tranquilidade, aplicando muito bem os conceitos teóricos que tinham sido apresentados anteriormente.

Figura 29 – Atividade 3 - Grupos e suas representações - Elemento neutro

Em seguida, foram propostos outros problemas que exigiam do aluno proximidade maior com a simbologia matemática que é exigida do aluno no ensino superior. Segue o problema proposto aos estudantes:

Exemplo 5.2. *Considere a seguinte operação* $*$ *definida no conjunto dos números racionais*

$$x * y = \frac{x+y}{2}$$

Verifique:

(a) Se a operação $*$ *é comutativa;*

(b) Se a operação $*$ *é associativa;*

(c) Se a operação $*$ *tem o elemento neutro;*

(d) Se existem elementos invertíveis.

No problema acima, os alunos começaram com exemplos numéricos e, em seguida, generalizaram para quaisquer elementos pertencentes ao conjunto dos números racionais. Eles apenas apresentaram dificuldade em verificar os itens **(c)** e **(d)**.

Após a apresentação desses problemas, foi apresentada a definição formal de Grupos e alguns exemplos numéricos que ilustraram a temática estudada. Em seguida, foram comentados alguns exemplos de Grupos de simetrias com os alunos e também exemplos que envolviam os conhecimentos já estudados no ensino médio.

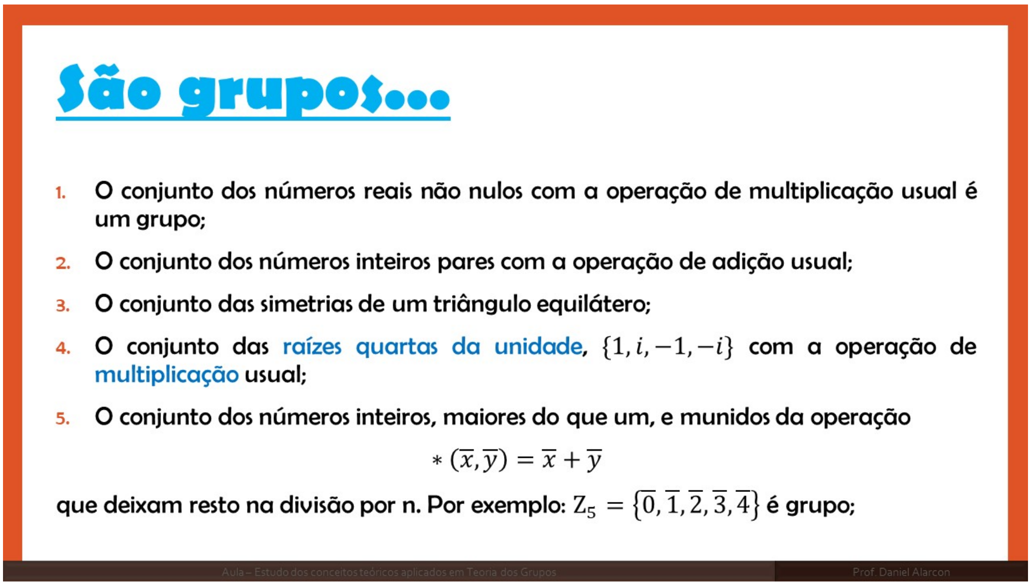


Figura 30 – Atividade 3 - Grupos e suas representações - Exemplos de Grupos

Em seguida, como proposta de avaliação da atividade desenvolvida, foi proposto o jogo das palavras cruzadas. Os alunos, organizados em grupos ou individualmente, jogaram de maneira muito motivada, apresentando espírito de competição. Além disso, na situação, o primeiro colocado seria premiado com um presente. O jogo serviu como fechamento da aula teórica e sintetizou todo o conhecimento que foi trabalhado. Serviu como um resumo dos conceitos teóricos que foram vistos com mais profundidade.

O ensino de Matemática, por muitos anos, esteve restrito somente à transmissão do conhecimento. O professor, como detentor do conhecimento, transmitia seus conhecimentos aos alunos considerados como pessoas sem conhecimento prévio. Estes, por sua vez, retinham o que estava sendo abordado, sem levar em consideração o significado para a própria vida do que estava sendo abordado.

Por muitos anos, a pedagogia lidava com questões envolvendo didática, mas, com o passar dos anos e com as pesquisas feitas na área de educação matemática, percebe-se um envolvimento maior dos educadores ao propor atividades diferenciadas que busquem motivar o estudo da Matemática pelos alunos. O jogo, segundo Macedo (2000, p. 14), constitui uma importante ferramenta de ensino, uma vez que é possível analisar a aplicação dos conhecimentos adquiridos sob diferentes perspectivas. O autor ressalta que diversas atitudes podem ser avaliadas quando os alunos se deparam com um jogo: atenção, organização, coordenação de diferentes pontos de vista, etc.

Os impactos da aplicação dos jogos no contexto escolar são fundamentais, uma vez que tornam a aprendizagem mais participativa, colaborativa, observadora e cooperativa. Paralelamente, conforme Macedo (2000, p. 14), o jogo também contribui com o desenvolvimento do professor na sua prática docente proporcionando constantemente a reflexão sobre essa prática.

Consoante Macedo (2000, p. 14), há diversos fatores que devem ser levados em consideração quando o professor pretende abordar o jogo como objeto de estudo na sala de aula, tais como: objetivo, público, tempo, espaço, etc.

Portanto, o jogo das palavras cruzadas como método avaliativo da aprendizagem foi interessante porque, além de proporcionar um momento de descontração (lúdico) com os alunos, serviu como fechamento de toda a atividade realizada.

Os alunos, após o jogo, responderam a um questionário e tiveram a oportunidade de fazer um processo de reflexão acerca dos conteúdos estudados e também das aulas de Matemática no ensino regular. Pelo fato de os alunos em questão fazerem parte do grupo de olimpíadas de Matemática, a linguagem utilizada durante a aula possuía mais termos técnicos do que eventualmente seria se fosse uma turma regular.

Para os alunos da Equipe B, alguns exemplos que poderiam não ser tão bem aproveitados por eles foram omitidos, embora o planejamento da aula fosse o mesmo. As duas turmas tiveram um encaminhamento muito bom da atividade, excelente participação e puderam refletir sobre um conteúdo que é estudado no ensino superior mas adaptado ao ensino básico de acordo com a faixa etária.

5.3.1 Questionário da Atividade 3

Pergunta 1: De qual grupo olímpico você participa? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Equipe A
- ( ) Equipe B
- ( ) Equipe C

Ao todo, participaram sete alunos da Equipe B (composta por alunos do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental) e oito da Equipe C (alunos de todas as séries do ensino médio). A atividade não foi aplicada com os alunos da Equipe A.

Pergunta 2: Em uma escala de 0 a 5, como você avalia o uso das palavras cruzadas como método de avaliação? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) 0
- ( ) 1
- ( ) 2
- ( ) 3
- ( ) 4
- ( ) 5

Pode-se observar no gráfico 31 que, em uma escala de 0 a 5, a maior parte dos alunos assinalou o número 4, indicando assim que as palavras cruzadas serviram como uma boa síntese da aula e método avaliativo da aprendizagem. A proposta das palavras cruzadas também era diversificar um pouco a aprendizagem, oferecendo aos alunos um momento, ao mesmo tempo, lúdico e com objetivos claros.

Figura 31 – Gráfico - Atividade 3 - Pergunta 2

Pergunta 3: Atividades como as palavras cruzadas contribuem para o aumento do interesse em estudar Matemática? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Sim
- ( ) Talvez
- ( ) Não

Novamente, a maioria dos alunos assinalou o sim, correspondendo a 53% do total. Em seguida, 33% marcaram que “talvez” e somente 13% que não.

Pergunta 4: Em uma escala de 0 a 5, qual o grau de dificuldade para o preenchimento das palavras cruzadas? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) 0
- ( ) 1
- ( ) 2
- ( ) 3
- ( ) 4
- ( ) 5

A escala partia do 0, fácil de preencher, até o 5, difícil, em uma gradação. Do gráfico 32, se pode notar que 40% dos alunos assinalaram na escala o número 3, que corresponde ao grau “razoável”. Embora eles tenham relatado que não acharam fácil o preenchimento, ao se sentarem juntos e discutirem o que foi trabalhado lembrando dos termos utilizados, eles conseguiram concluir a atividade.

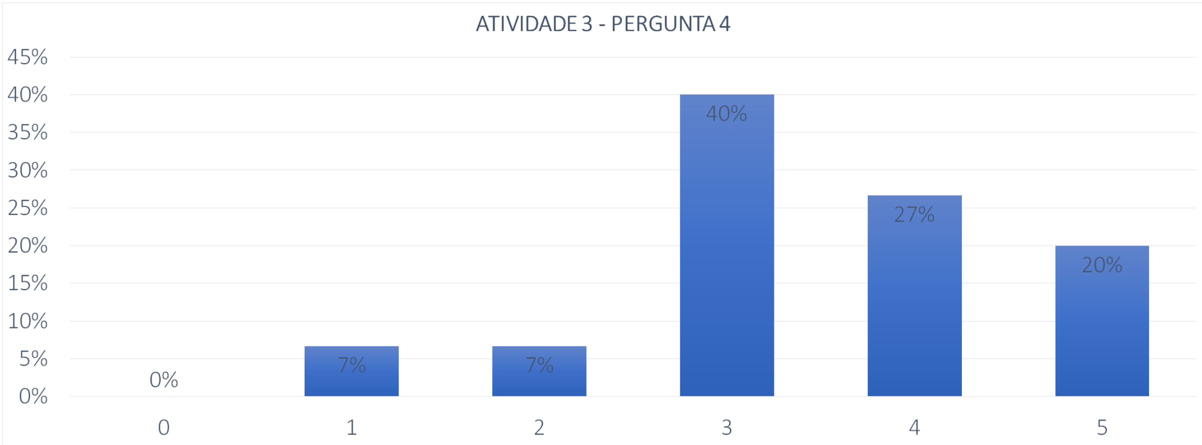


Figura 32 – Gráfico - Atividade 3 - Pergunta 4

Pergunta 5: Antes da aula você já havia ouvido falar sobre “Grupos”? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Sim
- ( ) Não

A maioria dos alunos relatou que desconhecia o assunto, o que corresponde 80% dos alunos que preencheram o questionário. Os demais afirmaram que já conheciam o assunto.

Pergunta 6: Para cada uma das afirmações a seguir, responda se você concorda ou discorda. (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Os alunos, de maneira geral, são pouco estimulados a escrever passo a passo a resolução de um problema;
- ( ) É possível antecipar conteúdos no ensino básico a fim de que o estudante desenvolva capacidade de argumentação que o ajude no ensino superior;
- ( ) Estudantes que participam de grupos olímpicos ou atividades semelhantes apresentam maior destreza na escrita matemática;
- ( ) Aulas de resolução de problemas contribuem para aprender Matemática.

Nessa pergunta, os alunos podiam assinalar se concordavam totalmente ou parcialmente, ou assinalar indiferente. No gráfico 33, especificamente na primeira afirmativa, a maioria dos alunos afirmou discordar, ou seja, não acredita que falta estímulo ou incentivo dos professores ao solicitarem que os alunos transcrevam a resolução passo a passo, indicando as propriedades utilizadas.

Já 60% dos entrevistados afirmaram que é possível antecipar conteúdos no ensino básico a fim de que os estudantes se sintam mais preparados ao cursar o ensino superior.

Também observa-se que 73% dos alunos declararam que participar de grupos olímpicos ou atividades semelhantes contribui para a destreza na escrita matemática e desenvolvimento do raciocínio lógico. E, por fim, 87% dos alunos declarou que aulas de resolução de problemas contribuem para os alunos aprenderem Matemática.

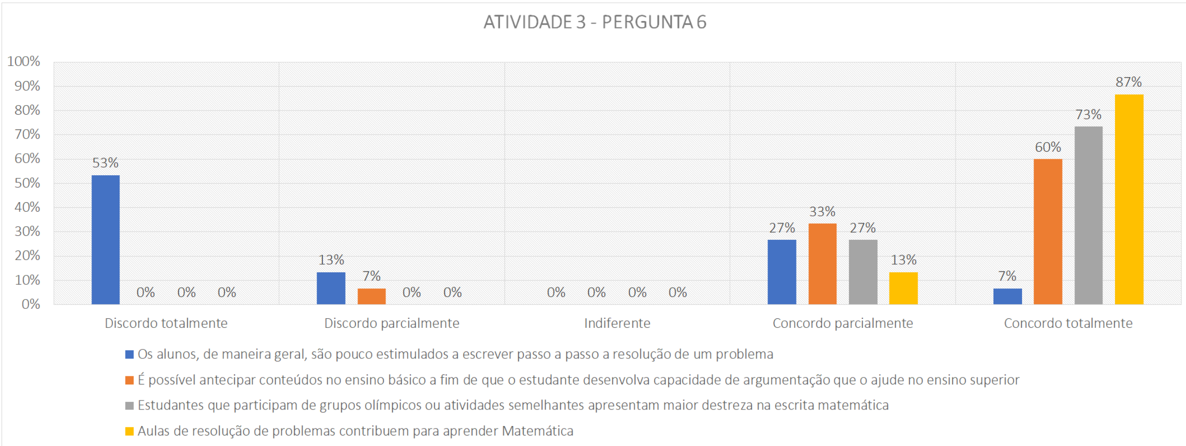


Figura 33 – Gráfico - Atividade 3 - Pergunta 6

Pergunta 7: Na aula foram revisadas algumas propriedades que são frequentemente usadas pelos alunos. O que você achou sobre estudá-las com maior profundidade? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

O objetivo dessa questão era verificar se o estudo de algumas propriedades acrescentaram ou não na formação dos alunos. Vale ressaltar que, apesar de estudarem esses assuntos na educação básica, eles o fazem de maneira bastante simplista.

	Não acrescentou	**Acrescentou parcialmente**	**Acrescentou totalmente**
Associatividade	( )	( )	( )
Comutatividade	( )	( )	( )
Elemento neutro	( )	( )	( )
Elemento inverso	( )	( )	( )
Distributividade	( )	( )	( )

Tabela 6 – Atividade 3 - Pergunta 7

Após o preenchimento da tabela 6, foram poucos os alunos que acharam que o estudo da associatividade, comutatividade, elemento neutro/inverso e distributividade não contribuíram na formação. A maioria deles achou que acrescentou em sua formação estudar com mais rigor matemático.

A apresentação dessas propriedades geralmente é feita no ensino fundamental, mas não é apresentada aos alunos a verdadeira importância da verificação da existência e veracidade delas. O ensino da Matemática, principalmente na escola particular, está condicionado aos conteúdos cobrados nos exames vestibulares e faz com que determinados assuntos, que poderiam ser explorados com mais intensidade, deixem de ser trabalhados.

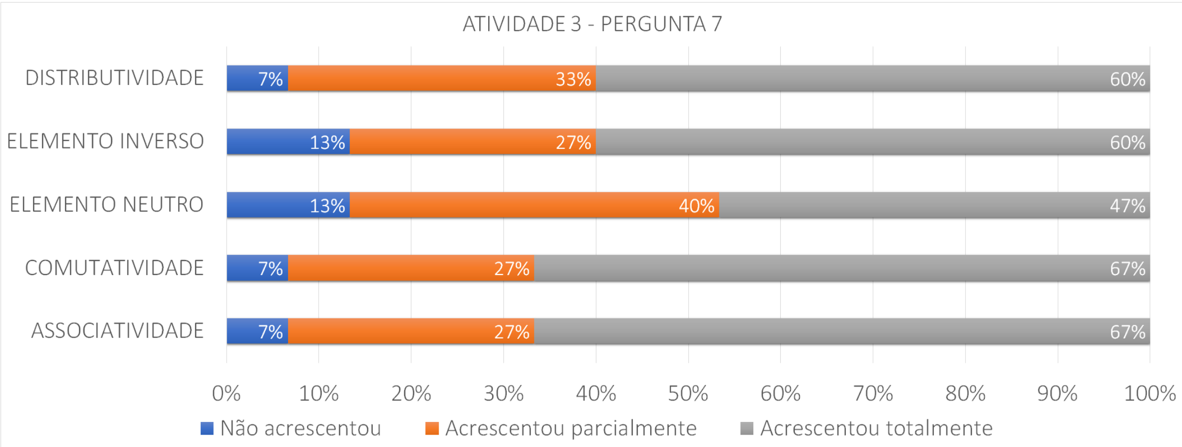


Figura 34 – Gráfico - Atividade 3 - Pergunta 7

Pergunta 8: É usual que atividades que envolvam problemas ou demonstrações sejam pouco aceitas pelos alunos. A quais fatores se deve isso?

- [ ] Os alunos, de maneira geral, apresentam dificuldade na leitura do enunciado;
- [ ] Os alunos leem pouco e, com isso, apresentam dificuldade de interpretação;
- [ ] Os alunos apresentam dificuldade em encontrar a hipótese e a incógnita;
- [ ] Os alunos apresentam dificuldade em encontrar a hipótese e a tese;
- [ ] O foco está voltado em aprender métodos para resolver questões de prova;
- [ ] Os alunos acham muito difícil ou abstrata uma demonstração e desistem rápido;
- [ ] Os alunos são pouco estimulados a demonstrar sentenças nas aulas de Matemática;

Nessa pergunta, os alunos fizeram reflexão sobre as dificuldades que a maioria deles sentem na aprendizagem de Matemática. 20% dos alunos declarou que estudam ou já estudaram com alunos que apresentam dificuldade ao ler o enunciado de um problema, sendo que 18% disseram que essa dificuldade ocorre pela falta de leitura de maneira geral.

O gráfico 35 mostra as respostas dos alunos, lembrando que os alunos podiam assinalar mais que um campo.

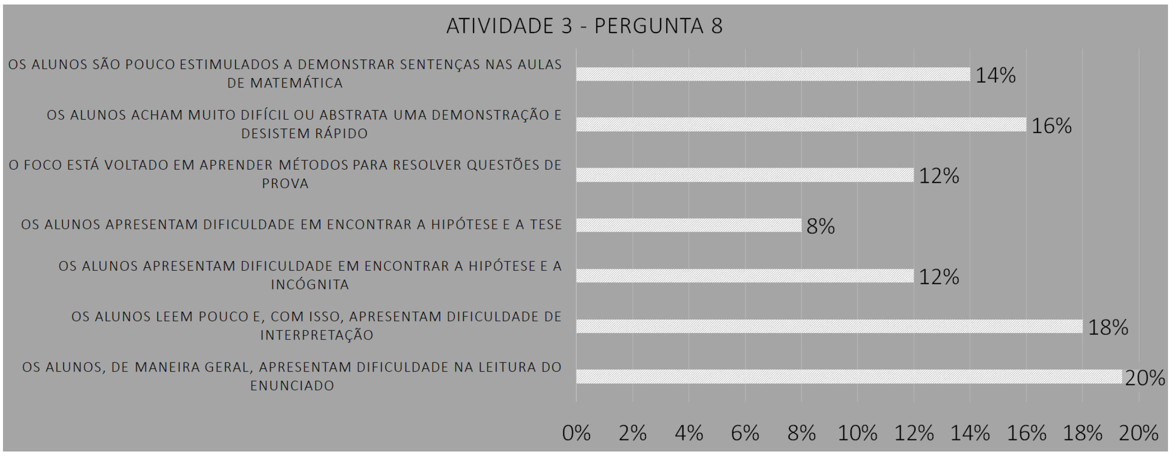


Figura 35 – Gráfico - Atividade 3 - Pergunta 8

Pergunta 9: Em uma escala de 0 a 5, demonstrar proposições matemáticas contribui para o seu entendimento? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) 0
- ( ) 1
- ( ) 2
- ( ) 3
- ( ) 4
- ( ) 5

Nessa pergunta, os alunos responderam, numa escala de 0 a 5, se demonstrar sentenças matemáticas contribuia para a compreensão deles. Sendo 0 o correspondente a "não contribui" e 5 contribui muito, pode-se observar no gráfico 36 que a 93% dos alunos assinalou um número maior ou igual a três, evidenciando assim que a maior parte deles acredita que a demonstração contribui para a compreensão do estudo da Matemática.

Figura 36 – Gráfico - Atividade 3 - Pergunta 9

Muitos problemas de olimpíadas de Matemática exigem do aluno o raciocínio dedutivo, isto é, demonstrativo. Os problemas mais elaborados requerem do aluno que ele saiba argumentar de uma maneira lógica, expressando-se com clareza durante a resolução.

A intuição, isto é, o raciocínio intuitivo é essencial ao aluno porque dá pistas de possíveis soluções que podem ser encontradas ao longo de um problema. As aulas baseadas na resolução de problemas provocam bastante o aluno a formular novas hipóteses e, por consequência, verificar a veracidade delas.

Pergunta 10: Utilize o espaço abaixo para complementar a sua opinião sobre o tema estudado.

Aluno A: "Achei interessante e muito instrutivo o tema, com certeza contribuiu muito com meu aprendizado".

Aluno B: "O tema apresentado foi bem interessante, ademais, sua ideia perpassa pelo conteúdo de conjuntos, ajudando na revisão da teoria matemática".

Aluno C: "O tema abordado foi importante por se tratar de conceitos matemáticos e não apenas cálculos".

Aluno D: "Demonstração acho difícil".

5.4 Resultados da Atividade 4

Resultados	**Atividade 4**
Tese 1: verdadeira. Mais de 80% dos alunos declararam estudar menos que uma hora semanal, o que é pouco em Matemática. **Tese 2:** falsa. Embora exista uma porcentagem maior de alunos do ensino regular noturno que trabalha (ou já trabalharam) em relação ao diurno, as duas maiores causas são: tornar-se indepedente e adquirir experiência profissional. **Tese 3:** verdadeira. A aprendizagem de Matemática é baseada na aplicação e memorização de fórmulas sem se preocupar com o desenvolvimento do raciocínio lógico e outras competências que devem ser desenvolvidas. **Tese 4:** verdadeira. Os alunos declararam que sentem falta do apoio familiar e que a sentem com maior intensidade no fechamento do bimestre, o que evidencia que a preocupação maior é a nota e não o aprendizado. **Tese 5:** verdadeira. Os alunos apresentaram certo desconhecimento em relação a diversos termos (dados, incógnita, demonstração, etc) que fazem parte da gramática do aluno que vivencia de perto aulas de resolução de problemas.	

A atividade 4 foi aplicada no dia 31 de outubro de 2017 com os alunos do ensino fundamental, médio e Educação de Jovens e Adultos em uma escola estadual localizada na cidade de Campinas-SP. Cada aluno preencheu um questionário contendo trinta perguntas com questões que coletavam dados econômicos, sociais, culturais e aspectos relacionados à aprendizagem de Matemática.

Ao todo, 266 alunos participaram da atividade que teve duração de um dia. No esquema a seguir, é possível observar a quantidade de alunos de cada série que se propôs a realizá-la.

ATIVIDADE 4		Feminino	Masculino	Em branco	TOTAL
NOTURNO	3° Termo	8	4	0	12
	2° Termo	5	3	0	8
	1° Termo	2	3	0	5
	3^a série EM	15	18	1	34
	2^a série EM	15	21	2	38
	1^a série EM	7	9	0	16
DIURNO	9° ano A	5	12	1	18
	9° ano B	9	12	0	21
	1^a série A - EM	10	15	0	25
	1^a série B - EM	22	12	0	34
	2^a série EM	13	10	0	23
	3^a série EM	21	11	0	32
TOTAL		132	130	4	266

Tabela 7 – Atividade 4 - Número de alunos entrevistados

Para a realização da atividade, foi acordado que o dia 31 de outubro seria a melhor data por conta das outras atividades da escola. O dia para aplicação foi definido nas reuniões semanais do HTPC (hora de trabalho pedagógico coletivo) na escola estadual.

Cada aluno recebeu uma folha sulfite impressa (frente e verso) com as perguntas que deveriam ser preenchidas individualmente. A ideia inicial era realizar a atividade no laboratório de informática da escola pela praticidade da coleta dos dados, mas como a quantidade de computadores disponíveis é pequena (menos do que dez), verificou-se que a logística de locomoção de todos os alunos não era viável.

Com a colaboração dos demais professores, cada sala recebeu um pacote com as folhas sulfites e os alunos foram instruídos sobre a importância da atividade e como poderiam preenchê-la. Após a aplicação da atividade, cada professor devolveu o pacote com os questionários preenchidos. Em uma única manhã, foi possível coletar os dados de todos os alunos e, à noite, os alunos preencheram o questionário demorando, em média, duas aulas de quarenta minutos.

Muito se discute sobre os desafios que se encontra quando se busca motivar os alunos a estudar Matemática, principalmente no cenário difícil que as escolas estaduais, de maneira geral, vivenciam. A presente atividade buscou reunir elementos externos (como perfil socioeconômico, questões culturais e sociais, apoio da família na aprendizagem dos alunos) e também como os estudantes se organizam para aprender Matemática.

Embora algumas perguntas do questionário não possuam relação direta com o fato de o aluno aprender Matemática na escola, se buscou através dessa atividade compreender melhor o **contexto escolar** a fim de compreender melhor as dificuldades em Matemática que os alunos apresentam.

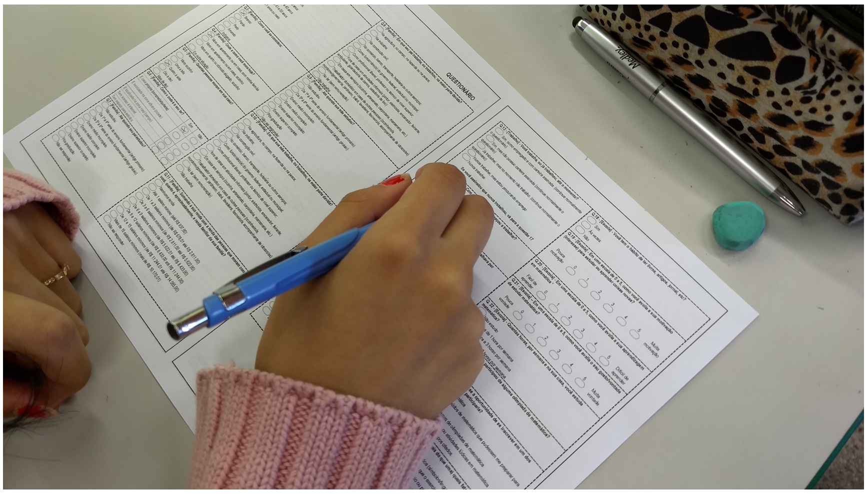


Figura 37 – Atividade 4 - Preenchimento do questionário

Foram colhidos dos alunos dados referentes a questões familiares, tais como: sexo, idade, raça ou etnia, condições de moradia, nível de instrução do pai e da mãe, renda familiar, se trabalha ou já trabalhou, relações entre estudo e trabalho, se os alunos tinham rotina de estudos diário em casa, hábito de ler livros, o que eles achavam da aprendizagem de Matemática, se tinham interesse em participar de grupos de Matemática (reforço, olímpico, preparatório, etc), dificuldade dos alunos ao aprender Matemática, uso da notação matemática na sala de aula e apoio familiar.

É importante mencionar que os dados coletados serviram como base para as seguintes conclusões a respeito da aprendizagem dos alunos em Matemática.

- **Conclusão 1:** A maioria dos alunos que estuda na escola pública vêm de famílias com nível de instrução até o ensino médio completo, que, muitas vezes, possuem dificuldade em acompanhar a aprendizagem dos alunos ou não realizam este acompanhamento com frequência, a não ser no fechamento do bimestre;
- **Conclusão 2:** Há mais alunos do ensino noturno trabalhando (ou que já trabalharam) em relação ao diurno, e as principais razões para procurarem o trabalho são: buscar a independência e adquirir experiência;
- **Conclusão 3:** Os alunos não apresentam ritmo de estudo diário na casa e quase a metade dos entrevistados afirmou que não estudam;
- **Conclusão 4:** A maioria dos alunos apresenta dificuldade em identificar a hipótese e a incógnita em um exercício ou problema;
- **Conclusão 5:** A maioria dos alunos afirmou nunca ter estudado em aula conceitos básicos de Matemática que serão cobrados no ensino superior com maior intensidade;

- **Conclusão 6:** A maior parte dos alunos apresenta dificuldade na execução de cálculos e operações básicas em Matemática, além da dificuldade em estruturar o raciocínio lógico, estabelecer conexões ou realizar cálculos mentais;
- **Conclusão 7:** O ensino da Matemática na escola pública prioriza a memorização de fórmulas ao invés de auxiliar o aluno a pensar logicamente.

Para compartilhar os dados coletados no questionário com a comunidade escolar, juntamente com outros professores, foi realizado um Workshop na escola com a temática "Educação e Trabalho". O objetivo do evento foi apresentar aos estudantes a importância do conhecimento e da Matemática em diferentes campos da atividade humana.

5.4.1 Workshop - Atividade 4

No dia 06 de novembro de 2017, a partir das 19h30min, foi realizado na escola estadual o I Workshop com a temática "Educação e Trabalho". O evento contou com a participação de cinco professores de diversas áreas e foram discutidos desde temas relacionados à aprendizagem escolar até assuntos empresariais a partir dos quais os alunos puderam identificar diferentes pontos de vista, compreender a importância de construírem um projeto de vida, aproveitando as oportunidades que são oferecidas dentro da escola, e perceber como os professores podem contribuir na formação deles.

O evento foi realizado no mesmo local onde foi aplicado o questionário (atividade 4). Ele foi separado em quatro momentos. No primeiro, foi discutida a importância do estudo da Matemática na educação básica e a importância do aluno saber pensar logicamente, estruturando o raciocínio lógico e formulando novas conjecturas. Participaram do evento: dois professores de Matemática, uma Pedagoga, um Físico e um professor de História. Os demais professores do colégio também participaram estimulando os alunos a comparecerem no workshop.

O evento foi divulgado internamente e também pelas redes sociais e contou com um bom número de participantes, contando, ao final, com cinquenta inscritos. No primeiro momento, foram apresentados aos alunos alguns dos dados estatísticos que foram coletados com o preenchimento do questionário, evidenciando, assim, o contexto escolar.

O professor provocou os alunos sobre a importância do conhecimento de Matemática nos diferentes campos da atividade humana e sobre como estruturar o raciocínio lógico pode proporcionar ao aluno o desenvolvimento da autonomia, que basicamente é a capacidade do indivíduo de tomar decisões corretas nas múltiplas situações que a ele são apresentadas e vivenciadas.

Nos momentos posteriores, o foco foi colocado na relação entre o estudo e o mundo do trabalho. Os professores compartilharam suas experiências profissionais com os

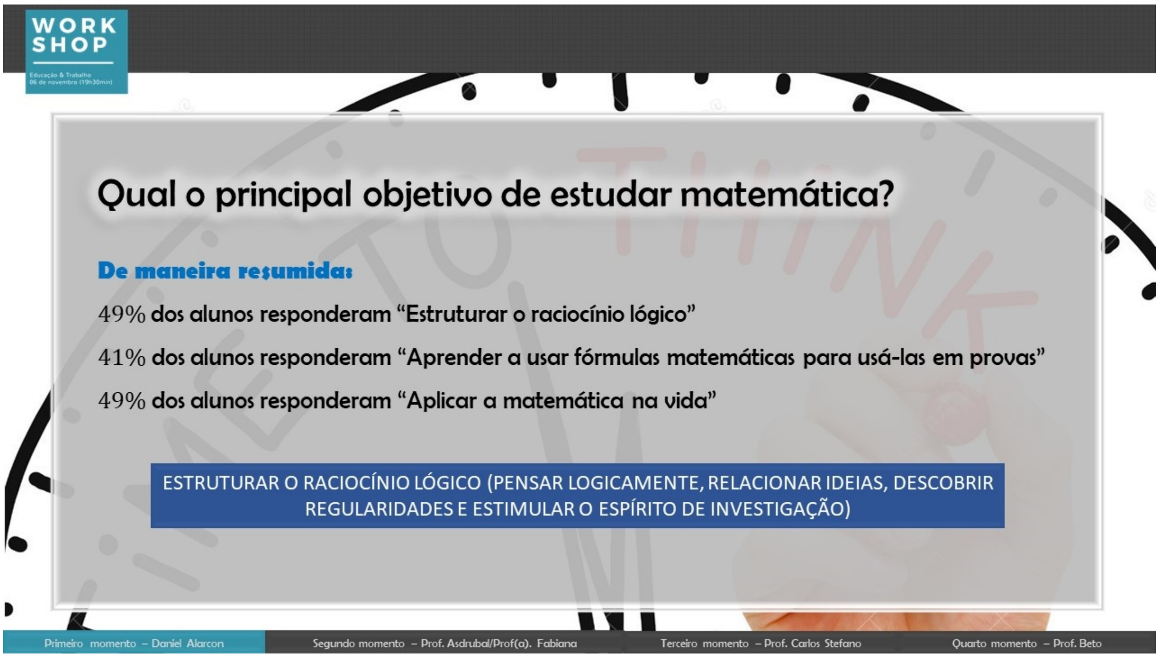


Figura 38 – Atividade 4 - Workshop - apresentação

alunos, motivando-os a se tornarem empreendedores e também auxiliando-os na construção do projeto de vida.

A seguir, serão apresentados os dados de cada uma das trinta perguntas do questionário acompanhadas de um parecer sobre possíveis conclusões que podem ser abstraídas das informações coletadas.

5.4.2 Questionário da Atividade 4

Pergunta 1: Qual é o seu sexo? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Masculino
- ( ) Feminino

A tabela 7, situada na página 125, apresenta com mais detalhes o número total de alunos que participaram da atividade e o sexo de cada um. Buscou-se, por meio dessa pergunta, verificar se a maioria dos alunos que respondia ao questionário era do sexo masculino ou feminino.

A partir das informações coletadas, notou-se que há um equilíbrio entre ambos os sexos com uma diferença de 2 do sexo feminino a mais em relação ao masculino. É possível notar também que 4 alunos não responderam a questão. Durante o questionário alguns entregaram algumas perguntas sem responder, embora tenham sido orientados sobre a importância do preenchimento de toda a atividade.

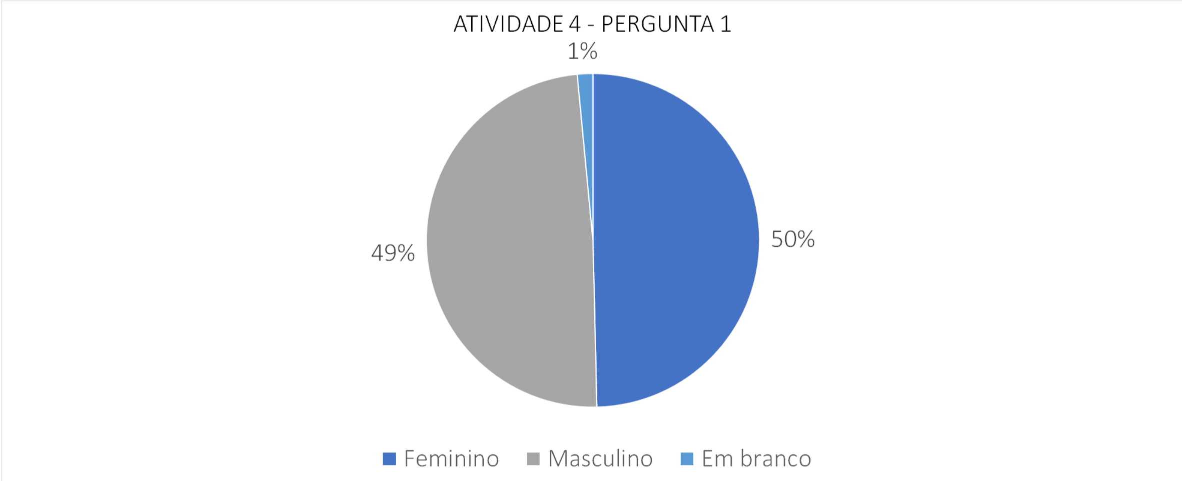


Figura 39 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 1

Os resultados dessa questão servem somente de apoio para identificar o perfil dos alunos que participaram da atividade e não interferem de maneira alguma na análise dos resultados.

Pergunta 2: Qual é a sua idade? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Entre 8 e 10 anos
- ( ) Entre 11 e 13 anos
- ( ) Entre 14 e 16 anos
- ( ) Entre 17 e 19 anos
- ( ) Entre 20 e 22 anos
- ( ) Entre 23 e 30 anos
- ( ) Entre 31 e 40 anos
- ( ) Entre 41 e 50 anos
- ( ) 51 anos ou mais

Como a educação brasileira é seriada, isto é, os alunos são separados em séries (ou anos) e em cada série são previstos conteúdos que devem ser aprendidos, buscamos por meio da pergunta 2 entender qual a faixa etária dos alunos que estavam preenchendo o questionário e o entendimento deles sobre a aprendizagem de Matemática.

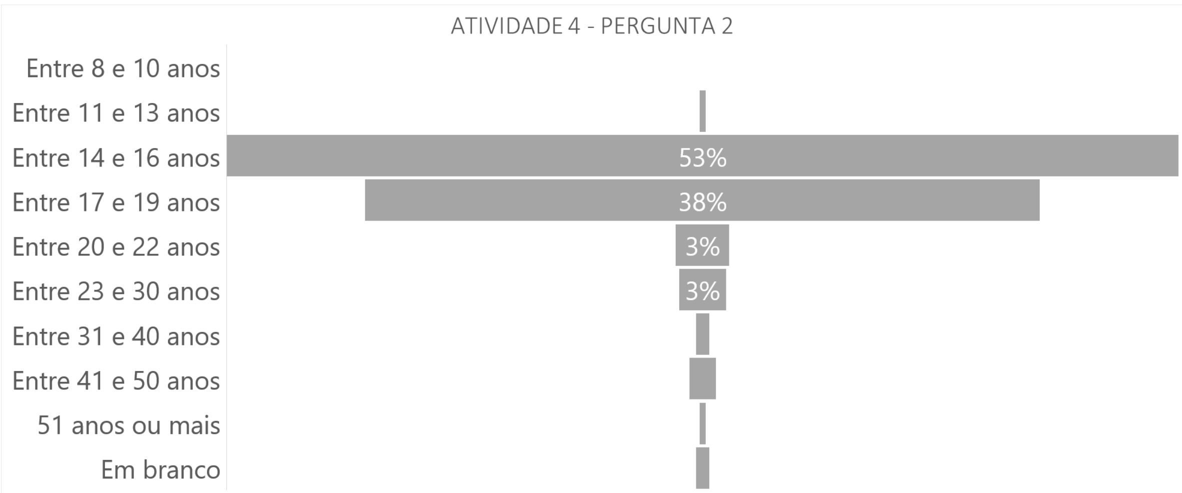


Figura 40 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 2

Pode-se observar que a maioria dos alunos entrevistados pertence a faixa etária dos 14 aos 16 anos e, em um número ligeiramente menor, estão os alunos com idade entre 17 e 19 anos. Portanto, a maioria dos jovens entrevistados foi de estudantes que estavam no ensino médio.

O questionário por ser destinado em grande parte a um público mais jovem, foi elaborado pensando na objetividade e simplicidade das perguntas. Também é importante ressaltar que as concepções de cada pessoa depende da vivência que ela teve e da sua idade.

As respostas dos alunos à atividade foram importantes no sentido de compreender as relações entre a aprendizagem deles e o convívio familiar e também como pensar em estratégias de aprendizagem que vão de encontro aos interesses apresentados pelos alunos.

É importante mencionar que a aprendizagem não se limita somente aos espaços da escola, e o estudante pode alterar suas concepções sobre a escola com o passar dos anos. Neste questionário os dados refletem opiniões dos jovens que participam do processo e, muitas vezes, têm pouco espaço de participação.

Pergunta 3: Como você se considera? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Branco
- ( ) Pardo
- ( ) Afrodescendente
- ( ) Amarelo
- ( ) Indígena

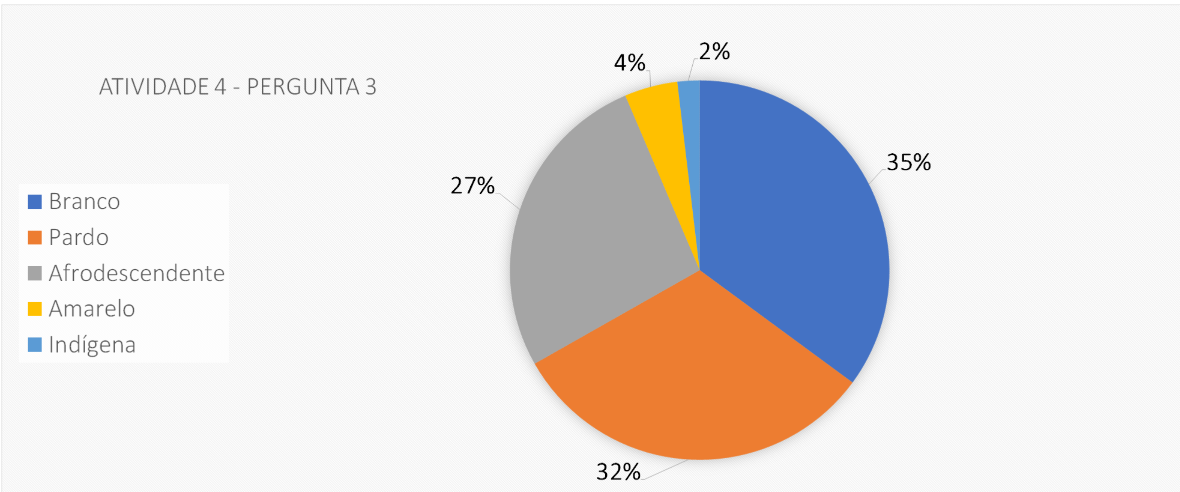


Figura 41 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 3

Buscou-se obter dados sobre a porcentagem de alunos que se declaram pardo ou afrodescendente em relação aos demais. Dos 266 alunos que preencheram o questionário, 84 se declararam pardos e 71 afrodescendentes, totalizando 155 alunos, o que representa em termos de porcentagem

$$\frac{155}{266} \approx 0,582706 \approx 58\% \quad \text{(Pardos ou afrodescendentes)} \tag{5.1}$$

Pergunta 4: Onde e como você mora hoje? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Moro em apartamento/casa com a minha família
- ( ) Moro em apartamento/casa sozinho
- ( ) Moro em quarto/cômodo alugado sozinho
- ( ) Em outra situação

Na pergunta 4, dos 266 alunos entrevistados, 250 deles assinalaram que vivem com a família em casa ou apartamento, representado 94% do total de alunos.

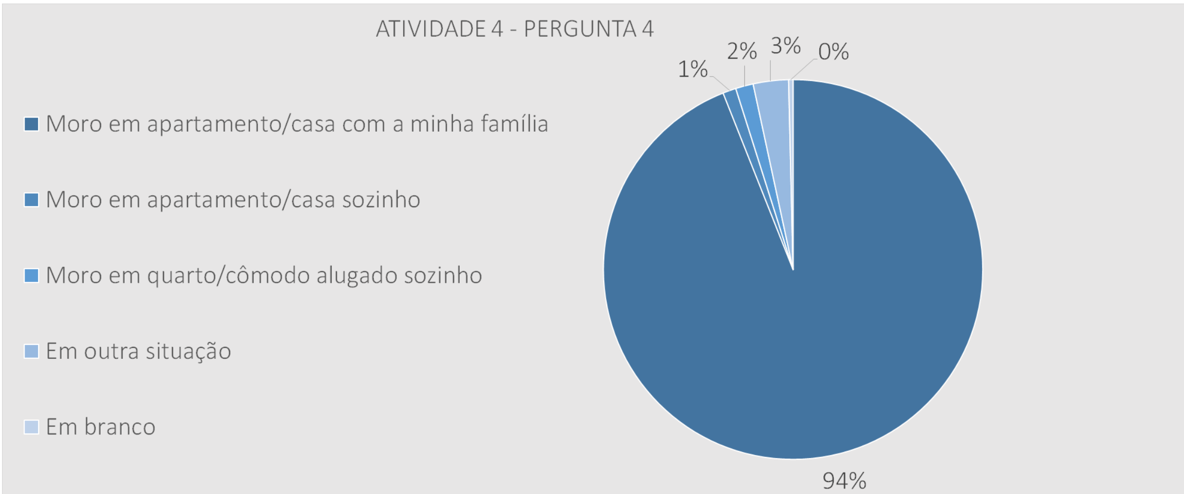


Figura 42 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 4

Nas próximas perguntas, os alunos relataram se na casa deles há espaço para estudos, acesso à internet e outras questões que, de maneira indireta, podem interferir na aprendizagem.

Pergunta 5: Quantas pessoas moram em sua casa? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Moro sozinho
- ( ) Uma a três
- ( ) Quatro a sete
- ( ) Oito a dez
- ( ) Mais de dez

Dessa questão, foi constatado que 59% dos alunos declararam viver em famílias de 4 a 7 pessoas que vivem juntas, o que representa 158 entrevistados. Com um pouco menos, mas ainda assim com número expressivo, 37% dos alunos vivem em famílias com um número variando de 1 a 3 pessoas.

Pergunta 6: Como e onde é o seu lar? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

O objetivo da pergunta era saber se os alunos moravam em casa própria ou não, qual a localização e se tinham acesso à internet e espaço para estudos. É muito comum propostas de aprendizagem que necessitam do acesso à internet e buscam "quebrar" as barreiras físicas da sala de aula, aumentando assim as possibilidades de aprendizagem dos alunos por meio das ferramentas digitais.

Nessa questão, buscaram-se elementos para saber se os alunos possuem acesso à internet em casa e se há espaço onde possam estudar. Dos 266 alunos entrevistados, 216 declararam ter acesso à internet na casa, representando 81% do total de alunos. Além disso, verificou-se que 190 deles possuem área para estudos na casa, o que em termos percentuais representa 71% do total de alunos.

	Sim	**Não**
É casa própria (comprada/quitada)	( )	( )
É localizada na zona urbana (cidade)	( )	( )
É localizada na zona rural (campo)	( )	( )
Tem acesso à internet	( )	( )
Tem espaço para estudos	( )	( )

Tabela 8 – Atividade 4 - Pergunta 6

Embora seja importante que o professor repense suas práticas dentro da sala de aula e reformule suas ações, não foram todos os alunos que declararam que possuem a ferramenta na casa. É importante que as atividades que buscam a inclusão digital não se tornem, ao final do processo, excludentes por conta da dificuldade de acesso.

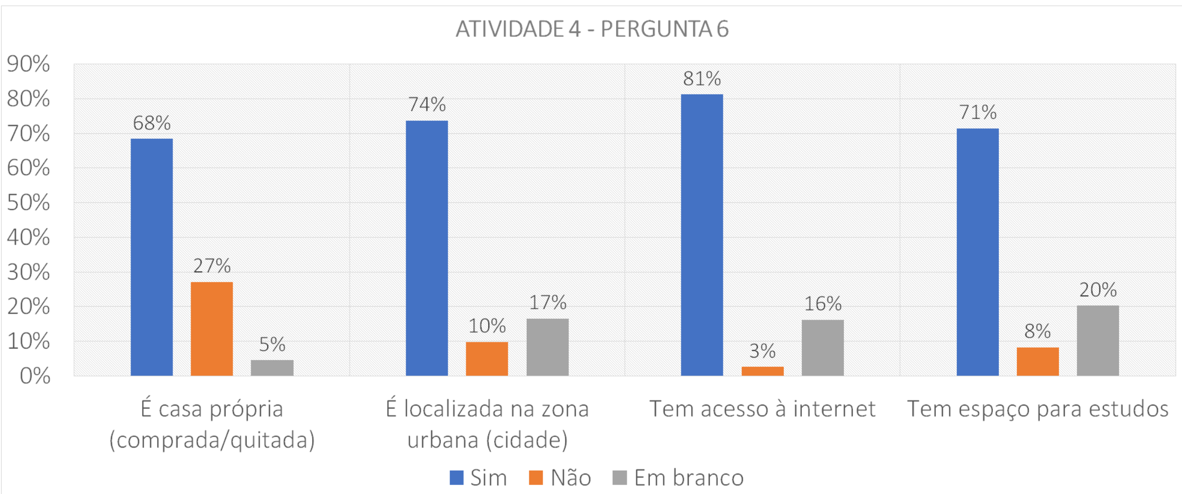


Figura 43 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 6

Outro ponto importante a ser mencionado é a questão do espaço escolar. Para o estudo da Matemática, é importante que o estudante tenha um espaço na casa onde possa realizar as atividades. A partir do questionário, verificou-se que 8% dos alunos não tem esse espaço na casa e, muitas vezes, a escola não está aberta para recebê-los no sentido de criar um ambiente de estudo, com espaços reservados para que os alunos possam se apropriar desses momentos também para aprender. Na escola estadual analisada, por exemplo, faltam ambientes próprios onde os alunos possam estudar ou tirar suas dúvidas.

Pergunta 7: Qual o grau de escolaridade do seu pai? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Não estudou
- ( ) Da 1ª a 4ª série
- ( ) Da 5ª a 8ª série
- ( ) Ensino médio incompleto
- ( ) Ensino médio completo
- ( ) Ensino superior incompleto
- ( ) Ensino superior completo
- ( ) Pós-graduação

Nessa questão, os alunos assinalaram o grau de escolaridade dos pais. A partir dos dados levantados, constatou-se que os pais de 23 alunos estudaram até a quarta série, o que representa 9% do total. Também observa-se que 35 alunos relataram que os pais terminaram o antigo ginásio que se encerrava na oitava série. O maior índice são os pais que concluíram o ensino médio, totalizando 76, o que representa 29% dos entrevistados.

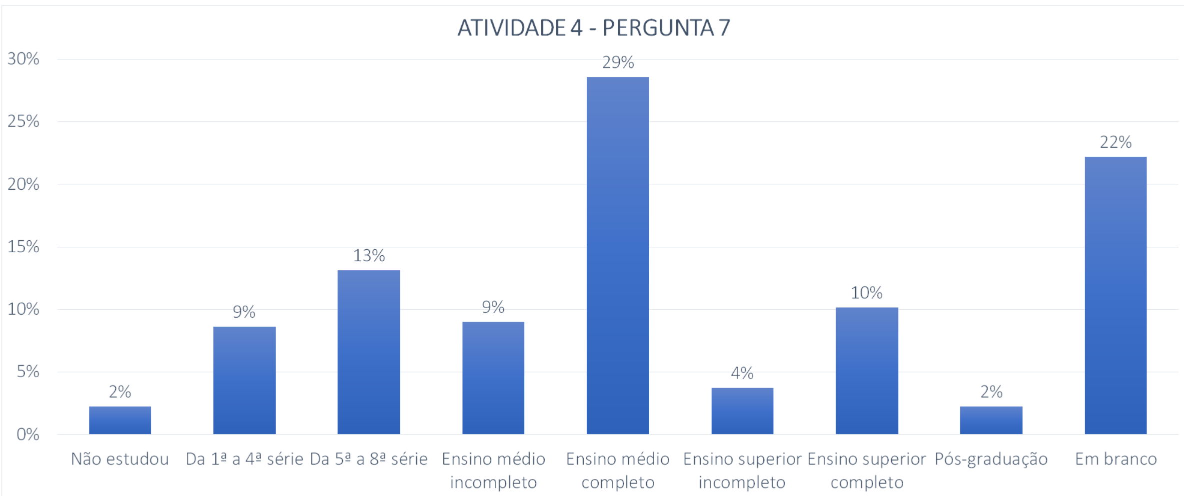


Figura 44 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 7

Portanto, pode-se afirmar que 164 alunos declararam que seus pais possuem, no máximo, o ensino médio completo, o que representa

$$\frac{164}{266} \approx 0,616541 \approx 62\% \tag{5.2}$$

A partir dos dados coletados, pode-se verificar que aproximadamente 62% dos alunos entrevistados possuem pais com grau de escolaridade até o ensino médio completo. Esse quadro, de natureza também histórica, traz elementos importantes quando é destacado o acompanhamento da família na aprendizagem dos alunos e formação do projeto de vida de cada um.

Portanto, a maioria dos alunos da escola estadual analisada vêm de famílias com grau de escolaridade até o ensino médio completo, que, algumas vezes, apresentam dificuldade em realizar o acompanhamento dos estudos e, inclusive, orientá-los sobre a importância do conhecimento aprendido na escola. É com base nesse cenário, que a escola deveria se apoiar e fazer um trabalho junto da comunidade, destacando seu Projeto Político e Pedagógico (PPP) e propondo ações efetivas que contribuam para que os alunos aprendam.

Pergunta 8: Em que o seu pai trabalha, ou já trabalhou na maior parte da vida? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

	Freq. A	**Freq. R**
( ) Agricultura, campo, fazenda ou pesca	4	2%
( ) Na indústria	51	19%
( ) Construção civil	13	5%
( ) Comércio, banco, transporte, hotelaria ou outros serviços	85	32%
( ) Funcionário público	22	8%
( ) Profissional liberal, professor ou técnico de nível superior	3	1%
( ) Fora de casa em atividades informais	31	12%
( ) Em casa em serviços	5	2%
( ) Trabalhador doméstico em casa de outras pessoas	2	1%
( ) No lar (sem remuneração)	6	2%
( ) Não trabalha	17	6%
( ) Em branco	27	10%

Tabela 9 – Atividade 4 - Pergunta 8

Na tabela 9, pode-se notar que 32% dos alunos declararam que os pais trabalham em bancos, comércio, transporte, hotelaria e outros serviços. Em segundo lugar, com 19%, os pais trabalham na indústria. As duas menores frequências relativas encontradas, cada uma de 1%, foram os pais que exercem a função de “trabalhador doméstico” e ”profissional liberal, professor ou técnico do ensino superior”. Na opção “Em casa em serviços” fazia referência à cozinha, artesanato ou outras atividades.

Pergunta 9: Qual o grau de escolaridade da sua mãe? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Não estudou
- ( ) Da 1ª a 4ª série
- ( ) Da 5ª a 8ª série
- ( ) Ensino médio incompleto
- ( ) Ensino médio completo
- ( ) Ensino superior incompleto
- ( ) Ensino superior completo
- ( ) Pós-graduação

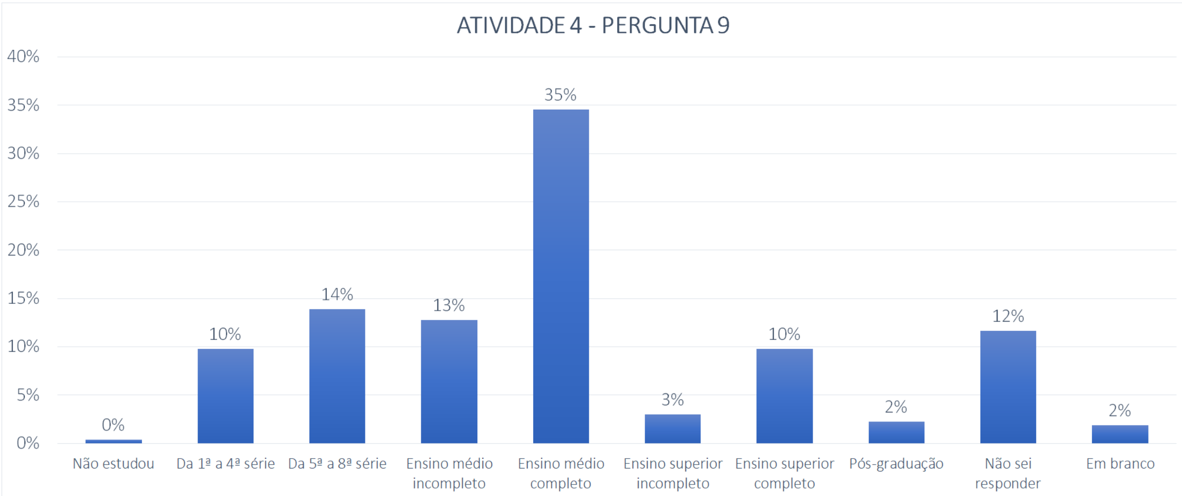


Figura 45 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 9

Pode-se notar do gráfico apresentado que, assim como os pais, a maioria das mães dos alunos, algo em torno de 35%, possui como grau de escolaridade o ensino médio completo. Se pensarmos em termos percentuais de alunos que declararam que suas mães têm, no máximo, o ensino médio completo, temos a seguinte razão percentual:

$$\frac{190}{266} \approx 0,7142 \approx 71\% \tag{5.3}$$

Essa diferença de valores percentuais das relações 5.2 e 5.3 pode estar associada a motivos históricos das funções desempenhadas pelo homem e pela mulher na sociedade.

Pergunta 10: Em que a sua mãe trabalha, ou já trabalhou na maior parte da vida? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

Comparando os dados encontrados nas tabelas 9 e 10, notamos que a maior porcentagem de alunos relataram que os pais desempenham funções no comércio, banco, transporte, hotelaria ou outros serviços, já nesta tabela a maioria das mães desempenham funções associadas ao trabalho doméstico na casa de outras pessoas ou no lar (sem remuneração), com um pouco menos.

As questões históricas e sociais que justificam esse fato não fazem parte do propósito da dissertação, embora seja importante compreendê-las para poder ter um

	Freq. A	Freq. R
( ) Agricultura, campo, fazenda ou pesca	2	1%
( ) Na indústria	22	8%
( ) Construção civil	2	1%
( ) Comércio, banco, transporte, hotelaria ou outros serviços	69	26%
( ) Funcionário público	20	8%
( ) Profissional liberal, professor ou técnico de nível superior	8	3%
( ) Fora de casa em atividades informais	9	3%
( ) Em casa em serviços	24	9%
( ) Trabalhador doméstico em casa de outras pessoas	40	15%
( ) No lar (sem remuneração)	29	11%
( ) Não trabalha	27	10%
( ) Em branco	14	5%

Tabela 10 – Atividade 4 - Pergunta 10

parecer melhor ao propor soluções que busquem a melhoria da aprendizagem dos alunos, principalmente em Matemática.

Pergunta 11: Somando a sua renda com a renda das pessoas que moram com você, quanto é, aproximadamente, a renda familiar da sua família? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Nenhuma renda
- ( ) Até 1 salário
- ( ) De 1 a 3 salários
- ( ) De 3 a 6 salários
- ( ) De 6 a 9 salários
- ( ) De 9 a 12 salários
- ( ) De 12 a 15 salários
- ( ) Mais de 15 salários
- ( ) Não sei responder

Nas alternativas apresentadas para os alunos, todas faziam referência ao salário mínimo de novecentos e trinta e sete reais no momento da aplicação do questionário.

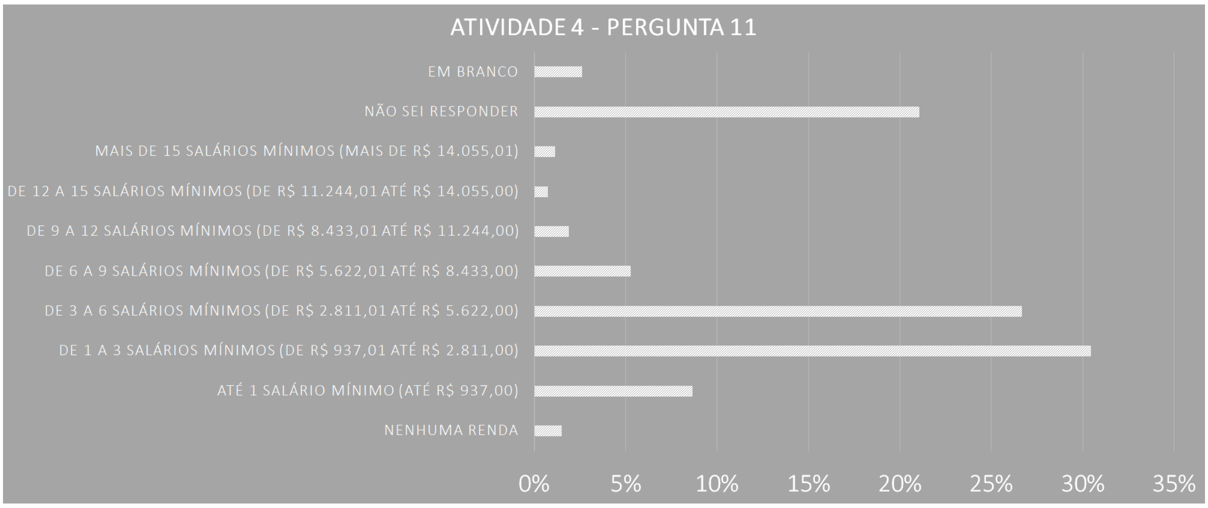


Figura 46 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 11

Pergunta 12: Você trabalha ou já trabalhou? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

O objetivo da pergunta era analisar qual porcentagem de alunos do período noturno trabalham (ou já trabalharam) em relação ao diurno, para compreender como tais aspectos interferem na aprendizagem deles.

- ( ) Sim, como empregado (carteira assinada)
- ( ) Sim (sem carteira assinada)
- ( ) Já trabalhei (atualmente, não)
- ( ) Nunca trabalhei (estou procurando emprego)
- ( ) Nunca trabalhei

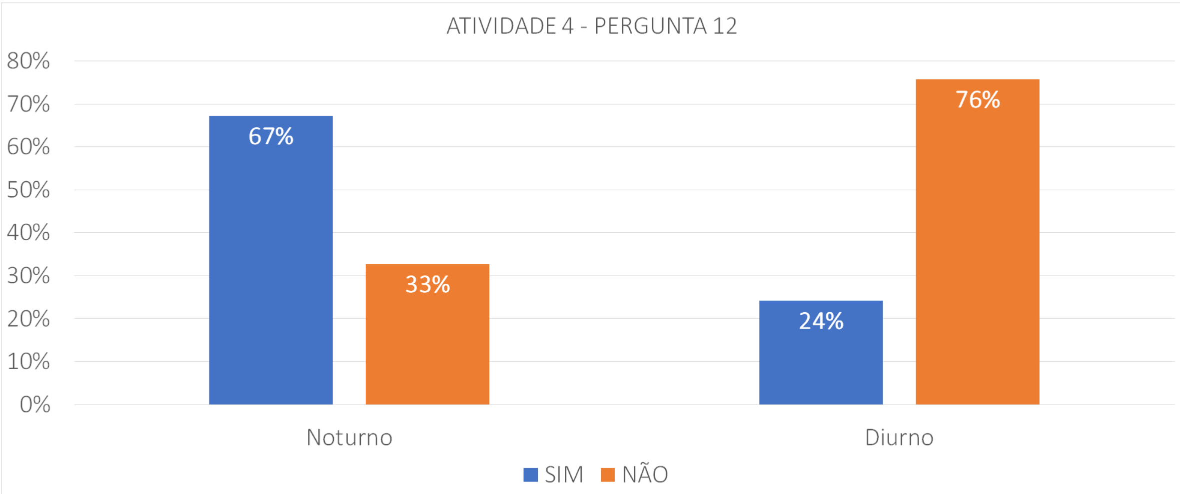


Figura 47 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 12

Na figura 47, entende-se com **sim** os alunos que assinalaram as opções "Sim, como empregado (carteira assinada)", "Sim (sem carteira assinada)" ou "Já trabalhei (atualmente, não)". Por consequência, entende-se como **não** os alunos que assinalaram as opções "Nunca trabalhei (estou procurando emprego)" ou "Nunca trabalhei".

	Sim	**Não**	**Total**
Noturno	76	37	113
Diurno	37	116	153

Tabela 11 – Atividade 4 - Pergunta 12

Dos dados levantados no gráfico 47 e na tabela 11, nota-se que a maior parte dos alunos do ensino médio noturno trabalha, totalizando 67% dos alunos em relação ao total de alunos que responderam a questão.

Para o professor, esses dados podem ser levados em consideração quando planeja uma atividade para ser aplicada com os alunos do ensino médio noturno, já que estes dispõem de menos tempo para os estudos diários.

É sugerido ao professor que elabore atividades mais objetivas e com tempo maior para serem feitas em relação às apresentadas aos alunos que cursam o ensino diurno. Esses fatores não são determinísticos na aprendizagem de Matemática, mas contribuem para a organização dos alunos na realização das atividades propostas.

Pergunta 13: Com que idade você começou a trabalhar? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) 12 anos (ou menos) de idade
- ( ) Entre 13 e 15 anos de idade
- ( ) Entre 16 e 18 anos de idade
- ( ) Após os 18 anos de idade

Figura 48 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 13

Pode-se observar que a maioria dos alunos começou a trabalhar na faixa etária dos 13 aos 15 anos de idade, englobando alunos do oitavo ano (ensino fundamental) à primeira série do ensino médio. Ao total, 112 pessoas responderam essa questão e 154 deixaram em branco. O gráfico foi gerado em relação às 121 pessoas.

Na pergunta 12, 113 alunos declararam que trabalham ou já trabalharam em algum momento da vida. A diferença $112 - 113 = -1$ reflete que um aluno respondeu a questão 12, mas deixou a 13 em branco.

Pergunta 14: Quantas horas você trabalha ou trabalhava por semana? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Até 10 horas semanais
- ( ) De 11 a 20 horas semanais
- ( ) De 21 a 30 horas semanais
- ( ) De 31 a 40 horas semanais
- ( ) Mais de 40 horas semanais

Dos 113 alunos que responderam a pergunta, a maior parte deles, (30%), disse que a jornada de trabalho variava entre dez e vinte horas semanais. A menor porcentagem foi a dos alunos que realizavam jornadas de trabalho variando de trinta a quarenta horas semanais, totalizando 4% do total de pessoas que responderam a essa questão.

Ao todo, 154 alunos deixaram essa pergunta em branco por conta da pergunta 12, em que os alunos que assinalaram que não trabalham ou nunca trabalhavam deveriam pular para a pergunta 17 no questionário.

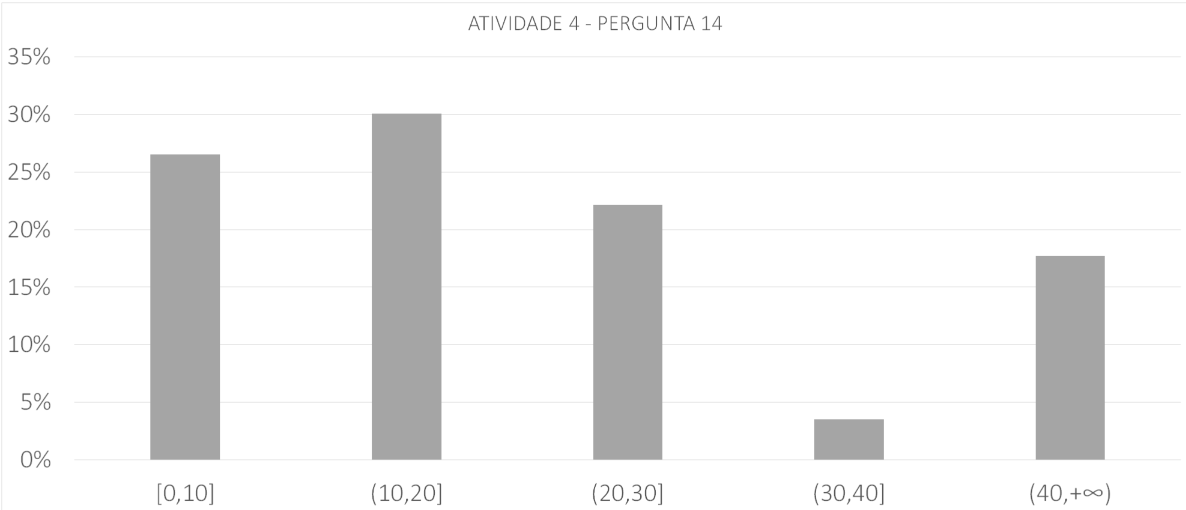


Figura 49 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 14

Pergunta 15: Quais das razões abaixo influenciaram você a começar a trabalhar? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Sustentar a família
- ( ) Pagar os estudos
- ( ) Ser independente
- ( ) Adquirir experiência

É comum nas escolas estaduais os alunos do período diurno começarem a trabalhar e, por conta disto, migrarem para o ensino médio noturno. Buscou-se, por meio dessa pergunta, compreender (de maneira geral) as razões para essa escolha.

	Sim	**Não**	**Em branco**
Sustentar a família	31	46	36
Ser independente	80	10	23
Pagar os estudos	21	48	44
Adquirir experiência	78	4	31

Tabela 12 – Atividade 4 - Pergunta 15

Com base nos dados da tabela 12, nota-se que maioria dos alunos começa a trabalhar para se tornarem independentes e, com isso, adquirir experiência. A porcentagem de alunos que começou a trabalhar para sustentar a família igual a 27% é menor do que os 41% que afirmaram que não trabalham para essa finalidade.

Uma possível alternativa para que esse quadro não se intensifique é que a escola adote estratégias de ensino e compartilhe com a comunidade escolar a importância do conhecimento para o estudante na sua formação profissional.

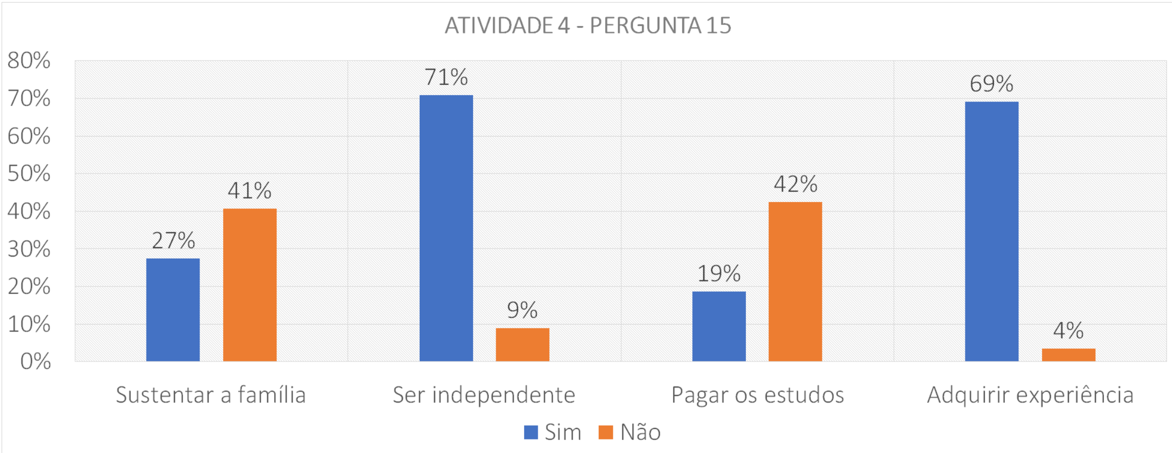


Figura 50 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 15

Do gráfico 50, pode-se inferir que o jovem passa a dedicar maior parte do seu dia para o trabalho e entende a escola como uma complementação necessária, mas que muitas vezes não atende às suas expectativas e suas necessidades de formação profissional.

Na tentativa de mudar esse cenário, a presente dissertação propõe atividades que sejam, de fato, significativas para os alunos e os façam compreender a importância do estudo da Matemática no ensino básico e como ela pode contribuir para sua formação humana e profissional.

Pergunta 16: Como você avalia ter estudado e trabalhado durante seus estudos? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Atrapalhou meus estudos
- ( ) Contribuiu para os meus estudos
- ( ) Possibilitou meu crescimento
- ( ) Não atrapalhou meus estudos

Dos dados analisados no gráfico 51, a maioria dos alunos, 35%, entende que o trabalho não afetou os estudos. O cálculo foi feito com base no total de alunos que admitiu trabalhar ou já ter trabalhado, que é igual a 133 alunos de 266 ao total.

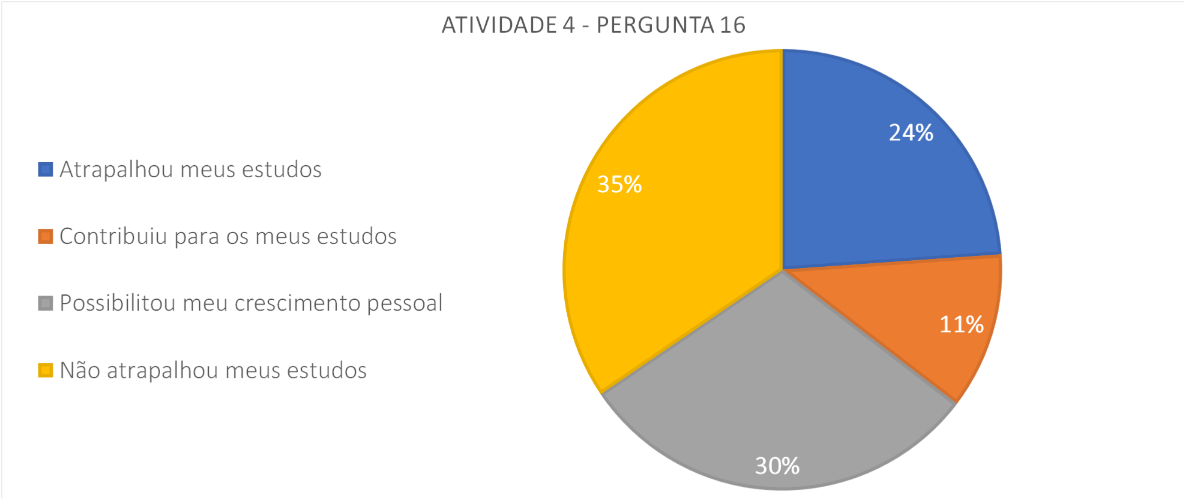


Figura 51 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 16

Pergunta 17: Você tem o hábito de rever em casa o que foi estudado em sala? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Não estudo
- ( ) Estudo menos de 1 hora
- ( ) Estudo de 1 a 3 horas
- ( ) Estudo de 3 a 5 horas
- ( ) Estudo mais de 5 horas

Nessa questão, diferente das quatro anteriores que somente foram respondidas pelos alunos que declararam trabalhar ou que já tiveram vínculo alguma vez com o trabalho, dos 266 alunos entrevistados, 256 responderam. O gráfico 52 sintetiza as respostas sobre a organização semanal para o estudo diário dos alunos.

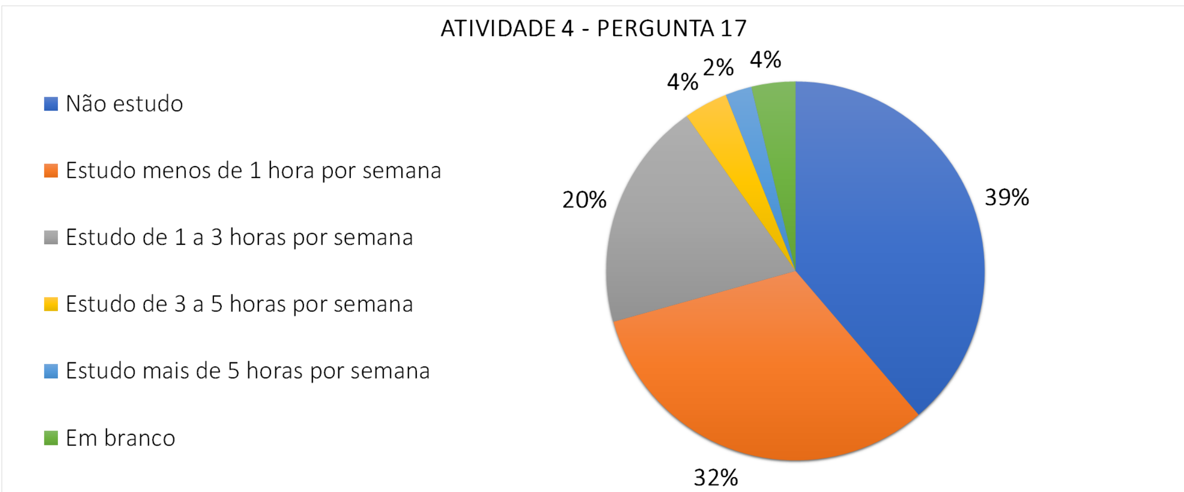


Figura 52 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 17

A partir do gráfico 52, constatou-se que 39% dos alunos declararam que não estudam na casa quaisquer disciplinas; 32% estudam menos de uma hora por semana; 20% estudam de uma a três horas por semana e somente 6% dos alunos declararam estudar mais do que três horas por semana.

Portanto, 81% dos alunos da escola estadual que responderam ao questionário não possuem a rotina de estudos e dedicam menos do que uma hora de estudo semanal. Uma possível solução para esse problema é um trabalho conjunto dos professores, gestores e comunidade escolar para informar sobre a importância do estudo diário dos alunos e o oferecimento de propostas para melhorar a organização dos alunos e da comunidade escolar sob o trabalho realizado.

Pergunta 18: Você tem o hábito de ler livros, artigos, jornal, etc? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Sim
- ( ) Às vezes
- ( ) Não

A metade dos alunos respondeu que às vezes lê livros, artigos, jornais ou outros materiais. Numa proporção menor, 27% declararam que leem e 22% que não. Essa pergunta está atrelada à atividade 2, cujo objetivo era proporcionar aos alunos momentos de aprendizagem com base na leitura de artigos de Matemática e que discutiam sobre a construção do raciocínio lógico, simbologia e notação matemática.

Nas próximas três questões, como a escala utilizada foi a mesma, apresentaremos as perguntas com as possíveis escolhas dos alunos e, em seguida, o gráfico com os comentários.

Pergunta 19: Em uma escala de 0 a 5, você apresenta interesse ou motivação para estudar ou aprender coisas novas? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) 0
- ( ) 1
- ( ) 2
- ( ) 3
- ( ) 4
- ( ) 5

Nessa questão, quanto mais próximo do zero, o aluno se declarava com "Pouca motivação", e, quanto mais perto do 5, como com "Muita motivação".

Pergunta 20: Em uma escala de 0 a 5, como você avalia a sua aprendizagem em Matemática? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) 0
- ( ) 1
- ( ) 2
- ( ) 3
- ( ) 4
- ( ) 5

Nessa questão, quanto mais próximo do zero, o aluno se declarava com "Fácil de aprender", e quanto mais perto do 5 como "Difícil de aprender".

Pergunta 21: Em uma escala de 0 a 5, como você avalia o seu interesse em aprender matemática? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) 0 • ( ) 1 • ( ) 2 • ( ) 3 • ( ) 4 • ( ) 5

Nessa questão, quanto mais próximo do zero, o aluno se declarava com “Pouco interesse”, e, quanto mais perto do 5 como “Muito interesse”.

Comentários: Na pergunta 19, os alunos fizeram uma auto reflexão sobre os interesses deles em aprender novas coisas, otimizar os próprios conhecimentos e estar atento ao que a escola se propõe a ensinar.

Em uma escala de 0 a 5, os alunos assinalaram com maior frequência o número 4, representando 33% do total de alunos que responderam ao questionário. A marcação desse número sugere que os alunos apresentam motivação em aprender novas coisas, mas em si a questão foi formulada de uma maneira bastante ampla, isto é, sem especificar quais os interesses dos alunos e a relação entre eles e o que a escola ensina.

Na pergunta 20, foi avaliada a percepção dos alunos sobre a dificuldade ou facilidade de se aprender Matemática. Em si, a questão é bastante subjetiva e pode admitir respostas diversas dentro do entendimento de cada aluno e também dentro da trajetória escolar que ele vivenciou.

A proposta da questão é reunir esses elementos e compreender se os alunos, de fato, compreenderam a importância do estudo da Matemática na educação básica, além de buscar conhecer a visão que os alunos têm do processo. Dos dados coletados, observou-se que 26% dos alunos assinalaram a opção 3, o que representaria, em uma linguagem corrente, “regular”.

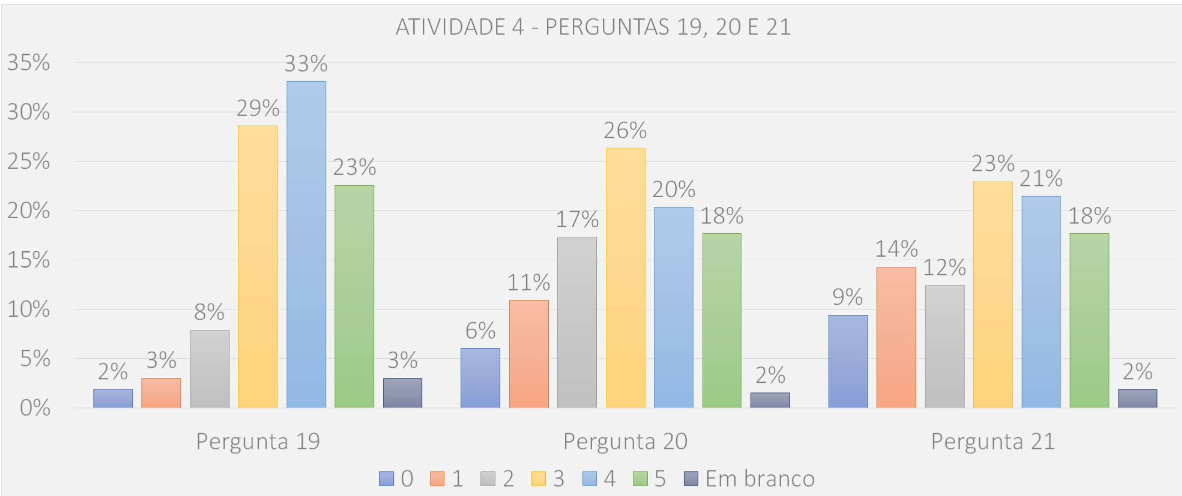


Figura 53 – Gráfico - Atividade 4 - Perguntas 19, 20 e 21

Na pergunta 21, novamente, a maior frequência relativa foi o número 3, mas agora coletando dados sobre o interesse deles em aprender algo a mais na área de Matemática. Ao todo, 62% dos alunos declararam que se sentem motivados a aprender Matemática assinalando uma opção maior do que 2 em uma escala que vai de 0 a 5.

Pergunta 22: Quantas horas, por semana, você estuda Matemática na sua casa? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Não estudo
- ( ) Estudo menos de 1 hora
- ( ) Estudo de 1 a 3 horas
- ( ) Estudo de 3 a 5 horas
- ( ) Estudo mais de 5 horas

O estudo diário dos conteúdos trabalhados pelo professor é essencial, pois o aluno que participa com uma postura ativa nas aulas, aproveita o momento para esclarecer dúvidas dos estudos, procura diferentes meios de compreender um tópico estudado e compartilha com os demais alunos as suas dúvidas, propondo-se também a ensinar, processos que oferecem uma probabilidade maior de compreensão da Matemática.

O estudo diário requer esforço, dedicação e organização. É importante que ele se aproprie das ferramentas digitais para auxiliá-lo a aprender e não somente para outros fins. Nessa pergunta, os alunos responderam quantas horas se dedicam em casa para o estudo da Matemática.

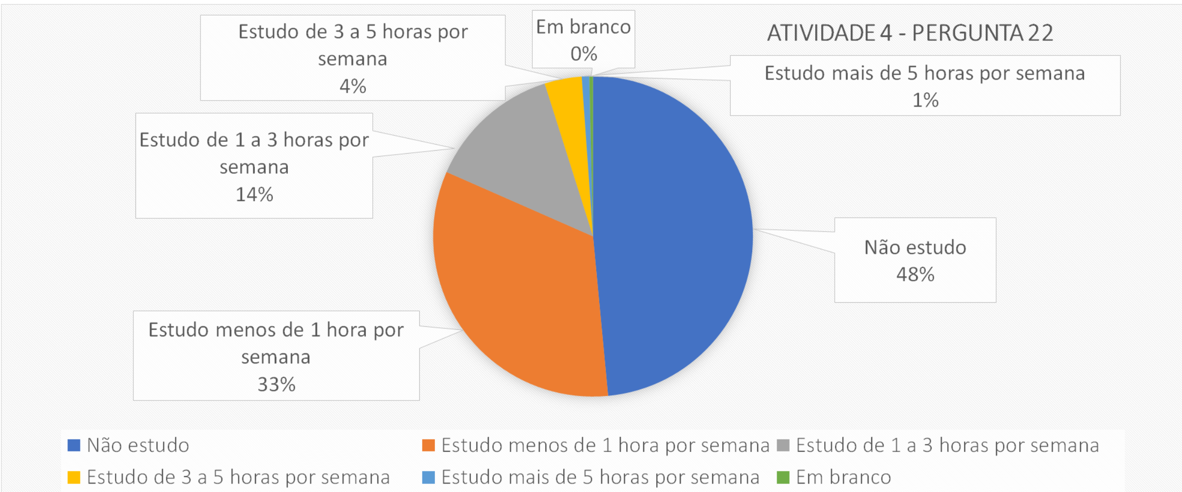


Figura 54 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 22

A partir dos dados levantados, verificou-se que 48% dos alunos não estudam Matemática em casa e que 33% deles dedicam, no máximo, uma hora por semana de estudo para a disciplina. A menos que os estudantes aproveitem esse tempo de maneira bastante produtiva, ainda é preocupante quase metade dos alunos declarar que não estuda.

Esses dados podem auxiliar a equipe de professores e gestores a pensar em estratégias que visem a conscientizar a comunidade escolar sobre a importância da organização das tarefas diárias ou semanais. Muitas vezes os alunos não conseguem organizar uma parte do dia para se dedicarem aos estudos ou mesmo não tiveram essa orientação da escola.

Muito se pode discutir sobre se os professores sabem ou não Matemática ou se os alunos se sentem motivados a aprendê-la ou não, mas um ponto importante a destacar é o papel do gestor e da equipe de professores no campo da mediação, orientando os pais e alunos sobre essas questões. É importante discutir sobre como os alunos podem aproveitar as ferramentas digitais, o professor, como também ele uma fonte de estudos, e os materiais didáticos para aprender.

Pergunta 23: Você já participou de alguma olimpíada de Matemática? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Sim
- ( ) Não

Nessa questão, 54% dos alunos responderam que sim, 43% que não e 3% deixaram em branco. Por serem alunos da rede estadual, muitos realizam a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), que busca jovens talentos e também tem por objetivo motivar os alunos a estudar Matemática.

Pergunta 24: Se você tivesse a oportunidade de se inscrever em um dos projetos abaixo, de qual você participaria?

- [ ] Grupo de reforço em Matemática
- [ ] Grupo preparatório para o ensino superior (faculdade)
- [ ] Grupo que discutisse problemas de olimpíadas de Matemática
- [ ] Grupo que trabalhasse com jogos ou atividades lúdicas de Matemática
- [ ] Não participaria de nenhum dos grupos citados

Nessa questão, como o campo de preenchimento não era um oval, mas sim "[ ]", os alunos podiam preencher quantos quisessem. Do total de marcações (incluindo os que deixaram em branco), 47% responderam que gostariam de participar de um grupo preparatório para o ensino superior, e 35% declararam que gostariam de participar de um grupo de reforço em Matemática.

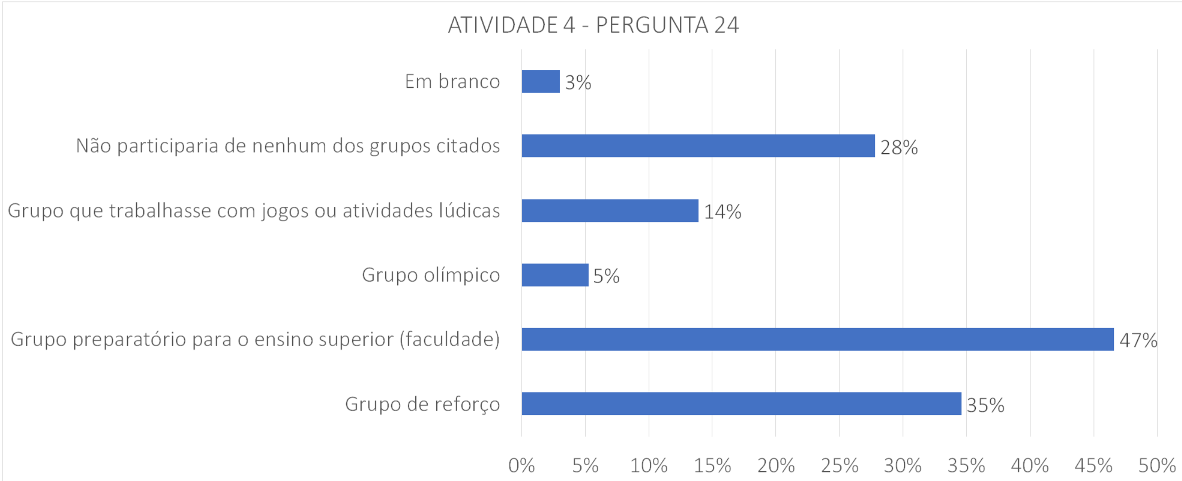


Figura 55 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 24

Pergunta 25: Selecione quais dos fatores a seguir dificultam sua aprendizagem em Matemática, se houver. (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- [ ] Sinto falta do apoio familiar ou da escola para que eu aprenda
- [ ] Apresento dificuldade em demonstrações ou abstrações matemáticas
- [ ] Tenho dificuldade em começar um exercício ou problema
- [ ] Apresento dificuldade em compreender o que o exercício pergunta
- [ ] Não compreendo a simbologia matemática (símbolos/linguagem)

Nessa pergunta, os alunos assinalaram algumas dificuldades que eles podiam apresentar ao resolver um exercício ou problema de Matemática. Com base nos dados coletados, verificou-se que, de todas as marcações feitas (incluindo os que deixaram em branco), 49% assinalaram que apresentam dificuldade em compreender o que o exercício pergunta e, com 41% das marcações, estavam os alunos que apresentam dificuldade em começar um exercício ou problema.

Os dados do gráfico 56 mostram que os alunos que apresentam dificuldade em Matemática, ou não conseguem iniciar um exercício, ou tem dificuldade em identificar o que o exercício pede. Isso sugere que o professor trabalhe com os alunos o conceito de **hipótese** e **tese**, adotando um papel questionador nas aulas e contribuindo assim para que os alunos estruturem melhor o raciocínio lógico e dedutivo.

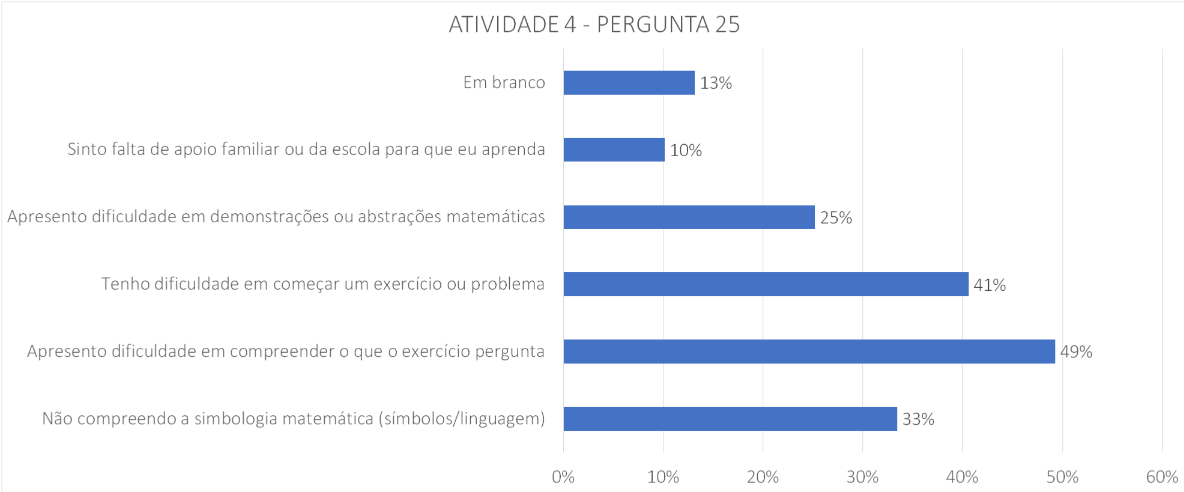


Figura 56 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 25

Pergunta 26: Dos termos abaixo, com que frequência você os estuda nas aulas de Matemática? (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- ( ) Nunca (A)
- ( ) Raramente (B)
- ( ) Poucas vezes (C)
- ( ) Frequentemente (D)
- ( ) Sempre (E)
- ( ) Não sei responder (F)

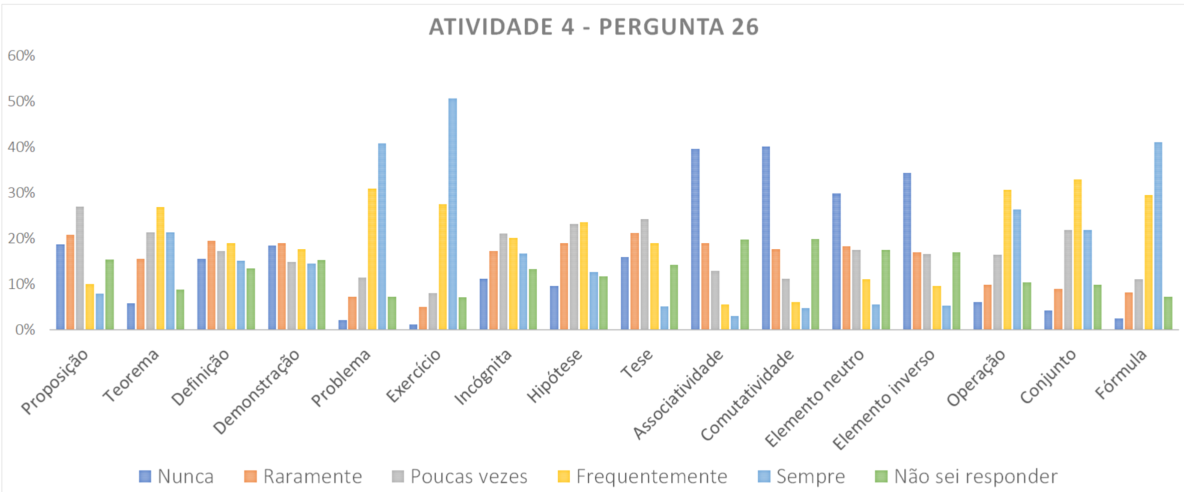


Figura 57 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 26

A figura 57 mostra com que frequência os alunos se deparam com as seguintes palavras nas aulas de Matemática: proposição, teorema, definição, demonstração, problema, exercício, incógnita, hipótese, tese, associatividade, comutatividade, elemento neutro, elemento inverso, operação, conjunto e fórmula.

A tabela 13 mostra a quantidade assinalada para cada opção. Como não havia no questionário a opção “deixar em branco”, para a análise no gráfico 57 foram retirados os alunos que deixaram em branco.

	A	B	C	D	E	F	Em branco
Proposição	45	50	65	24	19	37	26
Teorema	14	37	51	64	51	21	28
Definição	36	45	40	44	35	31	35
Demonstração	41	42	33	39	32	34	45
Problema	5	17	27	73	96	17	31
Exercício	3	12	19	65	120	17	30
Incógnita	26	40	49	47	39	31	34
Hipótese	23	45	55	56	30	28	29
Tese	37	49	56	44	12	33	35
Associatividade	92	44	30	13	7	46	34
Comutatividade	93	41	26	14	11	46	35
Elemento neutro	70	43	41	26	13	41	32
Elemento inverso	79	39	38	22	12	39	37
Operação	14	23	38	71	61	24	35
Conjunto	10	21	51	77	51	23	33
Fórmula	6	19	26	69	96	17	33

Tabela 13 – Atividade 4 - Pergunta 26

Pode-se notar no gráfico 57 que, em relação ao total de alunos que assinalou alguma das alternativas da pergunta 26, a alternativa “sempre” foi a mais assinalada nos termos “problema”, “exercício” e “fórmula”.

Já no caso dos alunos que assinalaram “nunca”, os termos que apareceram com maior frequência foram: associatividade, comutatividade, elemento neutro e elemento inverso. Esses termos, muitos deles estudados em Grupos, são pouco usados nas aulas de Matemática.

Ao verificar a incidência dos termos “hipótese” e “tese”, observa-se que no primeiro as barras “raramente” e “poucas vezes” aparecem bem próximas, o que indica que é um termo pouco usado nas aulas de Matemática, mas que, apesar disso, é apresentado. No caso da tese, um pouco menos.

Ainda no gráfico, é possível observar que o termo “Proposição” aparece com menor intensidade do que o termo “Teorema”, o que sugere que os alunos são pouco questionados a identificar a validade de proposições matemáticas.

O cálculo para chegar aos percentuais do gráfico 57 foi feito a partir da razão entre o total de vezes que uma alternativa foi assinalada sobre o total de respostas daquela, com exceção dos alunos que deixaram em branco. Por exemplo: no caso da linha “Fórmula” e coluna "Sempre" na tabela 13, situada na página 148, tem-se:

$$\frac{96}{266-33} = \frac{96}{233} \approx 0,4140 \approx 41\% \tag{5.4}$$

Pergunta 27: Sobre as afirmações a seguir, assinale se você concorda ou não com elas. (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

As afirmações feitas nessa pergunta faziam referência ao grupo de alunos da sala de cada estudante. Ela procurou coletar informações, do ponto de vista dos alunos, sobre as dificuldades deles em Matemática.

- ( ) A Matemática apresentada nas escolas não tem aplicação na vida real (1)
- ( ) Há abuso no uso da simbologia algébrica (2)
- ( ) Há má preparação nos primeiros anos de escolaridade (3)
- ( ) Os alunos fazem pouco trabalho de Matemática (4)
- ( ) Os alunos apresentam dificuldade em estruturar o raciocínio (5)
- ( ) Há dificuldade de compreensão nas aulas de Matemática (6)
- ( ) Há baixo rendimento no desempenho dos alunos (7)
- ( ) Há falta de atitude por parte de alguns alunos (8)
- ( ) Há poucas atividades que trabalham cálculo mental (9)
- ( ) Há alunos com dificuldade na interpretação dos símbolos usados (10)
- ( ) Há alunos com dificuldade em operações mentais ou conceitos numéricos (11)
- ( ) Há alunos com dificuldade na execução de operações e cálculos numéricos (12)

Para cada uma das afirmações apresentadas, os estudantes responderam se concordavam ou não. Da mesma maneira que a pergunta 26 foi formulada, eles assinalavam em um oval (um único por linha) a opinião a respeito delas.

- ( ) Concordo totalmente (A)
- ( ) Concordo (B)
- ( ) Indiferente (C)
- ( ) Discordo (D)
- ( ) Discordo totalmente (E)
- ( ) Não sei responder (F)

A tabela 14 mostra a frequência absoluta de cada uma das marcações dos alunos. Para gerar o gráfico, foram desconsiderados os alunos que deixaram em branco.

Por exemplo: a porcentagem de pessoas no gráfico 58 que assinalaram que "Há baixo rendimento no desempenho dos alunos" (7) e concordam com a afirmação (B) é igual a

$$\frac{112}{237} \approx 0,4725 \approx 47\% \tag{5.5}$$

Sentenças	A	B	C	D	E	F	Em branco
1	18	46	34	89	35	20	24
2	13	24	39	72	22	67	29
3	26	43	39	70	28	33	27
4	38	61	29	65	25	18	30
5	63	107	31	10	3	24	28
6	57	107	31	18	10	14	29
7	49	112	28	19	3	26	29
8	40	96	43	18	8	34	27
9	33	75	47	32	6	42	31
10	63	121	14	12	5	23	28
11	66	117	27	5	5	21	25
12	69	118	19	10	2	24	24

Tabela 14 – Atividade 4 - Perguntas 27

Com base no gráfico 58 apresentado, observa-se que a maioria dos alunos assinalou concordo (B) nas sentenças (5) a (12). Isso revela que os próprios estudantes compreendem que há muitos alunos com dificuldades em Matemática provenientes de diversos fatores, tais como: estruturar o raciocínio lógico, falta de atitude (estudo), praticar pouco cálculo mental, interpretar símbolos usados ou operações básicas.

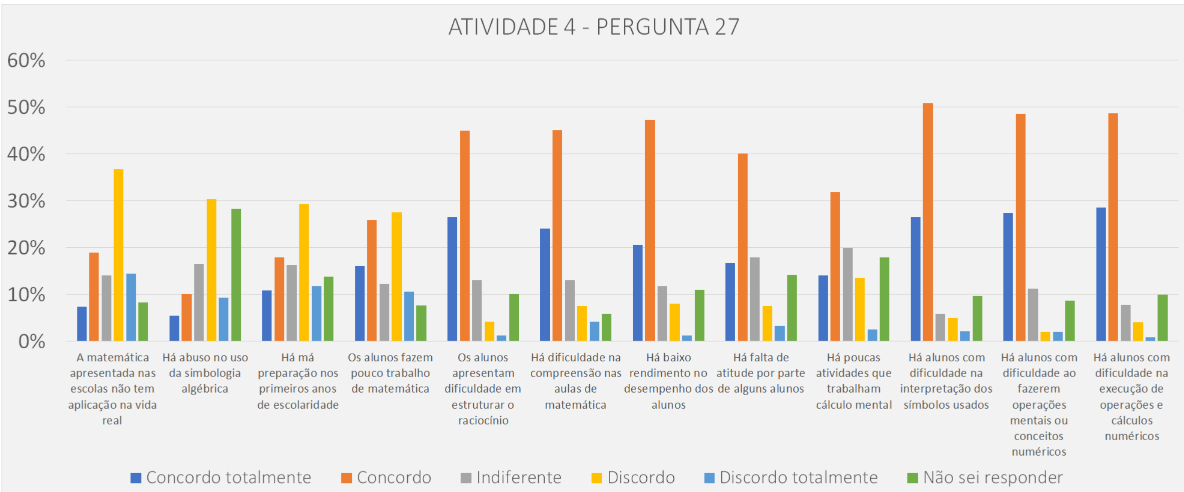


Figura 58 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 27

Em contrapartida, os estudantes assinalaram a alternativa D (Discordo) quando a eles foram apresentadas as sentenças de (1) a (4). Os dados do gráfico 58 podem auxiliar o professor a pensar estratégias de ensino diferentes com base nas dificuldades que os alunos demonstram e, com isso, contribuir para que aprendam mais e de forma significativa.

Pergunta 28: Com relação ao apoio familiar (pai, mãe, amigos, etc) nos seus estudos, assinale o que você pensa sobre. (Somente uma alternativa podia ser assinalada)

- [ ] A minha família me apoia integralmente e acompanha os meus estudos
- [ ] A minha família me apoia, mas às vezes não consegue me ajudar nos estudos
- [ ] A minha família acompanha pouco meus estudos e geralmente se preocupa mais no fechamento do bimestre
- [ ] A minha família não participa e nem acompanha os meus estudos (algo que sinto falta)
- [ ] A minha família é ausente e geralmente eu que resolvo sozinho os problemas

Nessa pergunta, os alunos refletiram sobre o apoio e acompanhamento da família nos estudos. Principalmente na escola pública, nota-se que os pais acompanham menos a aprendizagem dos filhos do que na rede particular e que muitos alunos, provenientes de ambientes familiares que sofrem por diversos motivos, saem prejudicados e chegam à escola desmotivados para aprender. Em Matemática, por exemplo, a ausência do apoio familiar e os problemas na escolarização da criança maximizam os problemas a cada série escolar.

O gráfico 59 revela que, embora 44% dos alunos declarem que a família apoia, a outra parcela, também significativa, (35% do total) mostra que a família acompanha pouco os estudos dos alunos e preocupa-se mais no fechamento do bimestre.

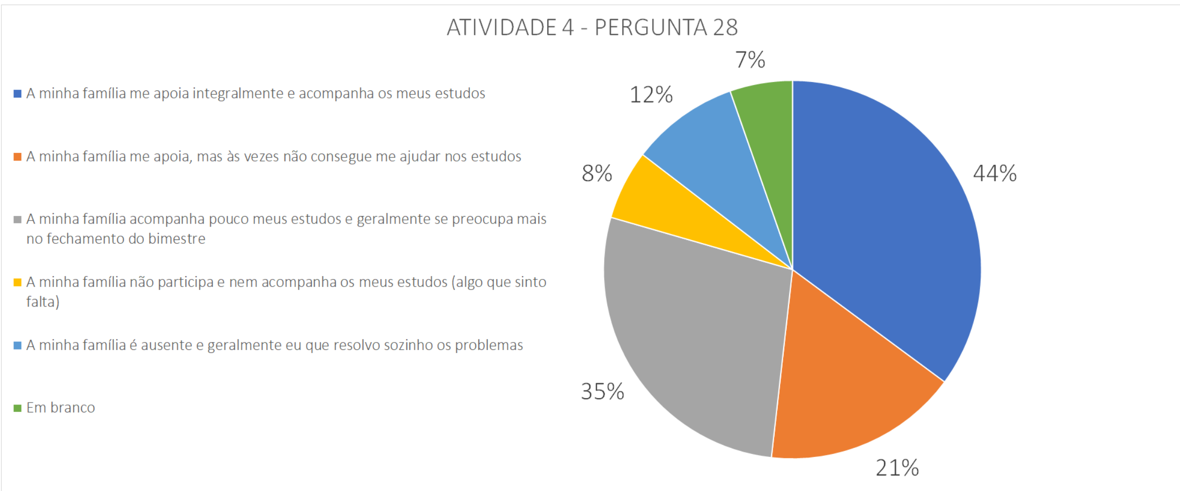


Figura 59 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 28

Pergunta 29: Para você, qual(is) é(são) o(s) objetivo(s) para aprender Matemática?

- [ ] Estruturar o raciocínio lógico (pensar logicamente, relacionar ideias, descobrir regularidades e padrões, estimular o espírito de investigação)
- [ ] Aprender a usar fórmulas matemáticas e decorar regras para usá-las em provas
- [ ] Aplicar a Matemática na vida ou em qualquer atividade realizada
- [ ] Ampliar a capacidade do aluno de questões concretas para abstratas
- [ ] Comunicar, argumentar, escrever e representar de várias formas
- [ ] Aprender competências para resolver situações-problema
- [ ] Promover a interação com os colegas, coletivamente e cooperativamente
- [ ] Contribuir para que o aluno trace planos, estratégias e desenvolva várias formas de raciocínio

Com base nos dados apresentados, a maioria dos alunos (aproximadamente 49%) disse que o objetivo de aprender Matemática é aplicá-la na vida. Nota-se também que uma porcentagem considerável, 41%, disse que aprende Matemática para decorar regras que serão usadas em provas.

O que chamou a atenção é que 49% dos alunos destacaram que um dos objetivos de aprender Matemática, senão o mais importante, é que o estudante aprenda a estruturar o raciocínio lógico, relacionar ideias e identificar padrões. Essa visão se aproxima do objetivo da dissertação e dialoga com os dados coletados.

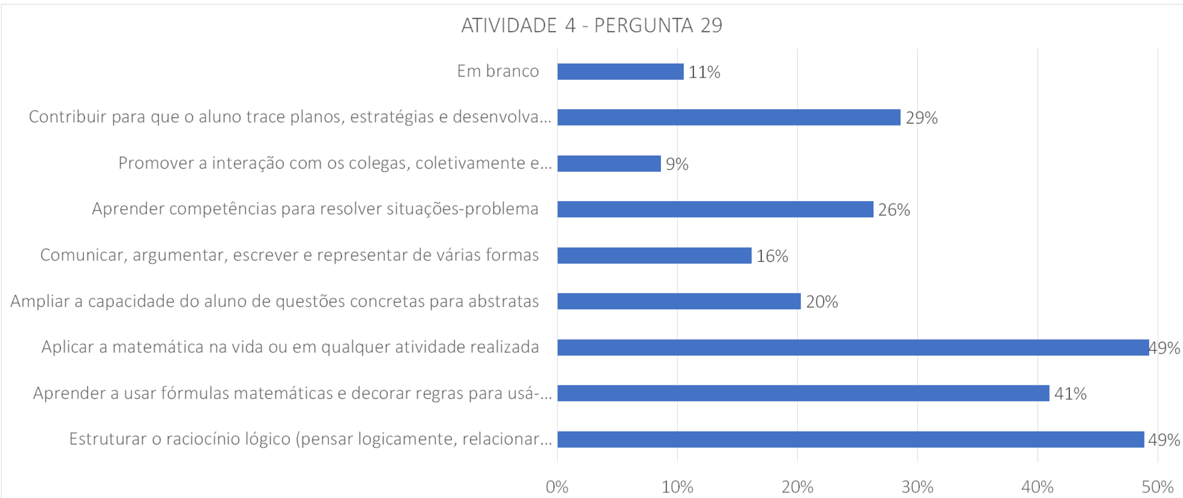


Figura 60 – Gráfico - Atividade 4 - Pergunta 29

Pergunta 30: Utilize o espaço abaixo para escrever as suas observações sobre o preenchimento do questionário, se de alguma forma ele serviu como instrumento de reflexão sobre temas relacionados ao trabalho, escola e família ou outras questões que não foram contempladas.

Aluno A: "Sim este questionário serviu para, refletir a respeito dos meus estudos. Eu quero melhorar sempre e tambem quero que a sociedade aprenda um pouco mais e nos tornemos pessoas melhores"

Aluno B: "É um questionario interessante pelo o fato que nos mostra certas situações da escola, motivos e coisas que acabamos por não dar muita atenção depois do estudo"

Aluno C: "O questionario faz você a pensar se está se esforçando o suficiente ou não, e em como sua família está entrelaçada nos seus estudos"

Aluno D: "O questionários me fez refletir sobre o meu comportamento e interesse sobre a matemática que é tão necessário e desenvolve o raciocínio lógico, onde muitos podem pensar que não vai servir para nada mas que tem muita utilidade".

Aluno E: "Este questionário me fez parar para refletir em questões matemáticas, que nunca tinha parado para pensar antes e que podem me ajudar a resolver os meus problemas agora e futuramente".

Aluno F: "Sim as perguntas serviu para nos refletir mais um pouco do nosso interesse a se estudar, a se ter mais um pouco de esforço. Para nos prestar mais atenção nas aulas e ver como e muito importante a nossa aprendizagem na sala de aula".

Aluno G: "A ideia é boa desse questionário mas há algumas questões desnecessárias".

Aluno H: "Muitas coisas situadas anteriormente eu não sei, e se eu não sei fazer, acho muito fraco o ensinamento na escola".

Aluno I: "Sim, ajudou consegui responder todas mas algumas não entendi direito e tive mais dificuldade para responder".

Aluno J: "Por esse questionário, percebi que não estou me esforçando de maneira necessária para adquirir conhecimento para ser alguém na vida, vou tentar estudar com mais frequência".

Aluno K: "Acredito que existem profissionais qualificados para o cargo de professor, o grande problema é a falta de interesse dos alunos".

Aluno L: "O questionário é bem interessante, faz com que analisemos fatos que geralmente não prestamos muita atenção. Mas senti falta de questões sobre a escola e o estudo que o governo nos oferece em si. Sabemos que ambos são falhos e seria de extrema importância algum lugar em que os alunos conseguissem opiniar e fossem realmente ouvidos".

Aluno M: "A minha dificuldade em matemática ocorre apenas por minha dificuldade em interpretar questões problemas. A maioria dos alunos que demonstram mal desempenho não prestam atenção nas aulas e passam a aula toda discutindo questões aleatórias em vez do conteúdo".

Aluno N: "O meu trabalho me atrapalhou um pouco nos estudos, porque quando eu começei a trabalhar eu estudava em um colégio particular e sequer que eu dediquei minha tarde inteira para os estudos, então eu voltei para escola pública porque na minha opinião não exige tanto de mim e não incentiva tanto os estudos na parte de alguns professores".

Aluno O: "De alguma forma foi bom fazer esse questionário, porque é uma reflexão, e eu nunca tinha parado para pensar sobre esses assuntos que estão em nosso cotidiano, mas isso não seria certo temos que pensar nessas coisas todos os dias".

Aluno P: "O questionário me ajudou a enxergar na questão de estudo, preciso criar o hábito de pelo menos rever algumas matérias que tenho mais dificuldades. E também ler mais livros para expandir minha imaginação".

5.5 Resultados da Atividade 5

Resultados	**Atividade 5**
Objetivo 1: alcançado. Trabalhar com as provas anteriores das olimpíadas de Matemática e também com o planejamento anual preparou os alunos para as competições de Matemática. **Objetivo 2:** alcançado. Houve a revelação de um aluno que conquistou medalha de bronze no Canguru de Matemática Brasil, ouro na Olimpíada Paulista de Matemática (OPM) e bronze na Olimpíada RioPlatense de Matemática (OMR) em Buenos Aires, na Argentina. **Objetivo 3:** alcançado. Grande parte dos alunos desenvolveu o raciocínio lógico, aprendeu a formular conjecturas, demonstrá-las e desenvolver uma série de competências e habilidades que os permitiu aprender Matemática e maximizar seus conhecimentos.	

A atividade 5 trata-se do projeto de olimpíadas de Matemática que é desenvolvido durante todo o ano. Nesse projeto, os alunos e o professor resolvem juntos diversos problemas de Matemática com o objetivo de motivar o estudo e aprimorar a destreza dos alunos nos cálculos matemáticos. No ano de 2017, ele teve início no dia 07 de março, e finalizou dia 24 de outubro com o término do calendário olímpico.

Na semana de inscrições para participar do projeto, inscreveram-se 40 alunos da Equipe A, 19 da Equipe B e 36 da Equipe C, totalizando 95 alunos. Os alunos tinham duas aulas de cinquenta minutos toda semana, pausando somente no mês de julho por conta das férias e do recesso escolar.

Figura 61 – Atividade 5 - Aula inaugural

Da equipe A, 19 alunos acompanharam o projeto até o final. Da equipe B, 14, e da equipe C foram 11 alunos que finalizaram o projeto no final do ano. A evasão dos alunos acontece porque muitos alunos se inscrevem, mas apresentam dificuldade nos problemas olímpicos e preferem frequentar as aulas de reforço. Há também os que deixam de participar por iniciarem outras atividades dentro da escola.

Sugere-se que os grupos olímpicos tenham poucos alunos em cada turma para garantir um estudo mais individualizado, pois a complexidade dos problemas exige que o professor esteja mais atento aos seus alunos. Tanto a frequência quanto o registro das atividades realizadas foi disponibilizada para coordenação, pais e alunos por meio do "Google Planilhas".

Todas as informações necessárias para os alunos (frequência, acompanhamento das atividades, materiais de estudo, calendário, etc) foram disponibilizadas por meio da ferramenta "Google Sites". Era pedido que os alunos já se organizassem no início do ano para adequarem seus afazeres ao calendário olímpico. Eles participaram das seguintes olimpíadas de Matemática:

- Canguru de Matemática Brasil
- Olimpíada Paulista de Matemática - OPM
- Olimpíada de Matemática da Unicamp - OMU

Durante as aulas, os alunos se organizavam individualmente ou em grupos, o que acontecia na maior parte das vezes, e discutiam os problemas das olimpíadas de

Matemática, além de apresentar diferentes soluções para a sala. A ideia era que o aluno fosse protagonista do processo e a aula não ficasse centralizada no professor.

No caso, o planejamento dos conteúdos trabalhados é o mesmo cobrado nas provas das olimpíadas de Matemática. O professor pode trabalhar com os alunos fazendo as provas anteriores das olimpíadas de Matemática ou, a partir de uma verificação estatística, perceber quais são os principais assuntos cobrados nas provas e trabalhar com os alunos pontualmente.

No ano de 2016, por exemplo, o conteúdo trabalhado em cada semana estava dividido em quatro áreas: álgebra, aritmética, combinatória e geometria. Cada uma delas estava separada em dez capítulos que englobavam assuntos específicos cobrados nas olimpíadas de Matemática.

A separação não está associada à fragmentação dos conteúdos, mas sim a uma melhor organização do trabalho para que, posteriormente, esses capítulos fizessem parte de um livro do qual os próprios alunos seriam os autores com as soluções dos problemas. Por conta do calendário olímpico, não foi possível terminar o livro ao longo dos dois anos do projeto.

Os alunos que participam das aulas olímpicas desenvolvem múltiplas competências e habilidades, além da agilidade no cálculo mental. No ano de 2017, por exemplo, foram várias as premiações no Canguru de Matemática Brasil.

Em 2017, o destaque foi um aluno da Equipe A, que chamaremos de **(A)**, que conquistou uma **medalha de bronze** no Canguru de Matemática Brasil. Ele, em seguida, disputou a Olimpíada Paulista de Matemática (OPM) na Universidade de São Paulo (USP) e foi premiado com uma **medalha de ouro**.

Os alunos premiados com medalha de ouro na Olimpíada Paulista de Matemática (OPM) fazem parte de uma seleção interna, chamada de "peneira" para disputar a Olimpíada RioPlatense de Matemática (OMR) em Buenos Aires, na Argentina. No caso, o aluno fez a peneira, passou e foi convidado para participar da competição.

Junto da delegação paulista de Matemática, composta por nove integrantes, o aluno disputou a **Olimpíada RioPlatense de Matemática**, retornando com uma **medalha de bronze**. Essas conquistas são fruto de muito esforço, dedicação e estudo da Matemática. O trabalho com o Grupo Olímpico o ajudou a desenvolver o raciocínio lógico, realizar cálculos mentais e resolver problemas mais complexos que não são trabalhados no ensino regular.

É importante mencionar que o objetivo não é conquistar medalhas, mas que o aluno aprenda, motive outros alunos a gostarem de Matemática, desenvolva o raciocínio lógico, dedutivo e intuitivo, maximize seus conhecimentos, seja uma pessoa melhor, pratique a cidadania e faça história. Os alunos que acompanham o trabalho com as olimpíadas de Matemática e participam ativamente do processo evoluem como pessoas, independentemente dos resultados.

Figura 62 – Premiações olímpicas (2017): Canguru, RioPlatense (OMR) e OPM

Esses alunos, quando cursarem o ensino superior, estarão fluentes em uma linguagem mais próxima da que será cobrada nas matérias de graduação, pois já tiveram contato com uma Matemática mais rigorosa. Isso permite que os conceitos matemáticos sejam trabalhados de uma forma mais clara futuramente, o que se trata de um ganho, pois muitos estudantes, principalmente no início da graduação, sentem-se despreparados ao se depararem com disciplinas que exigem deles um conhecimento mais aprofundado.

Trabalhar com olimpíadas de Matemática ou temáticas como as propriedades estudadas em grupos, por meio de sequências didáticas, auxiliam os estudantes no processo do desenvolvimento do raciocínio lógico que será importante futuramente para eles.

5.5.1 Questionário da Atividade 5

Pergunta 1: De qual equipe você participou?

- ( ) Equipe A
- ( ) Equipe B
- ( ) Equipe C

Como o questionário foi respondido nas últimas aulas do ano, participaram 9 alunos da Equipe A (sexto ou sétimo ano do ensino fundamental), 7 da equipe B (oitavo ou nono ano do ensino fundamental) e 8 da Equipe C ($1^a, 2^a$ ou 3^a série do ensino médio).

Pergunta 2: Como você ficou sabendo do projeto olímpico?

- [ ] Aviso da escola ou do coordenador;
- [ ] Amigos ou pais;
- [ ] Internet, mural, etc.
- [ ] Apresentação do projeto;

Dos 24 alunos que responderam ao questionário, 56% declararam que ficaram sabendo das aulas olímpicas por meio da escola, 33% disseram que souberam por meio de amigos ou pais, 5% através da internet ou mural e 6% pela apresentação do projeto em evento. Nessa pergunta os alunos podiam assinalar mais do que uma resposta.

Pergunta 3: Em uma escala de 0 a 10, sendo 0 pouco e 10 muito, participar do grupo de olimpíadas de Matemática contribuiu na sua formação?

- ( ) 0
- ( ) 1
- ( ) 2
- ( ) 3
- ( ) 4
- ( ) 5
- ( ) 6
- ( ) 7
- ( ) 8
- ( ) 9
- ( ) 10

Com base no gráfico 63, nota-se que aproximadamente 97% dos alunos assinalou no mínimo 5. Isso revela que a maioria dos alunos acredita que as aulas olímpicas contribuíram na formação e aprendizagem deles.

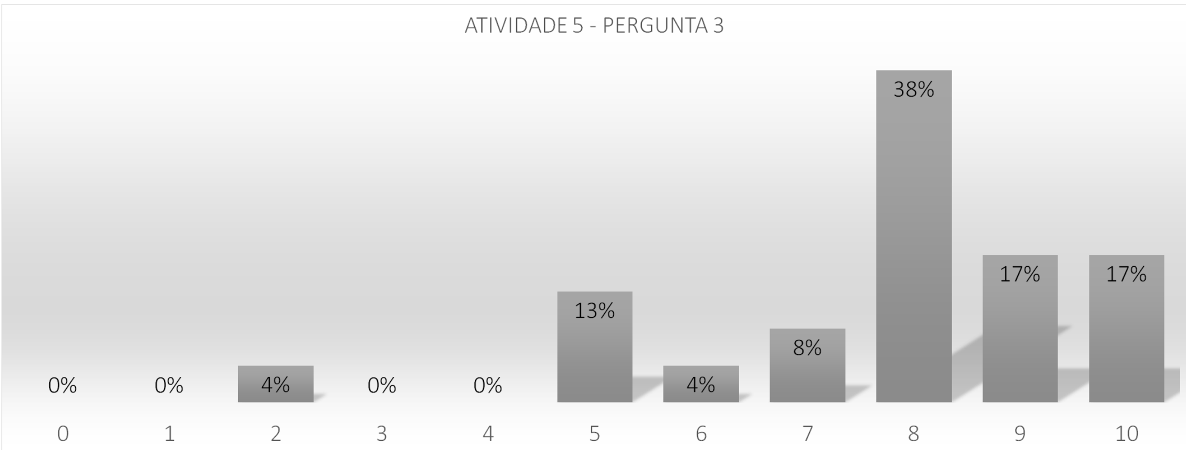


Figura 63 – Gráfico - Atividade 5 - Pergunta 3

Pergunta 4: Você participaria novamente de atividades como essa em uma próxima oportunidade?

- ( ) Sim
- ( ) Talvez
- ( ) Não

Nessa pergunta, dos 24 alunos que responderam, 75% afirmaram que sim e 25% talvez. Outra vantagem de propor projetos como esse é que o aluno que frequenta um ano e gosta tende a continuar no projeto, acrescentando bastante para as turmas novas que serão formadas no próximo ano. Essa troca de experiência entre os alunos (inclusive de séries diferentes) é essencial na aprendizagem e contribui muito com o trabalho do professor.

Pergunta 5: Você frequentava as aulas olímpicas no ano passado?

- ( ) Sim
- ( ) Não

No caso, 54% dos alunos declararam que não e 46% deles que sim. Vale ressaltar que o questionário foi aplicado no final do ano e, possivelmente, caso tivesse sido feita a coleta de dados no início do ano, os resultados poderiam apresentar distorções devido ao número de inscritos.

Pergunta 6: Das olimpíadas de Matemática abaixo, qual(is) dela(s) você participou?

- ( ) Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)
- ( ) Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)
- ( ) Olimpíada Paulista de Matemática (OPM)
- ( ) Olimpíada de Matemática da Unicamp (OMU)
- ( ) Canguru de Matemática Brasil

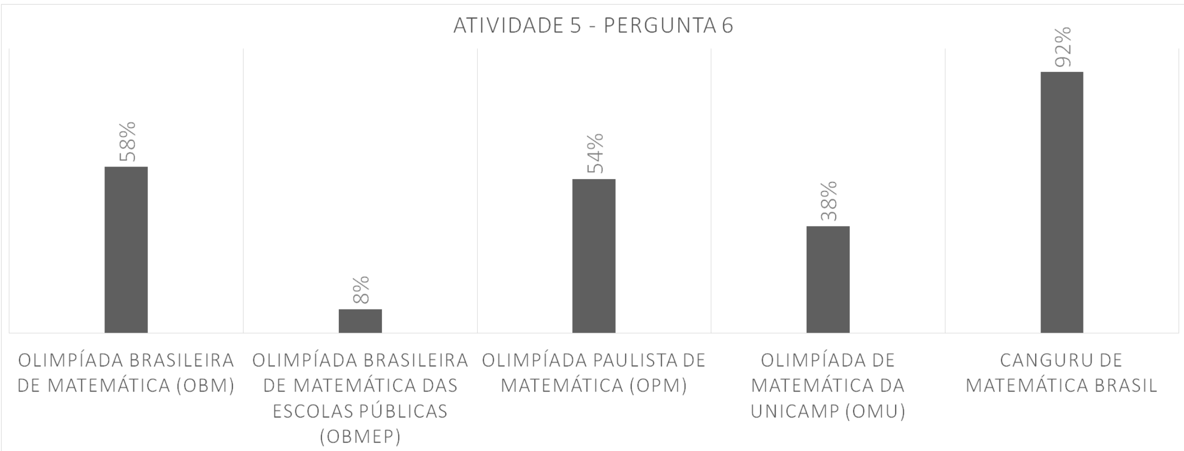


Figura 64 – Gráfico - Atividade 5 - Pergunta 6

No gráfico 64, observa-se que 92% dos alunos disseram que já participaram do Canguru de Matemática Brasil, que é uma competição com grau de dificuldade menor que as demais. Também nota-se que mais do que a metade dos entrevistados relatou participar tanto da Olimpíada Paulista de Matemática (OPM) quanto a Olimpíada Brasileira de

Matemática (OBM), que em 2017 se fundiu com a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Pergunta 7: Sobre as aulas olímpicas, como elas contribuíram na sua formação?

- ( ) Desenvolver o raciocínio lógico
- ( ) Desenvolver a linguagem matemática
- ( ) Aprender técnicas de demonstração
- ( ) Resolver questões mais elaboradas
- ( ) Maximizar valores (conhecimento)
- ( ) Desenvolver a escrita matemática
- ( ) Aprender Matemática
- ( ) Trabalhar em grupos
- ( ) Aprender coisas novas
- ( ) Formação humana
- ( ) Preparar para o ensino superior

Nessa pergunta, os alunos relataram, para cada uma das sentenças, como as aulas olímpicas contribuíram (ou não) para a formação deles. No gráfico 65, nota-se que a maioria dos alunos relatou que as aulas ajudaram a aprender Matemática, desenvolver o raciocínio lógico, aprender coisas novas, desenvolver tanto a linguagem quanto a escrita matemática, aprender a resolver problemas mais desafiadores e maximizar o conhecimento.

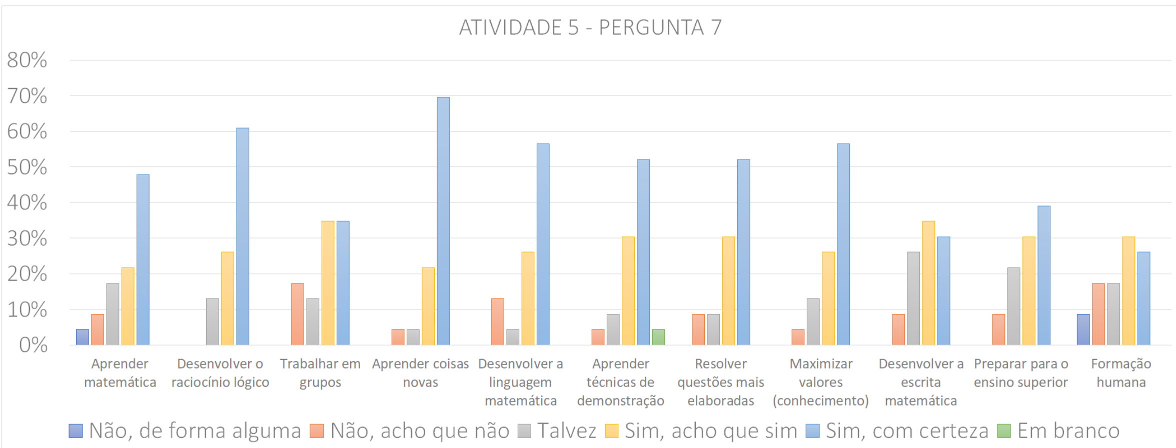


Figura 65 – Gráfico - Atividade 5 - Pergunta 7

Considerações Finais

Com base nas hipóteses levantadas e nos dados coletados com a aplicação das atividades, reuniu-se uma série de elementos que nos auxiliaram a responder à seguinte pergunta “Como auxiliar o aluno a desenvolver o raciocínio lógico, intuitivo e dedutivo?”. A pesquisa foi realizada em dois grupos de alunos: escola pública (ensino fundamental, médio e EJA) e particular (grupo olímpico).

Os alunos do primeiro grupo apresentaram muita dificuldade em estruturar o raciocínio lógico, organizar ideias, realizar cálculos mentais, fazer operações básicas e estabelecer conexões entre os conceitos ou diferentes áreas do conhecimento. Os dados também indicaram que os alunos estudam pouco (principalmente Matemática), o que está associado a diversos fatores, entre eles: apoio familiar, qualidade do ensino ofertado na escola e relações de trabalho.

Os alunos do segundo grupo, embora também tenham relatado que em algumas situações apresentam dificuldade ao resolver problemas, conseguiram ter um encaminhamento melhor durante as atividades e relataram que a aprendizagem baseada em problemas (no caso, olimpíadas de Matemática) contribuiu bastante para a aprendizagem de Matemática.

A aplicação das atividades que envolviam propriedades de Grupos e operações ajudou os alunos a desenvolverem o raciocínio lógico, a compreender a relação entre a língua materna e a linguagem matemática e a revisar conceitos matemáticos muitas vezes vistos superficialmente no ensino básico. Concluiu-se também que fazer o recorte de uma teoria matemática e adaptá-la no ensino básico de acordo com a série ou ano escolar, amadurecimento na escrita e linguagem matemática é uma estratégia importante que contribui para despertar a curiosidade, motivar o interesse e possibilitar aos alunos situações significativas de aprendizagem.

Portanto, tanto atividades que envolvem aulas de resolução de problemas quanto a aplicação de sequências didáticas a partir do recorte de uma temática (no caso, Grupos) contribuíram para a aprendizagem dos alunos e serviram como um diagnóstico da aprendizagem de Matemática. Além disso, por meio dos questionários, verificou-se também outros aspectos que, se melhorados, poderiam contribuir para a melhoria da aprendizagem de Matemática, tais como: melhores condições de trabalho na escola; cursos de formação continuada de excelência para professores; melhor formação dos gestores (coordenadores ou diretores), incentivo a projetos que integrassem a escola, família e comunidade e ensino menos preocupado em preparar os alunos para exames vestibulares.

Referências

BRASIL, SEMTEC. PCN+ ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília, DF: MEC, SEMTEC, 2002.

DEAN, Richard A. **Elementos de álgebra abstrata**. Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Científicos, 1974. 315 p.

DELIZOICOV, Demétrio. Problemas e problematizações: **Ensino de Física: conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora.** Florianópolis, SC: UFSC, 2001.

DICIONÁRIO AURÉLIO DA LÍNGUA PORTUGUESA. Disponível em: <https://dicionariodoaurelio.com/parabola>. Acesso em: 12 jul. 2017.

FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. **Círculos Matemáticos:** a experiência russa. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012. 292 p.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à algebra**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 1979. 194 p.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. 284 p.

HERSTEIN, I. N. **Tópicos de álgebra**. São Paulo, SP: Edusp: Polígono, 1970. 414 p.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar**. São Paulo, SP: Atual, 1977.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise.** 6. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 1980. 344 p.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais.** Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. 249 p.

MACEDO, Lino de; PETTY, Ana L; PASSOS, Norimar C. **Aprender com jogos e Situações-Problema**. Porto Alegre, RS: ARTMED, 2000. 116 p.

OLIVEIRA, Krerly I.; FERNÁNDEZ, Adán J. **Iniciação à matemática:** um curso com problemas e soluções. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

PERRENOUD, Philippe. **Construir as competências desde a escola.** 1. ed. Porto Alegre, RS: ARTMED, 1999. 96 p.

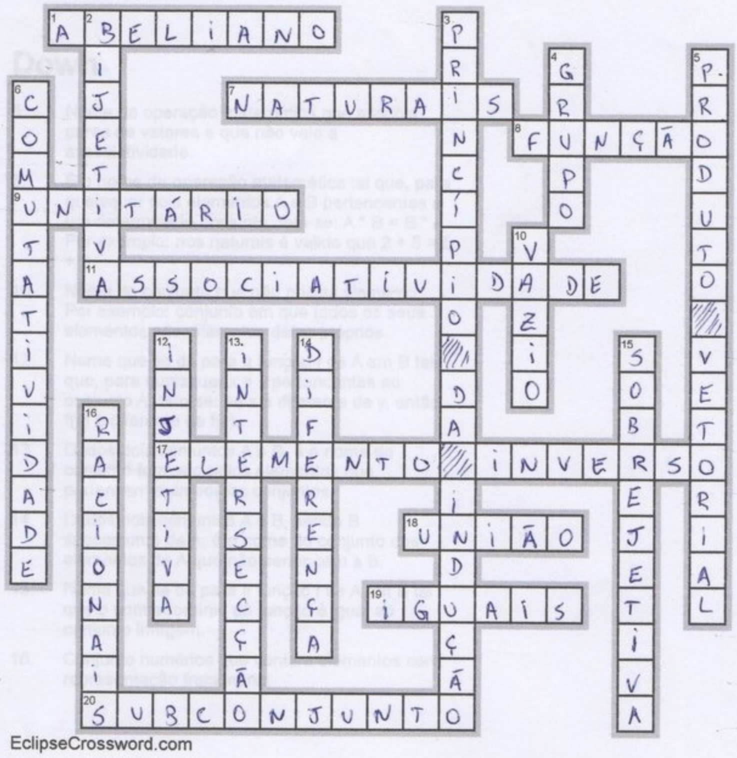
POLYA, George. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Interciência, 2006. 203 p.

WIKIPEDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Reductio_ad_absurdum>. Acesso em: 11 jan. 2018.

ANEXO A – Jogo - Atividade 4

ATIVIDADE - PALAVRAS CRUZADAS

DANIEL ALARCON



EclipseCrossword.com

Across

1. Nome que se dá a um grupo G munido de uma operação binária e que torna verdadeira a seguinte condição: A * B = B * A, para quaisquer dois elementos A e B do grupo G. Exemplo: no conjunto dos inteiros munidos da operação de adição, tem-se: 3 + 5 = 5 + 3.

7. Conjunto numérico associado ao processo de contagem. Formado pelos números 0, 1, 2, 3 e assim sucessivamente.

8. Dados dois conjuntos A e B, não vazios, é o nome da relação de A em B definida de modo que, para todo x pertencente ao A, existe um só y em B tal que f(x)=y.

9. Nome do conjunto que possui um único elemento. Por exemplo: o conjunto A = {2}.

11. É o nome da operação matemática tal que, para quaisquer três elementos A, B e C de um determinado conjunto, tem-se: (A * B) * C = A * (B * C). Por exemplo: no conjunto dos naturais, é válido que 2 + (5 + 7) = (2 + 5) + 7

17. Denominação que se dá para um elemento X pertencente a um determinado conjunto tal que, para qualquer elemento Y do mesmo conjunto, tem-se: X * Y = Y * X = e. sendo "e" o elemento neutro do conjunto. Por exemplo, no conjunto dos inteiros munidos da operação de adição, tem-se: 2 + (-2) = (-2) + 2 = 0.

18. É o nome do conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A ou B.

19. Nome que se dá a dois conjuntos A e B tais que, todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B também pertence a A

20. Dados dois conjuntos A e B, é o nome que se dá ao conjunto B de maneira que todo elemento de B também pertence ao A.

Down

2. É o nome que se dá para a função f de A em B quando é injetiva e sobrejetiva.

3. Nome do método, com base lógica, que permite decidir sobre a validade ou não de uma indução vulgar, isto é, de uma generalização de determinada propriedade após a verificação de que a propriedade é válida em alguns casos particulares.

4. É o nome de um conjunto não vazio munido de uma operação binária e que satisfaz as seguintes condições: associatividade, elemento neutro e elemento inverso.

ANEXO B – Planejamento - Equipe A

Equipe A	Assuntos
Álgebra	Capítulo 1 – Operações básicas Capítulo 2 – Números inteiros e operações Capítulo 3 – Introdução ao estudo das frações Capítulo 4 – Fatoração: simplificação de frações e raiz quadrada Capítulo 5 – Frações como porcentagem e probabilidade Capítulo 6 – Sentenças matemáticas e notação algébrica Capítulo 7 – Equações do primeiro grau Capítulo 8 – Inequações do primeiro grau (desigualdades) Capítulo 9 - Máximos e mínimos Capítulo 10 – Sequências
Aritmética	Capítulo 1 – Tabuada, múltiplos e divisores Capítulo 2 – Jogos aritméticos Capítulo 3 – Critérios de divisibilidade Capítulo 4 – Quantidade de divisores de um número natural Capítulo 5 – Máximo Divisor Comum (MDC) Capítulo 6 – Mínimo Múltiplo Comum (MMC) Capítulo 7 - Representação na base decimal Capítulo 8 – Bases numéricas Capítulo 9 – Atividades lúdicas envolvendo bases numéricas Capítulo 10 – Números primos
Combinatória	Capítulo 1 - Problemas de contagem Capítulo 2 - Princípio multiplicativo Capítulo 3 - Problemas envolvendo o princípio multiplicativo Capítulo 4 - Contagem - Jogos matemáticos Capítulo 5 - Fração como porcentagem Capítulo 6 - Diversos problemas de frações como porcentagens Capítulo 7 - Frações como probabilidade Capítulo 8 - Probabilidade da união e interseção de eventos Capítulo 9 - Problemas envolvendo probabilidades Capítulo 10 - Probabilidade - Jogos matemáticos
Geometria	Capítulo 1 - Dobraduras no estudo da Geometria Capítulo 2 - Sistema de unidades de medida de tempo Capítulo 3 - Unidades de medidas de comprimento e de áreas Capítulo 4 - Áreas e perímetros de figuras planas Capítulo 5 - Problemas de áreas usando frações Capítulo 6 - Sólidos geométricos e planificações Capítulo 7 - Cálculo de volumes de sólidos geométricos Capítulo 8 - Unidades de medidas de volume Capítulo 9 - Construções geométricas com régua e compasso Capítulo 10 - Aplicações de construções geométricas

Tabela 15 – Planejamento Olímpico - Equipe A

ANEXO C – Planejamento - Equipe B

Equipe B	Assuntos
Álgebra	Capítulo 1 – Lógica e técnicas de demonstração Capítulo 2 – Expressões algébricas e polinômios Capítulo 3 – Sistema de equações do primeiro grau Capítulo 4 – Proporcionalidade Capítulo 5 – Porcentagem Capítulo 6 – Equações do segundo grau Capítulo 7 – Máximos e mínimos Capítulo 8 - Produtos notáveis e fatoração Capítulo 9 – Desigualdade das médias Capítulo 10 – Sistemas e inequações
Aritmética	Capítulo 1 – Divisibilidade nos números inteiros Capítulo 2 – Teorema da divisão Euclidiana Capítulo 3 – Números primos – TFA Capítulo 4 – Máximo Divisor Comum (MDC) Capítulo 5 – Mínimo Múltiplo Comum (MMC) Capítulo 6 – Aplicações do máximo divisor comum Capítulo 7 – Critérios de divisibilidade Capítulo 8 – Números perfeitos Capítulo 9 – Criptografia Capítulo 10 – Oficina de criptografia
Combinatória	Capítulo 1 - Estruturação do raciocínio lógico Capítulo 2 - Princípio fundamental da contagem Capítulo 3 - Problemas sobre o princípio fundamental da contagem Capítulo 4 - Consequências do princípio fundamental da contagem Capítulo 5 - Miscelânea de problemas de contagem Capítulo 6 - O que é probabilidade? Capítulo 7 - Ferramentas básicas para cálculo de probabilidades Capítulo 8 - Probabilidade – miscelânea de problemas Capítulo 9 - Probabilidade condicional Capítulo 10 - Jogos envolvendo combinatória e probabilidade
Geometria	Capítulo 1 - Propriedades básicas e problemas sobre triângulos Capítulo 2 – Teorema de Pitágoras Capítulo 3 - Congruência de triângulos e aplicações Capítulo 4 - Semelhança de triângulos e aplicações Capítulo 5 - Estudo dos quadriláteros Capítulo 6 - Áreas de figuras planas Capítulo 7 - Razões trigonométricas no triângulo retângulo Capítulo 8 - Arcos e ângulos na circunferência Capítulo 9 - Lei dos senos e dos cossenos Capítulo 10 - Volume de sólidos geométricos

Tabela 16 – Planejamento Olímpico - Equipe B

ANEXO D – Planejamento - Equipe C

Equipe C	Assuntos
Álgebra	Capítulo 1 - Sequências numéricas Capítulo 2 - Função afim – definição e gráficos Capítulo 3 - Função quadrática Capítulo 4 - Função exponencial e logaritmos Capítulo 5 - Grandezas e proporções Capítulo 6 - Produtos notáveis e fatoração Capítulo 7 - Polinômios em $Z[x]$ Capítulo 8 - Funções – Injetiva, sobrejetiva e bijetiva Capítulo 9 - Números complexos Capítulo 10 – Aplicações de matrizes e determinantes
Aritmética	Capítulo 1 - Divisão nos inteiros Capítulo 2 - Números primos – TFA Capítulo 3 - Algoritmo de Euclides (MMC e MDC) Capítulo 4 - Aplicações do MDC – Equações Diofantinas Lineares Capítulo 5 - Congruências e suas aplicações Capítulo 6 - Teoremas de Euler e Wilson Capítulo 7 - Miscelânea de problemas - congruências Capítulo 8 - Princípio da Indução Matemática Capítulo 9 - Relações de recorrência Capítulo 10 - Teorema Chinês dos Restos (TCR)
Combinatória	Capítulo 1 – Princípio fundamental da contagem Capítulo 2 – Fatorial e permutação simples Capítulo 3 – Permutação circular e completa Capítulo 4 – Princípio das Casas dos Pombos (PCP) Capítulo 5 – Problemas diversos de contagem Capítulo 6 – Binômio de Newton e Triângulo de Pascal Capítulo 7 – Probabilidade em espaço finito e equiprovável Capítulo 8 – Probabilidade condicional Capítulo 9 – Lei binomial da probabilidade Capítulo 10 – Miscelânea de exercícios de probabilidade
Geometria	Capítulo 1 – Semelhança de triângulos Capítulo 2 – Áreas de polígonos e aplicações Capítulo 3 – Área e perímetro de círculo Capítulo 4 – Máximos e mínimos de áreas Capítulo 5 – Poliedros e Relação de Euler Capítulo 6 – Volumes e o Princípio de Cavalieri Capítulo 7 – Cilindros, cones e esferas Capítulo 8 – Coordenadas, distâncias e razões de segmentos Capítulo 9 – Equação da reta (G.A) Capítulo 10 – Paralelismo e perpendicularismo (G.A)

Tabela 17 – Planejamento Olímpico - Equipe C