



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

ANDRÉ GRIPP DE RESENDE CHAGAS

ANÁLISE DAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DOS
AZULEJOS QUADRADOS

CAMPINAS
2018

ANDRÉ GRIPP DE RESENDE CHAGAS

ANÁLISE DAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DOS
AZULEJOS QUADRADOS

*Dissertação apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação
Científica da Universidade Estadual de
Campinas como parte dos requisitos exigidos
para a obtenção do título de Mestre.*

Orientador: LUCIO TUNES DOS SANTOS

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL
DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO ANDRÉ GRIPP
DE RESENDE CHAGAS E ORIENTADA PELO PROF. DR.
LUCIO TUNES DOS SANTOS

CAMPINAS
2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C346a Chagas, André Gripp de Resende, 1982-
Análise das propriedades geométricas dos azulejos quadrados / André Gripp de Resende Chagas. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Lucio Tunes dos Santos.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Azulejos quadrados - Classificação. 2. Simetria (Matemática). 3. Estampas. I. Santos, Lucio Tunes dos, 1962-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Analysis of the geometrical properties of square tiles

Palavras-chave em inglês:

Square tiles - Classification

Symmetry (Mathematics)

Stamps

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestre

Banca examinadora:

Lucio Tunes dos Santos [Orientador]

Suzana Lima de Campos Castro

Laura Leticia Ramos Rifo

Data de defesa: 26-02-2018

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado profissional defendida em 26 de fevereiro de 2018
e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). LUCIO TUNES DOS SANTOS

Prof(a). Dr(a). SUZANA LIMA DE CAMPOS CASTRO

Prof(a). Dr(a). LAURA LETICIA RAMOS RIFO

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

DEDICATÓRIA

À minha querida esposa, Helenice.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

A todos os professores e professoras do IMECC-UNICAMP que colaboram com o PROFMAT das mais diversas formas.

Ao Professor Dr. Lucio Tunes dos Santos pela valiosa orientação oferecida durante a elaboração deste trabalho.

Ao IFSULDEMINAS – Campus Poços de Caldas – pelo apoio e incentivo.

À SBM pela oportunidade concedida.

À CAPES pelo inestimável apoio financeiro.

Aos colegas do PROFMAT-UNICAMP pela companhia e apoio ao longo do curso.

RESUMO

No presente trabalho analisamos as propriedades geométricas dos azulejos quadrados e apresentamos um método de classificação desse tipo de azulejo conforme proposto pelo professor Jorge Rezende da Universidade de Lisboa em seu artigo *A contribution for a mathematical classification of square tiles*, (2012). Inicialmente abordamos aspectos históricos relacionados ao uso da cerâmica pelas diversas culturas. Em seguida apresentamos o desenvolvimento de tópicos matemáticos essenciais para a compreensão do tema proposto. Passamos então à análise das propriedades geométricas dos azulejos quadrados, dando especial ênfase à existência de elementos de simetria nos azulejos. Na sequência, apresentamos as 7 famílias nas quais os azulejos quadrados podem ser classificados e terminamos a dissertação apresentando uma sequência de atividades a serem aplicadas em diferentes níveis da educação básica.

ABSTRACT

In this work, we analyze the geometrical properties of square tiles and present a classification method for this type of tile as proposed by professor Jorge Rezende from The University of Lisbon in his article *A contribution for a mathematical classification of square tiles (2012)*. At first, we approach historical aspects associated to the use of ceramics by different cultures. Next, we present some mathematical topics which are essential to the comprehension of the text. Then we analyze the geometrical properties of square tiles, with special emphasis to the existence of symmetry elements on the tile. Next, we present the 7 tile families into which the square tiles can be classified and present a series of activities to be used in different levels of basic education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura I.1: <i>Fragmentos cerâmicos no parque estadual Homolovi.</i>	13
Figura I.2: (a) <i>Jarro egípcio com figuras masculinas;</i> (b) <i>Olho de Hórus;</i> (c) <i>Cerâmica Marajoara.</i>	13
Figura I.3: <i>Painel de Jorge Colaço (1922).</i>	14
Figura I.4: a) <i>Mosaico Islâmico.</i> b) <i>Painel formado por azulejo de padrão.</i>	15
Figura 1.1: <i>Vetor $v = [2, 1]$.</i>	19
Figura 1.2: <i>Cálculo da distância entre dois pontos.</i>	20
Figura 1.3: <i>Translação do vetor v ao longo de u.</i>	21
Figura 1.4: <i>Rotação de 90° do vetor u.</i>	21
Figura 1.5: <i>Rotação de -60° do vetor u.</i>	22
Figura 1.6: <i>Rotação de P em torno de um centro C.</i>	22
Figura 1.7: <i>Centro de rotação associado a um ângulo de 45°.</i>	23
Figura 1.8: <i>Centro de rotação associado a um ângulo de 90°.</i>	24
Figura 1.9: <i>Pontos P e P' simétricos em relação à reta r.</i>	25
Figura 1.10: <i>Eixo de simetria representado pela reta r.</i>	25
Figura 2.1: <i>O 15° pentágono capaz de pavimentação.</i>	27
Figura 2.2: <i>Regiões fundamentais dos padrões com repetição.</i>	27
Figura 2.3: a) <i>Eixos de simetria por reflexão.</i> b) <i>Centros de rotação de ordem 4.</i> c) <i>Eixos de simetria por reflexão deslizante.</i>	28
Figura 2.4: <i>Centros de rotação de ordem distinta.</i>	28
Figura 2.5: <i>As quatro rotações possíveis para o azulejo $A_{0,0}$.</i>	29
Figura 2.6: <i>Diferentes painéis formados por um mesmo azulejo.</i>	32
Figura 2.7: <i>Painéis formados por azulejos com centro de ordem 4 em seu centro.</i>	33
Figura 2.8: <i>Eixos de simetria herdados do painel.</i>	33
Figura 2.9: <i>Painéis formados por azulejos com mesmas simetrias próprias.</i>	34
Figura 2.10: <i>Eixos de simetria próprios e herdados.</i>	34
Figura 2.11: <i>Os elementos de simetria de um azulejo nem sempre estão presentes no painel.</i>	35
Figura 2.12. <i>Um módulo de quatro azulejos quadrados.</i>	35
Figura 2.13: <i>Possíveis translações de um módulo de azulejos.</i>	36
Figura 2.14: (a) <i>Módulo (1111);</i> (b) <i>Módulo (1432);</i> (c) <i>Módulo (1212).</i>	36
Figura 2.15: <i>Alguns painéis com suas respectivas classificações.</i>	37
Figura 2.16: <i>Painéis com classe de equivalência (1222).</i>	38
Figura 2.17: <i>Centros de ordem 4 de gêneros distintos.</i>	38
Figura 2.18: <i>Distribuição dos centros de rotação em um painel com centros de ordem 4.</i>	39
Figura 2.19: <i>Construção de azulejos da Primeira Família Principal.</i>	39
Figura 2.20: <i>Esquema matemático dos azulejos da Primeira Família Principal.</i>	40
Figura 2.21: <i>Alguns azulejos da Primeira Família Principal.</i>	40
Figura 2.22: <i>Painéis distintos formados por um azulejo da Primeira Família Principal.</i>	41
Figura 2.23: <i>Azulejos da Segunda Família Principal.</i>	41
Figura 2.24: <i>Painéis formados por um azulejo da Segunda Família Principal.</i>	42

Figura 2.25: Azulejos da Terceira Família Principal.	42
Figura 2.26: Painéis formados por um azulejo da Terceira Família Principal.	43
Figura 2.27: Azulejos da Quarta Família Principal.	43
Figura 2.28: Painéis formados por um azulejo da Quarta Família Principal.	44
Figura 2.29: Primeira Família De Azulejos Articulados.	44
Figura 2.30: Exemplo da Primeira Família De Azulejos Articulados.	45
Figura 2.31: Segunda Família de Azulejos Articulados.	45
Figura 2.32: Exemplo da Segunda Família de Azulejos Articulados.	46
Figura 2.33: Terceira Família de Azulejos Articulados.	46
Figura 2.34: Exemplo da Terceira Família de Azulejos Articulados.	47
Figura 2.35: A obtenção de um novo azulejo a partir de um azulejo articulado.	47
Figura 2.36: Elementos de simetria de um azulejo articulado e de seu dual.	48
Figura 2.37: Um mesmo painel gerado por um azulejo articulado e seu dual.	48
Figura 3.1: Menina com azulejo.	51
Figura 3.2: Cozinha com azulejos.	51
Figura 3.3: Cartela de azulejos para a atividade 1.	52
Figura 3.4: Azulejos para o exercício 1.	54
Figura 3.5: Painéis para o exercício 2.	54
Figura 3.6: Cartela de azulejos para a atividade 2.	55
Figura 3.7: Painéis para o exercício 1.	57
Figura 3.8: Cartela de azulejos para a atividade 3.	58
Figura 3.9: Malha com centros de ordem 4.	61
Figura 3.10: Azulejos para o exercício 2.	61
Figura 3.11: Cartela de azulejos para a atividade 3.	62
Figura A.1: Sistema de coordenadas de um azulejo.	69
Figura A.2: As rotações A, B, C e D de um azulejo.	70
Figura A.3: Numeração dos azulejos em um módulo 2×2 .	70
Figura A.4: Interações de um azulejo com seus vizinhos.	70
Figura A.5: Medidas do azulejo 1 após rotacionado por um ângulo de 90° .	71
Figura A.6: Medidas do azulejo 1 após rotacionado por um ângulo de 180° .	71
Figura A.7: Detalhe do azulejo na posição 2.	72
Figura A.8: Centros de rotação do Caso 2A.	72
Figura A.9: Caso 2B.	73
Figura A.10: Centro de rotação e translação do Caso 2B.	73
Figura A.11: Caso 2C	74
Figura A.12: Centro de ordem 4 e translação do Caso 2C.	74
Figura A.13: Caso 2D.	75
Figura A.14. Centros de rotação de ordem 2 e 4 do Caso 2D.	75

Os softwares Geogebra e Paint.net foram largamente utilizados na criação e edição das figuras desse trabalho.

SUMÁRIO

Introdução.....	13
Capítulo 1 – Tópicos de álgebra linear.....	17
1.1 MATRIZES.....	17
1.2 SOMA DE MATRIZES.....	17
1.3 MULTIPLICAÇÃO DE UMA MATRIZ POR UM NÚMERO REAL.....	18
1.4 MULTIPLICAÇÃO ENTRE MATRIZES.....	18
1.5 VETORES EM \mathbb{R}^2	18
1.6 ISOMETRIAS.....	20
1.6.1 Translações.....	20
1.6.2 Rotações.....	21
1.6.3 Rotações Com Centro Fora da Origem.....	22
1.6.4 Centro de Simetria por Rotação.....	23
1.6.5 Eixo De Simetria Por Reflexão.....	24
Capítulo 2 – Análise das propriedades dos azulejos quadrados.....	26
2.1 PAVIMENTAÇÕES DO PLANO.....	26
2.2 GRUPOS DE SIMETRIA PLANA.....	27
2.3 AZULEJOS QUADRADOS.....	29
2.4 SIMETRIAS PRÓPRIAS E HERDADAS.....	31
2.5 EQUIVALÊNCIA DE PAINÉIS.....	34
2.6 AS SETE FAMÍLIAS DE AZULEJOS.....	38
2.6.1 Primeira Família Principal.....	39
2.6.2 Segunda Família Principal.....	41
2.6.3 Terceira Família Principal.....	42
2.6.4 Quarta Família Principal.....	43
2.6.5 Primeira Família De Azulejos Articulados.....	44
2.6.6 Segunda Família De Azulejos Articulados.....	45
2.6.7 Terceira Família De Azulejos Articulados.....	46
2.7 O DUAL DE UM AZULEJO ARTICULADO.....	47
Capítulo 3 – Atividades para o ensino básico.....	49
Atividade 1.....	49
Atividade 2.....	53
Atividade 3.....	56
Atividade 4.....	59
RESPOSTAS DAS ATIVIDADES.....	63
Capítulo 4 – Considerações finais.....	65

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67
Apêndice.....	69
A.1 – INTRODUÇÃO À DEMONSTRAÇÃO DE REZENDE.....	69
A.1.1 Caso 2A	72
A.1.2 Caso 2B.....	73
A.1.3 Caso 2C.....	74
A.1.4 Caso 2D	75

Introdução

A palavra cerâmica tem sua origem no grego κέραμος – kóramos – que significa terra queimada. O processo de produção da cerâmica consiste na queima em altas temperaturas da argila. Após o cozimento, o barro sofre alterações em sua estrutura molecular resultando em um produto com maior resistência mecânica, resistência a altas temperaturas, maior impermeabilidade e resistência ao desgaste natural.

Os primeiros registros arqueológicos do uso da cerâmica datam do período neolítico – 25.000 a.c. aproximadamente – e foram encontrados na região da República Tcheca. Por ser um produto de fácil moldagem e grande durabilidade, o uso da cerâmica tornou-se universal. A Figura I.1 mostra fragmentos de objetos cerâmicos criados por povos indígenas na América do Norte.



Figura I.1: *Fragmentos cerâmicos no parque estadual Homolovi.* Fonte: Doug Peterson¹.

Desde muito cedo a produção cerâmica deu importância à estética. Texturas e cores eram adicionadas aos objetos cerâmicos de uso cotidiano e, assim como atualmente, alguns objetos eram produzidos com finalidade puramente estética, como ilustra a Figura I.2.



Figura I.2: (a) *Jarro egípcio com figuras masculinas;* (b) *Olho de Hórus;* (c) *Cerâmica Marajoara.*
 Fonte: (a) e (b) *Site Ceramics and Pottery Arts and Resources*²; (c) *Blog Mistérios da Arte*³

¹ <http://dgpeterson.blogspot.com.br/2013/09/homolovi-state-park-winslow-arizona.html>; Dezembro 2017.

² <https://www.veniceclayartists.com/egyptian-pottery/>; Dezembro 2017.

³ <http://misteriosdarte.blogspot.com.br/p/fase-marajoara-opovoamento-da-ilha-de.html>; Dezembro 2017.

A fabricação de azulejos cerâmicos se iniciou nas regiões da Mesopotâmia e Índia por volta de 14.000 a.C, mas só por volta de 4.000 a.C. passam a ser utilizados como elementos decorativos. A arte da manufatura de azulejos era dominada pelos Assírios e Babilônios na arquitetura Mesopotâmia. No milênio seguinte, Romanos, Gregos, Chineses, Persas, Indianos, Sírios, Turcos, Tunisianos, entre outros, se tornaram referência no desenvolvimento da arte.

Devido ao estabelecimento da rota da seda, o oriente islâmico passa a ter contato com a China e suas sofisticadas porcelanas, fato que impulsiona a produção de revestimentos pelos árabes. A própria palavra azulejo tem origem no árabe *azzelij* que significa pedra polida. Mais tarde, com o avanço do islamismo, os azulejos são introduzidos na península ibérica por mãos mouras inicialmente na Espanha, onde são desenvolvidas novas técnicas de produção e no final do século XV chegam a Portugal, um país com uma longa experiência na produção cerâmica onde a manufatura azulejista alcançou novos patamares. A Figura I.3 exibe um painel de azulejos ilustrando a Batalha de Aljubarrota, ocorrida em 1385.



Figura I.3: *Painel de Jorge Colaço (1922)*. Fonte: Verbete Azulejo na Wikipédia⁴

Além dos grandes painéis de azulejos retratando eventos históricos e temas religiosos que tornaram os portugueses famosos, é comum encontrar, principalmente nos países de tradição islâmica, painéis compostos por estampas geométricas formando padrões repetitivos. Originalmente elaborados a partir de pequenas pedras polidas e encaixadas individualmente de modo a cobrir uma superfície, os mosaicos, esses padrões geométricos foram incorporados aos azulejos.

⁴ <https://pt.wikipedia.org/wiki/Azulejo>; Dezembro 2017.

Os azulejos geradores de padrões geométricos são denominados **azulejos de padrão**. A utilização desse tipo de azulejo agilizava enormemente o processo de montagem dos painéis. A Figura I.4 traz exemplos de um mosaico e um painel formado por azulejo de padrão.



Figura I.4: a) *Mosaico Islâmico*. b) *Painel formado por azulejo de padrão*. Fonte: (a) Página do professor R. Statella, Universidade de Barcelona⁵. (b) Rede de Investigação em Azulejo⁶.

A presente dissertação foi inspirada pelo artigo “A Contribution For a Mathematical Classification of Square Tiles” escrito em 2012 por Jorge Rezende, Professor Associado no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e membro do Grupo de Física Matemática da Universidade de Lisboa.

Em seu artigo, Rezende analisa as propriedades geométricas dos azulejos quadrados e propõe classificá-los em 7 famílias distintas. Cabe ressaltar que, apesar de haver diversos sistemas de notação para a classificação de estampas planas, como os sistemas Cristalográfico, Coxeter e Conway, a proposta de classificar os azulejos que produzem essas estampas, feita por Rezende, é inédita.

O objetivo desta dissertação é analisar as propriedades geométricas dos azulejos quadrados de cada uma das 7 famílias, introduzir os principais conceitos utilizados por Rezende em seu artigo e explicar os procedimentos utilizados por ele em sua demonstração, auxiliando o leitor, em especial os professores de matemática da educação básica, no entendimento do artigo em questão.

No Capítulo 1 faremos uma breve revisão de tópicos de Álgebra Linear necessários para a compreensão do texto. No Capítulo 2 introduzimos algumas definições e fazemos a análise das diferentes famílias de azulejos. No capítulo 3 apresentamos algumas atividades matemáticas elaboradas para alunos em diferentes níveis da educação básica. No Capítulo 4 apresentamos as considerações finais. Terminamos a dissertação com um Apêndice contendo

⁵ <http://www.am.ub.edu/~robert/mosaic/mosaic.html>; Dezembro 2017.

⁶ http://redeazulejo.lettras.ulisboa.pt/p_cient,0,541.aspx; Dezembro 2017.

uma breve introdução ao método utilizado por Rezende na demonstração de que todos os azulejos quadrados podem ser inseridos em alguma das 7 famílias propostas

Capítulo 1 – Tópicos de álgebra linear

No presente capítulo apresentaremos alguns conceitos elementares de Álgebra Linear como Matrizes e Vetores. Inicialmente abordaremos de forma bastante concisa como são feitas as principais operações entre esses objetos. A seguir definiremos algumas funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 denominadas Isometrias. Apresentaremos também as definições de eixos de simetria por reflexão e centros de simetria por rotação.

1.1 MATRIZES

Dados dois números naturais positivos m e n , define-se uma matriz de tamanho $m \times n$ (m por n) como uma tabela retangular com $m \cdot n$ números dispostos em m linhas e n colunas.

Cada um dos números que compõe uma matriz é chamado **entrada** da matriz. As entradas da matriz são identificadas de acordo com a posição (linha e coluna) que ocupam na matriz.

Tomemos como exemplo a matriz $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ \sqrt{2} & \frac{1}{3} \\ 7 & \pi \end{bmatrix}$ de tamanho 3×2 . Nesta matriz,

a entrada 7 ocupa a terceira linha e primeira coluna. Escrevemos então $a_{31} = 7$.

Um elemento genérico da matriz pode ser representado por a_{ij} , com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Nessa notação, i indica a linha e j indica a coluna ocupada pelo termo.

1.2 SOMA DE MATRIZES

Dadas duas matrizes de mesmo tamanho, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ com entradas $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Dessa forma, tomando como exemplo as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, temos $C = A + B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$.

A subtração entre matrizes é feita de forma análoga.

1.3 MULTIPLICAÇÃO DE UMA MATRIZ POR UM NÚMERO REAL

Seja k um número real e $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz $m \times n$, então $k \cdot A$ é a matriz

obtida pela multiplicação de cada entrada de A por k . Tomemos como exemplo $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & \frac{2}{5} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

e $k = 5$, então temos $k \cdot A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 35 & 2 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$.

1.4 MULTIPLICAÇÃO ENTRE MATRIZES

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$ podemos efetuar o produto AB , ou $A \cdot B$, sempre que $n = p$, isto é, quando o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B . O produto AB terá sua entrada $(C)_{ij}$ dada por

$$(C)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{pj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj},$$

com $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Tomando como exemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.5 VETORES EM \mathbb{R}^2

Um vetor é qualquer matriz que possua apenas uma linha ou apenas uma coluna. Os vetores são geralmente denotados por letras minúsculas sob uma seta apontando para a

direita. São exemplos de vetores $\vec{v} = [1 \ 3 \ 5 \ 6]$ e $\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Nesta dissertação convencionamos

escrever os vetores na forma de matrizes com apenas uma coluna.

Podemos estabelecer uma relação biunívoca entre os pontos $P = (a, b)$ do plano cartesiano e os vetores $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Por este motivo, os vetores com duas entradas são denominados vetores de \mathbb{R}^2 .

Graficamente, representamos os vetores $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ de \mathbb{R}^2 por setas com início na origem do plano cartesiano e final no ponto (a, b) . Na Figura 1.1 temos a representação gráfica do vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

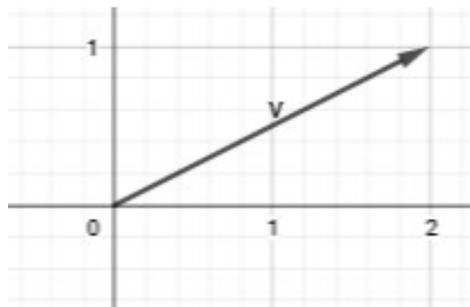


Figura 1.1: Vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

A medida do comprimento de um vetor, denominada módulo do vetor, é a distância entre o ponto inicial e o ponto final do vetor. Dado um vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, seu módulo $|\vec{v}|$ é calculado por $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Podemos realizar a soma e subtração de vetores e sua multiplicação por um escalar utilizando as mesmas regras operatórias das matrizes.

Para se calcular a distância entre dois pontos $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ do plano cartesiano representados pelos vetores $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ devemos calcular o módulo do vetor $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$, ou seja, a **distância entre P e Q**, denotada por $d(P, Q)$, será calculada por $d(P, Q) = |\vec{w}| = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$. Na Figura 1.2 são apresentados os vetores $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. A distância entre os pontos $P = (3, 1)$ e $Q = (2, 3)$ é dada pelo módulo do vetor $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

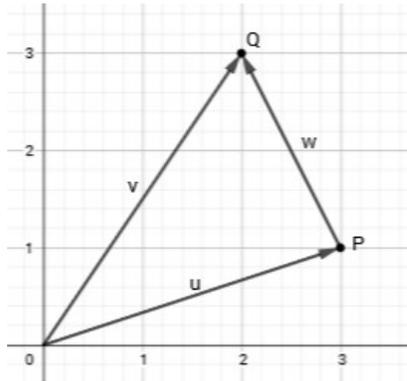


Figura 1.2 – Cálculo da distância entre dois pontos.

1.6 ISOMETRIAS

Uma isometria em \mathbb{R}^2 é uma função bijetiva $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva a distância entre pontos, ou seja, dados dois pontos quaisquer P e Q do plano, temos que $d(P, Q) = d(T(P), T(Q))$. Rotações do plano em torno de um ponto fixo, reflexões e translações ao longo de um vetor dado são isometrias sobre as quais faremos uma breve exposição.

Como nosso estudo se aplica apenas a azulejos quadrados, é importante garantirmos que as ações de rotação, reflexão e translação sejam isometrias. Caso não fossem, essas ações poderiam alterar o formato do azulejo, inviabilizando nossa análise. Caso o leitor tenha interesse em se aprofundar sobre o estudo das isometrias recomendamos a leitura de LIMA (1996).

1.6.1 Translações

Translações representam o deslocamento dos vetores no plano. Dado um vetor \vec{u} qualquer do plano definimos uma translação dos vetores de \mathbb{R}^2 ao longo de \vec{u} como $T_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{u} + \vec{v}$. Por exemplo, dados os vetores $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, a translação $T_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{u} + \vec{v}$ resulta no vetor $\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, cujo ponto final $(4, -1)$ é o mesmo que obteríamos ao deslocar o vetor \vec{v} ao longo do vetor \vec{u} . A Figura 1.3 ilustra o exposto acima.

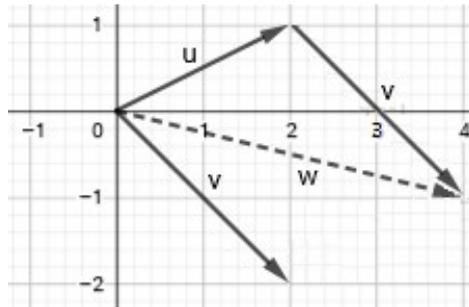


Figura 1.3: *Translação do vetor \vec{v} ao longo de \vec{u} .*

1.6.2 Rotações

Dados um ângulo θ e um vetor $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, podemos definir a função $R_\theta(\vec{u}) = \begin{bmatrix} a \cdot \cos \theta - b \cdot \sin \theta \\ a \cdot \sin \theta + b \cdot \cos \theta \end{bmatrix}$, que aplica ao vetor $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ uma rotação de θ° em sentido anti-horário com centro na origem do sistema de coordenadas. Tomando $\theta = 90^\circ$, por exemplo, obtemos $R_{90}(\vec{u}) = \begin{bmatrix} a \cdot 0 - b \cdot 1 \\ a \cdot 1 + b \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$. Tomando como exemplo o vetor $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ obtemos $R_{90}(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{v}$. A Figura 1.4 ilustra a ação dessa função.

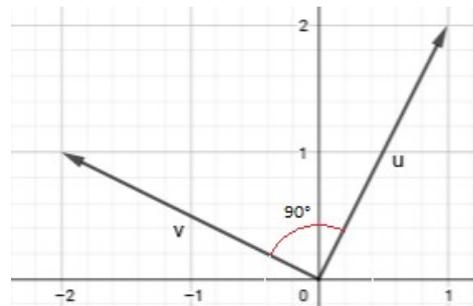


Figura 1.4: *Rotação de 90° do vetor \vec{u} .*

Como outro exemplo, tomemos $\theta = -60^\circ$ e $\vec{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$. Temos então $R_{-60}(\vec{u}) =$

$$\begin{bmatrix} a \cdot \cos -60 - b \cdot \sin -60 \\ a \cdot \sin -60 + b \cdot \cos -60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{v}, \text{ conforme ilustrado pela}$$

Figura 1.5.

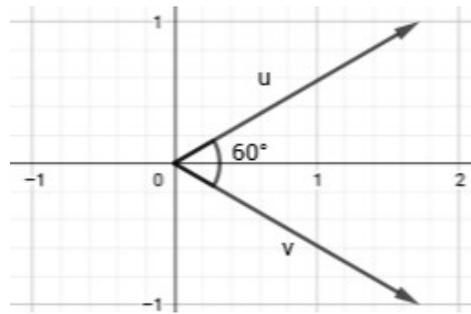


Figura 1.5: Rotação de -60° do vetor \vec{u} .

1.6.3 Rotações Com Centro Fora da Origem

Mostraremos agora como associar translações e rotações de modo a executar rotações do plano com centro em um ponto $C = (a, b)$ qualquer.

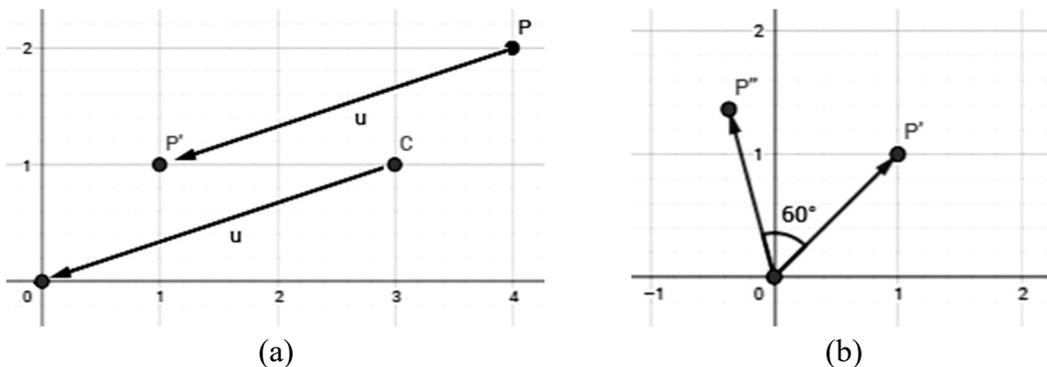
Iniciemos nossa análise com um exemplo. Considere os pontos $C = (3, 1)$ e $P = (4, 2)$. Vamos calcular as coordenadas do ponto P_1 obtido por meio de uma rotação de 60° do ponto P em torno de C .

Primeiramente devemos efetuar uma translação dos pontos do plano ao longo do vetor $\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Essa translação leva o ponto C para a origem do sistema e o ponto P para o ponto $P' = (1, 1)$. Depois, aplicamos sobre P' uma rotação correspondente a um ângulo de 60° ,

obtendo assim o ponto $P'' = R_{60}(P') = \begin{bmatrix} 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Finalmente, desfazemos a

translação inicial transladando os pontos do plano ao longo do vetor $-\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dessa forma retornamos o ponto C para suas coordenadas originais e o ponto P'' é transladado para o ponto

$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{7-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ procurado. A Figura 1.6 ilustra esse procedimento.



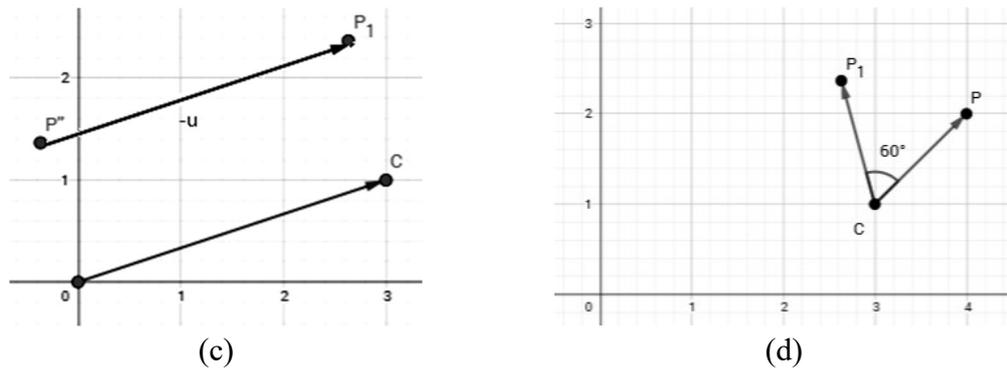


Figura 1.6: Rotação de P em torno de um centro C .

De uma forma geral, as coordenadas do ponto P_1 , obtido como resultado da rotação de θ graus do ponto $P = (x, y)$ em torno do centro $C = (a, b)$, são calculadas fazendo-se $P_1 = T_C(R_\theta(T_{-C}(P)))$. Essa composição de funções será denotada por $R_{\theta,C}(P)$ e a aplicação de n rotações sucessivas de θ graus em torno de um mesmo centro C será denotada por $R_{\theta,C}^n(P)$. Quando n for igual a zero, a função $R_{\theta,C}^n(P)$ será definida como a função identidade.

1.6.4 Centro de Simetria por Rotação

Dados um ponto $C = (a, b)$ e um ângulo θ , em graus, tal que $\theta = \frac{360^\circ}{n}$, com n natural positivo, dizemos que os pontos $P = (x, y)$, $P_1 = R_{\theta,C}(P)$, $P_2 = R_{\theta,C}^2(P)$, ..., $P_{n-1} = R_{\theta,C}^{n-1}(P)$ possuem simetria rotacional de θ graus em torno de C . Se θ for o menor ângulo para o qual os pontos $P_k = R_{\theta,C}^k(P)$, com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, possuem simetria rotacional, dizemos também que C é um **centro de rotação associado ao ângulo θ** . A Figura 1.7 apresenta um exemplo de pontos com simetria rotacional de 45° em torno do ponto C .

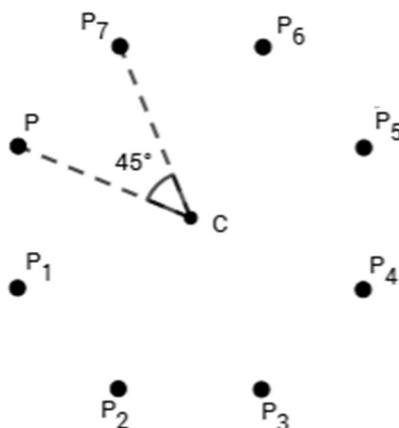


Figura 1.7: Centro de rotação associado a um ângulo de 45° .

Consideremos uma função $c(x, y)$ que associa uma cor a cada ponto do plano cartesiano. Dado um ponto qualquer $P = (x, y)$ e os seus simétricos em torno de $C = (a, b)$ em relação a um ângulo de θ graus, $P_k = R_{\theta, C}^k(P)$ com $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, dizemos que C é um centro de simetria por rotação associado a um ângulo de θ graus se a função cor aplicada a esses pontos, $c(P_k)$, for constante. Alternativamente, dizemos que C é um **centro de rotação de ordem n** . A Figura 1.8 mostra um exemplo de um centro de simetria por rotação C associado a um ângulo de 90° , ou centro de rotação de ordem 4, para uma função $c(x, y)$ dada. Observe que, na figura, $c(P) = c(P_1) = c(P_2) = c(P_3)$ e $c(Q) = c(Q_1) = c(Q_2) = c(Q_3)$.

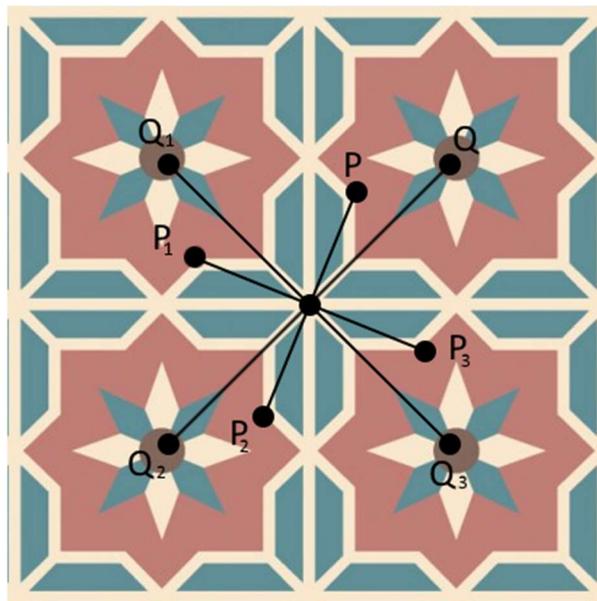


Figura 1.8: Centro de rotação associado a um ângulo de 90° . Fonte: Adaptada do site Freepik⁷

1.6.5 Eixo De Simetria Por Reflexão

Uma reta qualquer divide o plano cartesiano em dois semiplanos. Seja r uma reta qualquer do plano e sejam P e P' pontos em semiplanos distintos definidos por r . Tomemos Q como o ponto de interseção entre $\overline{PP'}$ e r , isto é, $Q = \overline{PP'} \cap r$. Dizemos que P e P' são **simétricos em relação à reta r** se $\overline{PP'} \perp r$ e $d(P, Q) = d(P', Q)$. A Figura 1.9 traz um exemplo de dois pontos simétricos em relação a uma reta.

⁷ https://br.freepik.com/vetores-premium/azulejo-padrao-floral-do-vintage_842493.htm; Dezembro 2017

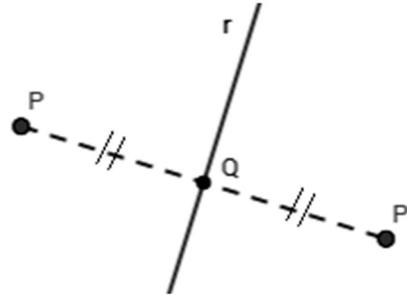


Figura 1.9: Pontos P e P' simétricos em relação à reta r .

Consideremos agora uma função $c(x, y)$ que associa uma cor a cada ponto do plano cartesiano. Dizemos que uma reta r é um **eixo de simetria por reflexão** da imagem definida pela função cor no plano se quaisquer pontos P e P' , simétricos em relação a r , possuem a mesma imagem pela função $c(x, y)$, isto é, possuem a mesma cor, conforme ilustrado pela Figura 1.10.

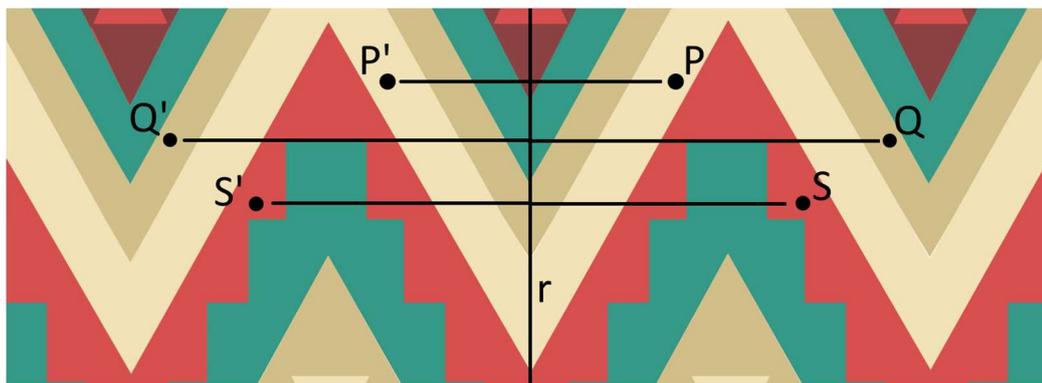


Figura 1.10: Eixo de simetria representado pela reta r . Fonte: Adaptada do site Pinterest⁸.

Com isso encerramos nossa revisão de tópicos de Álgebra Linear e podemos passar à análise das propriedades geométricas dos azulejos.

⁸ <https://br.pinterest.com/pin/463378249146019282/>; dezembro 2017

Capítulo 2 – Análise das propriedades dos azulejos quadrados

2.1 PAVIMENTAÇÕES DO PLANO

Uma pavimentação do plano consiste em um agrupamento de polígonos que cobre completamente o plano, com sobreposição de arestas. Segundo GRÜNBAUM & SHEPARD (1987), as pavimentações compostas por um único tipo de polígono são denominadas pavimentações **1-uniformes** enquanto as pavimentações com mais de um tipo de polígono, k polígonos, são classificadas como **k-uniformes**.

Os únicos polígonos regulares com os quais é possível formar uma pavimentação 1-uniforme do plano são o triângulo, o quadrado (caso do nosso estudo) e o hexágono. Isso se deve ao fato de que os ângulos internos dessas figuras são divisores de 360° . Mas e quanto aos polígonos não regulares?

Qualquer polígono convexo que gere uma pavimentação 1-uniforme deve ter no máximo 6 lados, conforme demonstrado por SANTOS (2006). Então, se um polígono convexo gera uma pavimentação 1-uniforme do plano, ele deve ser um triângulo, um quadrilátero, um pentágono ou um hexágono. No caso dos triângulos e quadriláteros, quaisquer desses polígonos pavimentam o plano. Quanto ao hexágono, Karl Reinhardt demonstrou em 1918 que existem apenas três tipos de hexágonos convexos capazes de pavimentação, conforme citado em SALLY (2011).

O caso das pavimentações por pentágonos convexos é interessante, pois encontra-se em aberto há cerca de 100 anos. Até hoje não são conhecidas as condições necessárias e suficientes para que um pentágono possa pavimentar o plano. Ao longo do tempo, diversos matemáticos profissionais e amadores se dedicaram a procurar tais polígonos. Atualmente são conhecidos 15 pentágonos com capacidade de pavimentação, sendo que o último deles foi descoberto recentemente, em 2015, por um grupo de pesquisa liderado por Casey Mann, da universidade de Washington, conforme descrito por AGUIAR (2015). Esse pentágono está representado na Figura 2.1. Vale ressaltar que já haviam se passado 30 anos desde a descoberta do 14º pentágono. Não pretendemos nos aprofundar no estudo das pavimentações do plano. Caso o leitor tenha interesse pelo tema, recomendamos a leitura de CASTRO (2008).

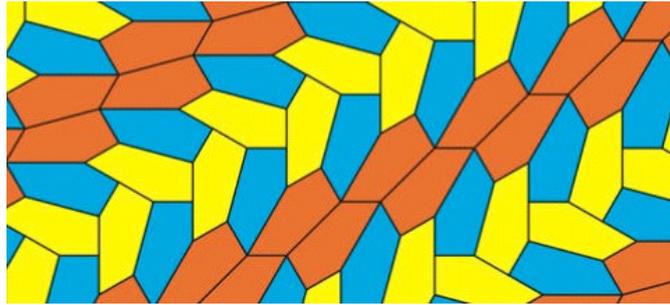


Figura 2.1: O 15° pentágono capaz de pavimentação. Fonte: Huffpost Brasil⁹.

2.2 GRUPOS DE SIMETRIA PLANA

Outro tema relacionado a esta dissertação é o da classificação dos grupos de simetria plana, também conhecidos como grupos de papéis de parede, ou grupos cristalográficos planos. De acordo com o verbete *Symetry Group* disponível no site WolframMathWolrd¹⁰, um **grupo de simetria** é um conjunto de operações que preservam a simetria, como as isometrias abordadas na Seção 1.6.

De acordo com o verbete *Wallpaper Groups* da Wikipedia, em 1891, o matemático russo Evgraf Fedorov demonstrou que qualquer padrão geométrico plano repetitivo pode ser classificado dentre algum de 17 grupos. Essa demonstração também foi executada de forma independente pelo húngaro George Pólya, em 1924.

Para se efetuar a classificação de um padrão deve-se, primeiramente, determinar um paralelogramo de área mínima capaz de gerar todo o padrão por meio de translações. Essa região de área mínima é denominada **região fundamental**. Podemos determinar diferentes regiões fundamentais para um mesmo padrão geométrico, apesar de que qualquer candidato a região fundamental deve possuir a mesma área, conforme mostrado pela Figura 2.2.

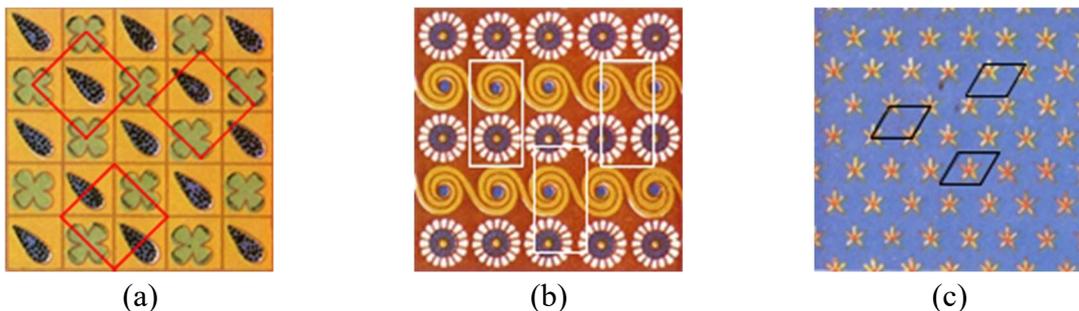


Figura 2.2: Regiões fundamentais dos padrões com repetição. Fonte: Verbetes Wallpaper Group na Wikipédia¹¹.

⁹ http://www.huffpostbrasil.com/2015/09/03/descoberta-historica-de-ladrilho-da-um-chacoalhao-no-mundo-da_a_21684256/; Dezembro 2017.

¹⁰ <http://mathworld.wolfram.com/SymmetryGroup.html>; Março 2018

¹¹ https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group; dezembro 2017

Os padrões planos podem apresentar três tipos de simetria a saber, simetria por **reflexão** em torno de um eixo, simetria por **rotação** de um determinado ângulo em torno de um centro e simetria por **reflexão deslizante**, que é equivalente a uma reflexão em torno de um eixo de simetria seguida de uma translação. Na Figura 2.3 destacamos exemplos das simetrias citadas.

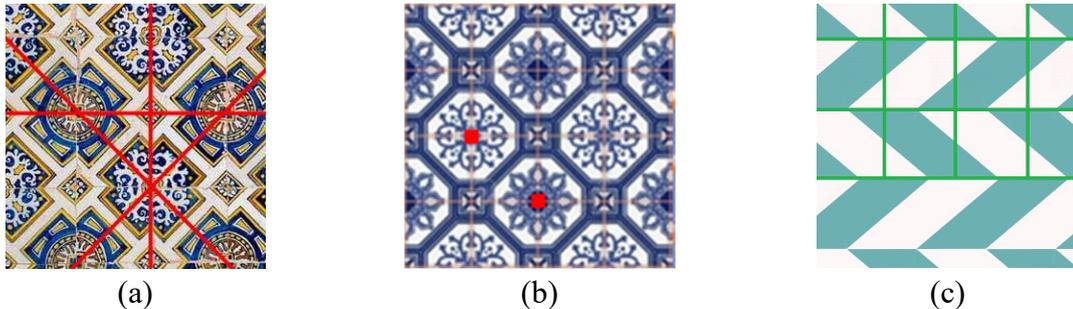
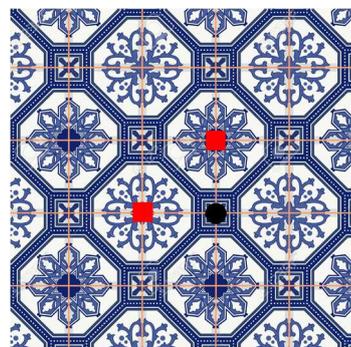


Figura 2.3: a) Eixos de simetria por reflexão. b) Centros de rotação de ordem 4. c) Eixos de simetria por reflexão deslizante. Fonte – (a) Adaptado do Inventário Artístico da Arquidiocese de Évora¹². (b) Adaptado do site istockphoto.com¹³. (c) Adaptado do site colourlovers.com¹⁴.

Nos diversos tipos de padrões geométricos, os centros de simetria por rotação podem estar associados a diferentes ângulos. Curiosamente podemos ter em um mesmo padrão centros de rotação associados a ângulos distintos, como mostra a Figura 2.4.



Legenda:

- Centro de ordem 2
- Centro de ordem 4

Figura 2.4: Centros de rotação de ordem distinta. Fonte: idem a Figura 2.3 (b).

Se um padrão geométrico possui um centro de rotação associado a um ângulo de qualquer, esse centro de rotação do padrão estará contido em qualquer região fundamental uma vez que o padrão é formado por cópias da região fundamental e, se o centro de rotação não estivesse presente na região fundamental, não estaria presente em nenhum lugar do padrão.

¹² http://www.inventarioevora.com.pt/acesibilidade/roteiro_t1_04.html; Dezembro 2017

¹³ <https://www.istockphoto.com/pt/vetorial/sem-costura-padr%C3%A3o-branco-com-marrocos-portugu%C3%AAs-pe%C3%A7as-de-azulejo-ornamentos-gm494615582-77554919>; Dezembro 2017.

¹⁴ http://www.colourlovers.com/pattern/3190400/Man_in_Mirror; Dezembro 2017.

Segundo SCHATTSCHEIDER (1978), a classificação dos padrões geométricos se dá de acordo com sua invariância por isometrias do plano. Os padrões geométricos são classificados utilizando-se códigos como p4, pmg e cmm, por exemplo. Nessa classificação a letra m se refere à existência de eixos de simetria (do inglês *mirror*), a letra g se refere à existência de eixos de reflexão deslizante (do inglês *glide reflection*), as letras p e g se referem ao modo como os centros de rotação se distribuem pelo padrão e os números 1, 2, 3, 4, e 6 se referem à ordem dos centros de rotação do padrão. Entender como essa classificação é feita pode exigir alguma prática. Nesse trabalho, a classificação das estampas não será de importância crucial, mas seu melhor entendimento será necessário para o estudo do artigo de REZENDE (2012).

O Fluxograma 2.1 traz um roteiro para a classificação das estampas geométricas de acordo com os grupos de simetria planos.

2.3 AZULEJOS QUADRADOS

Em nosso estudo, pretendemos explorar como é feita a classificação dos azulejos quadrados utilizados para gerar padrões geométricos repetitivos, conforme proposto por Rezende. Utilizando-se um azulejo qualquer para formar um padrão geométrico com centro de rotação de ordem 4 (tipos p4, p4m, p4g), classificaremos o azulejo de acordo com a localização dos centros de rotação de ordem 4 no azulejo. Iniciaremos nosso estudo estabelecendo algumas definições.

Dados dois números inteiros, m e n , definimos como um **azulejo** a região do plano delimitada por $[m, m + 1] \times [n, n + 1]$, sobre a qual está definida uma função cor (uma estampa) não constante. Denotaremos esse azulejo por $A_{m,n}$.

Escolhidos dois azulejos distintos $A_{m,n}$ e $A_{i,j}$, dizemos que são **congruentes** caso suas estampas sejam iguais a menos de rotações por ângulos de 90° , 180° ou 270° . Em outras palavras, dado um azulejo estampado em uma posição qualquer do plano, existem 4 casos de azulejos congruentes, construídos a partir de rotações, conforme ilustra a Figura 2.5.

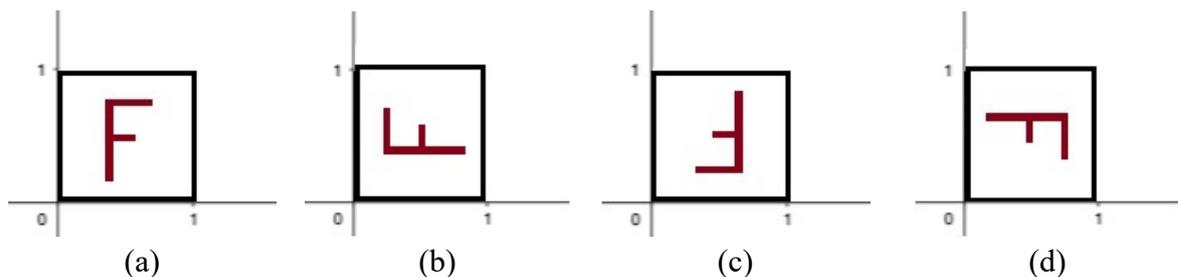
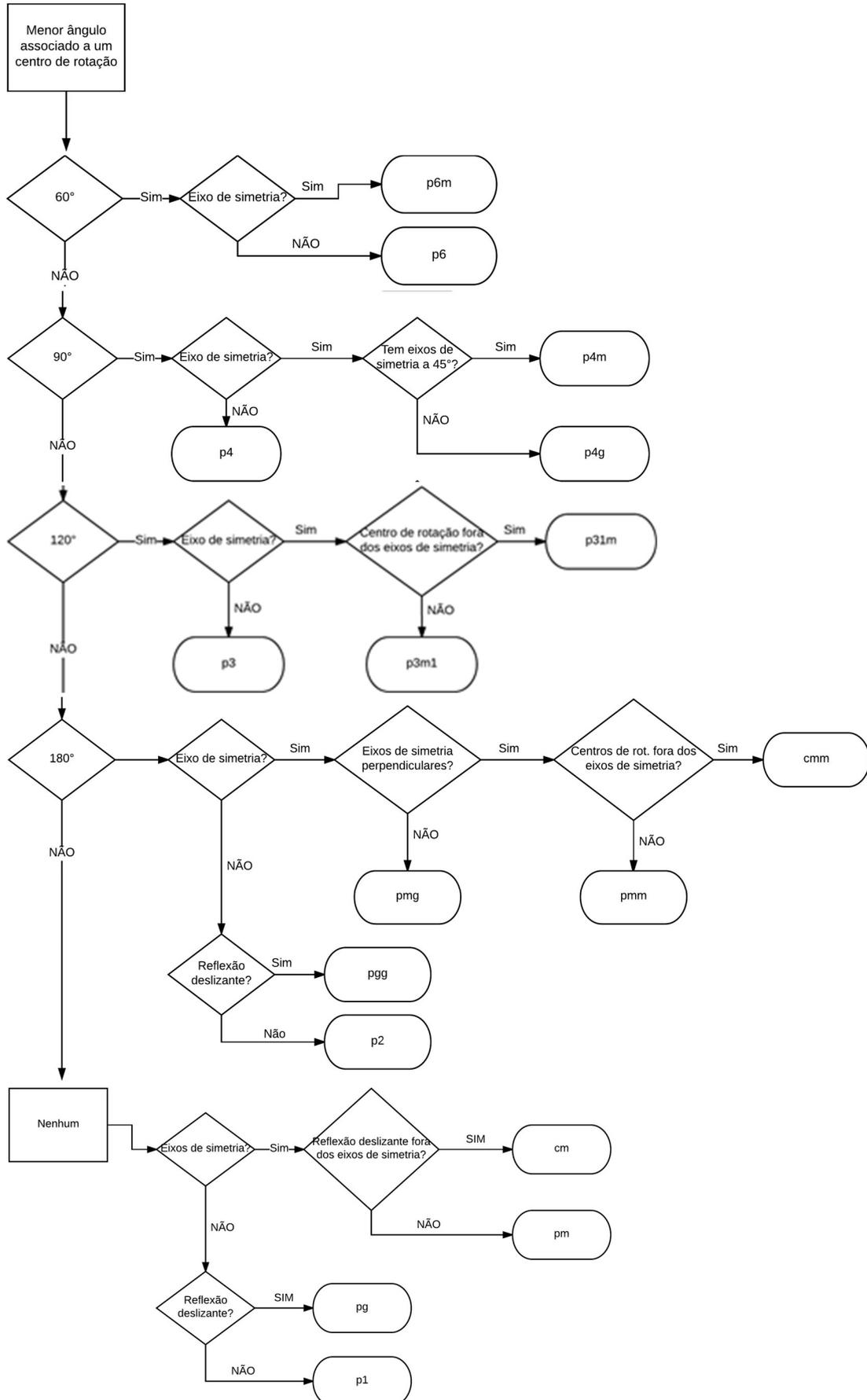


Figura 2.5: As quatro rotações possíveis para o azulejo $A_{0,0}$.



Fluxograma 2.1: Classificação dos padrões geométricos planos.

O **centro** do azulejo $A_{m,n}$ terá coordenadas $(m + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$. Os pontos de coordenadas $(m, n), (m + 1, n), (m, n + 1), (m + 1, n + 1)$ serão denominados **vértices** do azulejo. Os segmentos que unem vértices consecutivos serão denominados **arestas** e os segmentos que unem vértices não consecutivos serão denominados **diagonais** do azulejo. Os segmentos que unem os pontos médios de arestas opostas do azulejo serão denominados **medianas**.

2.4 SIMETRIAS PRÓPRIAS E HERDADAS

As simetrias que podem ser percebidas observando-se um único exemplar de um azulejo quadrado são denominadas **simetrias próprias** do azulejo. Os oito azulejos representados na Tabela 2.1 contemplam todos os tipos de simetrias próprias possíveis aos azulejos quadrados.

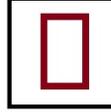
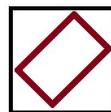
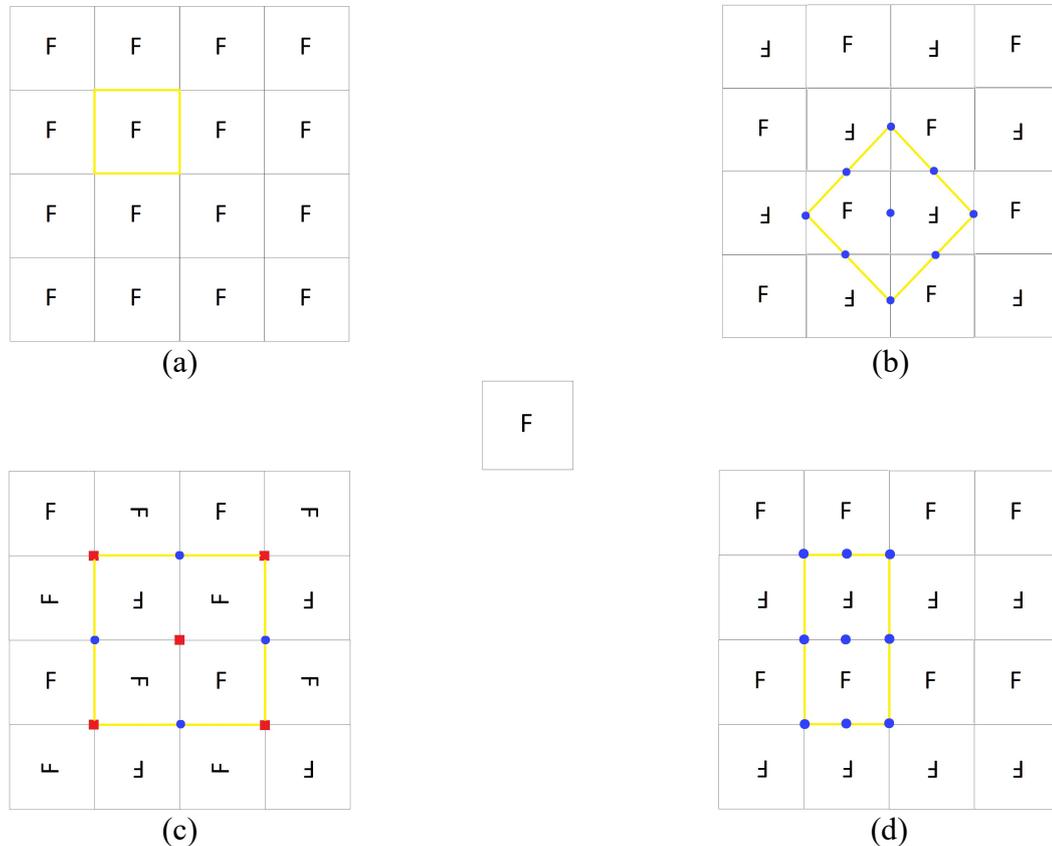
	Nenhuma simetria		Com um centro de rotação de ordem 4 no centro do azulejo
	Com um eixo de reflexão em uma das medianas		Com um centro de rotação de ordem 2 no centro do azulejo e dois eixos de reflexão ao longo das medianas
	Com um eixo de reflexão em uma das diagonais		Com um centro de rotação de ordem 2 no centro do azulejo e dois eixos de reflexão ao longo das diagonais
	Com um centro de rotação de ordem 2 no centro do azulejo		Com um centro de rotação de ordem 4 no centro do azulejo e eixos de reflexão nas medianas e diagonais

Tabela 2.1: *Simetrias próprias dos azulejos*. Fonte: Adaptado do blog Polyedros¹⁵.

Infinitas cópias de um mesmo azulejo posicionadas com suas arestas coincidentes de modo a pavimentar o plano formam um **painel**. Alterando a rotação dos azulejos podemos formar infinitos tipos de painéis sendo que alguns deles terão simetria. Na Figura 2.6 temos

¹⁵ <http://polyedros.blogspot.com.br/2013/04/simetrias-proprias-dos-azulejos.html>; Dezembro 2017

alguns exemplos de painéis distintos, gerados pelo mesmo azulejo, onde estão destacados o contorno da região fundamental e seus centros de rotação.



Legenda:

— Limite da região fundamental ● Centro de ordem 2 ■ Centro de ordem 4

Figura 2.6: *Diferentes painéis formados por um mesmo azulejo.* Fonte: Adaptado de Rezende, 2013 – p. 1 e 2.

A Figura 2.6 nos mostra que mesmo um azulejo sem nenhum tipo de simetria própria é capaz produzir painéis com centros de rotação de ordem 4 nos vértices dos azulejos e centros de rotação de ordem 2 nos vértices dos azulejos e nos pontos médios das arestas. Centros de rotação como os descritos serão denominados **centros de rotação triviais**.

Azulejos quadrados com estampas cujo centro de ordem 4 se localiza no centro do azulejo produzem um único tipo de painel. O padrão presente nestes painéis sempre terá centros de ordem 4, conforme ilustrado pela Figura 2.7.

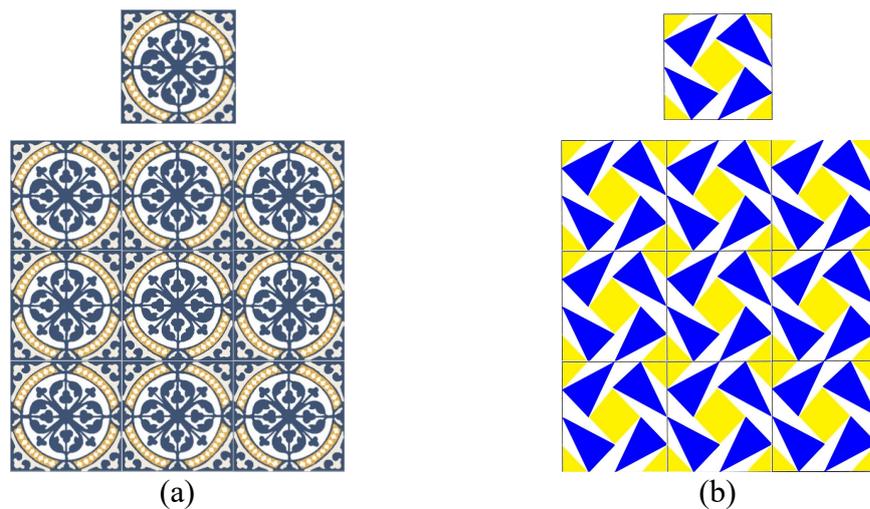


Figura 2.7: Painéis formados por azulejos com centro de ordem 4 em seu centro. Fonte: (a) Adaptado de Dalle Piagge¹⁶. (b) Adaptado do filme *Simples Azulejos*¹⁷.

A Figura 2.7 (b) traz um azulejo com centro de rotação de ordem 4 em seu centro, mas que aparentemente não apresenta outros tipos de simetria. Entretanto, ao analisarmos o painel formado por esse azulejo, podemos perceber a existência de eixos de reflexão e eixos de reflexão deslizante. Como esses eixos estão presentes no painel, é necessário que estejam presentes no azulejo, por isso dizemos que esses são **eixos de simetria herdados do painel**. A Figura 2.8 apresenta o azulejo da Figura 2.7 (b), realçando os eixos de reflexão e eixos de reflexão deslizante que pudemos descobrir a partir da análise do painel.

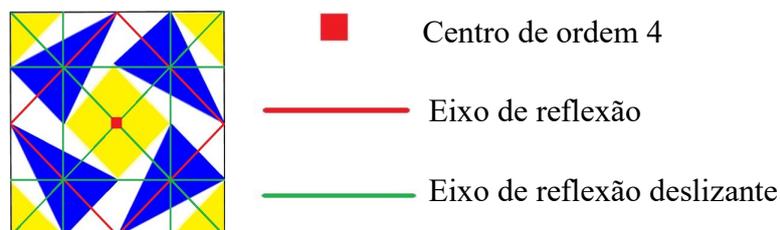


Figura 2.8: Eixos de simetria herdados do painel. Fonte: Idem à Figura 2.7 (b).

Por meio das características herdadas do painel, podemos diferenciar, do ponto de vista matemático, azulejos que apresentam as mesmas simetrias próprias e por isso aparentam ser do mesmo tipo. Na Figura 2.9 temos um exemplo de dois azulejos que apresentam as mesmas simetrias próprias, mas cujos painéis revelam diferenças importantes.

¹⁶ <http://www.dallepiagge.com.br/catalogo-ladrilhos.php>; Dezembro 2017

¹⁷ <https://www.youtube.com/watch?v=SYPgyLTFq10>; Dezembro 2017

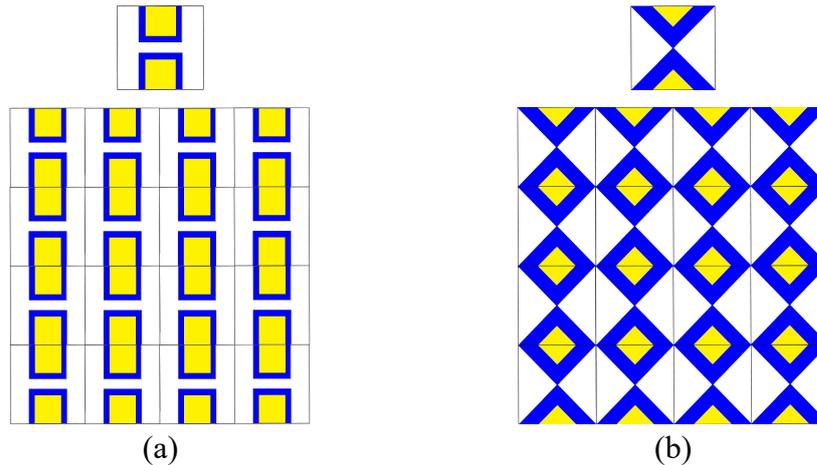


Figura 2.9: Painéis formados por azulejos com mesmas simetrias próprias.

Os azulejos da Figura 2.9 possuem como eixos de simetria próprios um centro de rotação de ordem dois no centro do azulejo e eixos de reflexão em suas medianas. Os painéis gerados por eles, entretanto, são bastante distintos com relação às propriedades geométricas que apresentam. O painel gerado na Figura 2.9 (b) apresenta centros de rotação de ordem 4, eixos de reflexão deslizante e novos eixos de reflexão diversos dos eixos de reflexão próprios.

Na Figura 2.10, traçamos em cada um dos azulejos anteriores os eixos de simetria próprios e os herdados do painel, excluindo-se os centros de rotação triviais.



Legenda:

- Centro de ordem 2
- Centro de ordem 4
- Eixo de reflexão
- Eixo de reflexão deslizante

Figura 2.10: Eixos de simetria próprios e herdados.

2.5 EQUIVALÊNCIA DE PAINÉIS

Se por um lado a existência de eixos de simetria e centros de rotação em um painel implica a existência desses mesmos elementos no azulejo que o formou, a recíproca não é verdadeira. Na Figura 2.11 apresentamos um azulejo e dois painéis distintos produzidos por ele. O painel (a) nos permite perceber a existência de centros de ordem 2 e ordem 4 no azulejo.

Esses centros de rotação não são elementos de simetria próprios do azulejo, mas sim herdados do painel (a). Já o painel (b) formado por esse mesmo azulejo não apresenta nenhum centro de ordem 4.

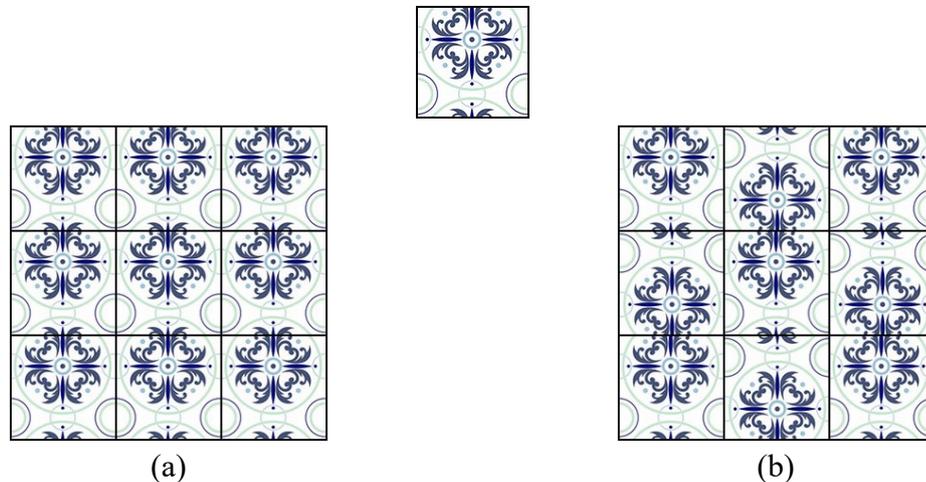


Figura 2.11: Os elementos de simetria de um azulejo nem sempre estão presentes no painel.

Isto nos mostra que a existência no painel de elementos de simetria como centros de rotação e eixos de reflexão pode depender da disposição dos azulejos.

Dadas infinitas cópias de um azulejo quadrado sem nenhum tipo de simetria, há infinitas formas de se pavimentar o plano. Devido a esse fato, vamos restringir a nossa análise a pavimentações geradas por pequenos módulos cujas cópias são transladadas. Um **módulo** será definido com um conjunto de 4 azulejos quadrados dispostos a formar um quadrado de lado 2, conforme ilustrado na Figura 2.12.

Utilizaremos como exemplo um azulejo sem nenhum tipo de simetria, cujos vértices serão numerados de 1 a 4, iniciando do vértice superior direito e girando em sentido anti-horário. Suponhamos, sem perda de generalidade, que o azulejo no canto inferior esquerdo do nosso módulo 2×2 esteja com sua rotação fixada, conforme ilustrado na Figura 2.12. Essa será denominada **rotação canônica** do azulejo e pode ser escolhida de forma aleatória. Há quatro formas de posicionar cada um dos outros 3 azulejos do módulo, o que nos dá um total de $4 \times 4 \times 4 = 64$ formas de compor o módulo 2×2 em questão.

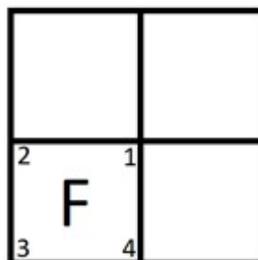


Figura 2.12. Um módulo de quatro azulejos quadrados.

Além disso, a fim de efetuarmos uma pavimentação do plano, pode-se transladar cada cópia desse módulo de 3 formas distintas, resultando num total de $64 \times 3 = 192$ painéis possíveis se serem construídos a partir de um módulo qualquer. A Figura 2.13 ilustra as translações possíveis de um módulo.

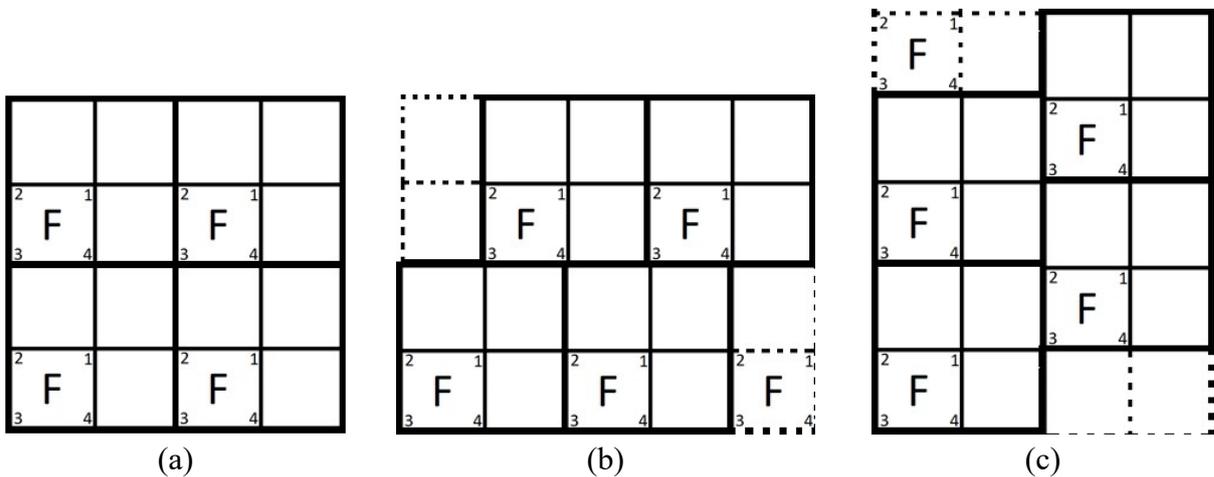


Figura 2.13: Possíveis translações de um módulo de azulejos. Fonte: Adaptado de Rezende, 2013, p. 3.

Iremos agora estabelecer uma maneira de nos referirmos a um elemento qualquer do conjunto de 192 painéis construtíveis por um azulejo a partir de um módulo 2×2 . Essa denominação será baseada em dois critérios: a posição dos azulejos que compõem um módulo e o tipo de deslocamento do módulo utilizado para a formação do painel. Denominaremos **centro do módulo** à interseção dos quatro azulejos do módulo. Na Figura 2.14 temos três módulos distintos para os quais foram atribuídas classificações referentes aos números dos vértices de cada um dos azulejos no centro do módulo. Por definição, essa numeração sempre será iniciada pelo vértice do azulejo inferior esquerdo do módulo, o que está com rotação canônica, e lida em sentido anti-horário.

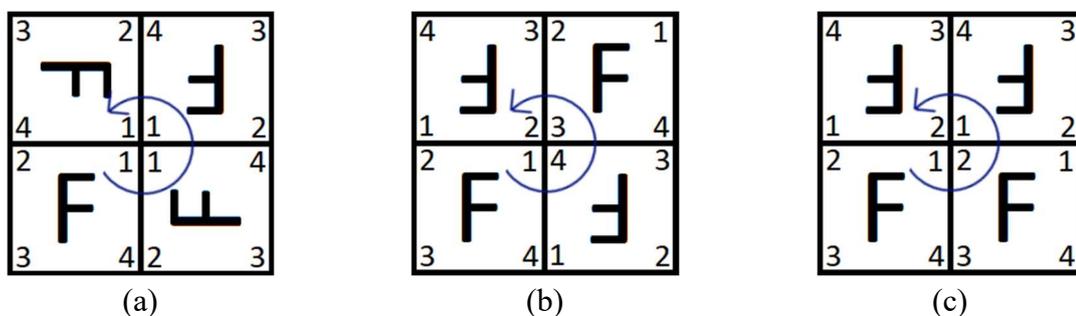


Figura 2.14: (a) Módulo (1111); (b) Módulo (1432); (c) Módulo (1212).

Os painéis gerados por um determinado módulo, cujas cópias estejam transladadas conforme mostrado na Figura 2.13 (a) receberão a mesma denominação do módulo que os

gerou. Caso os painéis tenham sido formados por translações conforme indicadas na Figura 2.13 (b) ou (c), o painel será denominado pelo número do módulo que o gerou acrescido de ' ou '', respectivamente. A Figura 2.15 apresenta alguns painéis e suas respectivas denominações.

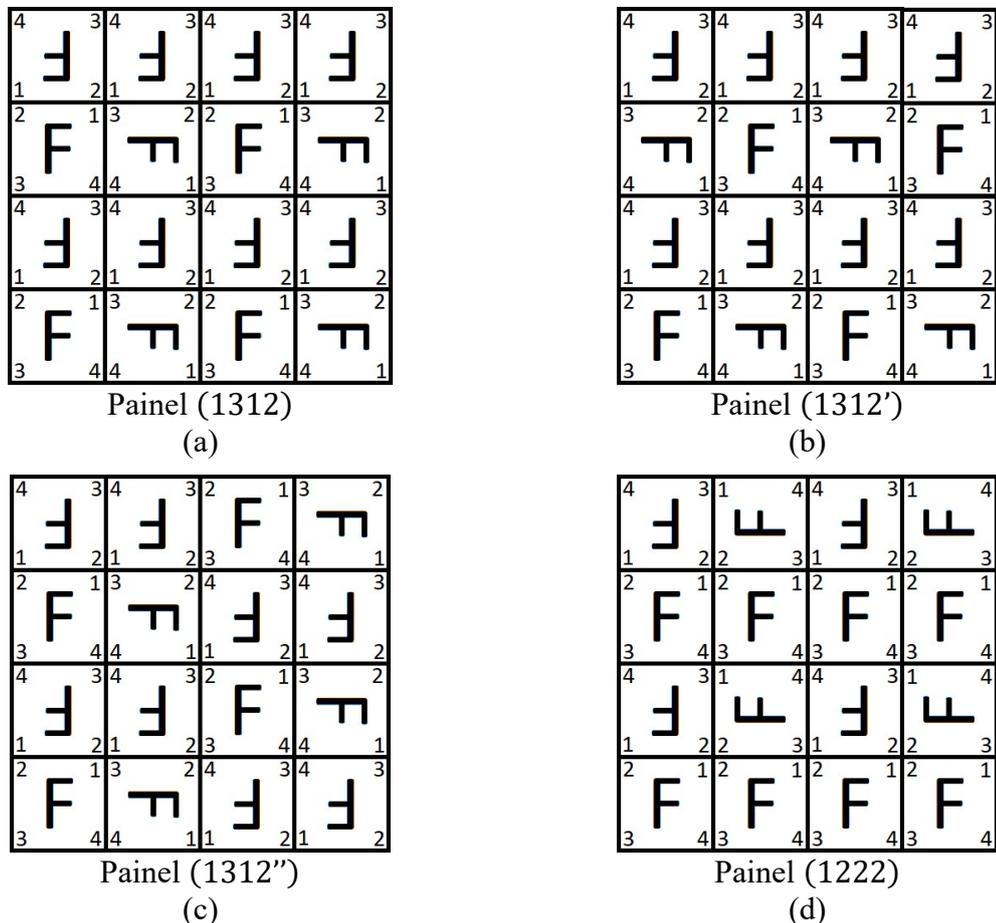


Figura 2.15: Alguns painéis com suas respectivas denominações.

Observe que o painel (1222) exibido na Figura 2.15 (d) pode ser obtido a partir de uma rotação de 180° do painel (1312) na Figura 2.15 (a) combinada a uma translação. Desta forma, é possível agrupar os 192 painéis existentes em, no máximo, 56 classes de equivalência, considerando-se **equivalentes** painéis que possam ser obtidos a partir de outros por meio de rotações e/ou translações.

Dado um painel, não é difícil perceber quais são os outros painéis que pertencem à mesma classe de equivalência. Para isso, basta procurarmos no painel os vértices com número 1 dos azulejos e lermos o número dos outros vértices em sentido anti-horário. O painel (1222), por exemplo, é equivalente aos painéis (1213), (1312) e (1343). A Figura 2.16 mostra como podemos perceber essas equivalências.

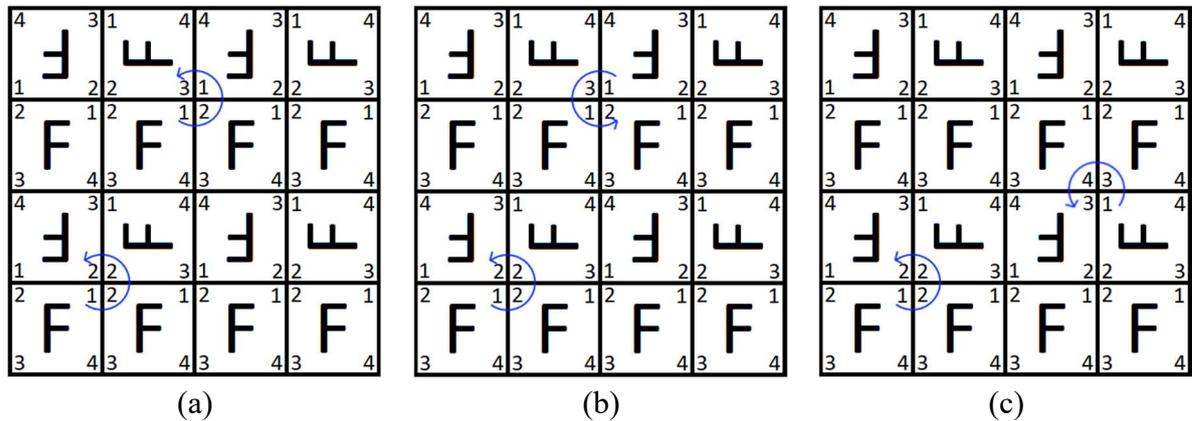


Figura 2.16: Painéis na classe de equivalência de (1222) .

Caso o azulejo utilizado para a formação dos painéis possua elementos de simetria próprios, a quantidade de classes de equivalência geradas por esse azulejo é reduzida. Um azulejo com centro de ordem 4 no centro do azulejo produz apenas um tipo de painel, conforme ilustrado na Figura 2.7. Isso significa que todos os painéis produzidos por esse tipo de azulejo possuem a mesma classe de equivalência.

2.6 AS SETE FAMÍLIAS DE AZULEJOS

Como os painéis gerados pelos módulos 2×2 apresentam padrões geométricos repetitivos, caso o painel possua algum centro de ordem 4 então terá infinitos centros de ordem 4. Os centros de ordem 4 existentes no painel não são todos iguais em relação à estampa que possuem em suas vizinhanças. Nesse sentido, os centros de ordem 4 são classificados em dois gêneros distintos. Além disso, nos pontos médios dos centros de ordem 4 de mesmo gênero sempre haverá centros de ordem 2. Na Figura 2.17 temos um painel onde estão assinalados com cores distintas os centros de rotação de ordem 2 e os centros de ordem 4 de gêneros diferentes.

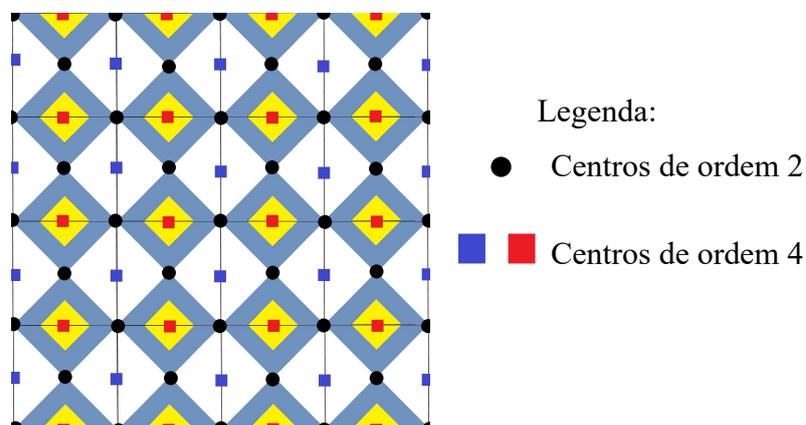


Figura 2.17: Centros de ordem 4 de gêneros distintos.

Afirmamos que qualquer painel formado a partir de um módulo cujas cópias são transladadas e que possui um centro de rotação de ordem 4, sempre terá o padrão de centros de ordem 4 e centros de ordem 2 apresentado na Figura 2.17. A Figura 2.18 apresenta uma malha com a distribuição de centros de rotação dos painéis com centros de rotação de ordem 4. A fim de seguirmos o mesmo padrão utilizado por Rezende, a malha foi girada de 45° em relação à Figura 2.17.

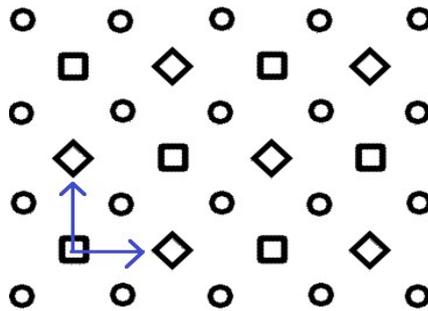


Figura 2.18: *Distribuição dos centros de rotação em um painel com centros de ordem 4.*

Inserimos nessa malha um sistema local de coordenadas ortogonais e tomamos como unidade de comprimento a distância entre dois centros consecutivos de ordem 4 de gêneros diferentes. Uma maneira de elaborarmos um azulejo quadrado que gere a malha acima consiste em escolhermos um par de valores p e q e tomarmos um quadrado cujos lados tem a direção dos vetores (p, q) e $(-q, p)$. Procedendo dessa forma, encontramos 4 grupos distintos de azulejos denominados **famílias principais** de azulejos. O que distingue cada uma dessas famílias é a relação existente entre os valores p e q escolhidos e a disposição dos centros de rotação de ordem 4 no perímetro do azulejo.

2.6.1 Primeira Família Principal

A primeira família de azulejos é obtida escolhendo-se p e q inteiros e com mesma paridade. O azulejo obtido dessa forma pode ser transladado livremente pela malha, como nos mostra a Figura 2.19.

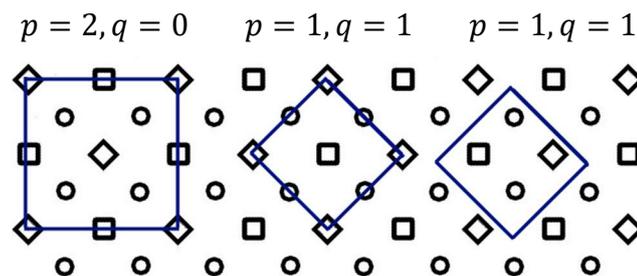


Figura 2.19: *Alguns azulejos da Primeira Família Principal.*

Eliminando-se os centros de rotação triviais, os azulejos adquirem a configuração Apresentada na Figura 2.20.

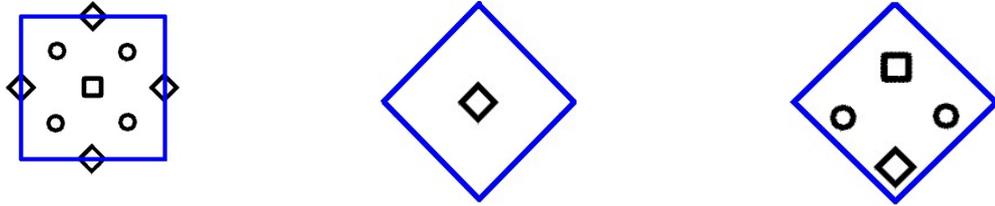


Figura 2.20: *Esquema matemático dos azulejos da Primeira Família Principal.*

Abaixo temos um painel com centros de rotação de ordem 4 onde foi destacada a malha de centros de rotação que o compõe. Sobre o painel, delimitamos as regiões de três azulejos quadrados com as características dos azulejos que acabamos de exibir. Todos os azulejos da Figura 2.21 pertencem à 1ª família principal de azulejos.

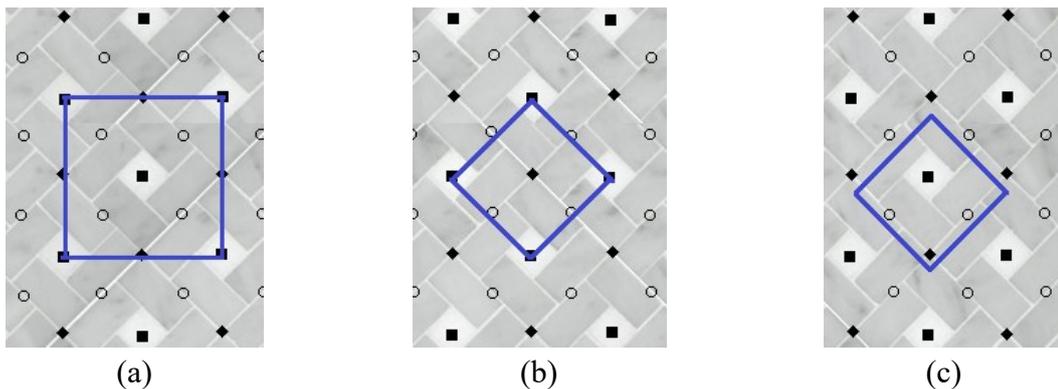


Figura 2.21: *Alguns azulejos da Primeira Família Principal.* Fonte: Adaptada de www.houzz.com¹⁸.

Os azulejos da Figura 2.21 (a) e 2.21 (b) possuem centros de ordem 4 em seu centro e por isso geram apenas um tipo de painel, conforme discutido na Seção 2.4. Já o azulejo da Figura 2.21 (c) pode formar painéis distintos. A Figura 2.22 apresenta painéis distintos formados com esse azulejo onde estão destacados os centros de rotação existentes nos painéis.

¹⁸ <http://www.houzz.com/ideabooks/909090/list/10-tile-patterns-to-showcase-your-floor>; Dezembro 2017.

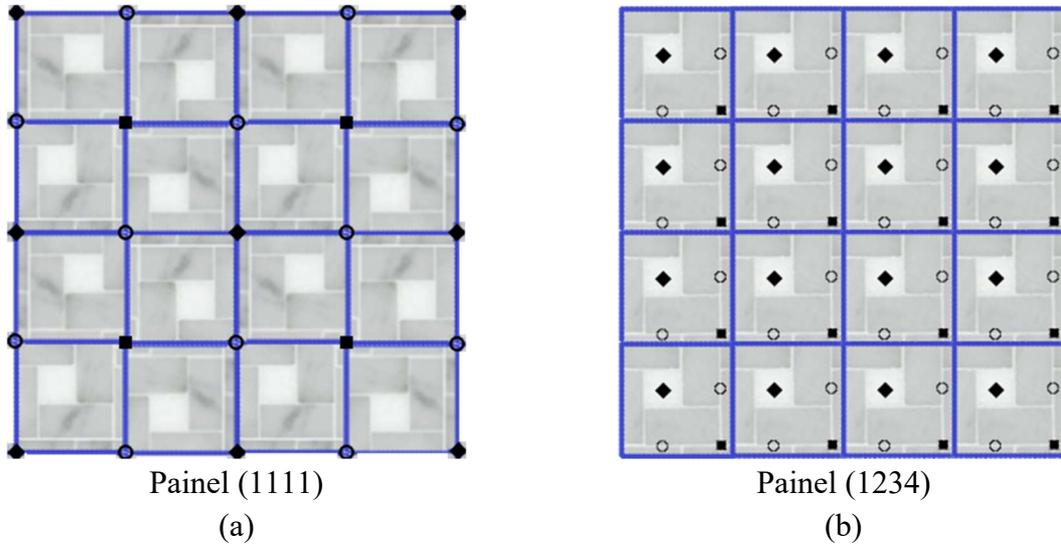


Figura 2.22: Painéis distintos formados por um azulejo da Primeira Família Principal.

Podemos observar que, no painel da Figura 2.22 (a), os centros de rotação do painel são apenas os centros triviais do azulejo. Já na Figura 2.22 (b), os centros de rotação não triviais do azulejo são também centros de rotação do painel. Isso reforça a ideia de que os elementos de simetria do azulejo nem sempre se manifestam nos painéis por ele gerados.

2.6.2 Segunda Família Principal

A segunda família principal de azulejos é obtida escolhendo-se p e q inteiros, com paridade distinta e de modo que os vértices do azulejo estejam sobre centros de rotação de ordem 4. A Figura 2.23 traz exemplos de azulejos desse tipo.

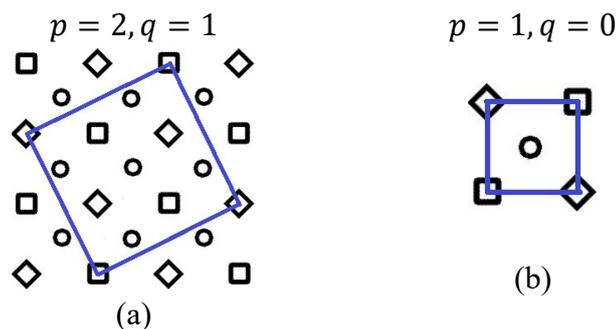


Figura 2.23: Azulejos da Segunda Família Principal.

Nessa família, os vértices consecutivos dos azulejos estão localizados sobre centros de rotação de ordem 4 de gêneros diferentes e há um centro de ordem 2 no centro do azulejo.

Para se obter um painel de modo que os centros de rotação de ordem 4 do azulejo sejam também centros de ordem 4 do painel é necessário que os azulejos vizinhos no painel estejam rotacionados de 90° ou 270° , como na classe de equivalência (1111).

A Figura 2.24 mostra dois exemplos de painéis gerados por um azulejo como o apresentado na Figura 2.23 (a). O painel da Figura 2.24 (a) possui classe de equivalência (1234) e não possui centros de ordem 4. O painel da Figura 2.24 (b) possui classe de equivalência (1111) e todos os centros de ordem 4 do azulejo são também centros de ordem 4 do painel.

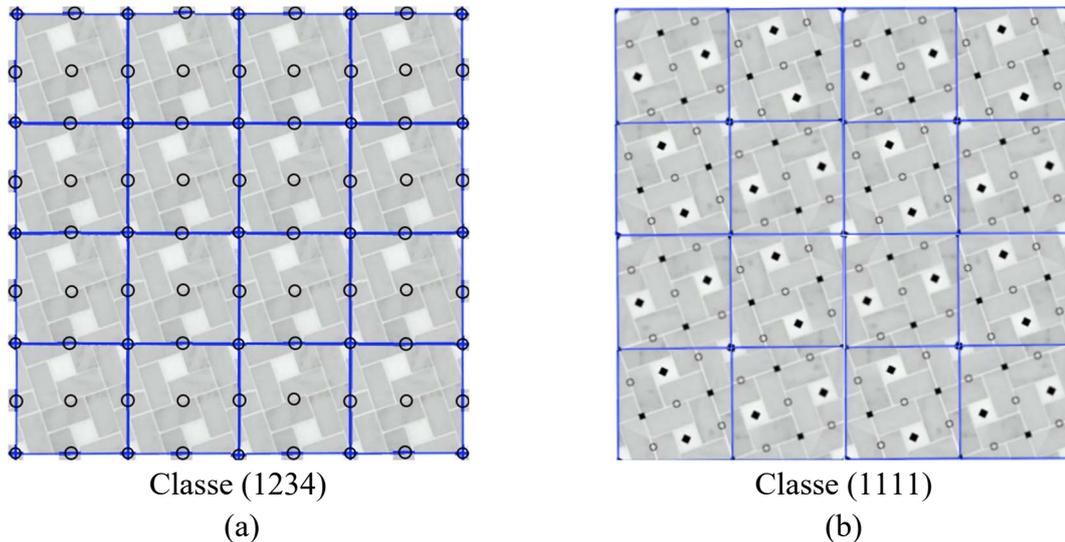


Figura 2.24: Painéis formados por um azulejo da Segunda Família Principal.

2.6.3 Terceira Família Principal

Nessa família temos p e q inteiros, com paridade distinta e os pontos médios das arestas sobre centros de rotação, conforme ilustrado pela Figura 2.25.

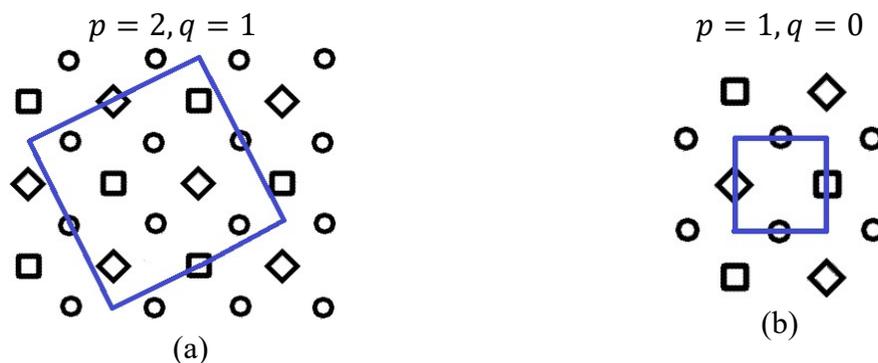


Figura 2.25: Azulejos da Terceira Família Principal.

Os azulejos dessa família somente formarão painéis com centro de rotação de ordem 4 não triviais caso os azulejos adjacentes estejam rotacionados por um ângulo de 180° em relação ao outro, ou seja, os painéis precisam ter classe de equivalência (1432).

A Figura 2.26 apresenta dois painéis formados por um azulejo como o da Figura 2.25 (a). Um desses painéis tem classe de equivalência (1111) e apresenta apenas centros de ordem 4 triviais. O outro painel apresenta classe de equivalência (1432) e nele todos os centros de rotação de ordem 4 do azulejo são também centros de rotação de ordem 4 do painel.

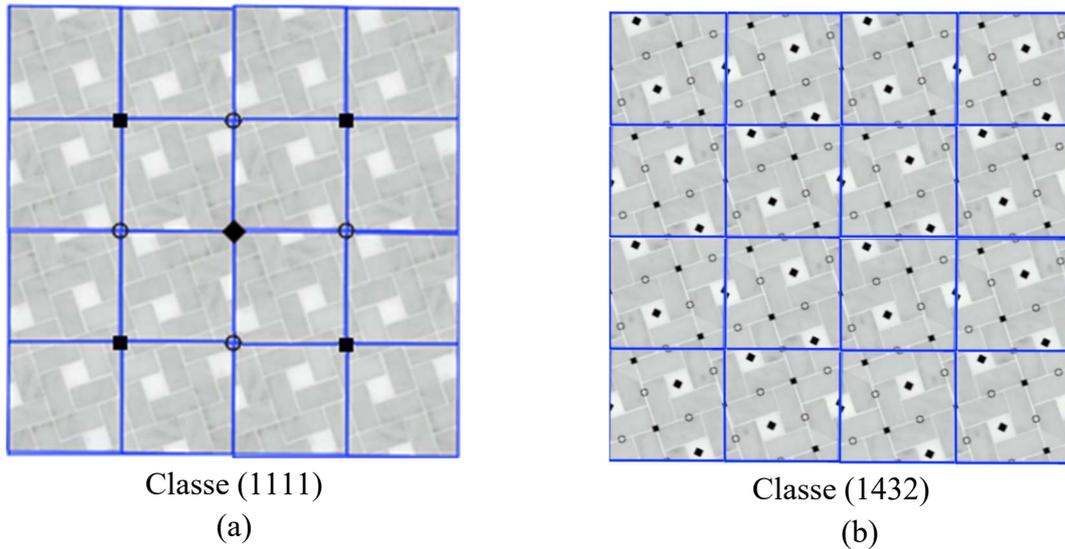


Figura 2.26: Painéis formados por um azulejo da Terceira Família Principal.

2.6.4 Quarta Família Principal

A quarta família de azulejos é obtida escolhendo $p = \frac{1}{2} + p'$ e $q = \frac{1}{2} + q'$, com p' e q' inteiros. Nessa família, os vértices do azulejo estão sobre centros de rotação, como ilustrado pela Figura 2.27.



Figura 2.27: Azulejos da Quarta Família Principal.

Para formarmos painéis com centros de rotação não triviais, os azulejos precisam ter classe de equivalência (1111). Destacamos que o azulejo obtido pela escolha $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$ somente possui centros de rotação triviais. A Figura 2.28 traz dois exemplos de painéis

formados por azulejos do tipo $p = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{2}$. Um dos painéis têm classe de equivalência (1234) e não possui centros de rotação de ordem 4. O outro painel possui classe de equivalência (1111) e nele os centros de rotação de ordem 4 do azulejo são também centros de rotação de ordem 4 do painel.

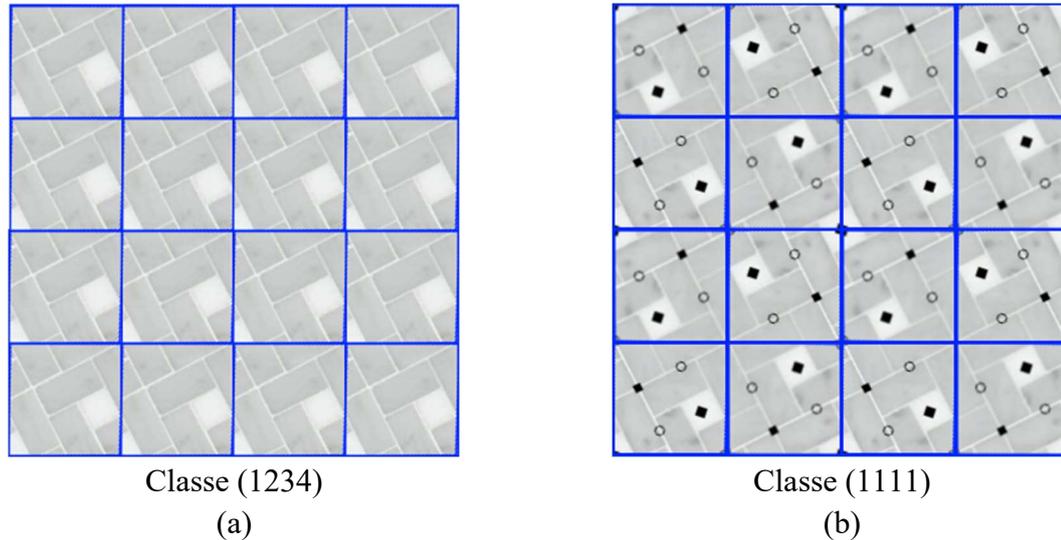


Figura 2.28: Painéis formados por um azulejo da Quarta Família Principal.

Há 3 exceções para as famílias principais. São azulejos que possuem exatamente um par de centros de ordem 4 que ficam localizados nos pontos médios de suas arestas. Esses azulejos serão denominados **azulejos articulados**.

2.6.5 Primeira Família De Azulejos Articulados.

Nessa família, os dois centros de rotação de ordem 4 estão localizados em duas arestas que possuem um vértice em comum. Esses azulejos podem ou não ter eixos de reflexão e não são obtidos a partir da regra utilizada para as famílias principais. Na Figura 2.29 temos o esquema dos azulejos dessa família.



Figura 2.29: Primeira Família De Azulejos Articulados. Fonte: Rezende, 2012, p. 9.

Na Figura 2.30 temos um exemplo de azulejo com essas propriedades e o painel de classe (1322) com centros de ordem 4 gerados por ele. O azulejo em questão foi criado pelo artista plástico português Eduardo Nery em 1966 e serviu como inspiração para a análise e classificação dos azulejos feita por Rezende.

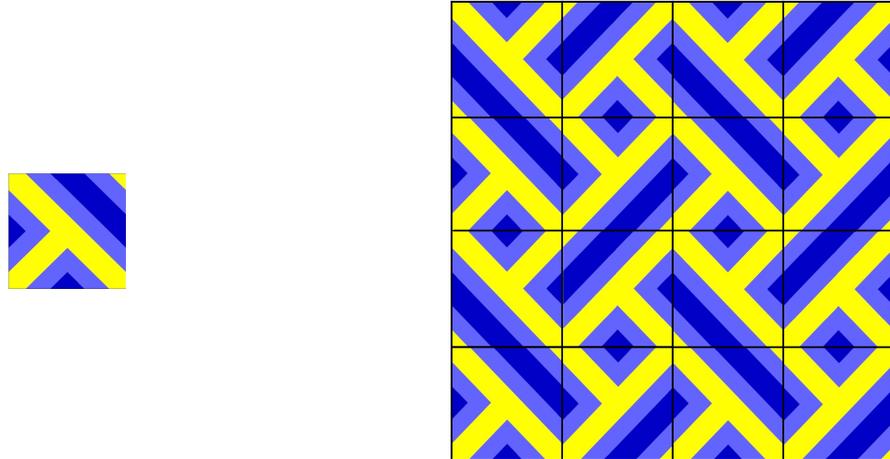


Figura 2.30: *Exemplo da Primeira Família De Azulejos Articulado*s. Fonte: Blog Polyedros¹⁹.

2.6.6 Segunda Família De Azulejos Articulado

Os azulejos dessa família possuem seus dois centros de ordem 4 localizados em arestas opostas. Além disso, considerando-se que o azulejo possui lado de medida unitária, a estampa do azulejo precisa ser invariante por translações nas direções $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Em outras palavras, dividindo-se o azulejo nos quatro quadrantes determinados por suas medianas, é preciso que o 1º quadrante seja congruente ao 3º quadrante e que o 2º quadrante seja congruente ao 4º quadrante. Os azulejos podem ou não ter eixos de simetria. Apresentamos na Figura 2.31 um esquema dos azulejos dessa família.

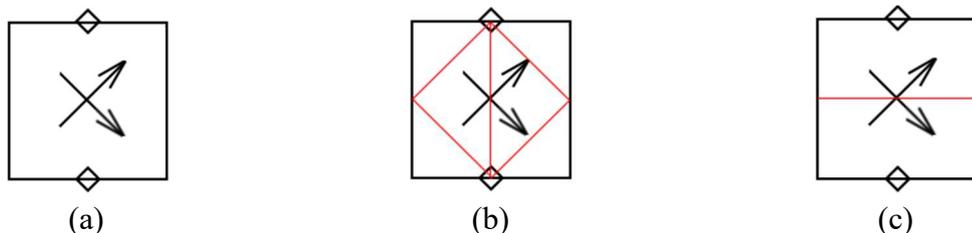


Figura 2.31: *Segunda Família de Azulejos Articulado*s. Fonte: Rezende, 2012, p. 10.

¹⁹ <http://polyedros.blogspot.com.br/2013/03/o-azulejo-de-1966-de-eduardo-nery-e-o.html>; Dezembro 2017

Azulejos articulados são bastante raros de serem encontrados em nosso cotidiano. O azulejo da Figura 2.32 é do tipo apresentado na Figura 2.31 (c). Ele foi criado pelo autor para ilustrar essa dissertação. O painel apresentado abaixo possui classe de equivalência (1432).

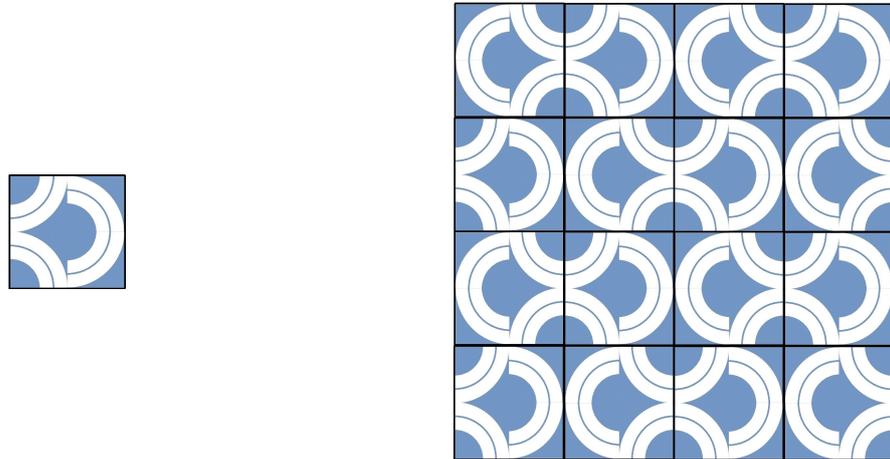


Figura 2.32: *Exemplo da Segunda Família de Azulejos Articulados.*

2.6.7 Terceira Família De Azulejos Articulados

A terceira família de azulejos articulados também possui centros de ordem 4 em arestas opostas e 4 centros de ordem 2 em cada um de seus quadrantes. O azulejo pode ou não apresentar eixos de simetria. Como antes, apresentamos na Figura 2.33 esquemas representativos dos azulejos dessa família.

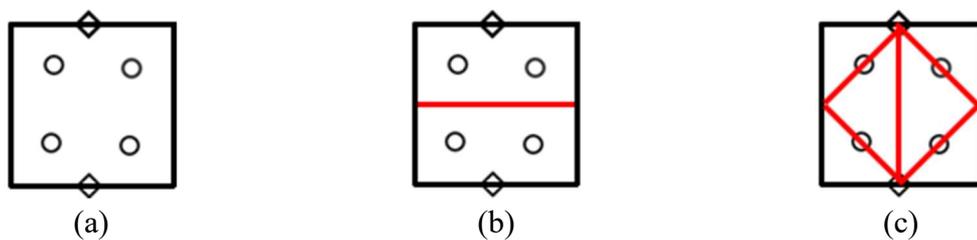


Figura 2.33: *Terceira Família de Azulejos Articulados.* Fonte: Rezende, 2012, p. 10.

Assim como na seção anterior, apresentamos na Figura 2.34 um azulejo original para ilustrar a terceira família de azulejos articulados. O azulejo em questão é do tipo apresentado na Figura 2.33 (b) e o painel gerado por ele tem classe de equivalência (1432).

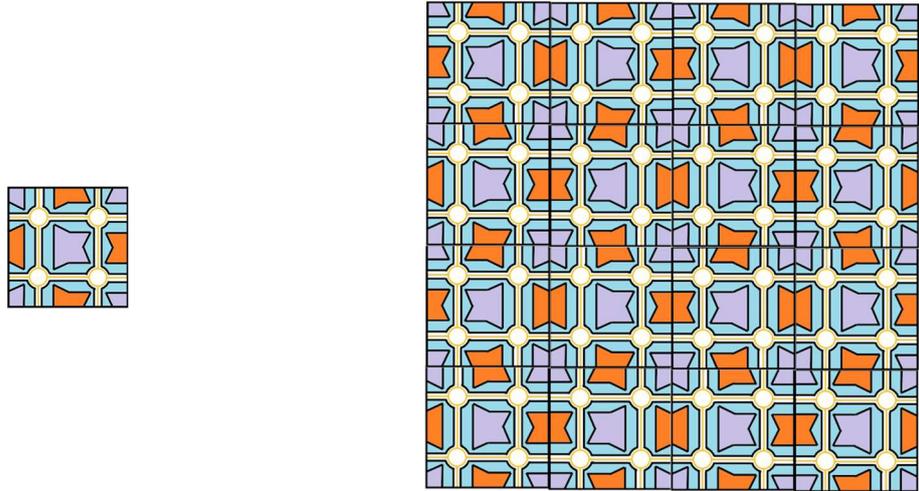


Figura 2.34: *Exemplo da Terceira Família de Azulejos Articulados.*

Na próxima seção explicaremos o motivo pelo qual os azulejos não pertencentes às famílias tradicionais são denominados azulejos articulados.

2.7 O DUAL DE UM AZULEJO ARTICULADO

Dado um azulejo articulado, podemos dividi-lo ao longo de uma mediana, horizontal ou vertical, e invertermos as linhas ou colunas assim formadas para obtermos um novo azulejo. A Figura 2.35 ilustra esse processo.

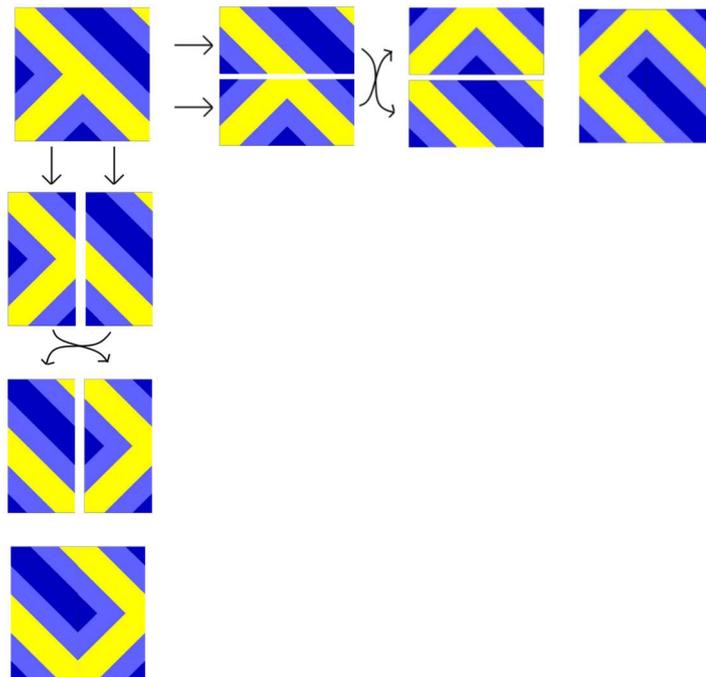


Figura 2.35: *A obtenção de um novo azulejo a partir de um azulejo articulado.*

O novo azulejo obtido por meio desse processo será o mesmo, independentemente da mediana utilizada para dividir o azulejo. Por esse motivo, os azulejos das famílias não tradicionais são chamados articulados. Esse novo azulejo, denominado **dual** do azulejo anterior, também é um azulejo articulado da mesma família do azulejo original, conforme ilustra a Figura 2.36.



Figura 2.36: *Elementos de simetria de um azulejo articulado e de seu dual.*

A Figura 2.37 apresenta dois painéis congruentes gerados pelos azulejos da Figura 2.36.

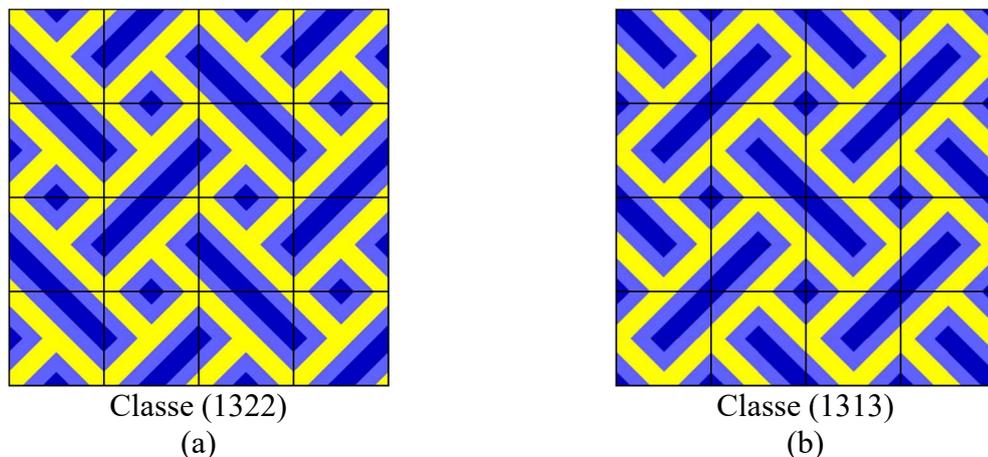


Figura 2.37: *Um mesmo painel gerado por um azulejo articulado e seu dual.*

No próximo capítulo apresentamos algumas propostas de atividades a serem realizadas por alunos da educação básica. As atividades têm nível de dificuldade crescente e, para que possam ser resolvidas, é necessário a utilização dos principais conceitos apresentados ao longo do Capítulo 2.

Capítulo 3 – Atividades para o ensino básico

Nesta seção apresentaremos quatro propostas de atividades a serem realizadas com alunos em níveis distintos da educação básica. As atividades possuem nível de dificuldade progressivo e podem ser aplicadas sequencialmente ou de forma isolada e podem ser resolvidas em grupo ou de forma individual.

Cada atividade tem a intenção de trabalhar conceitos e habilidades relativos ao estudo das propriedades dos azulejos quadrados e sua classificação em alguma das sete famílias existentes. Todas as atividades acompanham uma cartela com um ou mais tipos de azulejos cujo uso será necessário para a resolução de alguma questão da lista da atividade correspondente. Ao final do capítulo apresentamos as respostas dos exercícios propostos.

A seguir faremos a descrição detalhada das atividades. Por uma questão estética, as imagens utilizadas nas atividades serão referenciadas junto à descrição das atividades e não na lista de exercícios em si.

Atividade 1

A atividade 1 foi elaborada tendo-se como público-alvo alunos com o conhecimento do que sejam eixos de simetria por reflexão. O livro didático escrito por SILVEIRA, E. (2008), apresenta o estudo de eixos de simetria por reflexão no 6º ano do ensino fundamental, por isso a atividade foi elaborada tendo-se em consideração alunos nos anos iniciais do ensino fundamental II.

Para se adequar a esse público, a atividade apresenta figuras ilustrando a situação problema além de ter sido escrita utilizando-se uma linguagem adaptada à faixa etária. Uma outra adaptação utilizada foi a escrita com fonte maior que o restante da dissertação.

Entre as competências trabalhadas pela atividade 1 podemos citar:

- Reconhecer de que um azulejo pode formar painéis distintos.

- Reconhecer que painéis formados por um mesmo azulejo podem apresentar propriedades geométricas distintas como a presença ou não de eixos de simetria por reflexão.
- Identificar eixos de simetria por reflexão em um painel.
- Compreender que uma mesma figura pode apresentar mais de um eixo de simetria em direções distintas.
- Organizar um conjunto de azulejos de modo a copiar um painel apresentado.
- Organizar um conjunto de azulejos de modo a produzir um painel distinto dos já apresentados.
- Verificar que um mesmo azulejo pode produzir uma grande quantidade de painéis distintos.

Com relação às figuras utilizadas nessa atividade, suas referências são:

Figura 3.1: *Menina com azulejo*: adaptada de [clipartlogo.com](https://pt.clipartlogo.com)²⁰.

Figura 3.2: *Cozinha com azulejos*: adaptada de [pngtree.com](https://pt.pngtree.com)²¹.

Figura 3.3: *Cartela de azulejos para a atividade 1*. Elaborado pelo autor.

²⁰ https://pt.clipartlogo.com/image/girl-carrier-board-22_435061.html; Dezembro 2017.

²¹ https://pt.pngtree.com/freepng/rough-kitchen_1226853.html; Dezembro 2017.

ATIVIDADE 1

- 1) Carla comprou uma caixa de azulejos quadrados para colocar na parede de sua cozinha. Ela tem várias opções de painéis para formar com esse azulejo.



A figura abaixo mostra as três opções que Carla mais gostou.



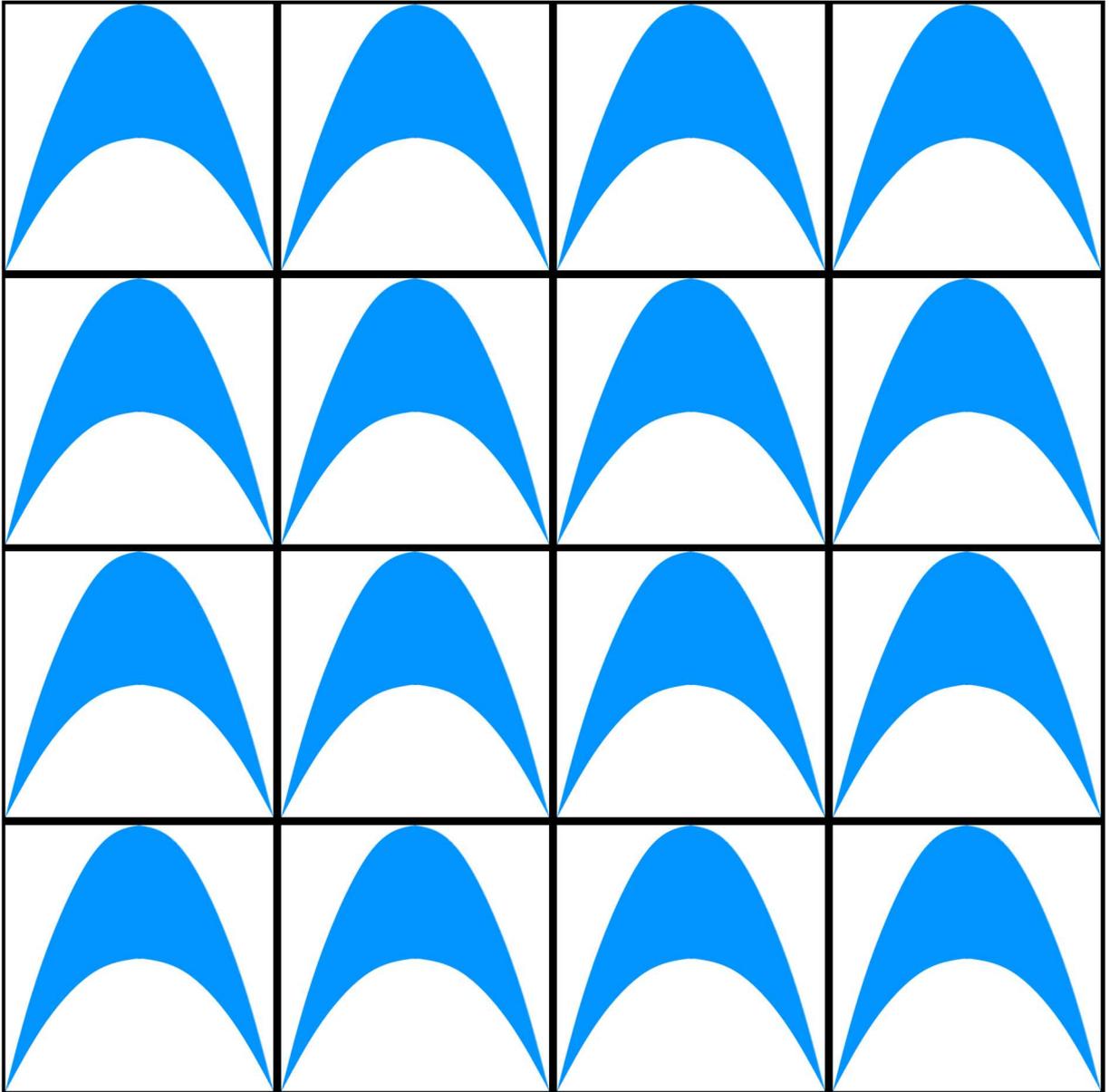
Opção 1

Opção 2

Opção 3

- a) Carla escolheu a opção cujo desenho apresenta eixos de simetria por reflexão. Qual opção Carla escolheu?
-
- b) Trace sobre o desenho escolhido por Carla um eixo de simetria horizontal e um eixo de simetria vertical.
- c) Utilizando a cartela de azulejos dessa atividade, monte painéis iguais às três opções de desenhos apresentadas na figura.
- d) Você consegue elaborar um painel com um desenho diferente das três opções acima? Compare seu painel com os painéis feitos pelos seus colegas.

CARTELA DE AZULEJOS PARA A ATIVIDADE 1



Atividade 2

A atividade 2 exige que o aluno consiga perceber elementos de simetria mais complexos como centros de rotação de ordem 2 e 4, diferenciando os dois gêneros distintos de centros de ordem 4 do painel. Esses temas não pertencem ao currículo do ensino básico, mas acreditamos que a atividade seja adequada para alunos no final do ensino fundamental ou no ensino médio.

Para que possa realizar essa atividade o aluno precisa conhecer os conceitos de simetrias próprias e herdadas de um azulejo. Também é solicitado que o aluno elabore um painel de uma classe de equivalência específica a partir de um azulejo dado.

Entre as competências trabalhadas por essa atividade citamos:

- Identificar as simetrias próprias de um azulejo.
- Construir o painel de uma classe de equivalência específica a partir de um azulejo dado.
- Identificar todos os elementos de simetria presentes em um painel.
- Identificar os elementos de simetria de um azulejo herdados de um painel específico.
- Diferenciar centros de ordem 4 de gêneros distintos.
- Reconhecer que os elementos de simetria presentes em um azulejo nem sempre se manifestam nos diferentes painéis gerados por esse azulejo.

Todas as figuras utilizadas nessa atividade são de autoria própria.

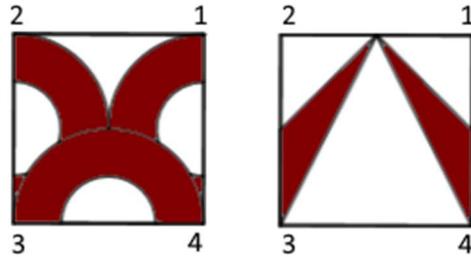
Figura 3.4: *Azulejos para o exercício 1.*

Figura 3.5: *Painéis para o exercício 2.*

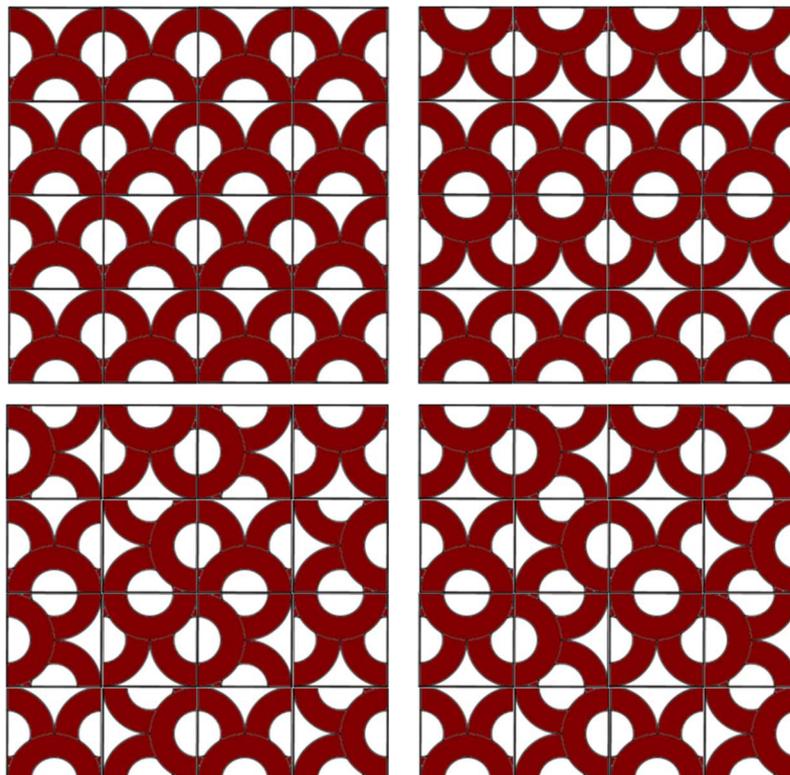
Figura 3.6: *Cartela de azulejos para a atividade 2.*

ATIVIDADE 2

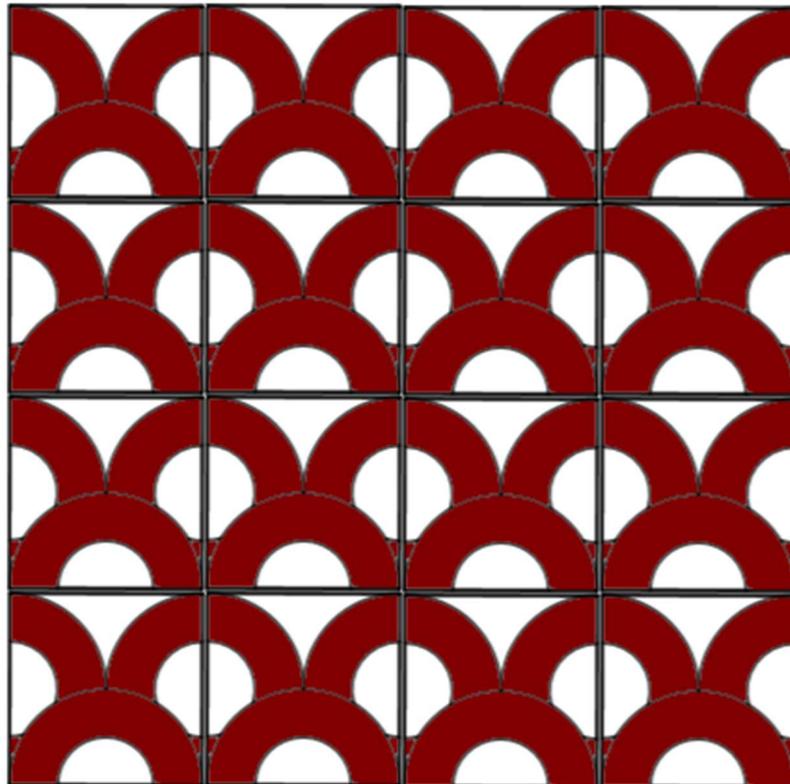
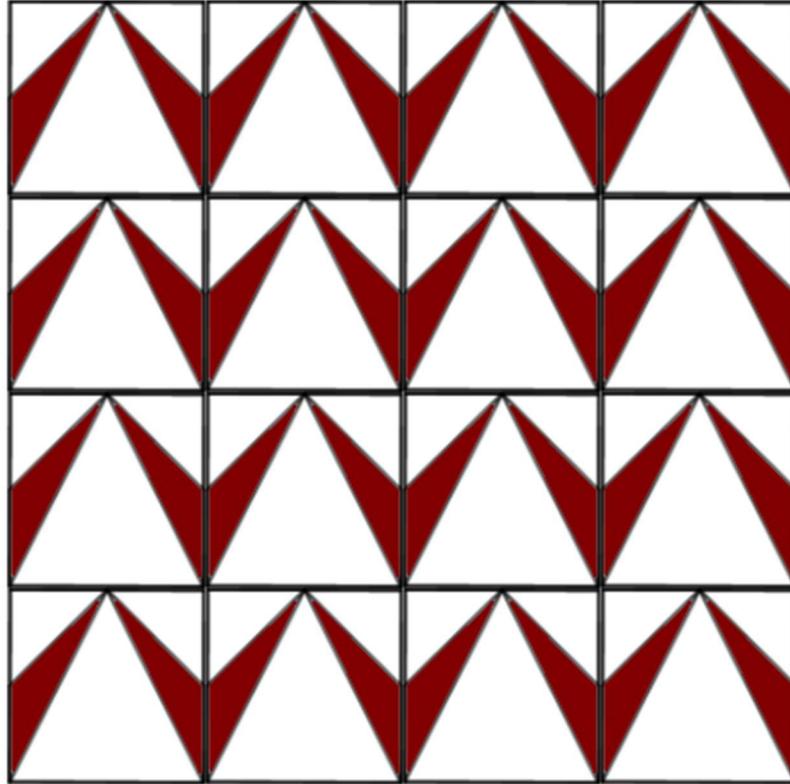
- 1) A figura ao lado apresenta dois azulejos distintos com seus vértices numerados.



- a) Desenhe sobre os azulejos seus elementos de simetria própria, ou seja, os eixos de reflexão, centros de ordem 2 e centros de ordem 4 não triviais, caso existam.
- b) Utilizando a cartela de azulejos desta atividade, monte o painel de classe (1432) para cada um desses azulejos.
- c) Analisando os painéis montados no item (b) é possível ver que um deles possui elementos de simetria que não eram perceptíveis analisando uma única peça do azulejo. Trace sobre o azulejo correspondente os novos elementos de simetria encontrados.
- 2) Considerando os painéis a seguir, faça o que se pede.
- a) Trace sobre cada um dos painéis os eixos de simetria por reflexão existentes.
- b) Utilizando o símbolo \bigcirc , marque todos os centros de ordem 2.
- c) Marque todos os centros de ordem 4 existentes. Utilize os símbolos \square e \diamond para indicar centros de ordem 4 de gêneros diferentes.



CARTELA DE AZULEJOS PARA A ATIVIDADE 2



Atividade 3

A atividade 3 também se destina a alunos no final do ensino fundamental ou no ensino médio. Essa atividade tem como foco a classificação dos painéis de azulejos de acordo com sua classe de equivalência. Na segunda questão é proposto que o aluno utilize seu celular para fotografar os painéis formados e que busque identificar quando há equivalência entre painéis distintos.

Dentre as competências trabalhadas por essa atividade, citamos:

- Identificar o módulo 2×2 utilizado para a composição de um painel.
- Identificar o tipo de deslocamento aplicado ao módulo 2×2 para a composição do painel.
- Construir painéis a partir de sua classe de equivalência, incluindo painéis com deslocamentos oblíquos do módulo 2×2 .
- Aplicar rotações e deslocamentos aos painéis formados de modo a analisar se pertencem a uma mesma classe de congruência.

A figura presente na atividade 3 é de autoria própria, mas a cartela de azulejos dessa atividade é composta pelo azulejo de 1966 de Eduardo Nery.

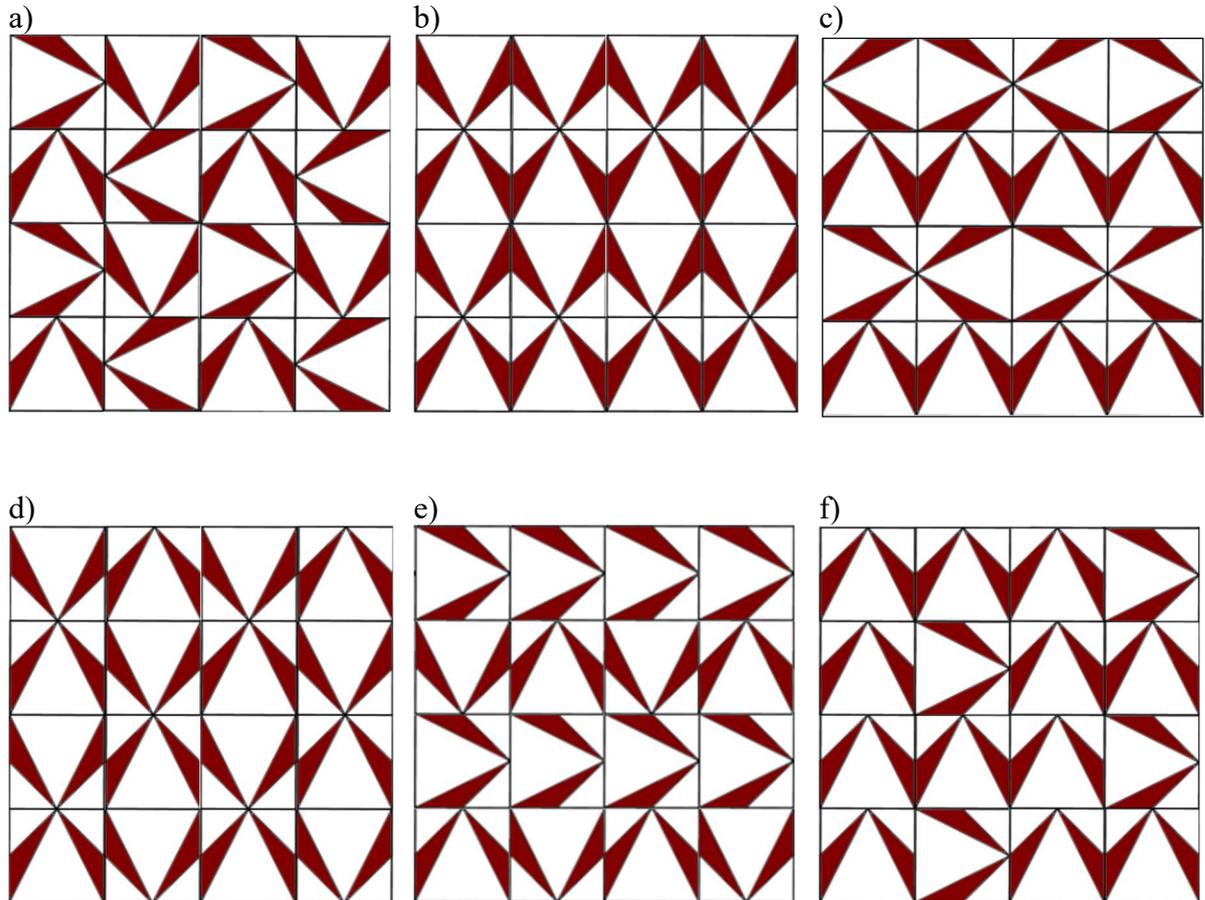
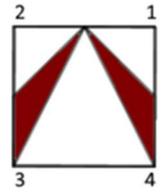
Figura 3.7: *Painéis para o exercício 1.*

Figura 3.8: *Cartela de azulejos para a atividade 3.* Fonte: Adaptada do Blog Polyedros²².

²² <http://polyedros.blogspot.com.br/2012/05/historia-de-um-azulejo-de-eduardo-nery.html>; Dezembro 2017.

ATIVIDADE 3

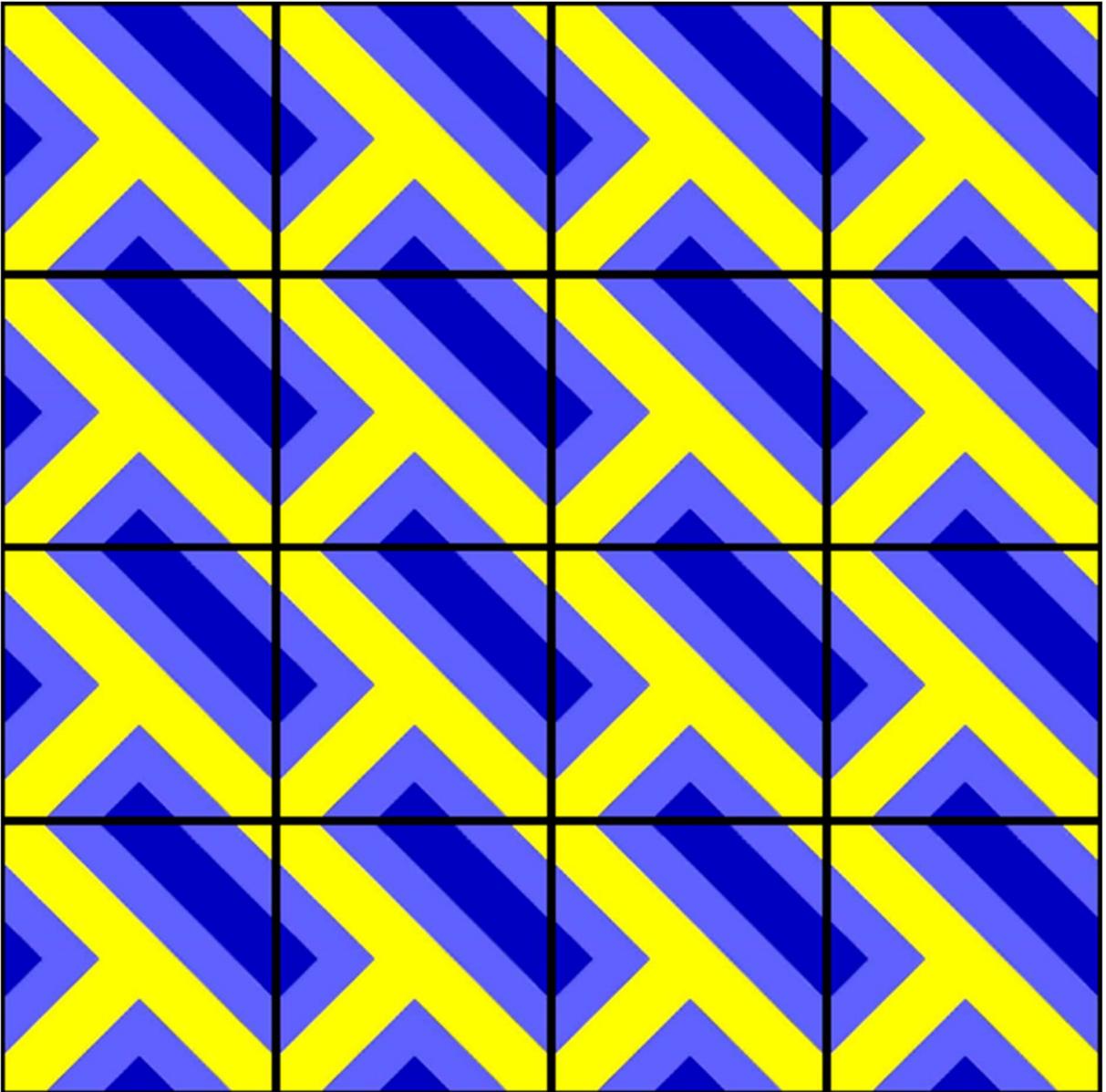
- 1) Determine a classe de equivalência de cada um dos painéis a seguir considerando o azulejo com a numeração indicada ao lado.



- 2) Utilizando a cartela de azulejos desta atividade, monte os painéis a seguir. Utilizando um celular, fotografe cada um dos painéis montados e tente identificar os pares de painéis equivalentes. Lembre-se que dois painéis são considerados equivalentes quando se tornam iguais ao aplicarmos rotações e translações a um deles.

- a) 1112
- b) 1124
- c) 1141
- d) 1242
- e) 1424
- f) 1241'

CARTELA DE AZULEJOS PARA A ATIVIDADE 3



Atividade 4

A atividade 4 pede que os alunos construam, sobre uma estampa com centros de ordem 4, azulejos das 4 famílias principais dados parâmetros p e q . A atividade também pede que os alunos construam painéis específicos com alguns azulejos dados e , com base na análise dos painéis gerados, obtenham a classificação dos azulejos, bem como os parâmetros p e q utilizados para formar os azulejos em questão. Por último é solicitado que o aluno construa um azulejo articulado de qualquer família.

Para as duas primeiras questões dessa lista é necessário um conhecimento básico sobre coordenadas de vetores e composição de um vetor como soma de vetores ortogonais. Usualmente, as operações com vetores são abordadas no terceiro ano do ensino médio como parte dos estudos de álgebra linear. Dentro da disciplina física, entretanto, a soma de vetores é abordada geralmente no primeiro ano do ensino médio, como parte dos estudos sobre cinemática. Dessa forma, acreditamos que essa atividade possa ser aplicada a alunos do ensino médio, sendo aconselhável um trabalho prévio abordando noções básicas sobre vetores.

Algumas das competências trabalhadas por essa disciplina são:

- Conhecer os critérios de classificação das famílias de azulejos.
- Marcar sobre uma malha com centros de ordem 4, azulejos das quatro famílias principais com base nos parâmetros p e q fornecidos.
- Montar um painel de uma classe de equivalência específica utilizando um azulejo dado.
- Reconhecer os elementos de simetria em um painel, incluindo os centros de ordem 4 de gêneros distintos.
- Classificar um azulejo dado a partir da análise de um painel gerado por esse azulejo.
- Determinar os parâmetros p e q utilizados para a formação de um azulejo dado, quando o azulejo pertencer a uma família principal.

- Elaborar azulejos articulados baseando-se nas propriedades geométricas das famílias de azulejos articulados.

Com relação às figuras utilizadas na atividade 4, suas referências são:

Figura 3.9: *Malha com centros de ordem 4*. Fonte: Adaptado de panoah.com.br²³

Figura 3.10: *Azulejos para o exercício 2*. Fonte: (a) adaptado de pinterest.co.uk²⁴; (b) idem ao azulejo (a); (c) Adaptado de freepik.es²⁵. (d) Adaptado de cccddd.com²⁶.

Figura 3.11: *Cartela de azulejos para a atividade 4*.

²³ http://panoah.com.br/site/tecidos-e-estampas/?id=518&id_cat1=&id_cat2=24&id_cat3=; Dezembro 2017.

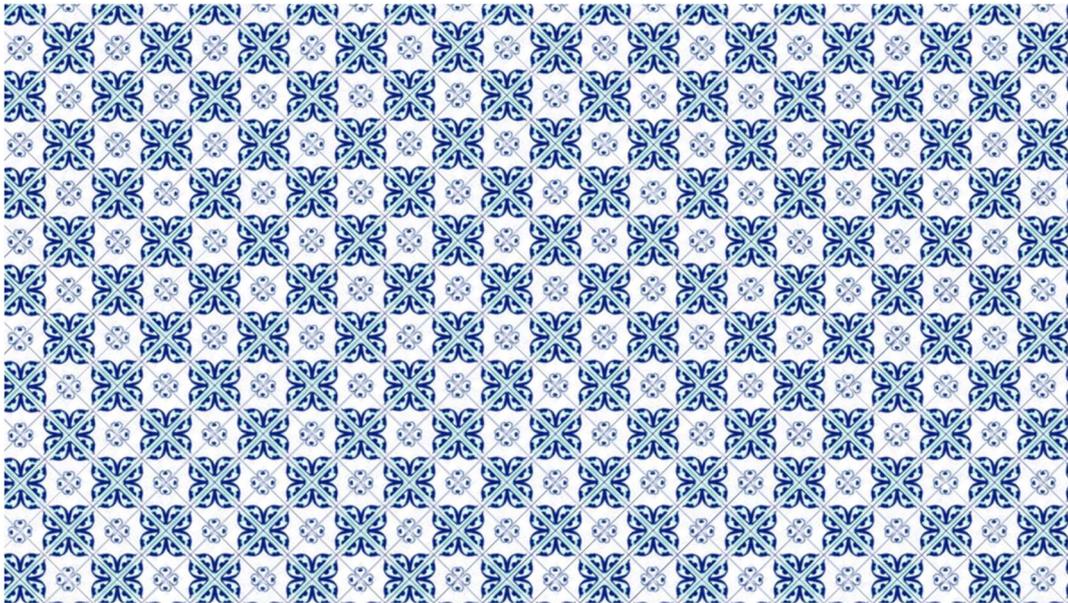
²⁴ <https://www.pinterest.co.uk/Kjerste/wallpaper-groups-p4/>; Dezembro 2017.

²⁵ https://www.freepik.es/vector-gratis/fondo-con-patron-azul-y-blanco_1167180.htm; Dezembro 2017.

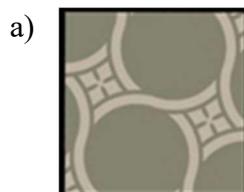
²⁶ <http://cccddd.com/free-vectors/abstract/resumo-padrao-geometrico-colorido-design-uniforme-classico.html>; Dezembro 2017

ATIVIDADE 4

- 1) A figura abaixo apresenta um painel com centros de rotação de ordem 2 e centros de rotação de ordem 4 de gêneros distintos. Desenhe sobre esse painel os azulejos descritos a seguir.
 - a) Azulejo da primeira família principal com parâmetros $p = 1$ e $q = 3$.
 - b) Azulejo da segunda família principal com parâmetros $p = 0$ e $q = 5$.
 - c) Azulejo da terceira família principal com $p = 4$ e $q = 1$.
 - d) Azulejo da quarta família principal com $p = \frac{5}{2}$ e $q = \frac{3}{2}$.



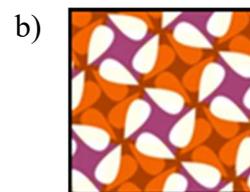
- 2) Utilizando a cartela de azulejos desta atividade, monte os painéis indicados para cada um dos azulejos apresentados abaixo. Analisando os painéis formados, classifique os azulejos quanto à família principal à qual pertencem e identifique os parâmetros p e q utilizados para a formação de cada azulejo.



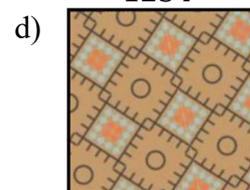
1111



1111



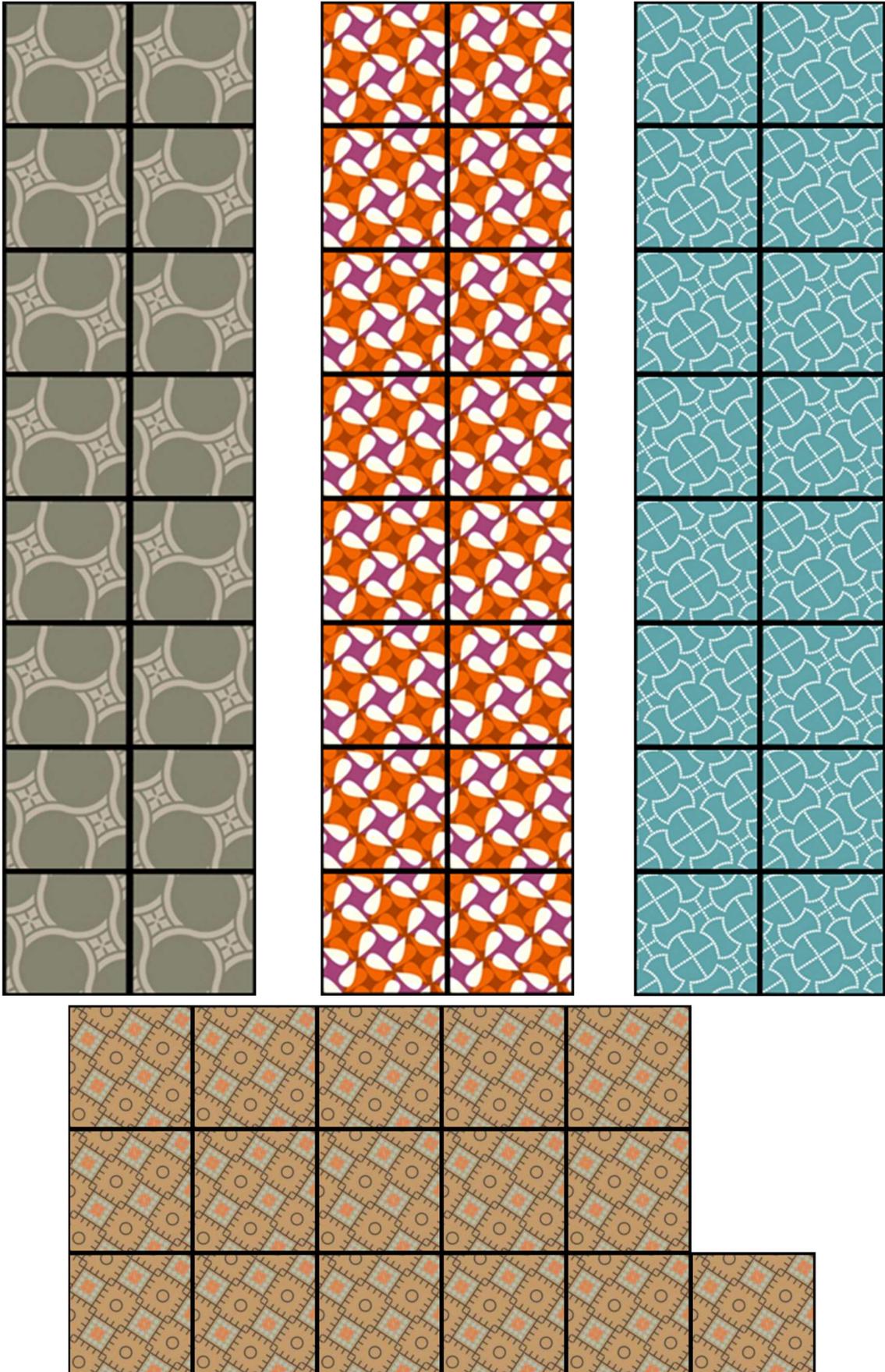
1234''



1432

- 3) Crie um azulejo pertencente a alguma das 3 famílias de azulejos articulados.

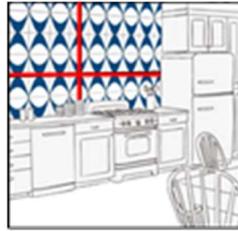
CARTELA DE AZULEJOS DA ATIVIDADE 4



RESPOSTAS DAS ATIVIDADES

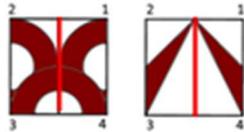
Atividade 1

- 1) a) Opção 2
- b) Uma resposta possível é
- c) ---
- d) Resposta pessoal.

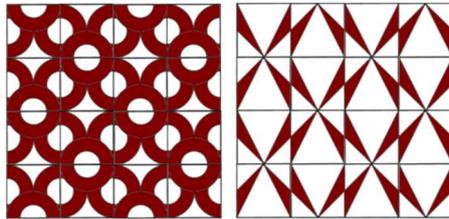


Atividade 2

- 1) a)



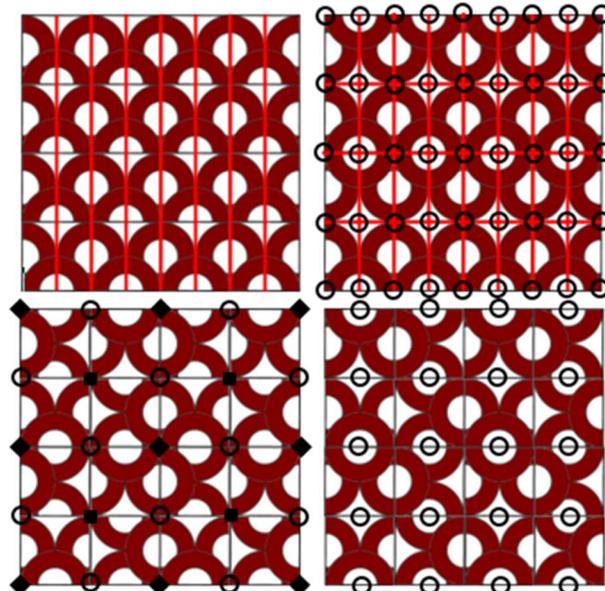
- b)



- c)



- 2)



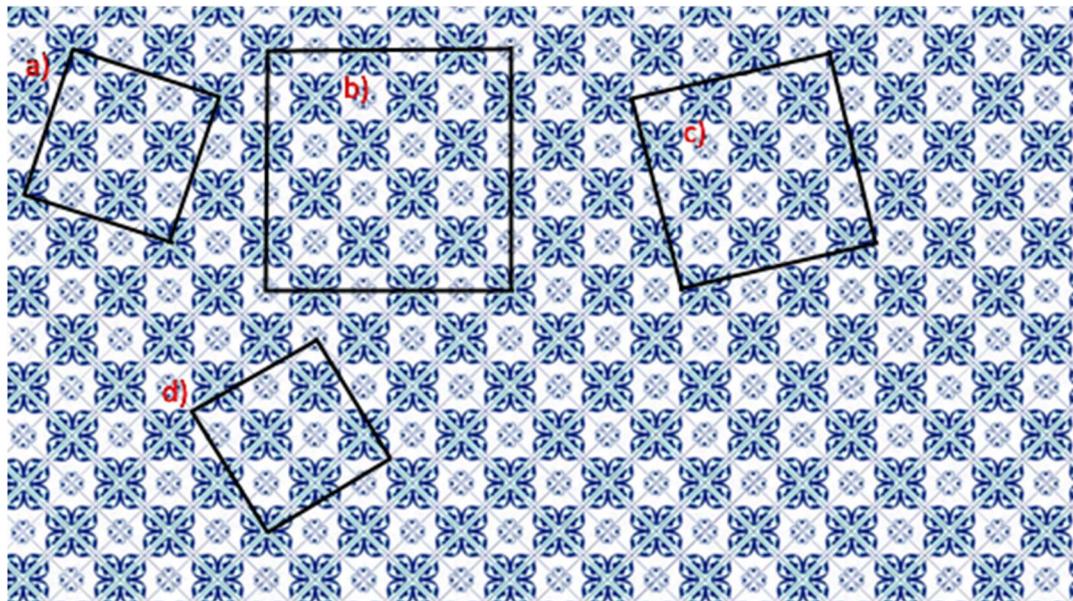
Atividade 3

- 1) a) 1111
- b) 1212
- c) 1221'
- d) 1432
- e) 1441'
- f) 1334''

2) Há três pares de painéis semelhantes. Eles são 1112 e 1242, 1141 e 1424, 1124 e 1241'

Atividade 4

1) Respostas possíveis:



- 2) a) Segunda Família Principal. $p = 1, q = 2$.
 - b) Primeira Família Principal. $p = 3, q = 1$.
 - c) Quarta Família Principal. $p = \frac{5}{2}, q = \frac{1}{2}$.
 - d) Terceira Família Principal. $p = 3, q = 2$.
- 3) Resposta pessoal.

Capítulo 4 – Considerações finais

Nesta dissertação pudemos fazer um estudo aprofundado sobre azulejos quadrados utilizados para a produção de painéis com estampas geométricas repetitivas. Iniciamos nosso estudo fazendo um apanhado histórico sobre as origens da produção da cerâmica pela humanidade e sobre como o uso desse material foi sendo difundido pelas diferentes regiões do globo, recebendo contribuições tecnológicas de diversas culturas até se transformar no azulejo cerâmico estampado utilizado por praticamente todos os povos da atualidade.

No Capítulo 1 fizemos uma revisão de alguns conceitos importantes da geometria analítica. Definimos matrizes e vetores e mostramos como são feitas as operações com esses objetos. Apresentamos também a definição do módulo de um vetor, um conceito essencial para que pudéssemos estabelecer uma medida de distância entre pontos no plano. De posse dessa medida de distância, apresentamos a definição de isometrias, isto é, funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 que preservam a distância entre pontos. Como exemplos de isometrias, destacamos as translações, rotações e reflexões, que foram apresentadas na forma de funções que executam uma ação sobre os vetores do plano. Finalmente, apresentamos uma definição para eixos de simetria por reflexão e de centros de simetria por rotação. Cabe ressaltar que, apesar de os conceitos de simetria por reflexão e por rotação serem apresentados de forma intuitiva desde muito cedo para a maioria dos alunos, geralmente a partir do 6º ano do ensino fundamental, não é habitual nos depararmos com uma definição formal dessas simetrias em outros momentos de nossa formação escolar.

Iniciamos o Capítulo 2 abordando dois temas relacionados ao tema principal dessa dissertação, mas sobre os quais não nos aprofundamos. O primeiro desses temas foi a pavimentação do plano, quando citamos os tipos de polígonos capazes de uma pavimentação 1-uniforme do plano e apresentamos o caso da pavimentação por pentágonos, cuja solução ainda não é conhecida. Em seguida tratamos das classificações dos padrões geométricos planos repetitivos apresentando o conceito da região fundamental de um padrão geométrico e os elementos de simetria utilizados para a classificação de uma estampa. Apresentamos também um fluxograma para a classificação das estampas. A seguir apresentamos uma definição formal para um azulejo e alguns de seus elementos. Definimos então as simetrias próprias dos azulejos e suas simetrias herdadas, ou sejam, aquelas que podem ser percebidas a partir da formação de painéis. Passamos à classificação dos painéis gerados por um módulo composto por 4 azulejos.

Mostramos que existem 192 painéis possíveis de serem gerados a partir do módulo 2×2 em questão e que alguns desses painéis são equivalentes. Citamos que os 192 painéis construtíveis a partir de módulos 2×2 podem ser agrupados em 56 classes de equivalência. Apresentamos então as 7 famílias de azulejos com exemplos de painéis gerados pelos azulejos de cada uma dessas famílias, incluindo dois azulejos originais apresentados para ilustrar a segunda e terceira famílias de azulejos articulados. Por fim, mencionamos como obter o dual de um azulejo articulado.

No capítulo 3 apresentamos uma sequência de atividades a serem trabalhadas com alunos de diferentes níveis da educação básica. Cada atividade foi elaborada com o intuito de trabalhar habilidades e conceitos específicos apresentados no Capítulo 2.

Acreditamos que esta dissertação procura cumprir os objetivos propostos pelo PROFMAT ao apresentar a revisão de um tema pouco difundido no meio acadêmico, colocando-o de forma acessível a professores da educação básica e apresentando atividades originais para alunos desse nível de ensino. Além disso, exploramos uma relação entre a linguagem matemática e as artes, especificamente as artes plásticas, indo ao encontro do que é prescrito pelos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Como possibilidade de desdobramento da pesquisa realizada nesta dissertação, consideramos o estudo das propriedades de azulejos com outras formas, isto é, triangulares ou hexagonais de forma a estabelecer um método de classificação para os azulejos com esses formatos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- A BRIEF HISTORY OF TILE. **Tilemaster Canada**, 2017. Disponível em <<http://www.tilemastercanada.com/about-tile-history.php>> Acesso em: 16 jan. 2017.
- AGUIAR, I. *Descoberta histórica de 'ladrilho' dá um chacoalhão no mundo da matemática*. **Brasilpost**, 2015. Disponível em <http://www.brasilpost.com.br/2015/09/03/ladrilho-pentagono-matematica_n_8079306.html>. Acesso em: 09 jan. 2018
- ANTHON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com aplicações*. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- AZULEJO. In: **WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre**. Wikimedia, 2017. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Azulejo>>. Acesso em: 09 jan. 2018.
- BARROSO, J. M. *Conexões com a matemática*, volume único. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2012.
- CASTRO, R. *Pavimentações no Plano Euclidiano*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, UFMG, Belo Horizonte, 2008.
- CERÂMICA. In: **WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre**. Wikimedia, 2017. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Cerâmica>>. Acesso em: 09 jan. 2018.
- EGYPTIAN POTERY. **Venice Clay Artists**, 2009. Disponível em: <<http://www.veniceclayartists.com/egyptian-pottery/>> Acesso em 09 jan. 2018.
- HISTORY OF CERAMIC TILES, **Materiality Domain**, 2015. Disponível em: <<https://materialitydomain.wordpress.com/2015/02/10/history-of-ceramics-tiles>> Acesso em: 09 jan. 2018.
- GRÜNBAUM, B.; SHEPHARD, G. C. *Tilings and Patterns*. New York: W. H. Freeman and Company, 1987.
- HOUAISS, A. *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro, Ed. Objetiva, 2001.
- LIMA, E. L. *Isometrias*. Coleção do professor de matemática, vol 12. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

PENTAGONAL TILING. In: **WIKIPEDIA: The Free Encyclopedia**. Wikimedia, 2018.

Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_tiling>. Acesso em: 09 jan. 2018.

REZENDE, J. *A Contribution for a Mathematical classification of square tiles*, 2012.

Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1206.3661v1>> Acesso em 09 jan. 2018.

REZENDE, J. *O Azulejo Articulado de Eduardo Nery*. 2013. Disponível em:

<<https://klein.sbm.org.br/sem-categoria/o-azulejo-articulado-de-eduardo-neri#more-22>>

Acesso em 09 jan. 2018.

REZENDE, J. *Simples Azulejos*. Disponível em:

<<https://www.youtube.com/watch?v=SYPgyLTFq10>>. Acesso em: 13 mar. 2018.

SALLY, J. D.; SALLY, P. J. *Geometry: A Guide For Teachers*. 1 ed. United States: American Mathematical Society, 2011.

SANTOS, M. R. dos; *Pavimentações do Plano: Um Estudo Com Professores de Matemática e Arte*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Campus Rio Claro, 2006.

SCHATTSCHNEIDER, D. *The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation*.

Amer. Math. Monthly 85, 439-450, 1978

SILVEIRA, E.; SILVEIRA, C. M. *Matemática: compreensão e prática*, 6º ano. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2008.

WALLPAPER GROUP. In: **WIKIPEDIA: The Free Encyclopedia**. Wikimedia, 2017.

Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group>. Acesso em: 09 jan. 2018.

Apêndice

No artigo que inspirou esta dissertação, Rezende escreve de maneira bastante concisa, deixando de explicar em detalhes algumas passagens de sua demonstração. O autor apresenta poucas ilustrações ou as apresenta distantes do texto ao qual se referem, o que acaba dificultando a interpretação do seu trabalho, especialmente para leitores que não tenham familiaridade com o tema.

O objetivo deste apêndice é apresentar a parte inicial da demonstração feita por Rezende, mais especificamente o conteúdo das páginas 10, 11 e 12, acrescentando a ela ilustrações e explicações mais detalhadas, de modo a torná-la mais acessível ao leitor. Entretanto, as explicações contidas neste apêndice não cobrem todo o assunto. Cabe ressaltar que boa parte das informações apresentadas aqui estão presentes no blog de Rezende na forma de estudos para a elaboração do artigo em questão ou então no filme *Simples Azulejos*²⁷, também produzido pelo autor.

A.1 – INTRODUÇÃO À DEMONSTRAÇÃO DE REZENDE

Considere um azulejo quadrado de lado unitário e um sistema de coordenadas com origem em seu vértice inferior esquerdo de modo que o azulejo ocupe a região $[0, 1] \times [0, 1]$ do plano e seja $P = (a, b)$ o seu centro de ordem 4, com $0 < a \leq 1/2$ e $0 < b \leq 1/2$ como ilustrado pela Figura A.1.

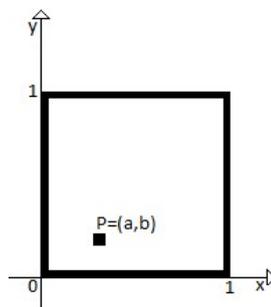


Figura A.1: *Sistema de coordenadas de um azulejo.*

Ao se colocar o azulejo em uma posição $[m, m + 1] \times [n, n + 1]$ do plano, com m e n inteiros, pode-se optar por qualquer uma de suas quatro rotações possíveis. Vamos nomear

²⁷ <https://www.youtube.com/watch?v=SYPgyLTFq10>; Março 2018.

cada uma dessas rotações por A, B, C e D como ilustrado pela Figura A.2, na qual os vértices do azulejo estão numerados de 1 a 4.

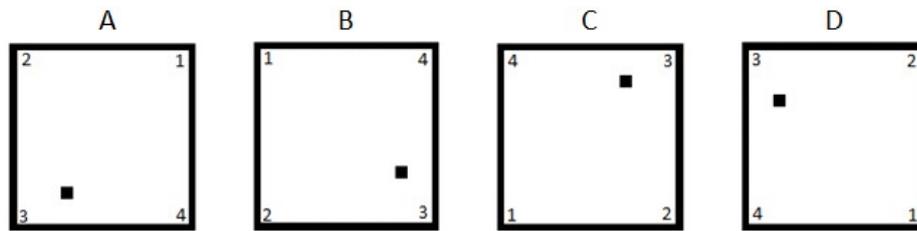


Figura A.2: As rotações A, B, C e D de um azulejo.

Consideremos agora um conjunto de 4 azulejos quadrados posicionados de modo a formar um módulo 2×2 . Iremos nos referir a cada um dos azulejos utilizando a numeração 1, 2, 3 e 4, de acordo com a Figura A.3.

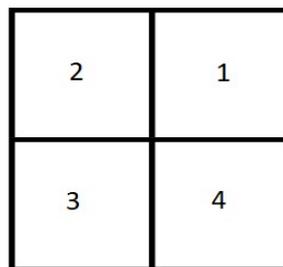


Figura A.3: Numeração dos azulejos em um módulo 2×2 .

Suponhamos, sem perda de generalidade, que o azulejo da posição 1 esteja com rotação A fixada. Ao rotacionarmos o azulejo 1 sobre seu centro de ordem 4, percebemos algumas interações com os azulejos vizinhos. Essas interações estão apresentadas na Figura A.4.

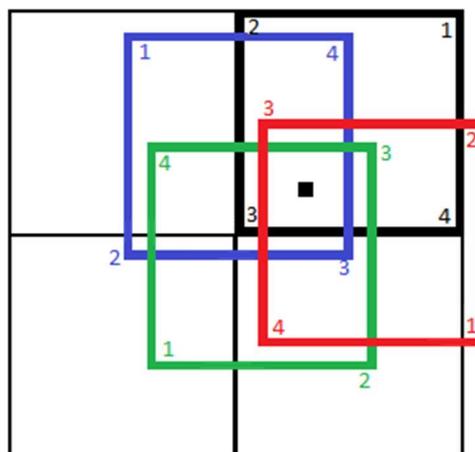


Figura A.4: Interações de um azulejo com seus vizinhos. Fonte: adaptada de Rezende, 2012, p. 11.

Para que o centro de rotação do azulejo 1 seja um centro de rotação do painel, é necessário que as estampas dos azulejos vizinhos atendam a certas exigências que dependem da rotação na qual cada azulejo foi posicionado. Vamos analisar quais são as exigências sobre o azulejo da posição 2 para cada uma de suas rotações, mas antes precisamos conhecer as coordenadas do vértice 1, azul, e do vértice 4, verde, sobre o azulejo 2. A Figura A.5 mostra detalhes das medidas do azulejo azul.

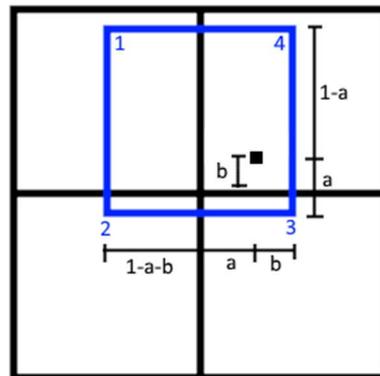


Figura A.5: Medidas do azulejo 1 após rotacionado por um ângulo de 90° .

A partir do apresentado na Figura A.5, podemos concluir que, considerando-se o sistema de coordenadas relativo ao azulejo 2, o vértice 1, azul, possui coordenadas $(a + b, 1 - a + b)$.

A Figura A.6 apresenta os detalhes das medidas do azulejo verde.

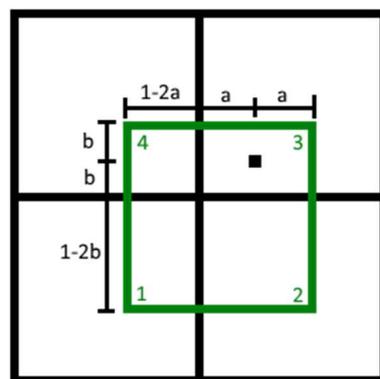


Figura A.6: Medidas do azulejo 1 após rotacionado por um ângulo de 180° .

A partir do apresentado na Figura A.6, podemos concluir que, considerando-se o sistema de coordenadas relativo ao azulejo 2, o vértice 4, verde, possui coordenadas $(2a, 2b)$.

Podemos então analisar quais são as exigências sobre a estampa do azulejo na posição 2 para que o centro de ordem 4 do azulejo 1 seja um centro de rotação de ordem 4 do

painel. Nossa análise será dividida em quatro casos. Se o azulejo da posição 2 for colocado com rotação A, temos o primeiro caso.

A.1.1 Caso 2A

O quadrante superior direito do azulejo 2, exibido com detalhes na Figura A.7, nos mostra que, dentro do azulejo deve haver um centro de rotação de ordem 4 que leva o vértice 1 de coordenadas $(1, 1)$ no vértice 1, azul, de coordenadas $(a + b, 1 - a + b)$. Procedendo como descrito na seção 1.6.2 descobrimos que tal centro de ordem 4 tem coordenadas $(\frac{1}{2} + a, \frac{1}{2} + b)$.

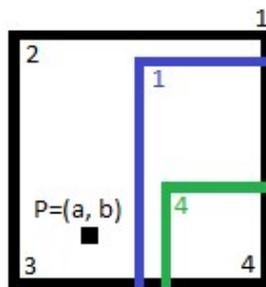


Figura A.7: Detalhe do azulejo na posição 2.

O quadrante inferior direito da Figura A.7 mostra que também é preciso haver um centro de rotação de ordem 2 que leva o vértice 4 de coordenadas $(1, 0)$ no vértice 4, verde, de coordenadas $(2a, 2b)$. Esse centro de ordem 2 tem coordenadas $(\frac{1}{2} + a, b)$.

Então, para que um azulejo com um centro de rotação de ordem 4 de coordenadas (a, b) ao qual foi aplicada a rotação A, tendo como vizinho à esquerda um azulejo também com rotação A, gere um painel com centros de rotação de ordem 4 não triviais é necessário que o azulejo também possua um centro de rotação de ordem 4 com coordenadas $(\frac{1}{2} + a, \frac{1}{2} + b)$ e um centro de rotação de ordem 2 com coordenadas $(\frac{1}{2} + a, b)$ conforme mostrado na Figura A.8.

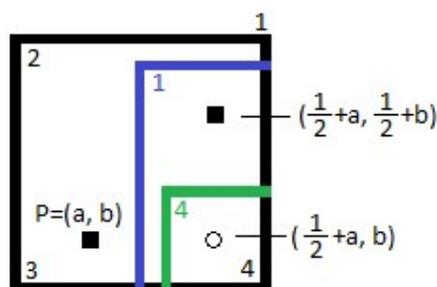


Figura A.8: Centros de rotação do Caso 2A. Fonte: Adaptada do blog Polyedros²⁸.

²⁸ <http://polyedros.blogspot.com.br/2012/10/a-contribution-for-mathematical.html>; Dezembro 2017.

A.1.2 Caso 2B

Caso o azulejo da posição 2 tenha sido posicionado com rotação B, temos a situação ilustrada pela Figura A.9 (a). De modo a facilitar nossa análise podemos rotacionar a figura de modo a colocá-la com rotação A, conforme representado pela Figura A.9 (b).

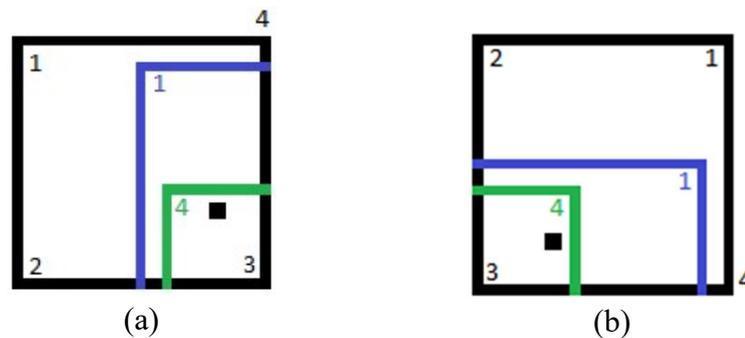


Figura A.9: *Caso 2B*.

Na Figura A.9 (b) podemos perceber que o vértice 1 de coordenadas $(1, 1)$ é transladado para o vértice 1, azul, de coordenadas $(1 - a + b, 1 - a - b)$. O vetor que executa essa translação é $\vec{v} = (-a + b, -a - b)$. Além disso, o vértice 4 de coordenadas $(1, 0)$ sofre uma rotação de 90° resultando no vértice 4, verde, de coordenadas $(2b, 1 - 2a)$. O centro de ordem 4 que executa tal rotação tem coordenadas $(a + b, -a + b)$.

Então, para que um azulejo com rotação A, tendo como vizinho à esquerda um azulejo com rotação B, gere um painel com centros de rotação de ordem 4 não triviais é necessário que o azulejo possua um centro de rotação de ordem 4 com coordenadas $(a + b, a - b)$ e uma translação de coordenadas $(-a + b, -a - b)$ conforme mostrado na Figura A.10.

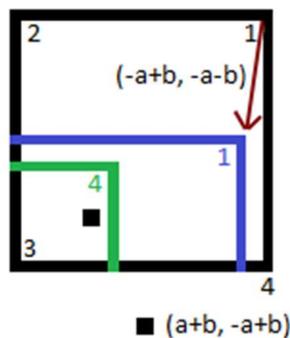


Figura A.10: *Centro de rotação e translação do Caso 2B*. Fonte: Adaptada do blog Polyedros²⁹.

²⁹ <http://polyedros.blogspot.com.br/2012/10/a-contribution-for-mathematical.html>; Dezembro 2017.

A.1.3 Caso 2C

Caso o azulejo da posição 2 apresente a rotação C, temos a situação apresentada na Figura A.11.

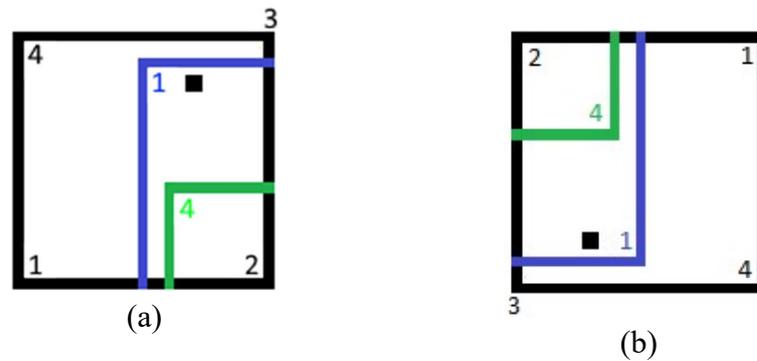


Figura A.11: *Caso 2C*.

O vértice 1 de coordenadas $(1, 1)$ é rotacionado de 90° em sentido horário até o vértice 1 azul de coordenadas $(1 - a - b, a - b)$. O centro de ordem 4 que executa essa ação tem coordenadas $(\frac{1}{2} - b, \frac{1}{2} + a)$. O vértice 4 de coordenadas $(1, 0)$ sofre uma translação que resulta no vértice 4 verde de coordenadas $(1 - 2a, 1 - 2b)$. O vetor que executa essa translação é $\vec{v} = (-2a, 1 - 2b)$.

A Figura A.12 apresenta um esquema do Caso 2C.

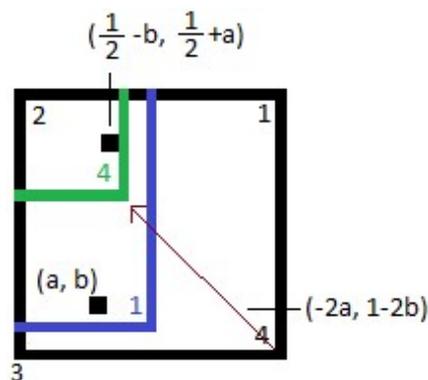


Figura A.12: *Centro de ordem 4 e translação do Caso 2C*. Fonte: Adaptada do blog Polyedros³⁰.

³⁰ <http://polyedros.blogspot.com.br/2012/10/a-contribution-for-mathematical.html>; Dezembro 2017.

A.1.4 Caso 2D

O último caso para o azulejo na posição 2 se dá quando ele apresenta a rotação D, conforme ilustrado pela Figura A.13.

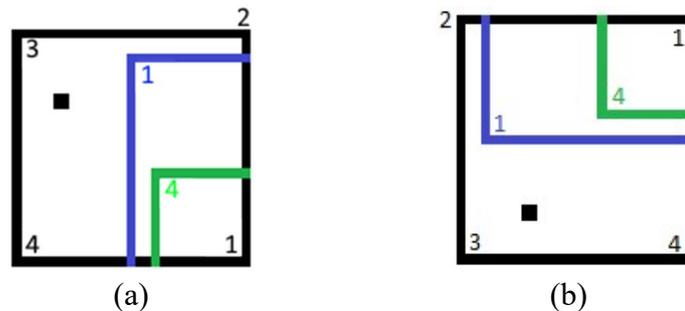


Figura A.13: *Caso 2D*.

Nesse caso, o vértice 1 de coordenadas $(1, 1)$ foi rotacionado em 180° resultando no vértice 1 azul de coordenadas $(a - b, a + b)$. O centro de rotação de ordem 2 que executa essa ação tem coordenadas $(\frac{1+a-b}{2}, \frac{1+a+b}{2})$. O vértice 4 de coordenadas $(1, 0)$ foi rotacionado 90° em sentido horário resultando no vértice 4 verde de coordenadas $(1 - 2b, 2a)$. O centro de ordem 4 que executa essa ação tem coordenadas $(1 + a - b, a + b)$, como ilustra a Figura A.14.

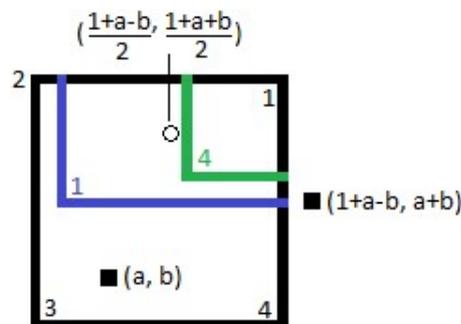


Figura A.14. *Centros de rotação de ordem 2 e 4 do Caso 2D*. Fonte: Adaptada do blog Polyedros³¹.

A Tabela A.1 apresenta um resumo das informações obtidas a partir da análise do azulejo na posição 2. Na tabela, o número 4 se refere aos centros de rotação de ordem 4, o número 2 se refere aos centros de rotação de ordem 2 e tr se refere às translações.

³¹ <http://polyedros.blogspot.com.br/2012/10/a-contribution-for-mathematical.html>; Dezembro 2017.

	2A	2B	2C	2D
4	(a, b)	(a, b)	(a, b)	(a, b)
4	$\left(\frac{1}{2} + a, \frac{1}{2} + b\right)$	$(a + b, -a + b)$	$\left(\frac{1}{2} - b, \frac{1}{2} + a\right)$	$(1 + a - b, a + b)$
2	$\left(\frac{1}{2} + a, b\right)$	—	—	$\left(\frac{1 + a - b}{2}, \frac{1 + a + b}{2}\right)$
tr	—	$(-a + b, -a - b)$	$(-2a, 1 - 2b)$	—

Tabela A.1: Centros de rotação e translação para as diferentes rotações do azulejo 2. Fonte: Adaptada de Rezende, 2012, p12.

Procedendo de forma análoga para os azulejos nas posições 3 e 4 podemos obter mais informações a respeito da localização dos centros de ordem 4 nos azulejos, de acordo com a rotação apresentada por cada um deles.

Essas informações são completadas analisando-se as interferências que os diversos azulejos que compõem o módulo causam uns sobre os outros quando todo o módulo é rotacionado em torno um centro de ordem 4. Dessa forma, pode-se estabelecer os critérios para a classificação dos azulejos quadrados apresentados nessa dissertação. Conforme afirmado anteriormente, a demonstração detalhada do método de classificação dos azulejos quadrados não está no escopo desse trabalho.