UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

DIANA TEREZINHA AMARO

Aritmética de segmentos: uma proposta de abordagem dos Conjuntos Numéricos no Ensino Médio

Campinas

2018

Diana Terezinha Amaro

Aritmética de segmentos: uma proposta de abordagem dos Conjuntos Numéricos no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientador: Henrique Nogueira de Sá Earp

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Diana Terezinha Amaro e orientada pelo Prof. Dr. Henrique Nogueira de Sá Earp.

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Am13a

Amaro, Diana Terezinha, 1991-
Aritmética de segmentos : uma proposta de abordagem dos conjuntos numéricos no ensino médio / Diana Terezinha Amaro. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Henrique Nogueira de Sá Earp.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria. 2. Hilbert, Axiomas de. 3. Números reais. 4. Reta real. I. Sá Earp, Henrique Nogueira de, 1981-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Segment arithmetic : a proposed approach to number sets in high school
Palavras-chave em inglês:
Geometry
Hilbert axioms
Real numbers
Real line
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestra
Banca examinadora:
Henrique Nogueira de Sá Earp [Orientador]
Rafael de Freitas Leão
Rúbia Barcelos Amaral Schio
Data de defesa: 23-02-2018
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado profissional defendida em 23 de fevereiro de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). HENRIQUE NOGUEIRA DE SÁ EARP

Prof(a). Dr(a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO

Prof(a). Dr(a). RÚBIA BARCELOS AMARAL SCHIO

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todo o seu cuidado e zêlo para comigo, por todas as oportunidades colocadas em meu caminho e por ter me concedido força e coragem para encará-las.

À minha família, por não só acreditarem em meus sonhos, mas por sonhá-los junto comigo.

Ao meu orientador, Henrique, por todo aprendizado e amadurecimento que obtive nestes anos de trabalho. Agradeço-o por sua confiança e por todos os seus conselhos.

Aos membros da banca examinadora, pela disponibilidade em discutir este trabalho e por suas valiosas contribuições.

Aos participantes desta pesquisa e aos seus responsáveis, por sua disposição e por acreditarem na importância deste estudo.

À Sociedade Brasileira de Matemática e ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada, pela criação e manutenção do PROFMAT.

À Universidade Estadual de Campinas, por me propiciar condições estruturais para a realização deste trabalho.

Aos professores do PROFMAT-Unicamp, por todo conhecimento transmitido e por acreditarem neste Programa.

Ao IFSP, pela valorização de seus servidores e pelo reconhecimento da importância da qualificação profissional.

A todos os meus amigos, pela alegria compartilhada, pela ajuda, pela torcida e pelo apoio. Em especial, agradeço aos colegas do IFSP Campus Bragança Paulista e do PROFMAT-Unicamp, pelo companheirismo e por tudo que ensinaram.

A todos os meus alunos, pelo carinho, compreensão, torcida, admiração e por tudo que aprendo diariamente com eles.

A todos vocês, meu eterno respeito e admiração.

"Minha alma exalta o Senhor,
meu espírito se alegra em Deus, meu Salvador,
porque olhou para a humilhação de sua serva.
Eis que, de agora em diante,
todas as gerações me considerarão feliz,
pois o Todo-poderoso fez grandes coisas por mim."
(Bíblia Sagrada, Lucas 1, 46-49)

Resumo

A literatura aponta que a abordagem dos números reais é problemática não só no Ensino Fundamental e Médio, mas também nos cursos de Licenciatura em Matemática e outros cursos superiores das Ciências Exatas. Apesar de sua relevância dentro do currículo de Matemática, a pesquisa sobre os Números Reais com ênfase na Educação Básica é relativamente escassa, sobretudo no Brasil. Com base no estudo de Hartshorne (2000), esta pesquisa propõe uma abordagem para os conjuntos numéricos via Aritmética de Segmentos voltada para alunos do Ensino Médio, em que propriedades e operações envolvendo números reais são exploradas por meio da Geometria. Para uma análise quali-quantitativa, esta abordagem será aplicada a duas turmas do primeiro ano do Ensino Médio. Os resultados serão confrontados, segundo as competências e habilidades apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais e na Proposta Curricular do Estado de São Paulo, com a abordagem-controle da apostila de um sistema renomado de ensino da rede particular adotada em uma turma do mesmo nível.

Palavras-chave: Geometria. Axiomas de Hilbert. Conjunto dos Números Reais. Reta real.

Abstract

The literature points out that approaches to real numbers are problematic not only in Elementary and Middle School, but also in undergraduate courses of Mathematics and other Sciences. Despite its relevance inside the mathematics curriculum, research on the Real Numbers with an emphasis on Basic Education is relatively scarce, and particularly so in Brazil. Based on Hartshorne's (2000) study, we propose an approach to number sets by way of Segment Arithmetic aimed at high school students, in which properties and operations involving real numbers are explored through Geometry. For a qualitative-quantitative analysis, this approach will be applied to two classes of the first year of High School. With respect to the skills and abilities presented in the National curricular parameters and in the state-wide Curricular Proposal of São Paulo, results will be compared with a control approach stemming from the textbook of a renowned local private school franchise, adopted in classes of the same level.

Keywords: Geometry. Hilbert's axioms. Set of Real Numbers. Real line.

Sumário

Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1999), ao prever para o Ensino Médio uma revisão e aprofundamento dos conteúdos matemáticos introduzidos ao longo do Ensino Fundamental, tem como uma de suas finalidades a formalização de conceitos e a formação da base necessária para que o jovem possa prosseguir para estudos mais avançados de maneira segura, crítica e consciente.

> As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica em geral; (...) expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática (BRASIL, 1999, p. 42).

Desta forma, dada a relevância do conjunto dos Números Reais para o estudo no ramo das Ciências Exatas, os PCNs preveem que o tema, já construído ao longo do Ensino Fundamental como a união dos Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais, seja revisitado no Ensino Médio. Lima (2001) afirma que esta revisão só tem sentido caso exista certo aprofundamento do tema.

> Os alunos que ingressam no Ensino Médio certamente já tiveram um longo contato anterior com os Números Naturais, Inteiros, Racionais e até mesmo com certos Números Irracionais, como o número π e algumas raízes quadradas não-exatas. Reapresentar-lhes esses números só tem sentido se o objetivo for o de ganhar mais consistência teórica, explicando-lhes de forma convincente fatos que foram impostos peremptoriamente antes e, ao mesmo tempo, mostrar, mediante exemplos, problemas e outras aplicações, que essas sucessivas ampliações do conceito de número tem alguma utilidade, na Matemática ou fora dela (LIMA, 2001, p. 07).

O tema do ensino dos Números Reais é problemático no âmbito nacional e internacional, figurando pesquisas oriundas de diversos lugares. Robinet (1986), Tirosh (2002), Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), Igliori e Silva (2001), Malta e Palis (2004), Cobianchi (2001), Dias (2006), Sirotic e Zazkis (2007) e Boff (2006) mostram que o entendimento dos Números Reais está comprometido tanto na Educação Básica quanto nos cursos de Graduação. Suas pesquisas evidenciam que tanto alunos de nível básico e superior quanto professores de Matemática têm sérias dificuldades em compreender o conjunto dos Números Reais, seja na identificação de Números Racionais e Irracionais ou na explicação, mesmo que informal, das propriedades deste conjunto numérico.

Ao concluir sua pesquisa com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade paulista, Igliori e Silva (2001) enfatizaram a necessidade da criação de novas abordagens e metologias para o ensino de Números Reais.

> [. . .] o livro não diz claramente o que são Números Irracionais e porque eles completam a reta. Trata-se de um tema delicado. Como explicar o conceito de Número Real de forma correta e ao mesmo tempo acessível aos alunos do ensino médio? (LIMA, 2001, p. 107).

Em sua pesquisa sobre o ensino dos Números Reais na Educação Básica, Silva (2011, p. 286) afirmou que "[. . .] é importante que o professor tenha acesso a abordagens adequadas para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, tomando certos cuidados didáticos para desenvolver um bom trabalho com os Números Reais".

Frente à escassez de estudos deste tema voltados à Educação Básica, nos indagamos se não seria possível propor uma nova abordagem a alunos do primeiro ano do Ensino Médio, baseada na visualização da construção e das propriedades dos Números Reais.

Inspirados na Aritmética de Segmentos desenvolvida por Hartshorne (2000) a partir do estudo dos Elementos de Euclides e dos Axiomas de Hilbert, apresentaremos uma proposta em que os Números Reais, suas propriedades e operações são construídos geometricamente, com régua, compasso e transferidor. Estas discussões teóricas, bem como as contribuições das pesquisas sobre ensino de Números Reais em diversos níveis e a abordagem elaborada, encontram-se na primeira parte deste texto - a Pesquisa Teórica.

Supomos que a visualização possibilitada pela geometria colabore para a significação e entendimento do tema. De modo a investigar esta hipótese, realizamos um experimento em que esta proposta foi trabalhada com estudantes do primeiro ano do Ensino Médio e comparada à abordagem aritmética usualmente encontrada nos materiais didáticos deste nível de ensino. A descrição deste experimento, seus aspectos metodológicos e a análise dos dados coletados são apresentados na segunda parte desta dissertação - a Pesquisa Experimental. Por fim, o texto encerra-se apresentando as suas considerações finais e perspectivas para pesquisas futuras.

1 O que dizem as pesquisas voltadas para o ensino dos Números Reais?

Os PCNs e a Prosposta Curricular do Estado de São Paulo preveem a construção dos Números Reais como a união dos Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais a ser construída ao longo do Ensino Fundamental. Dentre as competências e habilidades apontadas nestes documentos figuram, essencialmente, a localização de números na reta real, o contato com as raízes de Números Primos e com o número π e as aproximações dos Números Irracionais, além do domínio das operações envolvendo os Reais.

> Os autores consideram absolutamente inaceitável que currículos de Matemática da Educação Básica não contenham conhecimentos básicos do sistema dos números reais. Recomendam que os conceitos de número natural, racional, irracional e números reais devam ser explicitamente e sistematicamente ensinados, não somente visando ao mero conhecimento técnico, à apresentação de definições e à resolução de exercícios com cálculos. Referem-se também a problemas de fundo intuitivo, sem os quais a Matemática pode ser considerada como um mero esqueleto (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995 apud PASQUINI, 2007, p. 26).

Sendo o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) um reflexo destes documentos oficiais, as análises desenvolvidas no acompanhamento disciplina Análise de Livros e Materiais Didáticos em Matemática - IMECC/Unicamp durante o segundo semestre de 2016 (vide: <www.ime.unicamp.br/~ma225>), mostram que a abordagem dos Números Reais nos livros didáticos traz alguns detalhes problemáticos do ponto de vista didático e/ou matemático. Alguns deles são: a confusão do sinal de igual e o sinal de aproximação; a restrição de exemplos dos Números Irracionais, citando apenas π e as raízes dos Números Primos; a apresentação do número π como um quociente do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro, sem mencionar que o dividendo desta operação é, também, um Número Racional em oposição à afirmação de que um número é Irracional se não pode ser escrito como a fração de Inteiros; a apresentação da reta Racional como uma reta contínua.

As constatações feitas ao longo desta disciplina foram confirmadas pela pesquisa de mestrado desenvolvida por Souto (2010), onde o autor analisou quatorze livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio aprovados pelo PNLD. O autor aponta que, em média, os livros utilizam 4,3% de suas páginas para tratar deste conceito. Além disso, trazem poucos exemplos, seja em quantidade ou diversidade de Números Irracionais, utilizam exemplos numéricos como demonstração de propriedades e os exercícios resolvidos servem como algoritmos para serem utilizados nas atividades propostas. Nenhum dos livros analisados mencionou a densidade dos Irracionais.

Os autores portugueses destacam as principais habilidades a serem desenvolvidas na Educação Básica quanto aos conteúdos da grande área, números e cálculo, assim intitulados por eles, afirmando:

> O ensino dos números e das operações na educação básica não deve visar a aquisição de um conjunto de técnicas rotineiras mas sim uma aprendizagem significativa ligada a uma compreensão relacional das propriedades dos números e das operações. Não basta aprender procedimentos; é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento (ABRANTES, 2001, p. 41).

Também em suas análises de livros didáticos do Ensino Médio, o matemático Elon Lages Lima fez algumas constatações quanto à abordagem dada aos Números Reais.

> Para finalizar a análise deste capítulo, devemos esclarecer que nenhum autor brasileiro de textos para o Ensino Médio trata os números reais adequadamente. Há outros muito piores, como os que definem número racional como o quociente de dois inteiros e número irracional como o número que não é racional, sem nunca ter dito antes o que é um número (LIMA, 2001, p. 09).

Estas questões foram observadas em outras pesquisas, tanto em âmbito nacional quanto em âmbito internacional, evidenciando que este problema pode não ser exclusivo dos livros didáticos brasileiros.

> Como seria possível passar dos números racionais para os números reais sem descrever o conjunto dos números irracionais? Os números irracionais são uma parte do sistema e, sem eles, o conceito de número real é incompleto. Se negligenciarmos os números irracionais, todo o sistema desaba. É o que acontece hoje (. . .) Na verdade, o conceito de número irracional é encontrado principalmente em conexão com alguns exemplos - como o número π e as raízes de números como 2 ou 3 (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995 apud PASQUINI, 2007, p. 02).

Cobianchi (2001) e Dias (2006) explicam que os professores de matemática apresentam grandes dificuldades em ensinar Números Reais porque pouco se aprende na matemática escolar, tendo em vista que o que é abordado em sua formação enquanto professores está desconectado da Educação Básica.

Dentre as pesquisas mais reconhecidas na área, destaca-se o estudo feito por Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), do qual participaram 62 estudantes franceses, o que equivale aos primeiros e segundos anos do Ensino Médio e 29 estudantes do curso de licenciatura em matemática em Tel Aviv. Com o pressuposto da existência de uma lacuna no ensino em relação ao conjunto dos Números Irracionais e que este conceito é intuitivamente difícil, uma vez que envolvem conceitos de incomensuralidade e de densidade, foram propostas questões envolvendo Números Irracionais, com o objetivo central de investigar o conhecimento que os alunos possuíam sobre o assunto. Como conclusão deste estudo, os autores obtiveram que tanto os alunos da educação básica quanto os futuros professores têm sérias dificuldades em identificar Números Racionais e Irracionais, comensuralidade.

Por meio de uma pesquisa realizada na França com estudantes em nível de ensino equivalente aos últimos anos do Ensino Médio e dos primeiros anos de graduação, Robinet (1986) investigou quais modelos de Números Reais os estudantes possuíam e como estas concepções se relacionavam com a aprendizagem das noções de Análise Matemática (ROBINET, 1986 apud SILVA; PENTEADO, 2009). Como conclusão de seu estudo, Robinet (1986) apontou que algumas das dificuldades dos alunos quanto aos conteúdos matemáticos referem-se à falta de conhecimento sobre os Números Reais e suas propriedades.

Leviatan (2006) afirma que muitas vezes os Números Reais são o elo perdido da Educação Matemática. Segundo sua pesquisa, nos cursos de Cálculo entende-se que estendendo o conjunto dos Números Racionais obtem-se um novo sistema de 'números' que servem para medir quantidades contínuas, além da afirmação de que os elementos deste novo sistema estão numa correspondência bijetiva com os pontos da reta. Porém, os Números Reais não são abordados utilizando qualquer método construtivo. Leviatan (2006) propõe uma definição construtiva pelo uso conciliado do algoritmo geométrico, a qual chamou de '*long division algorithm*', e oferece uma visualização geométrica e númerica dos Números Reais em notação decimal.

No âmbito da pesquisa nacional, Igliori e Silva (2001) realizaram um estudo com alunos iniciantes e finalistas de um curso universitário na área de Ciências Exastas sobre concepções de Números Reais. Os iniciantes eram do curso de Ciências da Computação e os finalistas do curso de Matemática. O objetivo dos autores era investigar as concepções errôneas apontas em estudos diagnósticos de pesquisas como as de Fischbein, Jehiam e Cohen (1995). Os questionários propostos na pesquisa mostram que os alunos (finalistas e iniciantes) confundem-se na classificação em Racional ou Irracional e que estes atribuem ao número e aproximação o mesmo significado. Frente às dificuldades dos alunos registradas nesta pesquisa, os autores apontaram para a necessidade de novas abordagens e metodologias de ensino dos Números Reais.

Uma pesquisa realizada por Soares, Ferreira e Moreira (1999) com 84 alunos do curso de Matemática da UFMG, com o objetivo de fazer com que os alunos apresentassem respostas acerca dos Números Reais, constatou que a maioria dos estudantes tem dificuldade para explicar, ainda que informalmente, as propriedades dos Reais. Para os pesquisadores, a falta de uma abordagem significativa deste conjunto numérico nos cursos de Licenciatura explica a carência deste tipo de abordagem no Ensino Médio.

Ainda pesquisando sobre o entendimento dos futuros professores acerca deste tema, Sirotic e Zazkis (2007) fizeram uma pesquisa com 46 futuros professores do Ensino Médio com o intuito de investigar as imagens mentais associadas aos Números Reais.

Concluíram que os participantes deste estudo têm tendência em confiar na calculadora e preferência pela forma decimal para representar um Racional. As autoras acreditam que este resultado pode influenciar estes futuros professores no momento em que criarem possibilidades para que os alunos manipulem atividades utilizando apenas estas duas representações. Além disso, afirmam, com base em suas observações, que um maior destaque na representação geométrica dos Números Irracionais poderia facilitar o entendimento dos alunos, uma vez que esta abordagem possibilita, segundo as autoras, maior distinção entre Números Irracionais e suas aproximações e ajuda a apurar o conceito de irracionalidade.

Na perspectiva de aliar a Geometria ao Ensino dos Números Reais, Pasquini (2007), em sua tese, acompanha uma disciplina de Análise Real de um curso de pós-graduação voltado para professores de Matemática em que foi utilizado o material desenvolvido pelos professores Baroni e Nascimento (2005). Em seu estudo, a autora concluiu que introduzir os Números Reais via medição oportuniza que noções e conceitos intrínsecos aos Números Reais possam ser explorados, em particular, conceitos básicos de Análise, como convergência, continuidade, completude, etc. e mesmo que indiretamente àqueles relacionados a outros campos da Matemáica como a Álgebra, a Geometria e a História da Matemática.

Também para o Ensino Básico, a Geometria parece ser uma alternativa plausível para a abordagem dos Números Reais. Silva (2011) fez uma pesquisa com alunos do último ano do Ensino Médio do Colégio Pedro II com o objetivo não de ensinar o Conjunto dos Números Reais, mas observar quais são as imagens conceituais que estes estudantes apresentavam acerca dos elementos, propriedades e operações envolvendo elementos deste conjunto. Inicialmente, a autora fez um estudo exploratório com 70 alunos e, com base neste, um estudo principal com 12 alunos em oito encontros extra-classe. A autora concluiu que há necessidade de um trabalho efetivo, a partir do algoritmo da divisão, que consolide o conhecimento das representações decimais.

> Defendemos que apresentar o número real positivo como resultado de uma medição é imprescindível do ponto de vista didático, pois mostra aos alunos, entre outros aspectos, a não suficiência dos números racionais para essa função (SILVA, 2011, p. 276).

Na Educação Matemática, diversas pesquisas tem atentado para a importância do resgate da Geometria na Educação Básica, ainda que atualmente a Geometria deixou se der apresentada no final dos livros didáticos e está distribuída ao longo de seus capítulos (GODOY, 2016).

> Fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução

> de problemas, desde os níveis escolares mais elementares. Na geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos e em “receitas” para resolver problemas-tipo (ABRANTES et al., 1999 apud GRANDO; NACARATO; GONÇALVES, 2008, p. 44).

Sob o ponto de vista acadêmico, Lima (2001) enxerga na geometria uma possibilidade promissora para o ensino dos Números Reais.

> Uma maneira conveniente de introduzir números reais sem cometer erros nem exageros de sofisticação matemática, de modo a ser entendido pelos alunos, é aquele que nossos antepassados já usavam. Um número real é o resultado da medida de uma grandeza, que podemos sempre imaginar como um segmento de reta. Número irracional é a medida de um segmento incomensurável com a unidade adotada (LIMA, 2001, p. 09).

Baseado no estudo de Hartshorne (2000), o projeto de Iniciação Científica financiado pela FAPESP, intitulado “Geometrias e Isometrias: dos postulados de Hilbert ao plano hiperbólico” (AMARO; SÁ EARP, 2014), abordou sistematicamente os axiomas de Hilbert e a Aritmética de Segmentos, concluindo o enunciado conhecido como ‘Axioma da Régua’. Frente à problemática do ensino dos Números Reais e com base nas pesquisas apresentadas acima, enxergamos nesta abordagem, que alia a Geometria à definição do Conjunto dos Números Reais e suas propriedades, uma proposta para a Educação Básica, em especial para o Ensino Médio e nos propomos a investigar a sua viabilidade.

2 Aritmética de segmentos

Este capítulo traz uma releitura de Amaro e Sá Earp (2014), apresentando os resultados pertinentes para o desenvolvimento da proposta de abordagem dos Conjuntos Numéricos na Educação Básica. Nosso objetivo é que este capítulo sirva de embasamento teórico ao professor interessado em compreender as escolhas que serão feitas no capítulo seguinte.

2.1 Axiomática de Hilbert

A partir da investigação, realizada por meio da observação, da construção de desenhos, confecção de cálculos e recursos computacionais, podemos intuir certos resultados matemáticos. Contudo, há uma expressão muito comum entre os docentes: "vários exemplos não comprovam uma determinada teoria, mas basta um contra-exemplo para derrubá-la". De fato, a nossa intuição elabora conjecturas, mas por que não as comprovam, ou como comprová-las?

De fato, sendo a busca pela verdade a atividade característica da ciência, o problema torna-se encontrar critérios e procedimentos fidedignos em que se possa averiguar ou reprovar uma informação. A demonstração é um destes procedimentos, caracterizando o método axiomático.

A Matemática, enquanto ciência, dedica-se à observação de padrões e regularidades e, a partir destes, à formação de conjecturas e à demonstração destas. Assim, diferentemente do que muitos acreditam, a Matemática vai muito além de um amontoado acabado de fórmulas e resultados.

> A matemática distingue-se de todas as outras ciências, em especial no modo como encara a generalização e a demonstração e como combina o trabalho experimental com os raciocínios indutivo e dedutivo, oferecendo um contributo único como meio de pensar, de acender ao conhecimento e de comunicar (ABRANTES, 2001 apud SILVA, 2006, p. 59).

Para Nascimento (2006), o método axiomático consiste em fazer uma coleção completa de proposições e conceitos básicos, chamada sistema de axiomas, dos quais derivarão as outras proposições e conceitos, por dedução e definição. Segundo o autor, o sistema de axiomas deve ser consistente, ou seja, partindo destes enunciados e seguindo encadeamentos lógicos não chegaremos a contradições.

> Um conceito primitivo é um conceito que aceitamos sem explicação de seu significado. Por exemplo, ponto, reta e plano são conceitos primitivos

> da Geometria. Um axioma é uma proposição a respeito dos conceitos primitivos que aceitamos verdadeira sem que seja justificada sua validade (NASCIMENTO, 2006, p. 01).

Podemos fazer uma analogia mais próxima ao contexto dos estudantes da Educação Básica. Consideremos um jogo de futebol. Os conceitos primitivos são a bola, o campo e os atletas. Os axiomas são as regras, por exemplo, o número de jogadores em cada time, somente são permitidas as jogadas feitas com os pés, com a exceção do goleiro, etc. Tais regras são aceitas sem maiores questionamentos e não necessitam ser comprovadas a sua veracidade/necessidade, compondo, então, o sistema de axiomas. O resultado das jogadas construídas, respeitando-se as regras, são os teoremas, e a construção destas jogadas a demonstração. Assim, um teorema é uma tese que pode ser demonstrada por meio de encadeamentos lógicos dos conceitos primitivos e do sistema de axiomas.

Em "*Os Elementos*", Euclides enunciou diversos resultados a partir do método dedutivo. Contudo, sua obra pioneira trazia redundâncias de alguns postulados e o uso de resultados não mencionados anteriormente, além das noções intuitivas. Assim, no final do século XIX, vários matemáticos começaram a preocupar-se com os fundamentos da matemática, em especial com a axiomatização da geometria.

Em 1899, David Hilbert, publicou os "Fundamentos da Geometria", um sistema axiomático para a Geometria Euclidiana. Esse conjunto de axiomas apresentavam maior rigor matemático, aprimorando os argumentos e noções intuitivas encontrados na obra de Euclides. Esta formulação axiomática foi a que mais se consolidou entre os matemáticos. Sua obra é baseada em:

- **três conceitos primitivos**: *Pontos*, nesse texto representados por letras maiúsculas e cujo conjunto será $\mathcal{P}$; *Retas*, representadas por letras minúsculas, sendo $\mathcal{R}$ o seu conjunto; *Planos*, denotados pelas letras gregas maiúsculas e cujo conjunto denotaremos por $\mathcal{T}$.
- **três relações fundamentais:** incidência, estar entre e congruência.
- **cinco grupos de axiomas:** axiomas de incidência, de ordem, de congruência, de continuidade e axioma das paralelas.

À tripla $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}$, tais que $\mathcal{T}, \mathcal{R} \subset 2^{\mathcal{P}}$, satisfazendo a determinados axiomas, é chamado *Geometria*.

A maneira como os grupos de axiomas de Hilbert estão organizados possibilita a axiomatização de outras Geometrias, tais como a Geometria Projetiva, Elíptica e Hiperbólica, bastando apenas suprimir grupos ou modificar ligeiramente algum axioma.

A seguir apresentaremos os grupos de axiomas de Hilbert (1950) e alguns resultados da Geometria Euclidiana Plana relevantes para o desenvolvimento da Aritmética de Segmentos, foco de nosso estudo.

2.1.1 Axiomas de Incidência

Axioma I. 1. *Dados os pontos A e B, com $A \neq B$, existe uma única reta $\ell \in \mathcal{R}$ tal que $A, B \in \ell$.*

Denotaremos a reta ℓ que contém os pontos A e B como $\ell = (AB)$.

Axioma I. 2. *Dois pontos distintos definem unicamente uma reta, isto é, se $(AB) = \ell$ e $(AC) = \ell$, com $B \neq C$, então também $(BC) = \ell$.*

Axioma I. 3. *Dados três pontos distintos e não-colineares (não contidos numa mesma reta), existe um único plano, Γ, contendo-os.*

Definição 2.1. *Uma* geometria de incidência *é um conjunto de pontos e retas que satisfazem aos três axiomas anteriores.*

Exemplo 2.1. *O conjunto de pontos $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$, no qual os subconjuntos $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ e $\{A, C\}$ são as retas, forma uma geometria de incidência, uma vez verificam os axiomas 1, 2 e 3.*

Axioma I. 4. *Quaisquer três pontos distintos e não-colineares determinam unicamente um plano.*

Axioma I. 5. *Se $A, B \in \Gamma$ então $(AB) \in \Gamma$.*

Axioma I. 6. *A interseção entre dois planos distintos ou é vazia ou é uma reta, ou seja, se $A \in \Gamma \cap \Lambda$ então existe, no mínimo, $B \in \mathcal{P}$ com $B \neq A$ tal que $B \in \Gamma \cap \Lambda$.*

Axioma I. 7.

- *Toda reta contém, no mínimo, dois pontos;*
- *Todo plano contém, no mínimo, três pontos não-colineares;*
- *Existem quatro pontos não-coplanares (não pertencentes a um mesmo plano).*

Dizemos que uma Geometria é *plana* se $\mathcal{T}$ contém apenas um elemento, Γ, e $P \in \Gamma$, para todo $P \in \mathcal{P}$. O presente estudo refere-se à uma Geometria Plana, por isso, em todos os enunciados, os pontos e retas pertencem ao mesmo plano Γ.

2.1.2 Axiomas de Ordem

Nesta seção, trataremos da relação de ordem entre pontos e veremos que esta é a chave para definir o conceito de orientação.

Definição 2.2. *Dados os conjuntos A_1, A_2, ..., A_n, uma* relação n-ária *é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.*

Se $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$, as relações são denominadas binárias, trinárias e quaternárias, respectivamente.

A relação de ordem entre pontos é uma relação trinária em ℓ, onde A_i são conjuntos unitários distintos compostos por um único ponto, definida como uma *relação de interposição* na qual dizemos que B *está interposto a* A e C, denotando por $A - B - C$, quando:

Figura 1 – Relação entre pontos: B está entre A e C

Fonte: A autora (2018).

Axioma II. 1. (Simetria) *Se $A, B, C \in \ell$, com $A \neq B \neq C$, então*

$$A - B - C \Leftrightarrow C - B - A$$

Axioma II. 2. *Dados os pontos $A, B \in \ell$, existem $C, D \in \ell$ com $C, D \notin \{A, B\}$ tais que:*

- *$A - C - B$, ou seja, C está interposto a A e B.*
- *$A - B - D$, ou seja, D está extraposto a A e B.*

Denotaremos os segmentos de reta da seguinte maneira:

$$[AB] := \{C \in \mathcal{P} | A - C - B\}$$

Por consequência, definimos as semi-retas $[AB)$ e $(AB]$ como:

$$[AB) := [AB] \cup \{D \in \mathcal{P} \mid A - B - D\}$$

Axioma II. 3. (Tricotomia) *Dados A, B e C pontos distintos da reta ℓ, vale estritamente:*

$$A - B - C \text{ ou } B - C - A \text{ ou } C - A - B.$$

Definição 2.3. *A* linha poligonal

$$[A_0A_1A_2\ldots A_n] := \bigcup_{i=1}^{n}[A_{i-1}A_i].$$

Quando $A_0 = A_n$, temos uma linha poligonal fechada*, a qual denotaremos por $A_1 \ldots A_n$. Se todos os pontos $A_0, A_1, \ldots, A_n$ estiverem contidos num mesmo plano, a linha poligonal fechada será chamada* polígono*.*

Exemplo 2.2. *A linha poligonal fechada $[CABC]$ é o triângulo de vértices A, B e C, e que, segundo a definição acima, será denotado por ABC.*

Definição 2.4. *Dados $A, \ell \in \Gamma$ tal que $A \notin \ell$, dizemos que $B \in \Gamma$ com $B \notin \ell$* está do mesmo lado que A com relação à reta ℓ *se $[AB] \cap \ell = \varnothing$. Denotaremos $A \backsim_\ell B :=$ A está do mesmo lado que B com relação à reta ℓ.*

Definição 2.5. *Definimos o* semi-plano *definido pela reta ℓ e pelo ponto $A \notin \ell$ como o conjunto*

$$\Gamma_{\ell,A} := \{B \in \Gamma \mid A \backsim_\ell B\}$$

Axioma II. 4. (Axioma de Pasch) *Toda reta $\ell \subset \alpha$ divide α em exatamente dois semi-planos.*

Na versão original deste axioma consta: "*Dados os pontos não-colineares A, B e C e a reta ℓ tal que $\ell \cap [AB] \neq \varnothing$, então $\ell \cap [AC] \neq \varnothing$ ou $\ell \cap [BC] \neq \varnothing$.*" Em (AMARO; SÁ EARP, 2014) encontra-se a demonstração completa da equivalência destes enunciados, a qual omitiremos neste texto porque não é fundamental para a compreensão da aritmética de segmentos, nosso foco de estudo.

O resultado seguinte é originalmente encontrado no conjunto de axiomas proposto por Moritz Pasch (1843-1931). Mas em 1902, Moore e Moore demonstraram que este enunciado é redundante. Por este motivo, o resultado antes conhecido como *Axioma de Pasch* passou a ser chamado *Teorema de Pasch*.

Teorema 2.1. (Teorema de Pasch) *Se* $\begin{cases} A - B - C \\ B - C - D \end{cases}$ *então* $\begin{cases} A - B - D \\ A - C - D \end{cases}$

O teorema seguinte será essencial para definição da relação de ordem no contexto da aritmética de segmentos na próxima seção.

Teorema 2.2. *Dados os pontos A e B e a reta $\ell = (AB)$, então:*

1. $[AB) \cup (AB] = \ell$.

2. $[AB) \cap (AB] = [AB]$.

Demonstração. 1. Por definição, sabemos que os pontos de $[AB)$ e $(AB]$ são colineares aos pontos A e B e pelo axioma (I.1) temos que (AB) é única, logo, $[AB) \cup (AB] \subset \ell$.

Seja $C \in \ell$ tal que $C \neq A$ e $C \neq B$. Assim, estes três pontos são distintos e colineares. De acordo com o axioma (II.3), temos como opções:

$$A - B - C \text{ ou } A - C - B \text{ ou } C - A - B.$$

Em qualquer dos casos, $C \in [AB) \cup (AB]$. Logo, $\ell \subset [AB) \cup (AB]$.

Portanto, concluímos que $\ell = [AB) \cup (AB]$.

2. Suponha, por contradição, que exista $C \in [AB) \cap (AB]$ com $C \notin [AB]$. Se $C \in [AB)$, então, por definição teríamos $A - B - C$. Também por definição, se $C \in (AB]$, teríamos $C - A - B$. Mas, pelo axioma (II.3), este fato é absurdo. Portanto, por (II.1), a única opção válida é $A - C - B$, ou seja, $C \in [AB]$. Por isso, podemos concluir que

$$[AB) \cap (AB] \subset [AB].$$

Por outro lado, considere $D \in [AB]$ e, portanto, $A - D - B$. Assim, pela definição de semi-reta, temos que $D \in [AB)$ e $D \in (AB]$, ou seja, $D \in [AB) \cap (AB]$. Desta forma,

$$[AB] \subset [AB) \cap (AB].$$

Por tudo isso, concluímos que

$$[AB) \cap (AB] = [AB].$$

□

Assim como o teorema anterior, este resultado é fundamental para a definição de ordem, por isso enunciamos-o e apresentamos sua demonstração:

Corolário 2.1. *Seja $A \in \ell$. O conjunto de pontos de ℓ distintos de A pode ser dividido em dois subconjuntos C_1 e C_2, os dois lados do ponto A, com as seguintes propriedades:*

1. *B e C estão do mesmo lado com relação ao ponto A se $A \notin [BC]$;*

2. *B e D são pontos em lados opostos se $A \in [BD]$.*

Demonstração. Pelo axioma (I.3), existe $E \in \mathcal{P}$ tal que $E \notin \ell$. Seja $m = (AE)$. De acordo com o axioma 4), m divide o plano definido por ℓ e A em dois subconjuntos, S_1 e S_2. Sejam $C_1 = S_1 \cap \ell$ e $C_2 = S_2 \cap \ell$. O axioma (II.3) garante que estes conjuntos são não-vazios. □

Tendo em vista o Corolário 2.1, escolhido um ponto $O \in \ell$ este define dois subconjuntos distintos de pontos de ℓ e cada semi-reta $[OX)$ define uma orientação nesta reta.

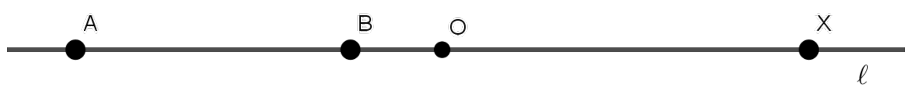
Dizemos que as semi-retas $[OX)$ e $[OY)$ possuem a mesma orientação se $O \notin [XY]$. Esta é uma relação de equivalência com apenas duas classes, dada a observação anterior. Assim, podemos fixar uma orientação $[OX)$ na reta ℓ para chamarmos de *orientação positiva da reta ℓ.*

Como consequência imediata desta escolha, podemos definir uma ordem entre os pontos de ℓ.

Definição 2.6. *Sejam os pontos A e B da reta ℓ e a orientação positiva fixada $[OX) \subset \ell$, dizemos que A é* menor que *B, denotado $A < B$, se:*

- *$O \in [BA)$, caso $B \in [OX)$*
- *$O \in [AB)$, caso contrário.*

Figura 2 – $A < B$



Fonte: A autora (2018).

2.1.3 Axioma das Paralelas

Num sistema axiomático, os grupos de axiomas são independentes. Ao longo da história, diversos matemáticos tentaram provar a redundância ou independência do axioma das Paralelas frente aos demais axiomas de Hilbert. De fato, este postulado é indecidível aos postulados anteriores e cada uma de suas possíveis negações deu origem a uma nova Geometria.

Como o enfoque de nosso estudo reside na Geometria Euclidiana Plana, adotaremos o Axioma das Paralelas afirmativamente:

Definição 2.7. *Duas retas coplanares, ℓ e ℓ', são ditas* paralelas *(notação: $\ell \parallel \ell'$) se*

$$\ell = \ell' \text{ ou } \ell \cap \ell' = \varnothing.$$

Senão, as retas ℓ e ℓ' são chamadas concorrentes.

Axioma 1. *Dados $\ell \in \mathcal{R}$, $A \notin \ell$ e α o plano que contém A e ℓ, existe uma única reta $\ell' \in \alpha$ tal que $A \in \ell'$ e $\ell \parallel \ell'$.*

Exemplo 2.3. *Considere a Geometria onde $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E\}$ e $\mathcal{R}$ são todos os subconjuntos de dois pontos. As retas $\{C, E\}$ e $\{C, D\}$ não possuem interseção com $\{A, B\}$ e ambas contém o ponto C. Portanto, esta Geometria não obedece ao axioma das paralelas anterior e, por isso,* não *é uma Geometria Euclidiana.*

2.1.4 Axiomas de Congruência

Nesta seção, formalizaremos uma relação de equivalência entre segmentos e entre ângulos (os quais serão definidos nesta seção), uma das noções comuns presentes nos *Elementos de Euclides*. Esta relação será chamada *congruência*, denotada por "$\equiv$" e regida pelos seguintes axiomas:

Axioma IV. 1. *Dado um segmento $[AB]$ e uma semi-reta $[OX)$, existe um único ponto $C \in [OX)$ tal que $[OC] \equiv [AB]$.*

Axioma IV. 2. *Se $[AB] \equiv [CD]$ e $[AB] \equiv [EF]$, então $[CD] \equiv [EF]$.*

Axioma IV. 3. (Axioma da Adição) *Sejam $A, B, C \in \ell$ tal que $A - B - C$ e $D, E, F \in m$ com $D - E - F$. Se $[AB] \equiv [DE]$ e $[BC] \equiv [EF]$, então $[AC] \equiv [DF]$.*

Definição 2.8. *Considere um conjunto $\mathcal{X}$ em que está definida uma relação $\mathbf{R}$ entre seus elementos. Dizemos que $\mathbf{R}$ é uma* relação de equivalência *se:*

- $\mathbf{R}$ *é reflexiva, ou seja, $x\mathbf{R}x$;*
- $\mathbf{R}$ *é simétrica, ou seja, se $x\mathbf{R}y$ então $y\mathbf{R}x$;*
- $\mathbf{R}$ *é transitiva, ou seja, se $x\mathbf{R}y$ e $y\mathbf{R}z$, então $x\mathbf{R}z$.*

em que x, y e z são elementos de $\mathcal{X}$.

Proposição 2.1. *A relação de congruência é uma relação de equivalência no conjunto dos segmentos.*

Demonstração. Verifiquemos que a relação de congruência é:

- *Reflexiva*: A definição do segmento $[AB]$ e o axioma (II.1) nos levam a concluir que $[AB] \equiv [AB]$.
- *Simétrica*: Considere $[AB] \equiv [CD]$. Pelo item anterior, $[AB] \equiv [AB]$, então pelo axioma (IV.2), temos que $[CD] \equiv [AB]$.

- *Transitiva:* Suponha que $[AB] \equiv [CD]$ e $[CD] \equiv [EF]$. Pela simetria, $[CD] \equiv [AB]$. Então, pelo axioma (IV.2), resulta que $[AB] \equiv [EF]$.

$\square$

Definição 2.9. *A* soma dos segmentos $[AB]$ *e* $[CD]$ *é definida como sendo o segmento* $[AE]$ *tal que* $A - B - E$ *com* $[BE] \equiv [CD]$.

$$[AB] + [CD] \equiv [AE].$$

Proposição 2.2. *Se os segmentos* $[AB] \equiv [A'B']$ *e* $[CD] \equiv [C'D']$*. Então*

$$[AB] + [CD] \equiv [A'B'] + [C'D'].$$

Ou seja, a operação adição de segmentos é bem definida.

Demonstração. De acordo com a definição anterior, seja E o ponto que define a soma $[AB] + [CD]$, logo tem-se $A - B - E$. Analogamente, seja E' o ponto que define $[A'B'] + [C'D']$. Tem-se, portanto, $A' - B' - E'$.

Por hipótese temos $[AB] \equiv [A'B']$ e $[CD] \equiv [C'D']$ e, por construção, $[CD] \equiv [BE]$ e $[C'D'] \equiv [B'E']$. Então, temos que $[AB] \equiv [A'B']$ e $[BE] \equiv [B'E']$ (pela transitividade). Logo, pelo axioma (IV.3), concluímos que

$$[AE] \equiv [A'E'].$$

Ou seja,

$$[AB] + [CD] \equiv [A'B'] + [C'D'].$$

$\square$

A esta altura, é interessante explorarmos um pouco mais o fato observado na Proposição (2.1), já que uma vez que a congruência é uma relação de equivalência é possível definir as classes de equivalência desta relação.

Definição 2.10. *A* classe de equivalência *do segmento* $[AB]$ *é definida como o conjunto:*

$$|a| := \overline{[AB]} := \{[A'B'] \mid [A'B'] \equiv [AB]\}.$$

Desta definição decorre que se $[AB] \not\equiv [CD]$ então $\overline{[AB]} \neq \overline{[CD]}$ (enquanto conjuntos) e $\overline{[AB]} \cap \overline{[CD]} = \varnothing$.

A pergunta a se fazer feita agora é: podemos considerar que a soma de segmentos pode ser estendida para as classes de equivalência? Ou seja, se

$$\overline{[AB]} + \overline{[CD]} = \overline{[AB] + [CD]}$$

então esta soma está bem definida?

A resposta a esta questão é uma consequência direta da Proposição (2.2).

Corolário 2.2. *A operação de soma entre classes de equivalência*

$$\overline{[AB]} + \overline{[CD]} = \overline{[AB] + [CD]}$$

está bem definida.

Demonstração. Pela definição de classes de equivalência, se $\overline{[AB]} = \overline{[EF]}$ então $[AB] \equiv [EF]$. Pela Proposição (2.2), temos que

$$[AB] + [CD] \equiv [EF] + [CD] \iff \overline{[AB + CD]} = \overline{[EF + CD]}.$$

□

Proposição 2.3. *Sejam A, B e C pontos distintos da reta ℓ com $A - B - C$ e sejam $E, F \in [DX)$. Se $[AB] \equiv [DE]$ e $[AC] \equiv [DF]$ então $D - E - F$ e $[BC] \equiv [EF]$.*

Demonstração. Por hipótese, $E, F \in [DX)$, então temos os seguintes casos a serem considerados:

1. $D - E - F$:

   Seja $F' \in [DX)$ tal que $D - E - F'$ e $[EF'] \equiv [BC]$. Pela Proposição (2.2) resulta que $[AC] \equiv [DF']$. Como $D - E - F'$ e $D - E - F$, então ou temos $E - F - F'$ ou $E - F' - F$.

   Porém, por hipótese, $[AC] \equiv [DF]$. Então, pelo axioma (IV.1), concluímos que $F = F'$. Portanto, $D - E - F$ e $[BC] \equiv [EF]$.

2. $D - F - E$:

   Neste caso, teríamos que $[DE] \equiv [DF] + [FE]$. Como $[AB] \equiv [DE]$, então $[AB] \equiv [DF] + [FE]$. Contudo, pela hipótese, $[AC] \equiv [DF]$ e $[AC] \equiv [AB] + [BC]$. Assim, $[AB] \equiv [AB] + [BC] + [FE]$, fato este que caracteriza-se como uma contradição, visto a propriedade reflexiva da relação de congruência.

Por tudo isso, podemos concluir que $D - E - F$ e $[BC] \equiv [EF]$. □

Com este resultado, podemos definir uma relação de ordem entre os segmentos. Notemos que a relação que definiremos é diferente da relação de ordem entre pontos, visto que os objetos geométricos a serem comparados são distintos.

Definição 2.11. *Dizemos que $[AB]$ é* menor que *$[CD]$ quando $[AB] \equiv [CB']$ com $C - B' - D$. Esta relação será denotada por $[AB] < [CD]$.*

Neste caso também poderíamos dizer que $[CD]$ é maior que *$[AB]$, denotando por $[CD] > [AB]$.*

Proposição 2.4. *Sejam* $[AB] \equiv [A'B']$ *e* $[CD] \equiv [C'D']$, *então*

$$[AB] < [CD] \Leftrightarrow [A'B'] < [C'D'] .$$

Demonstração. ($\Rightarrow$): Por definição, existe E tal que $C - E - D$ com $[CE] \equiv [AB]$. Seja E' o único ponto pertencente a $[C'D')$ tal que $[CE] \equiv [C'E']$. Pela proposição anterior, temos $C' - E' - D'$ e, pela transitividade da congruência, $[C'E'] \equiv [A'B']$, portanto, $[A'B'] < [C'D']$.

($\Leftarrow$): Análogo.

□

Proposição 2.5. *A relação "$<$" é uma relação de ordem no conjunto de segmentos, ou seja, tem as seguintes propriedades:*

- Transitividade*: Se* $[AB] < [CD]$ *e* $[CD] < [EF]$ *então* $[AB] < [EF]$.
- Tricotomia: *Dados dois segmentos* $[AB]$ *e* $[CD]$ *apenas uma das relações é verdadeira:*
  1. $[AB] \equiv [CD]$
  2. $[AB] < [CD]$
  3. $[AB] > [CD]$.
- Monotonicidade da adição: *Se* $[AB] < [CD]$ *então* $[AB] + [EF] < [CD] + [EF]$.

Demonstração.
- *Transitividade:*

  Sabemos que existe um único ponto $X \in [CD]$ tal que $[AB] \equiv [CX]$ e $Y \in [EF]$ com $[EY] \equiv [CD]$. Seja $Z \in [EF)$ tal que $[CX] \equiv [EZ]$, pela Proposição (2.3) segue que $E - Z - Y$. Como já sabemos $E - Y - F$, então, temos $E - Z - F$, com $[EZ] \equiv [AB]$. Portanto, concluímos que $[AB] < [EF]$.

- *Tricotomia:*

  Seja $E \in [CD)$ o único ponto tal que $[CE] \equiv [AB]$. Assim, as possibilidades para E são:

  1. $D = E \Rightarrow [CD] \equiv [AB]$.
  2. $C - D - E \Rightarrow [CD] < [AB]$.
  3. $C - E - D \Rightarrow [CD] > [AB]$.

- *Monotonicidade da adição:* Por hipótese, $[AB] < [CD]$, logo existe $G \in [CD]$ tal que $[CG] \equiv [AB]$. Seja $H \in [CG)$ tal que $C - G - H$ com $[GH] \equiv [EF]$. Logo,

$$[CH] = [CG] + [EF].$$

Assim, como $[CG] \equiv [AB]$, resulta que

$$[CH] \equiv [AB] + [EF].$$

Sabemos que as possibilidades para o ponto H são: $G - H - D$ ou $G - D - H$.

No primeiro caso, seja $I \in [CD)$ tal que $[CI] \equiv [CD] + [EF]$. Dessa forma, tem-se $C - D - I$ e $[DI] \equiv [EF]$. Por hipótese, $G - H - D$, logo temos $C - H - I$ e, portanto, $[CH] < [CI]$, ou seja,

$$[AB] + [EF] < [CD] + [EF].$$

No segundo caso, temos por construção, que $[GH] \equiv [EF]$. Como, por hipótese, temos $G - D - H$, então $[EF] \equiv [GD] + [DH]$, ou seja, $[EF] > [DH]$.

Seja $J \in [CD)$ tal que

$$[CJ] \equiv [CD] + [EF],$$

com $[DJ] \equiv [EF]$. Já que $[EF] > [DH]$, então $[DJ] > [DH]$ e $D - H - J$. Assim, resulta que $G - D - H$ e $C - G - D$ e, então, $C - H - J$. Portanto, concluímos que $[CJ] > [CH]$, ou seja,

$$[CD] + [EF] > [AB] + [EF].$$

□

Proposição 2.6. *Se* $[AB] < [CD]$ *e* $[A'B'] < [C'D']$*, então*

$$[AB] + [A'B'] < [CD] + [C'D'] .$$

Demonstração. Pela monotonicidade da adição, temos que se $[AB] < [CD]$, então

$$[AB] + [A'B'] < [CD] + [A'B']$$

Como, por hipótese, $[A'B'] < [C'D']$,

$$[A'B'] + [CD] < [CD] + [C'D'] .$$

Pela transitividade, concluímos que $[AB] + [A'B'] < [CD] + [C'D']$. □

Definição 2.12. *Sejam* $A, B, O \in \Gamma$ *tal que* $A \neq O \neq B$. *Definimos o ângulo* $\widehat{AOB}$ *como o par de semi-retas* $([OA), [OB))$.

Axioma IV. 4. *Dado um ângulo* $\widehat{AOB}$ *no plano* Γ, $[PC) \subset \Psi$ *e uma escolha de semi-plano* $\Psi'_{(PC)}$, *existe uma única semi-reta* $[PD) \subset \Psi'_{(PC)}$ *tal que* $\widehat{AOB} \equiv \widehat{CPD}$. *Ademais,* $\widehat{AOB} \equiv \widehat{AOB}$ *e, se* $\widehat{AOB} \equiv \widehat{CPD}$ *então* $\widehat{CPD} \equiv \widehat{AOB}$.

Axioma IV. 5. *Se* $\widehat{AOB} \equiv \widehat{CPD}$ *e* $\widehat{CPD} \equiv \widehat{EQF}$ *então* $\widehat{AOB} \equiv \widehat{EQF}$.

Proposição 2.7. *A congruência de ângulos é uma relação de equivalência.*

Axioma IV. 6. (Congruência LAL) *Se* $[AC] \equiv [DF]$, $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ *e* $[AB] \equiv [DE]$, *então os triângulos* ABC *e* DEF *são congruentes.*

2.1.5 Axioma de Continuidade e Completude

Axioma V. 1. (Propriedade Arquimediana) *Seja* $C_1 \in [AB]$ *e sejam* C_2, $C_3 \ldots$, *tais que* $[C_jCj + 1] \equiv [AC_1]$ *então existe* n *tal que* $[C_nC_{n+1}] \equiv [AC_1]$ *e* $C_n - B - C_{n+1}$.

Axioma V. 2. (Completude de Dedekind) *Não é possível acrescentar novos elementos a* $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$ *ou* $\mathcal{T}$ *tais que o novo sistema assim obtido respeite aos grupos de axiomas anteriores.*

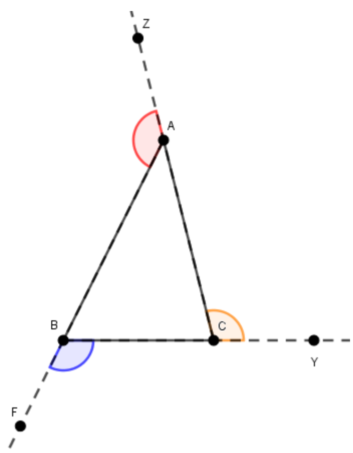
Estes axiomas garantem a bijetividade dos pontos de uma reta e o conjunto dos Números Reais. Este feito é conhecido como *Teorema da Régua*, cuja demonstração e demais detalhes podem ser consultados em Amaro e Sá Earp (2014).

2.2 Principais resultados da Geometria Euclidiana Plana

Nesta seção, colecionamos os resultados decorrentes dos axiomas de Hilbert utilizados na Aritmética de Segmentos.

Definição 2.13. *Dado um triângulo* ABC, *ao prolongarmos as semi-retas* $[AB)$, $[BC)$ *e* $[CA)$, *obteremos três ângulos, denominados* ângulos externos *ao triângulo* ABC.

Figura 3 – Ângulos externos ao triângulo ABC



Fonte: A autora (2018).

Teorema 2.3. (Teorema do ângulo externo) *Num triângulo* ABC, *o ângulo externo* $\widehat{CAY}$ *é maior que os outros ângulos internos não adjacentes, ou seja,*

$$\widehat{CAY} > \widehat{CAB}$$

e

$$\widehat{CAY} > \widehat{ABC}.$$

Demonstração. Seja $D \in [AC]$ tal que $[AD] \equiv [CD]$. Tome $E \in [BD)$ tal que $[BD] \equiv [DE]$ com $B - D - E$.

Considere os triângulos ABD e CED. Dado que $\widehat{ADB} \equiv \widehat{CDE}$ (ângulos opostos pelo vértice), resulta pelo axioma (IV.6) que $ABD \equiv CED$.

Logo, $\widehat{ACE} \equiv \widehat{CAB}$, mas como $[CE)$ divide $\widehat{ACY}$, tem-se $\widehat{ACY} > \widehat{CAB}$.

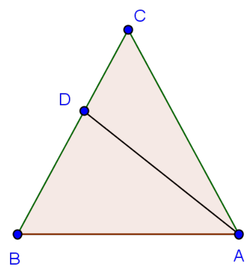
Analogamente, concluímos que $\widehat{ACY} > \widehat{ABC}$. □

Definição 2.14. *O triângulo ABC é dito* isósceles *se* $[AB] \equiv [AC]$*. O lado* $[BC]$ *é chamado a base do triângulo ABC.*

Proposição 2.8. (AMARO; SÁ EARP, 2014, p. 40) *"Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes".*

Proposição 2.9. (AMARO; SÁ EARP, 2014, p. 40) *"Se no triângulo ABC temos $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$, então ABC é isósceles.*

Figura 4 – Proposição



Fonte: (AMARO; SÁ EARP, 2014, p. 40)

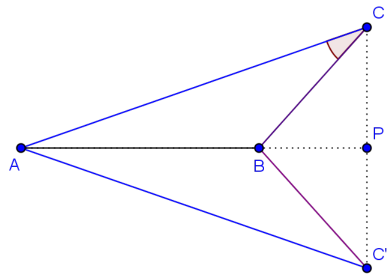
Demonstração. Seja o triângulo ABC com $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$, queremos mostrar que $[AC] \equiv [BC]$. Suponha que ABC não seja isóceles, logo $[AC] \neq [BC]$, ou seja, $[AC] > [BC]$ ou $[AC] < [BC]$. Sem perda de generalidade, seja $[AC] < [BC]$. Assim, existe $D \in [BC]$ tal que $[BD] \equiv [AC]$. Notemos que $[BD] \equiv [AC]$ (por construção), $\widehat{CBA} \equiv \widehat{CAB}$ (por hipótese) e $[BA]$ é comum aos triângulos ABC e DBA. Então, por (IV.6), $DCB \equiv CBA$, logo, $\widehat{DAB} \equiv \widehat{CBA}$. Mas, $\widehat{CBA} \equiv \widehat{CAB}$ e, então, $\widehat{DCB} \equiv \widehat{CAB}$, contradizendo a unicidade do axioma (IV.4). Absurdo. Portanto, $[AB] \equiv [AC]$." □

Proposição 2.10. (AMARO; SÁ EARP, 2014, p. 41) "(Congruência LLL) *Se os triângulos ABC e $A'B'C'$ são tais que $[AB] \equiv [A'B']$, $[BC] \equiv [B'C']$ e $[AC] \equiv [A'C']$, então $ABC \equiv A'B'C'$".*

Demonstração. A menos de um transporte de ângulos e segmentos, podemos supor que os triângulos são ABC e ABC', onde C e C' estão em lados opostos da reta (AB). Assim, seja $P = (AB) \cap [CC']$. A demonstração divide-se em cinco casos, dependendo da posição relativa entre P e os pontos A e B. Contudo, facilmente verificamos que os casos $P - A - B$ e $A - B - P$ são similares. O mesmo vale para $P = A$ e $P = B$. Dessa forma, temos apenas três casos a tratar:

(i) Se $A - B - P$:

Figura 5 – $A - B - P$



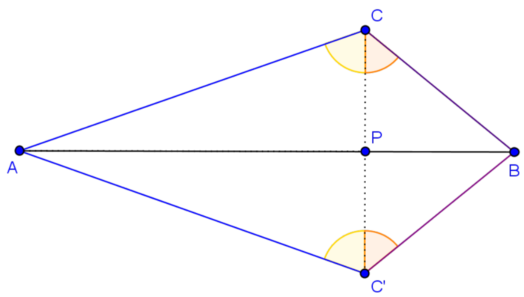
Fonte: (AMARO; SÁ EARP, 2014, p. 41)

Como $[AC] \equiv [AC']$, então $AC'C$ é isóceles, logo $\widehat{ACC'} \equiv \widehat{AC'C}$. Mas, também $[BC] \equiv [BC']$, ou seja, $\widehat{BCC'} \equiv \widehat{BC'C}$. Então como $[CB)$ no interior de $\widehat{ACC'}$ e $[BC')$ no interior $\widehat{AC'C}$, $\widehat{ACC'} = \widehat{ACB} + \widehat{BCC'}$ e $\widehat{AC'C} = \widehat{CC'B} + \widehat{BC'A}$. Portanto, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{BC'A}$. Assim, por (IV.6), $ABC \equiv ABC'$.

(ii) SE $A - P - B$:

Temos que ACC' é isóceles, visto que $[AC] \equiv [AC']$, por hipótese. Logo $\widehat{ACC'} \equiv \widehat{AC'C}$. Também BCC' é isóceles, pois $[BC] \equiv [BC']$, então $\widehat{C'CB} \equiv \widehat{CC'B}$.

Figura 6 – $A - P - B$



Fonte: (AMARO; SÁ EARP, 2014, p. 42)

Como $[CC') \cap [AB] \neq \varnothing$, então $[CC')$ no interior de $\widehat{ACB}$, pela mesma razão, $[CC')$ no interior de $\widehat{AC'B}$. Assim,

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACC'} + \widehat{C'CB}$$

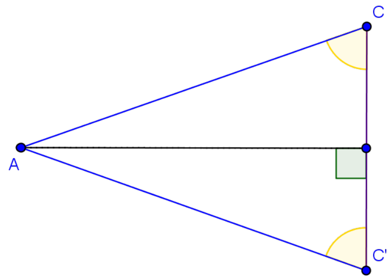
$$\widehat{AC'B} = \widehat{AC'C} + \widehat{CC'B}.$$

E, portanto, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AC'B}$. Por (IV.4), resulta que $ABC \equiv ABC'$.

(iii) Se $P = B$:

Como $[AC] \equiv [AC']$, então o triângulo ACC' é isósceles, logo $\widehat{ACC'} \equiv \widehat{AC'C}$. Logo, por (IV.6), temos que $\widehat{AC'B} \equiv \widehat{ACB}$.

Figura 7 – $B = P$

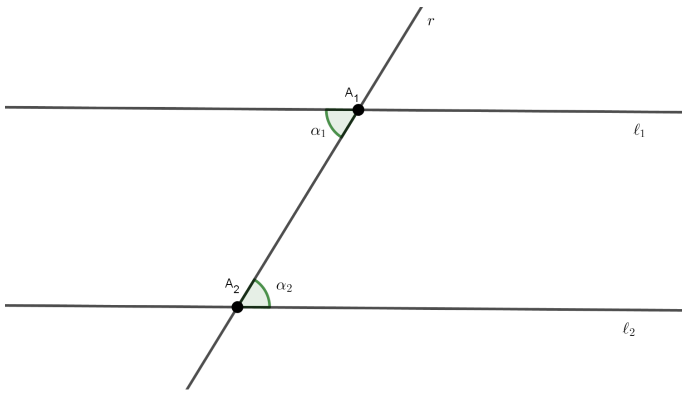


Fonte: A autora (2018).

$\square$

Teorema 2.4. (Teorema dos ângulos alternos internos) *Sejam ℓ_1 e ℓ_2 duas retas distintas cortadas pela reta transversal r, ou seja, $\ell_1 \cap r \neq \varnothing$ e $\ell_2 \cap r \neq \varnothing$. Se os ângulos alternos internos (α_1 e α_2 na figura) forem congruentes, então $\ell_1 \parallel \ell_2$.*

Figura 8 – Teorema dos ângulos alternos internos



Fonte: A autora (2018).

Demonstração. Sejam $A_1 = r \cap \ell_1$ e $A_2 = r \cap \ell_2$. Suponha, por absurdo, que exista $P = \ell_1 \cap \ell_2$. Assim, considerando o Teorema 2.3 no triângulo A_1A_2P, temos que $\alpha_1 > \alpha_2$, chegando a uma contradição. Portanto, $\ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing$. $\square$

Teorema 2.5. (Congruência ALA) *Se os triângulos ABC e DEF são tais que $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$, $[BC] \equiv [EF]$ e $\widehat{BCA} \equiv \widehat{EFD}$, então $ABC \equiv DEF$.*

Demonstração. Dados os segmentos $[AB]$ e $[DE]$, temos que ou $[AB] \equiv [DE]$ ou $[AB] \not\equiv [DE]$.

Caso $[AB] \equiv [DE]$, então pelo axioma (IV. 6), $ABC \equiv DEF$.

Caso $[AB] \not\equiv [DE]$, suponhamos, sem perda de generalidade, que tenhamos $[AB] < [DE]$. Ou seja, existe um ponto P tal que $E - P - D$, com $[EP] \equiv [AB]$. Assim, por (IV.6), $ABC \equiv PEF$ e, por consequência, $\widehat{PFE} \equiv \widehat{ACB}$.

Mas, por hipótese, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{DFE}$ e, então, pelo axioma (IV. 4), temos uma contradição, uma vez que $[FP)$ e $[FD)$ são semi-retas distintas pertencentes ao mesmo semi-plano representando o mesmo ângulo $\widehat{ACB}$. □

2.3 Aritmética de segmentos

Na seção anterior, vimos que a relação de congruência é uma relação de equivalência e, então, podemos definir as classes de equivalência do segmento $[AB]$ como o conjunto de todos os segmentos $[CD]$ tais que $[AB] \equiv [CD]$. Denotaremos:

$$a := \overline{[AB]} := \{[CD] \mid [CD] \equiv [AB]\}$$

As operações de soma e de produto, assim como as demais notações, estão diretamente relacionadas a uma escolha de uma reta ℓ de um ponto O e uma semi-reta $[OX)$, a qual define um sentido privilegiado, a qual chamaremos de sentido positivo. Fixaremos também o segmento $[OU] \in [OX)$, definido como *unidade*. Todas estas escolhas são fixadas *a priori*.

2.3.1 Soma de segmentos

Definição 2.15. *Dadas as classes de equivalência a e b, definimos a* soma entre as classes de equivalência *como: escolha um representante $[OA]$ da classe a, com $A \in [OX)$ e seja B tal que $O - A - B$ tal que $\overline{[AB]} = b$. Assim, definimos*

$$\overline{[OB]} = a + b.$$

Proposição 2.11. (HARTSHORNE, 2000, p. 169) *"A adição de classes de equivalência tem as seguintes propriedades:*

- *$a + b$ é bem definida;*
- *Comutatividade: $a + b = b + a$;*
- *Associatividade: $(a + b) + c = a + (b + c)$;*
- *Somente uma das possibilidades é verdadeira:*
  1. *$a = b$;*

2. *Existe c tal que $a + c = b$*
3. *Existe d tal que $a = b + d$."*

Demonstração.

- *$a + b$ é bem definida:* Sejam $\overline{[OA]} = a$ e B tal que $O - A - B$ com $\overline{[AB]} = b$, pela definição, $\overline{[OC]} = a + b$. Seja $[A'B'] \in a$ e C' tal que $A' - B' - C'$ com $[B'C'] \in b$. Assim, $\overline{[A'C']} = a + b$. Contudo, como $[OA] \in a$ e $[A'B'] \in a$, então $[OA] \equiv [A'B']$. Analogamente, $[AB] \equiv [B'C']$. Logo, pelo axioma (IV.3), $[OB] \equiv [A'C']$. Portanto, a soma entre classes de equivalência é bem definida, uma vez que o resultado desta operação independe da escolha do segmento eleito como representante da escolha da classe de equivalência.

- *Comutatividade:* Seja $\overline{[OA]} = a$ e seja o ponto B tal que $O - A - B$, com $\overline{[AB]} = b$. Então, pela definição da soma entre classes de equivalência, temos que $\overline{[OB]} = a + b$.

  Por outro lado, seja $\overline{[OC]} = b$ e D tal que $O - C - D$, com $\overline{[CD]} = a$. Assim, $\overline{[OD]} = b + a$.

  Mas, como $[OA] \equiv [CD]$ e $[AB] \equiv [OC]$, então, pelo axioma (IV.3), $[OB] \equiv [OD]$, ou seja, $a + b = b + a$.

- *Associatividade:* Seja $\overline{[OA]} = a$ e B tal que $O - A - B$ com $\overline{[AB]} = b$. Assim, $\overline{[OB]} = a + b$. Pelos axiomas (II.2) e (IV.1), tome C tal que $O - B - C$ e $\overline{[BC]} = c$. Dessa forma, $\overline{[OC]} = (a + b) + c$.

  Por outro lado, seja $\overline{[OD]} = b$ e tome E tal que $O - D - E$ com $\overline{[DE]} = c$. Assim, $\overline{[OE]} = b + c$. Tome F tal que $O - E - F$ com $\overline{[EF]} = a$. Portanto, $\overline{[OF]} = (b + c) + a$. Pela comutatividade provada acima, $\overline{[OF]} = a + (b + c)$.

  Notemos que como $[BC] \equiv [DE]$ e $[AB] \equiv [OD]$, então pelo axioma (IV.3), $[AC] \equiv [OE]$. Então, como $[OA] \equiv [EF]$, pelo mesmo argumento, resulta que $[OC] \equiv [OF]$. Portanto, concluímos que $(a + b) + c = a + (b + c)$.

- Dadas as classes de equivalência a e b sejam A e B tais que $\overline{[OA]} = a$ e $\overline{[OB]} = b$. Pelo axioma (II.3), podem ocorrer apenas:

  1. $A = B$ e, então $a = b$.
  2. $O - A - B$ logo, $[OA] < [OB]$, ou seja, $a < b$. Além disso,

  $$[OB] = [OA] + [AB] \Leftrightarrow b = a + \overline{[AB]}$$

  3. $O - B - A$ assim, $[OA] > [OB]$ e, portanto, $a > b$ e $a = b + \overline{[BA]}$.

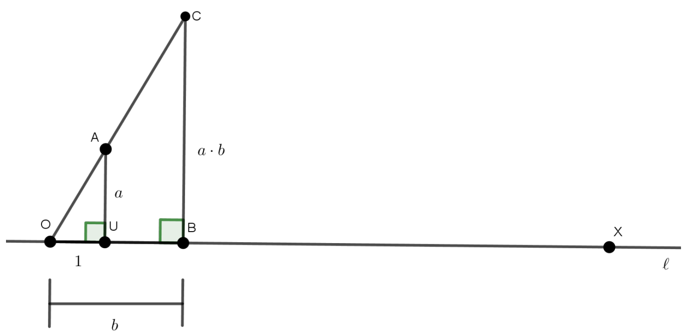
$\square$

2.3.2 Produto de segmentos

Fundamental para a construção do produto de segmentos é a fixação do segmento $[OU]$, chamado *unidade*. Denotaremos a classe de equivalência de $[OU]$ por 1, ou seja, $\overline{[OU]} =: 1$. Além disso, para a definição do produto é necessário assumir o Axioma das Paralelas Euclidiano.

Definição 2.16. *Dadas duas classes de equivalência a e b. Seja o triângulo OUA retângulo em U com catetos $\overline{[OU]} = 1$ e $\overline{[UA]} = a$. Seja $B \in [OX)$ tal que $\overline{[OB]} = b$. Trace a reta perpendicular a $[OX)$ passando por B. Pelo axioma das paralelas existe o ponto C de interseção entre esta reta perpendicular e a semi-reta $[OA)$. Definimos $\overline{[BC]}$ como o produto $a \cdot b$.*

Figura 9 – Produto de segmentos: $a \cdot b$



Fonte: A autora (2018).

Notamos que nesta definição construímos dois triângulos OUA e OBC, ambos retângulos e com o ângulo $\widehat{UOA} = \widehat{BOC} =: \alpha$ em comum e, assim, definimos $\overline{BC}$ como o produto $a \cdot b$.

Proposição 2.12. *Dadas as classes de equivalência a, b e c, o produto acima definido possui as seguintes propriedades:*

1. *Elemento neutro: $a \cdot 1 = a$.*

2. *Comutatividade: $a \cdot b = b \cdot a$.*

3. *Associatividade: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.*

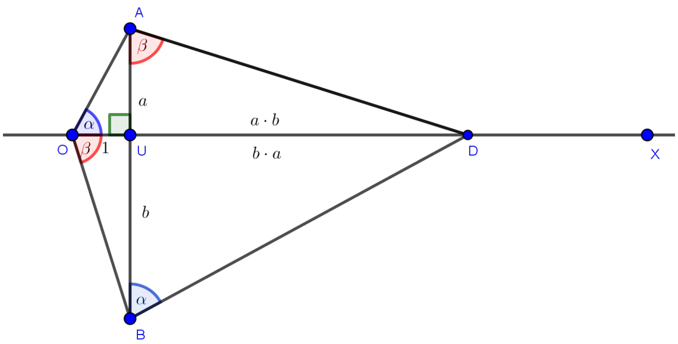
4. *Elemento inverso: para qualquer classe de equivalência a diferente de $\overline{[OO]}$, existe b tal que $a \cdot b = 1$.*

5. *Distributividade: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot b$.*

Demonstração. 1. *Elemento neutro:* fazendo a construção do produto $a \cdot b$ com $b = 1$, obteremos que os triângulos OUA e OBC são idênticos, ou seja $[BC] = [UA]$. Resultando que $a \cdot 1 = \overline{[BC]} = \overline{[UA]} = a$.

2. *Comutatividade:* Seja OUA o triângulo retângulo em U, com $\overline{[OU]} = 1$ e $\overline{[UA]} = a$. Seja B tal que $A - U - B$, com $\overline{[UB]} = b$.

Figura 10 – Produto de segmentos: $a \cdot b = b \cdot a$



Fonte: A autora (2018).

Pelo axioma (IV.4), seja $\widehat{UBD} \equiv \widehat{AOU}$ tal que $O - U - D$. Como $\widehat{AUO} \equiv \widehat{DUB}$ (opostos pelo vértice), o triângulo DUB é retângulo em U. Logo, resulta que $\overline{UD} = a \cdot b$.

Então, o triângulo BUO é retângulo em U, com $\overline{[OU]} = 1$ e $\overline{[BU]} = b$. E o triângulo DUA é retângulo em U com $\overline{[AU]} = a$ e $\widehat{DAU} \equiv \widehat{UOB}$, pois como $\widehat{AOD} \equiv \widehat{ABD}$, temos que $AOBD$ é um quadrilátero inscrito numa circunferência, assim os ângulos $\widehat{DAU}$ e $\widehat{UOB}$ enxergam o mesmo arco e, portanto, são congruentes.

Assim, temos que $\overline{[UD]} = b \cdot a$.

Como já tínhamos que $\overline{[UD]} = a \cdot b$, então concluímos que $a \cdot b = b \cdot a$.

3. *Associatividade:* Construa triângulos com catetos 1 e a e 1 e c, obtendo os ângulos α e γ, respectivamente. Construa o triângulo ABC de modo que $\overline{[BC]} = a \cdot b$. Pelos axiomas (II.2) e (IV.1), seja $D \in [CB)$ tal que $C - B - D$ tal que $\widehat{BAD} \equiv \gamma$. Assim, $\overline{[BD]} = c \cdot b$. Seja $E \in [AB)$ tal que $A - B - E$ e $\widehat{BDE} \equiv \alpha$.

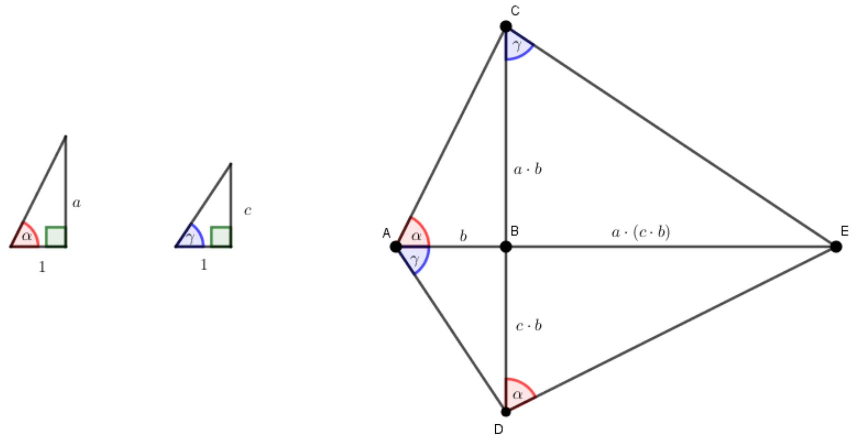
Ora, desta forma, $[BE]$ representa $a \cdot (c \cdot b)$.

Como $\widehat{CAE} \equiv \widehat{CDE}$, $ACDE$ é um quadrilátero inscritível, logo $\widehat{ECB} \equiv \widehat{BAD} \equiv \gamma$. Portanto, $\overline{[BE]} = c \cdot (a \cdot b)$.

Pela comutatividade, temos

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Figura 11 – Associatividade do produto: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

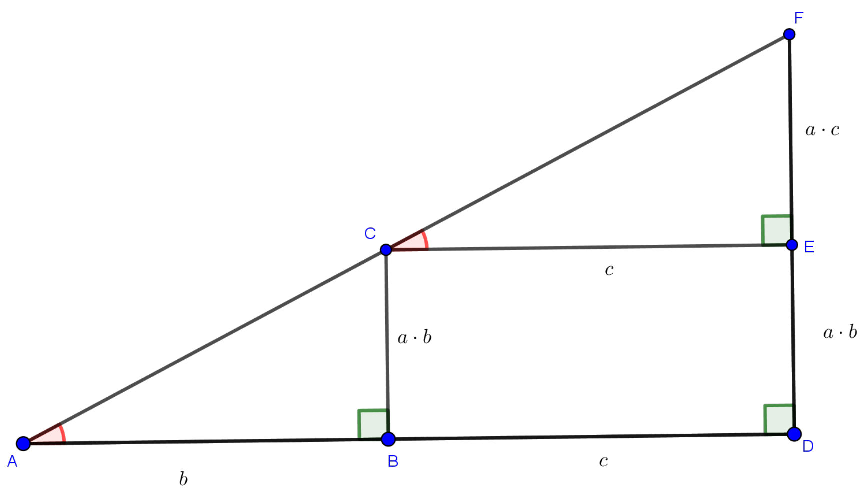


Fonte: A autora (2018).

4. *Elemento inverso:* Seja OUA o triângulo retângulo cujos catetos são 1 e a, denotemos $\widehat{AOU} = \alpha$ e $\widehat{UAO} = \beta$. Seja DEF um triângulo retângulo em E, com $\widehat{EDF} = \beta$ e $[DE] = 1$. Pela definição de produto, temos que $\overline{[DE]} = a \cdot b$, onde $\overline{[FE]} = b$. Portanto, resulta que dado a existe b tal que $a \cdot b = 1$.

5. *Distributividade:* Seja ABC construído de modo a obter o produto $a \cdot b$. Por (II.2) e (IV.1), seja D tal que $A - B - D$ e $\overline{[BD]} = c$. Pelo Axioma das Paralelas, seja $(CE) \parallel (AB)$. Por (II.2), existe F tal que $A-C-F$. Seja (DF) a reta perpendicular a (CE) e $[FD] \cap (CE) = E$. Pelo teorema dos ângulos alternos internos, $\widehat{ECF} \equiv \widehat{BAC}$. Ora, então $\overline{[FE]} = a \cdot c$. Como $BCDE$ é um paralelogramo, $\overline{[CE]} = c$ e $\overline{[DE]} = a \cdot b$.

Figura 12 – Distributividade: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$



Fonte: A autora (2018).

Por outro lado, $\overline{[AD]} = b + c$ e $\overline{[DF]} = a \cdot b + a \cdot c$. Porém, como $\widehat{FAD} = \alpha$ e $\widehat{ADF}$ é um ângulo reto, $[DF]$ representa também o produto $a \cdot (b + c)$. Portanto, concluímos que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

$\square$

2.3.3 Os pontos não pertencentes à semi-reta positiva

Definição 2.17. *A* antípoda *de A com relação ao ponto O é o ponto $^{-}A_O$ tal que: $^{-}A_O - O - A$ com $[^{-}A_O O] \equiv [OA]$. Notação: $^{-}A :=^{-} A_O$.*

As classes de equivalência foram definidas e existem devido à relação de congruência entre segmentos, a qual independe se os extremos do segmento estão ou não na semi-reta $[OX)$. Assim, adotaremos a partir deste momento a seguinte notação:

$$|a| := \overline{[AB]} = \{[OP] \mid [AB] \equiv [OP]\}$$

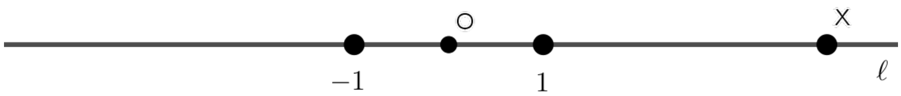
Como O divide a reta ℓ em exatamente dois subconjuntos, associaremos, então, a cada ponto $P \in \ell$ uma abcissa (símbolo), da seguinte forma:

- Se $P = O$, associaremos ao ponto P o símbolo 0;
- Caso contrário, diremos que a abcissa de P é a, ou seja, $P = a$, se $P \in \ell$ tal que $\overline{[OP]} = |a|$ e à antípoda de P associaremos a abcissa $-a$.

Definição 2.18. *Chamaremos por $\mathbb{P}$ o conjunto das abcissas a associadas aos pontos $P \in [OX)$ e por $^{-}\mathbb{P}$ o conjunto das abcissas das antípodas de P.*

Desta maneira, definimos que o ponto $U \in \ell$ será associado ao símbolo 1. Como $U \in [OX)$, então $1 \in \mathbb{P}$. Já a antípoda de U, $^{-}U \notin [OX)$ estará associado ao símbolo $-1 \in^{-} \mathbb{P}$.

Figura 13 – Reta ℓ com as escolhas $[OX)$ e 1



Fonte: A autora (2018).

Proposição 2.13. *Dado o ponto $A \in [OX)$ a antípoda existe e é única.*

Demonstração. Sabemos que a semi-reta $[OX)$ divide ℓ em exatamente dois subcontjuntos. Suponhamos que A' e A'' sejam as antípodas de $A \in [OX)$. Logo, temos que $A' \notin [OX)$ com $[OA'] \equiv [OA]$ e $A'' \notin [OX)$ com $[OA''] \equiv [OA]$. Pelo axioma (IV.1), resulta que $A' = A''$. □

Proposição 2.14. $^{-}(^{-}A) = A$

Demonstração. Seja $A \in [OX)$, por definição, $^{-}A \notin [OX)$ tal que $^{-}A - O - A$ com $[^{-}AO] \equiv [OA]$.

A antípoda de ^{-}A seria, então, o ponto $^{-}(^{-}A)$ tal que $^{-}A - O -^{-} (^{-}A)$ com $[^{-}(^{-}A)O] \equiv [^{-}AO]$. Assim, temos

$$[OA] \equiv [^{-}AO] \equiv [^{-}(^{-}A)O],$$

com A e $^{-}(^{-}A)$ pertencentes a semi-reta $[OX)$. Portanto, pelo axioma (IV.1), resulta que $^{-}(^{-}A) = A$. □

Como consequência direta deste resultado temos que se $A = a$ então $-(-a) = a$.

Corolário 2.3. $-(-a) = a$.

Definição 2.19. *Sejam os pontos A e B tais que $A = a$, ou seja, $A \in [OX)$ com $\overline{[OA]} = |a|$ e $B = -b$, ou seja, $B \notin [OX)$ tal que $\overline{[OB]} = |b|$. Tome $C \in [OX)$ tal que $O - A - C$ com $[AC] \equiv [BO]$. Define-se:*

$$a + (-b) := a - b := D$$

onde D é a antípoda de C com relação ao ponto A, isto é, $D =^{-} C_A$.

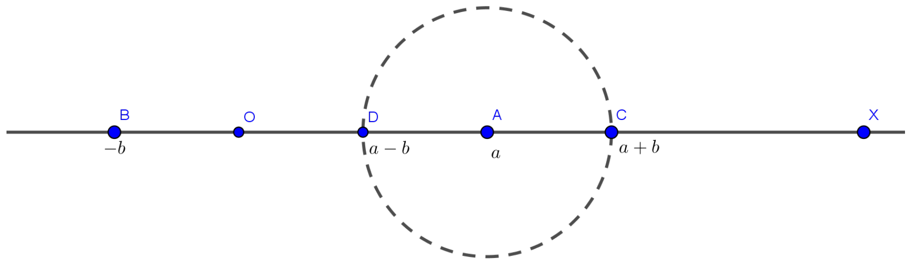
Além disso,

$$(-a) + (-b) := -(a + b)$$

O primeiro item da definição acima nos leva a concluir que:

- Se $[OA] < [AC]$, então $D \notin [OX) \Rightarrow a - b \in^{-} \mathbb{P}$;
- Se $[OA] > [AC]$, então $D \in [OX) \Rightarrow a - b \in \mathbb{P}$;
- Caso $D = O$, significa que $[OA] \equiv [AC]$, ou seja, $D = O$ então $a - b = 0$.

Figura 14 – $a - b$



Fonte: A autora (2018).

Uma vez que $(-a) + (-b)$ está definido como a antípoda de $(a + b)$ e, como visto, a antípoda é única, então a operação $(-a) + (-b)$ herda todas as propriedades já provadas para a soma $(a + b)$, o mesmo também ocorre para $a + (-b)$. Além disso, como $-(-b) = b$,

$$(-a) - (-b) = (-a) + b = b - a.$$

e

$$a - (-b) = a + b$$

Proposição 2.15. *1. $a + (-b)$ é bem definida;*

2. Comutatividade: $a + (-b) = (-b) + a$.

3. Associatividade:

$$(a + (-b)) + (-c) = a + ((-b) + (-c))$$

$$(a + b) + (-c) = a + (b + (-c))$$

Proposição 2.16. $a + (-a) = 0$

Demonstração. Seja $A = a$. De acordo com a definição da construção de $a + (-a)$, tome $B \in [OX)$ tal que $\overline{[AB]} = |a|$. Assim, ${}^-B_A$ é tal que ${}^-B_A \in [AO)$ e $[{}^-B_A A] \equiv [AB]$. Mas, como $A = a$, então $[OA] \equiv [AB]$, ou seja, $[{}^-B_A A] \equiv [OA]$. Assim, pelo axioma (IV.1), resulta que ${}^-B_A = O$, ou seja

$$|a + (-a)| = \overline{[{}^-B_A O]} = \overline{[OO]} = 0.$$

$\square$

Proposição 2.17. (Elemento neutro da soma): $a + 0 = a$.

Demonstração. Pela definição, $0 = \overline{[OO]}$, assim, $a + 0 = \overline{[OA]} + \overline{[OO]}$. Uma vez que $[OO]$ representa um ponto, tem-se que

$$a + 0 = \overline{[OA]} + \overline{[OO]} = \overline{[OA]}.$$

Ou seja, $a + 0 = a$. □

Proposição 2.18. (Unicidade do elemento simétrico) *Dado $A = a$ existe um único ponto $B = b$ tal que $a + b = 0$.*

Demonstração. Suponha que existam b_1 e b_2 elementos simétricos de a. Assim, pela associatividade da soma, tem-se que

$$b_1 = 0 + b_1 = (b_2 + a) + b_1 = b_2 + (a + b_1) = b_2 + 0 = b_2.$$

□

Definição 2.20. *A soma $a + (-b)$ é chamada* diferença entre a e b *e pode ser denotada como $a - b$.*

Definição 2.21. *Definimos:*

$$(-a) \cdot b := -(a \cdot b)$$

onde $a \cdot b$ é o produto entre classes de equivalência já definido.

Assim, para obtermos $(-a) \cdot b$, construímos $a \cdot b$ e encontramos $D \in [OX)$ tal que D tenha abcissa $a \cdot b$. Em seguida, tomamos D' como a antípoda de D e, então teremos $D' = (-a) \cdot b$, como na figura abaixo:

Proposição 2.19. *A operação definida acima é distributiva.*

Proposição 2.20. $a \cdot 0 = 0$.

Demonstração. Sabemos que dado a existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0$. Assim,

$$a \cdot 0 = a \cdot (a + (-a)) = a \cdot a + a \cdot (-a) = a \cdot a + (-(a \cdot a)) = 0.$$

□

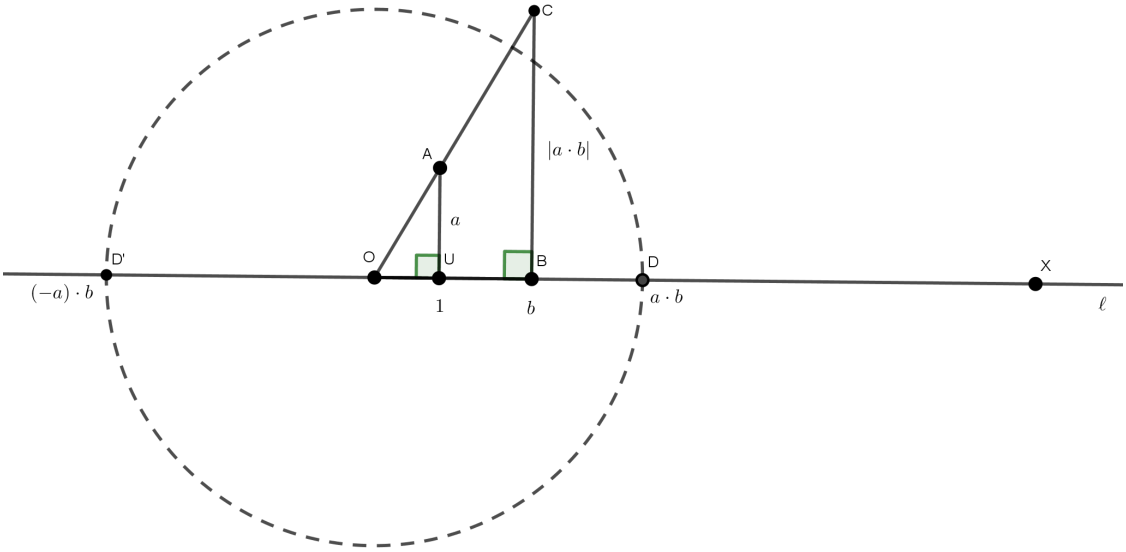
Proposição 2.21. $(-1) \cdot a = -a$.

Demonstração. Sabemos que $1 \cdot a = a$. Assim, pela definição de $a \cdot (-b)$ temos:

$$(-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -(a \cdot 1) = -a.$$

□

Figura 15 – $(-a) \cdot b$



Fonte: A autora (2018).

Proposição 2.22. *O produto é comutativo.*

Demonstração. Se $A = a$ e $B = b$ são tais que A e B são pontos da semi-reta $[OX)$, então sabemos que o produto $a \cdot b$ é comutativo e associativo. Assim,

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = -(b \cdot a) = (-1) \cdot b \cdot a = b \cdot ((-1) \cdot a) = b \cdot (-a).$$

□

Proposição 2.23. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Demonstração.

$$(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot (a) \cdot (-b) = (-1) \cdot -(a \cdot b) = a \cdot b.$$

□

Proposição 2.24. (Elemento inverso) *Dado* $-a$ *existe* $P \in \ell$ *com* $P = x$ *tal que* $(-a) \cdot x = 1$.

Demonstração. Sabemos que, dado $(-a)$ existe a tal que $a + (-a) = 0$. Pelo quinto item da proposição (2.12), existe b tal que $b \cdot a = 1$. Tome $x = -b$. Então,

$$(-a) \cdot x = (-a) \cdot (-b) = a \cdot b = 1.$$

□

No próximo capítulo, abordaremos com maior detalhe a construção do inverso do elemento a.

Proposição 2.25. *Para todo a, o elemento inverso b é único.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que b_1 e b_2 sejam os inversos multiplicativos de a. Assim,

$$b_1 = 1 \cdot b_1 = (b_2 \cdot a) \cdot b_1 = b_2 \cdot (a \cdot b_1) = b_2 \cdot 1 = b_2.$$

□

2.3.4 O corpo ordenado completo

Definição 2.22. (LIMA, 1995, p. 61) *"Um* corpo *é um conjunto* $\mathbf{K}$*, munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, as quais satisfazem aos axiomas de corpo, listados abaixo.*

A adição faz corresponder a cada par de elementos x e y pertencentes a $\mathbf{K}$ sua soma $x + y \in \mathbf{K}$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x \cdot y \in \mathbf{K}$.

Axiomas da adição

- Associatividade: *quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbf{K}$, tem-se*

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

- Comutatividade: *quaisquer que sejam $x, y \in \mathbf{K}$, tem-se*

$$x + y = y + x.$$

- Elemento neutro: *existe* $0 \in \mathbf{K}$ *tal que $x + 0 = x$, seja qual for $x \in \mathbf{K}$. O elemento neutro chama-se* zero*.*

- Elemento simétrico: *todo elemento $x \in \mathbf{K}$ possui $-x \in \mathbf{K}$ tal que*

$$x + (-x) = 0.$$

Axiomas da multiplicação

- Associatividade: *dados quaisquer x, y, z elementos de $\mathbf{K}$, tem-se:*

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

- Comutatividade: *sejam quais forem x, y em $\mathbf{K}$,*

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

- Elemento neutro: *existe* $1 \in \mathbf{K}$ *tal que* $1 \neq 0$ *e* $x \cdot 1 = x$*, para todo* $x \in \mathbf{K}$.
- Inverso multiplicativo: *todo* $x \neq 0$ *em* $\mathbf{K}$ *possui um inverso* $x^{-1} \in \mathbf{K}$ *tal que*

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

Axioma da distributividade: *Dados* x, y *e* z *elementos de* $\mathbf{K}$*,*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.''$$

Exemplo 2.4. *O conjunto* $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ *com as operações*

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1,$$

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0,$$

$$1 = 1 \cdot 0$$

e

$$1 \cdot 1 = 1,$$

no qual o simétrico e o inverso de cada elemento é ele próprio. Com estas definições, temos que $\mathbb{Z}_2$ *é um corpo.*

Conforme as definições e propriedades comprovadas nas seções anteriores, temos que o conjunto dos pontos da reta ℓ, onde foram fixados a semi-reta positiva $[OX)$, a unidade $[OU]$ e as operações de soma e produto foram definidas, formam um corpo, ou seja, o conjunto $\mathbb{P} \cup \{0\} \cup^{-} \mathbb{P}$ munido das operações de adição e multiplicação definidas neste capítulo é um corpo.

Definição 2.23. *Dado um conjunto* $\mathbf{K}$ *e uma relação* $<$ *entre seus elementos, dizemos que* $<$ *é uma* relação de ordem *se, dados* x, y *e* z *elementos de* $\mathbf{K}$*, tem-se:*

- Transitividade: *se* $x < y$ *e* $y < z$*, então* $x < z$.
- Tricotomia: *valem apenas uma das opções:*
  1. $x = y$
  2. $x < y$
  3. $x > y$
- Monotonicidade da adição: $x < y \Rightarrow x + z < y + z$
- Monotonicidade da multiplicação:
  - *Para todo* $z > 0$*, tem-se que se* $x < y$ *então* $x \cdot z < y \cdot z$.

– *Para todo $z < 0$, tem-se que se $x < y$ então $x \cdot z > y \cdot z$.*

Revisitemos a definição de ordem entre pontos (Definição 2.6). Uma vez que a cada ponto da reta ℓ associamos um símbolo do conjunto $\mathbb{P} \cup \{0\} \cup^- \mathbb{P}$, queremos que esta definição também seja estendida para os elementos deste conjunto.

Assim, dados a e b pertencentes a $\mathbb{P} \cup \{0\} \cup^- \mathbb{P}$, tomamos A e B na reta ℓ tais que $A = a$ e $B = b$, ou seja,

- se $a \in \mathbb{P}$, então $A \in [OX)$ com $[OA] \in |a|$;
- se $a \in^- \mathbb{P}$, então $A \in \ell$ com $A \notin [OX)$ tal que $[OA] \in |a|$;
- se $a \in \{0\}$, então $A = O$.

O mesmo processo é válido para B. Então, podemos comparar os pontos A e B de acordo com a definição de ordem entre pontos, de forma que se $A < B$ então $a < b$ e se $A > B$ então $a > b$.

Gostaríamos de encontrar uma maneira de relacionar os subconjuntos $\mathbb{P}$ e $^-\mathbb{P}$ com a definição de ordem comentada acima.
Da definição 2.6, temos que $B > A$ se:

- $O \in [BA)$, caso $B \in [OX)$;
- $O \in [AB)$, caso contrário.

Analisemos, então, separadamente cada um destes casos em que $B > A$:

1. $B \in [OX)$:

   Como $[OX)$ divide os pontos de ℓ em exatamente dois conjuntos, podemos ter $A \in [OX)$ ou $A \notin [OX)$. Vejamos:

   a) Se $A \in [OX)$ tem-se $O - A - B$, ou seja, $[OA] < [OB]$. Então, se C é o ponto tal que $C = b - a$, então $C \in [OX)$, ou seja, $b - a \in \mathbb{P}$.

   b) Se $A \notin [OX)$, então $^-A = -a \in [OX)$ ($-a$ enquanto simétrico de a). Como $b \in [OX)$, tem-se que $b + (-a) = b - a \in [OX)$, ou de outra forma, $b - a \in \mathbb{P}$.

2. $B \notin [OX)$:

   Já que $O \in [AB)$, então temos a seguinte configuração $A - B - O$ e $A - B - X$ e, portanto, $[AO] > [BO]$. Como A e B não são pontos da semi-reta $[OX)$, temos que as abcissas são $A = -a$ e $B = -b$. Assim,

$$B - A = (-b) - (-a) = -b + a = a - b.$$

Como $[OA] > [OB]$, então $|a| > |b|$. Logo, se $D = a - b$, então $D \in [OX)$, ou seja, $b - a \in \mathbb{P}$.

Por tudo isso, resulta que

$$a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{P}.$$

Resta-nos agora provar que esta relação é, de fato, uma relação de ordem no conjunto $\mathbb{P} \cup \{0\} \cup^{-} \mathbb{P}$.

Proposição 2.26. *A relação definida acima é uma relação de ordem.*

Demonstração. Sejam a, b e c elementos de $\mathbb{P} \cup \{0\} \cup^{-} \mathbb{P}$.

Transitividade: Suponha que $a < b$ e $b < c$. Então, por definição,

$$a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{P}$$

$$b < c \Rightarrow b - c \in \mathbb{P}$$

Assim, como $\mathbb{P}$ é fechado para a adição, temos que $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{P}$.

Logo,

$$(b - a) + (c - b) = (c - a) + (b - b) = (c - a) + 0 = c - a$$

Portanto, $c - a \in \mathbb{P}$ e, então, $a < c$.

- *Monotonicidade da adição:* Seja $a < b$, então, $b - a \in \mathbb{P}$. Logo,

$$b - a = b - a + 0 = b - a + c + (-c) = (b + c) - (a + c).$$

Portanto, $(b + c) - (a + c) \in \mathbb{P}$.

- *Monotonicidade do produto:* Seja $a < b$, ou seja $b - a \in \mathbb{P}$.

  - Se $c \in \mathbb{P}$, então, pela definição do produto,

$$c \cdot (b - a) = c \cdot b - c \cdot a \in \mathbb{P}.$$

  Portanto, tem-se que $c \cdot a < c \cdot b$.

  - Se $c \in^{-} \mathbb{P}$, tem-se que $-c \in \mathbb{P}$. Logo, pela definição de produto,

$$-c \cdot (b - a) \in \mathbb{P} \Rightarrow -c \cdot b + (-c) \cdot (-a) = -c \cdot b + c \cdot a = c \cdot a - c \cdot b \in \mathbb{P}.$$

  Portanto, concluímos que $c \cdot a > c \cdot b$.

Por tudo isso, temos que a relação definida em $\mathbb{P} \cup \{0\} \cup^{-} \mathbb{P}$ é, de fato, uma relação de ordem.

□

Definição 2.24. (LIMA, 1995, p. 65) *"Um* corpo ordenado *é um conjunto* **K***, no qual se destacou um subconjunto* $\mathbf{P} \subset \mathbf{K}$*, chamado o conjunto dos elementos positivos de* **K***, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Ou seja,*

$$x, y \in \mathbf{P} \Rightarrow x + y \in \mathbf{P} \ \ e x \cdot y \in \mathbf{P}.$$

2. *Dado* $x \in \mathbf{K}$*, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre:*

   a) $x = 0$

   b) $x \in \mathbf{P}$

   c) $-x \in \mathbf{P}$*"*

Algumas consequências decorrem desta definição. São elas:

- Se $^{-}\mathbf{P}$ for definido como o conjunto dos elementos $-x$, onde $x \in \mathbf{P}$, teremos

$$\mathbf{K} =^{-} \mathbf{P} \cup \{0\} \cup \mathbf{P},$$

  sendo **P**, $\{0\}$ e $^{-}\mathbf{P}$ conjuntos dois a dois disjuntos.

- Se $a \neq 0$ então $a^2 \in \mathbf{P}$, já que sendo $a \neq 0$, ou $a \in \mathbf{P}$ ou $a \in^{-} \mathbf{P}$.

$$a \in \mathbf{P} \Rightarrow a \cdot a = a^2 \in \mathbf{P}$$

$$-a \in \mathbf{P} \Rightarrow (-a) \cdot (-a) = a^2 \in \mathbf{P}$$

- $1 \cdot 1 = 1$ é sempre positivo e $-1 \in^{-} \mathbf{P}$

Exemplo 2.5. $\mathbb{Q}$ *é um corpo ordenado, em que* $\mathbb{P}$ *é formado pelos racionais* $\dfrac{p}{q}$ *em que* p *e* q *são inteiros ou ambos negativos ou ambos positivos.*

Exemplo 2.6. *O corpo* $\mathbb{Z}_2$ *não é um corpo ordenado, pois* $1 + 1 = 0$*, enquanto que num corpo ordenado sempre* $1 \in \mathbb{P}$ *e a soma de dois elementos positivos deveria ainda ser positivo.*

Uma vez escolhido o ponto O e a semi-reta $[OX)$, qualquer ponto $P \in \ell$ tem como únicas opções: $P = O$, $P \in [OX)$ e $P \notin [OX)$ e, então a antípoda $^{-}P \in [OX)$. Associando uma abcissa p ao ponto P, isto significa que $p = 0$ ou $p \in \mathbb{P}$ ou $-p \in \mathbb{P}$. Ou seja, o conjunto $\mathbb{P} \cup \{0\} \cup^{-} \mathbb{P}$ é um corpo ordenado.

Proposição 2.27. *O conjunto* $\mathbb{P} \cup \{0\} \cup^{-} \mathbb{P}$ *é um corpo ordenado.*

Definição 2.25. (LIMA, 1995, p. 80) *"Um corpo ordenado* $\mathbf{K}$ *chama-se* completo *quando todo subconjunto não-vazio, limitado superiormente,* $X \subset \mathbf{K}$*, possui supremo em* $\mathbf{K}$*."*

Desta definição, temos que num corpo ordenado completo todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente, $Y \subset \mathbf{K}$, possui ínfimo. Já que podemos definir $X = -Y$, isto é, $X = \{-y | y \in Y\}$. Então, X é não vazio e limitado superiormente, logo existe a, o supremo de X, e $-a$, o ínfimo de Y.

Exemplo 2.7. *O corpo ordenado* $\mathbb{Q}$ *não é completo, pois se* $X = \{x \in \mathbb{Q} | x \geqslant 0 \text{ e } x^2 < 2\}$*. Então* X *é um conjunto limitado tanto inferiormente quanto superiormente. Mas o supremo de* X *é* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$*.*

Sejam $\mathbb{F}_1$ com as operações $\oplus$ e $\odot$ e a relação de ordem $\lhd$ e $\mathbb{F}_2$ onde estão definidas as operações $+$ e $\cdot$ e a relação de ordem $<$, definimos:

Definição 2.26. *Um* isomorfismo *de* $\mathbb{F}_1$ *para* $\mathbb{F}_2$ *é uma função* $\varphi : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ *com as seguintes propriedades:*

- Injetividade: *se* $x, y \in \mathbb{F}_1$ *com* $x \neq y$ *então* $\varphi(x) \neq \varphi(y)$*;*
- Sobrejetividade: *dado* $z \in \mathbb{F}_2$ *então* $z = \varphi(x)$ *para algum* $x \in \mathbb{F}_1$*;*
- Preserva as operações: *se* x *e* y *são elementos de* $\mathbb{F}_1$*, então*

$$\varphi(x \oplus y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ e}$$

$$\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

- Preserva a ordem: *Caso* $\mathbb{F}_1$ *e* $\mathbb{F}_2$ *sejam corpos ordenados, é preciso também que caso* $x \lhd y$ *então* $\varphi(x) < \varphi(y)$*.*

Definição 2.27. *Dois corpos* $\mathbb{F}_1$ *e* $\mathbb{F}_2$ *são chamados* isormofos *se existe um isormorfismo* $\varphi : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$*.*

Teorema 2.6. (LOPES, 2006, p. 140) *Se* $\mathbb{F}$ *é um corpo ordenado completo, então* $\mathbb{F}$ *é isomorfo a* $\mathbb{R}$*.*

O conjunto $\mathbb{P} \cup \{0\} \cup^{-} \mathbb{P}$ foi construído de forma biunívoca com os pontos da reta ℓ, fixando uma escolha de semi-reta $[OX)$. Nesta seção, pudemos comprovar que este conjunto forma um corpo ordenado. O axioma da completude de Dedekind (V.2) e da propriedade arquimediana (V.1) garantem que a reta ℓ é contínua. De forma não rigorosa, podemos intuir que $\mathbb{P} \cup \{0\} \cup^{-} \mathbb{P}$ é um corpo ordenado completo e que, portanto, é isomorfo a $\mathbb{R}$.

De fato, esta intuição é comprovada e conhecida por muitos como Postulado da Régua. Enunciaremos aqui como o Teorema da Régua e maiores detalhes quanto à demonstração deste resultado pode ser observado em Amaro e Sá Earp (2014).

Teorema 2.7. (Postulado da Régua) *Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os Números Reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.*

Este enunciado afirma que os pontos de uma reta formam uma bijeção com os números reais. Assim, as abcissas que associamos aos pontos da reta ℓ podem ser representadas pelos números reais, ou seja,

$$\mathbb{P} \cup \{0\} \cup^{-} \mathbb{P} = \mathbb{R}.$$

2.3.5 Semelhança de triângulos

Uma vez que podemos multiplicar segmentos, podemos agora tratar de triângulos semelhantes.

Definição 2.28. *Os segmentos* $[AB]$ *e* $[CD]$ *são ditos* proporcionais *aos segmentos* $[A'B']$ *e* $[C'D']$*, o que denotaremos por*

$$\frac{\overline{[AB]}}{\overline{[A'B']}} = \frac{\overline{[CD]}}{\overline{[C'D']}}$$

se

$$\overline{[AB]} \cdot \overline{[C'D']} = \overline{[CD]} \cdot \overline{[A'B]}.$$

Definição 2.29. *Dois triângulos* ABC *e* $A'B'C'$ *são denominados* semelhantes *se os respectivos ângulos internos são congruentes e os respectivos lados são proporcionais. Ou seja, se verificam:*

- $\widehat{A} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{C}$ *e*
- $\dfrac{\overline{[AB]}}{\overline{[A'B']}} = \dfrac{\overline{[AC]}}{\overline{[A'C']}} = \dfrac{\overline{[BC]}}{\overline{[B'C']}}$.

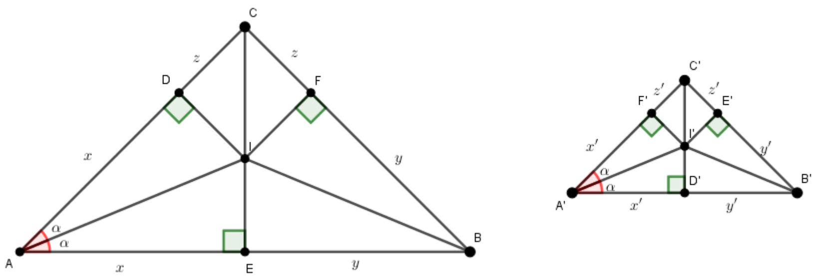
Teorema 2.8. (Caso de semelhança - AAA) *Se dois triângulos possuem os três ângulos congruentes, então estes são semelhantes.*

Demonstração. No triângulo ABC seja I o ponto em que as bissetrizes dos três ângulos se encontram. O ponto I é chamado baricentro do triângulo ABC e é sempre interno ao triângulo. Além disso, I é o centro da circunferência inscrita em ABC.

Marque os pontos D, E e F pertencentes a cada um dos lados do triângulo, tais que

$$[ID] \perp [AC], [IE] \perp [AB] \text{ e } [IF] \perp [BC].$$

Figura 16 – Caso de semelhança - (AAA)



Fonte: A autora (2018).

Uma vez que I é o centro da circunferência inscrita em ABC, então

$$\overline{[ID]} = \overline{[IE]} = \overline{[IF]} = h.$$

Logo, pelo critério cateto-hipotenusa,

$$IFA \equiv IDA, IDB \equiv IEB \text{ e } IEC \equiv IFC.$$

Assim,

$$\overline{[AF]} = \overline{[AD]} = x$$
$$\overline{[BD]} = \overline{[BE]} = y$$
$$\overline{[EC]} = \overline{[FC]} = z$$

Repita o mesmo processo em $A'B'C'$, obtendo

$$\overline{[A'F']} = \overline{[A'D']} = x'$$
$$\overline{[B'D']} = \overline{[B'E']} = y'$$
$$\overline{[E'C']} = \overline{[F'C']} = z'$$

em que $\overline{[I'D']} = \overline{[I'E']} = \overline{[I'F']} = h'$.

Seja OUG o triângulo retângulo em U, tal que $\overline{[OU]} = 1$ e $\widehat{UOG} \equiv \widehat{IFA}$. Denote $\overline{[UG]} = r_1$. Desta maneira, o triângulo ADI é tal que $\overline{[DI]} = x \cdot r_1$, ou seja,

$$h = x \cdot r_1.$$

Como, por hipótese, $\widehat{C'A'B'} \equiv \widehat{CAB}$, então $\widehat{I'A'D'} \equiv \widehat{IAD}$. Logo, pelo argumento anterior, concluímos que

$$h' = x' \cdot r_1,$$

ou seja,

$$\frac{x}{x'} = \frac{h}{h'}.$$

Repetindo este mesmo processo com os outros pares de triângulos, obtemos

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}.$$

Então,

$$\frac{\overline{[AB]}}{\overline{[A'B']}} = \frac{\overline{[BC]}}{\overline{[B'C']}} = \frac{\overline{[AC]}}{\overline{[A'C']}}.$$

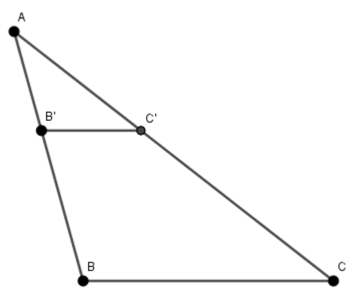
Portanto, concluímos que ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. □

Uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre constante e que ângulo-ângulo-ângulo é um caso de semelhança, então basta que dois pares de ângulos sejam congruentes.

Corolário 2.4. (Caso de semelhança - AA) *Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$, então ABC e $A'B'C'$ são triângulos semelhantes.*

Teorema 2.9. (AMARO; SÁ EARP, 2014, p. 107) (Teorema de Tales) *"Se uma reta paralela a um dos lados do triângulo ABC intersecta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão. Inversamente, se $B' \in [AB]$ e $C' \in [AC]$ são pontos que dividem os segmentos na mesma proporção, então $(B'C') \parallel (BC)$."*

Figura 17 – Teorema de Tales



Fonte: A autora (2018).

Demonstração. Uma vez que $(B'C')$ é paralelo a (BC), pelo teorema dos ângulos alternos internos (Teorema 2.4),

$$\widehat{AB'C'} \equiv \widehat{ABC} \text{ e } \widehat{B'C'A} \equiv \widehat{BCA}.$$

Então, pelo caso de semelhança AA, resulta que ABC e $AB'C'$ são semelhantes. Portanto, seus lados são proporcionais.

Por outro lado, sejam B' e C' tais que $\dfrac{\overline{[AB']}}{\overline{[AB]}} = \dfrac{\overline{[AC']}}{\overline{[AC]}}$. Tome $D \in [AC]$ tal que $[B'D] \parallel [BC]$. Logo, pelo caso anterior, temos

$$\frac{\overline{[AB']}}{\overline{[AB]}} = \frac{\overline{[AD]}}{\overline{[AC]}}.$$

Por consequência, temos que $\dfrac{\overline{[AD]}}{\overline{[AC]}} = \dfrac{\overline{[AC']}}{\overline{[AC]}}$, ou seja $\overline{[AD]} = \overline{[AC']}$. Pelo axioma (IV.1), resulta que $D = C'$, ou seja $(BC') \parallel (BC)$. □

Observemos que uma vez construída a reta real e notada a bijeção existente entre os Números Reais e os pontos de uma reta, o Teorema de Tales, como demonstrado acima, também inclui os segmentos $[AC]$ incomensuráveis.

Proposição 2.28. (Caso de semelhança - LLL) *Sejam ABC e $A'B'C'$. Se*

$$\frac{\overline{[AB]}}{\overline{[A'B']}} = \frac{\overline{[AC]}}{\overline{[A'C']}} = \frac{\overline{[BC]}}{\overline{[B'C']}},$$

então ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

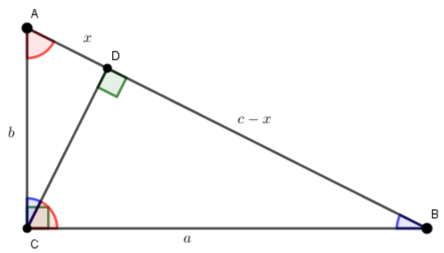
Teorema 2.10. (Teorema de Pitágoras) *Seja o triângulo retângulo ABC com catetos $\overline{[BC]} = a$ e $\overline{[AC]} = b$ e hipotenusa $\overline{[AB]} = c$. Então,*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Demonstração. Seja $[CD]$ a altura relativa a $[AB]$, ou seja, $D \in [AB]$ tal que $[CD] \perp [AB]$. Assim, como ADC é retângulo, tem-se $A - D - B$.

Se $\overline{[AD]} = x$, então $\overline{[BD]} = c - x$. Por (AA) os triângulos ADC e ACB são semelhantes. Logo,

Figura 18 – Teorema de Pitágoras



Fonte: A autora (2018).

$$\frac{x}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow c \cdot x = b^2$$

Analogamente, CDB e ACB são semelhantes, assim,

$$\frac{c-x}{a} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow c^2 - c \cdot x = a^2 \Leftrightarrow c \cdot x = c^2 - a^2.$$

Portanto,

$$b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 - a^2 + a^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

$\square$

3 Proposta de abordagem para os Números Reais na Educação Básica

Entendemos que o Conjunto dos Números Reais é um assunto complexo para ser abordado com toda a sua riqueza de detalhes e demonstrações na Educação Básica, uma vez que demanda conceitos como limites, supremos e ínfimos. Contudo, percebemos no estudo da Aritmética de Segmentos apresentada no capítulo anterior uma forma de abordar alguns aspectos referentes a este assunto no Ensino Médio, onde os estudantes já tomaram contato com os Reais ao longo do Ensino Fundamental e agora revisitam o tema com o objetivo de compreendê-lo com maior maturidade para tratar das funções reais, estudadas no primeiro ano.

A Aritmética de Segmentos possibilita uma compreensão, ao menos visual, do conjunto dos Números Reais e, assim como Lima et al. (2006), entendemos que esta seja uma maneira adequada de apresentar este conteúdo de forma mais madura e desenvolver a intuição para conceitos mais aprofundados a serem estudados posteriormente.

> É verdade que a apresentação rigorosa da teoria dos números reais (conforme feita nos cursos de Análise) foge inteiramente ao nível e aos objetivos do ensino médio. Mas isto não deve ser motivo para escamoteações. Pelo contrário, quando se tem que falar sobre números reais para uma audiência matematicamente imatura, tem-se aí uma boa oportunidade para fazer a ligação entre a Matemática e o cotidiano, apresentando-os como resultados de medições (LIMA et al., 2006, p. 82).

Esta proposta foi elaborada para as aulas de Matemática do primeiro ano do Ensino Médio. Portanto, destina-se à revisão dos Números Reais. Desta maneira, seria exaustivo e talvez inconveniente fazer a construção dos números reais via Aritmética de Segmentos como fizemos no capítulo anterior. Entendemos que este tópico deve ser revisitado com olhar mais maduro de modo que os alunos possam compreender lacunas deixadas ao longo do Ensino Fundamental. Por isso, fizemos a escolha de seguir a seguinte ordem:

1. Revisar a semelhança de triângulos e, com isso, definir a soma e o produto de segmentos;
2. Construir os Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais, revisitando cada um destes conjuntos e concluir a bijeção entre os Números Reais e os pontos da reta.

Ressaltamos que este material é destinado a auxiliar o professor interessado em preparar suas aulas por meio desta abordagem, mas de acordo com as possibilidades disponíveis em sua realidade escolar. As construções propostas, por exemplo, podem ser feitas tanto com régua e compasso no papel ou com softwares geométricos, tais como o GeoGebra. Por este motivo, optamos por não trazer um plano de aula detalhado e fechado, mas apresentamos uma re-leitura da teoria apresentada no capítulo anterior, com observações e sugestões baseadas no experimento realizado para que o educador possa preparar suas aulas.

Este material serviu como base para as aulas propostas para turmas do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola federal. Neste experimento as aulas foram elaboradas de forma expositiva dialogada, em que a professora/pesquisadora conduzia as discussões de modo que os estudantes chegassem às conclusões esperadas. As construções foram feitas utilizando régua não graduada, compasso, transferidor, barbante e papel, pois não havia computadores em número suficiente. Alguns estudantes refizeram as construções do caderno no GeoGebra e apresentaram à turma, utilizando o projetor e o único computador disponível em sala. A análise deste experimento encontra-se no próximo capítulo.

3.1 Construções básicas com régua e compasso

Notamos que muitos estudantes chegam ao Ensino Médio sem nunca ter utilizado o compasso. Como a abordagem proposta utiliza muito deste recurso, inclusive de algumas propriedades dos círculos, por exemplo, optamos em fazer uma aula introdutória com construções mais simples. Também com o objetivo de introduzir as demonstrações matemáticas, todas as construções foram trabalhadas na seguinte ordem: elaboração do objeto desejado, indagação se a construção feita produziu, de fato, o que se propunha e justificativa da construção respondendo a este questionamento.

Definição 3.1. *Fixado um ponto do plano O e um segmento $[OA]$, chamamos* circunferência *de centro O e raio $[OA]$, denotada por $\mathcal{C}_{O,[OA]}$ o conjunto de pontos P do plano tais que $[OP] \equiv [OA]$.*

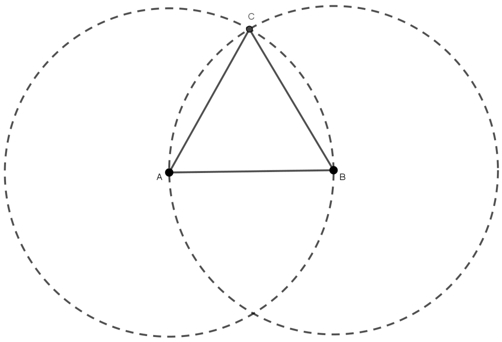
Os axiomas da Geometria Euclidiana Plana são válidos nas construções com régua e compasso, porém alguns deles são mais usados e, por este motivo, preferimos apresentarmos-os aos estudantes como pressupostos básicos para estas construções. São eles:

- Dados dois pontos é possível traçar uma única reta;
- Definidos um ponto como centro e um segmento como raio é possível traçar uma única circunferência, utilizando o compasso.
- É permitido marcar os pontos de interseção entre retas e/ou circunferências.

Construção 1. *Triângulo equilátero*

- Construa o segmento $[AB]$.
- Construa as circunferências $\mathcal{C}_{A,[AB]}$ e $\mathcal{C}_{B,[BA]}$.
- Seja C um dos pontos de interseção entre as circunferências.
- Trace os segmentos $[AC]$ e $[BC]$.

Figura 19 – Construção com régua e compasso: triângulo equilátero



Fonte: A autora (2018).

- *Afirmação:* ABC é um triângulo equilátero.

Demonstração. Como $C \in \mathcal{C}_{A,[AB]}$ então $[AC] \equiv [AB]$, analogamente, $[BC] \equiv [AB]$. Portanto, $[AB] \equiv [AC] \equiv [BC]$. □

Definição 3.2. *Dado um segmento* $[AB]$ *chamamos* mediatriz de $[AB]$ *à reta* ℓ *tal que* $\ell \perp [AB]$ *com* $M \in \ell$, *sendo* M *o ponto médio de* $[AB]$.

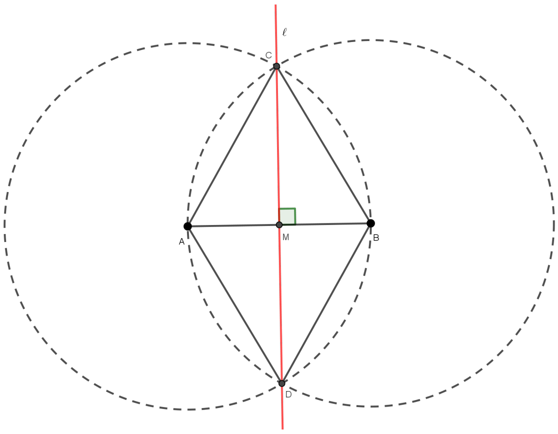
Construção 2. *Mediatriz do segmento* $[AB]$.

- Construa $\mathcal{C}_{A,[AB]}$ e $\mathcal{C}_{B,[AB]}$. Sejam C e D os pontos de interseção entre estas circunferências;
- Trace a reta $(CD) = \ell$.
- *Afirmação:* ℓ é a mediatriz do segmento $[AB]$.

Demonstração. Seja $M = \ell \cap [AB]$. Os triângulos ACD e BCD são isósceles, pois, por construção,

$$[AC] \equiv [AD] \equiv [BD] \equiv [CB]$$

Figura 20 – Construção com régua e compasso: reta mediatriz do segmento $[AB]$



Fonte: A autora (2018).

Logo,

$$\widehat{ACD} \equiv \widehat{ADC} \equiv \widehat{CDB} \equiv \widehat{BCD}$$

Então, como

$$[AD] \equiv [BD], \widehat{ADM} \equiv \widehat{BDM} \text{ e } [DM] \equiv [DM],$$

por LAL, $AMD \equiv BMD$. Portanto, como $[AM] \equiv [BM]$, então M é o ponto médio de $[AB]$ e como $\widehat{AMD} \equiv \widehat{BMD}$ e são suplementares, temos que estes ângulos são retos. Assim, resulta que ℓ é a mediatriz de $[AB]$. □

Construção 3. *Reta perpendicular a ℓ passando por um ponto $A \in \ell$.*

- Com centro em A e raio qualquer, r, trace a circunferência $\mathcal{C}_{A,r}$. Marque os pontos B e C de interseção entre $\mathcal{C}_{A,r}$ e ℓ;
- Trace a mediatriz, t, do segmento $[BC]$.
- *Afirmação:* $t \perp \ell$ e $A \in t$.

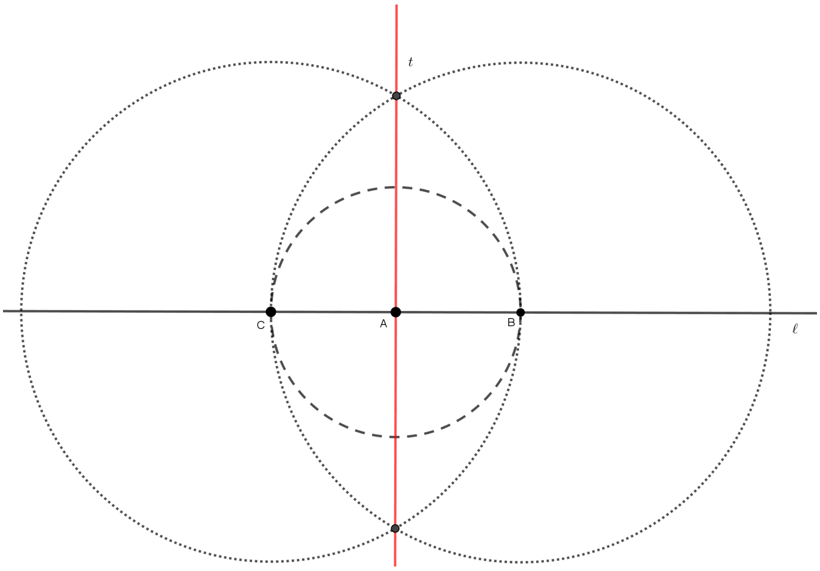
Demonstração. Na construção anterior, verificamos que $t \perp \ell$. Como, por construção, $[BA] \equiv [CA]$, e o ponto médio de um segmento é único, concluímos que $A \in t$.

□

Construção 4. *Reta perpendicular a ℓ passando por $A \notin \ell$.*

- Trace a circunferência centro em A e raio maior que a distância entre o ponto A e a reta ℓ, ou seja,
$$\mathcal{C}_{A,r} \cap \ell = \{B, C\}.$$
- Sejam B e C as intercessões entre $\mathcal{C}_{A,r}$ e ℓ.

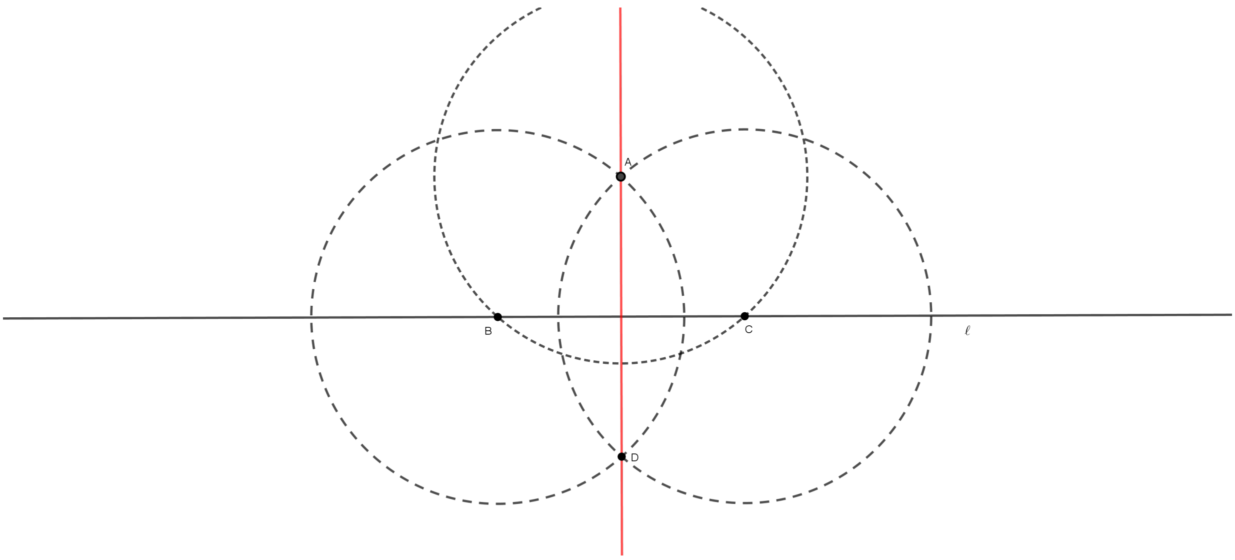
Figura 21 – Construção com régua e compasso: reta perpendicular a ℓ passando por um ponto $A \in \ell$



Fonte: A autora (2018).

- Trace $\mathcal{C}_{C,[AC]}$ e $\mathcal{C}_{B,[BA]}$.
- Seja $D = \mathcal{C}_{C,[AC]} \cap \mathcal{C}_{B,[BA]}$, com $D \neq A$.
- Trace a reta (DA).
- *Afirmação:* $(DA) \perp \ell$.

Figura 22 – Construção com régua e compasso: reta perpendicular a ℓ passando por $A \notin \ell$



Fonte: A autora (2018).

Demonstração. Por construção $[AB] \equiv [AC]$. Logo,

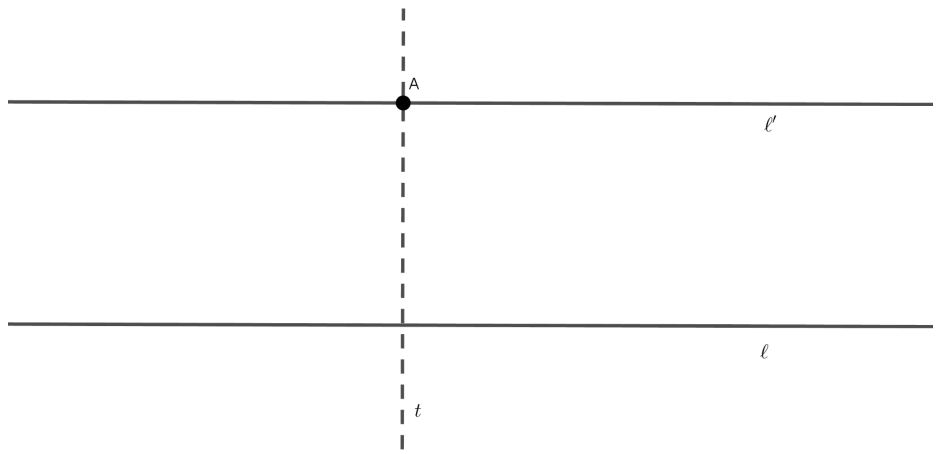
$$[AB] \equiv [BD] \equiv [AC] \equiv [CD].$$

Assim, pelo caso de congruência LLL, resulta que $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAD}$.
Sendo $E = (AD) \cap \ell$, pelo caso de congruência LAL, temos $ABE \equiv ACE$. Portanto, $\widehat{AEB} \equiv \widehat{CEA}$, os quais são suplementares. Logo, concluímos que estes ângulos são retos e $(AD) \perp \ell$. □

Construção 5. *Reta paralela a ℓ passando por A.*

- Trace a reta $t \perp \ell$ com $A \in t$.
- Construa a reta ℓ' tal que $\ell' \perp t$ e $A \in \ell'$.
- *Afirmação:* $\ell \parallel \ell'$.

Figura 23 – Construção com régua e compasso: reta paralela a ℓ passando por A



Fonte: A autora (2018).

Demonstração. Por construção, os ângulos alternos internos são congruentes. Assim, pelo Teorema dos Ângulos Alternos Internos (Teorema 2.4), resulta que $\ell \parallel \ell'$. □

Exercícios sugeridos

Exercício 1. *Descreva como construir um quadrado a partir de um de seus lados. Justifique a sua construção.*

Exercício 2. *Construa um triângulo isósceles tal que:*

1. *sejam dados a base e os lados.*
2. *sejam dados a base e a altura.*

3. *seja um triângulo retângulo.*

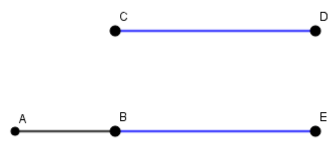
Exercício 3. *Sabendo que a semi-reta* $[OX)$ *que divide o ângulo* $\widehat{AOB}$ *em duas partes iguais é chamada* bissetriz*, descreva como construir a reta bissetriz do ângulo* $\widehat{AOB}$*.*

3.2 Soma e produto de segmentos

Feita a revisão da definição de triângulos semelhantes, dos casos de semelhança, do Teorema de Tales (Teorema 2.9) e do Teorema de Pitágoras (Teorema 2.10), propomos a definição da soma e do produto de segmentos, sem utilizar a noção de medida. Muitos estudantes estão habituados a fazer construções geométricas sempre com base em medições. A ideia, neste momento, é que este hábito seja desfeito por meio da utilização de uma régua não graduada ou, se as atividades forem impressas, que os segmentos não tenham medidas Racionais.

Definição 3.3. *Dados os segmentos* $[AB]$ *e* $[CD]$*, a soma* $[AB] + [CD]$ *é o segmento* $[AE]$ *tal que* $A - B - E$ *e* $[BE] \equiv [CD]$*.*

Figura 24 – $[AB] + [CD]$



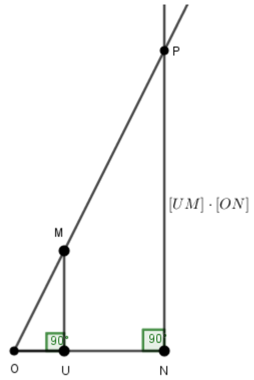
Fonte: A autora (2018).

Definição 3.4. *O produto dos segmentos* $[AB]$ *e* $[CD]$ *será construído como:*

- *Tome a semi-reta* $[OX)$ *e seja* $U \in [OX)$ *tal que* $[OU]$ *seja o segmento unitário. (*Neste momento é interessante que o professor discuta com os alunos o sentido de 'unidade' relacionando com unidade de medida e as unidades de medidas mais utilizadas).
- *Seja* t *a reta perpendicular a* $[OX)$ *passando por* U*.*
- *Tome* $M \in t$ *tal que* $[UM] \equiv [AB]$*.*
- *Trace a semi-reta* $[OM)$*.*
- *Em* $[OX)$*, seja* N *tal que* $[ON] \equiv [CD]$*.*
- *Por* N *seja* t' *a reta perpendicular a* $[OX)$*. Tome* P *a interseção de* t' *com* $[OM)$*.*

Definimos $[MN] = [AB] \cdot [CD]$.

Figura 25 – $[AB] \cdot [CD] \equiv [UM] \cdot [ON]$



Fonte: A autora (2018).

Alguns alunos notaram que os triângulos OUM e ONP têm dois pares de ângulos congruentes, a saber: o ângulo em comum no vértice O e o ângulo reto em U e em N. Assim, por AA, estes triângulos são semelhantes e, considerando que já sabem que $1 \cdot [MN] = [MN]$, notaram que esta definição está de acordo com o que sabem sobre aritmética. Contudo, a nossa abordagem visa partir desta definição para comprovar geometricamente que, de fato, 1 é o elemento neutro da multiplicação. Se esta observação ocorrer, sugerimos que o professor valorize a colocação dos estudantes e aguçe a curiosidade da turma “perguntando como comprovaríamos que $1 \cdot [MN] = [MN]$?”.

3.3 Números Naturais

À medida que a humanidade civilizava-se, ela desenvolveu um modelo abstrado de contagem (um, dois, três, $\cdots$), símbolos estes que chamamos de *Números Naturais*.

A definição precisa e concisa dos Naturais foi feita por Giuseppe Peano, no século XX. Esta definição basea-se em três elementos primitivos - Número Natural, sucessor e zero - correlacionados pelos seguintes axiomas:

- Todo Número Natural tem um único sucessor;
- Números Naturais diferentes tem sucessores diferentes;
- Existe um único Número Natural, chamado *zero* e representado pelo símbolo 0, que não é sucessor de nenhum outro número;
- Seja X um conjunto de Números Naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $0 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

A escolha de considerar o zero como um Número Natural baseia-se na afirmação de Lima et al. (2006):

> Não se deve dar muita importância à eterna questão de saber se 0 (zero) deve ou não ser incluído entre os números naturais. Praticamente todos os livros de Matemática usados nas escolas brasileiras consideram 0 como o primeiro número natural (consequentemente 1 é o segundo, 2 é o terceiro, etc.) [. . .] Trata-se, evidentemente, de uma questão de preferência (LIMA et al., 2006, p. 36).

Assim, preferimos considerar $0 \in \mathbb{N}$ e fazer aqui a discussão sobre o fato de que um ponto divide uma reta em exatamente dois subconjuntos (Corolário 2.1).

Nos axiomas de Peano, encontramos a noção intutitiva de sucessor. Dizemos que m é sucessor de n quando m vem logo após n, não havendo outros Números Naturais entre eles.

A operação tomar o sucessor pode ser entendida como $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e, então, denotaremos o sucessor de n por $s(n)$. Pelo segundo axioma de Peano, temos que esta função é injetiva. E, ainda por definição, teremos:

$$s(0) =: 1(\text{a unidade})$$
$$s(n) = n + 1$$

Assim, como pelo Teorema 2.2, ao fixarmos o ponto 0 e a unidade 1, estaremos escolhendo uma orientação privilegiada, que chamaremos de *sentido positivo*. Ao ponto O da origem associaremos o símbolo 0, ao ponto U tal que $\overline{[OU]}$ é a únidade associaremos o símbolo da unidade, 1. Ao ponto $D \in [OU)$ tal que $[OD] = [OU] + [OU]$ associaremos o símbolo 2, a quem chamaremos dois - o sucessor de 1 e assim por diante.

Para facilitar a escrita chamaremos 1 de *abcissa* do ponto U. Quando quisermos referir ao tamanho do segmento $[OU]$ denotaremos $\overline{[OU]} = |1|$. É importante que o professor construa essa reflexão sobre a relação existente entre o símbolo e como foi construído o que ele representa, assim como qual a relação entre este símbolo x e o tamanho do segmento $[OX]$. Repetindo este processo, teremos a *'reta' dos Naturais*:

Figura 26 – $\mathbb{N}$

Fonte: A autora (2018).

Ou seja, construímos os pontos associados aos Números Naturais fazendo uma soma finita da unidade, obtendo, assim,

$$s(0) := 1$$

$$s(1) := 1 + 1 := 2$$
$$s(2) := 2 + 1 := 3$$
$$\dots$$

Desta maneira, definimos:

$$\mathbb{N} = \{m \mid m = \overline{[OM]}\text{sendo M um ponto da reta dos Naturais}\}$$

Ou seja, todo elemento de $\mathbb{N}$ está associado a um ponto que foi obtido por meio da soma finita da unidade $[OU]$ realizada no sentido positivo eleito. Com isso, podemos entender a soma dos Naturais m e n como a soma dos segmentos $[OM]$ e $[ON]$, em que m e n são as abcissas dos pontos M e N.

Proposição 3.1. *A soma é bem definida em* $\mathbb{N}$.

Demonstração. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ abcissas dos pontos M e N pertecentes a semi-reta $[OU)$. Então, por definição, $m + n$ é a abcissa do ponto P tal que $[OP] \equiv [OM] + [ON]$, onde $O - M - P$ com $[MP] \equiv [ON]$. Desta forma, concluímos que a soma entre naturais é bem definida.

Além disso, como $m \in \mathbb{N}$ então

$$m = \underbrace{1 + 1 + 1 \cdots + 1}_{m\text{parcelas}}$$

e

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{parcelas}}.$$

Então,

$$[OM] + [ON] = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m+n \text{ parcelas}}.$$

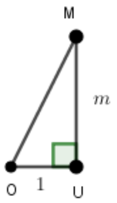
Assim, $m + n$ é obtido por meio de uma soma finita da unidade e, portanto, $m + n \in \mathbb{N}$. Devido a este fato dizemos que os Naturais são fechados para soma. $\square$

Também do produto de segmentos advém o produto dos Naturais, ou seja $m \cdot n$ é a abcissa do ponto P', tal que $[OP'] \equiv [NP]$, onde $[NP] \equiv [OM] \cdot [ON]$ sendo m e n associados aos pontos M e N.

Proposição 3.2. *Se* $m \in \mathbb{N}$ *então* $m \cdot 1 = m$.

Demonstração. Ao seguirmos os passos descritos na definição para construirmos $m \cdot 1$ teríamos $U = N$ e, portanto, $M = P$ e $[NP] = [UM]$. Logo, concluímos que $m \cdot 1 = m$. $\square$

Figura 27 – $m \cdot 1 = m$



Fonte: A autora (2018).

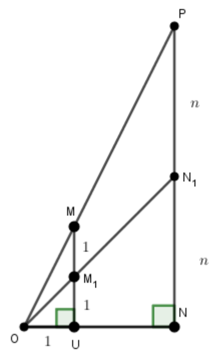
Proposição 3.3. *Seja* $m \in \mathbb{N}$, $m \cdot 0 = 0$.

Demonstração. Para construirmos $m \cdot 0$, construiríamos o triângulo OUM com $\overline{[UM]} = m$. Em $[OU)$ marcaríamos o ponto $N = 0$, logo $N = O$. Por O tomaríamos a reta perpencicular a $[OU)$ e marcaríamos P a interseção entre estas retas, assim obteríamos $P = O$. E, então, por definição, teríamos $|m \cdot 0| = \overline{[OO]}$, ou seja, $m \cdot 0 = 0$. □

Proposição 3.4. *Se* m *e* n *são elementos de* $\mathbb{N}$, *então* $m \cdot n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Pela proposição anterior, já sabemos que se $n = 1$, então $m \cdot n \in \mathbb{N}$. Se $m = 2$, então m é a abcissa do ponto D tal que $D \in [OU)$ com $[OD] \equiv [OU] + [OU]$. Na construção do produto $m \cdot n$, $[MU] \equiv [OD]$. Portanto, existe $M_1 \in [MU]$ tal que $[UM_1] \equiv [M_1M] \equiv [OU]$.

Figura 28 – $2 \cdot n = n + n$



Fonte: A autora (2018).

Tome a semi-reta $[OM_1)$ e seja $N_1 = [OM_1) \cap [NP]$. Notemos que OUM_1 e ONN_1 são retângulos com o ângulo em comum no vértice O. Logo, por AA, são semelhantes. E, uma vez que OUM_1 é isósceles (pois $[OU] \equiv [UM_1]$), então ONN_1 também é isósceles. Portanto, $[ON] \equiv [NN_1]$ e $\overline{[NN_1]} = |n|$.

Além disso,

$$\widehat{OM_1U} \equiv \widehat{ON_1N} \Rightarrow \widehat{OM_1M} \equiv \widehat{ON_1P}.$$

E, como por AA, os triângulos OM_1M e ON_1P são semelhantes,

$$\frac{[M_1M]}{[N_1P]} = \frac{h}{h'},$$

onde h e h' são as alturas dos triângulos OM_1M e ON_1P, respectivamente. Ou seja,

$$\frac{1}{\overline{[N_1P]}} = \frac{1}{b} \Leftrightarrow \overline{[N_1P]} = |n|.$$

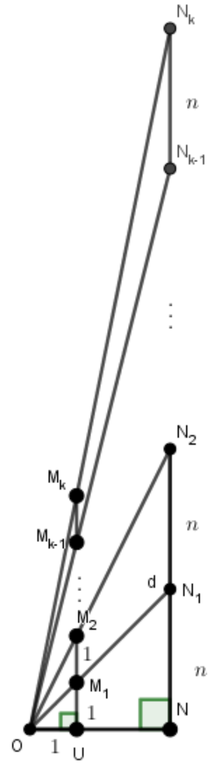
Portanto, se $m = 1 + 1$, então $m \cdot n = n + n$, pois

$$m \cdot n = \overline{[NP]} = \overline{[NN_1]} + \overline{[N_1P]}.$$

Por indução, suponha que se $m = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k\text{parcelas}}$ então

$$m \cdot n = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{kparcelas}.$$

Figura 29 – $m \cdot n = n + n + \cdots + n$



Fonte: A autora (2018).

Seja $m = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k+1parcelas}$. Assim, podemos marcar os pontos $M_i \in [UM]$ tais que $[OU] \equiv [M_iMi + 1]$ para $0 \leqslant i \leqslant k$, onde $M_0 = U$ e $M_{k+1} = M$. Por hipótese de indução, $OM_{k-1}M_k$ semelhante a $ON_{k-1}N_k$, então $\widehat{OM_kM} \equiv \widehat{ON_kP}$. Assim, OM_kM e ON_kP são semelhantes pelo caso AA. Logo,

$$\frac{1}{|n|} = \frac{\overline{[M_kM]}}{\overline{[N_kP]}} \Leftrightarrow \frac{1}{|n|} = \frac{1}{\overline{[N_kP]}} \Leftrightarrow |n| = \overline{[N_kP]}.$$

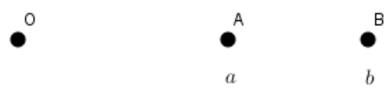
Portanto, se $m = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k+1 parcelas}$ então $|m| \cdot |n| = \overline{[NP]} = \underbrace{b + b + \cdots b}_{k+1 parcelas}$ e, pela proposição anterior, é natural. Assim, concluímos que o produto de dois Naturais é, ainda um Natural. □

Nesta demonstração, percebemos que a noção de multiplicação entre Naturais como uma soma finita de parcelas iguais pode ser observada como consequência do fato de $m \in \mathbb{N}$ na definição de produto entre classes de equivalência, como tratado no capítulo anterior.

Após realizar algumas construções do produto de Números Naturais conhecidos (tais como $2 \cdot 3$, por exemplo) desconsiderando as graduações da régua, alguns estudantes tiveram a curiosidade de verificar se este processo realmente estava condizente. Eles, então, mediram a unidade adotada e mediram os segmentos obtidos como resposta verificando que, de fato, esta construção 'funciona'. Na adição de segmentos com medida Natural, os estudantes não apresentaram esta mesma desconfiança, talvez porque a soma como concatenação de segmentos seja mais intuitiva do que a construção do produto.

Definição 3.5. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$ dizemos que a é* menor que *b, $a < b$ se $O - A - B$, onde $A = a$ e $B = b$, ou seja, $\overline{[OA]} = |a|$, $\overline{[OB]} = |b|$ e $A, B \in [OU)$.*

Figura 30 – $a < b$



Fonte: A autora (2018).

Desta definição decorre que se $a < b$, então $[OB] = [OA] + [AB]$. Assim, se $|c| = \overline{[AB]}$, $c \in \mathbb{N}$, pois $[AB]$ é, também, uma soma finita de $[OU]$. Portanto, tem-se que

$$a < b \Rightarrow \text{ existe } c \in \mathbb{N} \text{ tal que } b = a + c.$$

Proposição 3.5. *Dados a, b e c Naturais. A relação $<$ tem as seguintes propriedades:*

1. Transitividade: *se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$;*

2. Tricotomia: *vale apenas uma das alternativas: ou $a = b$ ou $a < b$ ou $a > b$;*

3. Monotonicidade: *se $a < b$ então $a + c < b + c$ e $a \cdot c < b \cdot c$.*

Demonstração. 1. Se $a < b$ então $O - A - B$. E se $b < c$ então $O - B - C$. Logo, $O - A - C$ e, portanto, $a < c$.

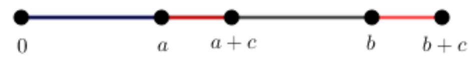
2. Dados os pontos $A, B \in [OU)$, com $\overline{[OA]} = |a|$ e $\overline{[OB]} = |b|$, temos como opções:

a) $A = B \Rightarrow [OA] \equiv [OB] \Rightarrow a = b$.

b) $O - A - B \Rightarrow [OA] < [OB] \Rightarrow a < b$.

c) $O - B - A \Rightarrow [OB] < [OA] \Rightarrow b < a$.

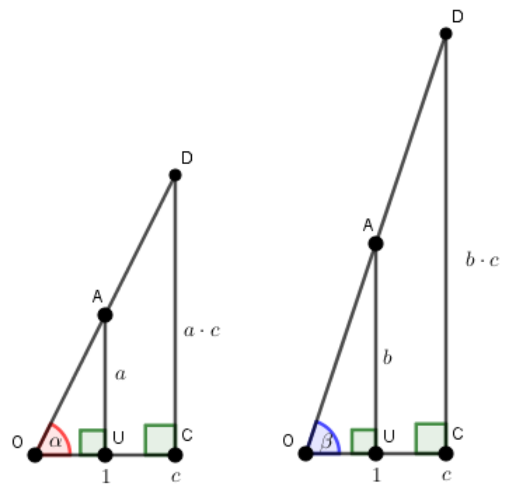
Figura 31 – $a < b \Rightarrow a + c < b + c$



Fonte: A autora (2018).

De acordo com a definição do produto de segmentos, sejam as construções de $a \cdot c$ e $b \cdot c$ conforme a figura:

Figura 32 – $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$



Fonte: A autora (2018).

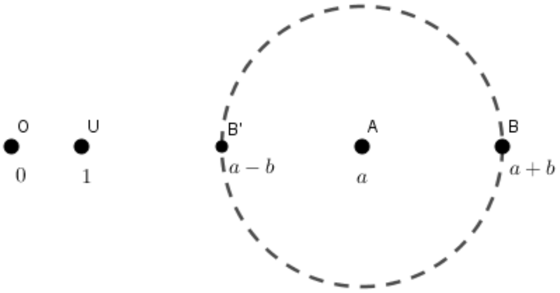
Como os triângulos OUA e OUB são retângulos com cateto $[OU]$ em comum. Como, por hipótese, $a > b$, então como o maior ângulo enxerga o maior lado e vice-versa, tem-se $\alpha < \beta$. E, portanto, $a \cdot c < b \cdot c$.

$\square$

Considerando $\mathbb{N}$ como o conjunto universo, dados os Naturais a e b, qual seria a construção de $a - b$? E isto é possível sempre?

Recordemos do capítulo anterior, como a diferença $a - b$ é construída: Seja $A = at$ com $A \in [OX)$, tomamos B tal que $O - A - B$ com $\overline{[AB]} = |b|$. Tome B' a antípoda de B com relação a A. O segmento $[OB']$ representa a diferença $a - b$. No caso dos Naturais, temos:

Figura 33 – $a - b$



Fonte: A autora (2018).

Ao considerarmos a diferença $a - b$, a tricotomia da ordem fornece três possibilidades:

3. Se $a > b$ então $a - b = B'$, com $B' \in [OU)$.
- Se $a = b$, ${}^{-}B_A = O$, logo, $a - b = 0$.
- Se $a < b$, a antípoda de B com relação a A é tal que ${}^{-}B_A - O - A$. Logo, se ${}^{-}B_A = b$, $b \notin \mathbb{N}$.

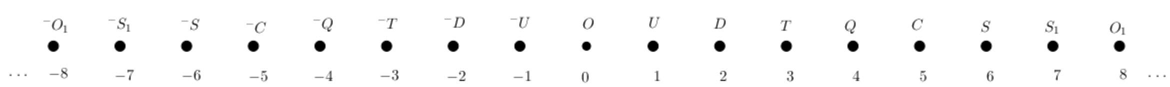
Para que a subtração também seja comutativa é necessário que os pontos $P \notin [OU)$ sejam definidos e que as operações de soma e produto sejam estendidas para estes casos. Começaremos, então, tomando as antípodas de todos os pontos P de abcissas Naturais, dando origem a um novo conjunto.

3.4 Números Inteiros

Definição 3.6. *O ponto Q (ou o símbolo a ele associado) tal que $Q - O - P$ com $[OP] \equiv [OQ]$ é chamado* simétrico *do ponto P (ou do símbolo a ele associado), ou seja, o simétrico de P é ${}^{-}P$, a antípoda com relação ao ponto O.*

Tomando os simétricos dos pontos da reta dos Naturais com relação ao ponto O, construiremos os pontos cujos símbolos formarão o Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$).

Figura 34 – $\mathbb{Z}$



Fonte: A autora (2018).

Novamente, recordemos a definição das classes de equivalência de segmentos, de onde definimos a soma e o produto de segmentos:

$$|a| = \overline{[AB]} = \{[A'B']|[A'B'] \equiv [AB]\}.$$

Assim, o símbolo $|a|$ serve para denotar o tamanho do segmento $[AB]$. Quando os pontos estiverem na reta fixada (OU), representaremos o ponto A tal que $A \in [OU)$ com $\overline{[OA]} = |a|$, por a, como fizemos na seção anterior, criando os símbolos que chamamos Naturais.

Agora, com a definição dos simétricos dos pontos obtidos na reta dos Naturais, associaremos ao ponto $A \in (OU)$ tal que $A \notin [OU)$ com $\overline{[OA]} = a$ o símbolo $-a$.

Definição 3.7. *Diremos que $A = a$ se $A \in (OU)$ tal que $\overline{[OA]} = |a|$. Assim, definimos $^{-}A = -a$.*

Cada um dos símbolos associados aos pontos A e ^{-}A de acordo com estes critérios é chamado abcissa *dos pontos A e ^{-}A.*

Notemos que associar o símbolo 2 ao ponto D, por exemplo, é uma notação mais eficiente, pois informa que $D \in [OU)$ tal que $\overline{[OD]} = |2|$, ou seja, $[OD] = [OU] + [OU]$. Assim, a antípoda de D, o ponto ^{-}D, está associado ao símbolo -2. Vale ressaltar que a distância de D e ^{-}D ao ponto O é a mesma, por isso $\overline{[OD]} = \overline{[O^{-}D]} = |2|$.

Para construirmos a *subtração* $a + (-b) = a - b$, faremos:

1. Seja $A \in [OU)$ tal que $\overline{[OA]} = |a|$;
2. Tome $B \in [OU)$ tal que $O - A - B$ com $\overline{[AB]} = |b|$;
3. Construa, com o auxílio do compasso, o ponto $^{-}B_A$, a antípoda de B com relação ao ponto A. Ou seja $^{-}B_A$ é tal que $[^{-}B_A A] \equiv [AB]$.
4. $^{-}B_A = b - a$.

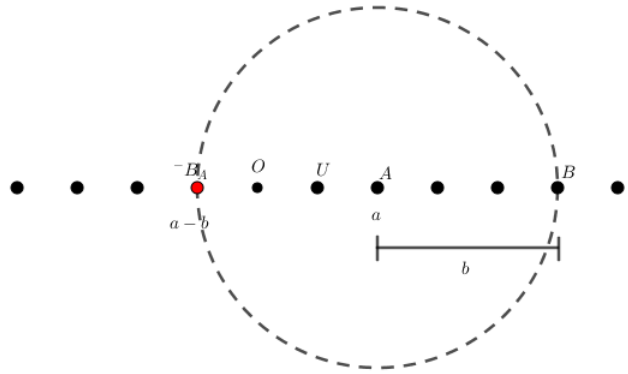
Desta construção decorrem dois fatos interessantes:

1. $-(-a) = a$:

   O simétrico de ^{-}A é o ponto $^{-}(^{-}A)$ tal que $^{-}A - O -\ ^{-}(^{-}A)$ tal que $[O^{-}A] \equiv [O^{-}(^{-}A)]$. Mas como o ponto O divide a reta em exatamente dois subconjuntos e, considerando o axioma (IV.1) e a definição de A, temos que $^{-}(^{-}A) = A$, ou seja, $-(-a) = a$.

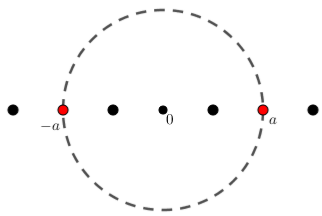
   Deste fato decorre a conhecida regra "menos com menos dá mais". E, para que toda a teoria seja condizente influenciará na definição do produto envolvendo $-a$.

Figura 35 – $a + (-b) = a - b$



Fonte: A autora (2018).

Figura 36 – $-(-a) = a$



Fonte: A autora (2018).

2. $a + (-a) = 0$:

   De acordo com a definição, seja $A = a$ tal que $\overline{[OA]} = |a|$ e $A' \in [OU)$ tal que $O - A - A'$ com $[AA'] \equiv [OA]$. Então $a + (-a) =^{-} A'_A$.

   Mas $^{-}A'_A$ é tal que $^{-}A'_A - A - A'$ com $[^{-}A'_A A] \equiv [AA']$. As mesmas condições são verificadas pelo ponto O. Logo, pela unicidade do axioma (IV.1), temos $^{-}A'_A = O$. Logo, $^{-}A'_A = 0$ e, portanto, $a + (-a) = 0$.

Definimos também que:

$$-a + b = b - a$$

$$-a - b = -(a + b).$$

Do produto entre Naturais, já sabemos se $A, B, C \in [OU)$ com $A = a$, $B = b$ e $C = c$, tem-se:

1. $1 \cdot a = a$

2. $a \cdot b = b \cdot a$

3. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

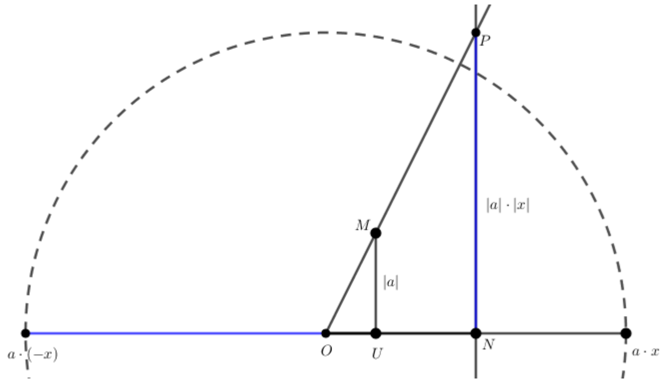
4. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Para os pontos $X \notin [OU)$ tal que $X = -x$, definimos:

$$a \cdot (-x) = -(a \cdot x).$$

Assim, para construirmos o produto $a \cdot (-x)$, construiremos $a \cdot x$, com o auxílio da abertura do compasso, encontraremos o ponto $Y \in [OU)$ com $Y = a \cdot x$ e, por fim, teremos que ${}^{-}Y = a \cdot (-x)$.

Figura 37 – $a \cdot (-x)$



Fonte: A autora (2018).

Proposição 3.6. $a \cdot (-1) = -a$.

Demonstração. Por definição,

$$a \cdot (-1) = -(a \cdot 1) = -a,$$

pois já provamos que $a \cdot 1 = a$. □

Ou seja, ao multiplicarmos a por -1 obtemos o simétrico de a. Logo, temos o resultado seguinte:

Corolário 3.1. $(-a) \cdot (-1) = a$.

Proposição 3.7. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Demonstração. Como $-a = (-1) \cdot a$, então

$$(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot (a \cdot (-b)) = (-1) \cdot (-(a \cdot b)) = a \cdot b.$$

□

Pela proposição 3.4, o produto entre naturais é ainda um natural. Logo, temos que o produto de inteiros ainda é um inteiro, visto os resultados e definições anteriores. Ou seja, fazendo as operações de soma e multiplicação envolvendo inteiros, ainda obtemos como resultado um ponto $P \in (OU)$ tal que $[OP]$ é congruente a uma soma finita do segmento $[OU]$.

Proposição 3.8. *O conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado para as operações de soma e produto, ou seja, se a e b são elementos de $\mathbb{Z}$ então $a + b \in \mathbb{Z}$ e $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.*

Para definição de ordem entre os elementos de $\mathbb{Z}$, recordemos que a notação $A - B - C$ significa que o ponto B está interposto aos pontos A e C, podendo ocorrer em qualquer ordem, ou seja, $A - B - C$ é o mesmo que $C - B - A$. Por este motivo, a relação de ordem como definida para os naturais não serve aos inteiros. Faremos, então, uma re-leitura desta definição de modo que esta seja válida para todos os Inteiros (e, portanto, aos Naturais também). Veremos adiante que esta definição servirá para todos os pontos associados aos Reais.

Revisando a definição de ordem entre pontos na reta (2.6) e considerando a associação entre símbolos e pontos criada, temos a definição:

Definição 3.8. *Se $A = a$ e $B = b$, diremos que $b > a$ se:*

- *$O \in [BA)$, caso $B \in [OU)$;*
- *$O \in [AB)$, caso contrário.*

Exemplo 3.1. *Afirmamos que $2 > -4$ pois, chamando $B = 2$ e $A = -4$, temos que $B \in [OU)$ e $O \in [BA)$.*

Figura 38 – $2 > -4$

Fonte: A autora (2018).

Exemplo 3.2. *Se $B = -3$ e $A = -8$, como $B \notin [OU)$ e verificamos que $O \in [AB)$, concluímos que $-3 > -8$.*

A escolha de apresentar a reta dos Inteiros e dos Naturais como não contínua justifica-se pelo fato de que a construção dos conjuntos numéricos será feita marcando ponto a ponto, de acordo com as suas propriedades.

Figura 39 – $-3 > -8$

Fonte: A autora (2018).

Com a construção da reta dos Inteiros, sugerimos que o professor faça a discussão da densidade dos Inteiros. Ou seja, dados dois Inteiros a e b é sempre possível encontrar c Inteiro tal que $a < c < b$?

Falta-nos investigar se dado $a \in \mathbb{Z}$ é possível construir $|b| = \overline{[AB]}$ tal que $a \cdot b = 1$.

3.5 Divisão entre segmentos

Inicialmente, vamos construir a operação inversa do produto, a qual chamaremos *divisão* e representaremos por $\frac{a}{b}$. Ou seja, queremos encontrar $x = \frac{a}{b}$ tal que $b \cdot x = a$.

Construção 6. *1. Fixada a semi-reta $[OU)$, marque o ponto $B = b$;*

2. Construa uma reta auxiliar r tal que $r \cap (OU) = \{O\}$. Em r escolha um sentido positivo e tome $A \in r$ tal que $\overline{[OA]} = |a|$.

Se a reta r for perpendicular a (OU), a construção fica facilitada.

3. Tome a reta (AB).

4. Por U seja t a reta paralela a (AB) - os estudantes podem utilizar o transferidor e o Teorema dos Ângulos Alternos Internos (Teo. 2.4) para fazer esta construção ou então fazer a construção com régua e compasso como abordado no início deste capítulo.

5. Seja C a interseção entre as retas t e r.

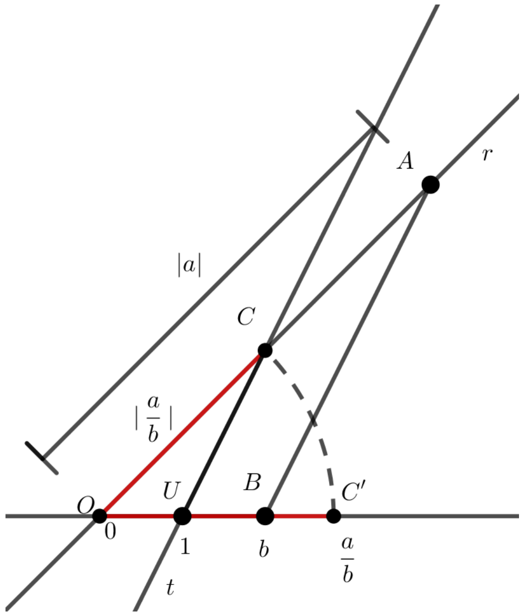
Definição: $\overline{[OC]} := |\frac{a}{b}|$.

Se, com o compasso, encontrarmos C' tal que $C' \in [OU)$ com $[OC'] \equiv [OC]$, teremos $C' = \frac{a}{b}$.

Alguns questionamentos comuns quanto à divisão podem, agora, ser respondidos por meio desta construção. São eles:

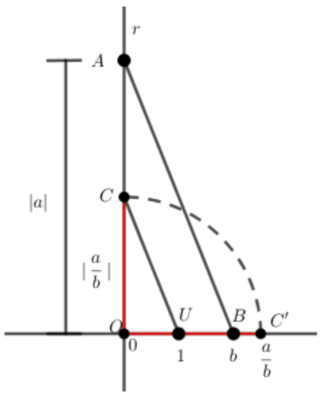
Proposição 3.9. *Não é possível dividir por zero.*

Figura 40 – $\dfrac{a}{b}$



Fonte: A autora (2018).

Figura 41 – $\dfrac{a}{b}$



Fonte: A autora (2018).

Demonstração. Se fossemos construir $\dfrac{a}{0}$, teríamos na reta auxiliar r, $\overline{[OA]} = a$. Na reta (OU) teríamos que encontrar B tal que $\overline{[OB]} = 0$, logo $B = O$.

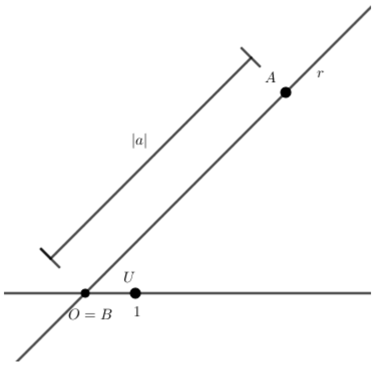
Ao traçarmos (AB), teríamos $(AB) = r$. Por U a reta $t \parallel (AB)$ é também paralela a r e, por isso, $t \cap r = \varnothing$. Assim, não é possível determinar C para que $\overline{[OC]} = \dfrac{a}{0}$. □

Proposição 3.10. $\dfrac{0}{a} = 0.$

Demonstração. Na reta auxiliar r marcamos apenas O, já que $\overline{[OO]} = 0$.

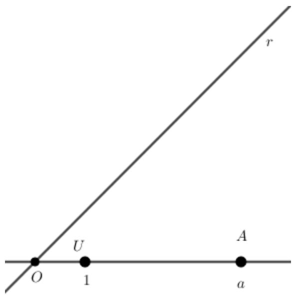
Em $[OU]$ seja $A = a$. Por U traçamos a reta t tal que $t \parallel (OA)$. Pela definição de retas paralelas (definição 2.7), temos que, neste caso, $t = (OU)$. Assim, a interseção C

Figura 42 – Impossibilidade de construir $\frac{a}{0}$



Fonte: A autora (2018).

Figura 43 – $\frac{0}{a}$



Fonte: A autora (2018).

entre t e r é o próprio ponto O. Logo,

$$|\frac{0}{a}| = \overline{[OC]} = \overline{[OO]} = 0.$$

Portanto, $\frac{0}{a} = O$. □

Proposição 3.11. $\frac{a}{a} = 1$.

Demonstração. Na construção de $\frac{a}{a}$, obtemos a figura:

Por construção, temos que $[OA'] \equiv [OA]$. Logo, o triângulo $A'OA$ é isósceles e, portanto, $\widehat{OAA'} \equiv \widehat{OA'A}$. Porém, como construção, $(AA') \parallel (UB)$, então

$$\widehat{OBU} \equiv \widehat{OA'A} \equiv \widehat{A'AO} \equiv \widehat{OUB}.$$

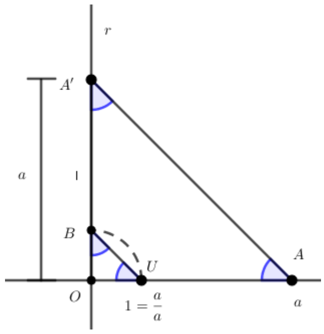
Dessa forma, também o triângulo OBU é isósceles, ou seja, $[OB] \equiv [OU]$, logo, $\overline{[OB]} = |1|$.

Portanto,

$$|\frac{a}{a}| = \overline{[OB]} = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{a}{a}.$$

□

Figura 44 – $\frac{a}{a}$

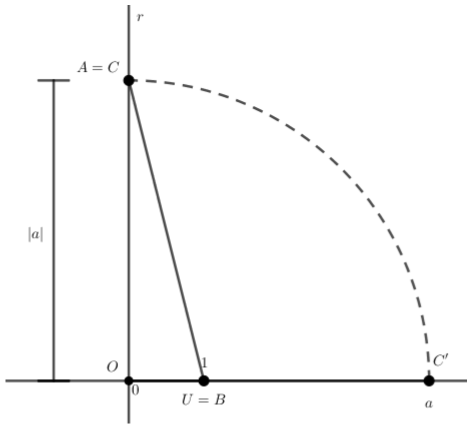


Fonte: A autora (2018).

Proposição 3.12. $\frac{a}{1} = a$.

Demonstração. Seguindo os passos para a construção de $\frac{a}{b}$, tomando $b = 1$, teremos $B = U$ e, portanto, $t = (AB)$. Logo, $(AB) \cap r = A$ e, por isso, $A = C$ e $C' = \frac{a}{1} = a$.

Figura 45 – $\frac{a}{1} = a$



Fonte: A autora (2018).

□

Mas, como construiremos a divisão envolvendo $A = -a$?

Recordemos que a operação $\frac{a}{b}$ foi defenida de modo a encontrar x tal que $b \cdot x = a$. Então, a 'regra de sinais' da divisão deve estar alinhada com a definição de sinais utilizada no produto:

Sejam $A = a$, $B = b$ e $X = x$. Assim,

- Se $B \in [OU)$ e $A \in [OU)$, então, necessariamente $X \in [OU)$;
- Se $B \notin [OU)$ e $A \in [OU)$, então, tendo em vista que $(-m) \cdot (-n) = m \cdot n$, devemos ter $X \notin [OU)$.

- Se $B \notin [OU)$ e $A \notin [OU)$, como $(-m) \cdot n = -(m \cdot n)$, $X \in [OU)$.
- Se $B \in [OU)$ e $A \notin [OU)$, já que $(-m) \cdot n = -(m \cdot n)$, então $X \notin [OU)$.

Assim como fizemos na multiplicação, ao construir $\frac{a}{b}$, encontramos $[OC] \in r$ e marcamos $C' = \frac{a}{b} \in (OU)$ considerando a observação anterior.

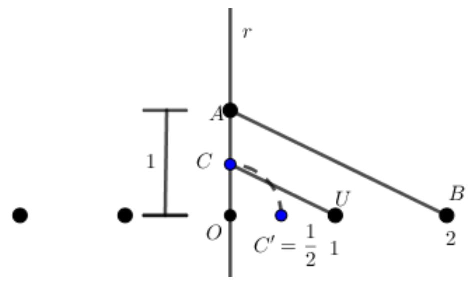
Definição 3.9. *Dado a definimos o* inverso multiplicativo de a *como sendo* x *tal que*

$$a \cdot x = 1.$$

De acordo com a definição de $x = \frac{a}{b}$, o inverso multiplicativo de a é $\frac{1}{a}$ e, para construí-lo, basta construir a divisão de 1 por a. Mas será que se $a \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$?

Exemplo 3.3. *Construa o inverso multiplicativo de* $2 \in \mathbb{Z}$.

Figura 46 – Construção de $\frac{1}{2}$



Fonte: A autora (2018).

Percebemos que $0 < \frac{1}{2} < 1$, então concluímos que este ponto não correponde a nenhum dos pontos da reta dos Inteiros, ou seja, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Mas será que este é um caso particular ou sempre ocorre?

Recordemos que $0 \cdot a = 0$ para qualquer $a \in \mathbb{Z}$ (Proposição 3.3). Assim, não é possível encontrar $x \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \cdot x = 1$. Disto resulta que 0 não admite inverso.

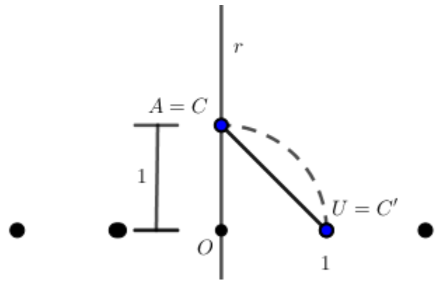
Corolário 3.2. $\frac{1}{1} = 1$*, ou seja, o inverso multiplicativo de* 1 *é* 1.

Demonstração. Tomando $a = 1$, a Proposição (3.12) nos garante que $\frac{1}{1} = 1$. □

Proposição 3.13. *Se* $a \in \mathbb{Z}$ *com* $a \neq 1$ *então* $\frac{1}{a} \notin \mathbb{Z}$.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $A \in [OU)$ com $A \neq O$. Na construção de $\frac{1}{a}$, seja U' o ponto da reta auxiliar r tal que $\overline{[OU']} = |1|$ e $B = r \cap t$, onde $t \parallel (AU')$ e $U \in t$.

Figura 47 – Construção de $\dfrac{1}{1}$



Fonte: A autora (2018).

Seja $A = a$. Então, como $a \in [OU)$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$, $U \in [OA]$. Pelo Teorema de Pasch (Teorema 2.1), a semi-reta $[UB)$ intersecta $[OU']$ ou $[AU']$. Mas, já que $(UB) \parallel (AU')$, então $(UB) \cap [OU'] = B$.

Assim, tem-se como resultado a configuração $O - B - U'$. Logo, $[OB] < [OU']$, ou seja, $0 < \dfrac{1}{a} < 1$. Como todos os pontos da reta dos Inteiros são obtidos pela concatenação nos dois sentidos (em $[OU)$ ou com os pontos $P \notin [OU)$), concluímos que $\dfrac{1}{a} \notin \mathbb{Z}$. □

Desta maneira, se procuramos um conjunto onde temos todos os símbolos para os pontos e seus inversos e para todas as divisões, precisamos ampliar $\mathbb{Z}$, obtendo, então, o conjunto dos Números Racionais.

3.6 Números Racionais

Definição 3.10. *Definimos o conjunto dos Racionais como:*

$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z} \ com \ q \neq 0\}.$$

Ou seja, o conjunto $\mathbb{Q}$ é formado por todas as abcissas dos pontos da reta (OU) obtidos pela divisão de dois números inteiros.

Pela Proposição (3.12), temos que todos os pontos com abcissas inteiras pertencem a reta dos racionais, ou seja, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

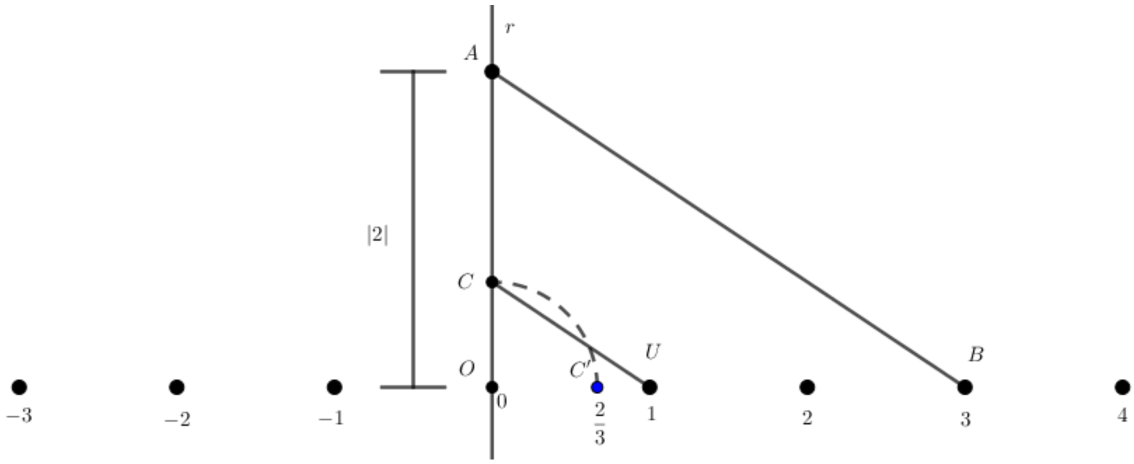
Exemplo 3.4. *Qual o ponto $P \in (OU)$ tal que $P = \dfrac{2}{3}$?*

Basta construirmos a divisão $\dfrac{2}{3}$ e teremos que $C' = \dfrac{2}{3}$.

Exemplo 3.5. *Vamos encontrar $\dfrac{-3}{4}$.*

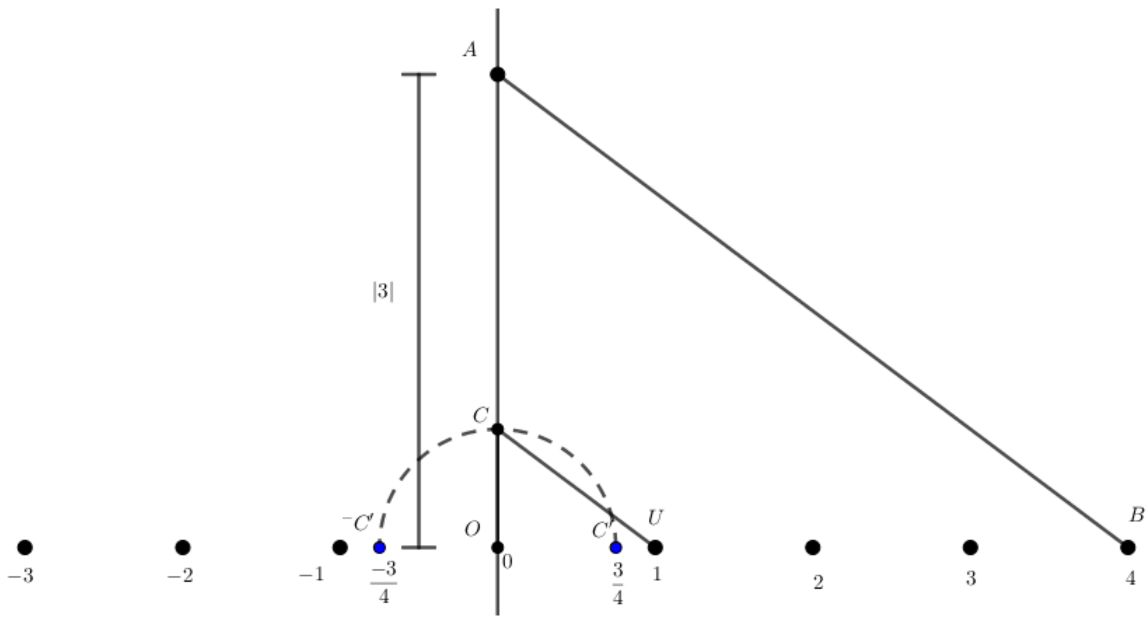
De acordo com a definição de divisão, encontraremos $C = \dfrac{3}{4}$ e tomaremos a antípoda deste ponto, C'.

Figura 48 – Construção de $\frac{2}{3}$



Fonte: A autora (2018).

Figura 49 – Construção de $\frac{-3}{4}$



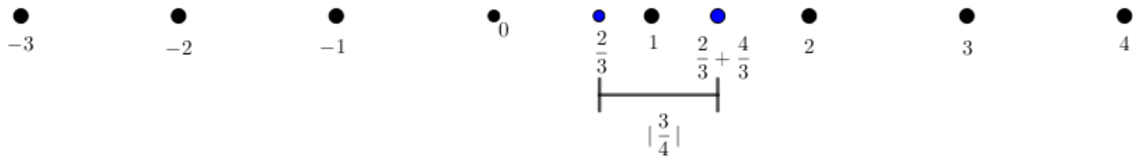
Fonte: A autora (2018).

Notemos que os pontos em azul, a saber, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{-3}{4}$, são pontos que devem ser acrescentados à reta dos Inteiros (pontos em preto).

As operações de soma, diferença, produto e divisão e a relação de ordem continuam sendo válidas neste novo conjunto tais como já estão definidas, uma vez que são construídas por meio dos pontos $P \in (OU)$.

Exemplo 3.6. *Uma vez que construímos* $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{3}{4}$, *construiremos* $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

Figura 50 – Construção de $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}$

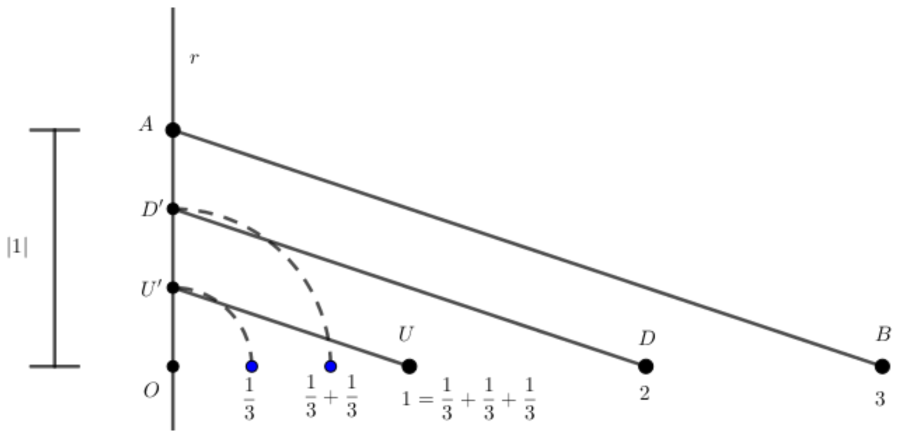


Fonte: A autora (2018).

Será que o ponto $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}$ coincide com $\dfrac{p}{q}$ para algum p e q Inteiros com $q \neq 0$? Vejamos:

Exemplo 3.7. *Vamos construir* $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}$.

Figura 51 – Construção de $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}$



Fonte: A autora (2018).

Como $B = 3$*, então* $[OB] = [OU] + [UD] + [DB]$ *com* $\overline{[OU]} = \overline{[UD]} = \overline{[DB]} = |1|$*. Por* D *seja* t' *a reta paralela a* (AB)*. Seja* $D' = t' \cap (OA)$*. Pelo Teorema de Tales (Teorema 2.9), temos* $\overline{[U'D']} = \overline{[OD']} = |\dfrac{1}{3}|$ *e* $\overline{[D'A]} = |\dfrac{1}{3}|$*. Ou seja,*

$$1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.$$

Sabemos que para qualquer $a \in \mathbb{Z}$*, com* $a \neq 0$*,* $\dfrac{a}{a} = 1$ *(Proposição 3.11). Assim, podemos reescrever a igualdade acima como:*

$$\frac{3}{3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.$$

Sugerimos que o professor saliente a contradição presente em somar os numeradores com numeradores e denominadores com denominadores ao efetuar a soma de frações.

Explorando o fato de que $a \in \mathbb{Z}$ significa que a é uma soma (ou subtração) sucessivas de 1, concluímos que se $a \neq 0$,

$$\underbrace{\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a}}_{a \text{ parcelas}} = \frac{a}{a}.$$

Além disso,

$$\underbrace{\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a}}_{m \text{ parcelas}} = m \cdot \frac{1}{a} = \frac{m}{a}.$$

Com isso, temos que dividir por a é o mesmo que multiplicar pelo inverso de a. Mas e quando a soma for $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ com $b \neq d$?

Falaremos, então, de *frações equivalentes*, símbolos $\frac{a}{b}$, mas que estão associados ao mesmo ponto na reta (OU). Para tanto, sugerimos que o professor proponha a construção de vários grupos de frações equivalentes para que os estudantes percebam o padrão existente.

Na construção de $\frac{a}{b}$, traçamos a reta (AB) e sua paralela, t, passando pelo ponto U. Marcamos o ponto de interseção, C, entre t e a reta auxiliar r. Assim, temos uma família de retas paralelas a (UC), onde cada uma delas determina os pontos $A' \in (OC)$ e $B' \in (OU)$. E, então, pela construção da divisão, representam

$$\frac{\overline{[OA']}}{\overline{[OB']}} = \overline{[OC]}.$$

Encontrando $A'' \in (OU)$ com $[OA'] \equiv [OA'']$ teremos $a' = A''$ e $B' = b'$. Chamaremos todas as divisões $\frac{a'}{b'}$ de *frações equivalentes a* $\frac{a}{b}$.

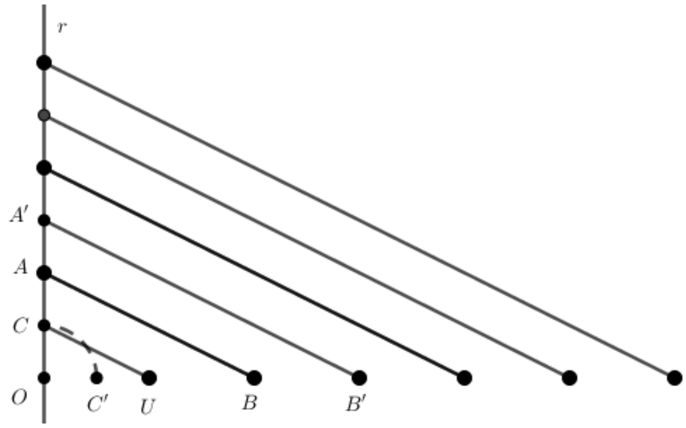
Definição 3.11. $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{a'}{b'}$ *são chamadas* frações equivalentes *se:*

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Exemplo 3.8. *Desta maneira, ao encontrar* $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$*, tentaremos encontrar frações equivalentes a* $\frac{1}{2}$ *e* $\frac{1}{3}$*, cujos denominadores sejam iguais, uma vez que pela observação anterior esta mudança na simbologia não altera o tamanho do segmento a ele relacionado.*

- $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \cdots$

Figura 52 – Frações equivalentes



Fonte: A autora (2018).

- $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \cdots.$

Então,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

Para o caso geral $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ temos que como a, b, c e d são Inteiros e $\mathbb{Z}$ é fechado para a adição e multiplicação, então $\frac{a \cdot d}{b \cdot d}$ é equivalente à fração $\frac{a}{b}$ e $\frac{c \cdot b}{d \cdot b}$ equivalente à $\frac{c}{d}$. E, portanto,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}.$$

Sugerimos que esta conclusão somente seja feita após construídos vários exemplos numéricos.

A construção geométrica da adição, subtração, multiplicação e divisão continuam sendo a mesma para os Racionais, visto que cada racional está associado a um ponto da reta (OU) e, portanto, a um segmento. Para a manipulação dos símbolos numéricos na multiplicação, sugerimos as atividades presentes no artigo de Silva e Almouloud (2008). Na divisão, sugerimos que seja ressaltado que dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso.

Proposição 3.14. (Densidade dos Racionais) *Se a e b são Racionais tais que $a < b$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.*

Seja $A = a$ e $B = b$. Como $a < b$, temos os seguintes casos:

- Se $A \notin [OU)$ e $B \in [OU)$:

  Desta maneira, temos $A - O - B$. Logo, $r = 0 = O$, pois $0 = \frac{0}{k}$ para qualquer $k \in \mathbb{Z}$ com $k \neq 0$.

- Se $A, B \in [OU)$:

  Seja $d = \dfrac{b-a}{2}$. Como $\mathbb{Q}$ é fechado para a subtração e divisão, $d \in \mathbb{Q}$. Além disso, $d < b-a$. Considere $\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{N} | x \cdot r > a\}$ e seja k o menor elemento de $\mathbb{X}$. Afirmamos que se $\overline{[OC]} = k \cdot d$, então $A - C - B$.

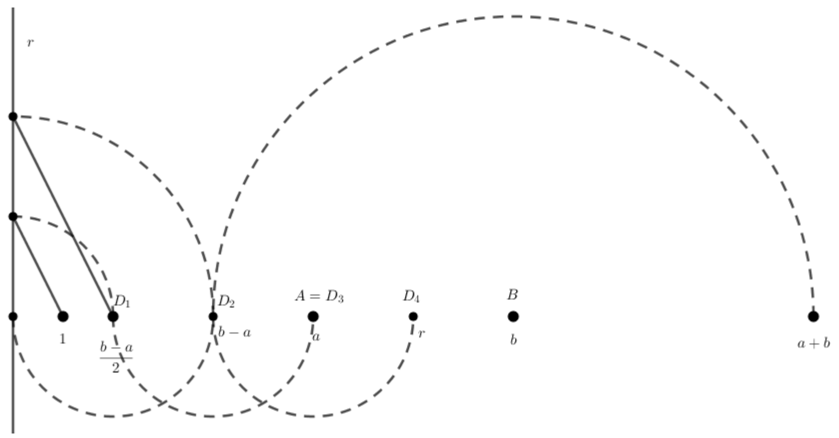
  De fato, se $A - B - C$, então teríamos $kd > b$ e como $(k-1) \cdot d \leqslant a$, teríamos

  $$k \cdot d - (k-1) \cdot d \geqslant b - a \Leftrightarrow d \geqslant b - a,$$

  resultando numa contradição. Portanto, $r = C$.

  Geometricamente, encontramos D_1 tal que $\overline{[OD_1]} = |\dfrac{b-a}{2}|$. Se $A - D_1 - B$, temos que $D_1 = r$; se não, encontramos D_2 tal que $\overline{[OD_2]} = \overline{[OD_1]} + \overline{[OD_1]}$. Se $A - D_2 - B$, $D_2 = r$; se não encontramos D_3 tal que $\overline{[OD_3]} = \overline{[OD_2]} + \overline{[OD_1]}$. Se $A - D_3 - B$, $D_3 = r$; se não encontramos D_4 tal que $\overline{[OD_4]} \equiv \overline{[OD_3]} + \overline{[OD_1]}$ e assim até encontrarmos um ponto D_n próximo ou igual ao ponto A e, por fim, fazemos $\overline{[OD_{n+1}]} = \overline{[OD_n]} + \overline{[OD_1]}$, portanto $D_{n+1} = r$.

Figura 53 – $a < r < b$



Fonte: A autora (2018).

Se $A, B \notin [OU)$:

Encontramos ^{-}A e ^{-}B e, pelo item anterior, encontramos D_{n+1}. O ponto procurado neste caso é $^{-}D_{n+1}$.

Uma vez que $\mathbb{Q}$ é fechado para soma, subtração, multiplicação e divisão, é natural nos perguntarmos qual o formato da reta dos racionais? É uma reta completamente contínua ou existem 'buracos'? E se eles existem, quantos são?

3.7 Segmentos comensuráveis e incomensuráveis

Para a construção das operações deste texto, precisamos antes fixar a unidade $\overline{[OU]} = |1|$, chamando-o de segmento unitário. Ao concatenar (somar) n segmentos $[OU]$

tínhamos B com $\overline{[OB]} = |n|$. Como vimos, pode ocorrer que o segmento unitário não caiba um número exato de vezes em $[OB]$. E, então B não terá como abcissa um Número Inteiro. Mas, caso

$$[OU] \equiv \underbrace{[OM] + [OM] + \cdots + [OM]}_{n \text{ parcelas}}$$

e

$$[OB] \equiv \underbrace{[OM] + [OM] + \cdots + [OM]}_{m \text{ parcelas}},$$

onde n e m são Naturais, $[OM]$ é uma medida comum aos segmentos $[OU]$ e $[OB]$. Assim, de acordo com as observações feitas quanto à soma de frações,

$$\overline{[OM]} = |\frac{1}{n}|$$

e

$$\overline{[OB]} = |\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m \text{parcelas}} = |\frac{m}{n}|.$$

Neste caso, dizemos que $[OB]$ e $[OU]$ são *segmentos comensuráveis*. Na impossibilidade de realizar esta construção, dizemos que $[OB]$ e $[OU]$ são *segmentos incomensuráveis*.

Com esta definição, podemos reescrever a definição do conjunto $\mathbb{Q}$ como:

$$\mathbb{Q} = \{P = p \mid [OP] \text{ e } [OU] \text{ são comensuráveis}\}.$$

Consideremos, então a seguinte construção:

Construção 7. *Construção do triângulo retângulo equilátero de lado* 1.

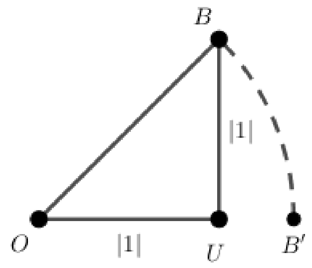
1. *Pelo ponto U seja $[BU] \perp (OU)$ tal que $\overline{[BU]} = |1|$.*
2. *Seja $B' \in [OU)$ tal que $[OB'] \equiv [OB]$.*

Será que B' tem abcissa em $\mathbb{Q}$?

De acordo com o Teorema de Pitágoras,

$$(\overline{[OB]})^2 = (\overline{[OU]})^2 + (\overline{[UB]})^2$$
$$(\overline{[OB]})^2 = 1 + 1$$

Figura 54 – Diagonal de um triângulo retângulo com catetos 1



Fonte: A autora (2018).

$$(\overline{[OB]})^2 = 2$$

Supondo que $B \in \mathbb{Q}$, então $\overline{[OB]} = \dfrac{m}{n}$, então

$$(\overline{[OB]})^2 = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Ou seja,

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2 \cdot n^2.$$

Sendo esta última igualdade uma contradição, pois se decompusermos m^2 em fatores primos, o fator 2 aparece um número par de vezes, enquanto que em $2 \cdot n^2$ aparece um número ímpar de vezes.

Desta forma, temos que $[OB']$ e $[OU]$ são incomensuráveis, ou seja, $B = b' \notin \mathbb{Q}$. Portanto, o conjunto $\mathbb{Q}$ não dispõe de todos os símbolos para cobrir os pontos da reta (OU). Mas, será que B' é o único ponto que podemos construir tal que $b' \notin \mathbb{Q}$?

Dado x tal que $x \cdot x = p$ denotaremos $x = \sqrt{p}$.

Proposição 3.15. *Se $p \in \mathbb{N}$ é primo então $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, então existem m, n Inteiros, tais que

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n}.$$

Dada a definição de frações equivalentes, podemos supor, sem perda de generalidade, que m e n são primos entre si, ou seja, $\dfrac{m}{n}$ é irredutível. Assim,

$$p = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow p \cdot n^2 = m^2.$$

Então, m^2 é múltiplo de p. Logo, m é múltiplo de p, pois se $a = f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n$ é a fatoração prima de a, então $a^2 = a \cdot a = f_1^2 \cdot f_2^2 \cdot \cdots \cdot f_n^2$. Portanto, $m = k \cdot p$, com $k \in \mathbb{Z}$. Dessa maneira, se $p \cdot n^2 = m^2$, então

$$p \cdot n^2 = (k \cdot p)^2 \Leftrightarrow p \cdot n^2 = k^2 \cdot p^2 \Leftrightarrow n^2 = k^2 \cdot p.$$

Portanto, n^2 é múltiplo de p e, então, n também é múltiplo de p, o que é uma contradição, pois supomos que m e n não tinham fatores em comum.

Com isso, concluímos que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ para qualquer $p \in \mathbb{N}$ primo. $\square$

Contudo, será que as raízes $\sqrt{p}$ podem ser construídas?

3.8 Espiral pitagórica

Construiremos outras raízes quadradas a partir do triângulo retângulo de catetos unitários da seguinte maneira:

Construção 8. Espiral pitagórica

- *Considere a reta (OU) seja OUB_1 tal que $[UB_1] \equiv [OU]$ e $[UB_1] \perp [OU]$. Tome $[OB_1]$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos $\overline{[OB_1]} = |\sqrt{2}|$. Com o uso do compasso, encontramos $B_1' \in [OU)$ tal que $[B_1B_1']$ e, portanto, teremos $B_1' = \sqrt{2}$.*

- *Tome B_2 tal que $[B_1B_2] \perp [OB_1]$ e $[BB_2] \equiv [OU]$, tome $[OB_2]$. Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{[OB_2]} = |\sqrt{3}|$. Seja $B_2' \in [OU)$ tal que $B_2' = \sqrt{3}$.*

- *Seja B_3 tal que $[B_3B_2] \perp [OB_2]$ com $[B_3B_2] \equiv [OU]$. Tome $[OB_3]$. Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{[OB_3]} = 4$. Seja $B_3' \in [OU)$ tal que $B_3' = \sqrt{4}$. Perceberemos que B_3' coincide com o ponto $D \in [OU)$ tal que $\overline{[OD]} = 2$, ou seja, $\sqrt{4} = 2$.*

- *Podemos repetir este processo e obtermos os pontos B_n tais que $[OB_n] \equiv |\sqrt{n+1}|$ e, com isso, determinar os pontos $B_n' \in [OU)$ tais que $B_n' = \sqrt{n+1}$, com $n \in \mathbb{N}$.*

Feita esta construção é possível discutir alguns pontos:

- Determinar a ordem entre $\sqrt{p}$ e outros pontos $\dfrac{a}{b}$ com $b \neq 0$ já conhecidos.

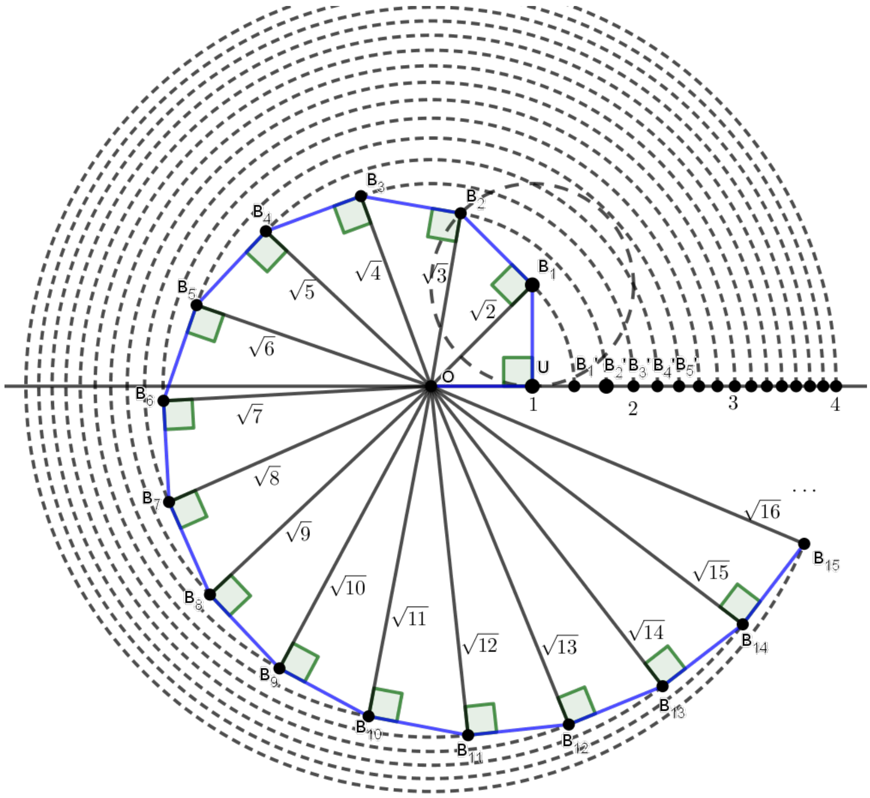
- Construir as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão envolvendo $\sqrt{p}$.

- Pela distribuição dos pontos $B_i's$ na reta (OU) discutir o crescimento da função raiz quadrada.

- Discutir a aproximação Racional das raízes não Racionais.

Esta discussão pode ser enriquecida se a espiral pitagórica for construída no GeoGebra. Desta forma, os estudantes poderiam responder, por exemplo, via experimentação, se em algum momento o segmento os pontos O, B_i e B_j estarão alinhados e a resposta negativa a esta questão poderia remeter novamente ao significado de segmentos incomensuráveis.

Figura 55 – Espiral pitagórica



Fonte: A autora (2018).

Desta forma, segue o passo-a-passo da construção da espiral pitagórica no GeoGebra:

Construção 9. Espiral Pitagórica no GeoGebra[1]

Para tornar a construção menos trabalhosa, sugerimos o uso dos eixos cartesianos. Contudo esta não é uma condição obrigatória. Caso os estudantes ainda não tenham tido contato com este assunto, a construção pode ser realizada utilizando o modo Geometria.

- *Considere o eixo x como a reta (OU) e marque os pontos $O = (0, 0)$, $U = (1, 0)$ e $B_1 = (1, 1)$;*
- *Trace os segmentos $[OU]$, $[UB_1]$ e $[OB_1]$;*
- *Com a ferramenta 'Círculo dados centro e raio', construa o círculo, $\mathcal{C}$, de centro B_1 e raio unitário;*
- *Trace a reta, t, perpendicular a (OB_1), contendo B_1;*

[1] Para maiores dúvidas, recomendamos o tutorial disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Y9rfFDJE_SI>.

- *Usando a interseção entre dois objetos marque os pontos* B_2 *e* C *de interseção entre* $\mathcal{C}$ *e* t*;*

- *Trace os segmentos* $[OB_2]$ *e* $[B_2B_1]$*;*

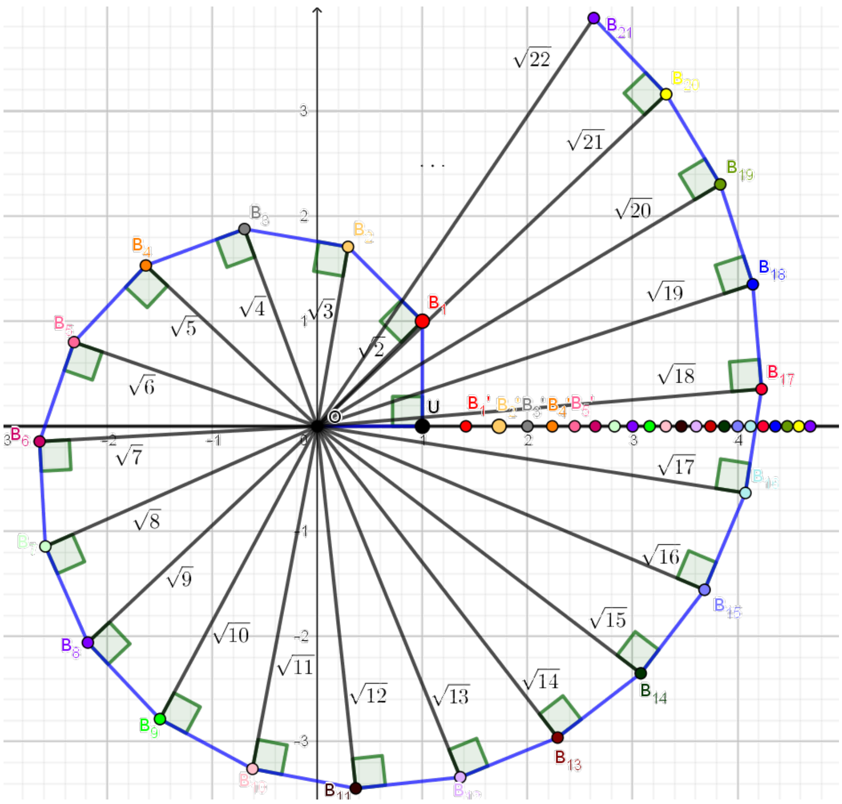
- *Em 'Ferramentas', clique em 'Criar uma nova ferramenta'. Na opção* objetos finais, *selecione: Ponto* B_2, *segmento* $[B_1B_2]$ *e segmento* $[OB_2]$. *Em* objetos iniciais, *selecione: Ponto* O, *ponto* U *e ponto* B_1.

- *Coloque um nome para ferramenta e clique em concluir.*

- *Para encontrar os demais pontos* B_{i+1}, *basta utilizar a ferramenta criada, selecionando, nesta ordem, os pontos* O, B_{i-1} *e* B_i.

- *Para determinar os pontos* B'_{i+1}, *marque a intercessão entre o círculo de centro* O *e raio* $[OB_{i+1}]$ *e o eixo positivo* x.

Figura 56 – Construção da espiral pitagórica utilizando o GeoGebra



Fonte: A autora (2018).

Sugerimos que seja feita uma revisão das operações envolvendo radicais, relacionando a construção geométrica.

3.9 Números Irracionais: muito além das raízes inexatas

Como vimos na Proposição 3.15, $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$, todos os pontos $B_i' \in (OU)$ associados a estas construções são pontos ausentes na reta dos Racionais, ou seja, apesar dos Racionais serem densos (Proposição 3.14), eles não são suficientes para cobrir toda a reta (OU). Assim, precisamos, novamente, ampliar o nosso conjunto de símbolos numéricos para que sejam suficientes à correspondência biunívoca entre este conjunto e os pontos de uma reta contínua.

Uma vez que os 'buracos' da reta dos Racionais tiveram origem nos segmentos $[OP]$ incomensuráveis com a unidade escolhida $[OU]$ e, sabendo que dado $[OA]$ ou $[OA]$ e $[OU]$ são comensuráveis ou $[OA]$ e $[OU]$ são incomensuráveis e que o conjunto $\mathbb{Q}$ é formado pelos símbolos numéricos associados aos pontos $Q \in (OU)$ tais que $[OQ]$ e $[OU]$ são comensuráveis, definimos um novo conjunto de símbolos numéricos associados aos pontos $P \in (OU)$ tais que $[OP]$ e $[OU]$ são incomensuráveis. A este conjunto chamaremos *Irracionais* e será representado por $\mathbb{I}$. Naturalmente, $\mathbb{I}$ e $\mathbb{Q}$ são disjuntos, ou seja, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

Definição 3.12. $\mathbb{I} := \{p = P \in (OU) | [OP]$ *e* $[OU]$ *são incomensuráveis*$\}$.

Assim, pelas contruções feitas na escala pitagórica e pela definição de elemento simétrico, temos alguns exemplos de Irracionais, são eles: $\sqrt{2}; -\sqrt{3}; \sqrt{5} - \sqrt{7}; 2 \cdot \sqrt{11} - \sqrt{3}; \dfrac{\sqrt{6}}{4}, \cdots$

Mas será que o conjunto $\mathbb{I}$ é formado exclusivamente pelas raízes quadradas Não racionais?

3.9.1 Expressões decimais

Definição 3.13. (LIMA et al., 2006, p. 67) *"Uma* expressão decimal *é um símbolo da forma*

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

onde a_0 é um Número Inteiro e $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ são dígitos, isto é, Números Inteiros tais que $0 \leqslant a_n \leqslant 9$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se um dígito a_n, chamado n-ésimo dígito da expressão decimal α. O Número Natural a_0 chama-se a parte inteira *de α."*

Exemplo 3.9. $\alpha = 21,3281000\cdots$ *;* $\beta = 3,121212\cdots$ *e* $\pi = 3,14159265\cdots$.

No caso de α e β sabemos prever como os "$\cdots$" continuam, diferentemente do que ocorre com π, que com o auxílio de potentes computadores, são conhecidas 56 bilhões de suas casas decimais sem encontrar um padrão.

Recordando que a notação $\dfrac{a}{b}$ com a e b Inteiros e $b \neq 0$ simboliza também a divisão de a por b. Temos, então, o caminho para encontrar a expressão decimal dos números da forma $\dfrac{a}{b}$. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.10.

- $\dfrac{1}{4} = 1 \div 4 = 0,25000\cdots$
- $\dfrac{1}{5} = 1 \div 5 = 0,2000\cdots$
- $\dfrac{1}{7} = 1 \div 7 = 0,14285714285714\cdots$
- $\dfrac{1}{10} = 1 \div 10 = 0,1000\cdots$
- $\dfrac{3}{100} = 3 \div 100 = 0,03000\cdots$

Tendo em vista que $\dfrac{a}{10^n} = 0,00\cdots a_n\cdots$, com $a_n = a$, percebemos que a expressão decimal de α pode ser escrita como a soma de Racionais:

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

As reticiências no final da soma dão a entender que estas parcelas continuam infinitamente. Porém, quando $a_i = 0$ para todo $i > n$, temos que α é uma soma finita de Números racionais e, portanto, é Racional.

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

tendo sua expressão decimal escrita na forma:

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Quando $a_i \neq 0$ para todo $i > n$, temos que α é uma soma de infinitos Números Racionais e, se fizermos

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

estaremos obtendo uma *aproximação* para α e o erro cometido será:

$$\alpha - \alpha_n = (a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}) - (a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots)$$

$$\alpha - \alpha_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots$$

Ou seja, $\alpha - \alpha_n < \dfrac{1}{10^n}$.

Assim, a_1 é o maior dígito tal que $\alpha_1 = a_0 + \dfrac{a_1}{10} \leqslant \alpha$; a_2 o maior dígito tal que $\alpha_2 = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} \leqslant \alpha$ e assim por diante, obtendo

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n \leqslant \cdots \leqslant \alpha.$$

Ou seja, mesmo que α tenha uma expressão decimal infinita, α pode ser aproximado tanto quanto se queira por Racionais α_i. De outra maneira, podemos entender α como o limite de uma sequência de Racionais $(\alpha_i's)$.

No exemplo 3.9, notamos diferentes tipos de expressões decimais e, então, nos questionamos se existe alguma relação entre os tipos de expressões decimais com a classificação entre Racionais e Irracionais. Vamos analisar estes casos:

Se $\alpha = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n 0 \cdots 0$. Então,

$$\alpha = \alpha_n = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_n}{10^n}.$$

Como $\mathbb{Z}$ é fechado para soma e multiplicação, temos que α é da forma $\dfrac{a}{b}$ com a e b Inteiros, com $b \neq 0$. Logo, $\alpha \in \mathbb{Q}$. No exemplo 3.9,

$$\alpha = 21 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{1}{10000} = \frac{213281}{10000}.$$

3.9.2 Dízimas periódicas

Definição 3.14. (RORIZ, 2014, p. 36) *"Dizemos que uma expressão decimal é uma* dízima periódica *se existem Naturais k e d tais que $a_{i+d} = a_i$ para todo $i > k$. Neste caso, a expressão decimal é escrita como*

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} \cdots a_{k+d} a_{k+1} \cdots a_{k+d} \cdots"$$

Teorema 3.1. (RORIZ, 2014, p. 36) *"Uma expressão decimal pode ser representada por um Número Racional se, e somente se, for uma dízima periódica."*

Demonstração. Seja

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} \cdots a_{k+d} a_{k+1} \cdots a_{k+d} \cdots$$

Então,

$$10^k \cdot \alpha = a_0 a_1 a_2 \cdots a_k, a_{k+1} \cdots a_{k+d} a_{k+1} \cdots a_{k+d} \cdots$$

e

$$10^{k+d} \cdot \alpha = a_0 a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} \cdots a_{k+d}, a_{k+1} \cdots a_{k+d} a_{k+1} \cdots a_{k+d} \cdots$$

Logo,

$$10^{k+d} \cdot \alpha - 10^k \cdot \alpha = a_0 a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} \cdots a_{k+d} - a_0 a_1 a_2 \cdots a_k$$

E, assim, obtemos:

$$\alpha = \frac{a_0 a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} \cdots a_{k+d} - a_0 a_1 a_2 \cdots a_k}{10^k \cdot (10^d - 1)}$$

Como $a_i \in \mathbb{Z}$ para todo i e $k, d \in \mathbb{Z}$, então, resulta que $\alpha = \dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Portanto, α é Racional.

Reciprocamente, verifiquemos que qualquer número da forma $\dfrac{m}{n}$ pode ser representado por uma dízima periódica.

Primeiramente, notemos que na divisão por m os restos possíveis, r, são tais que $0 \leqslant r < m$. Logo, há apenas m possibilidades de restos na divisão por m. Desta maneira, podemos encontrar Inteiros k e $k + d$ tais que 10^k e 10^{k+d} deixem o mesmo resto na divisão por m. Assim, existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que

$$10^{k+d} - 10^k = h \cdot m.$$

Então,

$$\frac{n}{m} = \frac{n \cdot h}{m \cdot h} = \frac{n \cdot h}{10^{k+d} - 10^k}.$$

Pelo algoritmo da divisão, existem Inteiros a e b tais que

$$m \cdot h = a \cdot (10^d - 1) + b,$$

onde $0 \leqslant b < 10^d - 1$. Podemos, então, escrever b da seguinte forma $b_1 b_2 \cdots b_d$, sendo b_i dígitos. Então,

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot n}{10^k \cdot (10^d - 1)} = \frac{a \cdot (10^d - 1) + b}{10^k \cdot (10^d - 1)} = \frac{a}{10^k} + \frac{b}{10^k \cdot (10^d - 1)} =$$

$$= \frac{1}{10^k} \cdot (a + \frac{b \cdot 10^{-d}}{(1 - 10^{-d})}) = 10^{-k} \cdot (a + \frac{0, b_1 b_2 \cdots b_d}{10^{-d}})$$

Notemos que o termo

$$\frac{0, b_1 b_2 \cdots b_d}{1 - 10^{-d}}$$

pode ser entendido como a soma dos termos infinitos da progressão geométrica de razão 10^{-d} e primeiro termo $0, b_1 b_2 \cdots b_d$. Assim, concluímos que

$$10^k \cdot \frac{m}{n} = a + 0, b_1 b_2 \cdots b_d b_1 b_2 \cdots b_d b_1 b_2 \cdots b_d \cdots .$$

$\square$

A ideia contida na primeira parte da demonstração deste teorema nos permite concluir que toda dízima periódica é a expressão decimal de um Número Racional $\dfrac{a}{b}$ com $b \neq 0$, chamado *fração geratriz* da expansão decimal α e nos fornece um algoritmo para determiná-la.

Exemplo 3.11. *Determinar a fração geratriz da dízima periódica* $\alpha = 0,333\cdots$.

Se $\alpha = 0,333\cdots$, *então* $10 \cdot \alpha = 3,333\cdots$. *Logo,*

$$10 \cdot \alpha - \alpha = 3 \Leftrightarrow 9 \cdot \alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Assim, para encontrarmos $P \in (OU)$ *tal que* $P = 0,333\cdots$ *basta construirmos* $\frac{1}{3}$. *Contudo, se fôssemos tentar encontrar o ponto* P *dividindo* $[OU]$ *por* 10 *repetidas vezes, encontraríamos apenas pontos muito próximos de* P, *mas não exatamente* P.

Exemplo 3.12. *Determinar a fração geratriz de* $3,123121212\cdots$.

Seja $x = 3,123121212\cdots$. *Então, neste caso* $k = 3$ *e* $d = 2$. *Assim,*

$$10^k \cdot x = 10^3 \cdot x = 3123,121212\cdots.$$

e

$$10^{k+d} \cdot x = 10^5 \cdot x = 312312,121212\cdots$$

Fazendo

$$10^5 \cdot x - 10^3 \cdot x = 309189,000\cdots \Leftrightarrow x = \frac{309189}{99000}.$$

Os estudantes podem, com o auxílio da calculadora, conferir os resultados obtidos. É importante que o professor aborde frações cujas dízimas periódicas têm períodos grandes, tais como:

$$\frac{3}{14} = 0,2142857142857142857\cdots$$

$$\frac{1}{43} = 0,0232558139534883720930232558 1395\cdots$$

Mesmo que o período da dízima periódica seja formado por muitos dígitos, o algoritmo apresentado no teorema 3.1 pode ser aplicado e este garante que sempre há uma fração associada a uma expressão decimal periódica. [2]

[2] Recomendamos as atividades presentes em <http://www.uff.br/cdme/edn/edn-html/edn-br.html>. Nesta página são disponibilizados dois aplicativos interativos que podem ser utilizados também no formato *offline*. O primeiro (na forma de um jogo) explora a relação entre a expansão decimal e sua representação geométrica. O segundo permite calcular os primeiros 2000 dígitos da expansão decimal de um Número Racional. Além disso, a página sugere três módulos de atividades em que estes aplicativos são utilizados, com manual para o professor e folha de orientações para os estudantes.

3.9.3 Números Irracionais

O Teorema 3.1 também nos garante que uma expressão decimal infinita não-periódica não pode ser representada sob a forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $b \neq 0$. Como o axioma da completude (V.2) garante que não há pontos a serem acrescentados na reta (OU), ou seja, a reta (OU) é contínua, existem pontos $P \in (OU)$ associados a estas expressões decimais não-periódicas. Logo, estes pontos são tais que $[OP]$ e $[OU]$ são incomensuráveis.

Tendo em vista a definição do conjunto $\mathbb{I}$, resulta que as expressões decimais infinitas não-periódicas pertecem a este conjunto. Então, podemos exibir outros Números Irracionais que não sejam as raízes quadradas não Racionais. Por exemplo,

$$a = 0,101001000100001\cdots$$

$$b = 1,23456789101112131415\cdots$$

É importante lembrar que a e b serão Irracionais apenas se houver a afirmação da ausência de um período com número de dígitos maior do que a parte exibida. Pois, caso contrário, teríamos que a e b seriam Racionais.

Muitos estudantes confundem o período com a observação de um padrão. Por exemplo, $a = 1,234523452345\cdots$ é uma dízima periódica porque o período 2345 se repete e, portanto, $a \in \mathbb{Q}$. Mas $b = 0,1234567891011121314\cdots$ não apresenta um período após a vírgula e sim um padrão e, portanto, não é uma dízima periódica e $b \in \mathbb{I}$.

Como comentamos no Exemplo 3.9, já são conhecidos mais de 56 bilhões de casas decimais da expansão decimal de π sem encontrar um período, o que pode nos fazer desconfiar que π é um Número Irracional, mas o que garante que o período de π não tem 57 bilhões de dígitos e, com isso, π seria Racional? Há uma demonstração matemática encontrada com detalhe em Oliveira (2013), porém, esta prova demanda conceitos não acessíveis aos estudantes da Educação Básica. Assim, o professor pode apresentar a expansão decimal de π com um número significativo de dígitos e comentar que isto não garante a sua irracionalidade, o que é feito por meio de uma demonstração matemática assim como apresentado no caso de $\sqrt{2}$, mas que não é possível compreendê-la neste momento.

Contudo, de onde surgiu o π? O número π é definido como a razão entre o comprimento de uma circunferência, c, e o seu diâmetro, d. Assim,

$$\pi = \frac{c}{d}.$$

Sabendo que π é Irracional, sabemos que se $P \in (OU)$ com $P = \pi$, $[OP]$ e $[OU]$ são incomensuráveis, ou seja, π não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a e b Inteiros com $b \neq 0$.

Assim, tendo em vista a definição do número π, temos que c e d não podem ser ambos Racionais, uma vez que a divisão de Racionais ainda é Racional. Todavia, mesmo sendo π um Número Irracional, conseguimos encontrar $P \in (OU)$ tal que $P = \pi$.

Construção 10. *$P \in (OU)$ tal que $P = \pi$.*

- *Fixada a unidade $[OU]$, encontre o ponto $Q = \dfrac{1}{2}$.*
- *Com o compasso, construa a circunferência de centro O e raio $[OQ]$.*
- *Coloque um barbante exatamente sob a circunferência desenhada, cobrindo o seu traçado do início ao fim. Marque onde as duas pontas se encontram.*
- *Coloque uma das pontas no ponto O e estique o pedaço de barbante. Na ponta final do barbante, marque o ponto P.*

$P = \pi$, pois se o raio da circunferência desenhada é $\dfrac{1}{2}$ temos $d = 1$ e, portanto, $c = \pi$. Ora, c é o tamanho do barbante.

Assim, com $\pi \in (OU)$, podemos fazer comparações deste número com os demais valores já conhecidos, além de construir a soma, subtração, multiplicação e divisão envolvendo π apenas seguindo os passos já descritos na definição destas operações.

3.10 Números Reais

Definimos o conjunto dos Números Reais, $\mathbb{R}$, como sendo a união entre $\mathbb{I}$ e $\mathbb{Q}$, ou seja,

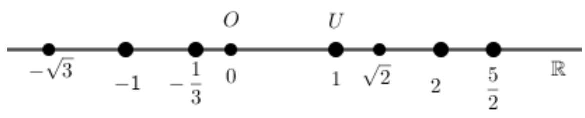
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Assim, como fixada a reta (OU), a unidade $[OU]$ e o sentido positivo, $[OU)$, para todo ponto $P = p \in (OU)$ tem-se que $[OP]$ e $[OU]$ são comensuráveis e, portanto, $p \in \mathbb{Q}$ ou $[OP]$ e $[OU]$ são incomensuráveis e, então, $p \in \mathbb{I}$, temos que existe uma correspondência bijetiva que associa a cada ponto da reta (OU) a um elemento de $\mathbb{R}$.

Em $\mathbb{R}$ já estão definidas as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão, além da relação de ordem e todas as propriedades construídas ao longo das definições dos conjuntos numéricos. Os axiomas da continuidade e da completude (V.1) e (V.2) garantem que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, ou seja, diferentemente da reta dos Naturais, dos Inteiros e da reta dos Racionais, a reta real não tem 'furos', é uma reta contínua:

Além disso, das definições dos conjuntos como apresentamos temos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

Figura 57 – Reta real



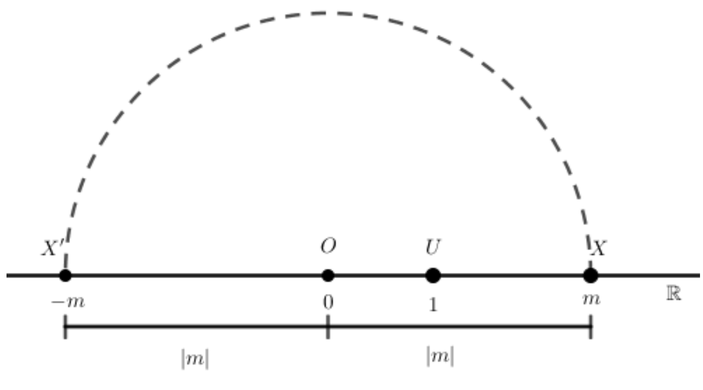
Fonte: A autora (2018).

Ressaltamos que, diferentemente dos Irracionais $\sqrt{p}$, com p primo e π, não conseguimos encontrar, via construção geométrica, os pontos Irracionais a, conhecendo parte de sua expansão decimal infinita. Além destes, também não é possível construir, utilizando régua e compasso, Números Reais tais como $\sqrt{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\pi}$ e $\sqrt[3]{3}$, mas podemos encontrar aproximações racionais com controle da ordem de grandeza do erro cometido.

Outra discussão interessante é quanto à medida encontrada ao utilizar uma régua graduada. Quantas graduações seriam necessárias para marcar o ponto $P = p \in (OU)$ tal que $p = 0,555\cdots$? Há alguma construção geométrica que determinaria este ponto com exatidão? E o ponto $q = 0,1011011101111\cdots$. Há alguma construção geométrica para determiná-lo? Quantas graduações seriam necessárias para atingi-lo?

Quando falamos que o segmento $[AB] \equiv [OA]$, com $A = a$, usamos a notação $\overline{[AB]} = |a|$. A esta notação chamamos *módulo de a*. Ao procurarmos $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| = m$ estamos em busca do(s) ponto(s) tais que $X = x$ e $\overline{[OX]} = |m|$. Com o auxílio do compasso, encontraríamos que $X = m$ ou $X = -m$.

Figura 58 – Módulo de m



Fonte: A autora (2018).

4 Descrição do experimento

De posse da proposta de abordagem dos Números Reais com base na Aritmética de Segmentos apresentada no capítulo anterior, nos indagávamos se, de fato, esta abordagem era acessível aos estudantes da educação básica e se as suas discussões proporcionariam situações de ensino e de aprendizagem significativas. Nos questionávamos se com a nova abordagem os estudantes conseguiriam entender os conceitos relacionados aos Números Reais de forma mais significativa ou, no mínimo, equivalente à compreensão obtida através da abordagem essencialmente aritmética, usualmente utilizada.

Movidos por estes questionamentos, partimos para a parte experimental da pesquisa. Entendendo que o ensino e a aprendizagem estão intimamente ligados e que uma das maneiras de investigar este processo é por meio de avaliações e considerando a opinião dos estudantes, elaboramos um plano de pesquisa experimental em que a abordagem elaborada seria proposta aos alunos do primeiro ano do ensino médio.

> Como sugere o próprio nome, a pesquisa em ensino tem como foco o ensino. Todavia, embora não haja, necessariamente, uma relação de causa e efeito entre ensino e aprendizagem, não faz muito sentido falar em ensino sem relacionar essa atividade a de aprender. Ou seja, o ensino tem sempre como objetivo a aprendizagem e, como tal, perde significado se for tratado isoladamente. Entretanto, aprendizagem é uma atividade idiossincrática que pode não ser consequência necessária do ensino recebido. Por outro lado, para saber se houve aprendizagem é preciso avaliá-la. A avaliação da aprendizagem pode, em princípio, prover evidências não só sobre o que foi aprendido mas também sobre até que ponto o ensino foi responsável por isso. Naturalmente, é possível também avaliar o ensino de outras maneiras como, por exemplo, através da opinião do aluno (MOREIRA, 2003, p. 104).

De acordo com Canhota (2008), a pesquisa piloto constitui-se um meio muito útil de elaborar e testar um protocolo de investigação e seus resultados são muito úteis por suas indicações, mas estes não podem ser tomados como base para generalizações. Por definição, um estudo piloto é como um teste, em pequena escala, dos procedimentos e métodos propostos para determinada pesquisa, uma versão menor de um estudo completo (BAILER C.; TOMITCH, 2011).

Devido à fácil acessibilidade e como o intuito era uma pesquisa piloto, selecionamos como participantes da pesquisa os estudantes do primeiro ano dos cursos técnicos integrados ao ensino médio de uma escola federal no interior do Estado de São Paulo, na qual o ingresso ocorre por meio de um processo seletivo. O experimento ocorreu durante as aulas regulares de Matemática no período de fevereiro à março de 2017. As aulas tinham duração de cinquenta minutos, cinco aulas por semana, distribuídas em três dias: duas aulas duplas e uma aula individual. O experimento teve duração total de quinze aulas.

Como o nosso objetivo era não só investigar o entendimento que os alunos tinham acerca dos Números Reais *a priori* e testar a nova abordagem, mas também compará-la com a forma como usualmente os Números Reais são tratados neste nível de ensino, dividimos os estudantes em dois grupos: *grupo experimental* e *grupo controle*.

> Ao contrário da observação cotidiana (ou de qualquer abordagem de pesquisa), o experimento distingue-se pelo grau de controle que um pesquisador pode aplicar à situação de pesquisa. Em um experimento, os pesquisadores manipulam efetivamente uma ou mais das variáveis independentes às quais seus indivíduos estão expostos. A manipulação ocorre quando um pesquisador atribui uma variável independente a um grupo de pessoas (chamado *grupo experimental*), mas nega essa variável ao outro grupo de pessoas (chamado *grupo controle*). Idealmente, todas as outras diferenças iniciais entre o grupo experimental e o de controle são eliminadas ao designarmos aleatoriamente os indivíduos às condições experimentais e de controle (LEVIN J. ; FOX, 2004, p. 03).

Tendo em vista a organização posta na escola, visando não alterar a rotina dos estudantes, e considerando os diferentes perfis de cada curso técnico, fizemos a divisão de forma que estas particularidades fossem minimizadas. Assim, os participantes da pesquisa foram divididos em:

- Grupo Controle, composto por 20 estudantes da turma A do curso M1;
- Grupo Experimental A, composto por 40 alunos da turma única do curso I;
- Grupo Experimental B, composto por 25 alunos da turma B do curso M1.

Durante o experimento, o grupo controle participou das aulas segundo a metodologia usualmente proposta pelos materiais didáticos, utilizando como livro texto as apostilas do Sistema Anglo de Ensino (MARMO et al., 2002; JUNIOR; GLENN; TEIXEIRA, 2016), nas quais há um controle maior sobre as escolhas do professor, visando uma maior neutralidade da pesquisadora/professora, e os grupos experimentais participaram das aulas organizadas segundo a abordagem apresentada no capítulo anterior. Em nenhum grupo foram abordados os exercícios que compunham as avaliações diagnóstica e final. Os participantes da pesquisa foram orientados a não trocarem informações sobre as aulas, uma vez que encerrada a fase experimental, os grupos conheceriam a abordagem feita no grupo adverso.

De acordo com os apontamentos realizados até o momento e utilizando como fundamento os estudos de Gil (2002), este estudo pode ser classificado como *quase-experimental*, uma vez que apesar da pesquisa propor a manipulação de uma das características dos elementos estudados e dividir a amostra em grupo experimental e controle, não há a garantia da aleatoridade da amostra estudada, uma vez que a população considerada é muito numerosa - todos os estudantes do primeiro ano do ensino médio do Brasil.

> Em muitas pesquisas, procede-se à manipulação de uma variável independente. Nem sempre, porém, verifica-se o pleno controle da aplicação dos estímulos experimentais ou a distribuição aleatória dos elementos que compõem os grupos. Nesses casos, não se tem rigorosamente uma pesquisa experimental, mas quase-experimental (Campbell, Stanley, 1979). Por exemplo, em populações grandes, como as de cidades, indústrias, escolas e quartéis, nem sempre se torna possível selecionar aleatoriamente subgrupos para tratamentos experimentais diferenciais, mas torna-se possível exercer, por exemplo, o completo controle experimental sobre esses subgrupos. Esses delineamentos quase-experimentais são substancialmente mais fracos, porque sem a distribuição aleatória não se pode garantir que os grupos experimentais e de controle sejam iguais no início do estudo. Não são, no entanto, destituídos de valor. O importante nestes casos é que o pesquisador apresente seus resultados esclarecendo o que seu estudo deixou de controlar (GIL, 2002, p. 48).

Uma vez que os processos de ensino e de aprendizagem envolvem múltiplas variáveis, sendo um processo complexo, nossa pesquisa precisava ir além da simples análise de avaliações, mas sem abrir mão delas. Gatti (2006) trata de alguns pontos sobre a pesquisa em educação, dentre estes o que se entende por pesquisa e discute que, de fato, a pesquisa em educação é uma pesquisa científica. Além disso, a autora aponta que a análise quantitativa é fundamental para a pesquisa nesta área tanto quanto a análise qualitativa.

> Os métodos de análise de dados que se traduzem por números podem ser muito úteis na compreensão de diversos problemas educacionais. Mais ainda, a combinação deste tipo de dados oriundos de metodologias qualitativas pode vir a enriquecer a compreensão de eventos, fatos, processos. As duas abordagens demandam, no entanto, o esforço de reflexão do pesquisador para dar sentido ao material levantado e analisado (GATTI, 2006, p. 30).

A investigação voltada para a análise quantitativa se apoia predominantemente em dados estatísticos, visando gerar medidas precisas e confiáveis para descrever um determinado fenômeno ou para fazer inferências. Gatti (2004) define os métodos quantitativos de análise como recursos, em que se incluem tratamento de dados e testes de inferência, para o pesquisador que, por sua vez, precisa saber lidar com estes em seu contexto de reflexão e não submeter-se cegamente a eles.

Falcão e Régnier (2007) afirmam que, no campo das pesquisas em ciências humanas, a análise inferencial de dados nos força a abrir mão da ambição da “verdade” e a nos contentarmos com os vislumbres da “verossimilhança”, do que “é” para o que “pode ser”, com margem de erro variável. Assim como estes autores e Gatti (2004), entendemos que em pesquisas educacionais a análise quantitativa fornece indícios sobre as questões tratadas e não verdades, fazendo aflorar semelhanças, proximidades, plausibilidades e não certezas.

> Esta análise, a partir de dados quantificados, contextualizados por perspectivas teóricas com escolhas metodológicas cuidadosas, trazem subsídios concretos para a compreensão de fenômenos educacionais indo além dos causísmos e contribuindo para a produção/enfrentamento de políticas educacionais, para planejamento, administração/gestão da educação, podendo ainda orientar ações pedagógicas de cunho mais geral ou específico. Permitem ainda desmistificar representações, preconceitos, "achômetros" sobre fenômenos educacionais, construídos apenas a partir do senso comum do cotidiano, ou do marketing (GATTI, 2004, p. 26).

A abordagem qualitativa tem como objetivo analisar aspectos que não podem ser traduzidos de forma numérica, ou seja, dedica-se a compreender de forma mais aprofundada os fenômenos interpretando-os sob a perspectiva dos próprios sujeitos investigados sem preocupar-se com a representatividade numérica ou generalizações estatísticas. O que interessa à pesquisa qualitativa não são apenas os resultados, mas como o processo se desenvolve.

> O verbo principal da análise qualitativa é compreender. Compreender é exercer a capacidade de colocar-se no lugar do outro, tendo em vista que, como seres humanos, temos condições de exercitar esse entendimento. Para compreender, é preciso levar em conta a singularidade do indivíduo, porque sua subjetividade é uma manifestação do viver total. Mas também é preciso saber que a experiência e a vivência de uma pessoa ocorrem no âmbito da história coletiva e são contextualizadas e envolvidas pela cultura do grupo em que ela se insere (MINAYO, 2012, p. 621).

Assim, o termo "pesquisa qualitativa" refere-se à abordagem que produz descobertas que não resultaram de procedimentos estatísticos ou outros meios de quantificação. Incialmente, a pesquisa qualitativa era característica de estudos de Antropologia e Sociologia, mas, atualmente, tem se estendido a outras áreas, tais como a Psicologia e a Educação.

> A pesquisa quantitativa está baseada em uma filosofia positivista que supõe a existência de fatos sociais com uma realidade objetiva independente das crenças dos indivíduos, enquanto que a qualitativa tem raízes em um paradigma segundo o qual a realidade é socialmente construída [...] A pesquisa quantitativa procura explicar as causas de mudanças em fatos sociais, primordialmente através de medição objetiva e análise quantitativa, enquanto a qualitativa se preocupa mais com a compreensão do fenômeno social, segundo a perspectiva dos atores, através de participação na vida desses atores [...] A pesquisa quantitativa tipicamente emprega delineamentos experimentais ou correlacionais para reduzir erros, viéses e outros ruídos que impedem a clara percepção dos fatos sociais, enquanto o protótipo do estudo qualitativo é a etnografia [...] O pesquisador quantitativo ideal é desprendido para evitar viés, enquanto o pesquisador qualitativo fica 'imerso' no fenômeno de interesse (FIRESTONE, 1987 apud MOREIRA, 2003, p. 121).

Moreira (2003) afirma que o pesquisador qualitativo também utiliza a estatística descritiva, uma vez que ele não está preocupado em fazer inferências, mas descrever e interpretar os dados do ponto de vista de significados - significados do pesquisador e significados dos sujeitos.

Existe uma discussão sobre a compatibilidade ou incompatibilidade das abordagens qualitativas e quantitativas, na qual, segundo Gatti (2006), incorporou-se mais aspectos ideológicos do que análises metodológicas e de fundamentos teóricos.

> Na discussão em torno das abordagens qualitativas x quantitativas encontramos uma polarização de argumentos que nem sempre leva em conta os limites e as limitações de ambas na produção de conhecimentos. Preconceitos erigidos em conceitos levaram a área a privilegiar estudos chamados "qualitativos", que desembocam em muitos cauísmos e são, em geral, de escopo muito limitado. Este tipo de abordagem - as qualitativas - tem grande valor, porém as dificuldades metodológicas de seu emprego nem sempre são consideradas e sua abrangência interpretativa nem sempre respeitada, levando a generalizações impróprias. O mesmo pode ocorrer com trabalhos que usam quantificações. Nem todo trabalho deste tipo tem a abrangência que muitas vezes lhe é atribuída e a significação que lhe é concedida (GATTI, 2006, p. 28).

A autora entende que os conceitos de quantidade e qualidade não são totalmente dissociados, pois a quantidade é um significado que é atribuído à grandeza com que um fenômeno se manifesta e que precisa ser interpretada qualitativamente, já que, em si, seu significado é restrito e, nas abordagens qualitativas, também há a associação de grandezas, pois é preciso que o evento e o fato se manifestem em uma grandeza suficiente para sua detectação.

Assim como Moreira (2003) e Gatti (2006), entendemos que quando estudos usando diferentes médotos se complementam, pode-se ter mais certeza de que os resultados não foram influenciados pela metodologia.

> Cada abordagem ao estudo de situações educacionais provê de maneira única sua própria perspectiva. Cada uma ilumina a seu modo as situações que os seres humanos procuram compreender. O campo da educação em particular precisa evitar o monismo metodológico. Nossos problemas devem ser atacados de todas as maneiras que forem frutíferas [...] A questão não é contrastar qualitativo e não qualitativo, mas como abordar o mundo educacional. É para o artístico que devemos nos voltar não como uma rejeição ao científico, mas porque com ambos podemos atingir visão binocular. Olhar através de um só olho nunca proporcionou muita profundidade de campo (EISNER, 1981 apud MOREIRA, 2003, p. 132).

De acordo com Moreira (2003), na pesquisa em ensino há múltiplos objetos de estudo e maneiras de coletar dados. Dentre os objetos de estudo, o autor lista uma aula, um procedimento de avaliação, um novo currículo, a influência de uma certa variável sobre a aprendizagem, um experimento de laboratório, entre outros. Dentre as formas de coletar dados o autor destaca as gravações de uma aula ou de parte dela, anotações de observação, gravações de entrevistas, mapas conceituais, respostas a testes. Todos estes registros são transformados e analisados - qualitativamente ou quantitativamente - de modo a produzir conclusões acerca do fenômeno de interesse.

> É o conjunto de diferentes pontos de vista, e diferentes maneiras de coletar e analisar os dados (qualitativa e quantitativamente), que permite uma ideia mais ampla e inteligível da complexidade de um problema (GOLDENBERG, 2004, p. 62).

Visando enxergar o tema com maior profundidade, o experimento será analisado sob os enfoques quantitativos e qualitativos, cujos métodos de coleta e análise de dados detalharemos a seguir.

4.1 Metodologia de análise quantitativa

Antes do experimento, todos os participantes da pesquisa fizeram uma Avaliação Diagnóstica. Com este registro investigamos o que os estudantes haviam compreendido durante o estudo dos Números Reais ao longo do Ensino Fundamental II. Esta avaliação foi arquivada e todos os estudantes não tiveram, neste momento, acesso à correção ou aos gabaritos.

Ao final destas aulas, os grupos foram submetidos a uma Avaliação Final idêntica à Avaliação Diagnóstica. Cada questão destas avaliações diz respeito a uma competência/habilidade diferente, presente nos documentos oficiais (BRASIL, 1999), (BRASIL, 1998), e (SÃO PAULO, 2008). Elaboramos uma pauta de correção e a cada questão foi atribuída uma nota de 0 a 2 pontos.

> Aplica-se um pré-teste O_1 a um grupo, submete-se esse grupo a um tratamento X e aplica-se, então, um pós-teste O_2. O_1 e O_2 significam que o mesmo grupo é observado antes e depois do tratamento que pode ser, por exemplo, um novo método de ensino ou um recurso didático alternativo. Diferenças entre O_2 e O_1 (que podem ser simples testes de conhecimento) evidenciariam a eficácia (ou ineficácia) do tratamento X. O problema com este delineamento é que não controla outras variáveis, além de X, que poderiam explicar diferenças entre O_2 e O_1. Por exemplo, os alunos poderiam ter melhores resultados no pós-teste porque amadureceram durante o curso e não porque o tratamento X tenha sido eficiente. Um delineamento experimental muito usado é o seguinte (Campbell e Stanley 1979, p. 26): $O_1 \times O_2$ e $O_3 \times O_4$. Neste delineamento, trabalha-se com dois grupos e os sujeitos da pesquisa são designados aleatoriamente a um deles. Aplica-se um pré-teste a ambos os grupos ($O_1 = O_3$), i.e., "observa-se" os grupos antes de manipular a variável independente X. Um dos grupos (grupo experimental) é então submetido ao tratamento X e o outro (grupo controle) não. Após, aplica-se um pós-teste ($O_2 = O_4$) a ambos os grupos. Na prática, o pré e o pós-teste podem ser iguais; diferenças entre os resultados do pré e pós-testes em ambos os grupos ($O_2 - O_1$ e $O_4 - O_3$) podem fornecer evidências sobre o efeito do tratamento X.

> Este delineamento controla variáveis, exceto X, na medida em que elas influenciarão igualmente ambos os grupos e, portanto, seu efeito não pesará na comparação das diferenças $O_2 - O_1$ e $O_4 - O_3$. Além disso, a aleatoriedade da designação dos sujeitos a um dos grupos, embora não garanta equivalência entre os grupos, reduz ao mínimo a probabilidade de que sejam diferentes (MOREIRA, 2003, p. 111).

Esta prática também é justificável segundo a literatura relativa aos métodos estatísticos. Witte e Witte (2005) afirmam que focalizando as diferenças entre pares de resultados correspondentes a cada sujeito, o investigador efetivamente elimina, pelo simples ato da subtração, o impacto exclusivo de cada indivíduo em relação a ambos os resultados.

Como nossa amostra é muito particular e que algumas habilidades podem não ter sido consideradas nestas avaliações, portanto, por estes e outros motivos, entendemos que esta análise não traz conclusões que possam ser generalizadas. Todavia, ela cumpre o nosso objetivo de, por meio desta pesquisa quase-experimental, aprimorar o material elaborado, verificando a significância de sua contribuição no grupo analisado e identificando alguns questionamentos e defasagens apresentados pelos estudantes deste nível de ensino acerca do tema.

A inferência estatística fornece um processo de análise chamado *teste de hipóteses*, que permite a tomada de decisão entre duas hipóteses formuladas, com grau de risco conhecido. Segundo Morettin (2010), o procedimento padrão de um teste de hipóteses é:

- definir as hipóteses do teste - hipótese nula H_0 e hipótese alternativa H_1;
- fixar um nível de significância α, que é a probabilidade de rejeitar H_0, quando esta é a hipótese verdadeira. De acordo com Witte e Witte (2005, p. 208), "o nível de significância mais registrado nos relatórios de cunho profissional é $\alpha = 0,05$"e, portanto, será este o nível de significância adotado nos testes deste experimento;
- selecionar uma amostra de tamanho n e calcular uma estimativa $\widehat{\theta}_0$ do parâmetro θ, o qual deseja-se estudar;
- usar para cada tipo de teste uma variável cuja distribuição amostral do estimador do parâmetro seja a mais concentrada em torno do verdadeiro valor do parâmetro;
- calcular o valor do parâmetro θ_0, dado por H_0, o valor crítico e o valor observado na amostra;
- fixar duas regiões: uma de não rejeição de H_0 e uma de rejeição de H_0, por meio do valor crítico fornecido pela padronização do teste, as quais dependerão do nível de significância adotado e do tamanho da amostra;
- tomar a decisão: se o valor observado pertencer à região de não rejeição, a decisão é a de não rejeitar H_0, caso contrário, a decisão é rejeitar H_0.

Tendo em vista que:

- em cada um dos grupos, as notas das avaliações diagnósticas e finais são amostras relacionadas, pois dizem respeito à mensuração de um mesmo participante, antes e depois da interferência do pesquisador;
- estamos interessados em analisar os efeitos produzidos por cada uma das abordagens medidos pela pontuação de cada uma das questões;

Witte e Witte (2005, p. 267) afirmam que o *Teste t-pareado* é destinado para duas amostras relacionadas, sendo um teste relativamente simples e direto em decorrência de seu foco em valores de diferenças e que, "sob circunstâncias apropriadas, trata-se de um teste mais eficaz - ou seja, mais passível de rejeitar uma hipótese nula falsa".

> Fazemos testes de comparação de médias para dados emparelhados quando os resultados das duas amostras são relacionados dois a dois, de acordo com algum critério que fornece os valores de cada par. Para cada par definido, o valor da primeira amostra está claramente associado ao respectivo valor da segunda amostra (MORETTIN, 2010, p. 277).

Assim, o teste de hipóteses mais indicado para nossos objetivos é o Teste t-pareado, avaliando as médias das diferenças entre a pontuação de cada questão nas duas avaliações. Porém, uma premissa necessária para este teste é que estas diferenças sejam normalmente distribuídas, mas, de acordo com Witte e Witte (2005), esta premissa pode ser descartada de acordo com o tamanho da amostra.

> O teste t-pareado presume que a população relativa a valores de diferença seja normalmente distribuída. Você não precisa ficar muito preocupado em relação a violações dessa premissa, contanto que o tamanho da amostra seja relativamente grande (maior do que cerca de 10 pares) (WITTE; WITTE, 2005, p. 272).

Tomando como fundamento o fato de que os grupos têm mais de vinte participantes, com base neste argumento, podemos descartar a premissa da normalidade das diferenças e utilizar o Teste t-pareado, cujos parâmetros utilizados são:

$$\overline{d} = \text{média das diferenças da amostra}$$

$$\mu_d = \text{valor das diferenças entre as médias das populações a ser testado}$$

$$s_d = \text{ desvio padrão da amostra das diferenças}$$

$$n = \text{ tamanho da amostra}$$

O valor-T observado pelo teste é dado por:

$$\text{Valor-T} = \frac{\overline{d} - \mu_d}{s_{\overline{d}}},$$

onde $s_{\overline{d}} = \dfrac{s_d}{\sqrt{n}}$.

Para cada grupo - experimental A, experimental B e controle - e, em cada questão, calcularemos a diferença entre as médias obtidas na questão quando proposta na avaliação final e quando proposta na avaliação diagnóstica, ou seja:

$$\mu_d = \mu_{\text{final}} - \mu_{\text{diagnóstica}}.$$

Então, aplicaremos o Teste t-pareado às diferenças em cada um dos grupos, onde as hipóteses serão:

$$H_0 = \mu_d = 0, \text{ou seja, não houve diferença entre as médias}$$

$$H_1 = \mu_d > 0, \text{ou seja, houve diferença significativa entre as médias}$$

O valor de p é uma probabilidade que mede a evidência contra a hipótese nula. Na prática comparamos o valor-p com o nível de significância. Caso o valor-p $\leqslant \alpha$, devemos rejeitar H_0, caso valor-p $> \alpha$: não devemos rejeitar H_0.

Portanto, a conclusão do Teste-t pareado pode se dar de duas formas análogas:

1. Quanto à comparação entre o valor-T e o valor-t crítico, o qual consta na tabela de distribuição t e depende dos graus de liberdade:
   - Valor-T observado $<$ valor-t crítico $\Rightarrow$ não rejeita-se H_0;
   - Valor-T observado $>$ valor-t crítico $\Rightarrow$ rejeita-se H_0.
2. Quanto à comparação do valor-p e o nível de significância α:
   - Valor-p $> \alpha \Rightarrow$ não rejeita-se H_0;
   - Valor-p $< \alpha \Rightarrow$ rejeita-se H_0.

Mantivemos a divisão entre os grupos experimentais A e B para podermos realizar a comparação também entre turmas do mesmo curso, com suas especificidades.

Nesta análise utilizaremos o reconhecido software estatístico Minitab [1], no qual inserimos as tabelas com as notas de cada grupo em cada questão, selecionamos os testes desejados e o nível de significância. O software, ao realizar os cálculos que detalhamos

[1] Disponível em: <http://www.minitab.com/pt-br/>

acima, fornece o valor-T e o valor-p. Estes dados serão apresentados no capítulo seguinte no formato resumido com os valores de interesse para o teste e, então, analisados. As tabelas originais fornecidas pelo Minitab encontram-se no Anexo I.

4.2 Metodologia de análise qualitativa

A coleta de dados para a análise qualitativa é realizada por meio de questionários, estudos de caso, entrevistas estruturadas ou semi-estruturadas e levantamento de documentos. Segundo Moraes (1999), as análises textuais tem composto cada vez mais as pesquisas qualitativas, seja por meio de textos já existentes ou por meio de material produzido a partir de entrevistas, de modo que partindo de uma análise rigorosa e criteriosa deste tipo de registro possamos aprofundar nos fenômenos investigados.

Após a realização da Avaliação Final, foram realizadas cinco aulas de cinquenta minutos em que cada grupo tomou contato com a abordagem adotada no grupo oposto. Para que os participantes da pesquisa não se sentissem inibidos em relatar seu verdadeiro ponto de vista, fizemos a coleta dos dados para a análise qualitativa via relatos anônimos escritos. Estes depoimentos escritos foram solicitados ao final do experimento, quando todos os participantes da pesquisa já conheciam as duas abordagens dos Conjuntos Numéricos adotadas nos grupos experimentais e de controle.

A proposta era que os relatos deveriam se caracterizar pelo exercício da subjetividade e da liberdade de expressão, em que os estudantes pudessem apresentar a percepção quanto às duas abordagens, comparando-as. Os participantes tiveram cerca de três semanas para elaborarem esta reflexão de caráter pessoal escrita sob a forma de um texto livre, o qual poderia ser manuscrito ou impresso, mas sem identificação. Estes textos foram utilizados para a análise qualitativa deste estudo.

D'Ambrosio (2013) afirma que a pesquisa qualitativa tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando trata grupos de participantes. Segundo o autor, esta modalidade de pesquisa foi fundamental para a emergência da antropologia e da psicanálise.

Borba e Araújo (2013) observam a dificuldade que professores de Matemática, habituados a lidar com quantidades, têm em lidar com a pesquisa qualitativa e ressaltam que esta é indicada quando se está interessado em investigar o processo e pergunta-se não "o que", mas "como" ou "por quê" determinado fenômeno ocorre. Os autores ainda afirmam que pesquisas realizadas segundo uma abordagem qualitativa fornecem informações mais descritivas, que priorizam o significado dado às ações.

> Bogdan e Biklen (1994) apresentam uma boa caracterização de pesquisas qualitativas: 1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal (p.

> 47); 2. A investigação qualitativa é descritiva (p. 48); 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos (p. 49); 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva (p. 50); 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa (p. 80) (BOGDAN; BIKLEN, 1994 apud BORBA; ARAÚJO, 2013, p. 25).

Também Bicudo (2013) ressalta o caráter descritivo e reflexivo da análise qualitativa, a qual busca a manifestação de algo que é exposto na percepção e, por isso, depende da consciência que, por sua vez, é movimento.

> É por isso que esse modo de pesquisar dá destaque à descrição. Descrição dos estados de consciência, o que significa dos atos vivenciais aos quais se está atento, percebendo-os em ação. Sempre é uma descrição daquele que percebe e para quem o mundo faz sentido. Trata-se, portanto, de uma investigação que ao mesmo tempo pesquisa a realidade mediante suas manifestações e torna o sujeito perceptor lúcido a respeito do sentido que o mundo faz para si, incluindo nessa lucidez a atentividade para com o sentido que o mundo faz para os outros com quem está (BICUDO, 2013, p. 122).

A autora Goldenberg (2004) alerta que um dos principais problemas da pesquisa qualitativa é a não apresentação dos processos pelos quais as conclusões foram alcançadas, destacando a importância fundamental da descrição para a superação deste impasse.

Por tudo isso, apresentaremos uma análise descritiva dos relatos coletados, buscando, através da interpretação destes textos, indícios e conclusões para nossa pesquisa.

5 Apresentação e análise dos dados coletados

5.1 Análise quantitativa

Nesta seção, apresentaremos os dados coletados analisados pelo Teste t-pareado e faremos a comparação quantitativa das abordagens dos Conjuntos Numéricos no Ensino Médio, cujos métodos foram detalhados no capítulo anterior.

Cada subseção apresenta uma questão que compôs a avaliação diagnóstica e a avaliação final, e está organizada do seguinte modo:

- apresentação da questão;
- descrição das competências e habilidades analisadas;
- comentários gerais sobre a questão;
- tabela resumida dos dados fornecidos pelo Minitab;
- conclusão da análise dos dados.

Os grupos considerados nos testes são:

Tabela 1 – Descrição do tamanho das amostras

Grupo	**Tamanho da amostra**	**Graus de liberdade**
Controle	20	19
Experimental A	40	39
Experimental B	25	24
Experimental (A e B juntos)	65	64

Fonte: Elaborada pela autora com base nos dados fornecidos pelo software Minitab.

De acordo com o suporte do software Minitab, os graus de liberdade são a quantidade de informação que seus dados fornecem que você pode “gastar” para estimar os valores de parâmetros populacionais desconhecidos, e calcular a variabilidade dessas estimativas. Esse valor é determinado pelo número de observações em sua amostra e o número de parâmetros em seu modelo. O Teste t-pareado utiliza os graus de liberdade e o nível de significância para determinar o valor-t crítico encontrado na Tabela da Distribuição t encontrada em Witte e Witte (2005). Neste caso, os graus de liberdade são o resultado do tamanho da amostra menos um, pois estamos analisando apenas um parâmetro - a média das diferenças e o nível de significância $0,05$.

Relembramos que, como explicitado no capítulo anterior, adotaremos as seguintes hipóteses:

$$H_0 = \mu_d = 0$$

$$H_1 = \mu_d > 0$$

Assim, ao aceitar H_1 significa que houve avanço nas notas dos alunos ao comparar a avaliação diagnóstica com a avaliação final. Rejeitar H_1 significa que não houve este avanço de forma significativa. Nas tabelas apresentadas, a coluna H_1 é destinada à conclusão do teste. Se o teste de hipóteses apontar para a rejeição de H_0 e, portanto, aceitação de H_1, denotaremos $\checkmark$. Caso o teste aponte para a aceitação de H_0 logo, rejeição de H_1, denotaremos por $\times$.

5.1.1 Questão 01

No texto a seguir há uma argumentação e uma conclusão.
Argumentação: Como

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots$$

multiplicando ambos os membros por 3, encontramos

$$1 = 0,999\ldots.$$

Conclusão: $0,999\cdots = 1$.
Assim podemos afirmar que:

( ) a conclusão está incorreta, pois $0,999\cdots < 1$.

( ) a argumentação está incorreta, pois $\frac{1}{3}$ não é igual a $0,333\ldots$

( ) a argumentação está incorreta, pois $3 \cdot 0,333\ldots$ não é igual a $0,999\ldots$

( ) a argumentação e a conclusão estão corretas.

Competências e habilidades analisadas:

- "Conhecer as condições que fazem com que uma razão entre inteiros possa se expressar por meio de dízimas periódicas; saber calcular a geratriz de uma dízima" (SÃO PAULO, 2008, p. 61).

Esta questão foi retirada da prova Matematikos da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Ao propor esta pergunta, gostaríamos de investigar se o estudante compreendia de forma segura a relação entre a fração geratriz e uma dízima periódica, uma vez que nesta consta uma afirmação que impressiona a maioria dos estudantes: $1 = 0,999\ldots$.

Tabela 2 – Dados resumidos Teste t-pareado - Questão 01

Grupo	**valor-p**	**valor-T**	**valor-t crítico**	H_1
Controle	0,270	0,62	1,729	×
Experimental A	0,001	3,56	1,684	✓
Experimental B	0,164	1,00	1,711	×
Experimental (A e B)	0,001	3,40	1,671	✓

Fonte: Elaborada pela autora com base nos dados fornecidos pelo software Minitab.

Conclusão: Segundo os testes estatísticos, houve avanço significativo apenas no Grupo Experimental A e no Grupo Experimental considerado como único, indicando que, possivelmente, a abordagem dos Números Reais via Aritmética de Segmentos é mais efetiva com relação a esta competência. O fato de que o avanço não foi significativo no Grupo Experimental B indica que a análise da relação entre o desenvolvimento desta competência e da abordagem via Aritmética de Segmentos requer estudos mais aprofundados. Mas, podemos concluir que o algoritmo para encontrar as frações geratrizes, muito enfatizado no material utilizado no Grupo Controle, pode não ser suficiente para que os estudantes tenham a compreensão da relação entre as dízimas periódicas e suas frações geratrizes.

5.1.2 Questão 02

Ao realizar determinados cálculos em meu celular, obtive $0,12122122212222$. Desconfiada de um padrão, repeti os mesmos cálculos numa calculadora com visor de 21 dígitos e obtive $0,12122122212222122222$.

1. Este número é Racional ou Irracional? Como você sabe?
2. Se eu lhe disser que a calculadora do meu celular só realiza as 4 operações $(+, -, \times, \div)$, isso modifica sua resposta?

Competências e habilidades analisadas:

- “Conhecer as condições que fazem com que uma razão entre Inteiros possa se expressar por meio de dízimas periódicas; saber calcular a geratriz de uma dízima. Compreender a necessidade das sucessivas ampliações dos conjuntos numéricos, culminando com os números Irracionais” (SÃO PAULO, 2008, p. 61).
- “Idenficar um número Irracional como um número de representação decimal infinita e não periódica” (BRASIL, 1999, p. 87).

Esta questão foi inspirada em um problema presente na pesquisa das autoras Sirotic e Zazkis (2007), na qual foram analisados questionários propostos a quarenta e seis futuros professores de Matemática em fase final do curso. Este estudo apontou que a opção por apresentar os Números Reais através da geometria poderia facilitar o entedimento dos estudantes, pois promove uma maior distinção entre Números Irracionais e suas aproximações Racionais e esclarece o conceito de irracionalidade. A análise dos dados obtidos pelas pesquisadoras mostrou que 40% dos participantes não conseguiram considerar a hipótese de que o número $0,12122122212222\ldots$ pudesse ser Irracional.

Na Avaliação Diagnóstica percebemos que alguns estudantes classificaram o número $0,12122122212222$ como Racional porque notaram a ausência de "…", como normalmente os decimais infinitos são apresentados. Além disso, muitos mostraram-se confusos ao classificar o número, pois confundiram a observação de um período com a constatação de um padrão. Na Avaliação Final percebemos que esta confusão diminuiu consideravelmente, mas ainda encontrava-se presente em algumas respostas.

Tabela 3 – Dados resumidos Teste t-pareado - Questão 02

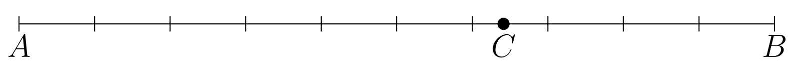
Grupo	**valor-p**	**valor-T**	**valor-t crítico**	H_1
Controle	0,374	0,33	1,729	$\times$
Experimental A	0,000	8,35	1,684	✓
Experimental B	0,002	3,30	1,711	✓
Experimental (A e B)	0,000	8,18	1,671	✓

Fonte: Elaborada pela autora com base nos dados fornecidos pelo software Minitab.

Conclusão: De acordo com a análise estatística apresentada, houve avanço nas notas alcançadas pelos estudantes dos grupos experimentais e não houve diferença significativa entre as notas dos componentes do Grupo Controle. Este resultado evidencia que a abordagem via Aritmética de Segmentos pode ser mais efetiva quanto ao desenvolvimento das competências e habilidades analisadas nesta questão quando comparada à abordagem adotada na maioria das escolas.

5.1.3 Questão 03

Marcamos ao acaso um ponto C no segmento AB. Comece dividindo o segmento AB em 10 partes iguais. Depois divida novamente cada uma das 10 partes em 10 partes iguais e assim por diante. Podemos garantir que em algum momento o ponto C vai coincidir com um dos pontos dessa subdivisão? Senão, podemos garantir que isso nunca ocorrerá? Exemplifique.



Competências e habilidades analisadas:

- "Saber representar os números reais na reta numerada" (SÃO PAULO, 2008, p. 63).
- "Localizar alguns números reais na reta numérica" (BRASIL, 1998, p. 87).

Esta questão foi inspirada em um dos itens do questionário proposto por Soares, Ferreira e Moreira (1999) a oitenta e quatro estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFMG e da UFSC. Quanto a esta questão, dos quarenta e oito alunos, apenas dezoito (menos de 38%) foram seguros nas respostas corretas. Esta questão também figurou no estudo de Fischbein, Jehiam e Cohen (1995).

No presente experimento, observamos na Avaliação Diagnóstica que alguns alunos mostraram-se confusos quanto ao número finito ou infinito de etapas e a maioria não conseguiu relacionar estas divisões ao conceito de Números Reais. Além disso, observamos que o conceito de infinito não é claro aos estudantes, como podemos notar em uma das respostas apresentadas:

> Sim, isso ocorrerá, sempre. Pois se dividíssemos infinitamente os segmentos em 10 partes, haverá um momento em que os espaços entre eles será menor, o que impossibilita de uma dessas subdivisões não coincidirem com o ponto C ou qualquer outro (Resposta apresentada por um dos estudantes do Grupo Experimental na Avaliação Diagnóstica).

Já na Avaliação Final, em ambos os grupos, os estudantes fizeram relações (corretas e incorretas) entre as divisões e os conceitos dos Reais. Isso pode ter ocorrido devido à dinâmica de memorização e repetição posta na realidade escolar, onde as avaliações estão diretamente relacionadas aos conteúdos discutidos em sala.

Tabela 4 – Dados resumidos teste t-pareado - Questão 03

Grupo	**valor-*p***	**valor-T**	**valor-*t* crítico**	H_1
Controle	0,417	0,21	1,729	×
Experimental A	0,000	8,16	1,684	✓
Experimental B	0,001	3,44	1,711	✓
Experimental (A e B)	0,000	8,24	1,671	✓

Fonte: Elaborada pela autora com base nos dados fornecidos pelo software Minitab.

Conclusão: Os testes estatísticos indicam que a abordagem dos Números Reais via Aritmética de Segmentos pode ser mais efetiva quanto ao desenvolvimento das competências analisadas nesta questão, uma vez que apenas nos grupos experimentais a diferença entre as respostas corretas observadas na Avaliação Final e as respostas corretas apresentadas na Avaliação Diagnóstica foi significativa.

5.1.4 Questão 04

1. Dispondo apenas de régua, compasso, transferidor, barbante e lápis, descreva como você construiria segmentos com as seguintes medidas:

a) $\sqrt{2}$	c) $\sqrt{3}$	e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	g) π
b) $\sqrt{2}-1$	d) $\sqrt{6}$	f) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	h) $\pi\sqrt{2}$

Competências e habilidades analisadas:

- "Constatar que existem situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais" (BRASIL, 1999, p. 87).
- "Localizar alguns números irracionais na reta numérica, com régua e compasso" (BRASIL, 1999, p. 87).
- "Saber representar os números reais na reta numerada" (SÃO PAULO, 2008, p. 63).
- "Saber realizar de modo significativo as operações de radiciação e de potenciação com números reais" (SÃO PAULO, 2008, p. 63).

Elaboramos esta questão para investigarmos qual o entendimento e/ou significado que os estudantes atribuem a estes Números Irracionais. Normalmente, apenas a construção de $\sqrt{2}$ é apresentada aos estudantes para afirmar a existência de números não Racionais. Contudo, não é comum o questionamento de que seria apenas este o único Número Irracional? Existem outros? De onde e porque eles existem? Gostaríamos de pesquisar se estas perguntas influenciam o entendimento acerca deste tema.

Para a construção dos Números Irracionais, quatro dos oitenta e cinco estudantes submetidos à Avaliação Diagnóstica construiram $\sqrt{2}$ de maneira correta, apenas um conseguiu construir de forma adequada $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ e $\sqrt{6}$ e 65% dos estudantes observados utilizaram as aproximações racionais. Por exemplo, o π foi construído por meio de um segmento de medida $3,1cm$. A confusão entre aproximação e igualdade é observada inclusive em muitos livros didáticos, onde figuram igualdades como $\pi = 3,14$.

Este fato pode sugerir que a habilidade de "incorporar a ideia básica de que os números irracionais somente podem ser utilizados em contextos práticos por meio de suas aproximações racionais, sabendo calcular a aproximação racional de um número irracional" (SÃO PAULO, 2008, p. 63) pode ter sido trabalhada de maneira incorreta no Ensino Fundamental, uma vez que os estudantes confundem os números irracionais com suas aproximações racionais, ou seja, o conceito de aproximação não é claro.

Observamos, também, que a localização de alguns Números Irracionais na reta numérica prevista nos PCNs (BRASIL, 1998) não tem sido desenvolvida no Ensino Fundamental, pois a grande maioria dos estudantes não sabia utilizar o compasso e/ou o transferidor.

Tabela 5 – Dados resumidos Teste t-pareado - Questão 04

Grupo	**valor-p**	**valor-T**	**valor-t crítico**	H_1
Controle	0,151	1,06	1,729	$\times$
Experimental A	0,000	10,05	1,684	✓
Experimental B	0,000	8,20	1,711	✓
Experimental (A e B)	0,000	13,05	1,671	✓

Fonte: Elaborada pela autora com base nos dados fornecidos pelo software Minitab.

Conclusão: Podemos concluir, por meio dos resultados dos testes estatísticos realizados, que os Grupos Experimentais, analisados separadamente e individualmente, apresentaram avanço significativo quando comparadas as notas da Avalição Diagnóstica com as notas da Avalição Final, diferentemente do que ocorre no Grupo Controle, em que o Teste t-pareado apontou que o avanço das notas pode não ter sido significativo.

Mesmo na Avaliação Final, os estudantes que compunham o Grupo Controle não conseguiram construir Irracionais diferentes de $\sqrt{2}$, cuja construção foi mencionada nas aulas propostas pelo material. Este fato indica que construir exclusivamente $\sqrt{2}$ pode não ser suficiente para que o estudante deduza, por conta própria, que outras raízes quadradas podem ser construídas e além destas existem outros Irracionais, cujas construções são possíveis e outros cuja construção não é possível.

5.1.5 Questão 05

Existe algum Número Irracional entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$? Se sim, exemplifique.

Competências e habilidades analisadas:

- "Compreender a necessidade das sucessivas ampliações, culminando com os Números Irracionais" (SÃO PAULO, 2008, p. 63).
- "Saber calcular a aproximação Racional de um número Irracional" (SÃO PAULO, 2008, p. 63).
- Compreender a densidade dos Racionais e dos Irracionais.

Esta questão foi inspirada no questionário que compõe o estudo de Soares, Ferreira e Moreira (1999). A pergunta original propunha que os participantes encontrassem um Número Racional e outro Irracional entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Observamos que neste intervalo encontra-se o número $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e gostaríamos de excluir respostas prontas obtidas pela apresentação dos irracionais no Ensino Fundamental como esta, então fizemos a alteração do intervalo e questionamos apenas a existência e exibição de um Número Irracional no intervalo dado.

Soares, Ferreira e Moreira (1999) observou que apenas 42% dos estudantes de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) afirmaram que existem infinitos Racionais e infinitos Irracionais, computando respostas sem justificativa. Os autores destacaram que muitas das respostas incorretas associavam dízimas periódicas com irracionalidade. Esta associação também foi observada em mais de 50% das Avaliações Diagnósticas analisadas.

Tabela 6 – Dados resumidos Teste t-pareado - Questão 05

Grupo	**valor-p**	**valor-T**	**valor-t crítico**	H_1
Controle	0,053	1,70	1,729	×
Experimental A	0,000	6,45	1,684	✓
Experimental B	0,000	6,18	1,711	✓
Experimental (A e B)	0,000	8,85	1,671	✓

Fonte: Elaborada pela autora com base nos dados fornecidos pelo software Minitab.

Conclusão: A análise estatística mostrou que nos Grupos Experimentais houve avanço significativo das notas desta questão nas avaliações, o que não ocorreu no Grupo Controle. Este resultado mostra que o uso da Geometria pode contribuir para o melhor entendimento da densidade dos Racionais e Irracionais na reta real.

5.1.6 Questão 06

Recorde que π é a razão entre o comprimento C de uma circunferência e o seu diâmetro D:

$$\pi = \frac{C}{D}.$$

1. Entre todas as circunferências com diâmetro D natural, podemos garantir que existe pelo menos uma cujo comprimento C seja também um Número Natural? Se sim, exemplifique.

2. Se C é um Número Racional, é possível construir uma circunferência de comprimento C cujo diâmetro D também seja Racional?

Competências e habilidades analisadas:

- "Conhecer o significado do número π como uma razão constante da Geometria, sabendo utilizá-lo para realizar cálculos simples envolvendo o comprimento da circunferência ou de suas partes" (SÃO PAULO, 2008, p. 60).

Ao propor esta questão gostaríamos de avaliar se os estudantes apresentavam compreensão mais aprofundada da irracionalidade. Desconfiávamos que se perguntássemos o que era um Número Irracional muitos responderiam de forma irrefletida que um Número Irracional é aquele que não pode ser escrito como fração. Por isso, alteramos o formato da pergunta muito semelhante ao que fizeram os autores Soares, Ferreira e Moreira (1999), de modo a trazer diversas contradições às definições muitas vezes impostas aos estudantes de forma irreflectiva e avaliar como estes se portavam frente a estas contradições.

> (Nesta questão) aparece então uma contradição: por um lado razão entre 2 números (o comprimento e o diâmetro da circunferência) e, portanto, deve ser racional. Mas, por outro lado, é sobejadamente conhecido o fato de ser irracional. O aluno também tende a associar ao número irracional a ideia de imprecisão, inexatidão. A falta de significado para a representação decimal infinita e não periódica é uma das responsáveis por isso ("não se sabe o que vem depois da vírgula"). Sendo o perímetro da circunferência e seu diâmetro entes geométricos cujos comprimentos são finitos, suas medidas são pensadas como números racionais, o que também leva à contradição mencionada (SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1999, p. 104).

Na Avaliação Diagnóstica, a grande maioria dos estudantes deixaram esta questão em branco. Alguns colocaram anotações como "*aprendi mas não me lembro*" ou "*está acima da minha capacidade*". Dez estudantes responderam de forma incorreta porque consideraram $\pi = 3,14$.

Tabela 7 – Dados resumidos Teste t-pareado - Questão 06

Grupo	**valor-p**	**valor-T**	**valor-t crítico**	H_1
Controle	0,025	2,09	1,729	✓
Experimental A	0,000	5,30	1,684	✓
Experimental B	0,005	2,84	1,711	✓
Experimental (A e B)	0,000	5,90	1,671	✓

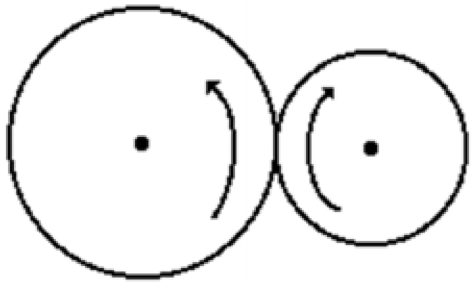
Fonte: Elaborada pela autora com base nos dados fornecidos pelo software Minitab.

Conclusão: De acordo com a análise estatística realizada, ambos os grupos, experimental e controle, apresentaram avanço significativo nesta questão. Ou seja, os testes indicam que as duas abordagens podem contribuir para o desenvolvimento das competências relacionadas a esta pergunta.

5.1.7 Questão 07

(Unicamp-SP) Considere duas circunferências, uma delas tendo o raio com medida Racional e outra com medida Irracional. Suponha que essas circunferências têm centros fixos e estão se tocando de modo que a rotação de uma delas produz uma rotação na outra, sem deslizamento. Mostre que os dois pontos (um de cada circunferência) que coincidem no início da rotação nunca mais voltarão a se encontrar.

Figura 59 – Questão 07



Fonte: Vestibular da Unicamp de 1992

Competências e habilidades analisadas:

- "Conhecer o significado do número π como uma razão constante da Geometria, sabendo utilizá-lo para realizar cálculos simples envolvendo o comprimento da circunferência ou de suas partes" (SÃO PAULO, 2008, p. 60).
- "Compreender a ideia de número racional em sua relação com as frações e as razões" (SÃO PAULO, 2008, p. 61).
- "Compreender a necessidade das sucessivas ampliações dos conjuntos numéricos, culminando com os números irracionais" (SÃO PAULO, 2008, p. 63).

Esta questão foi retirada do vestibular de 1992 da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Pretendíamos investigar a compreensão dos estudantes quanto à relação entre Números Racionais e Irracionais por meio de uma aplicação. Na avaliação diagnóstica, 90% dos estudantes não responderam a esta questão e os outros 10% responderam de maneira incorreta, apresentando justificativas contraditórias.

Tabela 8 – Dados resumidos Teste t-pareado - Questão 07

Grupo	**valor-p**	**valor-T**	**valor-t crítico**	H_1
Controle	[1]		1,729	
Experimental A	0,000	6,49	1,684	✓
Experimental B	0,011	2,44	1,711	✓
Experimental (A e B)	0,000	4,10	1,671	✓

Fonte: Elaborada pela autora com base nos dados fornecidos pelo software Minitab.

[1] Como neste grupo todos os alunos deixaram a questão em branco ou a responderam incorretamente tanto na avaliação diagnóstica quanto na avaliação final, não tivemos dados suficientes para que o teste fosse realizado.

Conclusão: Tanto na Avaliação Diagnóstica quanto na Avaliação Final, todos os estudantes do Grupo Controle deixaram a questão em branco (em sua maioria) ou responderam-na de forma incorreta, por isso não obtiveram pontuação nesta questão. Porém, assim como na Avaliação Final, todos os estudantes do Grupo Controle não responderam de forma satisfatória ou não responderam a esta questão, evidenciando que a abordagem adotada neste grupo não contribuiu para o avanço das competências envolvidas. Observamos que na Avaliação Final, de modo geral, os estudantes relacionaram o fato de que os pontos nunca mais voltarão a se encontrar com os raios Racionais e Irracionais, mas não conseguiram explicar esta relação. Nos grupos experimentais, a análise estatística mostrou um avanço significativo nas notas. Ou seja, a abordagem dos Números Reais via Aritmética de Segmentos contribuiu para que os estudantes desenvolvessem as habilidades relacionadas a esta questão.

5.1.8 Questão 08

Dispondo unicamente de régua, compasso, barbante e lápis, construa, se possível:

1. uma figura com área $\pi + 1$.
2. um círculo com área 1.

Competências e habilidades analisadas:

- “Conhecer o significado do número π como uma razão constante da Geometria, sabendo utilizá-lo para realizar cálculos simples envolvendo o comprimento da circunferência ou de suas partes” (SÃO PAULO, 2008, p. 60).
- “Compreender a ideia de número racional em sua relação com as frações e as razões” (SÃO PAULO, 2008, p. 61).
- “Compreender a necessidade das sucessivas ampliações dos conjuntos numéricos, culminando com os números irracionais” (SÃO PAULO, 2008, p. 63).

Tabela 9 – Dados resumidos Teste t-pareado - Questão 08

Grupo	**valor-p**	**valor-T**	**valor-t crítico**	H_1
Controle	[2]		1,729	
Experimental A	0,000	8,11	1,684	✓
Experimental B	0,000	3,95	1,711	✓
Experimental (A e B)	0,000	6,34	1,671	✓

Fonte: Elaborada pela autora com base nos dados fornecidos pelo software Minitab.

[2] Como neste grupo todos os alunos deixaram a questão em branco ou a responderam incorretamente tanto na avaliação diagnóstica quanto na avaliação final, não tivemos dados suficientes para que o teste fosse realizado.

Conclusão: Assim como aconteceu na questão anterior, os estudantes que compunham o Grupo Controle não produziram dados suficientes para que o Teste de Hipóteses fosse realizado, pois tanto na Avaliação Diagnóstica quanta na Avaliação Final os índices de respostas em branco ou completamente incorretas foram elevados. Contudo, mesmo sem a conclusão via Teste t-pareado, este fato evidencia que a maioria dos estudantes concluiu o Ensino Fundamental sem desenvolver as competências listadas que envolvem esta questão e que a abordagem adotada neste grupo não colaborou para que este desenvolvimento fosse significativo. Nos Grupos Experimentais, tanto quando foram analisados em separado quanto analisados em conjunto, o Teste de Hipóteses evidencia que houve diferença significativa da pontuação dos estudantes quando comparamos a Avaliação Diagnóstica e a Avaliação Final. Isto nos dá indícios de que a proposta de abordagem dos Números Reais desenvolvida nesta pesquisa é mais efetiva no desenvolvimento destas competências quando comparada à abordagem usualmente adotada no Ensino Médio.

5.1.9 Questão 09

Gostaríamos de construir um segmento AB com certa medida:

(Caso I): $AB = \sqrt{\sqrt{2}}$ (Caso II):$AB = 2^{\sqrt{3}}$

Em cada caso, responda às questões a seguir:

1. Quanto à construção:
   a) é possível e eu saberia construir.
   b) é possível, mas eu não saberia construir.
   c) não é possível fazer esta construção.
2. É possível encontrar um valor aproximado de AB com precisão de duas casas decimais?
   a) Sim. O valor aproximado é: ...... para o (Caso I) e ...... para o (Caso II).
   b) Sim, mas não sei determinar ou não é praticável.
   c) Não.

Competências e habilidades analisadas:

- "Incorporar a ideia básica de que os números irracionais somente podem ser utilizados em contextos práticos por meio de suas aproximações racionais, sabendo calcular a aproximação racional de um número irracional" (SÃO PAULO, 2008, p. 63).

- "Saber realizar de modo significativo as operações de radiciação e de potenciação com números reais" (SÃO PAULO, 2008, p. 63).

Tabela 10 – Dados resumidos Teste t-pareado - Questão 09

Grupo	**valor-p**	**valor-T**	**valor-t crítico**	H_1
Controle	0,948	-1,71	1,729	×
Experimental A	0,000	6,36	1,684	✓
Experimental B	0,000	5,04	1,711	✓
Experimental (A e B)	0,000	8,00	1,671	✓

Fonte: Elaborada pela autora com base nos dados fornecidos pelo software Minitab.

Conclusão: Assim como nas questões anteriores, o Teste t-pareado mostrou que houve diferença significativa entre as pontuações das Avaliações Diagnóstica e Final apenas nos Grupos Experimentais, tanto quando analisados em separado quanto em conjunto. Este fato nos dá indícios de que a compreensão da construção dos números reais e de suas propriedades colabora para o desenvolvimento de competências e habilidades que, não necessariamente, estão relacionadas à construções geométricas ou encontro de pontos na reta real, como poderíamos supor.

5.2 Análise qualitativa

5.2.1 Relato dos participantes da pesquisa

Por meio da leitura dos relatos, notamos que estes podiam ser separados em unidades de conteúdo (frases, expressões ou o próprio texto) e estas unidades, por sua vez, foram classificadas em:

- A abordagem dos Números Reais via Aritmética de Segmentos como inferior à abordagem usual;
- A abordagem dos Números Reais via Aritmética de Segmentos como superior à abordagem usual;
- As duas abordagens não diferem.

Se analisássemos cada relato como uma unidade de conteúdo teríamos que 95% classificam, de forma geral, a abordagem dos Números Reais via Aritmética de Segmentos como superior à abordagem aritmética/algébrica. Em 70% dos relatos a avaliação dos métodos de ensino ocorre escolhendo o método que possibilita o melhor entendimento, sendo a Aritmética de Segmentos a abordagem eleita. Nas transcrições utilizaremos o código E_i para o aluno i do grupo experimental e C_j para o aluno j do grupo controle, seguem algumas delas:

> E_1: Gostei da forma com que os conteúdos foram aplicados, muitas coisas que eu não entendia desde o 6^o ano foram muito bem explicadas [...] com as representaçõs gráficas ficaram muito mais simples e esclarecido.
>
> E_2: Senti uma certa alegria em compreender a matéria muito mais facilmente, comparando com o método do ano passado (que tive muitos problemas de compreensão) eu achei este método novo muito melhor e eficaz.
>
> E_3: Eu gostei muito das aulas. Aprendi em poucas aulas conteúdos que não consegui compreender nos sexto, sétimo e oitavo anos.
>
> E_4: [...] Nunca tinha aprendido sobre isso e consegui aprender bem, foi uma coisa que realmente aprendi. Foi uma forma clara e de fácil entendimento para mim.

Ao propor a construção dos Números Reais por meio da medição exata de segmentos a uma turma de 8° do Ensino Fundamental, Boff (2006) concluiu que a visualização geométrica traz maior compreensão acerca deste tema na Educação Básica. Também no Ensino Superior, Pasquini (2007) constatou, via pesquisa qualitativa, que a interpretação geométrica dos Números Reais proporciona o melhor entendimento acerca do tema.

Percebemos também que o entendimento está muito relacionado à compreensão dos processos que envolvem os algoritmos. Os estudantes não entendem as operações envolvendo Números Reais como conseguir reproduzir o algoritmo, mas sim, como compreender os processos que explicam o porque destas operações serem realizadas desta maneira.

> C_1: "Gostei da forma que a matemática foi ensinada utilizando esses métodos de colocar e representar por retas, pois, além de ser algo novo, mostra a razão por trás de operações básicas que aprendemos nos primeiros anos da escola.

Em 20% dos relatos que avaliaram de forma positiva a nova abordagem, os estudantes afirmam que entenderam os conteúdos e que o método contribuiu para isso, porém apresentam, ainda, algumas dúvidas.

> E_1: [...] Ainda tenho algumas dúvidas, mas bem pequenas.
> E_6: [...] Sinto falta de mais exercícios numéricos durante a aula, pois não se estuda Matemática sem a prática de exercícios na aula.

Estes relatos mostram que seria interessante que as Notas de Aula propostas incorporassem, de alguma forma, mais exercícios númericos. Mas, por outro lado, estas colocações podem evidenciar que a forma como se constituem as aulas de Matemática na Educação Básica contribuem para a formação tecnicista do indivíduo. Quanto ao melhor entendimento proporcionado pela Aritmética de Segmentos, 20% dos relatos foram explícitos de que esta compreensão fora consequência da visualização gráfica que a abordagem promove.

> E_7: Achei que facilitou, a visibilidade ficou muito maior e os conteúdos muito mais claros.
>
> E_8: Foi uma experiência muito boa, foi um jeito mais fácil de enxergar e entender o que acontece em cada operação e também uma nova forma de entender conjuntos e as operações.
>
> C_2: O 'segmento aritmético' por si só é uma forma mais fácil de se entender a matéria e a lógica da mesma. É uma forma mais ilustrativa e exemplificada de se apresentar os valores.

Apesar de a nova proposta obter 95% de aprovação dos participantes da pesquisa, gostaríamos de entender os argumentos colocados na avaliação negativa de modo a aprimorar o nosso método.

> E_9: A minha experiência com conjuntos numéricos e construções geométicas não foi tão boa, achei um pouco chato o conteúdo, apesar da boa explicação. Estou ancioso para mudar de conteúdo, pois não sou muito 'chegado' neste. Preciso me dedicar mais a essa matéria de conjuntos.

Uma possível razão para que a abordagem proposta com base na Aritmética de Segmentos afaste os estudantes é o distanciamento da Geometria que os alunos sofreram durante todo o Ensino Fundamental. Lorenzato (2006) afirma que, por várias razões, a Geometria não tem ocupado o seu devido lugar no ensino da Matemática. Porém, o autor enfatiza que é possível, desejável e necessário que o ensino desta parte importante da matemática seja fortemente entafizado. A visão deste pesquisador é a mesma de um dos participantes desta pesquisa.

> E_{10}: Aprendendo conjuntos numéricos através de aritmética de segmentos foi possível compreender melhor o porquê dos conjuntos e como representá-los geometricamente. [...] A espirial pitagórica é incrível, como é possível construir exatamente $\sqrt{2}$ e não um valor aproximado, como $1,4$? Gostei de (re)aprender conjuntos dessa forma e para ter uma melhor base em geometria no ensino médio, seria interessante aprender os conjuntos dessa maneira já no ensino fundamental.

Percebemos que o participante ainda ressalta em sua análise que a integração das áreas da Matemática por meio da Aritmética de Segmentos contribuiria para o melhor entendimento não só dos Números Reais de que trata, mas também da Geometria como um todo, visão esta defendia também por Lorenzato (2006):

> A proposta de ensinar aritmética, geometria e álgebra integradamente pode ser útil também para atender o currículo em espirial, que recomenda voltar ao mesmo assunto várias vezes, embora com diferentes enfoques. [...] Nesta integração, a presença de figuras exerce importante papel na aprendizagem matemática, porque elas possibilitam aos alunos a visualização do todo, bem como das partes que o compõem e, assim, facilita o desenvolvimento da habilidade mental de operar com as partes sem perder de vista o todo. Este é um movimento de ida e volta, de composição e decomposição (LORENZATO, 2006, p. 70).

5.2.2 Relato de uma estudante do curso de Licenciatura

No decorrer do experimento, uma estudante do curso de Licenciatura em Matemática iniciou as suas observações previstas em seu período de estágio. No mesmo período, a estudante estava cursando a disciplina intitulada "Introdução à Análise Real" (Análise) e ao conhecer a abordagem adotada nos grupos experimentais, ela vislumbrou uma maior compreensão acerca do tema e levou a sua experiência para disciplina de Análise, apresentando e discutindo a proposta com os seus colegas de turma. Abaixo, transcrevo o relato escrito desta estudante, após o término de seu período de estágio e aprovação de seu relatório:

"*Ao realizar a última etapa de estágio acompanhei as aulas dos três primeiros anos do Ensino Médio e passei a conhecer uma maneira diferente de representar os Números Reais, dando significado geométrico às operações com estes números - a Aritmética de Segmentos. Digo diferente, pois, geralmente nos livros didáticos os Números Reais são tratados a partir de definições e exemplos simples. Porém, esta nova abordagem trabalhou a visualização gráfica das definições e operações com os alunos, a partir de construções com régua e compasso.*

Achei bem interessante esse método de representar os números, pois é possível visualizar as operações através das construções, trazendo sentido, dispensando a memorização de fórmulas e regras. Porém, devido ao horário que eu dispunha para acompanhar as aulas no estágio, não pude presenciar todas as aulas de construções geométricas. Com isso, pensei que todos os Números Reais poderiam ser construídos a partir desse modo de construção.

Em uma das aulas da disciplina de Introdução à Análise Real, comentei com a turma que tive acesso a essa abordagem de representar os números e o professor pediu-me para apresentá-la, brevemente, aos colegas, explicando as operações que observei serem construídas nas aulas do estágio. Ele também sugeriu que eu mostrasse algumas das propriedades dessas operações, a saber, comutatividade, associatividade, existência de elemento neutro e de oposto e distributividade da multiplicação em relação à adição. Por conta da dificuldade em fazer as construções na lousa, o professor sugeriu que eu as fizesse no software Geogebra. "

A experiência desta licencianda evidencia o que as pesquisas de Pasquini (2007) defendem: um tratamento diferenciado dos Números Reais nos cursos de licenciatura, uma vez que o tratamento axiomático dos Números Reais nas disciplinas de Análise não proporcionam aos futuros professores um entendimento suficiente para ensinar o tema aos estudantes da Educação Básica.

5.3 Conclusão do experimento

No caso analisado, notamos que a abordagem dos Números Reais via Aritmética de Segmentos promoveu desempenho superior em todas as competências consideradas nas avaliações elaboradas. Isto comprova que, no caso estudado, a visualização geométrica não só influenciou no desenvolvimento das habilidades relativas à Geometria, como era esperado, mas também colaborou para o entendimento das demais competências e habilidades envolvidas no estudo dos Números Reais.

Assim como indicavam os autores Lima et al. (2006) e Boff (2006), a Geometria parece ser um caminho adequado para tratar dos Números Reais na Educação Básica, uma vez que além de possibilitar a visualização de suas propriedades e operações, o tratamento geométrico parece aguçar a intuição dos estudantes quanto a temas como densidade e limites de funções Reais, estudadas apenas no nível superior.

Evidentemente, este experimento concebido como uma pesquisa piloto, não pode afirmar generalizações, mas colabora para o desenvolvimento de pesquisas futuras na área.

6 Considerações Finais

Com o objetivo de elaborar uma proposta de abordagem dos Conjuntos Numéricos para o Ensino Médio, realizamos a releitura da Aritmética de Segmentos (HARTSHORNE, 2000) e, então, tivemos a oportunidade de aliar este estudo às pesquisas envolvendo ensino da Matemática. Assim, pudemos conhecer, mesmo que de forma muito específica, para suprir as necessidades de nossa pesquisa, autores que abordam concepções que estudantes e professores apresentam sobre este tema, metodologias de pesquisa em ensino e diferentes abordagens e tipos de análise de experimentos. Aprendemos, assim, que o caminho de aliar diferentes áreas traz maior profundidade às pesquisas e, com isso, enriquece-as.

O estudo de pesquisas em ensino mostrou que a compreensão dos Números Reais, suas propriedades e operações são problemáticas tanto na Educação Básica quanto na Educação Superior, situação agravada quando não se propõe abordagens voltadas para o estudo dos Reais na formação de professores. A releitura da Aritmética de Segmentos nos mostrou que seria possível visualizar e construir os conjuntos numéricos, suas operações e propriedades na Educação Básica. As metodologias de pesquisa em ensino e as técnicas de análise de dados nos levaram a elaborar um teste piloto desta nova proposta.

A fim de investigar os efeitos e a aceitação da proposta elaborada, além de compará-la à abordagem usualmente adotada acerca do tema, realizamos uma pesquisa quase-experimental com turmas do primeiro ano do Ensino Médio. Este estudo, analisado qualitativamente e quantitativamente, apontou que a abordagem dos Conjuntos Numéricos via Aritmética de Segmentos pode contribuir não só para o desenvolvimento/esclarecimento de habilidades e competências diretamente relacionadas à Geometria, mas também às demais. Concluímos que as discussões proporcionadas por esta nova abordagem podem aguçar a intuição dos estudantes acerca de conceitos mais aprofundados, tais como limites de sequências numéricas. Além disso, neste caso específico, esta abordagem diferente da usual obteve grande aceitação dos estudantes, que sentiram-se satisfeitos com a elucidação de regras, teoremas e conceitos que por muito tempo foram aceitos sem questionamentos.

Dando destaque às colocações “senti uma certa alegria em compreender a matéria” e “aprendi em poucas aulas conteúdos que não consegui compreender”, tais trechos podem indicar que a não compreensão dos conteúdos abordados pela Matemática pode ser um dos fatores que afastam os estudantes desta disciplina e que estes ainda não adquiriram a postura questionadora em sala de aula, não expondo suas dúvidas, sendo auto-reprimidos por este motivo e assumindo completamente a culpa pela sua dificuldade, como podemos observar em um dos relatos: E_5: “As aulas foram dadas de forma que eu pude entender, embora na hora de aplicar nos exercícios não consegui executá-los, mas creio que este seja meu problema".

Fazemos a ressalva de que este experimento não traz generalizações, contudo, pode auxiliar pesquisas futuras acerca deste tema. Além disso, este estudo mostra que sua hipótese de pesquisa é promissora. Assim, caso o objetivo seja ampliar o escopo da pesquisa, pensamos que os passos sejam:

- Consultar um pesquisador da área de Educação Matemática e um pesquisador da área de Estatística para orientações;
- Criar uma amostra significativa dos estudantes do estado de São Paulo, por meio de técnicas de amostragem;
- Avaliar a validade e fidedignidade das Avaliações Diagnósticos e Finais;
- Analisar qualitativamente as respostas produzidas pelos participantes da pesquisa nas Avaliações Diagnósticas e Finais, procurando entender as maneiras como foram produzidas, fazendo uma análise de conteúdo das respostas;
- Colocar em prática esta proposta e avaliar os resultados quali-quantitativamente.

Referências

ABRANTES, P.; PONTE, J. P. da; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. [S.l.]: Matemática para Todos: Associaçao de Professores de Matemática, 1999.

ABRANTES, P. c. *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica., 2001. Disponível em: <https://www.cfaematosinhos.eu/NPPEB_01_CN.pdf>.

AMARO, D. T.; SÁ EARP, H. N. *Geometria e Isometrias: dos Postulados de Hilbert ao plano hiperbólico*. Campinas, 2014. Disponível em: <http://pergamum.biblioteca.ifsp.edu.br/>.

BAILER C.; TOMITCH, L. M. D. R. C. S. Planejamento como processo dinâmico: a importância do estudo piloto para uma pesquisa experimental em linguiística aplicada. *Revista Intercâmbio*, XXIV, p. 129–146, 2011. ISSN 2237-759x.

BARONI, R.; NASCIMENTO, V. Um tratamento, via medição, para os números reais. *VI SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA*, 2005.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C. AND ARAÚJO, JUSSARA DE LOIOLA. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 5. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2013. cap. 4, p. 111–124.

BOFF, D. S. *A construção dos números reais na escola básica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/11188/000608397.pdf?sequence=1>.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. d. C.; ARAÚJO, J. d. L. Pesquisa qualitativa em educação matemática: notas introdutórias. In: BORBA, M. C. AND ARAÚJO, JUSSARA DE LOIOLA. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 5. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2013. p. 23–30.

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: MEC / SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>.

_____. *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio*. Brasília: MEC / SEMTEC, 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>.

CANHOTA, C. Qual a importância do estudo piloto? In: SILVA, E. E. *Investigação passo a passo: perguntas e respostas para investigação clínica*. Lisboa: APMCG, 2008. p. 69–72.

COBIANCHI, A. S. *Estudos de continuidade e números reais: matemática, descobertas e justificativas de professores*. Tese (Doutorado) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, 2001.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C. AND ARAÚJO, JUSSARA DE LOIOLA. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 5. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2013. p. 11–22.

DIAS, M. d. S. *Reta real: conceito imagem e conceito definição*. Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Educação Matemática - PUC), São Paulo, 2006.

EISNER, E. W. On the differences between scientific and artistic approaches to qualitative research. *Educational Researcher*, v. 10, n. 4, p. 5–9, 1981.

FALCÃO, J. T. d. R.; RÉGNIER, J.-C. Sobre os métodos quantitativos na pesquisa em ciências humanas: riscos e benefícios para o pesquisador. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, v. 81, n. 198, p. 229–243, maio 2007. Disponível em: <http://rbep.inep.gov.br/index.php/rbep/article/view/937>.

FIRESTONE, W. A. Meaning in method: The rhetoric of quantitative and qualitative research. *Educational researcher*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 16, n. 7, p. 16–21, 1987.

FISCHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, Springer, v. 29, n. 1, p. 29–44, 1995.

GATTI, B. A. Estudos quantitativos em educação. *Educação e Pesquisa*, v. 30, n. 01, p. 11–30, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n1/a02v30n1>.

______. Pesquisar em educação: considerações sobre alguns pontos-chave. *Revista diálogo educacional*, v. 06, n. 19, p. 25–35, 2006. Disponível em: <http://www.redalyc.org/html/1891/189116275003/>.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4 ed.. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GODOY, J. S. *A geometria presente em alguns livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2016.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GRANDO, R. C.; NACARATO, A.; GONÇALVES, L. Compartilhando saberes em geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos. *Cadernos do CEDES. UNICAMP*, v. 28, p. 39–56, 2008. Disponível em: <http://smec.salvador.ba.gov.br/site/documentos/espaco-virtual/espaco-praxis-pedagogicas/%C3%81REAS%20CURRICULARES/MATEM%C3%81TICA/compartilhando%20saberes%20em%20geometria%20-%20investigando%20r%20aprendendo%20com%20os%20nossos%20alunos.pdf>.

HARTSHORNE, R. *Geometry: Euclid and beyond*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2000.

HILBERT, D. *The Foundations of Geometry*. The open court publishing company. [S.l.], 1950. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/~wodzicki/160/Hilbert.pdf>.

IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. d. Concepções dos alunos sobre os números reais. *A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. 1ed. Belo Horizonte: Editora Fumarc*, v. 1, p. 39–67, 2001.

JUNIOR, A. R.; GLENN, A.; TEIXEIRA, R. *Ensino médio, Primeiro ano: 1 semestre: matemática: livro texto*. São Paulo: SOMOS Sistema de Ensino, 2016. ISBN 9788575950983.

LEVIATAN, T. A tale of two algorithms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Taylor & Francis, v. 37, n. 6, p. 629–642, 2006.

LEVIN J. ; FOX, J. A. *Estatística para Ciências Humanas*. 9. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2004.

LIMA, E. L. *Curso de análise*. [S.l.: s.n.], 1995.

______. *Exame de textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: VITAE / IMPA / SBM, 2001.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 01. ISBN 978-85-85818-10-7.

LOPES, P. C. R. *Construções dos Números Reais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade da Madeira, Funchal, 2006. Disponível em: <http://digituma.uma.pt/handle/10400.13/179>.

LORENZATO, S. *Para aprender matemática*. Campinas: Autores Associados, 2006. ISBN 85-7496-154-X.

MALTA, I.; PALIS, G. L. Linguagem, leitura e matemática. *Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores: reflexões, relatos, propostas, Organizado por Cury, HN, Porto Alegre, EDIPUCRS*, p. 41–62, 2004.

MARMO, C.; GLENN, A.; TEIXEIRA, J.; AGUIAR, R.; ROBERTO, M. *Anglo: ensino médio: caderno de exercícios*. São Paulo: Anglo, 2002.

MINAYO, M. C. d. S. Análise qualitativa: teoria, passos e fidedignidade. *Revista Ciência & Saúde Coletiva*, SciELO Public Health, v. 17, n. 3, p. 621—626, 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-81232012000300007>.

MINITAB INC. *Minitab Statistical Software, Release 18 for Windows*. Pennsylvania. State College. Disponível em: <http://www.minitab.com/pt-br/>.

MORAES, R. Análise de conteúdo. *Revista Educação, Porto Alegre*, v. 22, n. 37, p. 7–32, 1999.

MOREIRA, M. A. Pesquisa em ensino: aspectos metodológicos. *Actas del PIDEC: Programa internacional de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias*, v. 5, p. 101–136, 2003. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/pesquisaemensino.pdf>.

MORETTIN, L. G. *Estatística básica: probabilidade e inferência*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

NASCIMENTO, M. C. O método axiomatico em ciências. Departamento de Matemática - Unesp/Bauru, 2006. Disponível em: <wwwp.fc.unesp.br/~mauri/Geo/axiomatico.pdf>.

OLIVEIRA, J. M. *A Irracionalidade e Transcendência do Número π*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Campus Rio Claro, Rio Claro, 2013. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/pos/profmat/arquivos/dissertacoes/A%20Irracionalidade%20e%20Transcend%C3%AAncia%20do%20N%C3%BAmero%20Pi.pdf>.

PASQUINI, R. C. G. *Um tratamento para os números reais via medição de segmentos: uma proposta, uma investigação*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102125/pasquini_rcg_dr_rcla.pdf?sequence=1>.

ROBINET, J. Les réels: Quels modèles en ont les élèves? *Educational Studies in Mathematics*, Springer, v. 17, n. 4, p. 359–386, 1986.

RORIZ, M. M. *A construção dos números reais*. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado Profissional em Matemática)—Universidade de Brasília, Brasília, 2014. Disponível em: <http://repositorio.unb.br/handle/10482/19157>.

SÃO PAULO. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*. São Paulo: Secretaria Estadual de Educação, 2008. Disponível em: <http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/Portals/18/arquivos/Prop_MAT_COMP_red_md_20_03.pdf>.

SILVA, A. C. M. *Prova matemática, verdade e axiomática: um olhar sobre Frege e Hilbert*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Porto, Porto, 2006. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/64128/2/91714_TESE-211_TM_01_C.pdf>.

SILVA, A. L. V. d. *Números reais no Ensino Médio: Identificando e possibilitando imagens conceituais*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: <http://www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/tesesabertas/0510353_11_pretextual.pdf>.

SILVA, B. A.; PENTEADO, C. B. Fundamentos dos números reais: Concepções de professores e viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio. *Educação Matemática Pesquisa*, Pontificia Universidade Catolica de Sao Paulo PUC-SP, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 11, n. 2, 2009. Disponível em: <https://search.proquest.com/openview/4551b176dd5818c0c124fe6952e0e6c7/1?pq-origsite=gscholar&cbl=2030922>.

SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo. *Boletim de Educação Matemática*, v. 21, n. 31, 2008. Disponível em: <http://www.redalyc.org/html/2912/291221883005/>.

SIROTIC, N.; ZAZKIS, R. Irrational numbers on the number line–where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Taylor & Francis, v. 38, n. 4, p. 477–488, 2007.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. *Zetetiké, Campinas*, v. 7, n. 12, p. 95–117, 1999.

SOUTO, A. M. *Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica*. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado em Ensino de Matemática)–UFRJ, Rio de Janeiro, 2010.

TIROSH, D. The role of students' intuitions of infinity in teaching the cantorian theory. In: *Advanced mathematical thinking*. [S.l.]: Springer, 2002. p. 199–214.

WITTE, R.; WITTE, J. *Estatística*. 7a ed.. ed. [S.l.: s.n.], 2005.

Apêndices

APÊNDICE A – Modelo dos termos de consentimento de participação na pesquisa

Uma vez que os participantes da pesquisa eram alunos do Ensino Médio e, portanto, não tinham atingido a maioridade legal, informamos aos seus responsáveis sobre o experimento dando-lhes total descrição dos métodos utilizados, esclarecendo suas dúvidas. Após esta etapa, recolhemos as assinaturas dos termos de consentimento livre e esclarecido dos responsáveis legais e o termo de assentimento assinado pelo menor, cujos os modelos estão transcritos abaixo e os originais estão arquivados.

TERMO DE ASSENTIMENTO DO MENOR

Você está sendo convidado a participar da pesquisa Aritmética de segmentos: uma abordagem dos Números Reais para o Ensino Médio. Nesta pesquisa pretendemos investigar a eficácia de uma proposta inédita de abordagem dos Números Reais baseada na Geometria voltada para alunos do Ensino Médio elaborada pela pesquisadora. O motivo que nos leva a investigar esse assunto é por notar que pesquisas já realizadas apontam a grande dificuldade que alunos, tanto da educação básica quanto do nível superior, tem com relação ao Conjunto dos Números Reais e suas propriedades. Sendo estes números a base fundamental para todo o desenvolvimento na Matemática, a compreensão dos mesmos é de fundamental importância e suspeitamos que a Geometria possa colaborar em muito no melhor entendimento deste tema. Para esta pesquisa adotaremos os seguintes procedimentos: investigação inicial sobre conhecimento prévio por meio de uma avaliação diagnóstica escrita, desenvolvimento das aulas sobre Números Reais, avaliação final escrita e análise dos resultados. Para participar desta pesquisa, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Apesar disso, caso sejam identificados e comprovados danos provenientes desta pesquisa, você tem assegurado o direito à indenização. Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido(a) pela pesquisadora que irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado(a) em nenhuma publicação. Os riscos envolvidos na pesquisa referem-se a, por ventura de alguma distração ou mau uso do instrumento, machucar-se utilizando o compasso, régua e/ou barbante ou ter dúvidas acerca do tema trabalhado. De maneira a diminuir os danos citados acima, a pesquisadora responsável compromete-se a orientar, previamente, os participantes quanto ao bom uso dos materiais utilizados (compasso, régua, barbante, papel, etc.) e se disponibilizará a esclarecimentos de dúvidas sobre o conteúdo trabalhado em horários extraclasse. A pesquisa contribuirá para a pesquisa na área do ensino de matemática e para desenvolver as competências e habilidades esperadas no estudo do conjunto dos números reais e conteúdos relativos à geometria euclidiana plana, melhorando assim a sua compreensão sobre estes conteúdos matemáticos. Os resultados estarão à sua disposição quando a pesquisa for finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os pesquisadores tratarão sua identidade com padrões profissionais de sigilo, atendendo a legislação brasileira (Resolução N° 466/12 do Conselho Nacional de Saúde), utilizando as informações somente para os fins acadêmicos e científicos.

Assinatura e o e-mail da pesquisadora

Eu, *nome do participante*, portador(a) do documento de identidade *número do documento* , fui informado(a) dos objetivos da presente pesquisa, de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar dessa pesquisa. Recebi o termo de assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Data e assinatura do participante

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

O aluno sob sua responsabilidade está sendo convidado a participar da pesquisa Aritmética de segmentos: uma abordagem dos Números Reais para o Ensino Médio. Ele foi selecionado por ser aluno do Primeiro Ano do Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio e sua participação não é obrigatória. A qualquer momento ele pode desistir de participar e você poderá retirar seu consentimento. A recusa em participar não trará nenhum prejuízo na relação do aluno com os pesquisadores ou com a instituição. O objetivo deste estudo é investigar a eficácia de uma proposta inédita de abordagem dos Números Reais baseada na Geometria voltada para alunos do Ensino Médio elaborada pela pesquisadora. A participação do estudante nesta pesquisa consistirá em envolver-se nas atividades propostas baseadas na abordagem dos números reais desenvolvidas pelos pesquisadores com base no estudo de **??**). Estas ações acontecerão na sala de aula, durante as aulas de matemática. Durante o experimento, o estudante fará avaliações escritas diagnósticas (antes das aulas que tratam do tema), avaliações finais (após estas aulas) e um relato escrito anônimo ao final do experimento relatando a sua percepção. O experimento terá duração de duas semanas (dez aulas). Os riscos relacionados à participação são muito pequenos. Os participantes podem, por ventura de alguma distração ou mau uso do instrumento, machucar-se utilizando o compasso, régua e/ou barbante ou ter dúvidas acerca do tema trabalhado. De maneira a diminuir os danos citados acima, a pesquisadora responsável compromete-se a orientar, previamente, os participantes quanto ao bom uso dos materiais utilizados (compasso, régua, barbante, papel, etc.) e se disponibilizará a esclarecimentos de dúvidas sobre o conteúdo trabalhado em horários extraclasse. Os benefícios relacionados à participação referem-se à contribuição para a pesquisa na área do ensino de matemática e para desenvolver as competências e habilidades esperadas no estudo do conjunto dos números reais e conteúdos relativos à geometria euclidiana plana, melhorando assim a compreensão do participante sobre estes temas. Os dados serão utilizados em uma dissertação de mestrado e num possível artigo. As informações obtidas através desta pesquisa serão confidenciais e asseguramos o sigilo sobre a participação do aluno. Os dados não serão divulgados de forma a possibilitar a identificação do aluno e serão utilizados nomes fictícios se for necessário citá-lo no texto da pesquisa. Você receberá uma via deste termo onde consta o telefone e o e-mail institucional do pesquisador principal, podendo tirar dúvidas sobre o projeto e sua participação, agora ou a qualquer momento.

Assinatura e e-mails da pesquisadora e do orientador da pesquisa

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios da participação do estudante na pesquisa e concordo que ele participe.

Assinatura do responsável

Anexos

ANEXO A – Dados originais gerados pelo Minitab

A.1 Questão 01

- **Teste *t*-pareado - Grupo Controle:**

Figura 60 – Teste t-pareado - Questão 01 - Grupo Controle

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	20	1,400	0,940	0,210
Avaliação Diagnóstica	20	1,200	1,005	0,225

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,200	1,436	0,321	-0,355

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
0,62	0,270

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental A:**

Figura 61 – Teste t-pareado - Questão 01 - Grupo Experimental A

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	40	1,700	0,723	0,114
Avaliação Diagnóstica	40	1,000	1,013	0,160

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,700	1,244	0,197	0,368

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
3,56	0,001

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental B:**

Figura 62 – Teste t-pareado - Questão 01 - Grupo Experimental B

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	25	1,040	1,020	0,204
Avaliação Diagnóstica	25	0,800	1,000	0,200

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,240	1,200	0,240	-0,171

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
1,00	0,164

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental (A e B):**

Figura 63 – Teste t pareado - Questão 01 - Grupo Experimental

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	65	1,446	0,902	0,112
Avaliação Diagnóstica	65	0,923	1,005	0,125

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,523	1,239	0,154	0,267

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
3,40	0,001

Fonte: MINITAB INC®

A.2 Questão 02

- **Teste *t*-pareado - Grupo Controle:**

Figura 64 – Teste *t*-pareado - Questão 02 - Grupo Controle

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	20	0,1250	0,3193	0,0714
Avaliação Diagnóstica	20	0,1000	0,3078	0,0688

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,0250	0,3432	0,0767	-0,1077

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
0,33	0,374

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental A:**

Figura 65 – Teste *t*-pareado - Questão 02 - Grupo Experimental A

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	40	1,150	0,794	0,126
Avaliação Diagnóstica	40	0,050	0,221	0,035

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
1,100	0,834	0,132	0,878

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
8,35	0,000

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental B:**

Figura 66 – Teste t-pareado - Questão 02 - Grupo Experimental B

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	25	0,440	0,666	0,133
Avaliação Diagnóstica	25	0,000	0,000	0,000

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,440	0,666	0,133	0,212

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
3,30	0,002

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental (A e B):**

Figura 67 – Teste t-pareado - Questão 02 - Grupo Experimental

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	65	0,877	0,820	0,102
Avaliação Diagnóstica	65	0,031	0,174	0,022

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,846	0,833	0,103	0,674

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
8,18	0,000

Fonte: MINITAB INC®

A.3 Questão 03

- **Teste *t*-pareado - Grupo Controle:**

Figura 68 – Teste t-pareado - Questão 03 - Grupo Controle

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	20	0,1250	0,3932	0,0879
Avaliação Diagnóstica	20	0,1000	0,3078	0,0688

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,025	0,525	0,117	-0,178

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
0,21	0,417

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste t-pareado - Grupo Experimental A:**

Figura 69 – Teste t-pareado - Questão 03 - Grupo Experimental A

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	40	1,063	0,786	0,124
Avaliação Diagnóstica	40	0,025	0,158	0,025

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
1,038	0,804	0,127	0,823

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
8,16	0,000

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental B:**

Figura 70 – Teste t-pareado - Questão 03 - Grupo Experimental B

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	25	0,520	0,757	0,151
Avaliação Diagnóstica	25	0,000	0,000	0,000

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,520	0,757	0,151	0,261

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H₀: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa H₁: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
3,44	0,001

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental (A e B):**

Figura 71 – Teste t-pareado - Questão 03 - Grupo Experimental

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	65	0,854	0,814	0,101
Avaliação Diagnóstica	65	0,015	0,124	0,015

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,838	0,820	0,102	0,669

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
8,24	0,000

Fonte: MINITAB INC®

A.4 Questão 04

- **Teste *t*-pareado - Grupo Controle:**

Figura 72 – Teste t-pareado - Questão 04 - Grupo Controle

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	20	0,0625	0,2276	0,0509
Avaliação Diagnóstica	20	0,0075	0,0335	0,0075

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,0550	0,2322	0,0519	-0,0348

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H₀: diferença_µ = 0

Hipótese alternativa H₁: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
1,06	0,151

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste t-pareado - Grupo Experimental A:**

Figura 73 – Teste t-pareado - Questão 04 - Grupo Experimental A

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	40	1,269	0,777	0,123
Avaliação Diagnóstica	40	0,056	0,208	0,033

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
1,212	0,763	0,121	1,009

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H₀: diferença_µ = 0

Hipótese alternativa H₁: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
10,05	0,000

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental B:**

Figura 74 – Teste *t*-pareado - Questão 04 - Grupo Experimental B

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	25	1,180	0,724	0,145
Avaliação Diagnóstica	25	0,010	0,050	0,010

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
1,170	0,713	0,143	0,926

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
8,20	0,000

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental (A e B):**

Figura 75 – Teste *t*-pareado - Questão 04 - Grupo Experimental

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	65	1,2346	0,7524	0,0933
Avaliação Diagnóstica	65	0,0385	0,1667	0,0207

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
1,1962	0,7388	0,0916	1,0432

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
13,05	0,000

Fonte: MINITAB INC®

A.5 Questão 05

- **Teste *t*-pareado - Grupo Controle:**

Figura 76 – Teste t-pareado - Questão 05 - Grupo Controle

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	20	0,850	0,587	0,131
Avaliação Diagnóstica	20	0,600	0,620	0,139

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,250	0,659	0,147	-0,005

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
1,70	0,053

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental A:**

Figura 77 – Teste t-pareado - Questão 05 - Grupo Experimental A

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	40	0,850	0,700	0,111
Avaliação Diagnóstica	40	0,150	0,362	0,057

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,700	0,687	0,109	0,517

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
6,45	0,000

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental B:**

Figura 78 – Teste t-pareado - Questão 05 - Grupo Experimental B

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	25	0,980	0,797	0,159
Avaliação Diagnóstica	25	0,010	0,050	0,010

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,970	0,785	0,157	0,701

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
6,18	0,000

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste t-pareado - Grupo Experimental (A e B):**

Figura 79 – Teste t-pareado - Questão 05 - Grupo Experimental

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	65	0,9000	0,7353	0,0912
Avaliação Diagnóstica	65	0,0962	0,2921	0,0362

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,8038	0,7322	0,0908	0,6523

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
8,85	0,000

Fonte: MINITAB INC®

A.6 Questão 06

- **Teste t-pareado - Grupo Controle:**

Figura 80 – Teste t-pareado - Questão 06 - Grupo Controle

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	20	0,500	0,827	0,185
Avaliação Diagnóstica	20	0,212	0,508	0,114

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,287	0,614	0,137	0,050

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
2,09	0,025

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste t-pareado - Grupo Experimental A:**

Figura 81 – Teste t-pareado - Questão 06 - Grupo Experimental A

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	40	0,775	0,869	0,137
Avaliação Diagnóstica	40	0,100	0,379	0,060

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,675	0,805	0,127	0,461

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
5,30	0,000

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental B:**

Figura 82 – Teste *t*-pareado - Questão 06 - Grupo Experimental B

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	25	0,340	0,572	0,114
Avaliação Diagnóstica	25	0,010	0,050	0,010

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,330	0,581	0,116	0,131

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
2,84	0,005

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental (A e B):**

Figura 83 – Teste *t*-pareado - Questão 06 - Grupo Experimental

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	65	0,6077	0,7930	0,0984
Avaliação Diagnóstica	65	0,0654	0,3006	0,0373

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,5423	0,7416	0,0920	0,3888

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
5,90	0,000

Fonte: MINITAB INC®

A.7 Questão 07

- **Teste *t*-pareado - Grupo Controle:**

Figura 84 – Teste *t*-pareado - Questão 07 - Grupo Controle

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	20	0,000000	0,000000	0,000000
Avaliação Diagnóstica	20	0,000000	0,000000	0,000000

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	IC de 95% da diferença_µ
0,000000	0,000000	0,000000	(0,000000; 0,000000)

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa H_1: diferença_µ ≠ 0

Valor-T	Valor-p
*	*

Histograma de Diferenças

* **NOTA** * **Todos os valores na coluna são idênticos.**

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental A:**

Figura 85 – Teste *t*-pareado - Questão 07 - Grupo Experimental A

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	40	0,875	0,853	0,135
Avaliação Diagnóstica	40	0,000	0,000	0,000

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,875	0,853	0,135	0,648

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
6,49	0,000

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental B:**

Figura 86 – Teste *t*-pareado - Questão 07 - Grupo Experimental B

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	25	0,320	0,627	0,125
Avaliação Diagnóstica	25	0,010	0,050	0,010

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,310	0,634	0,127	0,093

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
2,44	0,011

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental (A e B):**

Figura 87 – Teste *t*-pareado - Questão 07 - Grupo Experimental

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	65	0,3231	0,6151	0,0763
Avaliação Diagnóstica	65	0,0077	0,0435	0,0054

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,3154	0,6207	0,0770	0,1869

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
4,10	0,000

Fonte: MINITAB INC®

A.8 Questão 08

- **Teste *t*-pareado - Grupo Controle:**

Figura 88 – Teste t-pareado - Questão 08 - Grupo Controle

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	20	0,0250	0,1118	0,0250
Avaliação Diagnóstica	20	0,0250	0,1118	0,0250

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
*	*

* NOTA * Todos os valores na coluna são idênticos.

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental A:**

Figura 89 – Teste t-pareado - Questão 08 - Grupo Experimental A

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	40	0,7500	0,5883	0,0930
Avaliação Diagnóstica	40	0,0250	0,1104	0,0174

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,7250	0,5656	0,0894	0,5743

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
8,11	0,000

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental B:**

Figura 90 – Teste *t*-pareado - Questão 08 - Grupo Experimental B

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	25	0,600	0,764	0,153
Avaliação Diagnóstica	25	0,010	0,050	0,010

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,590	0,746	0,149	0,335

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
3,95	0,000

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental (A e B):**

Figura 91 – Teste *t*-pareado - Questão 08 - Grupo Experimental

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	65	0,5692	0,7282	0,0903
Avaliação Diagnóstica	65	0,0077	0,0435	0,0054

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,5615	0,7140	0,0886	0,4137

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
6,34	0,000

Fonte: MINITAB INC®

A.9 Questão 09

- **Teste *t*-pareado - Grupo Controle:**

Figura 92 – Teste t-pareado - Questão 09 - Grupo Controle

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	20	0,200	0,441	0,099
Avaliação Diagnóstica	20	0,300	0,470	0,105

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
-0,1000	0,2616	0,0585	-0,2011

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
-1,71	0,948

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental A:**

Figura 93 – Teste t-pareado - Questão 09 - Grupo Experimental A

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	40	0,813	0,814	0,129
Avaliação Diagnóstica	40	0,025	0,110	0,017

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,787	0,784	0,124	0,579

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
6,36	0,000

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental B:**

Figura 94 – Teste t-pareado - Questão 09 - Grupo Experimental B

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	25	0,800	0,764	0,153
Avaliação Diagnóstica	25	0,200	0,382	0,076

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,600	0,595	0,119	0,396

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
5,04	0,000

Fonte: MINITAB INC®

- **Teste *t*-pareado - Grupo Experimental (A e B):**

Figura 95 – Teste t-pareado - Questão 09 - Grupo Experimental

Teste T Pareado e IC: Avaliação Final; Avaliação Diagnóstica

Estatísticas Descritivas

Amostra	N	Média	DesvPad	EP Média
Avaliação Final	65	0,7615	0,7401	0,0918
Avaliação Diagnóstica	65	0,1846	0,3598	0,0446

Estimativa da diferença pareada

Média	DesvPad	EP Média	Limite inferior de 95% para a diferença_µ
0,5769	0,5812	0,0721	0,4566

diferença_µ: média de (Avaliação Final - Avaliação Diagnóstica)

Teste

Hipótese nula	H_0: diferença_µ = 0
Hipótese alternativa	H_1: diferença_µ > 0

Valor-T	Valor-p
8,00	0,000

Fonte: MINITAB INC®

ANEXO B – Aritmética de segmentos para solucionar uma questão de olimpíada

Cerca de um mês após a conclusão do experimento, os estudantes participantes da pesquisa realizaram a prova escrita da Olimpíada Internacional Matemática sem Fronteiras, uma competição criada na França em 1989 e organizada, no Brasil, pela Rede POC. A olimpíada tem fase única e os estudantes competem em equipes, os grupos de melhor desempenho são convidados a representar o país em determinados eventos científicos no exterior.

Dentre todos os grupos do Ensino Médio na escola, uma das questões foi resolvida exclusivamente por uma das equipes, o qual baseou sua resolução na Aritmética de Segmentos. Esta resolução foi construída pelos alunos participantes do Grupo Experimental B, a transcrição do enunciado da questão e a resolução original elaborada pelos estudantes encontram-se abaixo:

Questão 10 - Olimpíada Internacional Matemática sem Fronteiras - Edição 2017:

Viva Tales!

Desenhe um triângulo isósceles ABD de maneira que $AB = AD = 1$.

Marque um ponto C sobre a linha AB. Não coloque C sobre os vértices A ou B.

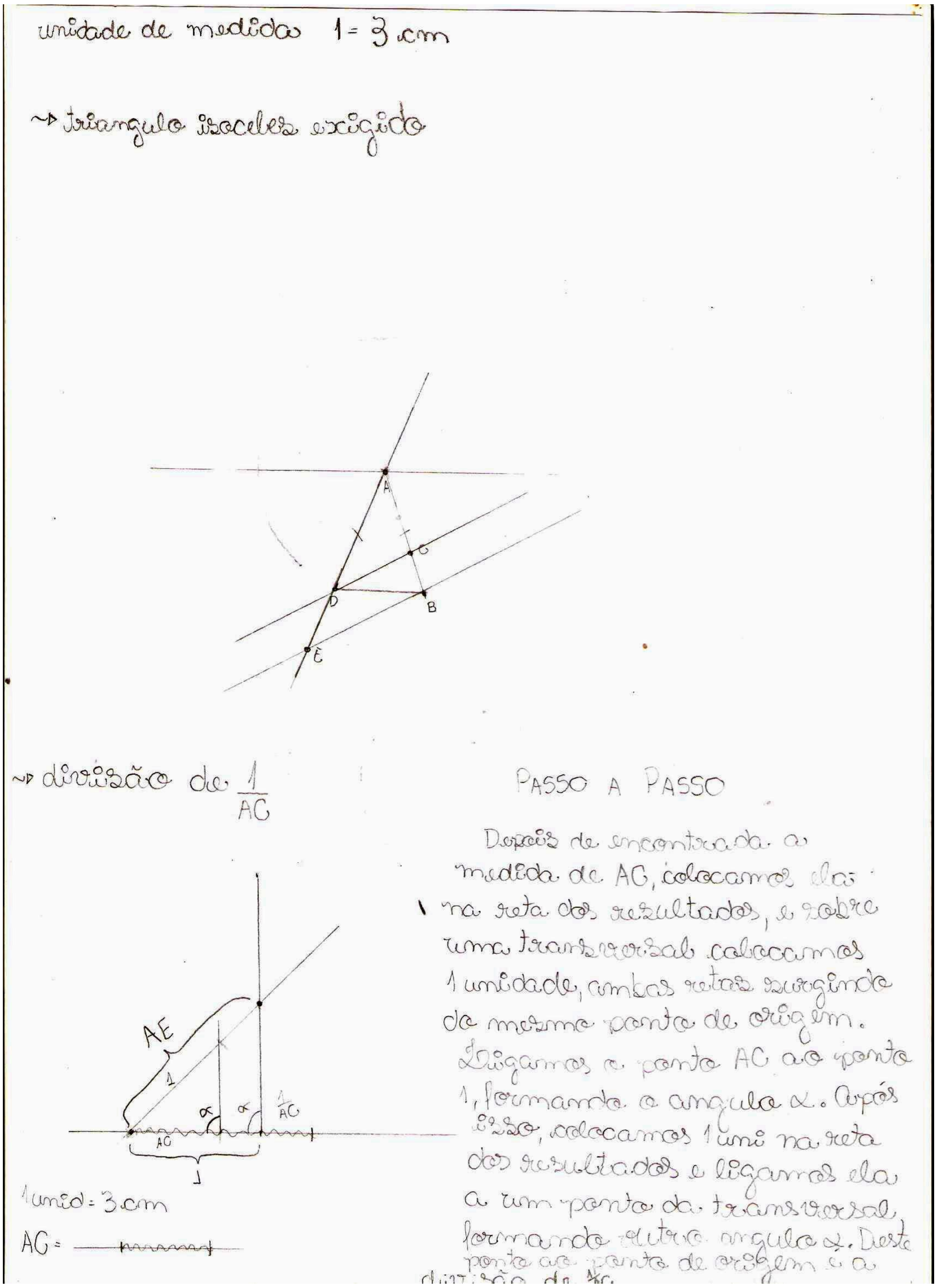
Trace o segmento CD.

Trace uma reta pelo ponto B, paralela a CD, que intersecta a reta AD no ponto E.

Mostre que $AE = \dfrac{1}{AC}$.

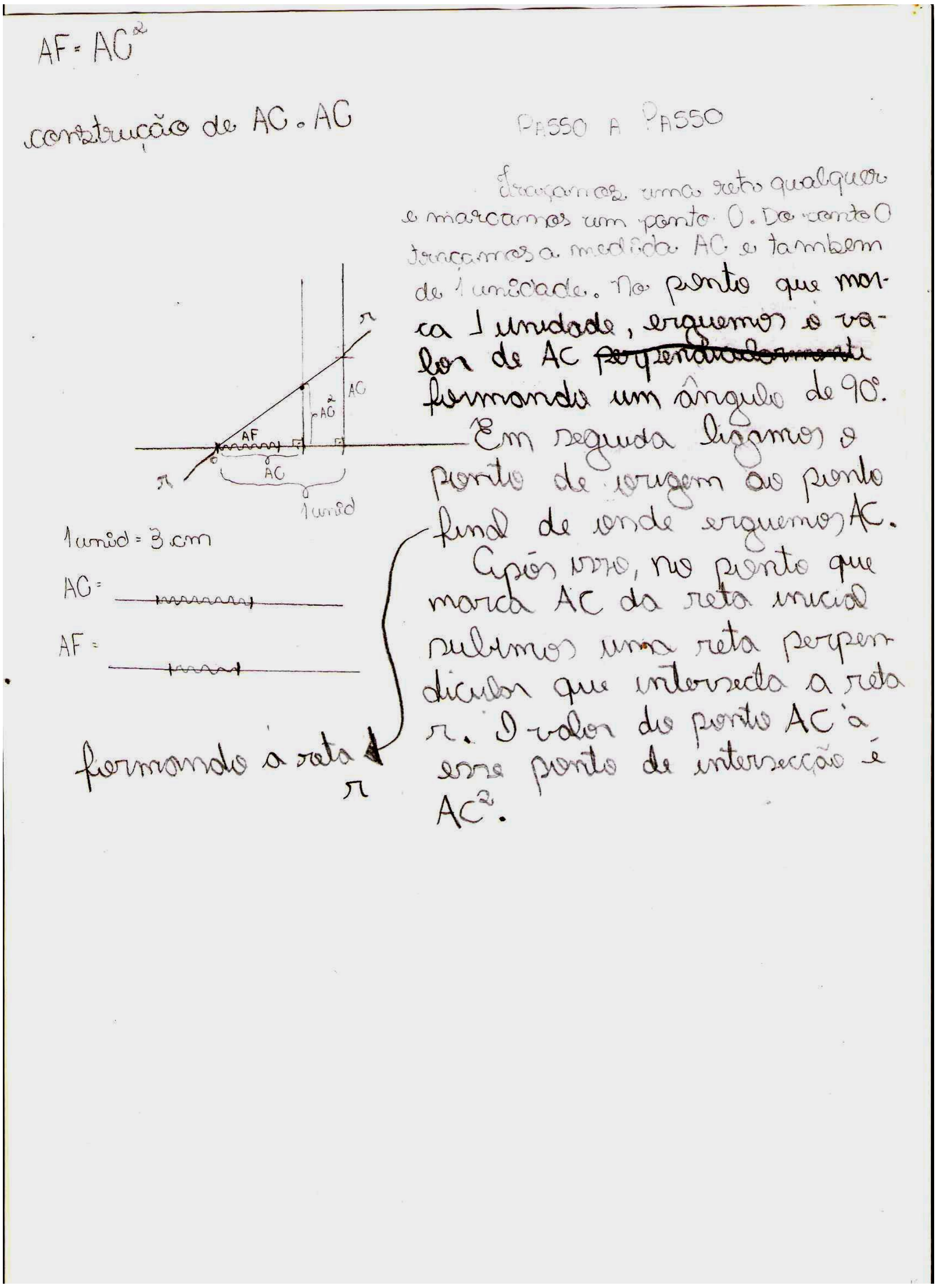
Sobre uma nova figura usando o mesmo triângulo ABD e um ponto C, obtenha uma construção de modo que $AF = AC^2$. Justifique sua resposta.

Figura 96 – Resolução feita pelos estudantes - Parte I



Fonte: Elaborado pelos participantes da pesquisa.

Figura 97 – Resolução feita pelos estudantes - Parte II



Fonte: Elaborado pelos participantes da pesquisa.