UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DA TRIGONOMETRIA APRESENTANDO A FUNÇÃO DE EULER NO ESPAÇO COM O SOFTWARE GEOGEBRA

MAYKEL SAMUEL MARINHO CÂMARA

Mossoró –RN

2018

MAYKEL SAMUEL MARINHO CÂMARA

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DA TRIGONOMETRIA APRESENTANDO A FUNÇÃO DE EULER NO ESPAÇO COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campos Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Mossoró –RN

2018

C172p Câmara, Maykel Samuel Marinho.
UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DA TRIGONOMETRIA APRESENTANDO A FUNÇÃO DE EULER NO ESPAÇO COM O SOFTWARE GEOGEBRA / Maykel Samuel Marinho Câmara. - 2018.
52 f. : il.

Orientador: Elmer Rolando Llanos Villarreal.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Ambiente, Tecnologia e Sociedade, 2018.

1. trigonometria. 2. Euler. 3. geogebra. 4. geometria espacial. I. Villarreal, Elmer Rolando Llanos, orient. II. Título.

MAYKEL SAMUEL MARINHO CÂMARA

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DA TRIGONOMETRIA APRESENTANDO A FUNÇÃO DE EULER NO ESPAÇO COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campos Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 29 de janeiro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Elmer Rolando Llanos Villarreal – UFERSA
Presidente

Dr. Walter Martins Rodrigues– UFERSA
Membro Interno

Dr. Clayton Maciel Costa – IFRN
Membro Externo

Mossoró –RN, 2018

A meus pais, José de Oliveira (in memoriam) e Maria da Natividade, a minha esposa, Annabel Mayara, e aos meus filhos, Victor Aioros e Cairos Levi, com todo amor, pelo esforço, contribuição e motivação que proporcionaram para realização deste sonho.

AGRADECIMENTOS

Deixo expressos meus sinceros agradecimentos às seguintes pessoas, sem as tais o presente trabalho não teria sido possível:

A Deus, acima de tudo, por me conceder o dom da vida e por me permitir viver esse momento;

À minha mãe, Maria da Natividade, pelo apoio e por tudo que me proporcionou, muitas vezes privando-se de suas próprias vontades para que eu alcançasse os meus sonhos, ela simplesmente não mede esforços para me ajudar;

Ao meu pai, José de Oliveira *(in memoriam)*, por ter sido uma pessoa honrada, por ter me dado toda educação e ter me ensinado a ser homem. Tenho certeza que ele estaria muito orgulhoso nesse momento;

À minha esposa, Annabel Mayara, pela compreensão, paciência e apoio em todos os momentos, sempre me estimulando em momentos em que eu pensei em desistir;

Aos meus filhos, Victor Aioros e Cairos Levi, que me motivam e fazem eu sentir que todo esforço vale a pena;

À minha sogra, Sonia Soares, que sempre que possível me apoiou em vários sentidos;

Ao meu orientador, prof. Dr. Elmer Rolando Llanos Villarreal, por acolher a proposta deste trabalho, pela paciência e pelos ensinamentos;

Ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e a Universidade Federal do Semi-Árido (UFERSA), por terem me ofertado essa oportunidade

Aos meus colegas de trabalhos e amigos que sempre me deram apoio moral e incentivo para continuar a jornada;

A todos que de alguma forma contribuíram, torceram e oraram para que eu alcançasse essa vitória.

A esses, meu sincero agradecimento!

"Como é feliz o homem que acha a sabedoria, o homem que obtém entendimento, pois a sabedoria é mais proveitosa do que a prata e rende mais do que o ouro. É mais preciosa do que rubis; nada do que você possa desejar se compara a ela. Na mão direita, a sabedoria garante a você vida longa; na mão esquerda, riquezas e honra. Os caminhos da sabedoria são caminhos agradáveis, e todas as suas veredas são paz. A sabedoria é árvore que dá vida a quem a abraça; quem a ela se apega será abençoado."

(BÍBLIA, Provérbios, 3: 13-18)

RESUMO

O ensino da matemática tem se tornado cada dia mais desafiador. Para o discente, o estudo convencional pode ser muitas vezes desestimulante, principalmente quando se trata de assuntos difíceis de ser transmitido utilizando as imagens estáticas do livro didático ou do quadro. A geometria e a trigonometria são exemplos de conteúdos que exigem muita imaginação da parte do aluno, seus ensinos, na prática, trazem muitos resultados superficiais. Para o professor, tanto é complicado transmitir esse tipo de conteúdo como gerenciar o aprendizado do aluno. Ao explorar a imaginário, não há como certificar-se que o aluno fez mentalmente a projeção correta. Outro grande desafio é poder tornar o processo ensino-aprendizagem mais atrativo. É muito complicado concorrer pela atenção e interesse do aluno, contra todos tipos de entretenimento digital moderno, utilizando apenas os métodos convencionais. Dessa forma, faz-se necessário que o docente também faça uso dos benefícios da tecnologia a fim de proporcionar melhores condições de ensino-aprendizagem. Nesse contexto, esse trabalho traz um estudo matemático da trigonometria. Em que identifica alguns problemas em relação à abordagem convencional do conteúdo, e propõe uma abordagem alternativa partindo da Função Trigonométrica de Euler, apresentando-a como uma função da geometria espacial utilizando a ferramenta de software computacional GeoGebra.

Palavras-chave: Geometria. Trigonometria. Função Trigonométrica de Euler. Geometria Espacial. GeoGebra.

ABSTRACT

The teaching of mathematics has become increasingly challenging. For the Student, conventional study can often be discouraging, especially when it comes to subjects difficult to convey using static pictures from the textbook or picture. Geometry and trigonometry are examples of contents that require a lot of imagination on the part of the student, their teachings, in practice, bring many superficial results. For the teacher, it is both difficult to convey this type of content and to manage student learning. When exploring the imaginary, there is no way to make sure that, the student mentally made the correct projection. Another great challenge is to make teaching learning more attractive. It is very complicated to compete for the attention and interest of the student, against all types of digital entertainment, using only conventional methods. It is necessary that the teacher also make use of the benefits of technology in order to provide better teaching-learning conditions. In this context, this work brings a mathematical study of trigonometry. Where it identifies some problems in relation to the conventional approach of the content, and proposes a split alternative approach to the Euler's Trigonometric Function, presenting it as a function of the spatial geometry using the GeoGebra computational software tool.

Keywords: Geometry. Trigonometry. Euler's Trigonometric Function. Spatial Geometry. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

As constantes transformações sociais contemporânea estão estritamente ligadas às transformações tecnológicas. Essa atual configuração, comumente referenciada pela era digital, é caracterizada pela presença cada vez mais abundante dos recursos tecnológicos e pela diversidade e facilidade na forma de difundir a informação.

Assim como acontece nas demais esferas, tal contexto transforma continuamente o processo de ensino-aprendizagem, pois o uso da informática na educação implica em novas formas de se comunicar, de pensar e de ensinar/aprender. Dessa forma, a informática na escola deve ser vista e utilizada como um recurso para auxiliar o professor na integração dos conteúdos curriculares. Segundo Moran, Masetto e Behrens (2000), a informatização está gerando uma explosão de saberes de forma que precisamos rever o papel do professor nesse novo cenário: é preciso educar para a vida, para a significação, o aluno precisa encontrar sentido no que faz, cabe discutir o papel do computador, para o processo de aprendizagem e a do professor como educador permanente. Para Vieira:

> [...] a implantação da informática como auxiliar do processo de construção do conhecimento implica mudanças na escola que vão além da formação do professor. É necessário que todos os segmentos da escola – alunos, professores, administradores e comunidades de pais – estejam preparados e suportem as mudanças educacionais necessárias para a formação de um novo profissional. Nesse sentido, a informática é um dos elementos que deverão fazer parte da mudança, porém essa mudança é mais profunda do que simplesmente montar laboratórios de computadores na escola e formar professores para utilização dos mesmos (VIEIRA, 2011, p. 4).

Indiscutivelmente, não é opção razoável que a escola se prive dos benefícios que a tecnologia da informação introduziu na sociedade contemporânea. No entanto, tão rápido quanto tem sido a evolução tecnológica, tem sido também sua introdução na escola. Esse processo célere tem muitas vezes gerado dificuldade de aceitação e adaptação por parte dos agentes educadores, pois ainda que por um lado seja perceptível certa mudança na forma de pensar de alguns professores, por outro lado é possível encontrar muitos professores que são resistentes, inseguros e que não apostam nos benefícios que a tecnologia pode proporcionar. Esses deveriam, antes, pesquisar e conhecer o que as novas tecnologias têm a oferecer a fim de tornar suas aulas mais instigantes, criando boas condições de aprendizagem por meio de recursos computacionais.

Objetivando superar uma possível resistência à evolução do ensino da matemática, é primordial considerarmos a necessidade de substituir o modelo tradicional de ensino, baseado em repetições e memorização exaustiva. Gravina e Santarosa (1988) orientam que métodos de ensino que se resumem à transmissão do conhecimento a base de memorização e reprodução, não se evidencia um verdadeiro entendimento. Além disso, insistir em usar os métodos de ensino-aprendizagem tradicionais é naturalmente desinteressante e desestimulante para alunos que dispõem de uma vasta gama de recursos tecnológicos em sua rotina. De acordo com Moran:

> {...} As mudanças na educação dependem também dos alunos. Alunos curiosos e motivados facilitam enormemente o processo, estimulam as melhores qualidades do professor, tornam-se interlocutores lúcidos e parceiros de caminhada do professor-educador. Alunos motivados aprendem e ensinam, avançam mais, ajudam o professor a ajudá-los melhor. Alunos que provêm de famílias abertas, que apoiam as mudanças, que estimulam afetivamente os filhos, que desenvolvem ambientes culturalmente ricos, aprendem mais rapidamente, crescem mais confiantes e se tornam pessoas mais produtivas (MORAN, 2000, p.17-18).

Portanto, o ensino dos conteúdos curriculares matemáticos deve cada vez mais se distanciar do modelo tradicional e buscar formas mas eficiente de levar o aluno a cognição. Em sintonia com Silva (2013), que considera fundamental a busca do professor por abordagens que tenham relação com o cotidiano do aluno por renovar e facilitar o ensino da matemática, destaco para esse fim o próprio uso do computador. Nesse sentido, Smole et al. (2008) ainda indica que o professor tem sido levado a utilizar meios alternativos, outrora considerado apenas lazer, como é o caso dos recursos tecnológico, no intuito de estimular o processo de ensino-aprendizagem.

A capacidade do aluno de desenvolver hipóteses, argumentos e interpretações a respeito do meio em que está inserido pode ser alcançada com mais eficácia mediante ações em sala de aula que possibilitem a participação do aluno como agente ativo no processo de construção do conhecimento. E o computador é um potencializador dessa ação, uma vez que ele amplia a possibilidade do aluno atuar ativamente na construção do conhecimento. Através de softwares de interação é possível não só conhece o conteúdo como adquiri a capacidade de utilizá-lo no cotidiano, tornando a aprendizagem mais significativa como sugere SMOLE et al. (2008).

O computador com seus softwares ganha ainda mais destaque quando se trata de geometria espacial, pois quanto melhor for a visualização dos objetos tridimensionais estudados, melhor e mais simples será sua compreensão. Fanelli (2013) alerta para o problema da perca de informações ao representar figuras espaciais em um plano bidimensional, trazendo prejuízo para o ensino da geometria espacial. Infelizmente, a forma de exibição bidimensional estática comumente utilizada através do quadro e livro tem contribuído para o desinteresse do aluno pela geometria espacial e, muitas vezes, feito com que esse importante conteúdo curricular marque um limite em sua aprendizagem.

Mas para que haja uma mudança de paradigma na educação através do incremento tecnológico é necessário ser crítico e cuidadoso, conforme orientam Gravina e Santarosa (1998), tendo em vista que o simples fato de implementar recurso computacionais não garante uma mudança favorável no ensino. Isso porque apesar dos recursos computacionais trazerem novas possibilidades de abordagem, se o professor não estiver devidamente preparado para utilizá-las o resultado se resumirá a um visual diferenciado da mesma antiga abordagem!

Obviamente, o computador convencional não oferece uma apresentação literalmente tridimensional. As telas de computadores são formadas por *pixels* dispostos em apenas duas dimensão. Entretanto a capacidade de processar as informações e alterar em tempo real a coloração dos pixels é suficiente para gerar imagens em movimento e a consequente sensação de tridimensionalidade. Assim, como afirma lima (2013), a tecnologia pode ajudar os estudantes a desenvolverem uma atividade matemática mais profunda, dando-lhes poder para resolver problemas difíceis. Nesse sentido, os softwares desenvolvidos para auxiliar o processo de ensino-aprendizagem, disponibilizando aos docentes diferentes formas de abordagens dos conteúdos, tem proporcionado o que Valente (1993a) considera uma verdadeira revolução no processo de ensino-aprendizagem.

Com tudo, se devidamente utilizado, o computador se constitui um importante aliado do professor no processo educacional, podendo ser utilizado de forma interativa e prazerosa pelo aluno para a construção do conhecimento, tornando nítido o significado matemático muitas vezes escondidos entre textos e imagens estáticas dos livros didáticos.

Nesse sentido, esse trabalho objetiva oferecer ao professor uma alternativa de estudo/ensino para o conteúdo matemático de trigonometria, destacando os problemas que surgem quando estudado pelos métodos convencionais e ofertando uma proposta de abordagem mais interativa a partir da Função Trigonométrica de Euler em sua representação espacial utilizando a ferramenta de software GeoGebra.

2. A TECNOLOGIA E O ENSINO DA MATEMÁTICA

2.1 – CARACTERISTICAS E CONTEXTUALIZAÇÃO.

O uso da tecnologia, bem como suas diversas configurações e potencialidades, vem exercendo um importante papel no ensino da matemática, podendo ser usada de modo a favorecer o processo de ensino-aprendizagem. Auxiliando na construção do conhecimento, a tecnologia favorece a possibilidade do aluno, refletir, criar, usar a informação em suas práticas e interferir no mundo à sua volta como um ser mais crítico. No entanto, existem constantes debates acerca do uso das tecnologias nas aulas de matemática, visto que surgiram diversos questionamentos se o uso de calculadoras, computadores e demais tecnologias digitais favoreciam ou prejudicavam esse processo.

O uso de ferramentas como a calculadora em sala de aula, por exemplo, tem sido bastante criticado e rejeitado por diversos professores, pois os mesmos afirmam que a calculadora vai interferir negativamente na aprendizagem dos alunos. É perceptível a resistência quanto ao seu uso, já que quase sempre, afirmam que usando a calculadora, os alunos não aprenderão a fazer contas e ficarão dependentes da máquina. Mas, para Walle (2009), as calculadoras podem ser usadas para desenvolver conceitos, exercitar, economizar tempo e, sobretudo fortalecer a resolução de problemas. Dessa forma, é preciso que o professor saiba utilizá-la para investigação e não somente para fazer cálculos. Faz-se necessário considerar os objetivos e os conteúdos que serão trabalhados nas aulas, analisando os procedimentos da máquina que são necessários conhecer para sua manipulação. Assim sendo, a calculadora deve ser explorada de forma reflexiva de modo a melhorar o desempenho dos alunos em matemática.

Conforme afirma Silva (1989), a calculadora abre novas possibilidades para a atividade de resolver problemas, pois o aluno poderá elaborar e explorar novas estratégias, tais possibilidades permitem não só que, os alunos façam a tentativa do erro e aproximações sucessivas, mas que também passem a organizar dados, formular e verificar hipóteses e refazer cálculos com maior rapidez, desenvolvendo o seu raciocínio.

A calculadora faz parte do cotidiano dos alunos e encontra-se presente em relógios, agendas eletrônicas e principalmente celulares. A calculadora possui baixo custo, o que consequentemente, também contribuí para a sua disseminação. Segundo Silva (1991, p31), “(...) além de se tratar de uma máquina de fácil utilização, portátil (...) nos seus modelos mais simples está ao alcance das possibilidades econômicas da maioria dos alunos e de qualquer escola”.

No ensino de Matemática, além da calculadora, o computador também pode ser um importante recurso para o professor e um excelente motivador para os alunos. Tanto o computador como a calculadora estão presentes no dia a dia do aluno e de toda sociedade. Nesse sentido, D’Ambrósio (1990) afirma que as calculadoras e computadores devem estar presentes no cotidiano das escolas, principalmente das mais carentes, pois isso permitirá que os menos favorecidos sócio-economicamente tenham acesso às ferramentas disponíveis no mercado de trabalho que, em um futuro próximo, farão parte de todas as profissões. “Se uma criança de classe pobre não vê na escola um computador, como jamais terá oportunidade de manejá-lo em sua casa, estará condenada a aceitar os piores empregos que se lhe ofereçam. Nem mesmo estará capacitada para trabalhar como um caixa de uma grande magazine ou num banco.” (D’AMBRÓSIO, 1990, p.17).

A constante busca de mecanismos que facilitem a vida do homem tem sido uma necessidade desde o início dos tempos. D’Ambrosio (2001) refere-se à necessidade do homem, há cerca de 2 milhões de anos, de desenvolver instrumentos que o auxiliassem na obtenção de alimentos, como a pedra lascada utilizada no descarno de caças e a lança de madeira. Da pedra lascada aos modernos computares, uma longa história de evolução das tecnologias foi escrita pela humanidade.

O computador traz uma infinidade de possibilidades que contribuem no processo de aprendizagem devido as imensas possibilidades de aplicação na disciplina. (TOLEDO e TOLEDO, 2009). Assim sendo, o computador apresenta facilidades e atrações, que podem ser usadas como aliadas no ambiente escolar, eis que toda e qualquer forma de aprendizagem e instigação que a tecnologia traz consigo, não supera a presença do profissional professor em sala de aula. Por tal motivo se trabalha hoje com o professor mediador de conhecimentos, na qual ele media os conhecimentos e instiga os alunos a sempre buscar mais, gerando assim uma partilha de conhecimentos.

Neste sentido, o uso de softwares parece poder auxiliar a prática docente, e criar um ambiente favorável à construção de conceitos matemáticos que possibilitem a superação das dificuldades e tornem a aprendizagem mais estimuladora. O computador, pelas suas potencialidades a nível de cálculo, visualização, modelação e geração de micromundos, é o instrumento mais poderoso de que atualmente dispõem os educadores matemáticos para proporcionar este tipo de experiências aos seus alunos (PONTES, 1986).

2.2 – A FERRAMENTA DE SOFTWARE GEOGEBRA.

2.2.1 – Apresentação

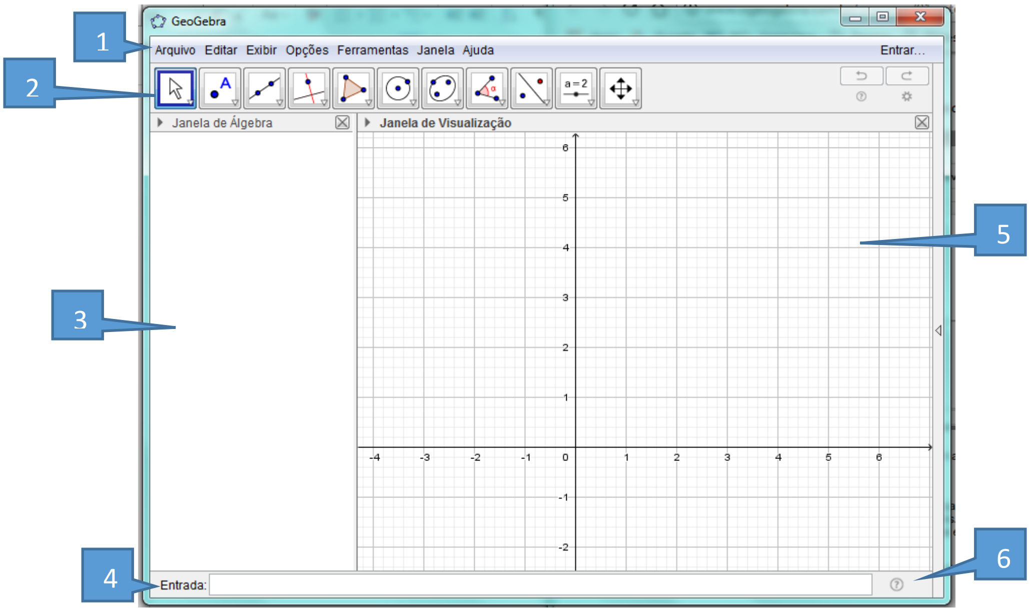
GeoGebra é um software de matemática que pode ser utilizado facilmente como uma ferramenta para despertar o interesse pela busca do conhecimento matemático proporcionando condição favorável e inovadora de ensino. Possibilita trabalhar de forma dinâmica, abordando conteúdos de geometria, álgebra e aritmética, possibilitando a construção de figuras geométricas bidimensionais, tridimensionais, planilhas, representações algébricas, entre outros. O software é indicado para ser utilizado em sala de aula a fim de favorecer a interação entre os conteúdos fundamentais da matemática (BEZERRA e ASSIS, 2011). O GeoGebra teve como idealizador e um dos principais desenvolvedores o prof. Dr. Markus Hohenwarter da Flórida Atlantic University, e foi criado em 2001. Segundo Hohenwarter (2007, p. 1), “A mais notável característica do GeoGebra é a dupla percepção dos objetos: toda expressão na janela algébrica corresponde a um objeto na área de trabalho e vice versa”. O uso do software se deu inicialmente na Europa e nos Estados Unidos, e posteriormente na América Latina.

O GeoGebra é escrito em linguagem Java, compatível com diversas plataformas computacionais. Recebe constantes atualizações, possui versão em português do brasil e está disponível para download na internet gratuitamente através do sítio www.geogebra.org.

2.2.2 – Interface

Ao ser aberto, o GeoGebra apresenta a interface e respectivos elementos conforme FIGURA 2.1.

FIGURA 2.1 INTERFACE INICIAL DO GEOGEBRA.



FONTE: O autor (2018).

1. **Barra de Menus:** Disponibiliza as configurações da aplicações e funções gerais como salvar e abrir.
2. **Barra de Ferramentas:** Disponibiliza diversas ferramentas relacionadas à geometria ou à sua exibição. Com elas é possível construir retas, pontos, figuras geométricas, ângulos, entre outros.
3. **Janela de Álgebra:** Área de exibição de valores numéricos dos objetos criados. Nela pode-se encontrar medidas de ângulos, coordenadas, comprimentos, entre outros.
4. **Campo de Entrada:** Nesse campo é possível escrever linhas de comandos para construir objetos, mudar parâmetros, cálculos, entre outros.
5. **Janela de Visualização:** Área de visualização gráfica. Aqui é possível visualizar os objetos que possuem representação geométrica. Através de ferramentas da *barra de ferramentas* é possível construir e editar objetos diretamente nesse campo utilizando o mouse.

6. **Lista de Comandos:** Uma relação com diversos comando que podem ser usados no *campo de entrada*, podendo ainda ter relação com os as ferramentas da *barra de ferramentas*.

3. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Nesse capítulo será apresentado as funções trigonométricas. Iniciaremos no *tópico 3.1* expondo um pouco dos registros históricos relacionados a trigonometria. Em seguida, no *tópico 3.2*, iremos estudar as funções trigonométricas em si, partido da função de Euler e então chegando às funções seno, cosseno e ao ciclo trigonométrico. Por fim, no *tópico 3.3*, serão apontadas as falhas no ensino dessa ciência que motivaram a edição desse trabalho.

3.1 – UM BREVE HISTÓRICO

Uma série de acontecimentos históricos registraram o desenvolvimento da trigonometria. De modo geral, pode-se dizer que os estudos provocados pela necessidade de soluções à problemáticas da astronomia, navegação e geografia promoveram os grandes avanços dessa importante ciência. No entanto, devido à diversidade de perspectivas que se podem adotar, existem divergências na literatura ao tentar estabelecer sua origem. Nessas condições, nosso objetivo aqui se limitará a expor os principais registros históricos que tiveram relação com o desenvolvimento da trigonometria.

Estima-se que no século IV ou V a.C. já se desenvolvia problemas trigonométricos. Em documentos egípcios como o Papiro de Rhind (FIGURA 3.1), hoje sob custódia do museu de Londres, é possível encontrar problemas envolvendo cotangente (BOYER, 1974). Enquanto a babilônio registrava uma tábua de secantes na tábula Plimpton 322 (EVES, 1997).

FIGURA 3.1: PAPIRO RHIND, MUSEU DE LONDRES.

FONTE: http://ecalculo.if.usp.br/historia/imagens/hist_trigonometria/image1.jpg

Acesso em 24/01/2018

Mas foi na Grécia, impulsionado pela necessidade astronômica de prever as efemérides celestes, onde o estudo da trigonometria mais se destacou. Foi lá onde Aristarco de Samos, por volta de 300 a.C. escreveu o livro *Sobre a Distância do Sol e da Lua* em que ele deduz que a distância da terra para o sol fica entre 18 e 20 vezes a distância da terra para a lua. Para demostrar isso ele utiliza pela primeira vez a aproximação do seno de um ângulo. Por volta do ano de 140 a. C. Hiparco de Nicéia introduziu a ideia de latitude e longitude e da divisão do círculo em 360 graus, além de ter construído a primeira tábua de cordas, a sua contribuição lhe rendeu o título de “pai da trigonometria”. Posteriormente, por volta do ano 100 d.C., Menelau de Alexandria escreveu o livro *Geometria Esférica* no qual apresenta vários teoremas sobre triângulos esféricos, utilizando (sem demostrar) o teorema da geometria plana conhecido hoje como *teorema de Menelao*. O trabalho de Hiparco culminou na obra de Cláudio Ptolomeu de Alexandria que por volta de 150 d.C. se destacou por demostrar a relação fundamental da trigonometria, e pela construção de uma tábua de cordas como precisão de meio grau. Ao todo, sua obra trigonométrica foi considerada a mais significativa da antiguidade.

Todo trabalho trigonométrico utilizava como base a medida da corda de um respectivo arco de circunferência, até que em 476, Aryabhata, matemático hindu, substituiu a tabela de cordas por tabelas de senos. Outra contribuição importante aconteceu por volta de 1200, quando Fibonacci escreveu o livro *Prática da Geometria*, no qual ele propõe a utilização da trigonometria na cartografia e topografia. E no Século XV, os árabes agregaram à trigonometria os conceitos de tangente, a cotangente, a secante e a cossecante.

Finalmente, por volta de 1600, Bartolomeu Pitisco batiza a ciência como a palavra Trigonometria, que significa medida dos ângulos de um triângulo. Desse período até hoje e trigonometria teve participações importante em resoluções de problemas matemáticos e físicos, além de se destacar em várias áreas como topografia, análise, cartografia, mecânica, entre outras.

Nesse meio tempo, é conveniente destacar que no século XVIII viveu o gênio suíço da matemática e física Leonhard Paul Euler (FIGURA 3.2). Seus numerosos livros didáticos foram responsáveis por difundir amplamente o conhecimento matemático. Através das suas obras, a trigonometria toma a sua forma atual, estabelecendo-se a utilização de funções e o raio como unidade de medida.

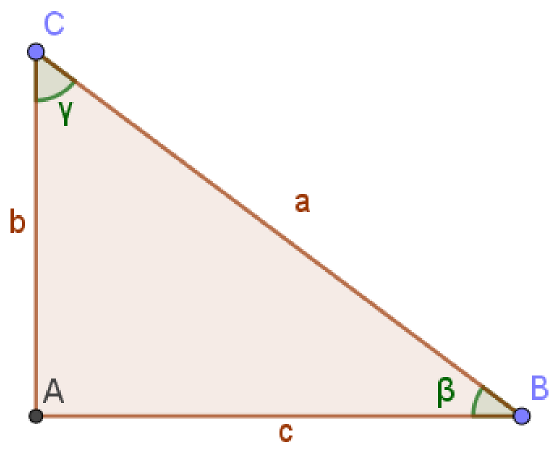
FIGURA 3.2: RETRATO DE LEONHARD EULER DA AUTORIA DO PINTOR SUÍÇO EMANUEL HANDMAN, 1756.

FONTE: O génio de Euler na matemática e na física (2008).

3.2 – A FUNÇÃO DE EULER

Conforme disposto na FIGURA 3.3 considere o triangulo retângulo formado pelos pontos A, B e C, com as arestas a, b e c respectivamente opostas aos pontos A, B e C. Sejam ainda β o ângulo interno ao ponto B e γ o ângulo interno ao ponto C.

FIGURA 3.3: TRIANGULO RETÂNGULO



FONTE: O autor (2018).

Esse triangulo apresenta duas relações que consideraremos conhecidas. A primeira é que os catetos podem ser entendido como uma projeção da hipotenusa a sobre a reta que os contém. Assim o ângulo β, a hipotenusa e os catetos se relacionam de forma que:

$$\cos\beta = \frac{c}{a} = \frac{cateto\ adjatente}{hipotenusa}$$

e

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

De forma análoga:

$$\cos\gamma = \frac{b}{a} = \frac{cateto\ adjatente}{hipotenusa}$$

e

$$\text{sen}\,\gamma = \frac{c}{a} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

Estabelecidas essas relações, convém destacar que o seno/cosseno do ângulo independem do tamanho do triangulo. Seu valor está relacionado unicamente ao ângulo.

A segunda relação a ser considerada é o teorema de Pitágoras, que aplicado ao triângulo da FIGURA 3.3 se descreve da seguinte forma:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Agora temos à disposição o necessário para deduzirmos a relação fundamental da aritmética:

$$\cos\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow cos^2\,\beta = \frac{c^2}{a^2}$$

e

$$\text{sen}\,\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow sen^2\,\beta = \frac{b^2}{a^2}$$

Logo:

$$cos^2\,\beta + sen^2\,\beta = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 + b^2}{a^2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras:

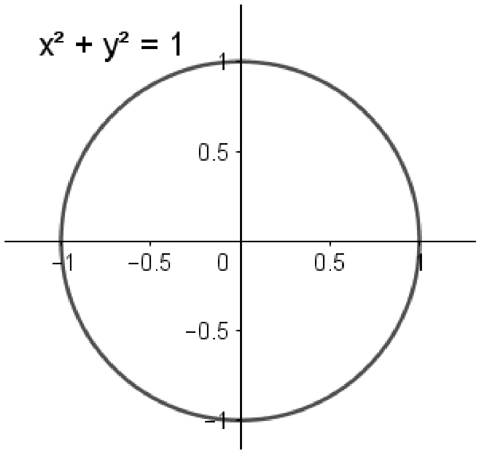
$$cos^2\,\beta + sen^2\,\beta = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2}$$

Finalmente:

$$cos^2 \beta + sen^2 \beta = 1$$

A última igualdade é conhecida como Relação Fundamental da Trigonometria. Ela sugere que os possíveis valores de β definam uma circunferência de raio 1 em R^2 e que tem coordenadas cos β e sen β, chamaremos a figura de círculo unitário e adotaremos sua notação C, em que $C = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2$ (FIGURA 3.4).

FIGURA 3.4: CÍRCULO UNITÁRIO *C*



FONTE: O autor (2018).

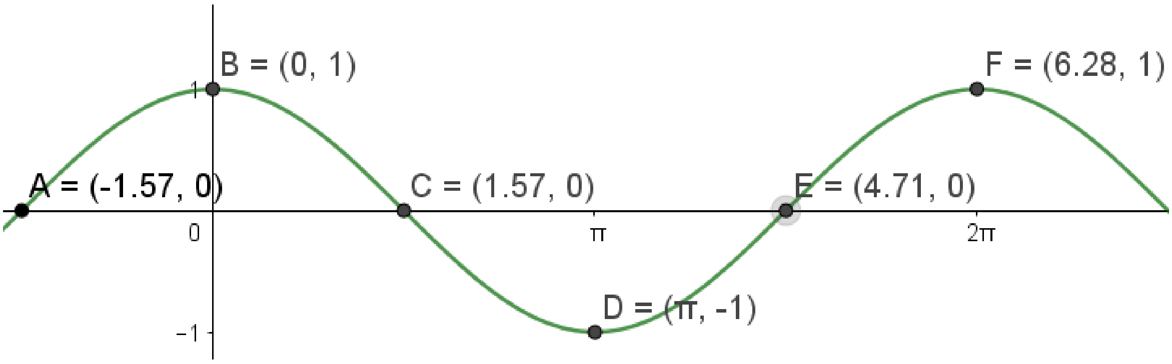
O círculo unitário é a imagem da função sugerida por Euler: a Função de $Euler\ E$: $R \to C$. Essa função associa cada número t (geralmente em grau ou radiano) a um ponto $E(t) = (x, y), de\ modo\ que$:

- $E(0) = (1,0)$
- Quando t > 0, E(t) é o ponto obtido percorrendo-se o perímetro de C a partir do ponto (1,0) no sentido anti-horário a uma distância t.
- Quando t < 0, E(t) é o ponto obtido percorrendo-se o perímetro de C a partir do ponto (1,0) no sentido horário a uma distância t.

Ao percorrer o perímetro de C, por se tratar de um círculo, os valores da imagem passaram a se repetir a partir do momento que t for maior que o próprio perímetro. Com efeito, $E(t + k2\pi) = E(t), com\ k \in Z.$

A função de Euler disponibiliza informações trigonométricas de forma integrada. A partir dela são desmembradas as funções trigonométricas comumente apresentadas nos livros didáticos. A exemplo, quando consideramos o valor de *t* e sua correspondência com o *eixo X* do círculo unitário *C*, encontramos a função Cosseno (FIGURA 3.5).

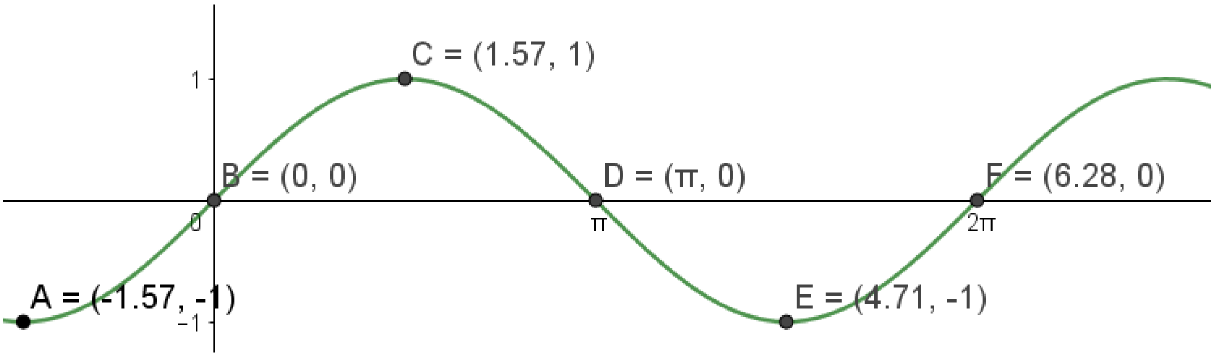
FIGURA 3.5: FUNÇÃO COSSENO



FONTE: O autor (2018).

Por outro lado, se consideramos o valor de *t* e sua correspondência com o *eixo Y* do círculo unitário *C*, encontramos a função Seno (FIGURA 3.5).

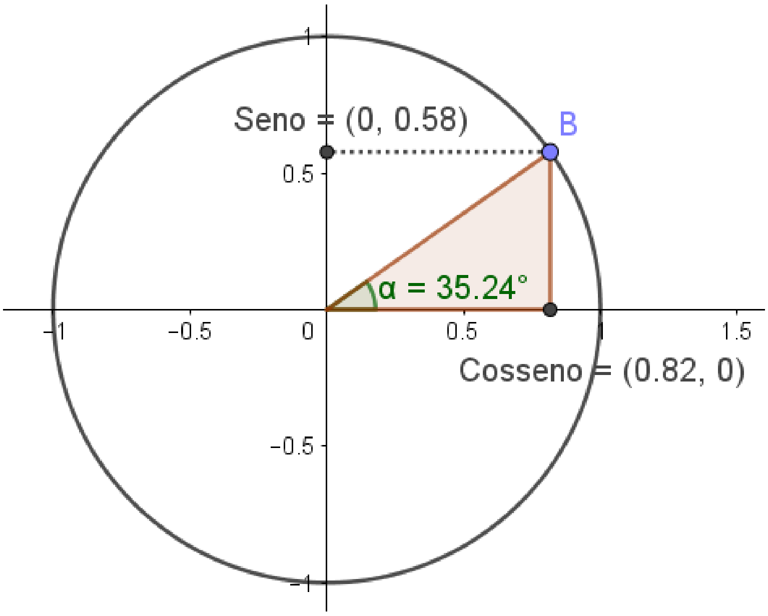
FIGURA 3.6: FUNÇÃO SENO



FONTE: O autor (2018).

É ainda usual no ensino da trigonometria considerar apenas círculo unitário C, as vezes chamado círculo trigonométrico (FIGURA 3.6).

FIGURA 3.7: CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO



FONTE: O autor (2018).

Há na literatura matemática uma tendência de expor a função de Euler a partir do círculo unitário *C*. Segundo descreve Lima (2012, p. 218), “a função de Euler $E : R \rightarrow C$ pode ser **imaginada** como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto $O \in R$ caia sobre o ponto$(1,0) \in C$”.

3.3 – UMA CRÍTICA AO ENSINO DA TRIGONOMETRIA

Predominantemente, existe entre os discentes uma dificuldade para assimilar de forma correta e cognitiva o conteúdo da trigonometria. Nesse sentido, Lima (2012) certifica-se que a trigonometria é um dos tópicos cuja abordagem no Ensino Médio é mais artificialmente ministrada e é caracterizada por quantidade excessiva de fórmulas que chegam a ser redundantes, procedimentos memorizados e interpretação geométrica insuficiente. São vários os motivos que culminam na situação supracitada, dentre os quais destaco:

i. Apresentação da função de Euler foge do padrão: Se considerarmos a literatura contemporânea de ensino da matemática, veremos que a função de Euler é apresentada ao discente em molde único ou despadronizado. Partindo da representação “$E : R \rightarrow$

C", uma vez que constatamos que C está contido em R^2, o entendimento de que estamos tratando de uma função tridimensional torna-se nítido. Em outras palavras, a função de Euler, perdendo sua sobrejetoriedade, poderia ser apresentada na forma $E : R \rightarrow R^2$, sendo C a imagem da função. Com tudo, ainda é mais comum encontrar o círculo trigonométrico, a função seno e a função cosseno sendo apresentadas separadamente.

ii. Dificuldade de representar o tridimensional no livro didático ou quadro: Provavelmente isso justifica o *item i*. Pois, se desconsiderássemos o uso do computador, não haveria uma forma ideal de representar a função de Euler em apenas duas dimensões. Praticamente todas as perspectivas adotadas são ainda mais confusas e difíceis de desenhar do que a representação usual.

iii. Apelo ao imaginário: Em decorrência dos *itens i e ii*, o discente é conduzido a imaginar a relação que existe entre a reta real t e o círculo bidimensional C. Ainda que o uso da imaginação seja por um lado exercitante para o aluno, por outro lado a abstração do conteúdo agregado a necessidade de imaginar pode dificultar muito a relação ensino/aprendizagem. Por fim, o processo acaba se tornando desestimulante, muitas vezes leva o aluno a se limitar a decorar fórmulas ou procedimentos algorítmicos que não se evidenciam verdadeiro aprendizado. Ainda podendo levar o aluno a desistir do conteúdo.

iv. Informações aparentemente desconexas: O conteúdo referente ao estudo da trigonometria são apresentado aos alunos de forma desmembrada. Dessa forma fica difícil para o discente entender que a trigonometria no triangulo retângulo é a mesma do círculo trigonométrico, ou mesmo enxergar o cosseno com um complemento do seno. Para o aluno, é como se para resolver problemas de lados do triângulo ele tivesse que dispor de uma tabela de seno que saiu do "além". Nesse sentido, Lima (2012) afirma que a abordagem atual pode "causar nos alunos a impressão de que, quando falamos de seno e cosseno no triângulo retângulo, ou no círculo trigonométrico, ou nas funções trigonométricas, estamos nos referindo a conceitos matemáticos inteiramente desconectados, que talvez por acaso tenham o mesmo nome".

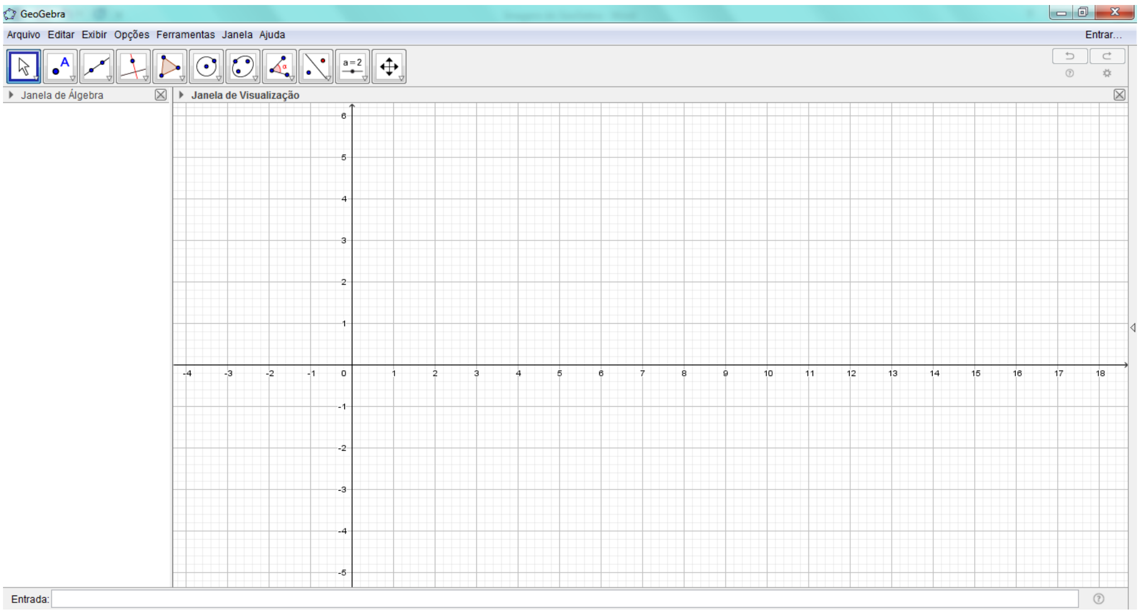
4. UMA ALTERNATIVA DE ABORDAGEM PARA A TRIGONOMETRIA

Esse capítulo apresenta uma proposta alternativa de estudo para a trigonometria. O *tópico 4.1* apresenta o passo a passo para a construção da Função Trigonométrica de Euler utilizando o GeoGebra. E o *tópico 4.2* faz algumas considerações a respeito da construção obtida.

4.1 – CONSTRUINDO A FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA DE EULER

Abra o GeoGebra. Deverá ser iniciado um novo trabalho conforme FIGURA 4.1, caso isso não ocorra, vá à barra de menu, clique em Arquivo (Arquivo) e escolha a opção *Novo*.

FIGURA 4.1: TELA INICIAL.

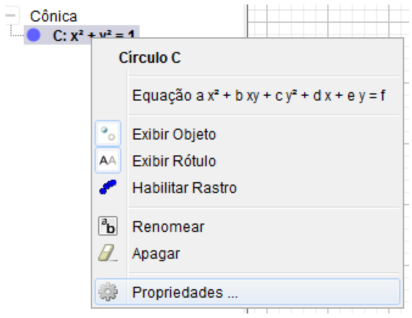


FONTE: O autor (2018).

No campo Entrada: (Entrada) escreva *C: x^2+y^2=1* para criar a cônica *C*.

Clique com o botão direito do mouse sobre a cônica C criada e selecione a opção *Propriedade*. Conforme FIGURA 4.2.

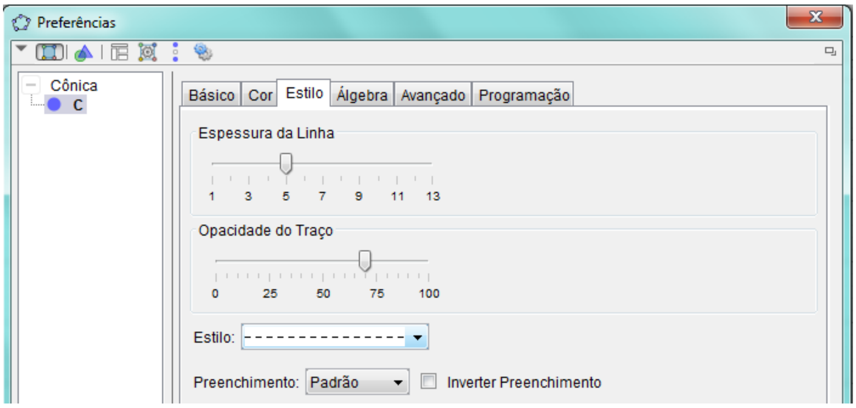
FIGURA 4.2: PROPRIEDADES DA CÔNICA *C*.



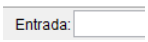
FONTE: O autor (2018).

Clique na aba *Estilo*, selecione a linha tracejada no campo *Estilo* conforme FIGURA 4.3 e em seguida feche a janela *preferências*.

FIGURA 4.3: ABA ESTILO DA CÔNICA *C*.

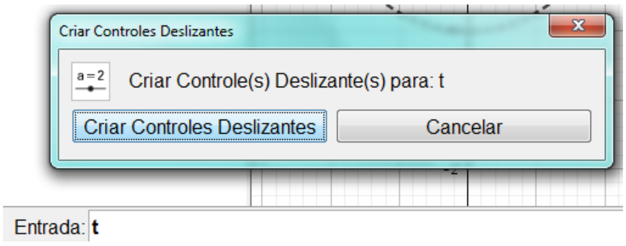


FONTE: O autor (2018).

No campo  (Entrada) escreva *A=(0,0)* e depois *B=(1,0)* para criar os pontos A e B.

Conforme FIGURA 4.4, para criar o número *t* pertencente ao domínio da função de *Euler*, digite *t* no campo entrada e tecle *enter*, logo em seguida aparecerá a janela *Criar Controles Deslizantes*, confirme essa opção. Após o procedimento deverá aparecer uma linha horizontal com um ponto representando o número *t*.

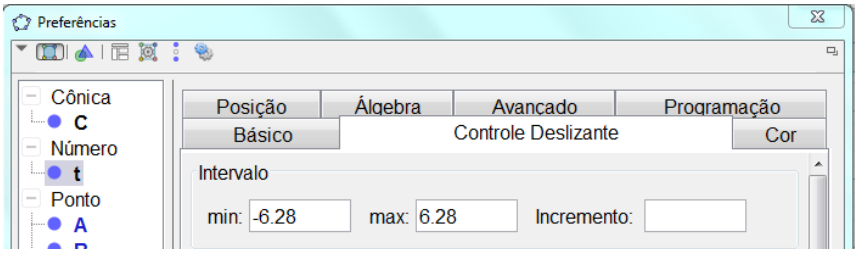
FIGURA 4.4: JANELA DE CONTROLES DESLIZANTES



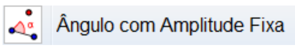
FONTE: O autor (2018).

Clique com o botão direito do mouse sobre o número *t* criado e selecione a opção *Propriedade*. Na aba Controle Deslizante defina os intervalos mínimos e máximos para -6.28 e 6.28, conforme FIGURA 4.5. Esses valores representam a aproximação de -2π e 2π, intervalo que pretendemos usar dentro do domínio da função.

FIGURA 4.5: PREFEREÊNCIAS DO NÚMERO *T.*

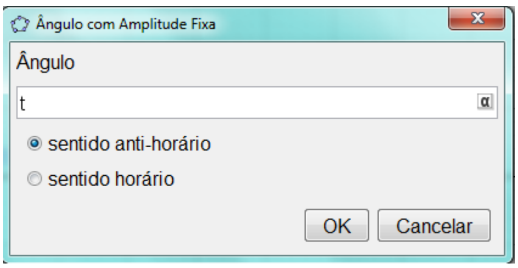


FONTE: O autor (2018).

Selecione a ferramenta 

(Ângulo com Amplitude Fixa), Clique nos pontos *B* e, posteriormente, *A*. Nesse momento aparecerá a janela *Ângulo com Amplitude Fixa*, nela indique como parâmetro o número *t* conforme FIGURA 4.6.

FIGURA 4.6: JANELA ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA.



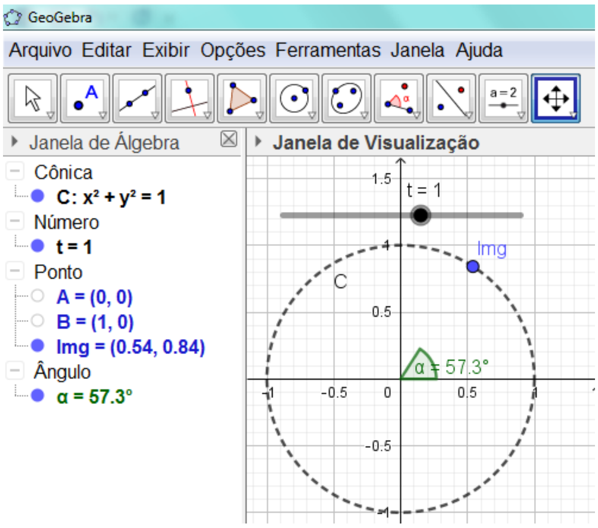
FONTE: O autor (2018).

Nesse momento será criado automaticamente um novo ponto, clique com o botão direito sobre ele e escolha a opção Renomear (Renomear). Em seguida, altere seu nome para *Img*.

Na janela de álgebra, desmarque os pontos *A e B*, clicando sobre seus marcadores. Feito o procedimento os pontos *A e B* deixaram de ser exibidos na janela de visualização.

Utilize a Ferramenta Ampliar (Ampliar) e Mover Janela de Visualização (Mover Janela de Visualização) para ajustar a imagem. Feito o procedimento até aqui, o resultado deverá ser algo semelhante à FIGURA 4.7.

FIGURA 4.7: CONSTRUÇÃO PARCIAL DA FUNÇÃO DE EULER



FONTE: O autor (2018).

Na sequência, iremos definir os valores do seno e cosseno para *t*.

No menu de ferramentas, selecione Reta Perpendicular (Reta Perpendicular). Clique no ponto *Img* e no *Eixo Y* para criar a reta *f*. Em seguida, clique no ponto *Img* e no *Eixo X* para criar a reta *g*.

No menu ferramentas, selecione Ponto (Ponto). Clique exatamente na intercessão da reta *f* com o *Eixo Y* e depois na intercessão da reta *g* com o *Eixo X*. Foram criados os pontos D e E. Para certificar que os pontos foram posicionados corretamente, tente mover os pontos utilizando a opção Mover (Mover) do menu ferramentas. Os ponto não deveram mover, caso isso ocorra, refaça o procedimento.

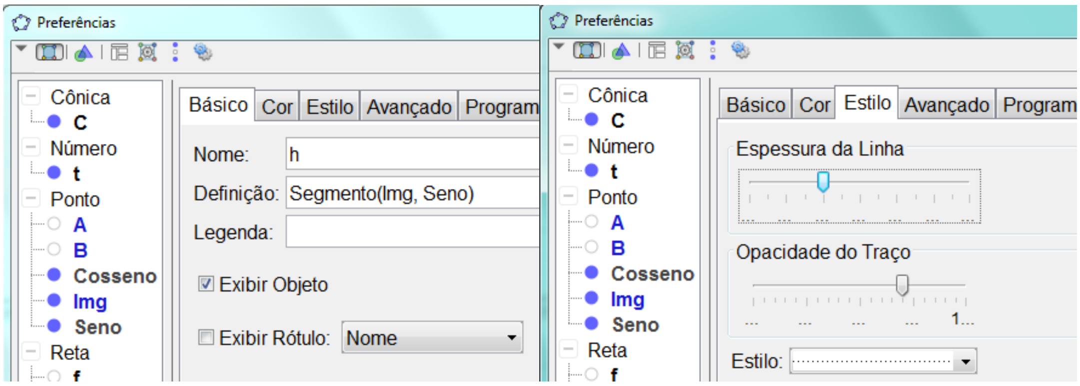
Clique com o botão direito sobre o ponto *D* e escolha a opção Renomear (Renomear). Em seguida altere seu nome para *Seno*. Repita o procedimento para alterar o nome do ponto *E* para *Cosseno*.

Para ocultar as retas auxiliares na f e g na janela de visualização, vá na janela de álgebra e desmarque as retas *f e g* clicando sobre seus marcadores.

No menu de ferramentas, selecione Segmento (Segmento). Faça o primeiro seguimento clicando nos pontos *Img e Seno*. E o segundo seguimento clicando nos pontos *Img e Cosseno*.

Clique com o botão direito do mouse sobre um dos seguimentos criados e selecione a opção Propriedades ... (Propriedade). Na aba *Básico* desmarque a opção *Exibir Rótulo*, conforme lado esquerdo da FIGURA 4.8. Em seguida, selecione a aba *Estilo* escolha no campo *Estilo* as linhas pontilhadas, conforme lado direito da FIGURA 4.8.

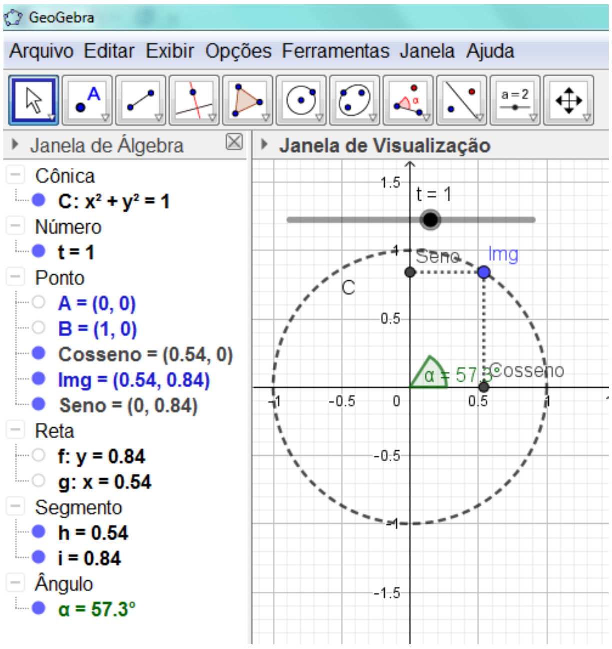
FIGURA 4.8: ABAS BÁSICO E ESTILO DA JANELA PREFERENCIAS DOS SEGUIMENTOS.



FONTE: O autor (2018).

Feito todos os procedimentos até então, teremos a imagem *C* da Função de *Euler* $E : R \rightarrow C$ construída. Já é possível alterar o valor de *t* no controle deslizante e visualizar $E(t) = (\cos t\,, sen\ t)$ no gráfico, representado pelo ponto *Img*. O resultado até aqui deve ser semelhante à FIGURA 4.9.

FIGURA 4.9: CONSTRUÇÃO PARCIAL DA FUNÇÃO DE EULER



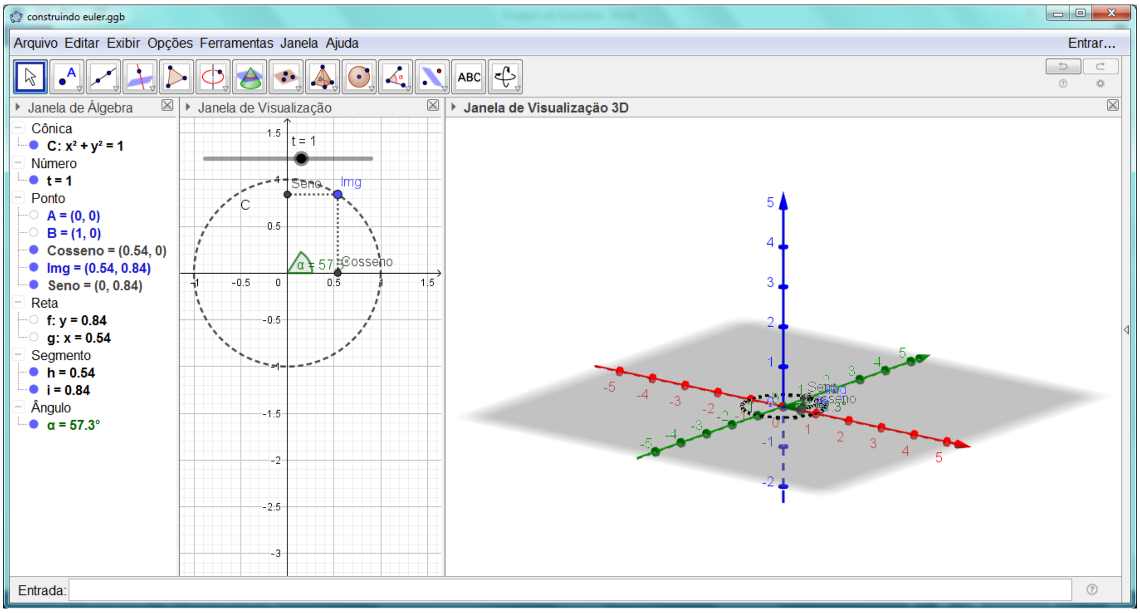
FONTE: O autor (2018).

O gráfico da figura 4.9 também apresenta os pontos *Seno* e *Cosseno*. É importante considerar que o seno e cosseno representam respectivamente a distância relativa entre o ponto *Img* e o *Eixo X* e entre o ponto *Img* e o *Eixo Y*. O fato de desenvolver e analisar visualmente essa relação é fundamental para o aprendizado do aluno, uma vez que o mesmo passará a enxergar seno e cosseno como sendo uma relação que pode ser medida considerando a distância em vez de valores derivados de uma tabela que ele não faz ideia de onde saiu.

Para que a função de Euler fique completa precisaremos representar o valor de *t* no gráfico. Passaremos então a utilizar a terceira dimensão afim de completar a construção.

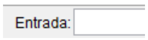
Na barra de menu, clique sobre Exibir (Exibir), e em seguida em Janela de Visualização 3D (Janela de Visualização 3D). Ajuste o tamanho da Janela de Visualização 3D clicando sobre sua borda e arrastando. O resultado deve ser semelhante à FIGURA 4.10.

FIGURA 4.10: JANELA DE VISUALIZAÇÃO 3D.



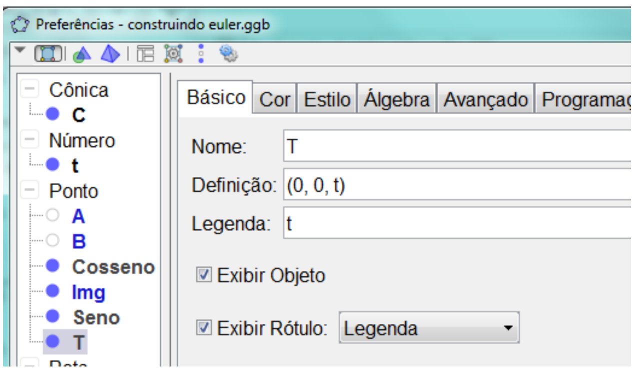
FONTE: O autor (2018).

Para inserir o ponto que representa o número “t” no gráfico espacial, criaremos o ponto “T”, em maiúsculo, pois não podemos atribuir o mesmo nome para dois objetos diferentes no GeoGebra.

No campo  (Entrada) escreva *T = (0,0,t)* para criar o ponto *T*.

Agora clique com o botão direito do mouse sobre o ponto *T* criado, e escolha a opção “Propriedades”. No campo “Legenda” escreva “t” e no campo “Exibir Rótulo” escolha a opção “Legenda” conforme mostra a FIGURA 4.11.

FIGURA 4.11: PREFERÊNCIAS DO PONTO *T*.



FONTE: O autor (2018).

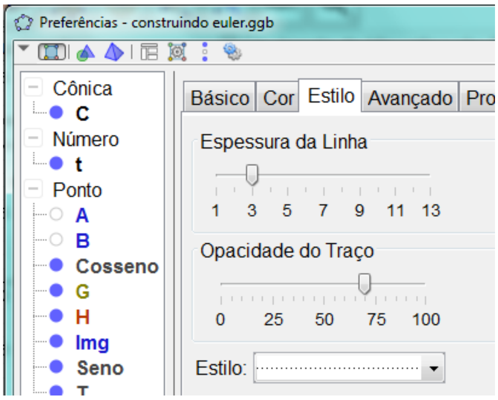
Repita o procedimento anterior para atribuir a legenda “E(t)” ao ponto *Img*.

No campo Entrada: (Entrada) escreva *G* = *T* + *Img* para criar o ponto *G*, que representara o gráfico da função. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto *G* criado. Escolha a opção “Propriedades”. Na aba básico, desmarque a opção “Exibir Rótulo” e marque a opção “Exibir Rastro”. Na aba “Cor”, defina a cor do ponto para “Amarelo”. Na aba “Estilo”, defina o tamanho do ponto para “2”. Na aba “Avançado”, desmarque a opção “Janela de visualização”.

No campo Entrada: (Entrada) escreva *H* = *G*. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto *H* criado. Escolha a opção “Propriedades”. Na aba “Básico”, no campo “Legenda”, digite “E(t) = (cos t, sem t)” e no campo “Exibir Rótulo” escolha a opção “Legenda”. Na aba “Cor”, defina a cor do ponto para “Amarelo”. Na aba “Estilo”, defina o tamanho do ponto para “2”. Na aba “Avançado”, desmarque a opção “Janela de visualização”.

No campo Entrada: (Entrada) escreva “*j = segmento(T,H)”* para criar o seguimento *j*. Clique com o botão direito do mouse sobre o seguimento *J* criado e escolha a opção “Propriedades”. Na aba “Estilo”, defina “Espessura da Linha” para “3” e no campo “Estilo” escolha a opção “pontilhada” Conforme FIGURA 4.12.

FIGURA 4.12: PREFERÊNCIAS DO SEGUIMENTO *J*.

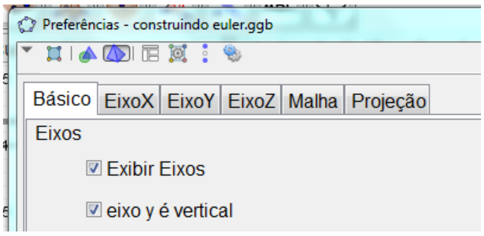


FONTE: O autor (2018).

No campo Entrada: (Entrada) escreva “*k = segmento(Img,H)”* para criar o seguimento *k*. Clique com o botão direito do mouse sobre o seguimento *k* criado e escolha a opção “Propriedades”. Na aba “Estilo”, defina “Espessura da Linha” para “3” e no campo “Estilo” escolha a opção “pontilhada”.

Clique com o botão direito do mouse sobre uma área vazia da *Janela de Visualização 3D*, selecione a opção Janela de Visualização (Janela de Visualização). Na aba "Básico", Marque a opção "eixo y é vertical", conforme mostra FIGURA 4.13.

FIGURA 4.13: PREFERÊNCIAS DA JANELA DE VISUALIZAÇÃO

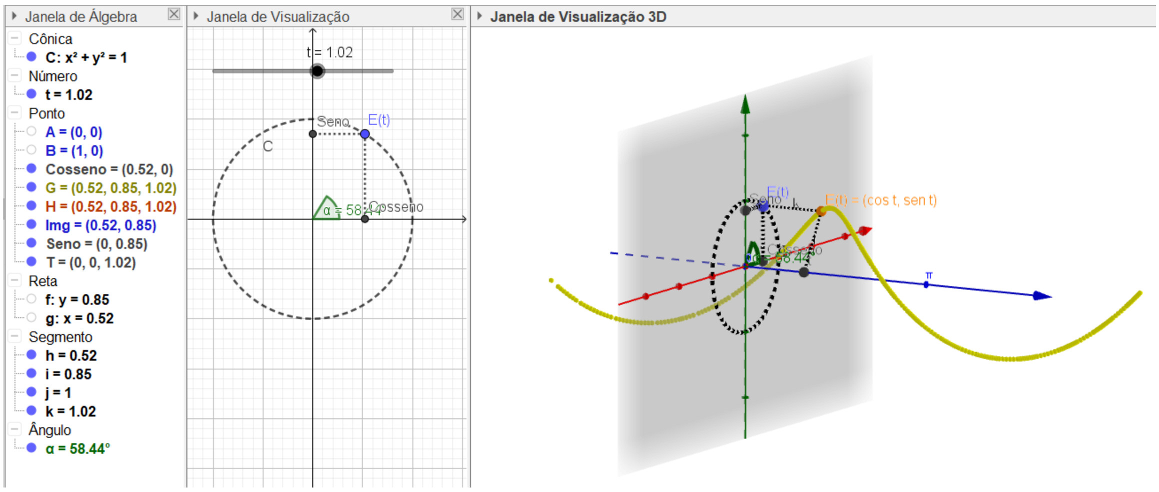


FONTE: O autor (2018).

Ainda na janela "Preferências", desmarque as opções "Exibir Números" das abas "EixoX" e "EixoY". E na aba "EixoZ" encolha a unidade de medida π. Esse procedimento deve ser repetido na "Janela de Visualização" (bidimensional) para desmarcar a opção "Exibir Números" dos "EixoX" e "EixoY". Dessa forma, deixamos na tela apenas os dados mais relevantes.

Clique com o botão direito do mouse sobre o número "*t*" e selecione a opção "Animar". O Resultado deve ser semelhante à FIGURA 4.14.

FIGURA 4.14: A FUNÇÃO DE EULER



FONTE: O autor (2018).

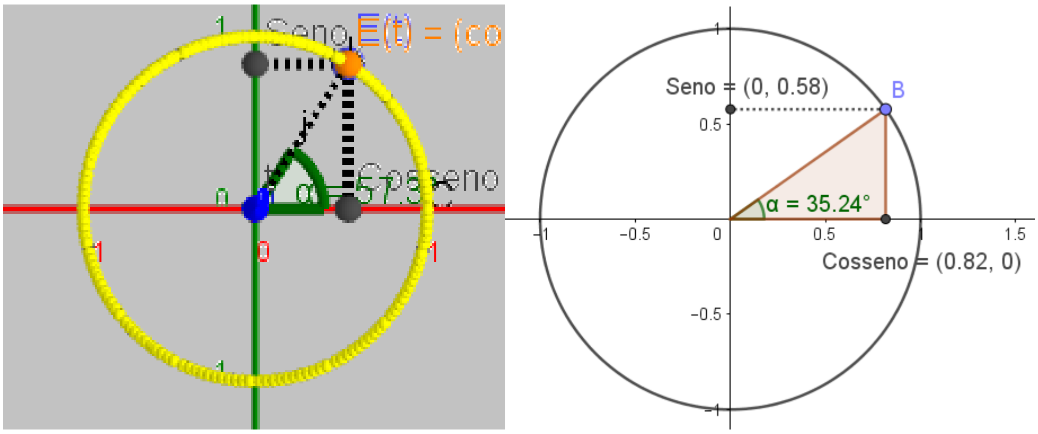
A gráfico da função de Euler está completo! Agora é possível observar o comportamento da função por todas as perspectivas e explorar o conteúdo da trigonometria.

4.2 – ANALIZANDO O GRÁFICO

A partir da função de Euler, outras funções trigonométricas são derivadas. Um dos benefícios importantes de se praticar essa construção é incitar o aluno a para de enxergar essas funções de forma desconexas, como se não houvesse relação uma com a outra. Dessa forma, observa-se que:

1. Utilizando a ferramenta (Mover), ajuste o gráfico da *Janela de Visualização 3d* de forma que o *Eixo Z*, representado em Azul, fique completamente apontado para a tela, de forma que o Eixo Z seja exibido como se fosse apenas um ponto azul conforme lado esquerdo da FIGURA 4.15. Nessa disposição, o gráfico da função de Euler ficará semelhante ao que os livros didáticos apresentam por Círculo Trigonométrico representado no lado direito da FIGURA 4.15.

FIGURA 4.15: RELAÇÃO ENTRE O GRÁFICO E O CIRCULO TRIGONOMÉTRICO

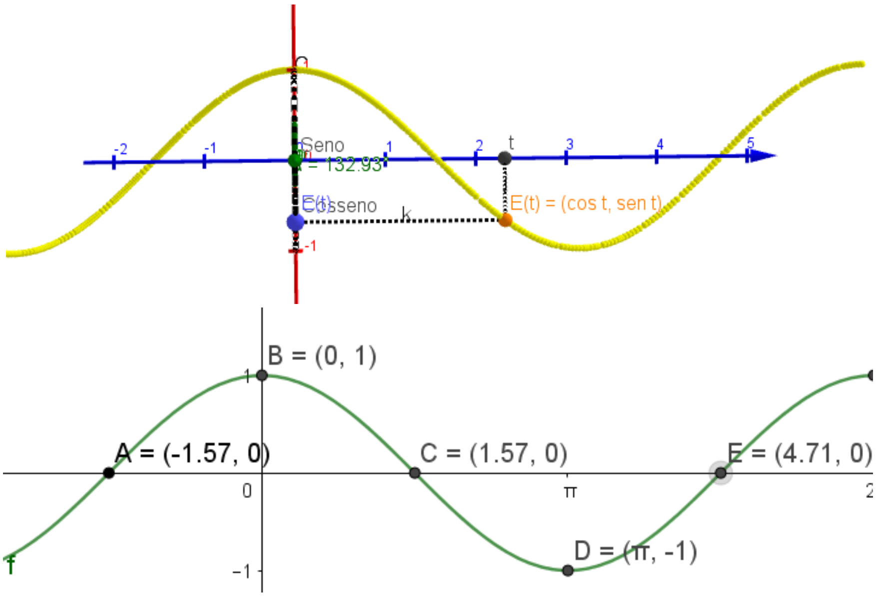


FONTE: O autor (2018).

2. Utilizando a ferramenta (Mover), ajuste o gráfico da *Janela de Visualização 3d* de forma que o *Eixo Z*, representado em Azul, fique completamente apontado para a tela, de forma que o Eixo Z seja exibido como se fosse apenas um ponto azul conforme parte superior da FIGURA 4.16. Nessa disposição, o gráfico da função

de Euler ficará semelhante ao que os livros didáticos apresentam por Função Cosseno representado na parte inferior da FIGURA 4.17.

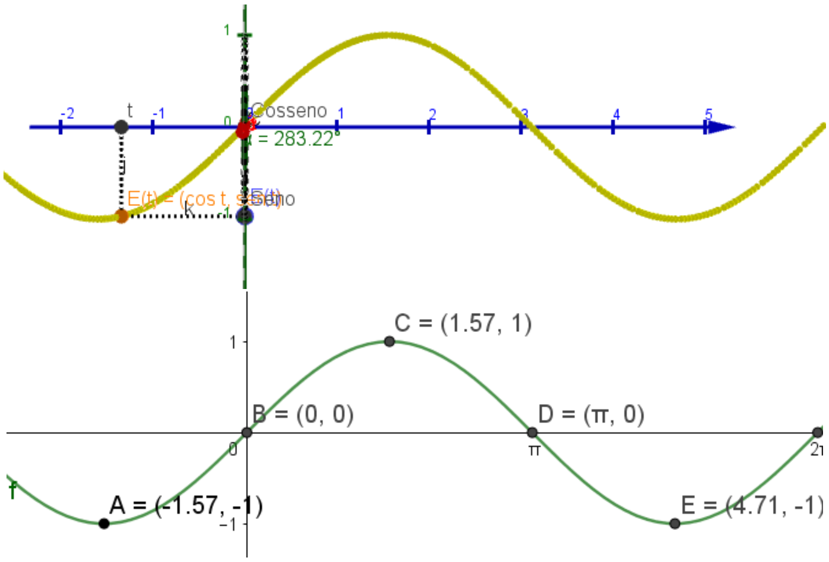
FIGURA 4.16: RELAÇÃO ENTRE O GRÁFICO E A FUNÇÃO COSSENO.



FONTE: O autor (2018).

3. Utilizando a ferramenta (Mover), ajuste o gráfico da *Janela de Visualização 3d* de forma que o *Eixo Z*, representado em Azul, fique completamente apontado para a tela, de forma que o Eixo Z seja exibido como se fosse apenas um ponto azul conforme parte superior da FIGURA 4.17. Nessa disposição, o gráfico da função de Euler ficará semelhante ao que os livros didáticos apresentam por Função Seno representado na parte inferior da FIGURA 4.17.

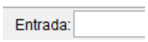
FIGURA 4.17: RELAÇÃO ENTRE O GRÁFICO E A FUNÇÃO SENO.



FONTE: O autor (2018).

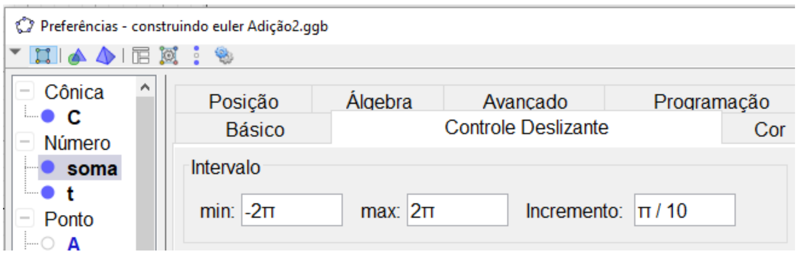
4.3 – EXPLORANDO O CONCEITO: RELAÇÕES DE ADIÇÃO

A construção da função de Euler no GeoGebra pode ser utilizada para viabilizar o estudo da trigonometria em suas mais diversas ramificações. A exemplo disso, os passos a seguir conduzem o discente a entender as relações de adição entre possíveis valores para “t” e π. Dessa vez, construiremos um gráfico auxiliar da função de Euler mas utilizando a calculadora do GeoGebra para obter os valores de seno e cosseno em vez de encontrar esses valores usando a medida da distância para os eixos como foi feito anteriormente. Esse procedimento é uma forma de confirmar que a construção anterior está correta.

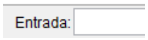
No campo 

(Entrada) escreva *soma=0* para criar o número *soma*. Em seguida, na “Janela de Álgebra”, clique com o botão direito do mouse sobre o número *soma* criado e selecione a opção “Propriedades”. Marque a opção “Exibir Objeto”, e na aba “Controle Deslizante” defina os valores de intervalos mínimo, máximo e incremento para -2π, 2π e π/10, respectivamente, conforme mostra FIGURA 4.18 (Dica: poderás escrever a palavra *pi* que o GeoGeobra converte automaticamente para o símbolo *π*).

FIGURA 4.18: PREFERÊNCIAS DO NÚMERO *SOMA*.

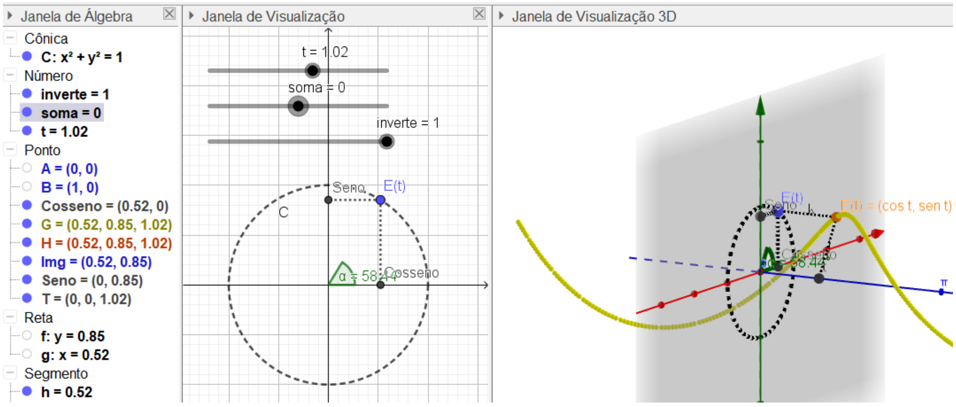


FONTE: O autor (2018).

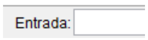
No campo 

(Entrada) escreva *inverte=1* para criar o número *inverte*. Em seguida, na "Janela de Álgebra", clique com o botão direito do mouse sobre o número *inverte* criado e selecione a opção "Propriedades". Marque a opção "Exibir Objeto" da aba "Básico", e na aba "Controle Deslizante" defina os valores de intervalos mínimo, máximo e incremento para -1, 1 e 2, respectivamente. O resultado desse procedimento deve ser semelhante à FIGURA 4.19.

FIGURA 4.19: RELAÇÃO DE ADIÇÃO PARCIAL

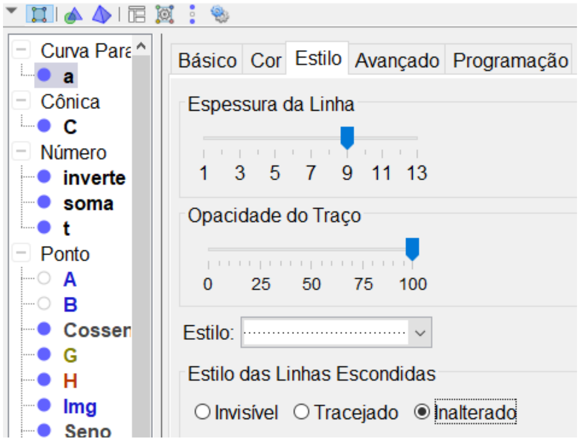


FONTE: O autor (2018).

No campo 

(Entrada) escreva *Curva((cos(z*inverte + soma), sen(z*inverte + soma), z), z, -4π, 4π)* para criar a curva *a*. Na "Janela de Álgebra", clique com o botão direito do mouse sobre a curva *a* criada e selecione a opção "Propriedades". Desmarque a opção "Exibir Nome" da aba "Básico". Na aba "Cor" escolha a cor roxa. E na aba "Estilo" defina os valores de "Espessura da Linha" para "9", de "Estilo" para ".......", e em "Estilo das Linhas Escondidas" selecione "Inalterado" conforme FIGURA 4.20. Por fim, na aba "Avançado" desmarque em Localização a opção "Janela de Visualização".

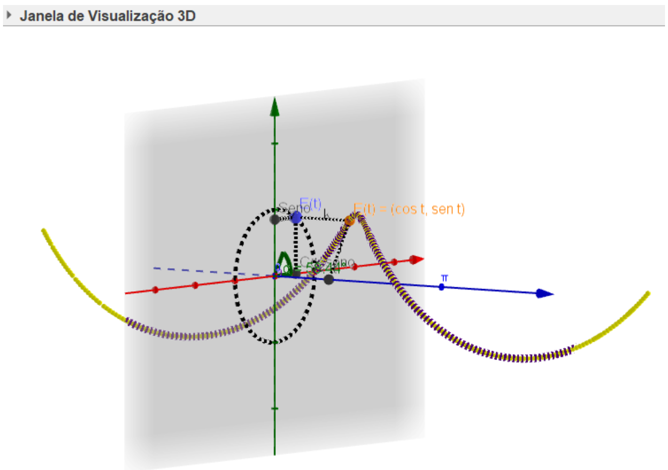
FIGURA 4.20: PREFERÊNCIAS DA CURVA *A*.



FONTE: O autor (2018).

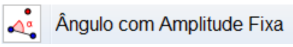
Como foi anunciado anteriormente, ao definir da curva *a*, utilizamos a calculadora do GeoGebra para gerar os valores do cosseno e seno. Nesse instante é possível comparar o gráfico calculado pelo GeoGebra com o que fizemos baseado em medição de distância. O resultado desse procedimento deve ser semelhante à FIGURA 4.21, com a curva *a* exatamente "revestindo" o gráfico da função de Euler. Esse fato sugere que a nossa construção anterior está correta.

FIGURA 4.21: REVESTIMENTO DO GRÁFICO.



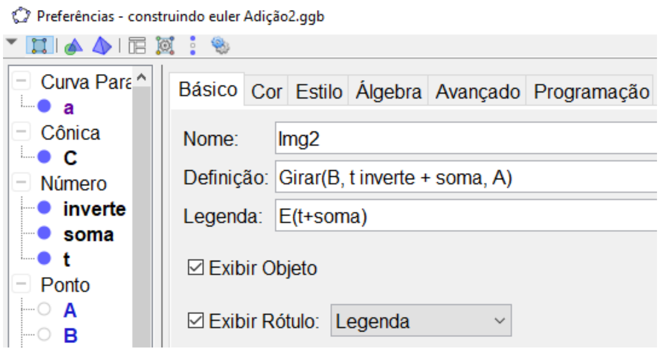
FONTE: O autor (2018).

Além disso, na definição também relacionamos à curva *a* os números *soma* e *inverte*. Isso nos permite alterar o gráfico, compará-lo com o original e consequentemente constatar algumas relações importantes. Para isso, iremos ainda adicionar algumas informações afim de auxiliar na análise.

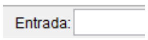
Selecione a ferramenta 

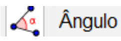
(Ângulo com Amplitude Fixa), Clique nos pontos *B* e, posteriormente, *A* (esses pontos não estão sendo exibidos nas janelas de visualizações, mesmo assim eles podem ser selecionados através da Janela de Álgebra). Nesse momento aparecerá a janela *Ângulo com Amplitude Fixa*, nela indique como parâmetro *t*inverte+soma*. Na "Janela de Álgebra", desmarque o ângulo β criado. Nesse momento foi criado automaticamente o ponto *B'*, click sobre ele com o botão direito e selecione "Propriedades". Altere os campos "Nome" para *Img2*, "Legenda" para *E(t+soma)*, e em "Exibir Rótulo" escolha a opção "Legenda" conforme apresentado na FIGURA 4.22.

FIGURA 4.22: PREFERÊNCIAS DO PONTO *B'*.



FONTE: O autor (2018).

No campo 

(Entrada) escreva D=Img2+T para criar o ponto auxiliar *D* pertencente a curva *a* e que tem distância *t* do plano. Selecione a ferramenta 

(Ângulo) e clique em sequência nos pontos *H*, *T* e *D*.

Selecione a ferramenta 

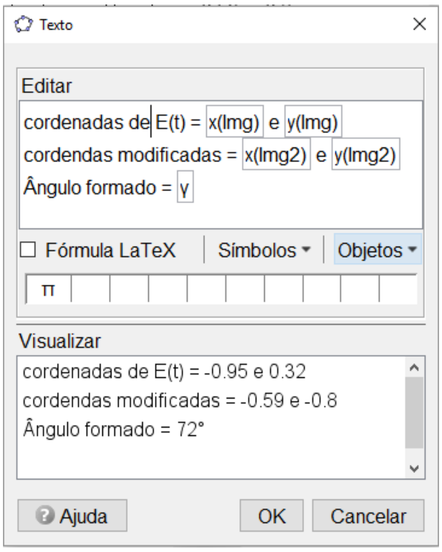
(texto) e clique sobre uma área vazia no canto superior esquerdo da "Janela de Visualização 3D". Ira abrir a caixa de texto, onde deve ser escrito o texto:

Coordenadas de E(t) = ***x(Img)*** *e* ***y(Img)***
Coordenadas modificadas = ***x(Img2)*** *e* ***y(Img2)***

Ângulo formado = γ

Antes de digitar a parte do texto representado em negrito clique em “Objetos” e selecione “(área vazia)”, assim o texto visualizado passará a ser os valores de correspondência das expressões. Repita o procedimento para as cinco expressões em negrito até que o texto fique de acordo à FIGURA 4.23. Clique com o botão direito do mouse sobre texto criado e selecione “Propriedades”, na aba “Avançado” desmarque em “Localização” a opção “Janela de Visualização”.

FIGURA 4.23: JANELA TEXTO

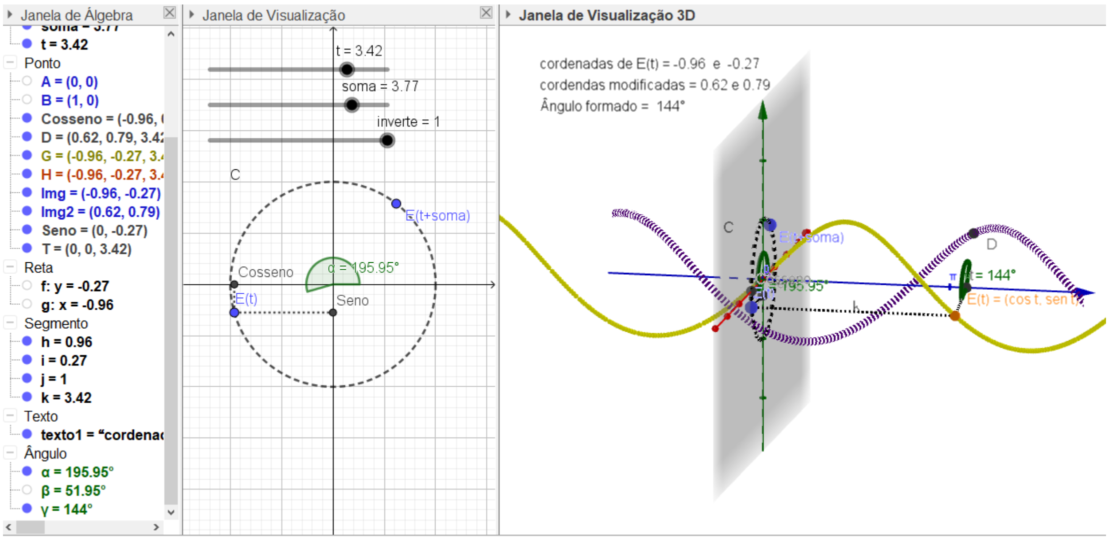


FONTE: O autor (2018).

Nesse momento ajuste texto, legendas e figuras da tela conforme achar adequado utilizando a ferramenta  (Seleção).

A segunda parte da construção está concluída. Utilizando os controles deslizantes, agora é possível além de alterar o valor de t, comparar o gráfico original com um gráfico auxiliar construído a partir da inversão do primeiro ou soma com um valor qualquer. O resultado da construção deve ser semelhante à FIGURA 4.24.

FIGURA 4.24: AS RELAÇÕES DE ADIÇÃO.

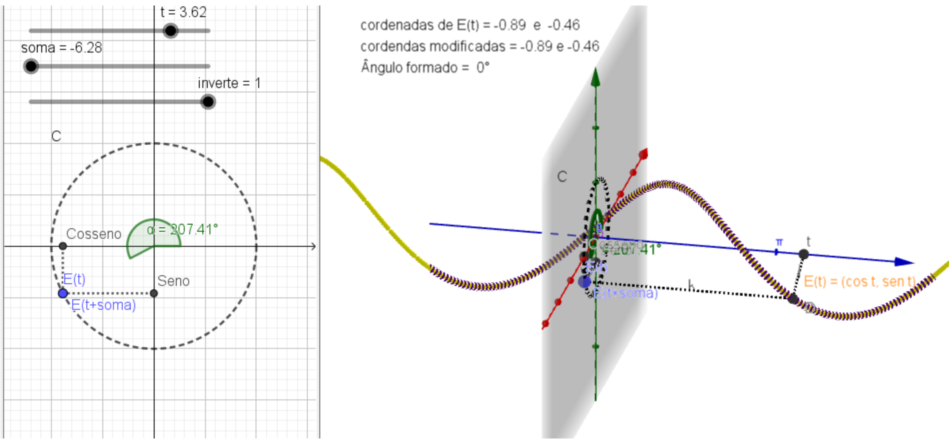


FONTE: O autor (2018).

É recomendável que nesse ponto os discentes sejam indagados, ao passo que altera os valores de t, *soma* e *inverte* nos controles deslizantes, sobre a relação entre as coordenadas originais de E(t) e as coordenadas modificadas e do ângulo resultante nos seguintes casos:

$\boldsymbol{Soma = -2\pi}$ ou $\boldsymbol{Soma = 2\pi}$: Conforme mostra a FIGURA 4.25, para qualquer valor de t, não há diferença entre as coordenadas originais e as modificadas. E os pontos nos gráficos não geram ângulo. O gráfico assume uma condição idêntica à inicial. Isso revela o fato da função de Euler ser periódica com período igual a 2π. Com efeito, dizemos que $E(t) = E(t + 2k\pi)$, com $k \in Z$.

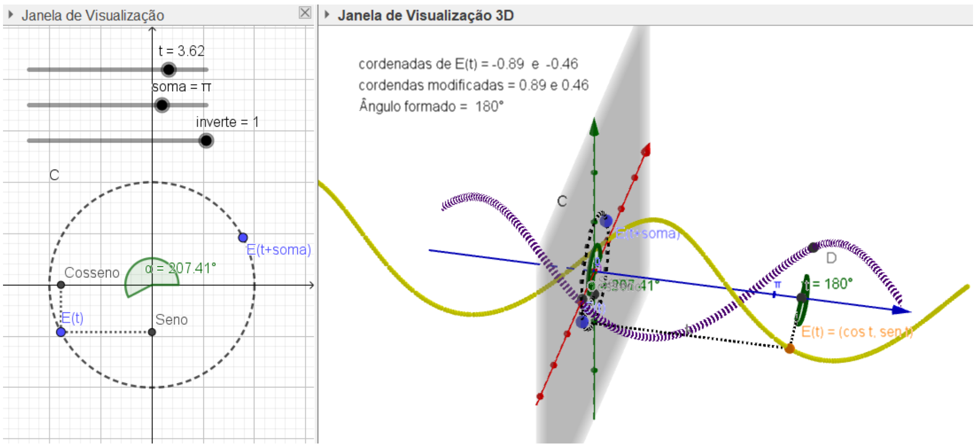
FIGURA 4.25: ANALISANDO E(t-2π).



FONTE: O autor (2018).

$\boldsymbol{Soma} = \boldsymbol{\pi}$: Conforme mostra a FIGURA 4.26, para qualquer valor de t, os valores das coordenadas originais e as modificadas são sempre opostos e o ângulo gerado é 180º. Matematicamente dizemos que $E(t) = (x, y) \Rightarrow E(t + \pi) = (-y, -x)$. Isso indica que $cos(t) = -cos(t + \pi)$ e $\text{sen}(t) = -\text{sen}(t + \pi)$.

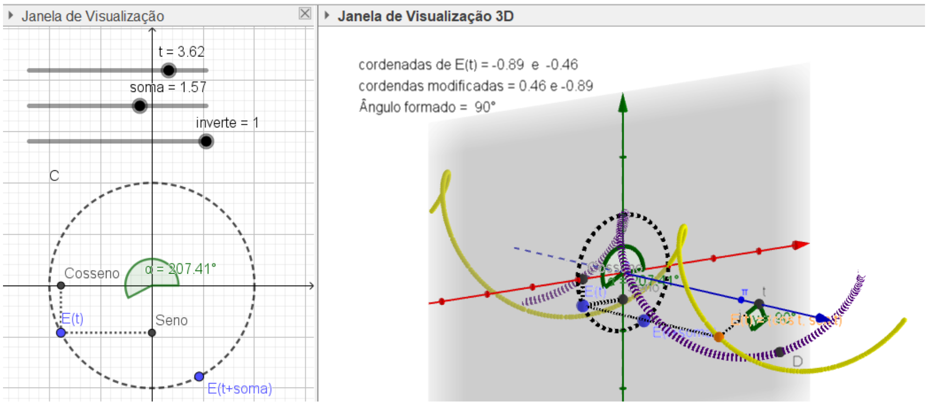
FIGURA 4.26: ANALISANDO E(t+π).



FONTE: O autor (2018).

$\boldsymbol{Soma} = \boldsymbol{\pi/2}$: Essa é uma relação interessante em que, conforme mostra a FIGURA 4.27, para qualquer valor de t, observamos que a primeira coordenada modificada é oposta à segunda coordenada original, e a segunda coordenada modificada é igual à primeira coordenada original. Ou seja, $E(t) = (x, y) \Rightarrow E\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = (-y, x)$. Com efeito, $cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -sen(t)$ e $\text{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(t)$.

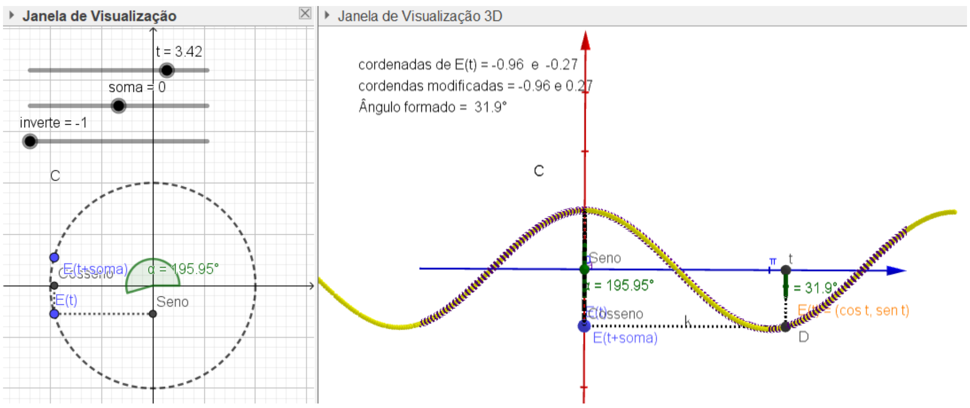
FIGURA 4.27: ANALISANDO E(t+π/2).



FONTE: O autor (2018).

$\boldsymbol{Inverte = -1}$: Conforme mostra a FIGURA 4.28, para qualquer valor de t, observamos que a primeira coordenada não muda (ajuste para perspectiva em que o Eixo y, representado em verde, pareça um único ponto e perceba isso) e à segunda coordenada é oposta à original. Ou seja, $E(t) = (x, y) \Rightarrow E(-t) = (x, -y)$. Com efeito, $cos(-t) = cos(\mathrm{t})$ e $\mathrm{sen}(-t) = -\mathrm{sen}(t)$.

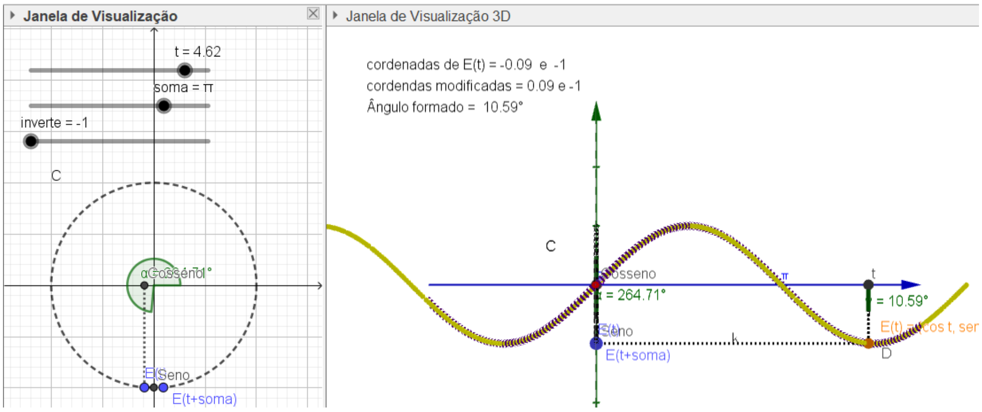
FIGURA 4.28: ANALISANDO INVERSÃO.



FONTE: O autor (2018).

$\boldsymbol{Inverte = -1}$ e $\boldsymbol{soma = \pi}$: Conforme mostra a FIGURA 4.29, para qualquer valor de t, observamos que a segunda coordenada não muda (ajuste para perspectiva em que o Eixo x, representado em vermelho, pareça um único ponto e perceba isso) e à primeira coordenada é oposta à original. Ou seja, $E(t) = (x, y) \Rightarrow E(\pi - t) = (-x, y)$. Com efeito, $cos(\pi - t) = -cos(\mathrm{t})$ e $\mathrm{sen}(\pi - t) = \mathrm{sen}(t)$.

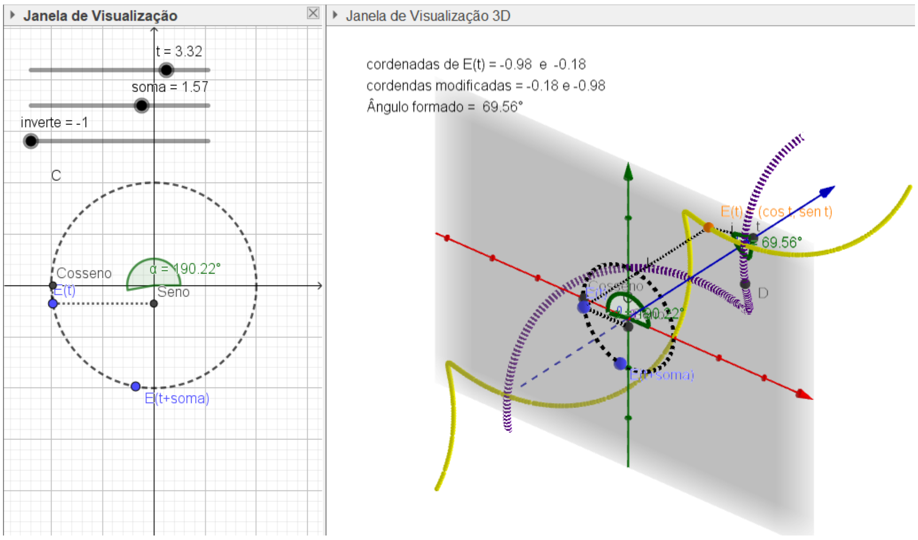
FIGURA 4.29: ANALISANDO E(π-t).



FONTE: O autor (2018).

$\boldsymbol{Inverte = -1}$ e $\boldsymbol{soma = \pi/2}$: Por fim, temos mais uma relação bastante interessante em que, conforme mostra a FIGURA 4.30, para qualquer valor de t, observamos que a primeira coordenada modificada é igual à segunda coordenada original, e a segunda coordenada modificada é igual à primeira coordenada original. Ou seja, $E(t) = (x, y) \Rightarrow E\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = (y, x)$. Com efeito, $cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = sen(t)$ e sen $\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$.

FIGURA 4.30: ANALISANDO E(π/2-t).



FONTE: O autor (2018).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática é uma das mais antigas e mais exploradas ciências que existem. Sua origem se deu ainda na pré-história, e nesse meio tempo houveram inestimáveis contribuições que culminam na abrangente matemática atual. Essa configuração faz com que os próximos desenvolvimentos da matemática se tornem cada vez mais raro. É relativamente difícil acrescentar algo inteiramente novo dentro da matemática. No entanto, reinventar a forma de transmitir o conhecimento matemático é algo bastante acessível. Com o desenvolvimento tecnológico, o processo de ensino-aprendizagem se torna cada vez mais promissor, cabendo ao professor à busca pelos recursos computacionais que tem se tornado cada vez mais disponíveis.

A maior parte da contribuição que Euler fez para a matemática, tanto à sua geração como às posteriores, não acrescentou conteúdo inédito. Euler se destacou por conseguir canalizar inúmeras informações matemáticas e disponibilizá-las em seus livros, com destaque para a abordagem didática utilizada que era bastante adequada. A exemplo de Euler, devemos procurar sempre melhores formas de transmitir o conhecimento e assim difundir o conhecimento matemático dento da sociedade contemporânea.

Nesse sentido, a construção desse trabalho viabiliza a exploração e compreensão significativa do conteúdo matemático de trigonometria. Ela é uma base que permite realizar inúmeras observações e, consequentemente, conclusões. Por exemplo, é possível fazer com que o aluno entenda o motivo da palavra “tangente” do ângulo simplesmente solicitando a medição de uma linha que “tangencia” o círculo C. A partir de atos e observações como essa, o conteúdo matemático passa a fazer muito mais sentido para o discente.

A apresentação da Função Trigonométrica de Euler conforme proposta nesse trabalho permite que o aluno entenda as funções trigonométricas não com sendo funções a parte, mas vendo-as como um todo, assimilando a relação entre elas. O aluno passará a entender que o valor de cos(x) é um resultado que pode ser medido, em vez de uma relação que deve ser conferido em uma tabela aparentemente aleatória. Além disso, o gráfico apresentar-se de forma dinâmica, moderna e padronizada, proporcionando motivação e interesse na sala de aula, tanto para o aluno quanto para o professor.

No mais, esse trabalho serve de base para que o docente e discente explore o amplo conteúdo da trigonometria, se aprofundando nas ramificações da ciência que não foram abordadas nesse trabalho, como por exemplo a lei dos senos, e desenvolvendo os mais variados exercícios. Tais desenvolvimentos ficam de recomendação para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

MORAN, José Manoel; MASETTO, Marcos T; BEHRENS, Maria Aparecida. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica**. Campinas: Papirus, 2000.

VIEIRA, Rosângela Souza. **O papel das tecnologias da informação e comunicação na educação: um estudo sobre a percepção do professor/aluno**. Formoso - BA: Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF), 2011. v. 10, p.66-72.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M.. **A aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**, IV Congresso RIBIE, Brasília, 1988.

SILVA, A. R. **Uma proposta para o ensino de geometria espacial métrica no ensino médio. 2013**. 94 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013.

SMOLE, K. S. et al. **Jogos de matemática: 1º a 3º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

FANELLI, R. P. L. **Alternativas para o ensino da geometria espacial. 2013**. 37 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dourados, 2013.

LIMA, C. E. O. **A Utilização do software GeoGebra como ferramenta para o ensino de funções.** 2013. 64f. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Ceara, Fortaleza, 2013.

VALENTE, José Armando. **Diferentes usos do computador na educação**. Gráfica Central da UNICAMP, 1993.

BEZERRA, C.A; ASSIS, C.C. **Atividades com o GeoGebra: possibilidades para o ensino e aprendizagem da Geometria no Fundamental**. XIII Conferência interamericana de educação matemática. Recife: 2011.

HOHENWARTER, M. **GeoGebra Quickstart: Guia rápido de referência sobre o GeoGebra**, disponível em: https://app.geogebra.org/help/geogebraquickstart_pt_BR.pdf. Acesso em: 24/01/2018.

WALLE, John A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental. Formação de professores e aplicação em sala de aula**. São Paulo: Artmed, 2009.

TOLEDO, Marília Barros de Almeida; TOLEDO, Mauro de Almeida. **Teoria e prática da matemática: como dois e dois.** Volume único. São Paulo: FTD, 2009.

SILVA, A. V. **A calculadora no percurso de formação de professores de Matemática**, Portugal, 1991.

SILVA, Albano V. **Calculadoras na Educação Matemática: contributos para uma reflexão**. Revista Educação e Matemática. Lisboa, n. 11, p. 3-6, jul./set. 1989.

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer**. São Paulo: Ed. Ática, 1990.

PONTES, J. **O computador — Um Instrumento da Educação**. Lisboa: Texto Editora, 1986.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática – Elo entre as tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autentica, 2001.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Editora da UNICAMP, Campinas, SP, 1997.

BOYER, C. B. **História da Matemática**, Editora Blucher, São Paulo, SP, 1974.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C.; MORGADO, A.; WAGNER, E. **A Matemática do Ensino Médio**, vol. 1 –Coleção do Professor de Matemática, SBM, 10ª edição, 2012.

ANEXO 1- Mídia: Função de Euler

1- Função de Euler
2- Relações de Adição