UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Números complexos para professores de matemática da educação básica que atuam no ensino médio

Robinson Antão da Cruz Filho

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:______________________

Robinson Antão da Cruz Filho

Números complexos para professores de matemática da educação básica que atuam no ensino médio

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA.*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luís Zani

USP – São Carlos
Junho de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

C957n Cruz Filho, Robinson Antão da
Números complexos para professores de matemática da educação básica que atuam no ensino médio / Robinson Antão da Cruz Filho; orientador Sérgio Luís Zani. -- São Carlos, 2018.
97 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Números complexos. 2. Par ordenado. 3. Forma algébrica. 4. Forma trigonométrica. 5. Forma matricial. I. Zani, Sérgio Luís, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Robinson Antão da Cruz Filho

Complex numbers for high school mathematics teachers

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC- USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*.

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Sérgio Luís Zani

USP – São Carlos
June 2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço e dedico totalmente este trabalho à minha família: minha companheira, Maria Tereza, e minhas filhas, Beatriz e Júlia.

Não poderia, de forma alguma, esquecer tanto do meu orientador, o professor Sérgio Luís Zani, quanto da professora Ires Dias, Coordenadora do PROFMAT no ICMC da USP São Carlos.

Ao professor Wladimir Seixas, da UFSCar; muitíssimo obrigado pelos seus conselhos, apoio e amizade.

Agradeço aos meus sogros, Dona Aparecida e Seu José, que têm assumido o papel de meus pais. É assim que os considero.

Aos meus pais, Seu Antão e Dona Alvina, que dormem profundamente. Uma promessa que lhes fiz é cumprida diariamente.

Agradeço infinitamente minha cunhada, Ângela, uma pessoa extremamente generosa; literalmente, um anjo para minha família.

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática pela criação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Vida longa ao PROFMAT!

Agradeço ao ICMC da USP São Carlos e a todos os professores que atuaram no PROFMAT. Meu muito obrigado aos servidores da Seção de Pós-Graduação do ICMC, um grupo de pessoas prestativas e extremamente capacitadas.

Muito obrigado a todos os alunos da Turma 2014 do PROFMAT, pela convivência, pelo carinho com que me trataram, pelo companheirismo. Um agradecimento especial para a Lucimar Mascarin, por sua generosidade e socorro na fase final do meu trabalho.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP – onde mantenho meu vínculo empregatício atual, e à Escola Municipal de Educação Básica Carmine Botta (da Secretaria Municipal de Educação do Município de São Carlos),

Por último, e não menos importante, agradeço ao Imponderável pela Iluminação que recebi em todos os momentos difíceis.

“ Amigo guarda tua mente

Bem viva atenta e sem medo

Que a hora certa e precisa

Virá mais tarde ou mais cedo

Ensina a teus filhos pequenos

Que é dura e longa a viagem

Que a dor, a madeira e o tempo

Não dobram um coração selvagem”

(Kleiton e Kledir)

RESUMO

Robinson Antão da Cruz Filho. **Números complexos para professores de matemática da educação básica que atuam no ensino médio.** 2018. 97p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Um texto sobre o corpo dos números complexos abordando-os de uma forma integrada e direcionada para professores de educação básica que atuam no ensino médio. Apresenta de forma bem fundamentada vários aspectos dos números complexos: par ordenado, vetor do plano, forma algébrica, forma trigonométrica e matricial. Todos os resultados essenciais foram demonstrados. Há um capítulo com alguns problemas resolvidos.

Palavras-chave: Números complexos, par ordenado, vetor do plano, forma algébrica dos números complexos, forma trigonométrica dos números complexos, forma matricial dos números complexos, ensino médio.

ABSTRACT

Robinson Antão da Cruz Filho. **Complex numbers for high school teachers.** 2018. 97p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

A text on the field of complex numbers in an integrated way and directed to teachers of basic education who work in high school. It presents in a well-founded form several aspects of the complex numbers: ordered pair, plane vector, algebraic form, trigonometric and matrix form. For every essential result, there is a proof. There is a chapter with some solved problems.

Keywords: Complex numbers, ordered pair, vector in the plane, algebraic form of complex numbers, trigonometric form of complex numbers, matrix form of complex numbers, high school.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Fig. 1– $M(x, y)$ é a imagem geométrica de $z = x + yi$ 36

Fig. 2 – Distância entre dois números complexos.. 38

Fig. 3 – Conjugação.. 41

Fig. 4 – Potências inteiras de i 56

Fig. 5 – Adição e subtração de números complexos.. 59

Fig. 6 – Multiplicação por um número real..60

Fig. 7 – Forma trigonométrica ou polar de um número complexo.. 61

Fig. 8 – Forma trigonométrica do número complexo $z = -2 + 2i$ 63

Fig. 9 – Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica.. 68

Fig. 10 – Raízes quartas de $z = -2 - 2i$ 72

Fig. 11 – Problema resolvido 9.8 86

Fig. 12 – Problema resolvido 9.9 86

Fig. 13 – Problema resolvido 9.10 (Teorema de Napoleão) 87

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15

2 O CORPO OS NÚMEROS COMPLEXOS 19

2.1 ÁLGBRA DOS NÚMEROS COMPLEXOS 19

3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO 35

4 CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO 41

5 POTÊNCIAS INTEIRAS DE NÚMERO COMPLEXO NÃO NULO 51

5.1 POTÊNCIAS DE i 55

6 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO POR UM NÚMERO REAL 59

6.1 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO 59

6.2 MULTIPLICAÇÃO POR NÚMERO REAL 60

7 FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR DOS NÚMEROS COMPLEXOS 61

7.1 MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA 64

7.1.1 Multiplicação 64

7.1.2 Divisão 66

7.1.3 Interpretação geométrica 67

8 FORMA MATRICIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS 73

9 UMA COLETÂNEA DE PROBLEMAS RESOLVIDOS 79

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS 93

BIBLIOGRAFIA 95

1 INTRODUÇÃO

O presente texto tem como origem a experiência do autor com o ensino dos números complexos em educação básica, especificamente no ensino médio, em escolas públicas ou privadas, em cidades como São Carlos, Valinhos, Mogi Guaçu e Mogi Mirim. O autor atuou tanto no ensino médio regular quanto em pré-vestibulares. Neste último caso, em particular, lecionando para turmas de aprofundamento para vestibulandos do Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), do Instituto Militar de Engenharia (IME), além de turmas de preparação para competições de matemática, a saber, a Olimpíada Paulista de Matemática (OPM) e a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

A sequência dos capítulos é aquela tradicionalmente seguida pela maioria (esmagadora) das obras sobre os fundamentos básicos dos números complexos, exceto o capítulo sobre a forma matricial. O corpo dos números complexos, interpretação geométrica e conjugado de um número complexo (surge um novo tipo de função). As potências inteiras da unidade imaginária já apresentam uma primeira ligação com as rotações no plano (vejam as potências de inteiras de i). O próximo tópico é a multiplicação por número real (homotetias). Em seguida, há a forma trigonométrica. A ligação entre todos esses aspectos fica para a forma matricial.

O autor desistiu de escrever um capítulo específico sobre as transformações geométricas no plano. Pois, há pelo menos uma dissertação excelente sobre o tema. Aquela escrita pelo *profmatiano* Robson Coelho Neves (NEVES, 2014), orientado pelo professor Dr. Eduardo Wagner. Da mesma forma, desistimos de uma abordagem histórica do surgimento dos números complexos, por si só, um tema de dissertação em nível de mestrado ou doutorado.

O texto utiliza livremente resultados da álgebra e da álgebra linear, da geometria euclidiana plana e da geometria analítica plana para iluminar vários aspectos dos números complexos. Oferecemos uma abordagem mais profunda de um assunto do ensino médio. A abordagem é original no seguinte sentido: ela trata de modo suficientemente rigoroso todos os aspectos importantes dos números complexos para um professor de educação básica; por exemplo, a imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$, as potências de i bem como as equivalências entre as diversas formas dos números complexos.

Além disso, sempre que foi possível, houve um intercâmbio entre duas categorias que se superpõem dialeticamente, o saber matemático e o saber pedagógico. Todo texto tem uma trama, uma urdidura: há inúmeras sugestões nas entrelinhas.

Uma visão abrangente dos números complexos tem inúmeros defensores, todos ilustres professores de matemática com larga experiência em preparação de jovens alunos para competições de matemática ou que simplesmente atuam como formadores de professores. Ela propicia uma enorme quantidade de bons argumentos para justificar uma infinidade de estratégias de ensino que podem ser consideradas inovadoras. O autor teve uma grande variedade de experiências no ensino dos números complexos. As mais desafiadoras foram aquelas turmas que tinham uma motivação maior para um aprendizado mais aprofundado de matemática; aquelas turmas cujos alunos tinham a intenção de seguir seus estudos superiores nas áreas de engenharia, ciências naturais, notadamente, a Física; uma quantidade desprezível intencionava seguir para a área de matemática. Nenhuma dessas vivências têm registros. O professor de educação básica, em geral, não escreve sobre suas aulas e nem as registra: um tipo de cultura profissional que precisa mudar radicalmente.

Os números complexos têm um papel integrador de vários assuntos da matemática do ensino médio: geometria euclidiana plana, geometria analítica no plano, matrizes, equações algébricas, polinômios e trigonometria. Porém, uma advertência: tópicos de matemática elementar não são, necessariamente, tópicos fáceis. Por exemplo, há problemas de competições matemáticas extremamente difíceis. Mesmo um professor experiente irá enfrentar dificuldades para encontrar uma solução completa.

Neste trabalho veremos várias faces dos números complexos. A estrutura de corpo. A estrutura de espaço vetorial. A estrutura de espaço métrico, especificamente uma forma de medir distâncias, sem entrar nos aspectos topológicos (mas a base estará lá). Um isomorfismo entre os números complexos e um conjunto de matrizes reais quadradas de ordem dois. Também resolveremos alguns problemas usando esses vários aspectos.

Do ponto de vista metodológico, esta dissertação poderia ser enquadrada como uma revisão bibliográfica. O presente texto tem como fundamento diversas fontes, mas procurou-se estabelecer uma escrita pessoal, que reflete a experiência do autor como docente de matemática do ensino médio. Exatamente aquilo que os alunos não veem, mas que serve de guia para todo professor: uma mesa, uma cadeira, papel, lapiseira e tempo. Há fontes que são imateriais; aulas que o autor assistiu ou mesmo conversas com outros professores. Por exemplo, as elegantes aulas de Funções de Uma Variável Complexa do professor Luiz Augusto da Costa Ladeira, ou as aulas do professor José Gaspar Ruas Filho, as aulas do professor Henrique Lazari ou da professora Nilze Silveira de Almeida, a primeira pessoa a nos mostrar um número complexo como um par ordenado de números reais.

Nas escolas (públicas ou privadas) há muitos alunos que gostam de matemática, que gostam e sentem-se desafiados por problemas de matemática. O trabalho com turmas especiais, ou, especificamente, com alunos que participam de competições em matemática, exige muita dedicação e estudo do professor de matemática. Aos sábados, por dois anos consecutivos, o autor trabalhou com alunos do Programa de Iniciação Científica da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (PIC OBMEP). São alunos do nível 2 (8º e 9º anos do ensino fundamental) e do nível 3 (ensino médio); há alunos brilhantes! Com muita aptidão para a matemática. A maioria deles declara que aulas do PIC OBMEP são interessantes por dois motivos: a) as demonstrações de resultados que são feitas, b) a metodologia de ensino aplicada e c) a disposição dos professores do PIC OBMEP para atuarem de forma significativa (por exemplo, aplicando a metodologia de resolução de problemas).

A experiência também indica que um professor não ensina aquilo que não sabe. Para ensinar bem sobre números complexos é preciso estudar e conhecer os números complexos. Portanto, uma outra característica deste texto é a de ser um depoimento de amor e dedicação à docência. Um texto que retrata uma postura profissional de profundo respeito ao alunado, principalmente, das escolas públicas.

Todas as figuras desta dissertação foram elaboradas pelo autor com auxílio do software GeoGebra®.

2 O CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo caracterizaremos o conjunto dos números complexos como corpo, como espaço vetorial de dimensão dois sobre $\mathbb{R}$ e como espaço métrico. Duas características fundamentais dos números complexos: uma algébrica e outra topológica. Os vários modos de utilização dessas características produzem formas diversas de integração de conteúdos da própria Matemática.

2.1 ÁLGEBRA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y); x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R}\}$.

Para todos $z_1 = (x_1, y_1)\in\mathbb{R}^2$ e $z_2 = (x_2, y_2)\in\mathbb{R}^2$, definiremos

Igualdade

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ e \\ y_1 = y_2 \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Adição

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \qquad \text{(A)}$$

Multiplicação

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2). \qquad \text{(M)}$$

Os elementos $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$ de $\mathbb{R}^2$ são denominados, respectivamente, de *soma e produto* de z_1 e z_2. Tradicionalmente, escreve-se z_1z_2 em vez de $z_1 \cdot z_2$.

Observemos que tanto a adição quanto a multiplicação em $\mathbb{R}^2$ foram definidas em termos da adição e da multiplicação de números reais.

Definição 2.1 Conjunto dos números complexos

Denomina-se *Conjunto dos Números Complexos*, denotado por $\mathbb{C}$, ao conjunto de todos os pares ordenados de números reais que seguem as definições de *igualdade (I), de adição (A) e de multiplicação (M) definidas anteriormente.* Cada elemento de $\mathbb{C}$ será chamado de *número complexo.*

Teorema 2.1 Estrutura de corpo

$\mathbb{C}$ é um corpo.

Demonstração:

Propriedades da adição

(A.0) A adição está bem definida e é fechada em $\mathbb{C}$.

(A.1) A adição em $\mathbb{C}$ é comutativa.

Sejam $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ e $z_1 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, então

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \underset{(A)}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \underset{\substack{\text{A adição em} \\ \mathbb{R} \text{ é comutativa}}}{=} (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1 \ .$$

(A.2) A adição em $\mathbb{C}$ é associativa.

Sejam $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_1 = (x_2, y_2)$ e $z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$, então:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \underset{(A)}{=} (x_1, y_1) + ((x_2 + x_3, y_2 + y_3)) =$$

$$\underset{(A)}{=} (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) =$$

$$\underset{\substack{\text{A adição} \\ \text{em } \mathbb{R} \text{ é} \\ \text{associatva}}}{=} ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \underset{(A)}{=} ((x_1 + x_2), (y_1 + y_2)) + (x_3, y_3) =$$

$$\underset{(A)}{=} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) \underset{(A)}{=} (z_1 + z_2) + z_3 \ .$$

(A3) Existência de elemento neutro para a adição

Queremos determinar um número complexo e, com $e=(e_1,e_2)$, tal que, para todo $z=(x,y)\in\mathbb{C}$, $e+z=z+e=z$.

Então,

$$e+z=(e_1,e_2)+(x,y)\underset{(A)}{=}(e_1+x,e_2+y)=(x,y)\underset{(I)}{\Leftrightarrow}\begin{cases} e_1+x=x \\ \quad e \\ e_2+y=y \end{cases}\Leftrightarrow e_1=e_2=0$$

O elemento neutro da adição de números complexos será denotado, neste capítulo, por $0_{\mathbb{C}}$ e nos capítulos posteriores, simplesmente, por 0. Portanto, $e=(0,0)=0_{\mathbb{C}}$.

(A4) Todo elemento de $\mathbb{C}$ tem inverso aditivo ou oposto

Dado $z=(x,y)\in\mathbb{C}$, queremos determinar $z'=(x',y')\in\mathbb{C}$, tal que

$$z+z'=z'+z=0_{\mathbb{C}}.$$

Então,

$$z+z'=(x,y)+(x',y')\underset{(A)}{=}(x+x',y+y')=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases} x+x'=0 \\ \quad e \\ y+y'=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x'=-x \\ \quad e \\ y'=-y \end{cases}$$

Portanto, $(-x,-y)$ é o oposto de (x,y), para cada $(x,y)\in\mathbb{C}$.

Se $z=(x,y)$ então $-z=(-x,-y)$ é o oposto de $z=(x,y)$, para cada $z=(x,y)$. Além disso, $z+(-z)=(-z)+z=0_{\mathbb{C}}$.

Propriedades da multiplicação

(M0) A multiplicação está bem definida e é fechada em $\mathbb{C}$.

(M1) A multiplicação em $\mathbb{C}$ é comutativa.

De fato, sejam $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, então:

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \underset{(M)}{=} (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \underset{\substack{\text{A multiplicação em} \\ \mathbb{R} \text{ é comutativa}}}{=} (x_2x_1 - y_2y_1, y_2x_1 + x_2y_1) =$$

$$\overset{(M)}{=} (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) = z_2 z_1.$$

(M2) A multiplicação em $\mathbb{C}$ é associativa.

Com efeito, sejam $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ e $z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$, então:

$$z_1(z_2 z_3) = (x_1, y_1) \cdot \big((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)\big) \overset{(M)}{=} (x_1, y_1) \cdot \big((x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3)\big) =$$

$$\overset{(M)}{=} \big(x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + y_2x_3)\big), \big(x_1(x_2y_3 - y_2x_3) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)\big) =$$

$$\underset{\substack{\text{A multiplicação} \\ \text{em } \mathbb{R} \text{ é distributiva} \\ \text{com relação à adição} \\ \text{e associativa}}}{=} \big((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3; (x_1x_2 + y_1y_2)y_3 + x_3(x_1x_2 + y_1y_2)\big) =$$

$$\overset{(M)}{=} \big((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)\big) \cdot (x_3, y_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3.$$

(M3) Existência de elemento neutro da multiplicação

Dado $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ queremos determinar um elemento $e^* = (e_1^*, e_2^*) \in \mathbb{C} - \{(0,0)\}$, tal que:

$$z \cdot e^* = e^* \cdot z = z.$$

Vejamos,

$$(x, y) \cdot (e_1^*, e_2^*) = (xe_1^* - ye_2^*, xe_2^* + ye_1^*) = (x, y)$$

Portanto, $$\begin{cases} xe_1^* - ye_2^* = x \\ e \\ ye_1^* + xe_2^* = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(e_1^* - 1) - ye_2^* = 0 \\ e \\ y(e_1^* - 1) + xe_2^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} e_1^* - 1 \\ e_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(S)}$$

Como $z=(x,y)\neq(0,0)$, então o determinante da matriz $M=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ é diferente de zero, isto é , $x^2+y^2\neq 0$; consequentemente, o sistema (S) é possível e determinado; portanto, teremos $e_1^*=1$ e $e_2^*=0$.

Então, $e^*=(1,0)$ é o elemento neutro da multiplicação.

Observemos que também foi demonstrado, como era de se esperar, que tanto o elemento neutro da adição quanto o elemento neutro da multiplicação são únicos. Daqui por diante também utilizaremos a seguinte notação: $C^*=C-\{(0,0)\}$. Então, $\mathbb{C}^*$ é o conjunto dos números complexos não nulos.

(M4) Existência de inverso multiplicativo para todo número complexo $z\in\mathbb{C}^*$.

Seja $z=(x,y)\in\mathbb{C}^*$. Queremos encontrar um número complexo $z'=(x',y')\in\mathbb{C}$, tal que $z\cdot z'=z'\cdot z=(1,0)$.

Então,

$$z\cdot z'=(x,y)\cdot(x',y')\underset{(M)}{=}(xx'-yy',xy'+yx')=(1,0)\Leftrightarrow\begin{cases} xx'-yy'=1 \\ e \\ yx'+xy'=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que $x^2+y^2\neq 0$, pois $z\neq(0,0)$ e, portanto, o sistema acima é possível e determinado, então

$$x'=\frac{x}{x^2+y^2} \quad e \quad y'=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Logo, para cada $z=(x,y)\neq(0,0)$, existe um único número complexo

$$z'=\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right) \quad \text{tal que} \quad z\cdot z'=z'\cdot z=(1,0).$$

Doravante, o único inverso multiplicativo de um número complexo não nulo, $z=(x,y)$, será denotado por

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

(D) A multiplicação é distributiva em relação à adição

Sejam $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$ e $z_3=(x_3,y_3)\in\mathbb{C}$. Então,

$$
\begin{aligned}
z_1\cdot(z_2+z_3) &= (x_1,y_1)\cdot\big((x_2,y_2)+(x_3,y_3)\big)=\\
&\underset{(A)}{=}(x_1,y_1)\cdot(x_2+x_3,y_2+y_3)=\\
&\underset{(M)}{=}\big(x_1(x_2+x_3)-y_1(y_2+y_3),x_1(y_2+y_3)-y_1(x_2+x_3)\big)=\\
&\underset{\substack{\text{A multiplicação}\\ \text{de números reais}\\ \text{é distributiva em}\\ \text{relação à adição}\\ \text{de números reais}}}{=}(x_1x_2+x_1x_3-y_1y_2-y_1y_3,x_1y_2+x_1y_3+y_1x_2+y_1x_3)=\\
&\underset{\substack{\text{A multiplicação}\\ \text{de números reais}\\ \text{é associativa}}}{=}\big((x_1x_2-y_1y_2)+(x_1x_3-y_1y_3),(x_1y_2+y_1x_2)+(x_1y_3+y_1x_3)\big)=\\
&\underset{(A)}{=}(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)+(x_1x_3-y_1y_3,x_1y_3+y_1x_3)=\\
&\underset{(M)}{=}z_1z_2+z_1z_3
\end{aligned}
$$

Logo, a tripla $(\mathbb{C},+,\bullet)$ é um anel comutativo com elemento unidade, em que todo elemento não nulo admite inverso multiplicativo. Isto é, $(\mathbb{C},+,\bullet)$ é um corpo.

□

Em seguida, apresentamos duas consequências importantes da estrutura de corpo dos números complexos.

Corolário 2.1 Multiplicação por $0_{\mathbb{C}}$

$$0_{\mathbb{C}}\cdot z=z\cdot 0_{\mathbb{C}}=0_{\mathbb{C}},\forall z\in\mathbb{C}\ .$$

Demonstração.

De fato, sejam $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ e $0_{\mathbb{C}}=(0,0)$, então:

$$(0,0)\cdot(x,y)=(x,y)\cdot(0,0)=(0\cdot x-0\cdot y,0\cdot y+0\cdot x)=(0,0) \ .$$

□

Corolário 2.2 Integridade

Para todos z_1 , $z_2\in\mathbb{C}$, temos $z_1\cdot z_2=0_{\mathbb{C}}\Leftrightarrow\begin{cases} z_1=0_{\mathbb{C}} \\ \quad ou \\ z_2=0_{\mathbb{C}} \end{cases}$

Demonstração.

Sejam $z_1=(x_1,y_1)$ e $z_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{C}$. Suponhamos que $z_1z_2=0_{\mathbb{C}}$ e que $z_2\neq 0_{\mathbb{C}}$. Então, multiplicando os dois lados de $z_1z_2=0_{\mathbb{C}}$ por z_2^{-1} (por hipótese, $z_2\neq 0_{\mathbb{C}}$ e, portanto, z_2 tem inverso multiplicativo em $\mathbb{C}$), temos:

$$(z_1\cdot z_2)z_2^{-1}=0_{\mathbb{C}}\cdot z_2^{-1}=0_{\mathbb{C}} .$$

Como a multiplicação de números complexos é associativa, segue-se que:

$$(z_1\cdot z_2)\cdot z_2^{-1}=z_1\cdot(z_2\cdot z_2^{-1})=z_1\cdot e^{*}=z_1=0_{\mathbb{C}} .$$

□

Definição 2.2 Subtração de números complexos

A subtração em $\mathbb{C}$ será definida em termos da adição de números complexos. Dados $z_1=(x_1,y_1)$ e $z_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{C}$, denomina-se *diferença* entre z_1 e z_2 o número complexo $z=(x,y)$, tal que $z_1+z=z_2$. Escreve-se: $z=z_2-z_1$.

Determinemos z.

$$(x_1, y_1)+(x, y)=(x_2, y_2) \underset{(A)}{\Leftrightarrow} (x_1+x, y_1+y)=(x_2, y_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x=x_2 \\ e \\ y_1+y=y_2 \end{cases} \underset{\substack{\text{Definição de} \\ \text{subtração em} \\ \mathbb{R}}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=x_2-x_1 \\ e \\ y=y_2-y_1 \end{cases}$$

Portanto,

$$z=(x_2-x_1, y_2-y_1)=(x_2+(-x_1), y_2+(-y_1))=(x_2, y_2)+(-x_1,-y_1)=z_2+(-z_1) \ .$$

Notemos que, como era esperado, $z_2-z_1=z_2+(-z_1)$. Subtrair z_1 de z_2 é o mesmo que somar z_2 ao oposto de z_1.

Definição 2.3 Divisão de números complexos

A divisão em $\mathbb{C}$, por sua vez, será uma consequência da multiplicação de números complexos. Dados $z_1=(x_1, y_1)$ e $z_2=(x_2, y_2)\in\mathbb{C}$, chama-se *quociente* de z_1 por z_2 o número complexo z, tal que $z_2 \cdot z=z_1$.

Determinemos z.

$$(x_2, y_2)\cdot(x, y)=(x_1, y_1) \underset{(M)}{\Leftrightarrow} (x_2x-y_2y, x_2y+y_2x)=(x_1, y_1) \Leftrightarrow$$

$$\underset{(I)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_2x-y_2y=x_1 \\ e \\ y_2x+x_2y=y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\underset{x^2+y^2\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x^2+y^2} \\ e \\ y=\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x^2+y^2} \end{cases} .$$

Portanto, $z=\left(\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x^2+y^2},\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x^2+y^2}\right)$, com $x^2+y^2\neq 0$.

Notemos que:

$$z=z_1\cdot z_2^{-1},\ \text{com}\ z_2\neq 0_{\mathbb{C}}\ .$$

De fato,

$$z=(x_1,y_2)\cdot\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2},-\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x^2+y^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x^2+y^2}\right).$$

Adotaremos a seguinte notação: $z=\dfrac{z_1}{z_2}$, com $z_2\neq 0_{\mathbb{C}}$, é o quociente de z_1 por z_2.

Além disso, $z=\dfrac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}=z_1\cdot z_2^{-1}$, com $z_2\neq 0_{\mathbb{C}}$.

Teorema 2.2 $\mathbb{C}'=\{(x,0)\in\mathbb{C};x\in\mathbb{R}\}$ é um subcorpo de $\mathbb{C}$

O conjunto $\mathbb{C}'=\{(x,0)\in\mathbb{C};x\in\mathbb{R}\}$, munido das operações de adição de multiplicação em $\mathbb{C}$, é um *subcorpo* de $\mathbb{C}$.

Demonstração.

Sejam $z_1=(x_1,0)$ e $z_2=(x_2,0)\in\mathbb{C}'$, então:

(*i*) $z_1-z_2=(x_1,0)-(x_2,0)=(x_1-x_2,0)\in\mathbb{C}'$;

(*ii*) Se $z_2\neq 0$ então $(x_2,0)\neq(0,0)$ e, portanto, $z_1\cdot z_2^{-1}=(x_1,0)\cdot\left(\dfrac{1}{x_2},0\right)=$

$=\left(\dfrac{x_1}{x_2},0\right)\in\mathbb{C}'$

□

Teorema 2.3 Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$

A aplicação $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}'$; $x\mapsto f(x)=(x,0)$ é um isomorfismo entre corpos.

Demonstração.

Sejam, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, então:

(i) $f(x_1+x_2)=(x_1+x_2,0)\overset{(A)}{=}(x_1,0)+(x_2,0)=f(x_1)+f(x_2)$

(ii) $f(x_1\cdot x_2)=(x_1\cdot x_2,0)\overset{(M)}{=}(x_1,0)\cdot(x_2,0)=f(x_1)\cdot f(x_2)$

(iii) $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow(x_1,0)=(x_2,0)\overset{(I)}{\Leftrightarrow}x_1=x_2$. Portanto, f é injetiva.

(iv) Observe que dado $(x_0,0)\in\mathbb{C}'$, então $x_0\in\mathbb{R}$ é o único elemento de $\mathbb{R}$ tal que $f(x_0)=(x_0,0)$. Logo, f também é sobrejetiva.

□

Uma consequência imediata desses teoremas é que $\mathbb{R}$ é isomorfo a um subcorpo de $\mathbb{C}$. Podemos, portanto, escrever $\mathbb{R}\approx\mathbb{C}$. Isto é, o conjunto dos números complexos com segunda componente nula é (estruturalmente) uma cópia dos números reais. Portanto, $\mathbb{C}$ é uma extensão de $\mathbb{R}$. Também se diz que $\mathbb{R}$ está imerso em $\mathbb{C}$.

Notemos também que toda a estrutura algébrica dos números complexos vista até o momento está profundamente baseada na estrutura algébrica dos números reais.

O isomorfismo descrito anteriormente permitirá que façamos um abuso de notação. Escreveremos,

$$x=(x,0).$$

Isto é, identificaremos cada número complexo $(x,0)$ com o único correspondente número real x.

Definição 2.4 Unidade imaginária

Chama-se *unidade imaginária* o número complexo $i=\left(0,1\right)$.

Notemos que

$$i^2=i\cdot i=\left(0,1\right)\cdot\left(0,1\right)=\left(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 0\right)=\left(-1,0\right)$$

Logo,

$$i^2=i\cdot i=-1.$$

Teorema 2.4 Uma nova forma dos números complexos

Cada número complexo $z=\left(x,y\right)$ pode ser univocamente representado na forma

$$z=x+yi\ ,$$

onde x,y são números reais, onde i é a unidade imaginária e $i^2=-1$.

Demonstração.

$$z=\left(x,y\right)=\left(x,0\right)+\left(0,y\right)=\left(x,0\right)+\left(y,0\right)\left(1,0\right)=x+yi\ .$$

Notemos que se $x^{'}+y^{'}i$ for uma outra representação de z, teremos $z=\left(x^{'},y^{'}\right)$ e, portanto, por igualdade de números complexos, $x=x^{'}$ e $y=y^{'}$.

□

Definição 2.5 Forma algébrica os números complexos

Chama-se *forma algébrica* do número complexo $z=\left(x,y\right)$ a expressão

$$z=x+yi=x+iy\ \text{, onde}\ x,y\in\mathbb{R}\ ;$$

x é a parte real de z (denotada por $\mathrm{Re}(z)$) e y é a parte imaginária de z (denotada por $\mathrm{Im}(z)$). Isto é, $x=\mathrm{Re}(z)$ e $y=\mathrm{Im}(z)$.

Resumidamente, para cada número complexo z, $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, então $\operatorname{Re}(z) = x$ e $\operatorname{Im}(z) = y$.

Definição 2.6 Imaginário puro

Os números complexos da forma $(0, y) = yi$, com $y \in \mathbb{R}^*$ são chamados de *imaginários puros.*

As definições de igualdade, (I), de adição, (A), e de multiplicação, (M) de números complexos escritos como pares ordenados têm suas correspondentes formas algébricas:

$$(I) \quad x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \quad e \\ y_1 = y_2 \end{cases} ;$$

$$(A) \quad (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i ;$$

$$(M) \quad (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + y_1 y_2 i + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i .$$

Exemplo 2.1 Resolver a equação $x^2 + 1 = 0$.

Resolução.

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow (x + i)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + i = 0 \\ \quad ou \\ x - i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = i \\ \quad ou \\ x = -i \end{cases} \qquad \therefore \quad S = \{-i, i\}.$$

Exemplo 2.2 Resolver a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, onde $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Resolução.

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right] \overset{\Delta<0}{=} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - i^2\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

$$\therefore\ ax^2+bx+c=0 \text{ e } \Delta = b^2-4ac<0 \Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - i^2\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \qquad ou \\ x_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$$S = \left\{\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}.$$

Notemos que:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - i^2\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]=0 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=0$$

e, portanto, a forma fatorada da equação do segundo grau contínua válida mesmo quando $\Delta<0$.

Definição 2.7 Multiplicação de um número complexo por um número real

Sejam $\alpha\in\mathbb{R}$ e $z=x+yi\in\mathbb{C}$, então

$$\alpha\cdot z = \alpha\cdot(x+yi) = (\alpha\cdot x)+(\alpha\cdot y)i = \alpha x+\alpha yi\in\mathbb{C}$$

Portanto, está definia sobre $\mathbb{C}$ uma multiplicação por número real (um caso particular da definição de multiplicação (M) da estrutura de corpo. Em seguida, veremos a motivação para esta definição.

Propriedades 2.1 Consequências da multiplicação de um número complexo por um número real

Sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $z=x+yi$, $z_1=x_1+y_1i$ e $z_2=x_2+y_2i$. Então:

(M5) $\alpha\left(z_1+z_2\right)=\alpha\left(\left(x_1+y_1 i\right)+\left(x_2+y_2 i\right)\right)=\alpha\left(\left(x_1+x_2\right)+\left(y_1+y_2\right)i\right)=$

$$=\alpha\left(x_1+x_2\right)+\alpha\left(y_1+y_2\right)i=\alpha\left(x_1+y_1 i\right)+\alpha\left(x_2+y_2 i\right)=\alpha z_1+\alpha z_2$$

$$\therefore \quad \alpha\left(z_1+z_2\right)=\alpha z_1+\alpha z_2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

(M6) $\alpha\left(\beta z\right)=\alpha\left(\beta\left(x+yi\right)\right)=\alpha\left(\beta x+\beta yi\right)=\alpha\left(\beta x\right)+\left(\alpha\left(\beta y\right)\right)i=$

$$=\left(\alpha\beta\right)x+\left(\left(\alpha\beta\right)y\right)i=\left(\alpha\beta\right)\left(x+yi\right)=\left(\alpha\beta\right)z$$

$$\therefore \quad \alpha\left(\beta z\right)=\left(\alpha\beta\right)z, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall z_1 \in \mathbb{C}.$$

(M7) $\left(\alpha+\beta\right)z=\left(\alpha+\beta\right)\left(x+yi\right)=\left(\alpha+\beta\right)x+\left(\left(\alpha+\beta\right)y\right)i=$

$$=\left(\alpha x+\beta x\right)+\left(\alpha y\right)i+\left(\beta y\right)i=\alpha x+\alpha\left(yi\right)+\beta x+\beta\left(yi\right)=$$

$$=\alpha\left(x+yi\right)+\beta\left(x+y\right)i=\alpha z+\beta z$$

$$\therefore \quad \left(\alpha+\beta\right)z=\alpha z+\beta z, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

(M8) $1\cdot z=1\left(x+yi\right)=1\cdot x+\left(1\cdot y\right)i=x+yi=z$. $\quad \therefore \quad 1\cdot z_1=z_1, \forall z_1 \in \mathbb{C}$.

Nas propriedades acima já utilizamos a forma algébrica dos números complexos, uma forma mais versátil para a multiplicação do que aquela definida originalmente.

O conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, munido das operações de adição (A) e de multiplicação por um número real goza das seguintes propriedades (A0), (A1), (A2), (A3), (A4), (M5), (M6), (M7) e (M8). Portanto, $\mathbb{C}$ é um *espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$.

Notemos que, para todo $\left(x, y\right) \in \mathbb{C}$, temos:

$$\left(x, y\right)=\left(x,0\right)+\left(0, y\right)=\left(x,0\right)+\left(0, y\right)\cdot\left(0,1\right)=x\left(1,0\right)+y\left(0,1\right), \text{ com } x, y \in \mathbb{R}.$$

Assim, $(1,0)=1$ e $(0,1)=i$ formam um conjunto de geradores para $\mathbb{C}$. Além disso, $(1,0)$ e $(0,1)$ são linearmente independentes. Vamos formalizar esses aspectos num único teorema.

Teorema 2.5 Estrutura de espaço vetorial

O conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, munido das operações de adição, (A) e de multiplicação por um número real é um espaço vetorial de dimensão dois sobre $\mathbb{R}$.

Uma consequência imediata do teorema 2.5 é que, como espaço vetorial, $\mathbb{C}$, é isomorfo ao $\mathbb{R}^2$. Assim, um número complexo pode ser visto como um vetor do plano, e vice-versa.

3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Um número complexo $z=(x,y)=x+yi$ foi definido como um par de números reais $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. O teorema 2.5 permite identificar o número complexo $z=(x,y)=x+yi$ com o ponto $M(x,y)$ do plano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$.

Portanto, seja P o conjunto de todos os pontos de um plano π munido de um sistema de coordenadas cartesianas xOy.

Teorema 3.1

A aplicação $\varphi:\mathbb{C}\to P$; $\varphi(z)=\varphi(x,y)=\varphi(x+yi)=M(x,y)$ é uma correspondência biunívoca.

Demonstração.

(i) φ é sobrejetiva.

De fato, dado $M_0(x_0,y_0)\in P$, existe e é único o número complexo $z_0=x_0+y_0i;\varphi(z_0)=M_0(x_0,y_0)$; $\varphi(z_0)=M_0(x_0,y_0)$.

(ii) φ é injetiva.

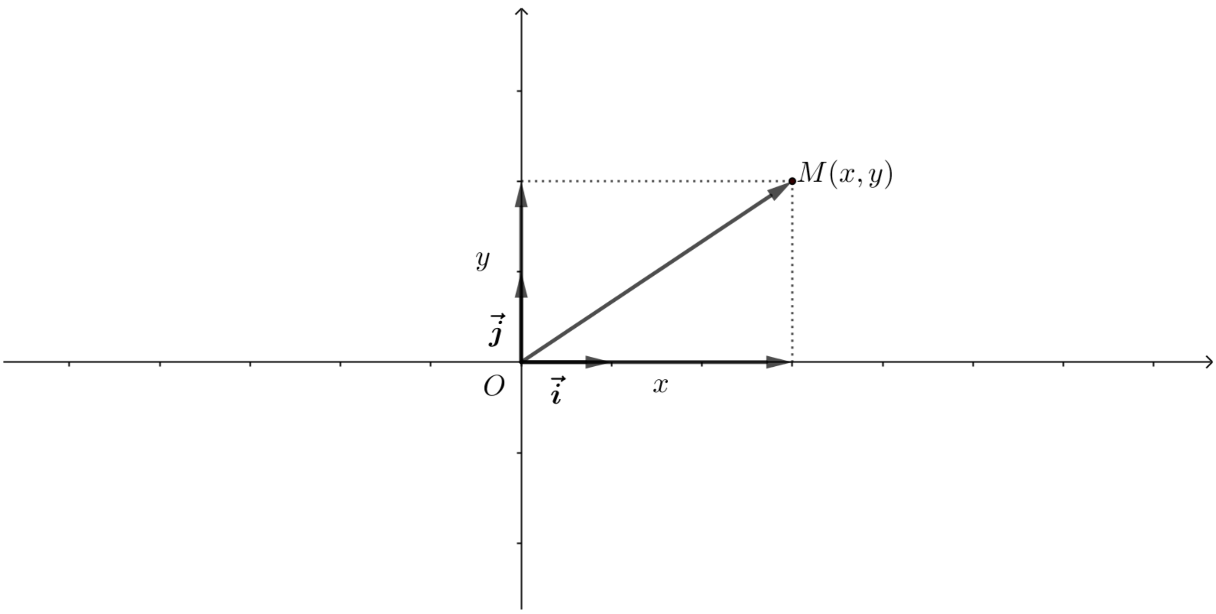
Com efeito, dados $M_1(x_1,y_1)$ e $M_2(x_2,y_2)\in P$ tais que $M_1(x_1,y_1)=M_2(x_2,y_2)$, então $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$. Portanto, $z_1=(x_1,y_1)=x_1+y_1i=x_2+y_2i=(x_2,y_2)=z_2$.

Logo, $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)\Rightarrow z_1=z_2,\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

□

Definição 3.1 Dado um número complexo $z=(x,y)=x+yi$, o ponto $M(x,y)$ é denominado de *imagem geométrica* do número complexo z. Por sua vez, o número complexo $z=x+yi$ é denominado de *coordenada complexa* do ponto $M(x,y)$. Notação: $M(z)$ representará a coordenada complexa do número complexo z.

Figura 1 – $M(x,y)$ é a imagem geométrica de $z = x + yi$



Fonte: elaborada pelo autor.

Observemos que a correspondência biunívoca φ aplica o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, sobre o eixo dos x. Portanto, o eixo dos x será denominado de *eixo real*. Analogamente, φ aplica o conjunto dos números complexos imaginários (imaginários puros) no eixo dos y, que, dessa forma, será chamado de *eixo imaginário*. O plano π, cujos pontos estão biunivocamente associados com os números complexos, é denominado de *plano complexo*.

Há uma segunda forma de caracterizar geometricamente o conjunto dos números complexos decorrente da sua estrutura de $\mathbb{R}-$espaço vetorial de dimensão dois. Basta identificar um número complexo $z = (x,y) = x + yi$ com o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$, onde $M(x,y)$ é a imagem geométrica do número complexo z e O é a origem do sistema cartesiano ortogonal xOy (ver figura 1).

Seja V o conjunto de vetores do plano π cuja origem é a origem O do sistema xOy. Então, podemos definir a aplicação:

$$\psi : \mathbb{C} \to V;\ \psi(z) = \overrightarrow{OM} = \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

onde $\vec{i}$ e $\vec{j}$ são os versores, respectivamente, do eixo x e do eixo y.

Teorema 3.2

A aplicação ψ é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{C}$ e V.

Demonstração.

De fato, dado um vetor $\vec{v}_0 = x_o\vec{i} + y_0\vec{j}$, com origem em O, a extremidade do vetor $\vec{v}_0$ é o ponto $M(x_0, y_0)$, imagem geométrica do número complexo $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + yi$ e, portanto, ψ é uma aplicação sobrejetiva. Além disso, sejam $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i \in \mathbb{C}$ tais que $z_1 = z_2$. Então,

$$z_1 = z_2 \Rightarrow x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ e \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow M_1(z_1) = M_2(z_2) \Rightarrow \overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{OM}_2 \Rightarrow \psi(z_1) = \psi(z_2).$$

Neste momento temos as seguintes características do conjunto dos números complexos:

1. $\mathbb{C}$ é um corpo.

2. $\mathbb{C}$ é um $\mathbb{R}-$espaço vetorial de dimensão dois; $\beta = \{1, i\}$ é a base canônica de $\mathbb{C}$ com relação a $\mathbb{R}$.

3. $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C} \leftrightarrow V$, onde V é o conjunto de vetores do plano.

Falta-nos ainda uma forma de medir distâncias entre números complexos.

Definição 3.3 O módulo de um número complexo

O módulo de um número complexo $z = (x, y) = x + yi$ é a distância (euclidiana) entre sua imagem geométrica, $M(x, y)$, e a origem, O, do plano complexo.

Notação: $|z| = d(M, O)$; $|z|$ é o módulo do número complexo z

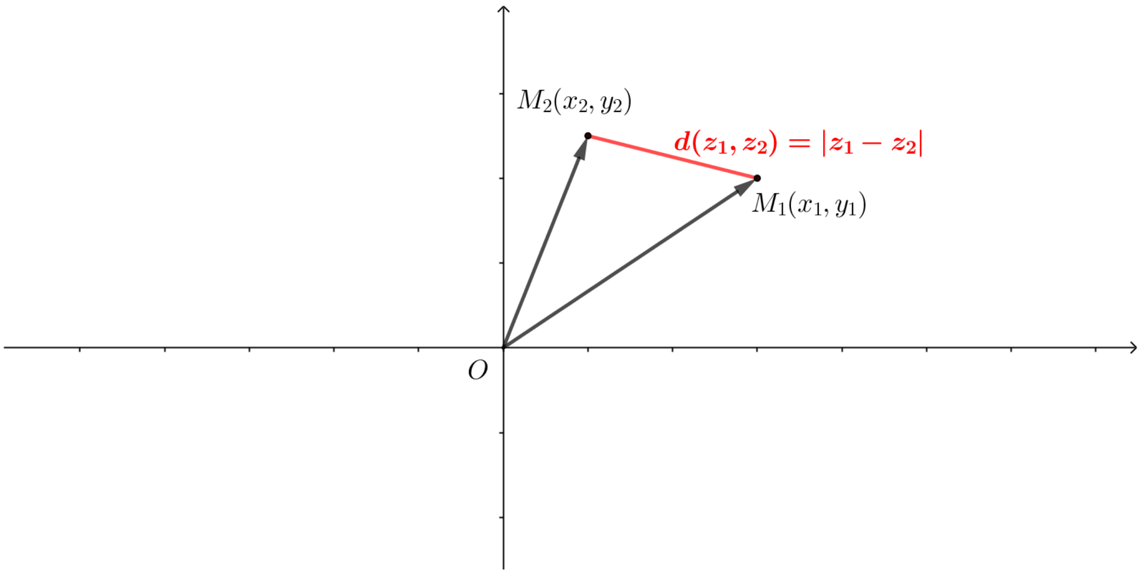
Segue imediatamente da definição que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Observemos que $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0, \forall z$. Além disso $|z|=0$ se, e somente se, $\sqrt{x^2+y^2}=0$ e, consequentemente, $x=y=0$. Então $|z|=0 \Leftrightarrow x=y=0 \Leftrightarrow z=0$.

Definição 3.4 Distância entre números complexos

Sejam $z_1=x_1+y_1 i$ e $z_2=x_2+y_2 i$ dois números complexos arbitrários, a *distância*, entre z_1 e z_2 é $d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$ (ver figura 2).

Figura 2 – Distância entre dois números complexos



Fonte: elaborada pelo autor.

Notemos que:

$$d(z_1,z_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=d(z_2,z_1).$$

$\therefore\ d(z_1,z_2)=d(z_2,z_1), \forall z_1,z_2\in\mathbb{Z}$ e, por definição, $d(z_1,z_2)\geq 0, \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$ e $d(z_1,z_2)=0$ se, e somente se, $z_1=z_2$.

Sejam z_1, z_2 e z_3 números complexos, então

$$d\left(z_1, z_2\right) = \left|z_1 - z_2\right| = \left|z_1 - z_3 + z_3 - z_2\right| =$$
$$= \left|\left(z_1 - z_3\right) + \left(z_3 - z_2\right)\right| \le \left|z_1 - z_3\right| + \left|z_3 - z_2\right| = d\left(z_1, z_3\right) + d\left(z_3, z_2\right)$$

$$\therefore \; d\left(z_1, z_2\right) \le d\left(z_1, z_3\right) + d\left(z_3, z_2\right), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Além disso, temos $d\left(z_1, z_2\right) = d\left(z_1, z_3\right) + d\left(z_3, z_2\right)$ se, e somente se, M_1, M_2 e M_3 , as imagens geométricas de z_1, z_2 e z_3, respectivamente, são pontos colineares no plano complexo. Logo, se, e somente se, $z_3 - z_1 = k\left(z_2 - z_3\right)$, para algum $k \in \mathbb{R}, k > 0$.

Portanto, está definida sobre $\mathbb{C}$ uma distância,

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \left[0, \infty\right); d\left(z_1, z_2\right) = \left|z_1 - z_2\right|,$$

que goza das seguintes propriedades:

(D1) Positividade e não degenerência

$$d\left(z_1, z_2\right) \ge 0, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ e } d\left(z_1, z_2\right) = 0 \text{ se, e somente se, } z_1 = z_2.$$

(D2) Simetria

$$d\left(z_1, z_2\right) = d\left(z_2, z_1\right), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

(D3) Desigualdade triangular

$$d\left(z_1, z_2\right) \le d\left(z_1, z_3\right) + d\left(z_3, z_2\right), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Portanto, temos o seguinte

Teorema 3.3

O par $\left(\mathbb{C}, d\right)$ é um espaço métrico.

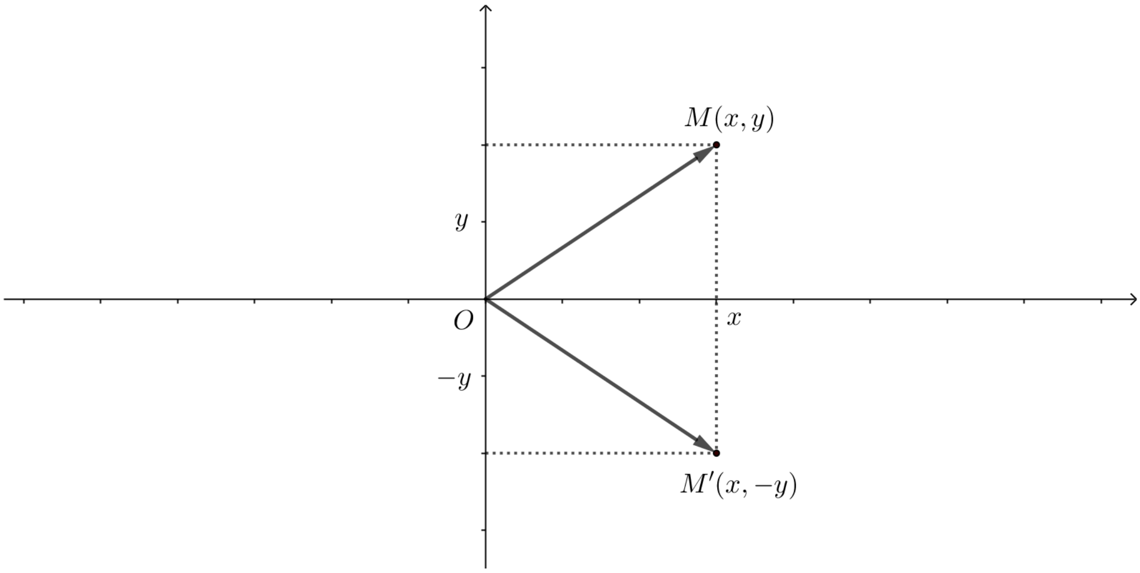
4 CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Definição 4.1 Conjugado de um número complexo

Considere a função $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$; $f(z)=x-yi, \forall z\in\mathbb{C},$ $z=x+yi$. A função f recebe o nome de *conjugação* do número complexo z; indica-se o *conjugado* de um número complexo z por $\overline{z}$.

$$\therefore\ f:\mathbb{C}\to\mathbb{C};\ f(z)=\overline{z}\text{, isto é, } \overline{z}=\overline{x+yi}=x-yi.$$

Figura 3 – Conjugação



Fonte: elaborada pelo autor.

Seja $M(x,y)$ a imagem geométrica de $z=x+yi$. Observemos que a imagem geométrica de $\overline{z}=x-yi$ é o ponto $M^{'}(x,-y)$. Isto é, $M^{'}$ é a reflexão de M em relação ao eixo real do plano complexo.

Além disso, f é bijetiva. De fato, dado $M(x,y)$, imagem geométrica do número complexo $z=x+yi$ então $M_0(x,-y)$, imagem geométrica do número complexo $z'=x-yi$, é tal que $f(z')=\overline{z'}=\overline{x-yi}=x-(-y)i=x+yi=z.$ Logo, f é sobrejetiva.

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que $f(z_1) = f(z_2)$, então

$$\overline{z_1} = \overline{z_2} \Rightarrow x_1 - y_1 i = x_2 - y_2 i \Rightarrow (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) i = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ e \\ y_2 - y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ e \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow z_1 = z_2 \text{ e, portanto, } f \text{ é injetiva.}$$

Observemos também que:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |\overline{z}|$$

Portanto, $|z| = |\overline{z}|, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Logo, a conjugação em $\mathbb{C}$ preserva o módulo de um número complexo.

Vamos, agora, retornar ao conceito de divisão em $\mathbb{C}$.

Dados $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + y_2 i \in \mathbb{C}$, com $z_2 \neq 0$, então o número complexo $z = (x, y) = x + yi$ chama-se *quociente* de z_1 por z_2 se, e somente se, $z_2 \cdot z = z_1$ e indica-se $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Vamos rever a obtenção de z, usando-nos da conjugação:

$$z_2 \cdot z = z_1 \qquad (1)$$

Como $z_2 \neq 0$, vamos multiplicar (1), dos dois lados, por $\overline{z}_2$:

$$\overline{z}_2 \cdot (z_2 \cdot z) = \overline{z}_2 \cdot z_1 \Rightarrow (\overline{z}_2 \cdot z_2) z = z_1 \cdot z_2 \Rightarrow |z_2| \cdot z = z_1 \cdot \overline{z}_2 \Rightarrow z = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Observe que:

$$z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} i = \frac{x_2 - y_2 i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{\overline{z}_2}{|z_2|^2} .$$

Consequentemente,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} .$$

Exemplo 4.1

Calcular $z = \frac{5+i}{3-4i} + \frac{1}{4+3i}$.

Resolução.

$$z = \frac{5+i}{3-4i} + \frac{1}{4+3i} = \frac{(5+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} + \frac{(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = -\frac{11+23i}{9-16i^2} + \frac{4-3i}{16-9i^2} =$$

$$= \frac{11+23i}{25} + \frac{4-3i}{25} = \frac{15+20i}{25} = \frac{5(3+4i)}{25} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} i$$

$$\therefore \quad z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} i .$$

Teorema 4.1 Propriedades do conjugado de um número complexo

(1) $z = \overline{z}$ se, e somente se, $z \in \mathbb{R}$;

(2) $z = \overline{\overline{z}}, \forall z \in \mathbb{C}$ (a conjugação é idempotente);

(3) $z \cdot \overline{z} = |z|^2, \forall z \in \mathbb{C}$;

(4) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (o conjugado da soma é a soma dos conjugados);

(5) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (o conjugado do produto é o produto dos conjugados);

(6) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}, \forall z \in \mathbb{C}^*$ (o conjugado do inverso é o inverso do conjugado);

(7) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, com $z_2 \neq 0$ (o conjugado da divisão é a divisão dos conjugados);

(8) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ e $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}, \forall z \in \mathbb{C}$.

Demonstração.

(1) Seja $z \in \mathbb{C}$; $z = x + yi$ então $z = \overline{z} \Leftrightarrow x + yi = x - yi \Leftrightarrow 2yi = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;

(2) Seja $z \in \mathbb{C}$; $z = x + yi$ então $\overline{z} = x - yi$ e $\overline{\overline{z}} = x - (-y)i = x + yi = z$;

(3) Seja $z \in \mathbb{C}$; $z = x + yi$ então $\overline{z} = x - yi$;

$$\text{Logo } z \cdot \overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \geq 0 .$$

(4) Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

Então $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i = (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2)i = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

(5) Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, então

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) i} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1) i =$$

$$= (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} ;$$

(6) Seja $z = x + yi, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, então $z \cdot \dfrac{1}{z} = 1$ e, pelos itens (1) e (5), temos:

$$\overline{z \cdot \frac{1}{z}} = \overline{1} \Leftrightarrow \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} \cdot \left(\overline{z^{-1}}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\overline{z^{-1}}\right) = \left(\overline{z}\right)^{-1};$$

(7) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\dfrac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \dfrac{\overline{1}}{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \dfrac{1}{\overline{z_2}} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

(8) Seja $z = x + yi, z \in \mathbb{C}$, então:

$$z + \overline{z} = x + yi + x - yi = 2x = 2\operatorname{Re}(z) \quad \therefore \ \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2};$$

$$e$$

$$z - \overline{z} = x + yi - (x - yi) = 2yi = 2\operatorname{Im}(z)i \quad \therefore \ \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

□

Teorema 4.2 Propriedades do módulo de um número complexo

O módulo de um número complexo goza das seguintes propriedades:

(1) $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$ e $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$;

(2) $|z| \geq 0, \ \forall z \in \mathbb{C}$. Além disso, $|z| = 0$ se, e somente se, $z = 0$;

(3) $|z| = |-z| = |\overline{z}|, \forall z \in \mathbb{C}$;

(4) $z \cdot |z| = |z|^2, \forall z \in \mathbb{C}$;

(5) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

(6) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

(7) $|z^{-1}| = |z|^{-1}, \forall z \in \mathbb{C}^*$;

(8) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0;$

(9) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Demonstração.

Sejam $z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, todos números complexos. Então:

(1) $y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} \Rightarrow |z| \geq |x| \Rightarrow -|z| \leq x \leq |z| \Rightarrow -|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|$

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} \Rightarrow |z| \geq |y| \Rightarrow -|z| \leq y \leq |z| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z|.$$

(2) Já foi demonstrado.

(3) $|z| = |\overline{z}|$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Já foi demonstrado. Vamos mostrar que $|z| = |-z|$. Com efeito, $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = |-z|$.

(4) Já foi demonstrado.

(5) $|z_1 z_2|^2 = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 =$

$$= x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 =$$

$$= x_1^2\left(x_2^2 + y_2^2\right) + y_1^2\left(x_2^2 + y_2^2\right) = \left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

Portanto, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(6) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} =$

$$= |z_1|^2 + \overline{z_1}z_2 + \overline{\overline{z_1}z_2} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2\left|\overline{z_1}z_2\right| + |z_2|^2 =$$

$$= \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$$

Portanto, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (I)

$$|z_1| = |(z_1+z_2)+(-z_2)| \le |z_1+z_2| + |-z_2| = |z_1+z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1| - |z_2| \le |z_1+z_2| \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II), temos:

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

(7) $|z_1^{-1}| = \left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right| = \left|\overline{z}\cdot\frac{1}{|z|^2}\right| = \left|\frac{1}{|z|^2}\right|\cdot|\overline{z}| = \frac{1}{|z|^2}\cdot|z| = \frac{1}{|z|} = |z|^{-1}.$

(8) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1\cdot\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\cdot\left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\cdot\frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$

(9) $|z_1| = |(z_1-z_2)+z_2| \le |z_1-z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1| - |z_2| \le |z_1-z_2|$

$$|z_1-z_2| = |z_1+(-z_2)| \le |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$$

$$\therefore \quad |z_1| - |z_2| \le |z_1-z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

□

Observação importante.

$|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) = |z_1||z_2| \Leftrightarrow z_1 = t\cdot z_2$, onde t é um número real não negativo.

Demonstração.

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tais que $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$. Se $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$, a cadeia de implicações segue imediatamente. Portanto, suponhamos que $z_1 \ne 0$ e $z_2 \ne 0$. Então,

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} =$$

$$= |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) + |z_1|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

$$\text{Portanto, } z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 = 2|z_1||z_2|$$

Notemos que $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}} = 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$ e, consequentemente,

$$\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=|z_1||z_2| \qquad \text{(III)}$$

Suponhamos que $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, com $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, então $z_1\overline{z_2} = (x_1+y_1 i)(x_2 - y_2 i) = (x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1 - x_1y_2)i$. Por (1), segue-se que

$$x_1x_2+y_1y_2 = \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} \Rightarrow (x_1y_2-x_2y_1)^2 = 0 \Rightarrow x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

$$\text{Portanto, } z_1\overline{z_2}\in\mathbb{R}$$

$$\text{Por sua vez, } z_1\overline{z_2} = |z_1||z_2| = k > 0\text{, pois } z_1 \neq 0 \text{ e } z_2 \neq 0.$$

$$\text{Então, } \left|z_1\overline{z_2}\right|\cdot z_2 = kz_2$$

$$\text{Portanto, } z_1\cdot|z_2|^2 = kz_2 \overset{z_2\neq 0}{\Rightarrow} z_1 = \underbrace{\frac{k}{|z_2|^2}}_{t>0}\cdot z_2$$

Fazendo $t = \dfrac{k}{|z_2|^2}\in\mathbb{R}$ e $t>0$, temos:

$$z_1 = tz_2$$

Reciprocamente, se $z_1 = tz_2$, com $t>0$, temos:

(i) Se $t=0$ então $z_1 = z_2 = 0$ e $\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=0$; portanto, $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$;

(ii) Se $t>0$, então

- $z_1 = tz_2$

$$\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=\frac{1}{2}\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}\right)=\frac{1}{2}\left((tz_2)\overline{z_2}+\overline{(tz_2)\overline{z_2}}\right)=\frac{1}{2}\left(t\left(z_2\overline{z_2}\right)+\overline{t\left(z_2\overline{z_2}\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(t|z_2|^2+\overline{t|z_2|^2}\right)=t|z_2|^2=t|z_2||z_2|=|t||z_2||z_2|=|tz_2||z_2|=|z_1||z_2|.$$

Finalmente,

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=$$

$$=|z_1|^2+\underbrace{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}}_{2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)}+|z_2|^2=|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2=\left(|z_1|+|z_2|\right)^2$$

Portanto, $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$.

□

5 POTÊNCIAS INTEIRAS DE UM NÚMERO COMPLEXO NÃO NULO

Definição 5.1 Seja $z \in \mathbb{C};\ z \neq 0$, então:

$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ z^1 = z \\ z^n = z \cdot z^{n-1}, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2 \\ z^n = \left(z^{-1}\right)^{-n}, \forall n \in \mathbb{Z}, n < 0 \end{cases}$$

Além disso, para todo inteiro m, $m \geq 1$, temos:

$$0^m = 0.$$

Teorema 5.1 Propriedades das potências inteiras de um número complexo

Para todos os números complexos $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ e para todos os inteiros m e n :

(P1) $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$;

(P2) $\dfrac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$;

(P3) $\left(z^m\right)^n = z^{m \cdot n}$;

P4) $\left(z_1 \cdot z_2\right)^n = z_1^n \cdot z_2^n$;

(P5) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n = \dfrac{z_1^n}{z_2^n}$.

Demonstração:

Observemos que mesmo quando $n \in \mathbb{Z}$ e $n < 0$, para todo $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, $z^n = z \cdot z^{n-1}$. Com efeito, se $n \in \mathbb{Z}$ e $n < 0$, então $-n = p > 0$ e, portanto

$$z \cdot z^{n-1} = z \cdot \left(z^{-1}\right)^{p+1} = z \cdot \left[\left(z^{-1}\right)\left(z^{-1}\right)^p\right] = \left(z \cdot z^{-1}\right)\left(z^{-1}\right)^p = \left(z^{-1}\right)^p = \left(z^{-1}\right)^{-n} = z^n$$

(P1) Suponhamos que um dos expoentes é inteiro e não negativo. Por exemplo, $n \geq 0$ e fixemos m. Por indução sobre n, temos:

• Se $n = 0$, então $z^m \cdot z^0 = z^m \cdot 1 = z^{m+0}$.

• Suponhamos que para algum inteiro $r, r \geq 0$, tenhamos

$$z^m \cdot z^r = z^{m+r} \quad .$$

Então,

$$z^m \cdot z^{r+1} = z^m \cdot (z^r \cdot z) \underset{\substack{\text{a muliplicação} \\ \text{em } \mathbb{C} \text{ é} \\ \text{associativa}}}{=} \left(z^m \cdot z^r\right) \cdot z \underset{\textit{Hipótese}}{=} z^{m+r} \cdot z = z^{(m+r)+1} \quad .$$

Por último, se $m, n \in \mathbb{Z}$, com $m < 0$ e $n < 0$, então $m + n < 0$ e, consequentemente,

$$z^{m+n} = \left(z^{-1}\right)^{-m-n} = \left(z^{-1}\right)^{(-m)+(-n)} = \left(z^{-1}\right)^{-m} \cdot \left(z^{-1}\right)^{-n} = z^m \cdot z^n \quad .$$

Também notemos que

$$\left(z^n\right)^{-1} = \left(z^{-1}\right)^n = \left(\frac{1}{z}\right)^n = z^{-n}, \forall \mathrm{z} \in \mathbb{C}^* \text{ e } \forall \mathrm{n} \in \mathbb{Z}.$$

De fato, pela propriedade (P1), temos:

(i) $z^{-n} \cdot z^n = z^{-n+n} = z^0 = 1.$ Portanto, $\left(z^n\right)^{-1} = z^{-n}$ e $\left(z^{-n}\right)^{-1} = z^n$ (inversos muliplicativos) .

(ii) $\left(z^n\right)^{-1} = \left(z^{-1}\right)^n$

Por indução finita, temos:

• Se $n = 0$, então $\left(z^0\right)^{-1} = 1^{-1} = 1 = \left(z^{-1}\right)^0$.

• Suponhamos que $\left(z^r\right)^{-1} = \left(z^{-1}\right)^r, r \in \mathbb{Z}; r \geq 0.$ Então,

$$\left(z^{-1}\right)^{r+1} \underset{(\mathrm{P1})}{=} \left(z^{-1}\right)^r \cdot \left(z^{-1}\right) \underset{\text{Hipótese}}{=} \left(z^r\right)^{-1} \cdot z^{-1} \underset{(i)}{=} z^{-r} \cdot z^{-1} \underset{(\mathrm{P1})}{=} z^{-(r+1)} = \left(z^{r+1}\right)^{-1}.$$

Se $n \in \mathbb{R}$ e $n < 0$, então

$$\left(z^n\right)^{-1} \underset{\text{Por definição}}{=} \left[\left(z^{-1}\right)^{-n}\right]^{-1} \underset{(i)}{=} \left(z^{-1}\right)^n .$$

(P2) $\dfrac{z^m}{z^n} = z^m \cdot \dfrac{1}{z^n} = z^m \cdot \left(\dfrac{1}{z}\right)^n = z^m \left(z^{-1}\right)^n = z^m \cdot z^{-n} = z^{m+(-n)} = z^{m-n}$.

(P3)

i) $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 0$.

Fixemos m e provemos por indução sobre n.

Para $n = 0$, temos:

$$\left(z^m\right)^0 = 1 = z^{m \cdot 0}$$

Suponhamos que para $r \in \mathbb{Z},\ r \geq 0$, temos:

$$\left(z^m\right)^r = z^{m \cdot r} \quad (1)$$

Então, multiplicando os dois lados de (1) por a^m , temos:

$$z^m \cdot \left(z^m\right)^r = z^m \cdot z^{m \cdot r} \Rightarrow \left(z^m\right)^{r+1} = z^{m+mr} = z^{mr+m} = z^{m(r+1)}$$

(ii) $m, n \in \mathbb{Z}$, com $m \geq 0$ e $n \leq 0$

$$\left(z^m\right)^n = \left(z^m\right)^{-n} = \left(\left(z^m\right)^{-1}\right)^{-n} = \left(\left(z^{-1}\right)^m\right)^{-n} = \left(z^{-1}\right)^{-mn} = z^{mn}$$

(iii) $m, n \in \mathbb{Z}$, com $m \leq 0$ e $n \geq 0$

$$\left(z^m\right)^n = \left(\left(z^{-1}\right)^{-m}\right)^n = \left(z^{-1}\right)^{-mn} = z^{mn}$$

(iv) $m, n \in \mathbb{Z}$, com $m \leq 0$ e $n \leq 0$

$$\left(z^m\right)^n = \left(\left(z^{-1}\right)^{-m}\right)^n = \left(z^{-1}\right)^{-mn} = z^{mn}$$

(P4) Se $n = 0$, então

$$\left(z_1 \cdot z_2\right)^0 = 1 \text{ e } z_1^0 = 1 \text{ e } z_2^0 = 1$$

$$\therefore \left(z_1 \cdot z_2\right)^0 = z_1^0 \cdot z_2^0$$

Suponhamos que $\left(z_1 \cdot z_2\right)^r = z_1^r \cdot z_2^r$, $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$. Então

$$\left(z_1 \cdot z_2\right)^{r+1} = \left(z_1 \cdot z_2\right)^r \cdot \left(z_1 \cdot z_2\right) = \left(z_1^r \cdot z_2^r\right) \cdot \left(z_1 \cdot z_2\right) = \left(z_1^r \cdot z_1\right) \cdot \left(z_2^r \cdot z_2\right) = z_1^{r+1} \cdot z_2^{r+1}$$

Se $n < 0$, então

(i) $\left(z_1 \cdot z_2\right)^{-1} = z_1^{-1} \cdot z_2^{-1}$; de fato,

$$\left(z_1 \cdot z_2\right)^{-1} = \frac{1}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} = z_1^{-1} \cdot z_2^{-1}$$

(ii) $\left(z_1 \cdot z_2\right)^n = \left(\left(z_1 \cdot z_2\right)^{-1}\right)^{-n} = \left(z_1^{-1} \cdot z_2^{-1}\right)^{-n} = \left(z_1^{-1}\right)^{-n} : \left(z_2^{-1}\right)^{-n} = z_1^n \cdot z_2^n$

(P5) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n = \left(z_1 \cdot z_2^{-1}\right)^n = z_1^n \cdot \left(z^{-1}\right)^n = z_1^n \cdot \left(\dfrac{1}{z_2}\right)^n = z_1^n \cdot \dfrac{1}{z_2^n} = \dfrac{z_1^n}{z_2^n}$

5.1 POTÊNCIAS INTEIRAS DE i

Observemos a tábua de multiplicação (de números complexos) do conjunto $G = \{1, i, -1, -i\}$. Como todos têm módulo unitário, suas imagens geométricas são os vértices de um quadrado inscrito na circunferência unitária (circunferência de centro na origem e raio unitário).

Tabela 1 – Tábua de multiplicação do conjunto $G = \{1, i, -1, -i\}$

$\bullet$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Fonte: elaborada pelo autor.

Observemos que:

(i) $-i$ e i são inversos multiplicativos um do outro, já que $(-i) \cdot i = i \cdot (-i) = 1$

(ii) $i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$

$(-i)^0 = 1$; $(-i)^1 = -i$; $(-i)^2 = -1$; $(-i)^3 = -i$; $(-i)^4 = 1$

(iii) Como $G = \{1, i, -1, -i\}$ é fechado para a multiplicação de números complexos, então

$$i^n \in G \ , \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Pelo algoritmo euclidiano de divisão, segue-se que $i^n = i^{4k+r}$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $r = 0,1,2$ ou 3.

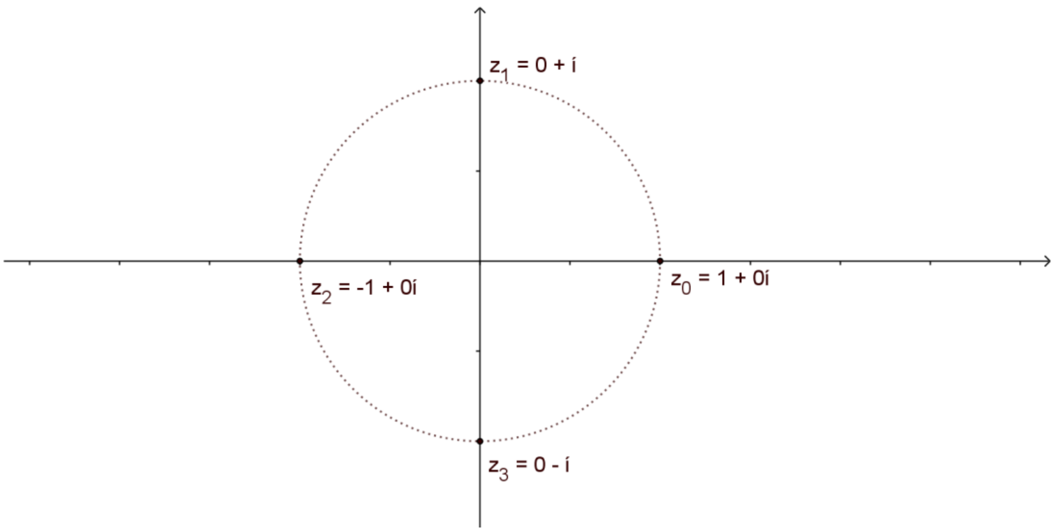
Se $r = 0$, então $i^n = i^{4k} = \left(i^4\right)^k = 1$;

Se $r = 1$, então $i^n = i^{4k+1} = \left(i^4\right)^k \cdot i = 1 \cdot i = i$;

Se $r = 2$, então $i^n = i^{4k+2} = \left(i^4\right)^k \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$;

Se $r = 3$, então $i^n = i^{4k+3} = \left(i^4\right)^k \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$;

Figura 4 – Potências inteiras de i



Fonte: elaborada pelo autor.

Demonstramos, portanto, o teorema seguinte.

Teorema 5.2.1 Potências inteiras de i

Para qualquer número inteiro, n, $i^n \in \{1, i, -1, -i\}$, onde i é a unidade imaginária. Além disso:

$$i^n = i^r,$$

onde r é o (único) resto da divisão euclidiana de n por 4.

Exemplos

$$i^{105}=i^{(4\cdot 26+1)}=\left(i^{4}\right)^{26}\cdot i=1\cdot i=i$$

$$i^{-701}=i^{(4\cdot(-176)+3)}=\left(i^{4}\right)^{-176}\cdot i^{3}=1\cdot i^{3}=-i$$

Um fato importante sobre as potências inteiras de i refere-se à estrutura algébrica do par $(G,\cdot)$, que é um grupo cíclico de ordem 4.

Observemos que multiplicar um número complexo $z=x+yi$, $z\neq 0$, pela unidade imaginária, i, é equivalente a uma rotação do número complexo z de $\frac{\pi}{2}$ radianos em torno da origem no sentido anti-horário. Analogamente, a multiplicação de um número complexo por $-i$ é equivalente a uma rotação do número complexo z de $\frac{\pi}{2}$ radianos em torno da origem no sentido horário.

Portanto, i^2 pode ser interpretado como duas multiplicações consecutivas do número complexo $z=1$ por i, isto é, duas rotações consecutivas de $\frac{\pi}{2}$ radianos do número complexo $z=1$ em torno da origem no sentido anti-horário. Assim, $i^2=-1$.

6 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO POR NÚMERO REAL

6.1 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$ números complexos tais que $\overrightarrow{v_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ e $\overrightarrow{v_1} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, são, respectivamente, seus vetores associados. Então,

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

e

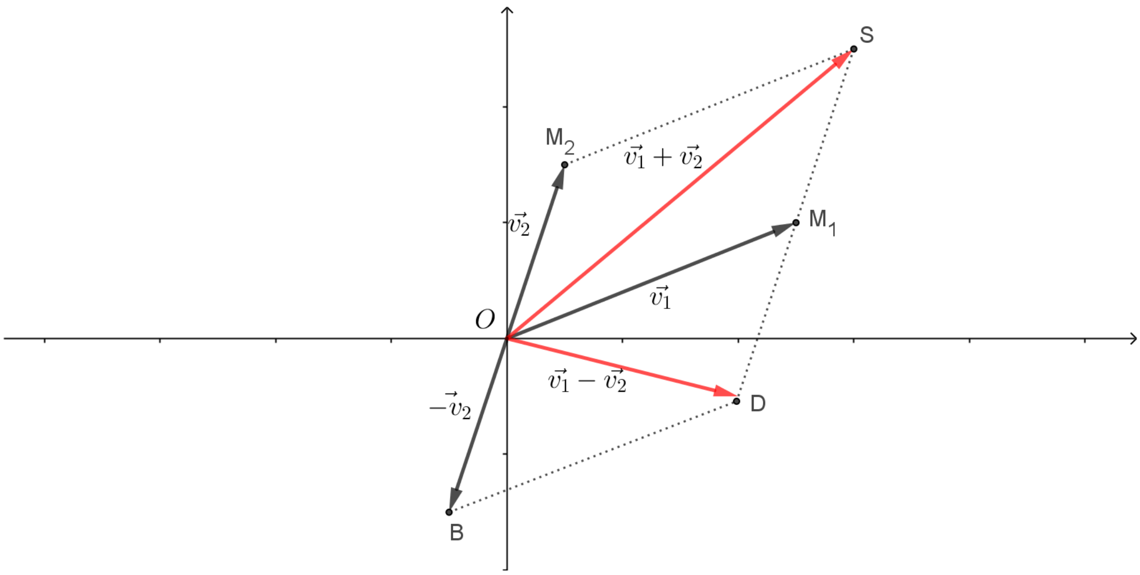
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

A soma e a diferença dos vetores são:

$$\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} \text{ e } \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}$$

Logo, $z_1 + z_2$ corresponde a $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ e $z_1 - z_2$, por sua vez, corresponde a $\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$ (ver figura 5).

Figura 5 – Adição e subtração de números complexos



Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto, a adição e a subtração de números complexos correspondem, geometricamente, à adição e à subtração de vetores do plano (regra do paralelogramo).

6.2 MULTIPLICAÇÃO POR UM NÚMERO REAL

Seja $z = x + yi$ um número complexo. Então $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ é seu vetor correspondente. Se k é um número real, então $kz = kx + kyi$, cujo vetor correspondente é

$$k\vec{v} = (kx)\vec{i} + (ky)\vec{j}\,.$$

Observemos que se $k > 0$, então os vetores $k\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção e mesmo sentido, além disso

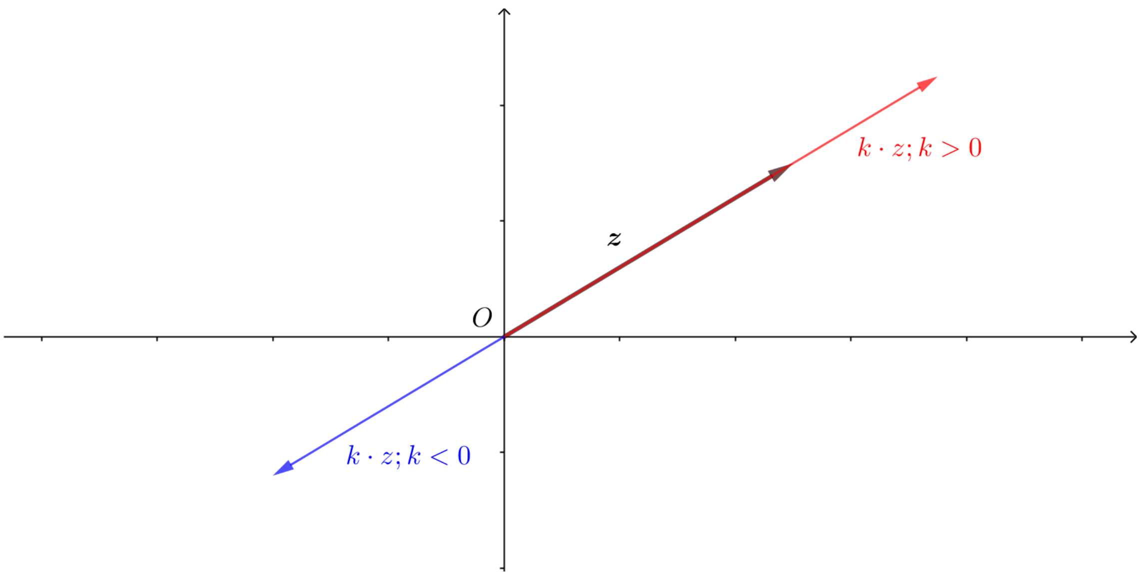
$$|k\vec{v}| = |k||\vec{v}| = k|\vec{v}|\,.$$

Por sua vez, se $k < 0$, então os vetores $k\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção e sentidos opostos, e

$$|k\vec{v}| = |k||\vec{v}| = -k|\vec{v}| \text{ (ver figura 6).}$$

Se $k = 0$, então $k\vec{v} = \vec{0}$.

Figura 6 – Multiplicação de um número complexo por um número real

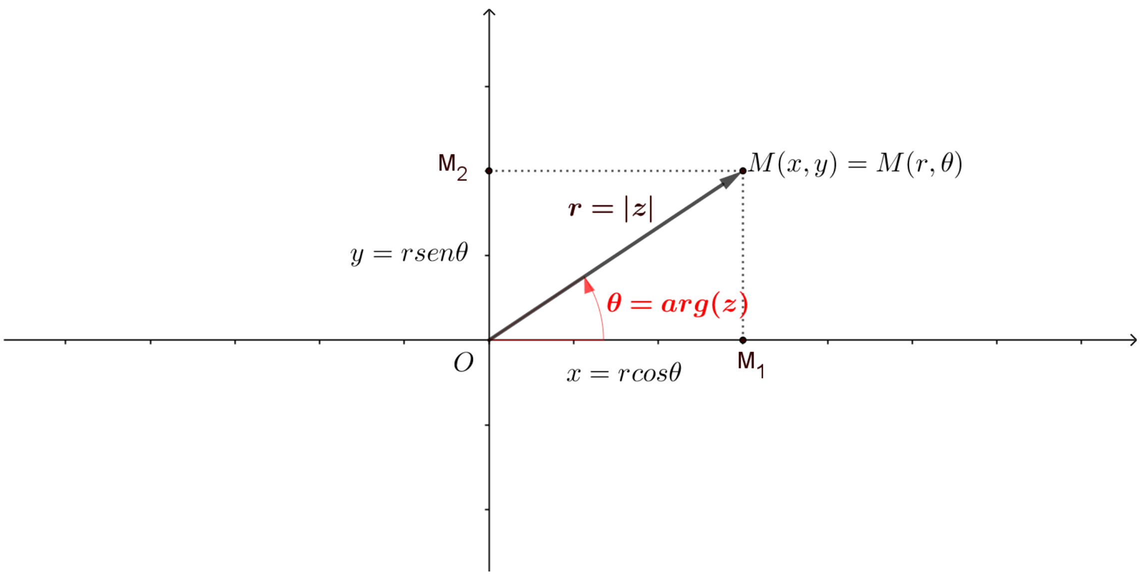


Fonte: elaborada pelo autor.

7 FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Definição 7.1 Dado um número complexo não nulo $z = x + yi$, chama-se *argumento principal de* z, o ângulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, determinado pelo semieixo real positivo e o vetor $\overrightarrow{OM}$, onde M é a imagem geométrica de z. Notação: $\theta = \arg(z)$ (ver figura 7). Se $z = 0$, então $M = (0,0)$; portanto, $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ e não se define $\theta = \arg(z)$.

Figura 7 – Forma trigonométrica ou polar de um número complexo



Fonte: elaborada pelo autor.

Definição 7.2 Forma trigonométrica ou polar dos números complexos

Consideremos o número complexo não nulo, $z = x + yi$, cuja imagem geométrica é o ponto $M(x, y)$, representado na figura 8. O triângulo OMM_1 é retângulo em M_1, logo:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

- $$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{OM_1}{OM} = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{x}{r} \\ e \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{MM_1}{OM} = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ e \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Portanto,

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \text{ ou } z = r^{\underline{|\theta}} \ ,$$

onde $r \in [0, \infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi)$, são as coordenadas polares da imagem geométrica, M , de z.

Notemos que $\theta = \arg z$ é a menor determinação positiva de um arco $\theta^*; \theta^* = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Isto é, $z = r(\cos\theta^* + i\operatorname{sen}\theta^*) = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, uma vez que $\theta - \theta^* = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (θ e θ^* são côngruos módulo 2π).

Se $z = 0$, então $z = 0(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = 0, \forall\theta \in \mathbb{R}$. Portanto, se $z \neq 0$, $r = |z|$ e $\theta = \arg z$ estão univocamente determinados.

Assim, dois números complexos não nulos, z_1 e z_2 , onde

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) \text{ e } z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2),$$

são iguais se, e somente se,

$$\begin{cases} r_1 = r_2 \\ e \\ \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} .$$

Exemplo 7.1 Vamos encontrar a forma trigonométrica do seguintes número complexo:

$$z = -2 + 2i. \ .$$

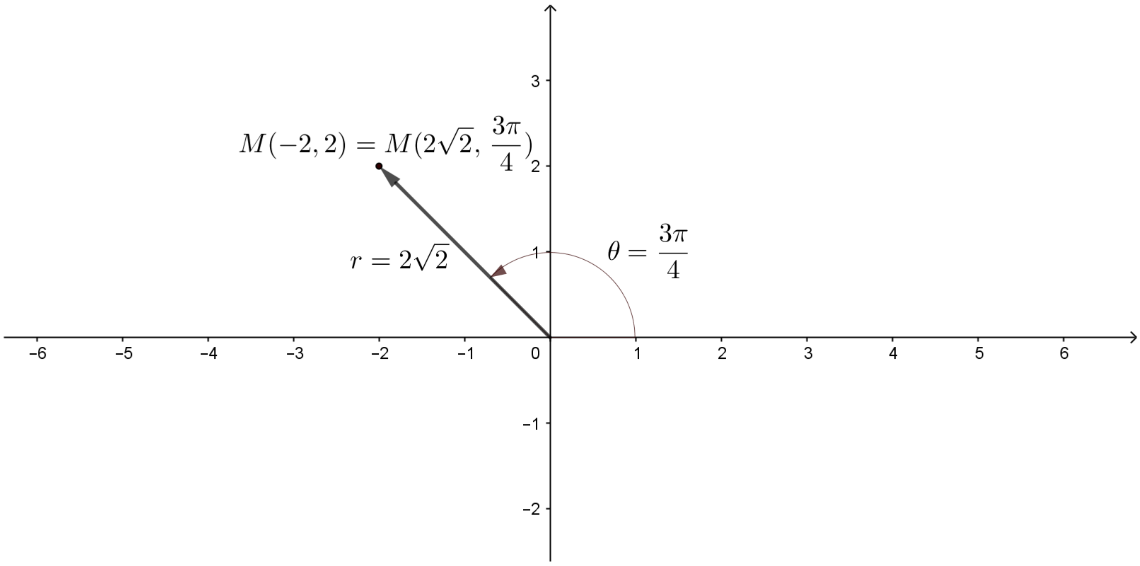
$$r_1 = |z_1| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{x_1}{r_1} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta_1 &= \frac{y_1}{r_1} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \overset{\theta_1 \in 2^\circ \text{ quadrante}}{\Rightarrow} \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Portanto,

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right) .$$

Figura 8 – Forma trigonométrica do número complexo $z = -2 + 2i$



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplo 7.2 Dado o número complexo $z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\,i\right)$, vamos escrevê-lo na forma algébrica.

$$z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\,i\right), \text{ mas}$$

$$\cos\theta = \cos\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\frac{11\pi}{6} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$r = |z| = 2$$

$$\text{Logo, } z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

Exemplo 7.3 Casos notáveis

- $1 = \cos 0 + \operatorname{sen} 0i$;
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} i$
- $-1 = \cos\pi + \operatorname{sen}\pi i$;
- $-i = \cos\frac{3\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} i$.

7.1 MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

7.1.1 Multiplicação

Dados $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1\right)$ e $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2\right)$, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = \left[r_1\left(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1\right)\right]\cdot\left[r_2\left(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2\right)\right] =$$

$$= r_1 r_2\left(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1\right)\left(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2\right) = r_1 r_2\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\operatorname{sen}\left(\theta_1+\theta_2\right)\right) \quad (1)$$

Notemos que, novamente, $\left|z_1 z_2\right| = \left|z_1\right|\cdot\left|z_2\right|$. Além disso, a multiplicação de números complexos pode ser estendida para um número de fatores n, $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 2$. Isto é, seja $z_k = r_k\left(\cos\theta_k + i\cos\theta_k\right)$, $k = 1, 2, ..., n$. Então

$$z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_k = r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_k\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2+...+\theta_k\right) + i\operatorname{sen}\left(\theta_1+\theta_2+...+\theta_k\right)\right),$$

cuja demonstração faremos por indução finita.

Já justificamos que a fórmula é válida para $n = 2$. Portanto, suponhamos que ela é válida para algum $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, isto é, se $z_k = r_k\left(\cos\theta_k + i\operatorname{sen}\theta_k\right)$, $k = 1, 2, ..., n$, então

$$z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_k = r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_k\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2+...+\theta_k\right) + i\operatorname{sen}\left(\theta_1+\theta_2+...+\theta_k\right)\right).$$

Logo,

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_{k+1} = \left(z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_k\right) z_{k+1} =$$

$$= \left[r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \ldots \cdot r_k \left(\cos\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_k\right) + i\mathrm{sen}\left(\cos\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_k\right)\right]\left[r_{k+1}\left(\cos\theta_{k+1} + i\mathrm{sen}\theta_{k+1}\right)\right] =$$

$$= \left(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_k\right) r_{k+1}\left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_k\right) + \theta_{k+1}\right] + i\mathrm{sen}\left[\left(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_k\right) + \theta_{k+1}\right] =$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{k+1}\left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{k+1}\right) + i\mathrm{sen}\left(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{k+1}\right)\right]$$

Provamos, portanto, os dois teoremas seguintes.

Teorema 7.1 Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tais que $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\mathrm{sen}\theta_1\right)$ e $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\mathrm{sen}\theta_2\right)$, então

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left(\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\mathrm{sen}\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right) \qquad (1)$$

Teorema 7.2 Sejam $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, com $n \geq 2$, números complexos. Então

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \prod_{k=1}^{n} r_k\left(\cos\sum_{k=1}^{n}\theta_k + i\mathrm{sen}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) \qquad (2)$$

Exemplo 7.4 Sejam $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = \sqrt{3} - i$. Então

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right),\ z_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\mathrm{sen}\frac{11\pi}{6}\right),$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{11\pi}{6}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{11\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{25\pi}{12} + i\mathrm{sen}\frac{25\pi}{12}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{12}\right).$$

Teorema 7.3 (1ª Fórmula de De Moivre) Para $z = r\left(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta\right)$, $z \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$z^n = r^n\left(\cos\left(n\theta\right) + i\mathrm{sen}\left(n\theta\right)\right).$$

Demonstração: Suponhamos que $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$, apliquemos a fórmula (2) com $z = z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, e obteremos

$$z^n = r\cdot r\cdot\ldots\cdot r\left(\cos\left(\theta+\theta+\ldots+\theta\right)+i\mathrm{sen}\left(\theta+\theta+\ldots+\theta\right)\right)=r^n\left(\cos\left(n\theta\right)+i\mathrm{sen}\left(n\theta\right)\right).$$

Notemos que para $n=0$, $z^0=r^0\left(\cos 0+i\mathrm{sen}0\right)=1$. Para $n\in\mathbb{Z}$ e $n<0$, temos $n=-p$, para algum $p>0$. Então

$$z^n = z^{-p}=\left(z^p\right)^{-1}=\frac{1}{z^p}=\frac{1}{r^p\left(\cos\left(p\theta\right)+i\mathrm{sen}\left(p\theta\right)\right)}\cdot\frac{\left(\cos\left(p\theta\right)-i\mathrm{sen}\left(p\theta\right)\right)}{\left(\cos\left(p\theta\right)-i\mathrm{sen}\left(p\theta\right)\right)}=$$

$$=r^{-p}\,\frac{\cos\left(p\theta\right)-i\mathrm{sen}\left(p\theta\right)}{\cos^2\left(p\theta\right)+\mathrm{sen}^2\left(p\theta\right)}=r^{-p}\left[\cos\left(-p\theta\right)+i\mathrm{sen}\left(-p\theta\right)\right]=$$

$$=r^n\left[\cos\left(n\theta\right)+i\mathrm{sen}\left(n\theta\right)\right].$$

Notemos que:

(i) Novamente, provamos que $\left|z^n\right|=r^n=\left|z\right|^n$

(ii) Se $\left|z\right|=1$, então $\left(\cos\theta+i\mathrm{sen}\theta\right)^n=\cos\left(n\theta\right)+i\mathrm{sen}\left(n\theta\right),\ \forall n\in\mathbb{Z}$.

7.1.2 Divisão

Sejam $z_1=r_1\left(\cos\theta_1+i\mathrm{sen}\theta_1\right)$ e $z_2=r_2\left(\cos\theta_2+i\mathrm{sen}\theta_2\right)$, com $z_2\neq 0$. Então:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\left(\cos\theta_1+i\mathrm{sen}\theta_1\right)}{r_2\left(\cos\theta_2+i\mathrm{sen}\theta_2\right)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1+i\mathrm{sen}\theta_1}{\cos\theta_2+i\mathrm{sen}\theta_2}\cdot\frac{\cos\theta_1-i\mathrm{sen}\theta_1}{\cos\theta_2-i\mathrm{sen}\theta_2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\left(\cos\theta_1+i\mathrm{sen}\theta_1\right)\left(\cos\theta_2-i\mathrm{sen}\theta_2\right)}{\mathrm{sen}^2\theta_2+\cos^2\theta_2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\left(\cos\theta_1\cos\theta_2+\mathrm{sen}\theta_1\mathrm{sen}\theta_2\right)+\left(\mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_2-\mathrm{sen}\theta_2\cos\theta_1\right)i}{1}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+i\mathrm{sen}\left(\theta_1-\theta_2\right)\right).$$

Provamos, portanto, o próximo teorema.

Teorema 7.4 Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, com $z_2 \neq 0$, tais que

$$z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\mathrm{sen}\theta_1\right) \text{ e } z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\mathrm{sen}\theta_2\right), \text{ então}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\mathrm{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right).$$

Observemos que,

(a) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$;

(b) $\dfrac{1}{z} = z^{-1} = \dfrac{1(\cos 0 + i\mathrm{sen}0)}{r(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta} = \dfrac{1}{r}\left(\cos\left(-\theta\right) + i\mathrm{sen}\left(-\theta\right)\right) = \dfrac{1}{r}\cos\theta - i\mathrm{sen}\theta..$

7.1.3 Interpretação geométrica

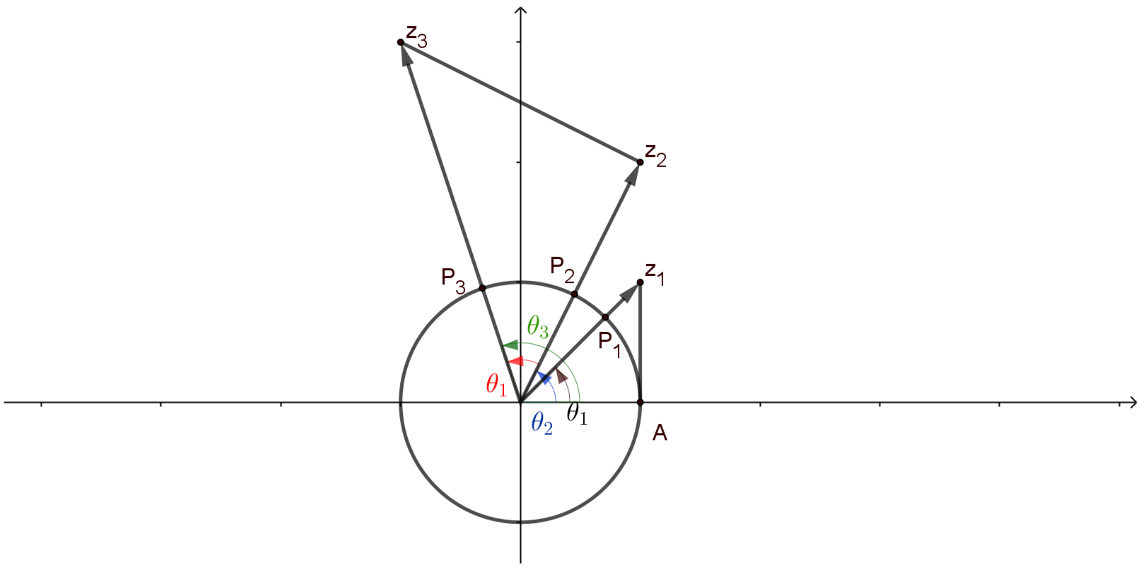
Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tais que $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\mathrm{sen}\theta_1\right)$ e $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\mathrm{sen}\theta_2\right)$, e nas respectivas imagens geométricas em coordenadas polares, $M_1\left(r_1, \theta_1\right)$ e $M_2\left(r_2, \theta_2\right)$. Sejam P_1 e P_2 os pontos de intersecção da circunferência S^1 (cujo centro é a origem do plano cartesiano e de raio unitário) com os raios OM_1 e OM_2 . Tome sobre S^1 o ponto P_3 tal que $\theta_1 + \theta_2$ seja seu argumento principal; marque sobre o raio OP_3 um segmento OM_3, tal que $OM_3 = OM_1 \cdot OM_2$. Seja z_3 o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto $M_3\left(r_1 \cdot r_2, \theta_1 + \theta_2\right)$, isto é z_3 é a imagem geométrica do produto $z_1 \cdot z_2$.

Seja $A(1,0)$ a imagem geométrica do número complexo $1 = 1 + 0i$. Observemos que (ver figura 9):

$$\frac{OM_3}{OM_1} = \frac{OM_2}{1} \text{ , isto é } \frac{OM_3}{OM_1} = \frac{OM_2}{OA}.$$

Além disso, $M_2\hat{O}M_3 = A\hat{O}M_1$. Consequentemente, os triângulos OAM_1 e OM_2M_3 são semelhantes.

Figura 9 – Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica



Fonte: elaborada pelo autor.

Ainda, notemos que (veja figura 9):

(i) $\theta_1 = \theta_3 - \theta_2$

(ii) $OM_1 = \dfrac{OM_3}{OM_2} \Rightarrow |z_1| = \dfrac{|z_3|}{|z_2|}$

Portanto, $z_1 = \dfrac{z_3}{z_2}$.

Definição 7.3 Radiciação em $\mathbb{C}$

Dado o número complexo $z_0 = \rho_0\left(\cos\theta_0 + i\text{sen}\theta_0\right), z_0 \neq 0$, queremos determinar o número complexo $z = \rho\left(\cos\theta + i\text{sen}\theta\right)$, tal que

$$z^n - z_0 = 0, \qquad (1)$$

onde $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$. O número complexo z é denominado de raiz enésima de z_0, e escreve-se

$$z = \sqrt[n]{z_0} \ .$$

Então, por (1), temos:

$$\rho^n \left(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta) \right) = \rho_0 \left(\cos\theta_0 + i\operatorname{sen}\theta_0 \right),$$

e, por definição de igualdade entre números complexos, segue-se que

$$\rho^n = \rho_0 \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{\rho_0}$$

e

$$\begin{cases} \cos(n\theta) = \cos\theta_0 \\ \qquad e \\ \operatorname{sen}(n\theta) = \operatorname{sen}\theta_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} n\theta = \theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \therefore \quad \theta = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{k \cdot 2\pi}{n} \end{array}$$

Como $0 \le \theta < 2\pi$, então $k \in \{0,1,2,...,(n-1)\}$, pois os valores de $k > n-1$ fornecerão argumentos côngruos, módulo 2π, aos anteriores.

Portanto, um número complexo não nulo tem exatamente n raízes enésimas distintas.

Notemos que os argumentos principais das raízes enésimas do número complexo $z_0 = \rho_0 \left(\cos\theta_0 + i\operatorname{sen}\theta_0 \right)$ são:

$$\frac{\theta_0}{n} + \frac{k \cdot 2\pi}{n}, \text{ com } k = 0,1,2,...,(n-1).$$

Então,

$$\text{para } k = 0, \ \theta_1 = \frac{\theta_0}{n}$$

$$\text{para } k = 1, \ \theta_2 = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi}{n}$$

$$\text{para } k = 2, \ \theta_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}$$

$$\cdots$$

$$\text{para } k=(n-1),\ \theta_n=\frac{\theta}{n}+\frac{(n-1)2\pi}{n}.$$

Assim, os argumentos principais das raízes enésimas de z_0 constituem uma progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$. Mais ainda, todas elas têm o mesmo módulo, $\sqrt[n]{\rho_0}$. Logo, suas imagens geométricas estão sobre uma circunferência de centro na origem do plano complexo e raio $\sqrt[n]{\rho_0}$; o fato dos argumentos estarem igualmente espaçados sobre esta circunferência, implica numa divisão dessa circunferência em n partes iguais. Também podemos inferir que os argumentos principais das raízes enésimas de um número complexo diferente de zero são os vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência de centro na origem do plano complexo e raio $\sqrt[n]{\rho_0}$.

Provamos, portanto, o próximo teorema.

Teorema 7.5 Seja $z_0=\rho_0(\cos\theta_0+i\operatorname{sen}\theta_0)$ um número complexo com $\rho_0>0$ e $\theta_0\in[0;2\pi)$. O número z_0 tem exatamente n raízes enésimas distintas, dadas por:

$$z_k=\sqrt[n]{\rho_0}\left(\cos\frac{\theta_0+k2\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\theta_0+k2\pi}{n}\right),$$

$k=0,1,2,\ldots,(n-1)$.

Exemplo 7.5 Encontrar as raízes quartas do número complexo $z=-2-2i$ e representá-las no plano complexo e interpretar geometricamente.

No ensino médio, no último ano, abordar a radiciação em $\mathbb{C}$ é sempre algo desafiador (principalmente em turma heterogêneas). Dar ênfase à fórmula (1) é desastroso.

Uma boa estratégia consiste em utilizar a simetria do problema proposto.

Em primeiro lugar, escrevemos $z=-2-2i$ na forma trigonométrica:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \left.\begin{array}{c} \cos\theta = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

Estamos procurando um número complexo, $z_0 = \rho_0\left(\cos\theta_0 + i\operatorname{sen}\theta_0\right)$, tal que:

$$z_0^4 = \rho_0^4\left(\cos 4\theta_0 + i\operatorname{sen} 4\theta_0\right) = z = 2\sqrt{2}\left(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\right).$$

Portanto, uma das raízes procuradas é:

$$z_0 = \underbrace{\sqrt[4]{2\sqrt{2}}}_{\substack{\text{raiz quarta} \\ \text{do módulo} \\ \text{de } -2-2i}} \left(\cos \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{5\pi}{4}}_{\substack{\text{argumento de} \\ -2-2i \text{ dividido} \\ \text{por } 4}} + i\operatorname{sen}\frac{1}{4}\cdot\frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{16}\right).$$

Há outras? Observemos que (um ótimo momento para uma revisão de trigonometria geral!):

$$4\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{4} + 2\pi \ ;$$

$$4\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{4} + 2\cdot 2\pi \ ;$$

$$4\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{4} + 3\cdot 2\pi$$

Notemos que todos os arcos da lista acima são côngruos (módulo 2π). Logo, há outras raízes quartas de $-2-2i$, a saber:

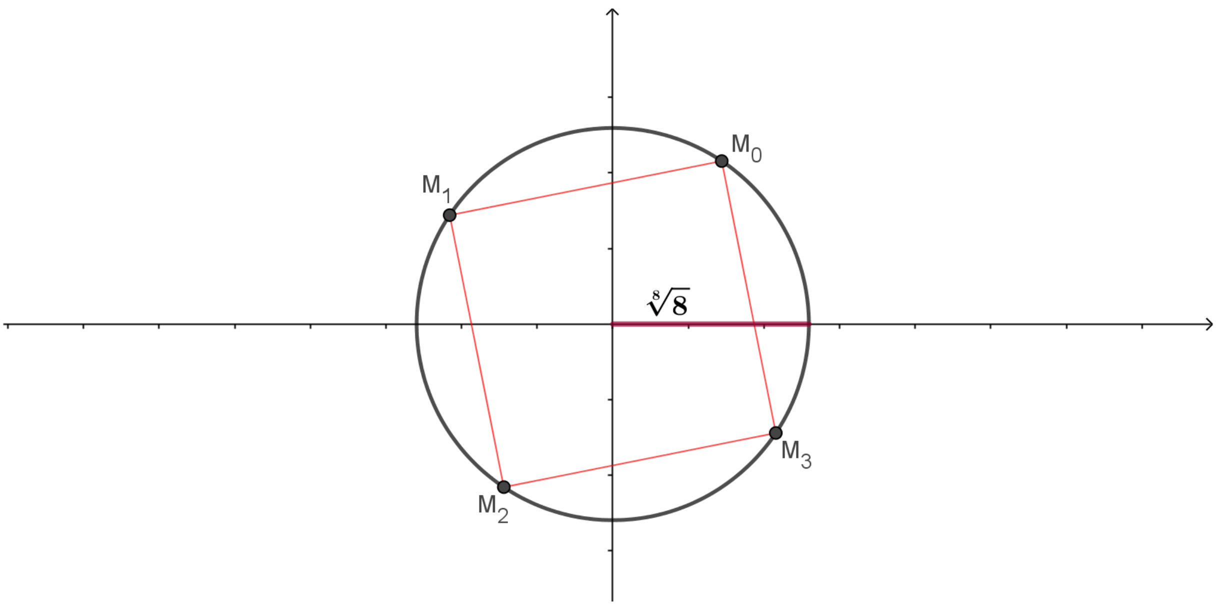
$$z_1 = \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{13\pi}{16} + i\operatorname{sen}\frac{13\pi}{16}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{21\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{21\pi}{16}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{29\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{29\pi}{16}\right).$$

Os argumentos principais de z_0, z_1, z_2 e z_3 (nesta ordem) formam uma progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, cujo primeiro termo é $\frac{1}{4} \cdot \frac{5\pi}{4}$ (o argumento principal de z dividido por 4).

Figura 10 – Raízes quartas de $z = -2 - 2i$



Fonte: elaborada pelo autor.

As imagens geométricas das raízes quartas de $-2-2i$ pertencem a uma circunferência de raio $\sqrt[8]{8}$ e centro na origem do plano complexo; são vértices de um quadrado, pois os argumentos principais dessas raízes formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi}{2}$ radianos.

8 FORMA MATRICIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Consideremos o anel das matrizes quadradas reais de ordem dois munido das operações usuais de adição e multiplicação (além, é óbvio, da definição de igualdade entre matrizes), $M_2(\mathbb{R})$. Então, provemos o seguinte

Teorema 8.1 Um subconjunto das matrizes reais que é um corpo.

O conjunto $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$, munido das operações de adição e multiplicação de matrizes de $M_2(\mathbb{R})$ é um corpo.

Demonstração.

Observemos que $K \subset M_2(\mathbb{R})$ e as operações definidas em K são as mesmas operações definidas em $M_2(\mathbb{R})$. Portanto, a adição em K é comutativa, associativa, a matriz nula de ordem 2 é o elemento neutro da adição e, dado $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K$, seu oposto é a matriz $\begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \in K$.

Além disso, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$ é o elemento neutro da multiplicação ; a multiplicação também é associativa e distributiva (à esquerda e à direita) com relação à adição de matrizes. Todas essas propriedades são herdadas da estrutura de anel com elemento unidade de $M_2(\mathbb{R})$. Vamos provar que a multiplicação em K é comutativa e que todo elemento não nulo de K tem inverso multiplicativo. Com efeito,

(i) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$;

(ii) Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K$, com $a^2+b^2 \neq 0$, então $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \in K$ é seu inverso multiplicativo, pois:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} & \frac{ab-ab}{a^2+b^2} \\ \frac{ab-ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Seja ψ a aplicação:

$$\psi : \mathbb{C} \to K; \psi(z) = \psi(x+yi) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Teorema 8.1 ψ é um isomorfismo entre corpos.

Demonstração.

Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, então

• ψ é um homomorfismo entre $\mathbb{C}$ e K .

$$\psi(z_1+z_2) = \psi((x_1+x_2)+(y_1+y_2)i) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ -y_1-y_2 & x_1+x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \psi(z_1)+\psi(z_2).$$

$$\psi(z_1 \cdot z_2) = \psi((x_1x_2 - y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)i) = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2+y_1x_2 \\ -x_1y_2-y_1x_2 & x_1x_2-y_1y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \psi(z_1) \cdot \psi(z_2)$$

• ψ é uma aplicação bijetiva .

Vamos calcular $\ker(\psi)$; $\ker(\psi)=\left\{z\in\mathbb{C};\psi(z)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$. Então, seja $z=(x+yi)\in\mathbb{C}$ tal que $\psi(z)=0$.

$$\psi(z)=\psi(x+yi)=\psi\begin{pmatrix}x&y\\-y&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=y=0.$$

Logo, $\ker(\psi)=0,$ consequentemente, ψ é injetiva.

Além disso, para cada matriz $\begin{pmatrix}x_0&y_0\\-y_0&x_0\end{pmatrix}\in K$, existe um único número complexo $z_0=x_0+y_0i,$ tal que $\psi(z_0)=\begin{pmatrix}x_0&y_0\\-y_0&x_0\end{pmatrix}\in K$ e, consequentemente, ψ é sobrejetiva.

Portanto, ψ é um homomorfismo bijetor entre corpos, isto é, $\mathbb{C}\approx K$

□

Portanto, podemos escrever:

$$\begin{pmatrix}x&y\\-y&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&y\\-y&0\end{pmatrix}=x\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{\substack{\text{Corresponde}\\\text{a }(1,0)=1}}+y\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}_{\substack{\text{Corresponde}\\\text{a }(0,1)=i}}=x+yi\ ,$$

$$\text{Portanto, }\begin{pmatrix}x&y\\-y&x\end{pmatrix}=x+yi\,.$$

Seja $z=\begin{pmatrix}x&y\\-y&x\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, então, como a matriz $\begin{pmatrix}x&y\\-y&x\end{pmatrix}$ é invertível, pois seu determinante é $x^2+y^2\neq 0$, temos:

$$z^{-1}=\begin{pmatrix}x&y\\-y&x\end{pmatrix}^{-1}=\underbrace{\frac{1}{x^2+y^2}}_{\frac{1}{|z|^2}}\underbrace{\begin{pmatrix}x&-y\\y&x\end{pmatrix}}_{x-yi=\bar{z}}=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{x^2+y^2}&-\dfrac{y}{x^2+y^2}\\\dfrac{y}{x^2+y^2}&\dfrac{x}{x+y^2}\end{pmatrix}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i\,.$$

Novamente, consideremos um número complexo não nulo, $z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$,

então

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}.$$

Observemos que:

- $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\theta$ e $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{sen}\theta$, onde $\theta = \arg(z)$
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\text{Logo,} \quad z = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta & \rho\operatorname{sen}\theta \\ -\rho\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_\theta},$$

onde R_θ é uma matriz de rotação no plano (matriz ortogonal).

Isto é, um número complexo z pode ser caracterizado como uma rotação de θ radianos, seguida de uma homotetia, caracterizada por ρ.

Por exemplo, i , a unidade imaginária pode ser identificada com a ação geométrica de uma rotação de 90º no sentido anti-horário. Além disso,

$$i^2 = i \times i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1.$$

Esta explicação é, certamente, muito melhor o que escrever $i = \sqrt{-1}$, uma prática muito comum em livros que tratam de cálculo com funções de varáveis complexas. Nesse sentido, essa prática acaba reafirmando conceitos que são incorretos ou obscuros.

Portanto, um número complexo

$$z = x + yi = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

corresponde à ação geométrica no plano de três transformações, duas homotetias, caracterizadas por x e y, respectivamente, $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, além de uma rotação de 90º no sentido anti-horário. Notemos que $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ atuam em direções ortogonais.

9. UMA COLETÂNEA DE PROBLEMAS RESOLVIDOS

Esta coletânea de problemas resolvidos é um exemplo de proposta de trabalho com os números complexos. Há problemas típicos dos vestibulares do Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA) e do Instituto Militar de Engenharia (IME), por exemplo, os problemas 9.1, 9.2, 9.3, 9.4 e 9.5. O problema 9.6 é um clássico sobre trigonometria plana (fórmulas de arco duplo) e o problema 9.7 envolve as fórmulas de arco metade. O problema 9.8 refere-se a um outro problema clássico, desta vez de geometria analítica plana do ensino médio, que também pode ser resolvido por números complexos. O problema 9.9 aborda uma característica dos triângulos equiláteros segundo as transformações geométricas no plano complexo, trata-se de um lema para a demonstração do Teorema de Napoleão, o problema 9.10. Finalmente, os problemas 9.11, 9.12 são, ambos, de nível de olímpico; em particular, são baseados nas raízes da unidade. O problema 9.13 é uma questão do último vestibular para ingressantes da USP em 2018. Observemos que cada problema, quando é necessário, tem uma numeração de equações própria.

9.1 Prove que $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ para todos os números complexos z_1, z_2 .

Demonstração.

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=$$

$$=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)+(z_1-z_2)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=$$

$$=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=$$

$$=2z_1\overline{z_1}+2z_2\overline{z_2}=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right).$$

□

9.2 Sejam z e w números complexos, onde $|z|=1$ e $z\neq w$. Mostre que $\left|\dfrac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|=1$.

Demonstração.

$$\left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|=\left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|\cdot\frac{|\overline{z}|}{|\overline{z}|}=\frac{|z-w||\overline{z}|}{|1-z\overline{w}||\overline{z}|}=\frac{|z-w||\overline{z}|}{|\overline{z}-\overline{w}(z\cdot\overline{z})|}=\frac{|z-w||\overline{z}|}{\left|\overline{z}-\overline{w}|z|^2\right|}\underset{|z|=|\overline{z}|=1}{=}\frac{|z-w|}{|\overline{z}-\overline{w}|}=$$

$$=\frac{|z-w|}{|\overline{z-w}|}=\frac{|z-w|}{|z-w|}=1, \text{ pois } |z-w|=|\overline{z-w}|.$$

□

9.3 Prove que se $|z_1|=|z_2|=1$ e $z_1\cdot z_2\neq -1$, então $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ é um número real.

Demonstração.

Seja $z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1\cdot z_2}$, vamos mostrar que $z=\overline{z}$. De fato

$$\overline{z}=\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1\cdot z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1+z_2}}{\overline{1+z_1\cdot z_2}}=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1\cdot z_2}}=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}} \quad (1)$$

Observemos que, se $p\in\mathbb{C}$ e $|p|=1$, então

$$p\cdot\overline{p}=|p|^2=1 \text{ e, portanto, } \overline{p}=\frac{1}{p}.$$

Usando este resultado em (1), temos:

$$\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}=\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}}=\frac{\frac{z_1+z_2}{z_1\cdot z_2}}{\frac{1+z_1\cdot z_2}{z_1\cdot z_2}}=\frac{z_1+z_2}{1+z_1\cdot z_2}$$

$$\therefore\ \frac{z_1+z_2}{1+z_1\cdot z_2}=\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1\cdot z_2}\right)}$$

□

9.4 Seja a um número real e $M_a = \left\{ z \in \mathbb{C}^*; \left| z + \frac{1}{z} \right| = a \right\}$. Encontre o menor e o maior valor de $|z|$ quando $z \in M_a$.

Resolução

Elevando ao quadrado os dois lados da igualdade $\left| z + \frac{1}{z} \right| = a$, obtemos:

$$a^2 = \left| z + \frac{1}{z} \right|^2 = \left(z + \frac{1}{z} \right)\left(\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} \right) = z \cdot \overline{z} + \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\overline{z}} = |z|^2 + \frac{z^2 + |\overline{z}|^2}{z \cdot \overline{z}} + \frac{1}{|z|^2} =$$

$$= \frac{|z|^4 + z^2 + |\overline{z}|^2 + 1}{|z|^2} = \frac{|z|^4 + z^2 + 2z \cdot \overline{z} + |\overline{z}|^2 - 2z \cdot \overline{z} + 1}{|z|^2} = \frac{|z|^4 + \left(z + \overline{z} \right)^2 - 2|z|^2 + 1}{|z|^2}$$

Logo,

$$\underbrace{|z|^4 - \left(a^2 + 2 \right) \cdot |z|^2 + 1}_{\text{(I)}} = -\left(\underbrace{z + \overline{z}}_{=\mathrm{Re}(z)} \right)^2 \leq 0 \qquad (1)$$

Notemos que (I) é uma função quadrática de $|z|^2$ que, pela desigualdade (1), é não-positiva. As raízes de (I) são $\alpha_1 = \frac{a^2 + 2 - \sqrt{a^4 + 4a^2}}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{a^2 + 2 + \sqrt{a^4 + 4a^2}}{2}$.

Observemos que (I) tem um mínimo que ocorre em $\frac{a^2 + 2}{2} > 0$, uma vez que $a > 0$, e que

$$\alpha_1 = \frac{a^2 + 2}{2} - \frac{\sqrt{a^4 + 4a^2}}{2} \text{ e } \alpha_2 = \frac{a^2 + 2}{2} + \frac{\sqrt{a^4 + 4a^2}}{2}.$$

Consequentemente, $\alpha_1 < \alpha_2$ e, portanto,

$$|z|^2 \in \left[\frac{a^2 + 2 - \sqrt{a^4 + 4a^2}}{2}, \frac{a^2 + 2 + \sqrt{a^4 + 4a^2}}{2} \right]$$

Notemos que:

- $|z|$ será máximo quando $|z|^2$ for máximo;

- $|z|$ será mínimo quando $|z|^2$ for mínimo.

Assim

$$|z|^2_{máx} = \frac{a^2+2+\sqrt{a^4+4a^2}}{2} = \frac{2a^2+4+2\sqrt{a^4+4a^2}}{4} = \frac{a^2+2a\sqrt{a^2+4}+a^2+4}{4} =$$

$$= \left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)^2 \Rightarrow |z|_{máx} = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

Analogamente,

$$|z|_{mín} = \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

Além disso, como α_1 e α_2 são raízes de (I) então, pela desigualdade (1), segue-se que

$$-\left(z+\bar{z}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z \Leftrightarrow z \text{ é um imaginário puro (por hipótese } z \in \mathbb{C}^* \text{).}$$

9.5 Seja $z \in \mathbb{C}$. Determine as soluções para a equação:

$$z^2 + |z| = 0 \qquad (1)$$

Resolução.

Seja $z = r\left(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\right)$, onde $r = |z|$. Então

$$z^2 = \left[r\left(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\right)\right]^2 = r^2\left(\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta\right)$$

Portanto, substituindo o resultado anterior em (1), temos:

$$r^2\left(\cos 2\theta + i\text{sen}2\theta\right) + r = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ ou \\ r\left(\cos 2\theta + i\text{sen}2\theta\right) = -1 = \cos\pi + i\text{sen}\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ ou \\ |z| = 1 \quad e \quad \theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ ou \\ z = 1 \\ ou \\ z = -i \end{cases}$$

$$S = \{-i, 0, i\}.$$

9.6 Utilizando-se do teorema binomial e da 1ª fórmula de De Moivre, expresse $\text{sen}\,2\theta$ e $\cos 2\theta$ em função de $\text{sen}\theta$ e $\cos\theta$.

Resolução.

Seja $z = r\left(\cos\theta + i\text{sen}\theta\right)$, então

- $z^2 = r^2\left[\cos^2\theta + 2\text{sen}\theta\cos\theta i + \left(i\text{sen}\theta\right)^2\right] = r^2\left[\left(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta\right) + \left(2\text{sen}\theta\cos\theta\right)i\right]$,

segundo o binômio de Newton.

- Pela fórmula de De Moivre, temos:

$$z^2 = r^2\left(\cos\theta + i\text{sen}\theta\right)^2 = r^2\left(\cos 2\theta + i\text{sen}2\theta\right).$$

Consequentemente, por igualdade de números complexos, temos:

$$r^2\left(\cos 2\theta + i\text{sen}2\theta\right) = \left(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta\right) + \left(2\text{sen}\theta\cos\theta\right)i \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \\ e \\ \text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta\cos\theta \end{cases}.$$

9.7 Prove que

$$z = 1 + \cos\theta + i\text{sen}\theta = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right]$$

e

$$w = 1 - \cos\theta - i\text{sen}\theta = -2i\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\text{sen}\frac{\theta}{2}\right), \text{ com } \theta \in (0, 2\pi).$$

Demonstração.

Lembrando que:

- $\cos\theta = \cos\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) \overset{(9.6)}{=} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \overset{\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1}{=} -1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

- $\text{sen}\theta = \text{sen}\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) \overset{(9.6)}{=} 2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Então,

$$z = 1 + \cos\theta + i\text{sen}\theta = 1 - 1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + i2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right];$$

$$w = 1 - \cos\theta - i\text{sen}\theta = 1 + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - i2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= \underbrace{2 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - i2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2i\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= 2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\cdot(-i\cdot i) =$$

$$= -2i\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[-i^2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = -2i\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right].$$

□

9.8 Dados $A(5,-2)$ e $B(4,-1)$, vértices consecutivos de um quadrado , determine os outros dois vértices.

Resolução.

Seja $z = A - B$, então $C - B = -i \cdot (A - B)$, pois multiplicar o número complexo $z = A - B$ por $-i$ equivale a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos, em torno de B, no sentido horário. Como $A - B = 1 - i$, então $-i(A-B) = -i(1-i) = -1 - i$ e, portanto, $C - B = -1 - i$.

$$C = \underbrace{B + (C - B)}_{\substack{\text{translação de} \\ B \text{ pelo número} \\ \text{complexo } (C-B)}} = 4 - i + (-1 - i) = 3 - 2i$$

$$\therefore \ C(3,-2).$$

Como $(C - B) // (D - A)$, então

$$D = A + (C - B) \equiv D = A + (D - A) = 5 - 2i + (-1 - i) = 4 - 3i$$

$$\therefore \ D(4,-3).$$

Há um outro par de pares ordenados, pois poderíamos ter girado $z = A - B$ no sentido anti-horário. Vejamos,

$z = A - B = 1 - i$

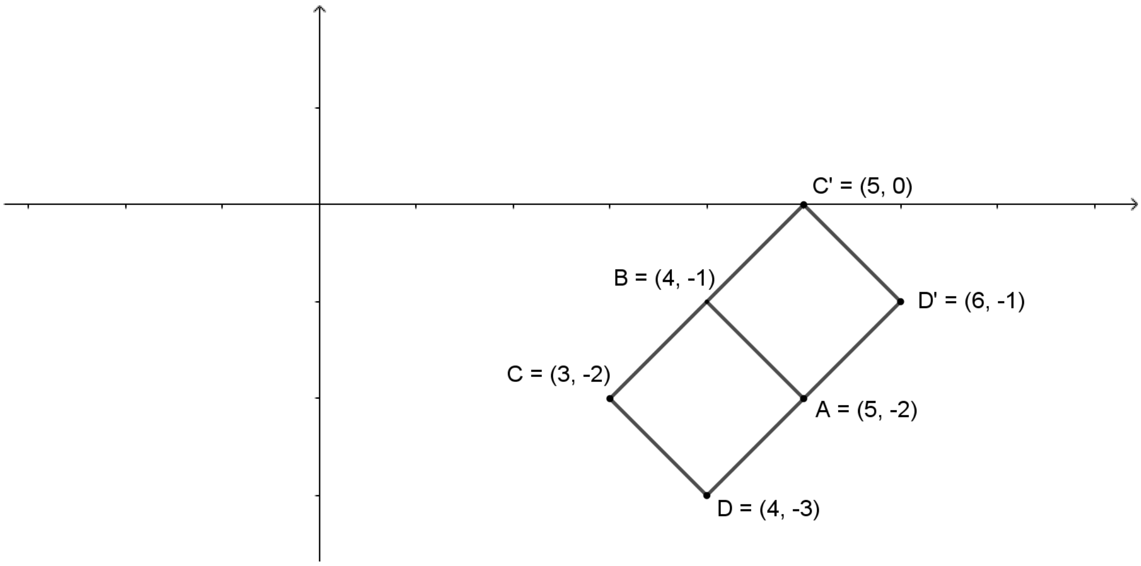
$i \cdot z = i(1 - i) = +1 + i$, então:

$C' = B + (B - C') = 4 - i + (+1 + i) = 5$

$D' = A + (B - C') = 5 - 2i + (1 + i) = 6 - i$

$\therefore \ C' = (5,0)$ e $D' = (6,-1)$.

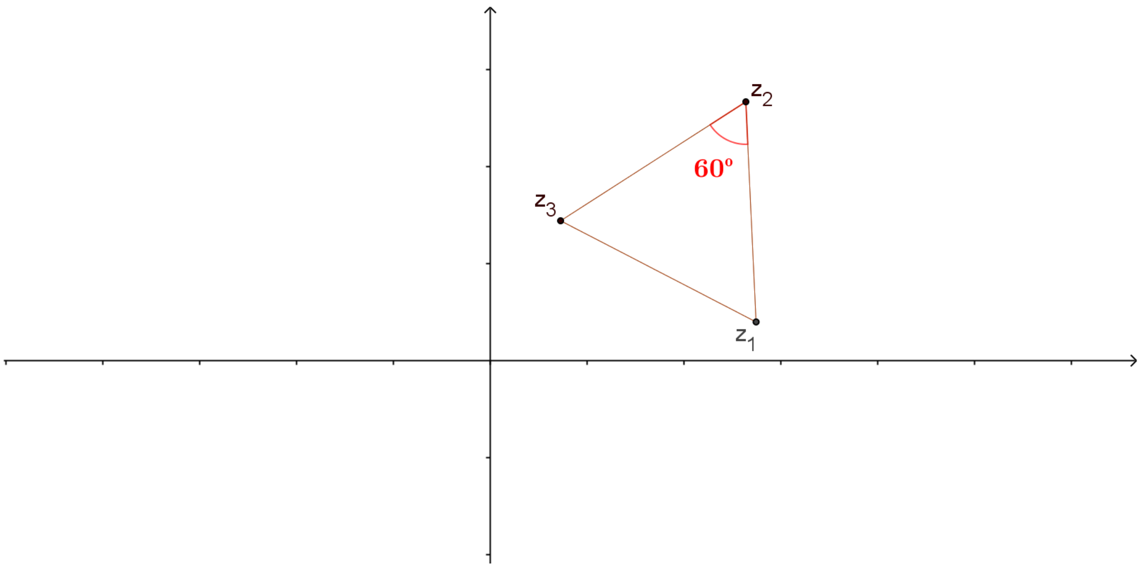
Figura 11 – Problema resolvido 9.8



Fonte: elaborada pelo autor.

9.9 As imagens geométricas dos números complexos z_1, z_2 e z_3 formam um trinômio equilátero se, e somente se, $z_1 + wz_2 + w^2 z_3 = 0$, onde w é uma raiz cúbica da unidade diferente de 1.

Figura 12 – Problema resolvido 9.9



Fonte: elaborada pelo autor.

Demonstração.

As imagens geométricas de z_1, z_2 e z_3 são vértices de um triângulo equilátero $\Leftrightarrow (z_1 - z_2)$ e $(z_3 - z_2)$ formam um ângulo de $\pm\frac{\pi}{3}$ radianos $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z_1 - z_2 = (z_3 - z_2)\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 + z_2\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{3} \pm i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - 1}_{(1)}\right) - z_3\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{3} \pm i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}_{(2)}\right) = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2\omega + z_3\omega^2 = 0.$$

$$(1) \quad \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2\pi}{3} \pm \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \omega$$

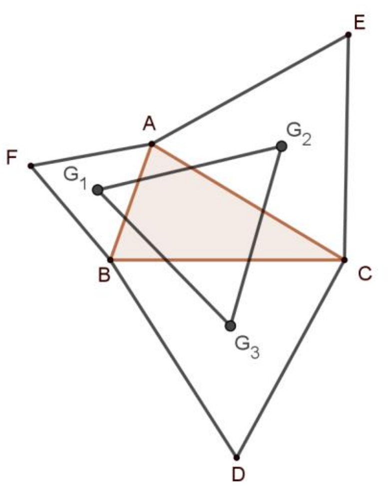
$$(2) \quad -\cos\frac{\pi}{3} \mp \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}i = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{4\pi}{3} \pm \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}i = \omega^2$$

□

9.10 (Teorema de Napoleão*)* Seja ABC um triângulo qualquer. Sejam BCD, ACE e ABF triângulos equiláteros externos ao triângulo ABC. Então, os baricentros dos triângulos BCD, ACE e ABF são vértices de um triângulo equilátero.

Demonstração.

Figura 13 – Problema resolvido 9.10



Fonte: elaborada pelo autor.

Como os triângulos BCD, ACE e ABF são triângulos equiláteros, então (ver problema 9.9):

$$D + wC + w^2B = 0\,;\, C + wE + w^2A = 0\,;\, B + wA + w^2F = 0\,.$$

Além disso,

$$G_1 = \frac{A+B+F}{3}\,;\; G_2 = \frac{A+C+E}{3}\,;\; G_3 = \frac{B+C+F}{3}$$

Para os pontos G_1, G_2, G_3, dados acima, temos:

$$G_1 + wG_2 + w^2G_3 = \frac{B+C+D}{3} + \frac{(A+C+E)}{3}w + \frac{(A+F+B)}{3}w^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(D + wC = w^2B\right) + \frac{1}{3}\left(C + wE = w^2A\right) + \frac{1}{3}\left(B + wA = w^2F\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 0 = 0\,.$$

Então, G_1, G_2, G_3 são os vértices de um triângulo equilátero.

□

9.11 Se $A_0, A_1, ..., A_{n-1}$ são vértices de um polígono regular convexo inscrito em uma circunferência de raio unitário, prove que

$$(A_0A_1)\cdot(A_0A_2)\cdot(A_0A_3)\cdot ...\cdot(A_0A_{n-1}) = n\,.$$

Demonstração.

Denominam-se raízes n-ésimas da unidade as raízes da equação $z^n - 1 = 0$. Como $1 = \cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0$, segue-se que as raízes da unidade são

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{n},\;\; k \in \{0, 1, 2, ..., (n-1)\}$$

Observemos que:

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i\operatorname{sen} 0 = 1;$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} = \varepsilon;$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} = \varepsilon^2;$$

$$\cdots$$

$$\varepsilon_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n} = \varepsilon^{n-1}$$

Notação: $U_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{(n-1)}\}$.

O conjunto U_n é gerado pelo elemento ε; os elementos de U_n são potências de ε.

Já observamos esse comportamento nas potências inteiras de i: $U_4 = \{1, i, -1, -i\}$, cujos elementos são as raízes quartas da unidade.

Portanto, $z^n - 1$ admite a seguinte fatoração:

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\varepsilon)(z-\varepsilon^2)(z-\varepsilon^3)\cdot ... \cdot(z-\varepsilon^{n-1}). \qquad (1)$$

Por outro lado,

$$1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}. \quad (z \neq 1)$$

$$\therefore \; z^n - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}) \qquad (2)$$

Igualando (1) e (2), temos:

$$(z-\varepsilon)(z-\varepsilon^2)(z-\varepsilon^3)\cdot ... \cdot(z-\varepsilon^{n-1}) = 1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} \qquad (3)$$

Observação: vale a pena ressaltar que se ε_k é uma raiz enésima da unidade, diferente de 1, então

$$1+\varepsilon_k+\varepsilon_k^2+\ldots+\varepsilon_k^{n-1}=\frac{\varepsilon_k^n-1}{\varepsilon_k-1}=\frac{1-1}{\varepsilon_k-1}=0$$

Logo,

$$1+\varepsilon_k+\varepsilon_k^2+\ldots+\varepsilon_k^{n-1}=0.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$A_0=1, A_1=\varepsilon, A_2=\varepsilon^2, \cdots, A_{n-1}=\varepsilon^{n-1}$$

Em (3), acima (neste mesmo exercício) fazendo $z=1$, temos:

$$(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^3)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon^{n-1})=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\ \ vezes}=n \qquad (4)$$

Aplicando o módulo dos dois lados de (4), temos:

$$\left|(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^3)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon^{n-1})\right|=n \Leftrightarrow \underbrace{|1-\varepsilon|}_{A_0A_1}\underbrace{|1-\varepsilon^2|}_{A_0A_2}\underbrace{|1-\varepsilon^3|}_{A_0A_3}\cdot\ldots\cdot\underbrace{|1-\varepsilon^{n-1}|}_{A_0A_{n-1}}=n$$

$$\therefore\ (A_0A_1)(A_0A_2)(A_0A_3)\cdot\ldots\cdot(A_0A_{n-1})=n.$$

□

9.12 Prove que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.

Demonstração.

Considere o enunciado do problema resolvido 11. Seja $e_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$.

Então,

$$1-\varepsilon^k=1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\overset{(\text{Veja o problema resolvido 7})}{=}2\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{n}-2i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}=$$

$$=2\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right).$$

$$\therefore\ \left|1-\varepsilon^k\right| = 2\text{sen}\,\frac{k\pi}{n}$$

Finalmente, temos:

$$\left|1-\varepsilon\right| = 2\text{sen}\,\frac{\pi}{n}$$

$$\left|1-\varepsilon^2\right| = 2\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}$$

$$\left|1-\varepsilon^3\right| = 2\text{sen}\,\frac{3\pi}{n}$$

$$\ldots$$

$$\left|1-\varepsilon^{n-1}\right| = 2\text{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$\therefore\ \left(2sen\frac{\pi}{n}\right)\left(2\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}\right)\left(2\text{sen}\,\frac{3\pi}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(2\text{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = |1-\varepsilon|\left|1-\varepsilon^2\right|\left|1-\varepsilon^3\right|\cdot\ldots\cdot\left|1-\varepsilon^{n-1}\right| = n$$

$$\therefore\ \underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{(n-1)\ \ vezes}\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{n}\cdot\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\text{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = n \Leftrightarrow \text{sen}\,\frac{\pi}{n}\cdot\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\text{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}\,.$$

□

9.13 Uma questão proposta aos vestibulandos 2018 da USP – Universidade de São Paulo.

Considere o polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, em que $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Sabe-se que suas n raízes estão sobre a circunferência unitária e que $a_0 < 0$.

O produto das n raízes de $p(x)$, para qualquer inteiro $n \geq 1$ é:

(A) -1 (B) i^n (C) i^{n+1} (D) $(-1)^n$ (E) $(-1)^{n+1}$

Resolução.

Duas características deste problema merecem atenção: o próprio tema (polinômios, relações entre coeficientes e raízes e números complexos), bem como a ausência de contextualização (que não é um item obrigatório para se elaborar questões). Aliás, uma belíssima questão.

Sejam, então, $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ as n raízes de $p(x)$. Como todas estão sobre a circunferência unitária, temos:

$$|r_1| = |r_2| = |r_3| = ... = |r_n| = 1.$$

Logo, $|r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n| = 1$ e, consequentemente, $r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n = 1$ ou $r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n = -1$. Por outro lado, pelas relações entre coeficientes e raízes (relações de Girard), temos:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n = \frac{(-1)^n a_0}{1} = (-1)^n a_0 \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \ |r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n| = \left|(-1)^n a_0\right|$$

$$\therefore \ 1 = |-1|^n \cdot |a_0| \Leftrightarrow |a_0| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ ou \\ a_0 = -1 \end{cases}$$

Como $a_0 < 0$, segue-se que $a_0 = -1$.

$$\therefore \ r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n = (-1)^n \cdot (-1) = (-1)^{n+1}.$$

Resposta: $r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n = (-1)^{n+1}$, que corresponde à alternativa (E).

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Começamos destacando um grande mérito do PROFMAT: a promoção da melhoria da qualidade do ensino de matemática fortemente baseada na melhoria da formação de seus egressos. O PROFMAT tem uma proposta de trabalho para onde convergem muitos professores de matemática que buscam qualificação profissional diferenciada.

Portanto, o presente texto reflete uma característica da carreira docente do autor: uma busca constante por integração entre conhecimentos específicos e conhecimentos pedagógicos, uma busca incessante por aprimoramento profissional. Todas essas facetas convivem juntas, como num tipo de simbiose, uma beneficiando a outra.

Quando se questiona sobre aplicações dos números complexos surgem quase imediatamente as respostas: circuitos elétricos, séries de Fourier e aerodinâmica! Para o ensino médio? Para formação de licenciados em matemática? É claro, é óbvio, que não trilhamos este caminho.

Durante a fase da pesquisa bibliográfica não encontramos nenhum texto nacional abrangente sobre o tema (números complexos) destinado à formação de professores de matemática que atuam na educação básica. Frequentemente, esta álgebra dos números complexos é encontrada em um capítulo que antecede o estudo dos polinômios e das equações algébricas ou em um capítulo que antecede o cálculo em uma variável complexa. Um livro, porém, foi inspirador: *Complex numbers from A...to Z*. Extremamente útil ao licenciando em matemática e àquele professor que atua com alunos de competições de matemática (ver ANDREESCU, 2014). Andreescu, logo no início do seu livro, trata os números complexos como vetores. Também há um tópico sobre as transformações geométricas no plano complexo. Não é um livro moderno. Trata-se de um livro coerente com uma proposta de ensino da matemática. Para o ensino médio brasileiro tradicional, vetores é um assunto da física, não da matemática! Os alunos são submetidos a uma infinidade de assuntos em geometria analítica e não se fala em vetores. Não há ligação alguma desses últimos, vetores, com matrizes ou transformações no plano. Apesar de todo o conteúdo de trigonometria geral, matrizes, determinantes e sistemas lineares!

Em 1980 a Professora Nilze Silveira de Almeida, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, lecionou números complexos para os calouros do curso de física. Há uma lembrança muito presente, muito viva, das suas aulas sobre números complexos. Em particular, o impacto causado pela justificativa da forma algébrica dos números complexos a partir da abordagem baseada em pares ordenados. Uma outra situação igualmente marcante aconteceu quando o autor era docente num colégio particular. As aulas olímpicas e as aulas de preparação para vestibulares exigiram que se fizesse a "descoberta" da forma matricial dos números complexos e sua interpretação via transformações geométricas do plano, em particular, homotetias e rotações. Isto é, cada formalismo apresentado neste texto tem características próprias. Para o professor de matemática que atua na educação básica, por exemplo, aquele que vai lecionar os números complexos para alunos do ensino médio, é muito provável que uma abordagem geométrica seja muito mais produtiva. Por outro lado, as transformações geométricas no plano não são abordadas no ensino médio. Mas matrizes e trigonometria geral, sim! Então, cabe ao professor escolher como e qual caminho vai trilhar com seus alunos. Por outro lado, se o professor não sabe, não conhece, um determinado tema, então não vai ensinar!

"Cada tópico apresentado na sala de aula, cada novo assunto tratado no curso, cada tema estudado deve ser visto sob esses três aspectos: o conceitual, o manipulativo e o aplicativo. O professor deve submeter-se ao desafio de compor esse trio a cada nova etapa do seu trabalho. Nem sempre vai ser fácil; por isso é um desafio. Às vezes até parece impossível: não há muitas fontes bibliográficas nas quais se apoiar. No começo, não se vai sempre poder apresentar cada assunto sob essa tríplice abordagem. Mas anote a dificuldade e busque, com diligência e determinação, superá-la mais tarde. Pesquise, indague, olhe em torno de si, procure exemplos, exerça sua autocrítica. No decorrer do processo terá muitas alegrias. Cada êxito é um nutriente para a autoestima; cada lacuna é uma motivação para estudos e pesquisa adicionais" (LIMA, 2001, p. 191).

BIBLIOGRAFIA

ALMEIDA, Nilze Silveira de. **Fundamentos de matemática**. São Paulo: COPIDART, 1980.

ANDREESCU, Titu; ANDRICA, Dorin. **Complex numbers from a…to z.** 2nd. ed. New York: Birkhäuser, 2014.

ANTAR NETO, Aref et al. **Números complexos, polinômios, equações algébricas**. São Paulo: Ed. Moderna, 1981. (Noções de Matemática; v.7)

ARFKEN, George B.; WEBER, Hans. J. **Mathematical methods for physicists.** 6th. ed. Burlington: Elsevier, 2005.

AUFMANN, Richard N.; BARKER, Vernon C.; NATION, Richard D. **College trigonometry**. 5th. ed. Boston: Houghton Mifflin Company, 2005.

ÁVILA, Geraldo S. **Variáveis complexas e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

BALDIN, Yuriko Yamamotto; FURUYA, Yolanda K. Saito. **Geometria analítica para todos e atividades com Octave e Geogebra**. São Carlos: EdUFSCar, 2011.

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. 3. ed. HARBRA: São Paulo, 1986.

BOULOS, Paulo; WATANABE, Renate. **Matemática**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979. 3v.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. 3.ed. São Paulo: Pearson, 2014.

COELHO, Flávio Ulhoa. **Introdução à álgebra linear**. São Paulo: Livraria a Física, 2016.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbet. **What is mathematics?**: an elementary approach to ideas and methods. 2nd. ed. New York: Oxford University Press, 1996.

CHURCHILL, Ruel V.; BROWN, James Ward. **Variáveis complexas e aplicações**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2015.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. 5. ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

DETTMAN, John W. **Applied complex variables**. New York: Dover Publications, 1984.

ESCOFIER, Jean-Pierre. **Galois theory**. New York: Springer, 2001.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Álgebra linear**. São Paulo: Pearson, 2016.

GUIMARÃES, Caio dos Santos. **Matemática em nível IME/ITA**. São José dos Campos: Vestseller, 2008. v.1

HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília S. **Introdução à álgebra linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lucia Torres. **Polinômios e equações algébricas**. Rio de Janeiro: SMB, 2012.

HOFFMAN, Kenneth; KUNZE. **Linear algebra**. 2nd. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1971.

HUNGERFORD, Thomas W. **Abstract algebra**: an introduction. 2.nd. ed. Florida: Harcourt, 1997.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v.6: complexos, polinômios, equações.

INSTITUTO DE CIENCIAS E HUMANIDADES. **Álgebra**. Lima: Lumbreras Editores, 2011.

KATZ, Victor J. **A history of mathematics:** an introduction. 3rd. ed. Boston: Pearson Education, 2009.

LANG, Serge. **Estruturas algébricas**. Rio de Janeiro: LTC e INL, 1972.

LIDSKI, V. B. et al. **Problemas de matemáticas elementales**. Moscou: MIR, 1972.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v.3.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e ensino**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LOURÊDO, Aldo Trajano; OLIVERA, Alexandro Marinho. **Um primeiro curso de álgebra linear**. Campina Grande: EDUEPB, 2015.

MENEZES, Darcy Leal. **Abecedário de álgebra**: 2º volume – ciclo colegial. Rio de Janeiro: Departamento de Imprensa Nacional, 1956.

MONTEIRO, Jacy L. H. **Elementos de álgebra**. Rio de Janeiro: LTC, 1974.

NEVES, Robson Neves. **Aplicações de números complexos em geometria**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (dissertação de mestrado).

PIANOSCHI, Thaisa Alves. **Visualização das funções complexas e o teorema fundamental da álgebra.** Rio Claro: IGCE – UNESP, 2013. (dissertação de mestrado).

POTÁPOV, M.; ALEXÁNDROV, V.; PASICHENKO, P. **Álgebra y análisis de funciones elementales**. Moscou: MIR, 1986.

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, José Francisco Porto da. **Números racionais, reais e complexos**. 2.ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana; GIRALO, Victor. **O saber do professor de matemática:** ultrapassando a dicotomia entre a didática e conteúdo. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014.

RUSSEL, Bertrand. **Introdução à filosofia matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. **Matemática**: curso colegial. São Paulo: EDART, 1966. 3v.

SERRÃO, Alberto Nunes. **Exercícios e problemas de álgebra**. Rio de Janeiro: LTC, 1970.

SILVA FILHO, M. **Números complexos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Nacionalista, 1960.

SOARES, Marcio G. **Cálculo em uma variável complexa**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

SONNINO, Sérgio; MIRSHAWKA. **Números complexos**. 3.ed. São Paulo: LPM, 1965.

ZILL, Dennis G.; SHANAHAN. **Curso introdutório à análise complexa com aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.