UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica

Ari Ferraza de Souza

Estudo de Tronco de Cilindro e Cilindro Oblíquo com Auxílio do GeoGebra

CAMPINAS

2018

Ari Ferraza de Souza

Estudo de Tronco de Cilindro e Cilindro Oblíquo com Auxílio do GeoGebra

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof. Dra. CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Ari Ferraza de Souza e orientada pela Prof. Dra. Claudina Izepe Rodrigues.

CAMPINAS

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

So89e

Souza, Ari Ferraza de, 1974-
Estudo de tronco de cilindro e cilindro oblíquo com auxílio do GeoGebra / Ari Ferraza de Souza. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Claudina Izepe Rodrigues.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cilindro (Matemática). 2. Cálculo de áreas. 3. Geometria sólida. 4. Superfícies (Matemática). 5. GeoGebra (Programa de computador). I. Rodrigues, Claudina Izepe, 1953-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Study of cylinder trunk and oblique cylinder with the aid of GeoGebra
Palavras-chave em inglês:
Cylinder (Mathematics)
Calculation of areas
Solid geometry
Surfaces
GeoGebra (Computer program)
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Claudina Izepe Rodrigues [Orientador]
Sandra Augusta Santos
Pedro Luiz Aparecido Malagutti
Data de defesa: 22-02-2018
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado profissional defendida em 22 de fevereiro de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Prof(a). Dr(a). SANDRA AUGUSTA SANTOS

Prof(a). Dr(a). PEDRO LUIZ APARECIDO MALAGUTTI

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Este trabalho é dedicado aos meus pais Alice Ferraza de Souza e Avelino de Souza, razão da minha existência e que sempre incentivaram seus filhos a estudarem e que por vontade de Deus partiram durante o período em que eu realizava meu mestrado.

Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

À minha esposa Katia Andrea Sant'Anna Carrion Lasso Souza, pelo amor e carinho dispensados a mim diariamente e por toda a paciência conferida a mim durante a realização do mestrado.

Às minhas filhas Anna Caroline e Anna Clara por vibrarem comigo em cada conquista.

A todos os meus familiares que torceram por mim.

Aos amigos do Profmat 2014 pelo incentivo e grande ajuda durante todo o curso.

Ao Ricardo Silva Rosa que me acolheu em sua casa por muitas vezes durante todo o curso.

Aos professores do IMECC pelos conhecimentos compartilhados.

À professora Doutora Claudina, exemplo de pessoa, agradeço pela disponibilidade, paciência e sabedoria com que me orientou neste trabalho.

Aos professores membros da banca examinadora pela disponibilidade e atenção dispensados ao meu trabalho.

À Escola Municipal Evandro Brito da Cunha e à Escola Municipal Celso Luis Ferreira Pó que gentilmente permitiram o desenvolvimento das atividades propostas relatadas neste trabalho.

Aos alunos Joâo Paulo, Hiran, Tainara, Denis, Pedro e Camila que prontamente aceitaram o convite para terem aulas em contra turno.

À agência CAPES pelo apoio financeiro concedido durante todo o período do mestrado.

"Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível".
(Charles Chaplin)

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre cilindros oblíquos e troncos de cilindros. Analisamos as curvas que delimitam as secções de cilindros determinadas por planos não paralelos ao seu eixo, que são elipses, e apresentamos uma forma de calcular o perímetro e a área de elípses. Estudamos parametrizações de curvas no plano e no espaço, e de superfícies no espaço. Realizamos construções de cilindros e de suas planificações com o auxílio do GeoGebra. Propomos sequências de planos de aulas, para o ensino fundamental II, ou ensino médio, envolvendo o estudo de cilindros oblíquos e troncos de cilindros, e a utilização do *software* GeoGebra em sala de aula. Finalizamos este trabalho relatando como ocorreu a aplicação da sequência de planos de aulas, os procedimentos adotados e os resultados obtidos.

Palavras-chave: Cilindro. Cálculo de Área. Cálculo de Perímetro. Parametrização. Construção de Tronco de Cilindro. Construção de Cilindro Oblíquo.

Abstract

In this work we present a study on oblique cylinders and cylinder trunks . We analyse the curves that delimit the sections of a cylinder determined by planes not parallel to its axis, which are ellipses, and we present a way to calculate the perimeter and the area of ellipses. We study parameterizations of curves in the plane and in the space, and of surfaces in space. We construct cylinders and their planifications with the aid of GeoGebra. We propose sequences of lesson plans, for middle or high school, involving the study of oblique cylinders and cylinder trunks and the use of GeoGebra software in the classroom. We finish this work by reporting how the application of the suggested sequence of lesson plans occurred, the procedures adopted and the results achieved.

Keywords: Cylinder. Area Calculation. Perimeter Calculation. Parameterization. Truncated Cylinder Construction. Oblique Cylinder Construction.

Lista de Figuras

Lista de Abreviaturas e Siglas

UNICAMP Universidade Estadual de Campinas

IMECC Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

OBMEP Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

CAPES Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

IMPA Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Lista de Símbolos

$\overline{AB}$ Segmento de reta unindo A a B.

$\overleftrightarrow{AB}$ Reta que passa pelos pontos A e B.

AB Comprimento do segmento $\overline{AB}$

$\widehat{AP}$ Arco de circunferência unindo A e P.

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$A\widehat{C}B$ Ângulo com vértice no ponto C, cujos lados contêm respectivamente A e B.

Sumário

Introdução

Eu, como professor de matemática há vários anos atuando no ensino fundamental, e como professor de geometria no ensino médio, procuro, em minhas aulas além de trazer conhecimento aos meus alunos incentivá-los a buscar o conhecimento por meio da curiosidade e de questionamentos.

No ano de 2014, ao desenvolver o conteúdo de geometria espacial em uma determinada escola que adota um material didático conhecido, como em todos os anos e seguindo as orientações do próprio material didático, iniciei com uma introdução à geometria espacial, conceitos, posições de retas e planos, e em seguida passei para o estudo dos sólidos geométricos.

No estudo dos sólidos geométricos, iniciei com o cubo e os prismas de base retangular. Para ambos, ensinei os alunos a calcular a área da base, a área lateral e a área total, na sequência o volume para isso orientei os alunos com maiores dificuldades de visualização geométrica que planificassem o sólido para facilitar sua compreensão e consequentemente facilitar os cálculos, principalmente da área lateral.

Na sequência, passei para os mais variados prismas com bases regulares ou não, retos ou oblíquos e novamente vários alunos acabavam planificando os sólidos antes de realizarem os cálculos. Isso facilita muito a compreensão, principalmente quando os prismas são oblíquos e suas laterais, em certos casos, deixam de ser retângulos e passam a ser paralelogramos, com isso os alunos calculavam a área da base, a área lateral, a área total e posteriormente seu volume.

Concluído o estudo dos prismas, passei para as pirâmides, que seguem uma sequência didática idêntica à dos prismas. Primeiro realizei os cálculos de área de base, área lateral, área total, por fim, o volume. Esses cálculos são realizados em pirâmides retas de bases regulares, posteriormente em pirâmides retas de bases irregulares e finalizo em pirâmides que não são retas. Novamente, a planificação é essencial para a compreensão dos cálculos de área.

Ao concluir as pirâmides passei aos corpos redondos, e nesse caso comecei pelo cilindro reto. Para poder calcular sua área lateral é necessário sua planificação. Feita a planificação, calcular a área lateral, a área da base e a área total se torna tarefa fácil, posteriormente efetuei o cálculo do seu volume. Concluído o estudo dos cilindros retos, passei para os cones retos que tem sequência didática idêntica a dos cilindros retos. Novamente, a planificação é essencial para os cálculo de área e nesse caso em especial ainda se faz necessário um estudo preliminar para o cálculo da área lateral.

Terminados os estudos dos cilindros e cones retos, o material didático passa para o estudo dos cilindros oblíquos, e somente neste caso, a sequência didática é alterada, passando a calcular somente o volume, sem fazer nenhuma menção ao cálculo de área. Foi neste momento que um aluno muito crítico questionou o porque de somente neste caso, não realizar os cálculos de área. Então iniciei um debate em sala para analisarmos o porque desta alteração. Durante este debate, os alunos chegaram à conclusão que para calcular a área lateral seria necessário sua planificação e a maioria achava que essa planificação seria um paralelogramo. Eu, como professor, nesse momento não sabia com certeza qual seria a planificação da lateral do cilindro oblíquo, então disse aos alunos que na aula seguinte terminaríamos esse estudo já que aquela aula havia terminado.

Chegando em casa, construí um cilindro oblíquo bem rudimentar, sem mesmo saber ao certo o ângulo de inclinação. Para isso, utilizei o centro de um rolo de papel toalha, no qual fui amassando e recortando as extremidades até conseguir encaixar um círculo, fechando assim o cilindro. Usei uma folha de sulfite para cobrir exatamente a lateral desse cilindro, e assim poder posteriormente retirar essa folha e demonstrar como seria a planificação da lateral de um cilindro oblíquo.

Na aula seguinte, apresentei o cilindro oblíquo aos alunos e ao retirar a folha de sulfite que cobria exatamente a lateral do cilindro, os alunos ficaram surpresos ao ver aquela planificação com a parte superior e inferior em formato curvo, com isso entenderam o motivo do material não fazer menção ao cálculo da área do cilindro oblíquo.

Em conversa com vários professores de matemática que realizavam o Profmat comigo, percebi que muitos não sabiam como seria a planificação de um cilindro oblíquo. Com base nisso, e em conversa com minha orientadora, decidimos escrever um trabalho que pudesse contribuir para professores de matemática da Educação Básica, apresentando um referencial teórico acerca da construção e planificação de troncos de cilindros e cilindros oblíquos.

No primeiro capítulo faremos uma demonstração sobre a formação de uma elipse quando um plano intersecta um cilindro, apresentando a definição e a forma de calcular a área e o perímetro de elipses.

No segundo capítulo abordaremos as parametrizações de curvas no plano e no espaço, abordaremos também formas de parametrizar superfícies. Tais parametrizações serão fundamentais na construção do tronco de cilindro e do cilindro oblíquo.

No terceiro capítulo apresentaremos a definição de tronco de cilindro, uma forma de construir um tronco de cilindro no *software* GeoGebra e sua planificação. Encontraremos qual é a curva formada na planificação da superfície lateral do tronco de cilindro, bem como o cálculo da área total e volume.

No quarto capítulo apresentaremos a definição de cilindro oblíquo, uma forma de construir um cilindro oblíquo no *software* GeoGebra e sua planificação. Demonstraremos como calcular a área total e o volume.

No quinto capítulo apresentaremos propostas de planos de aulas a professores da Educação Básica. Tais propostas tem como objetivos principais apresentar as diferenças existentes entre diferentes formas de cilindros, integrar alunos ao uso do *software* GeoGebra, realizar construções no *software* GeoGebra e diminuir a distância existente entre os alunos e a geometria.

As propostas de planos de aulas foram aplicadas em escola pública de Ensino Fundamental. No sexto capítulo relatamos como foram as experiências durante as aplicações.

Capítulo 1

Secção Plana de Cilindro

É comum, em livros e apostilas de matemática, encontrarmos fórmulas para o cálculo de perímetro e área de figuras planas, por exemplo, quadrado, retângulo, triângulo, círculo, etc. Várias outras figuras planas também possuem fórmulas para o cálculo de seu perímetro e sua área, e, caso não possuem, podem ser facilmente decompostas em figuras citadas anteriormente. Neste capítulo demonstramos que a secção do corte de um plano em um cilindro é uma elipse e, ao estudarmos a elipse, notamos que não é possível calcular seu perímetro e sua área com as fórmulas já estudadas.

Por este motivo, neste capítulo também desenvolvemos alguns cálculos para chegarmos a uma fórmula que permita calcular de forma fácil o perímetro e a área de uma elipse.

1.1 Intersecção de cilindro e plano.

Denominamos Cilindro Circular Infinito, o conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$ que distam R de uma reta e, denominada eixo do cilindro. Denotamos este cilindro infinito por $C(e; R)$. Dados os planos distintos α e α' perpendiculares ao eixo e, temos os pontos O e O' e os círculos $\Gamma(O; R)$ e $\Gamma'(O'; R)$, respectivamente como as intersecções dos planos α e α' com o Cilindro Circular Infinito C. Doravante, para evitarmos qualquer confusão, nos referimos à porção de $C(e; R)$ contida entre α e α' como Cilindro de Revolução de raio R e altura $h = OO'$.

Quando um plano intersecta um cilindro circular infinito de forma não paralela ao eixo do cilindro, temos, na intersecção deste plano com o cilindro circular infinito, uma curva. Vamos demonstrar que tal curva é uma elipse, ou seja, conjunto de pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante. Para provar isso, vamos primeiro construir um cilindro circular infinito com duas esferas de raios iguais ao raio do cilindro e centro sobre o eixo de rotação do cilindro, formando assim duas circunferências na intersecção do cilindro com as esferas, veja Figura 1.1.

Com as esferas posicionadas, traçamos um plano intersectando o cilindro e tangenciando

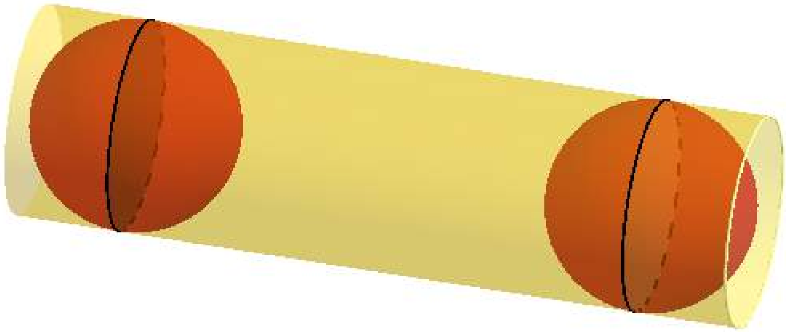


Figura 1.1: Cilindro com duas esferas posicionadas em seu interior.

as esferas, gerando assim os pontos D e K, e a curva a ser analisada, veja Figura 1.2.

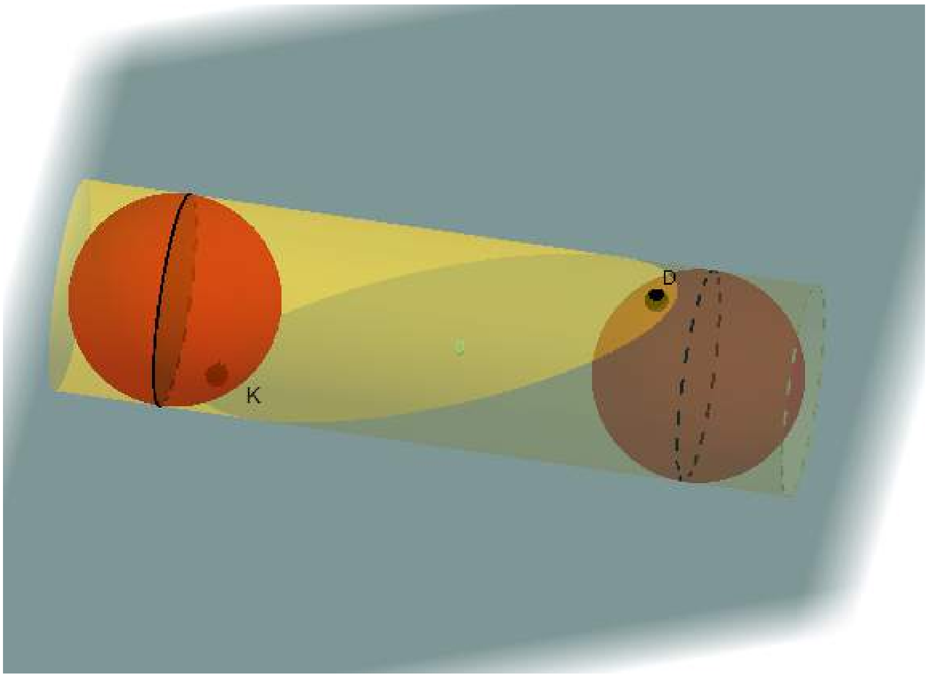


Figura 1.2: Curva formada pela intersecção do plano e o cilindro.

Com o traçado deste plano, passamos a ter uma curva formada pela intersecção entre o plano e o cilindro. Consideramos as duas circunferências transversais, simultaneamente ao cilindro e às duas esferas, como na Figura 1.3, e traçamos um segmento de reta paralelo ao eixo de rotação do cilindro, partindo de uma das circunferências, que determina o ponto J, até a outra circunferência, que determina o ponto M. Este segmento de reta irá intersectar a curva no ponto G. Com estes pontos determinados, traçamos um segmento de reta ligando o ponto G ao ponto D e outro segmento ligando o ponto G ao ponto K, veja Figura 1.3.

Com os segmentos traçados, podemos notar que a soma dos comprimentos dos segmentos $\overline{JG}$ e $\overline{GM}$ corresponde ao comprimento do segmento $\overline{JM}$, que é constante, independentemente da posição que o segmento $\overline{JM}$ estiver em relação ao cilindro. Como o segmento $\overline{JM}$

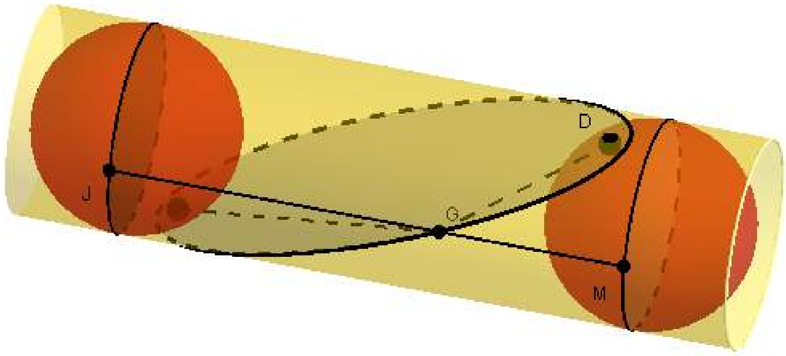


Figura 1.3: Segmento de reta ligando o ponto M ao ponto J.

contém o ponto G, ponto este que forma os segmento $\overline{GD}$ e $\overline{GK}$, podemos afirmar que o segmento $\overline{GD}$ é congruente ao segmento $\overline{GM}$, pois, os pontos M, G e D formam um plano e neste plano os segmentos $\overline{GM}$ e $\overline{GD}$ são tangentes a uma circunferência gerada pela intersecção entre o plano MGD e a esfera usada na construção e contida no cilindro, veja Figura 1.4.

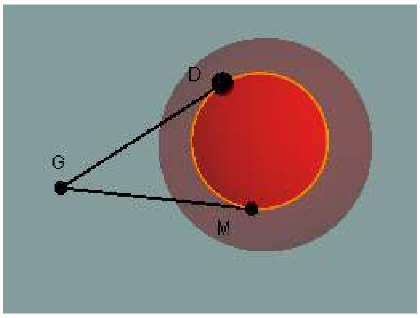


Figura 1.4: Plano MGD.

Como os pontos D e M são tangentes à circunferência, podemos traçar dois segmentos de reta ligando estes pontos ao centro N da circunferência. Traçamos também um segmento ligando o ponto G ao ponto N, formando assim os triângulos DGN e MGN, congruentes já que $\overline{GN}$ é hipotenusa de ambos os triângulos e os segmentos $\overline{DN}$ e $\overline{MN}$ são de mesma medida, o raio da circunferência, veja Figura 1.5.

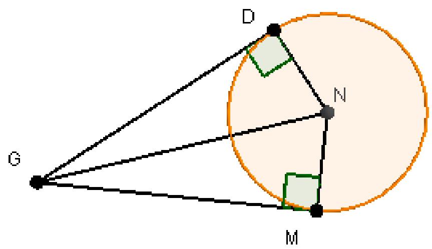


Figura 1.5: Triângulos formados no plano MGD.

O mesmo acontece com os segmentos $\overline{JG}$ e $\overline{GK}$ em relação à outra esfera. Com isso, temos que a soma das medidas dos segmentos $\overline{JG}$ e $\overline{GM}$ é sempre igual à medida de $\overline{JM}$, independentemente da posição do ponto G. Como $\overline{GM}$ é congruente a $\overline{GD}$ e $\overline{JG}$ é congruente a $\overline{GK}$, então a soma das medidas de $\overline{GD}$ com $\overline{GK}$ também será sempre igual a medida de $\overline{JM}$. Portanto, podemos afirmar que a curva se trata de uma elipse com o ponto G pertencendo à elipse, e focos nos pontos D e K.

1.2 Área de uma elipse

Sabendo que, elipse é um conjunto de pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano, chamados focos, é constante, consideramos uma elipse de focos $F'(-c,0)$ e $F''(c,0)$, centro $O(0,0)$, e contendo os pontos $A'(-a,0)$, $A''(a,0)$, $B'(0,-b)$ e $B''(0,b)$, sendo $\overline{A'A''}$ o eixo maior, de comprimento $2a$, e $\overline{B'B''}$ o eixo menor, de comprimento $2b$, como na Figura 1.6.

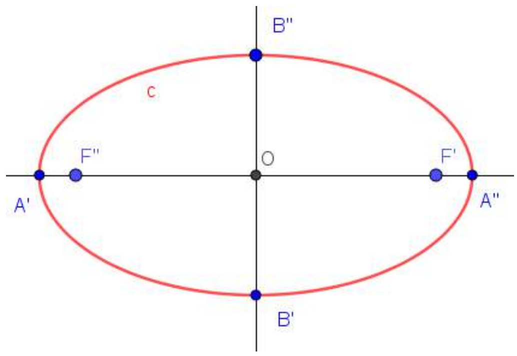


Figura 1.6: Elipse com centro na origem.

A equação reduzida dessa elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ assim } a^2 = b^2 + c^2. \tag{1.1}$$

Isolando a variável y na equação (1.1), obtemos:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

A área da semi elipse, que chamamos aqui de A_1, correspondente à região delimitada pelo eixo Ox e pela função $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, é dada pela integral:

$$A_1 = \int_{-a}^{a} f_1(x)dx \tag{1.2}$$

Assim,

$$A_1 = \int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Consultando EDWARDS [1, p. 60] encontramos, de forma bem detalhada, utilizando substituição trigonométrica, o cálculo da integral indefinida

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

que tem como resultado

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Portanto,

$$A_1 = \frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{ab}{2}\left[\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{ab}{2}\pi = \frac{\pi ab}{2}.$$

Chamamos de A_2 a área da semi-elipse correspondente à região delimitada pelo eixo OX e pela função $f_2 : I\!R \to I\!R$ dada por $f_2(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ é dada pela integral:

$$A_2 = -\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

que calculando de modo análogo ao caso anterior, encontramos:

$$A_2 = \frac{\pi ab}{2}.$$

A área total, que chamamos de A, é dada por:

$$A = A_1 + A_2.$$

Assim,

$$A = \pi ab. \tag{1.3}$$

Observamos que se $a = b$, a elipse se torna uma circunferência, cujo raio é $r = a$, e a sua área é dada por:

$$A = \pi aa = \pi a^2.$$

1.3 Área de uma elipse por intuição

Para tratarmos esse tipo de resultado com alunos do ensino fundamental ou médio, que ainda não possuem o conhecimento de cálculo de integral, podemos usar algumas comparações de modo intuitivo. Uma elipse pode ser vista como uma circunferência que se alongou em uma direção e não na outra. Se pegarmos uma folha com quadradinhos de 1 cm de lado e nela desenharmos uma circunferência de raio r, veja Figura 1.7, temos que a área da circunferência é composta por N "quadradinhos", sendo que N pode não ser um número inteiro, já que a circunferência não cobre por completo todos os quadradinhos e aqui vamos considerar todas as partes de quadradinhos que estão dentro da circunferência, além dos que estão inteiramente dentro da circunferência.

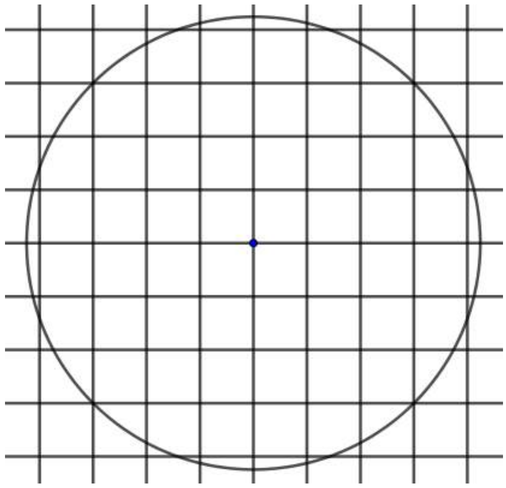


Figura 1.7: Circunferência em folha quadriculada.

Assim, temos:

$$A_{circunf.} = N \ \ cm^2, \tag{1.4}$$

e, como sabemos que a área da circunferência é πr^2, temos:

$$N = \pi \ r^2. \tag{1.5}$$

Agora, alongando a Figura 1.7 apenas na direção horizontal, para a direita e esquerda, por meio de um fator de escala igual a $k > 1$, é possível imaginar que a circunferência passa a ter o formato de uma elipse, como na Figura 1.8 e, cada quadradinho passa a ter a forma de um retângulo.

Denotando por $2a$ o eixo menor dessa elipse e por $2b$ o eixo maior e, como a figura foi alongada apenas na direção horizontal, para a direita e para a esquerda, a é igual ao raio r da circunferência. Além disso, como a Figura 1.8 sofreu um alongamento por meio de um fator de escala igual a k, cada quadradinho passou a ser um retângulo de altura 1 cm e largura k cm.

Supondo que o número de quadradinhos ao longo do diâmetro da circunferência é igual a M, o comprimento do eixo menor da elipse é igual a M cm e o comprimento do eixo maior é M k cm.

Assim,

$$M = 2r = 2a. \tag{1.6}$$

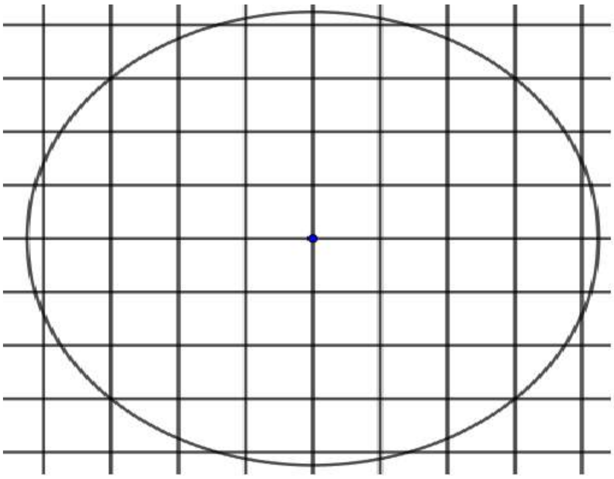


Figura 1.8: Circunferência alongada.

e

$$k\ M = 2b. \tag{1.7}$$

Dividindo a equação (1.7) pela equação (1.6), temos:

$$\frac{k\ M}{M} = \frac{2b}{2r}$$

Logo,

$$k = \frac{b}{r}$$

Assim, a área de cada retângulo será:

$$A_{ret.} = \frac{b}{r}\ \ cm^2.$$

Como existem N pequenos retângulos dentro da elipse, a área da elipse é dada por:

$$A_{elipse} = N\ \frac{b}{r}\ \ cm^2. \tag{1.8}$$

Substituindo a equação (1.4) na equação (1.8), temos que a área da elipse é:

$$A_{elipse} = \pi\ r^2\ \frac{b}{r}$$

$$A_{elipse} = \pi\ r\ b\ \ cm^2.$$

Como no início denotamos o eixo menor por $2a$ e concluímos que ele mede $2r$, temos:

$$A_{elipse} = \pi\ a\ b\ \ cm^2.$$

Comentário

A fórmula da área de uma elipse pode ser demonstrada utilizando o Princípio de Cavalieri para áreas planas, que é uma técnica adequada para alunos do ensino médio. Essa demonstração pode ser consultada em Kurokawa [4, p. 38].

1.4 Perímetro de uma elipse

Derivando implicitamente ambos os membros da equação (1.1) em relação a x, obtemos:

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \tag{1.9}$$

E, elevando ambos os membros da equação (1.9) ao quadrado e somando 1 em ambos os membros obtemos:

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}. \tag{1.10}$$

Isolando y^2 na equação (1.1),

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \tag{1.11}$$

Substituindo a equação (1.11) na equação (1.10), temos:

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 b^2 (1 - \frac{x^2}{a^2})}. \tag{1.12}$$

Realizando algumas simplificações em (1.12), obtemos:

$$1 + (y')^2 = \frac{a^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2}}{a^2 - x^2}, \tag{1.13}$$

com $a^2 = b^2 + c^2$.

Como a excentricidade da elipse, que denotamos e, é dada por $e = \frac{c}{a}$, substituindo e na equação (1.13), temos:

$$1 + (y')^2 = \frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}. \tag{1.14}$$

Consultando FLEMMING [2, p. 339] encontramos, que o comprimento de arco de uma curva plana dada por suas equações paramétricas é dado pela fórmula:

$$C = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \tag{1.15}$$

Assim, utilizando a equação (1.15), o perímetro procurado é dado pela fórmula

$$C = 4\int_0^a \sqrt{1+(y')^2}\, dx. \tag{1.16}$$

Substituindo a equação (1.14) na equação (1.16), temos

$$C = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}\, dx. \tag{1.17}$$

Para chegarmos a uma expressão mais simples devemos fazer uma substituição trigonométrica na equação (1.17). Para isso, usamos $x = a\,\mathrm{sen}(\alpha)$ e $dx = a\cos(\alpha)\, d\alpha$. Observamos que para $x = 0$, temos $\alpha = 0$. Já para $x = a$, temos $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dessa forma,

$$C = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{\frac{a^2 - e^2a^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha)}{a^2 - a^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha)}}\, a\cos(\alpha)\right] d\alpha. \tag{1.18}$$

Realizando algumas simplificações em (1.18), obtemos:

$$C = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha)}\;\; d\alpha. \tag{1.19}$$

Portanto,

$$C = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\sin^2(\alpha)}\;\; d\alpha. \tag{1.20}$$

A equação (1.20) é uma integral elíptica e já foi amplamente estudada por grandes matemáticos que mostraram não ser possível expressá-la em termos de funções elementares. No entanto, podemos obter boas aproximações usando o método, utilizado por SILVA [10], descrito a seguir.

Usamos a série binomial, que permite expandir potências do tipo $(1+x)^n$, para todo $x, n \in I\!R$ tal que $|x| < 1$. Assim, com

$$|-e^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha)| = |e^2||\,\mathrm{sen}^2(\alpha)| < 1,$$

usamos a igualdade

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \ldots, \tag{1.21}$$

para obtermos uma aproximação do comprimento da elipse. Fazendo $n = \frac{1}{2}$ e $x = -e^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha)$ na equação (1.21), obtemos:

$$(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha))^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{e^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha)}{2} - \frac{e^4\,\mathrm{sen}^4(\alpha)}{8} - \frac{e^6\,\mathrm{sen}^6(\alpha)}{16} + \ldots, \tag{1.22}$$

Substituindo a equação (1.22) na equação (1.20)e integrando termo a termo, obtemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{e^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{2}\, d\alpha = \frac{-e^2\pi}{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{e^4 \operatorname{sen}^4(\alpha)}{8}\, d\alpha = \frac{-3e^4\pi}{128}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{e^6 \operatorname{sen}^6(\alpha)}{16}\, d\alpha = \frac{-5e^6\pi}{512}$$

Portanto,

$$C \approx 4a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{e^2\pi}{8} - \frac{3e^4\pi}{128} - \frac{5e^6\pi}{512}\right).$$

$$C \approx \pi a\left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32} - \frac{5e^6}{128}\right). \tag{1.23}$$

Assim, (1.23) fornece o valor aproximado do perímetro de uma elipse em função de sua excentricidade e do comprimento do seu eixo maior.

Quando $e = 0$, a elipse torna-se uma circunferência de raio $r = a = b$, cujo perímetro é $2\pi a$.

Exemplo

Usamos a seguir uma elipse de eixo maior $2a = 4$, eixo menor $2b = 2$, $c = \sqrt{3}$ e excentricidade $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, como exemplo, para ilustrar o cálculo aproximado do perímetro da elipse, veja Figura 1.9.

$$\begin{aligned} C &= \pi a\left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32} - \frac{5e^6}{128} - \dots\right) \\ &= 2\pi\left(2 - \frac{1}{2}\frac{3}{4} - \frac{3}{32}\frac{9}{16} - \frac{5}{128}\frac{27}{64} - \dots\right) \\ &= 2\pi\left(2 - \frac{3}{8} - \frac{27}{512} - \frac{135}{8192} - \dots\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} C &\approx 2\pi\,(2 - 0,375 - 0,052734375 - 0,016479492) \\ &\approx 2\pi\,(1,5557861). \end{aligned}$$

Portanto,

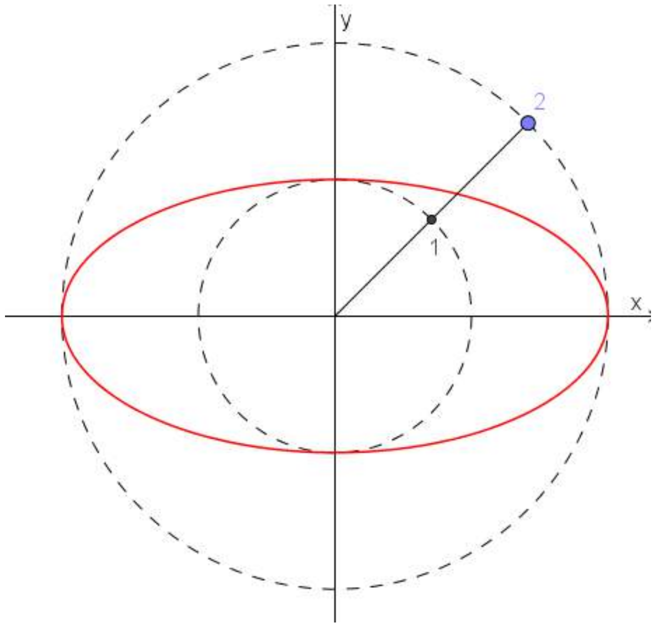


Figura 1.9: Cálculo aproximado do perímetro da elipse.

$$C \approx 9,7752924.$$

Observamos que, o comprimento aproximado da elipse, de eixo maior $2a = 4$ e eixo menor $2b = 2$, é maior do que o comprimento da circunferência de raio igual a $b = 1$ e menor do que o comprimento da circunferência de raio igual a $a = 2$, ou seja,

$$2\pi\, b \ < \ C \ < \ 2\pi\, a$$

$$6,2831853 \ < \ C \ < \ 12,566371.$$

Capítulo 2

Parametrização

Parametrização é o processo de decisão e definição dos parâmetros necessários para uma especificação completa ou relevante de um modelo ou objeto geométrico. Algumas vezes, pode somente envolver a identificação de certos parâmetros ou variáveis. Se, por exemplo, o modelo é de uma turbina eólica com um interesse particular na eficiência de geração de energia, então os parâmetros de interesse irão incluir o número, comprimento e passo entre as lâminas (pás).

Mais frequentemente, parametrização é um processo matemático envolvendo a identificação de um conjunto completo de coordenadas efetivas ou graus de liberdade do sistema, processo ou modelo. Parametrização de uma curva, superfície ou sólido, por exemplo, implica na identificação de um conjunto de coordenadas que permitem identificar unicamente qualquer ponto (sobre a curva, superfície, ou sólido) com uma lista ordenada de números.

Neste capítulo descrevemos algumas equações paramétricas de curvas no plano ou no espaço e, também, equações paramétricas de algumas superfícies no espaço. Algumas dessas equações serão utilizadas, nos próximos capítulos, nas construções do tronco de cilindro e do cilindro oblíquo.

2.1 Curvas

É intuitivo pensarmos que uma curva no plano ou espaço pode ser considerada como a trajetória de uma partícula móvel que se desloca no plano ou no espaço durante um intervalo de tempo. Uma forma de estudarmos tais trajetórias consiste em determinarmos as coordenadas de um ponto da curva em função de um só parâmetro, como por exemplo, o tempo t.

Seja

$$F(x, y) \;=\; 0 \tag{2.1}$$

a equação de uma curva plana C em coordenadas retangulares. Sejam x e y funções de uma terceira variável t em um subconjunto, Λ, do conjunto $I\!R$, ou seja,

$$x = f(t) \quad e \quad y = g(t), \quad \text{para}\, t \in \Lambda \tag{2.2}$$

Se para qualquer valor da variável t no subconjunto Λ, os valores de x e y determinados pelas equações (2.2) satisfazem (2.1), então as equações (2.2) são chamadas equações paramétricas da curva C e a variável independente t é chamada de parâmetro. Dizemos também que as equações (2.2) determinam a trajetória de uma curva C no plano OXY.

Podemos estender o conceito de curvas no espaço. Sejam x, y, e z funções de uma variável t em um subconjunto, Λ, do conjunto $I\!R$, ou seja,

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad e \quad z = h(t), \quad \text{para}\, t \in \Lambda \tag{2.3}$$

Quando t assume todos os valores em Λ, o ponto $(x(t), y(t), z(t))$ descreve uma curva C no espaço. As equações (2.3) são chamadas equações paramétricas de C. Estas equações determinam a trajetória de um ponto da curva C no espaço $OXYZ$.

2.1.1 Parametrização de retas no plano OXY

Quando falamos de uma reta no plano estamos familiarizados com a equação $y = mx + q$ em que m representa o coeficiente angular da reta, isto é, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, com (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pontos distintos da reta, e q, o coeficiente linear da reta, ou seja, a ordenada do ponto da reta pertencente a OY. Lembramos ainda que este tipo de equação só pode ser usado para representar retas que não são paralelas ao eixo OY.

Quando falamos em equações paramétricas, estamos falando em escrever separadamente as variáveis x e y em função de uma terceira variável real, assim, escrevemos $x = f(t)$ e $y = g(t)$, em que t é a terceira variável (parâmetro).

Dados os pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$, temos a reta $\overleftrightarrow{AB}$, veja a Figura 2.1.

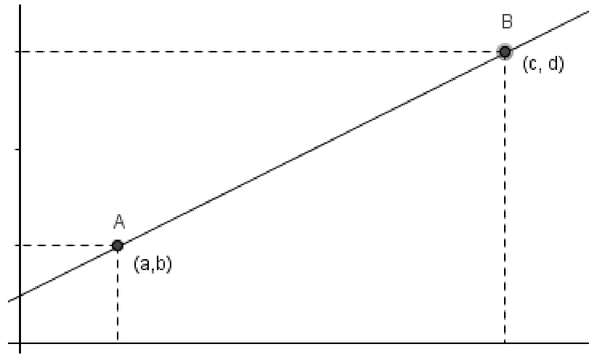


Figura 2.1: Reta $\overleftrightarrow{AB}$ no plano.

As equações

$$\begin{cases} x &= a + t(c-a) \\ y &= b + t(d-b) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

são as equações paramétricas da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Essas equações descrevem a trajetória do ponto (x, y), em função do parâmetro t, que pode ser pensado como o tempo. Para $t = 0$, temos $(x, y) = (a, b)$ e para $t = 1$, $(x, y) = (c, d)$. Com isso, temos duas situações possíveis:
Se $a = c$, então $x = a + t(c - a) = a$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e temos uma reta vertical, desde que $d \neq b$.
Se $a \neq c$, como $x = a + t(c - a)$, então

$$t = \frac{x-a}{c-a} \tag{2.5}$$

Logo, como $y = b + t(d - b)$, temos

$$y = b + \frac{x-a}{c-a}(d-b) \tag{2.6}$$

Portanto, quando t assume todos os valores reais, o ponto (x, y) descreve realmente a reta que passa pelos pontos A e B.

Podemos também escrever as equações paramétricas de determinada reta quando não conhecemos dois de seus pontos, mas, conhecemos a sua equação reduzida ou a sua equação geral. Neste caso, basta sustituir uma de suas variáveis, x ou y, por t e posteriormente obter a outra variável em função de t.

Assim, se tivermos a equação reduzida da reta $y = mx+q$, para escrevermos suas equações paramétricas, basta adotarmos que $x = t$ e substituirmos x na equação reduzida, com isso, temos:

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= mt + q \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Caso tenhamos a equação geral $ax+by+c = 0$, com $b \neq 0$, procedemos de forma análoga e obtemos

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= \dfrac{-at-c}{b} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

2.1.2 Parametrização de retas no espaço OXYZ

Seja r a reta no espaço $OXYZ$ passando pelos pontos $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$, como na Figura 2.2.

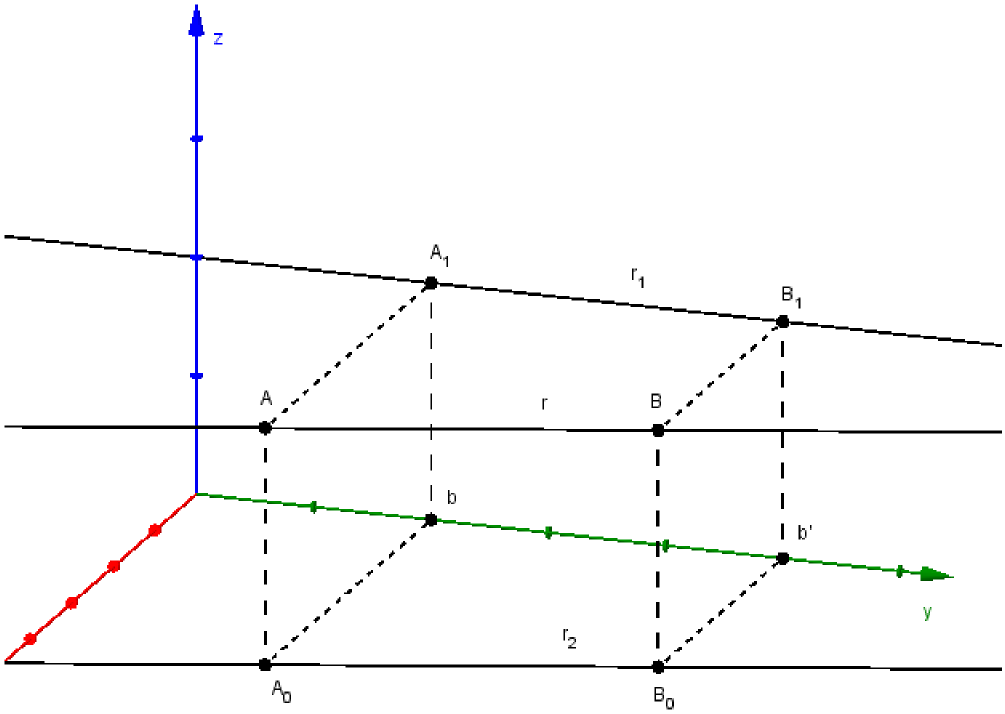


Figura 2.2: Reta $\overleftrightarrow{AB}$ no espaço

Se r não é vertical, ou seja, paralela ao eixo Oz, sua projeção ortogonal sobre o plano OXY é a reta r_2, que passa pelos pontos $A_0 = (a, b, 0)$ e $B_0 = (a', b', 0)$. As equações paramétricas da reta r_2 são:

$$r_2 : \begin{cases} x = a + t(a' - a) \\ y = b + t(b' - b) \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in I\!R. \tag{2.9}$$

Caso a reta r não seja paralela ao eixo Ox, a sua projeção ortogonal sobre o plano OYZ é a reta r_1, que passa pelos pontos $A_1 = (0, b, c)$ e $B_1 = (0, b', c')$. As equações paramétricas de reta r_1 são:

$$r_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = b + t(b' - b) \\ z = c + t(c' - c) \end{cases} \quad t \in I\!R. \tag{2.10}$$

Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a r se, e somente se, sua projeção P_2 de coordenadas $(x, y, 0)$ no plano OXY pertence a r_2, e sua projeção P_1 de coordenadas $(0, y, z)$ no plano

OYZ pertence a r_1. Logo $P = (x, y, z)$ pertence a r se, e somente se,

$$r : \begin{cases} x &= a + t(a' - a) \\ y &= b + t(b' - b) \\ z &= c + t(c' - c) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,. \tag{2.11}$$

Estas são, portanto, equações paramétricas da reta que contém os pontos $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$. Quando t varia de 0 a 1, o ponto $P = (x, y, z)$, cujas coordenadas são dadas pelas equações acima, descreve o segmento de reta $\overline{AB}$. Quando $t < 0$, A se situa entre P e B e quando $t > 1$, temos B entre A e P.

2.1.3 Parametrização de circunferência no plano OXY

Circunferência é o conjunto dos pontos de um plano que estão a uma mesma distância não nula de um ponto fixo desse plano. Essa distância é definida como o raio (R) e o ponto fixo é definido como o centro (C) da circunferência.

Consideremos no plano OXY uma circunferência λ de centro $C\ (a,\ b)$ e raio R, veja Figura 2.3.

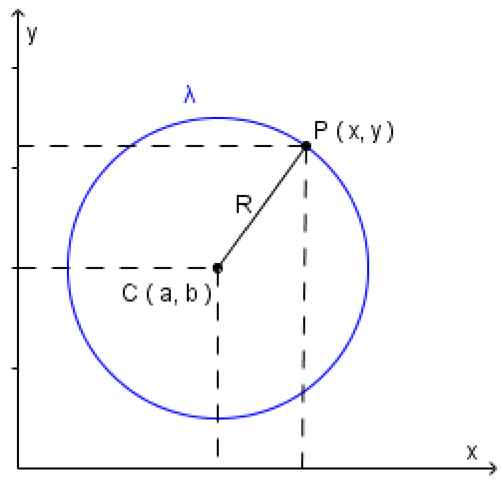


Figura 2.3: Circunferência de centro $C(a,\ b)$ e raio R

Sendo $P\ (x,\ y)$ um ponto qualquer de λ, temos:

$$P\ \in \lambda\ \Leftrightarrow\ PC\ =\ R\,.$$

Calculando a distância entre P e C, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} &= R, \quad \text{ou seja,} \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 &= R^2\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

A equação (2.12) é chamada de equação reduzida da circunferência de centro $C\ (a,\ b)$ e raio R.

Quando o centro de uma circunferência é a origem do plano OXY, temos a seguinte equação reduzida:

$$x^2 + y^2 \ = \ R^2 \ . \tag{2.13}$$

A circunferência definida em (2.13), assim como feito para a equação da reta, pode ter sua representação paramétrica definida simplesmente substituindo uma de suas incógnitas pelo parâmetro t e, em seguida, substituindo esta incógnita em (2.13), obtendo a seguinte parametrização parcial da circunferência:

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= \sqrt{a^2 - t^2} \end{cases} \qquad -a \leq t \leq a \ . \tag{2.14}$$

É importante lembrar que parametrizando uma circunferência como descrito em (2.14), temos apenas a parte da circunferência que fica acima do eixo OX. Para que obter a parte da circunferência que fica abaixo do eixo OX, é necessário outra parametrização:

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= -\sqrt{a^2 - t^2} \end{cases} \qquad -a \leq t \leq a \ . \tag{2.15}$$

Para que não tenhamos essa quebra em dois casos, utilizamos as funções seno e cosseno. Assim, se uma circunferência λ possui centro $C = (0,0)$, raio $r = 1$, veja Figura 2.4, e, nela o ponto $P = (x, y)$, temos:

$$P = (x, y) \ \in \ \lambda \ \Leftrightarrow \ x^2 + y^2 = 1 \tag{2.16}$$

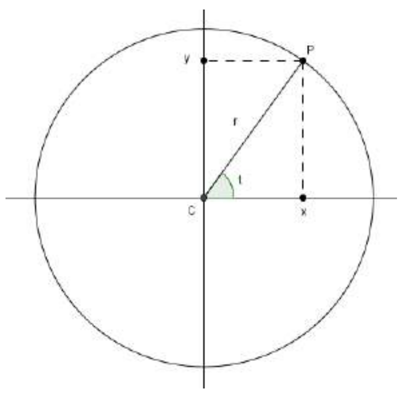


Figura 2.4: Circunferência de centro $C(0,0)$ e raio r

Para cada ponto $P = (x, y)$ em λ, seja o ângulo t entre CX e CP, com $t \ \in \ [0,\ 2\pi]$.

Então,

$$C : \begin{cases} x &= cos(t) \\ y &= sen(t) \end{cases} \quad , \quad t \in [0,\ 2\pi]. \tag{2.17}$$

são equações paramétricas da circunferência λ.

Caso a circunferência λ de raio $r \neq 1$, não tenha centro $C = (x_C, y_C)$ na origem, como na Figura 2.5, temos, $P = (x_P, y_P) \in \lambda$ se, e somente se, $(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 = r^2$, isto é,

$$(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 = r^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x_P - x_C}{r}\right)^2 + \left(\frac{y_P - y_C}{r}\right)^2 = 1\ . \tag{2.18}$$

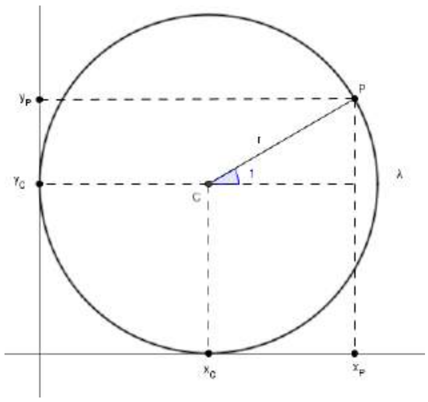


Figura 2.5: Circunferência de centro $C = (x_C, y_C)$ e raio r

Portanto, para cada ponto $\left(\frac{x_P - x_C}{r}, \frac{y_P - y_C}{r}\right)$, temos

$$\lambda : \begin{cases} \dfrac{x_P - x_C}{r} &= cos(t) \\ \dfrac{y_P - y_C}{r} &= sen(t) \end{cases} \quad , \tag{2.19}$$

com $t \in [0,\ 2\pi]$.

Assim, as equações paramétricas de λ são

$$\lambda : \begin{cases} x_P &= r.cos(t) + x_C \\ y_P &= r.sen(t) + y_C \end{cases} \quad , \quad t \in [0,\ 2\pi]. \tag{2.20}$$

2.1.4 Parametrização de elipse no plano OXY

Elipse é o conjunto de pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante. A equação reduzida de uma elipse com centro na origem foi detalhada em (1.1) e é:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a\neq 0 \text{ e } b\neq 0$$

Assim como na circunferência, podemos escrever sua equação paramétrica trocando parte da equação (1.1) por t, com isso temos a primeira equação da parametrização e posteriormente substituímos na equação (1.1) e realizando algumas manipulações, chegamos a segunda equação da parametrização.

Fazendo $\frac{x}{a}=t$, como $-a\leq x\leq a$, temos $-1\leq t\leq 1$. Logo,

$$x=ta, \tag{2.21}$$

e, substituindo (2.21) em (1.1), temos:

$$y=\pm b\sqrt{1-t^2}, \text{ para } t\in [-1,1]. \tag{2.22}$$

Assim, se $y\geq 0$, temos $y=b\sqrt{1-t^2}$, e, se $y\leq 0$, $y=-b\sqrt{1-t^2}$.
Portanto, a parametrização da parte da elipse localizada acima do eixo OX é

$$\begin{cases} x &= ta \\ y &= b\sqrt{1-t^2} \end{cases}, \quad -1\leq t\leq 1, \tag{2.23}$$

e a parametrização da parte da elipse localizada abaixo do eixo OX é

$$\begin{cases} x &= ta \\ y &= -b\sqrt{1-t^2} \end{cases}, \quad -1\leq t\leq 1 \tag{2.24}$$

Para que não seja necessário separar em duas partes a elipse para obtermos suas equações paramétricas, podemos utilizar as funções seno e cosseno.

Considerando os círculos $x^2+y^2=a^2$ e $x^2+y^2=b^2$, com $b<a$, conforme Figura 2.6, seja $P=(x,y)$ um ponto na elipse.
Do triângulo retângulo CMA, temos $x=a\cos(t)$ e do triângulo retângulo CNB, temos $y=b\,\mathrm{sen}(t)$. Logo,

$$\begin{cases} x &= a\cos(t) \\ y &= b\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}, \quad 0\leq t\leq 2\pi \tag{2.25}$$

Caso o centro $C=(x_c,y_c)$ da elipse não seja a origem, sua equação é:

$$\frac{x^2-x_c}{a^2}+\frac{y^2-y_c}{b^2}=1 \qquad a\neq 0 \text{ e } b\neq 0.$$

Assim, com as translações dos centros das circunferências, de raios a e b, de $(0,0)$ para

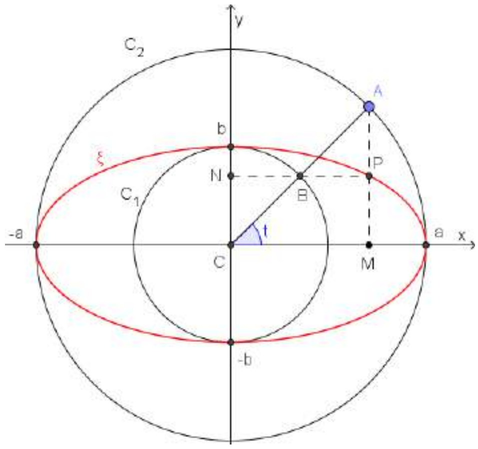


Figura 2.6: Elipse ε de centro na origem.

(x_c, y_c), podemos verificar que as equações paramétricas da elipse são:

$$\begin{cases} x = & a\cos(t) + x_c \\ y = & b\,\mathrm{sen}(t) + y_c \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \tag{2.26}$$

2.1.5 Parametrização de circunferência paralela ao plano OXY e centro no eixo OX

Nos casos em que a circunferência está contida em um plano paralelo ao plano OXY e seu centro pertence ao eixo Z, sua equação paramétrica é similar à equação (2.17), contendo apenas uma terceira equação em sua parametrização, equação esta que conterá a distância da circunferência ao plano OXY.

Na Figura 2.7 temos uma circunferência C paralela ao eixo OXY. Em sua parametrização temos a inclusão da variável z, que será igual à distância k entre a circunferência e o plano OXY.

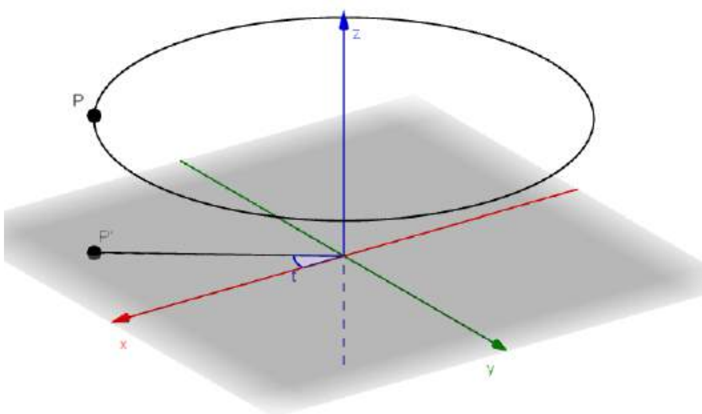


Figura 2.7: Circunferência paralela ao plano OXY

Se C é uma circunferência de raio $R = 1$, centro no eixo OZ e paralela ao plano OXY, para cada ponto $P = (x, y, z) \in C$, consideramos P', a projeção ortogonal do ponto P sobre o plano OXY, e o ângulo t entre OX e OP', com $t \in [0,\ 2\pi]$. Portanto,

$$C : \begin{cases} x &= cos(t) \\ y &= sen(t) \\ z &= k \end{cases} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi \tag{2.27}$$

são equações paramétricas da circunferência C.

2.1.6 Parametrização de elipse no espaço, que projeta uma circunferência sobre o plano OXY

Na elipse λ não paralela ao eixo OXY e que projeta sobre o eixo OXY uma circunferência, teremos a inclusão da variável z que conterá a distância do centro da elipse até o plano OXY e a inclinação da elipse λ em relação ao plano OXY, veja Figura 2.8.

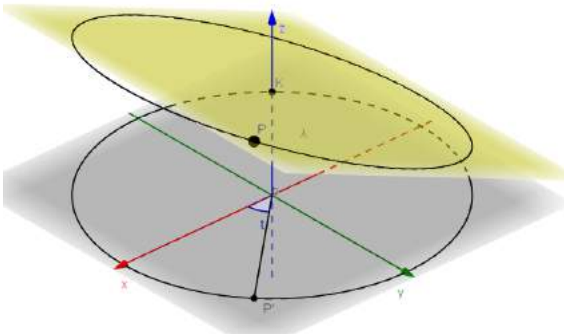


Figura 2.8: Elipse que projeta uma circunferência sobre o plano OXY

Para cada ponto $P = (x, y, z) \in \lambda$, tomemos P', que é a projeção ortogonal do ponto P sobre o plano OXY, e o ângulo t entre OX e OP' tal que $t \in [0,\ 2\pi]$, com isso, temos que as coordenadas x e y são as mesmas da circunferência sobre o plano OXY como já vimos na equação (2.17). Já a variável z, terá coodenadas bem diferentes, pois necessita ir variando conforme a variação de t, veja figura 2.9

A medida da altura k na Figura 2.8, pode ser facilmente calculada utilizando a função *tangente*. Assim, temos:

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$\tan\alpha = \frac{L}{raio}$$

$$L = raio\ \tan\alpha\ .$$

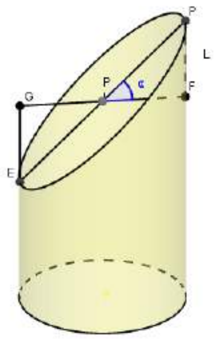


Figura 2.9: Ângulo de inclinação da elipse.

Porém, L não tem sempre a mesma medida. Como a circunferência da base foi criada usando as funções *seno* e *cosseno*, podemos usar uma dessas duas funções para realizar a variação de L. Com isso, a coordenada da variável z é $raio\ \cos(t)\ \tan(\alpha) + k$, sendo α o ângulo de inclinação entre, o plano OXY e o plano no qual está contida a elipse λ, e k é a distância entre o centro da elipse e o plano OXY.

Então, se a circunferência tem raio $R = 1$ e conhecidos α e k,

$$\lambda : \begin{cases} x &= cos(t) \\ y &= sen(t) \\ z &= cos(t)tan(\alpha) + k \end{cases} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi \tag{2.28}$$

são equações paramétricas dessa curva.

2.1.7 Parametrização da Ciclóide no plano OXY

Ciclóide é a curva formada pela trajetória percorrida por um ponto P de um círculo que rola ao longo de uma linha reta (sem escorregar). Se o círculo tiver raio r e rolar no sentido horário ao longo do eixo OX, e se uma posição de P for a origem, temos uma ciclóide como a da Figura 2.10.

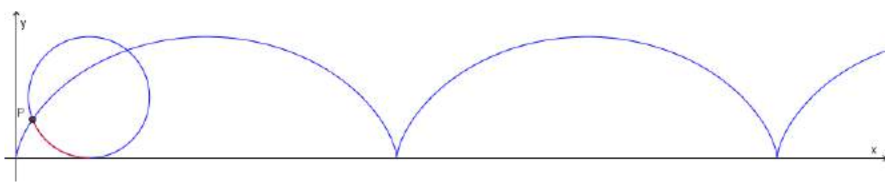


Figura 2.10: Ciclóide sobre o eixo OX e passando pela origem.

Para definirmos as equações paramétricas da ciclóide, escolhemos como parâmetro o ângulo de rotação θ do círculo ($\theta = 0$ quando P está na origem). Suponhamos que o círculo foi rotacionado por θ radianos. Como o círculo está em contato com a reta, vemos na Figura

2.11 que a distância obtida à medida que círculo é girado a partir da origem é:

$$|OT| = \ arco\ PT = r\theta \tag{2.29}$$

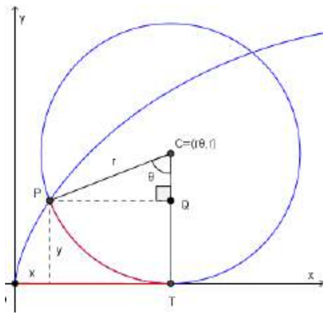


Figura 2.11: Ponto P na ciclóide de raio r e passando pela origem.

Dessa forma, o centro do círculo será $C = (r\theta,\ r)$. Sejam $(x,\ y)$ as coordenadas de P sobre a ciclóide. Então, a partir da Figura 2.11, vemos que:

$$x = |OT| - |PQ| \tag{2.30}$$

$$y = |TC| - |QC|\,. \tag{2.31}$$

Sabendo que $PQ = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $QC = r\cos\theta$, $TC = r$ e substituindo a equação (2.29) na equação (2.30), temos:

$$x = r\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta = r(\theta - \mathrm{sen}\,\theta) \tag{2.32}$$

$$y = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta) \tag{2.33}$$

Então

$$\lambda : \begin{cases} x = & r(\theta - \mathrm{sen}\,\theta) \\ y = & r(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad , \quad \theta \in I\!R \tag{2.34}$$

são equações paramétricas da ciclóide.

2.1.8 Parametrização de Hélice Circular Reta

Considerando um cilindro circular reto de raio a, com eixo de rotação coincidente com o eixo OZ e um triângulo retângulo C_1AC, com o vértice A coincidente com a interseção de uma das geratrizes do cilindro e o eixo OX, o lado $\overline{AC_1}$ coincidente com o eixo OX, o lado $\overline{C_1C}$ paralelo ao eixo OZ e de comprimento igual à altura do cilindro, ao girarmos o cilindro no sentido horário, a hipotenusa do triângulo irá formar sobre a superfície do cilindro uma curva chamada hélice, conforme Figura 2.12.

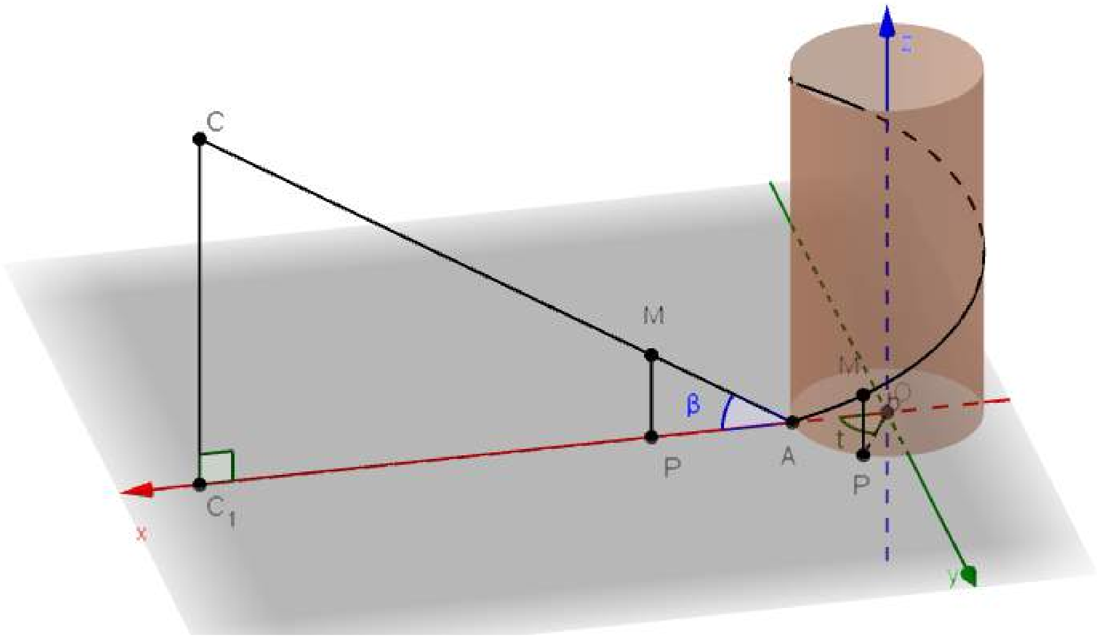


Figura 2.12: Hélice

Para escrevermos as equações paramétricas da hélice, devemos encontrar as coordenadas x, y e z do ponto variável M, ao deslocar no cilindro. Para isso, denotamos o ângulo AOP por t e o ângulo C_1AC por β. As coordenadas x e y, do ponto variável M, são iguais às coordenadas x e y de sua projeção P no plano OXY. E, com a variação de t, o ponto P no plano OXY descreve a trajetória de uma circunferência de raio a. Já a coordenada z, com a variação de t, será $z = PM = \widehat{AP}\ \ tan\beta$. Além disso, $\widehat{AP} = at$. Denotando a tangente de β por m, obtemos as seguintes equações paramétricas:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a\,cos(t) \\ y & = & a\,sen(t) \\ z & = & amt \end{array} \right. \quad , \quad t \in I\!R. \tag{2.35}$$

Não é difícil eliminarmos o parâmetro t destas equações. Para isto, basta elevarmos ambos os lados das equações de x e y ao quadrado e depois somarmos. Com isso, temos a equação $x^2 + y^2 = a^2$ do cilindro infinito, no qual a hélice está contida. E, além disso, $\dfrac{y}{x} = tan\,\dfrac{z}{am}$.

2.2 Parametrização de superfícies

De modo análogo à descrição de curvas, para descrevermos uma superfície serão necessários dois parâmetros, já que agora estamos falando de um objeto bidimensional, que possui área. Seja

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2.36}$$

a equação de uma superfície S em coordenadas retangulares. Sejam x, y e z funções de um par de variáveis $(u,\ v)$ numa região Q do plano, ou seja,

$$S : \begin{cases} x &= f(u,\ v) \\ y &= g(u,\ v) \\ z &= h(u,\ v) \end{cases} \ . \tag{2.37}$$

Se para quaisquer $(u,\ v)\ \in\ Q$, os valores de x, y e z determinados pelas equações (2.37) satisfazem a equação (2.36), então as equações (2.37) são chamadas equações paramétricas da superfície S e as variáveis independentes u e v são chamadas de parâmetros.

2.2.1 Parametrização de Esfera

Uma esfera ψ com centro na origem e raio r em $I\!R^3$ é definida por:

$$\psi = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ \ r > 0\} \tag{2.38}$$

A esfera ψ pode ser expressa parametricamente pelas equações

$$\psi : \begin{cases} x &= r\ sen(u)cos(v) \\ y &= r\ sen(u)sen(v) \\ z &= r\ cos(u) \end{cases} \quad , \quad u \in [0, \pi] \ \text{ e } \ v \in [0, 2\pi]\ . \tag{2.39}$$

Elevando ao quadrado cada uma das equações (2.39) e somando os resultados obtemos a equação que define a esfera ψ dada em (2.38), ou seja,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2sen^2(u)cos^2(v) + r^2sen^2(u)sen^2(v) + r^2cos^2(u) \\ &= r^2sen^2(u)(cos^2(v) + sen^2(v)) + r^2cos^2(u) \\ &= r^2(sen^2(u) + cos^2(u)) \\ &= r^2\ . \end{aligned}$$

2.2.2 Parametrização de Cilindro

Seja C uma curva plana e J uma reta que intersecta em um único ponto o plano que contém a curva C. O conjunto de todas as retas paralelas à reta J e que intersectam a curva C formam o que chamamos de cilindro. A curva C é a diretriz do cilindro e cada reta paralela a J que passa por C é uma geratriz do cilindro.

Se a parametrização de uma curva C é dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t)),\ t \in I \subset I\!R$, então parametrizamos o cilindro com geratriz sendo o eixo z, por:

$$\phi(t,z) = (x(t), y(t), z), \quad (t,z) \in I \times I\!R\ .$$

O cilindro sempre terá a "forma" da curva que o descreve. Portanto, se utilizarmos a equação de uma circunferência no plano OXY que tem parametrização:

$$C : \begin{cases} x &= cos(t) \\ y &= sen(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

então a parametrização do cilindro circular reto, como mostra a Figura 2.13, será:

$$C = \begin{cases} x &= cos(t) \\ y &= sen(t) \\ z &= h \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \text{ e } \ h \in I\!R. \tag{2.40}$$

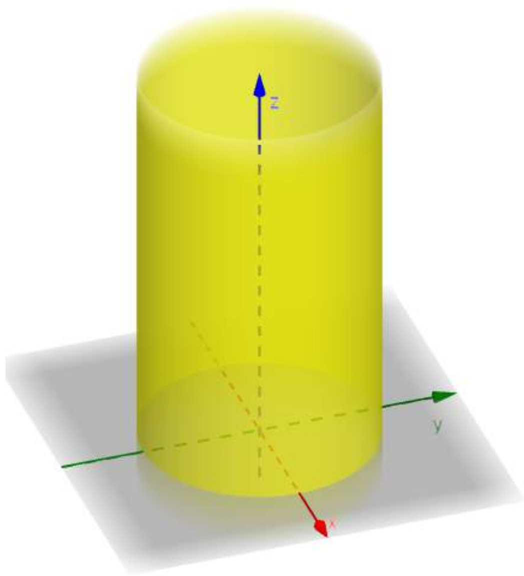


Figura 2.13: Cilindro circular reto

Quando utilizamos a equação de uma elipse no plano OXY, que tem parametrização:

$$\begin{cases} x &= a\cos(t) \\ y &= b\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

as equações paramétricas do cilindro elíptico (Figura 2.14) será:

$$\begin{cases} x &= a\cos(t) \\ y &= b\,\mathrm{sen}(t) \\ z &= h \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \ \text{ e } h \in I\!R. \tag{2.41}$$

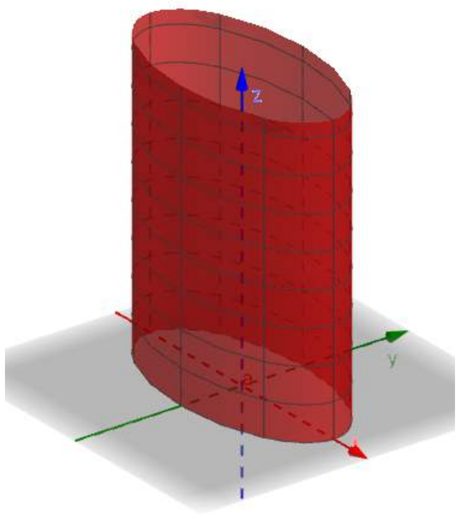


Figura 2.14: Cilindro elíptico reto

Como mais um exemplo, podemos ainda utilizar a parametrização de uma senóide,

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= sen(t) \end{cases}, \quad -2\pi \leq t \leq 2\pi,\ t \in I\!R\ .$$

Assim, as equações paramétricas do cilindro senoidal, será:

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= sen(t) \\ z &= h \end{cases}, \quad -2\pi \leq t \leq 2\pi,\ t \in I\!R\ . \tag{2.42}$$

Com isso, temos um cilindro senoidal, que é um cilindro "aberto". (ver Figura 2.14.)

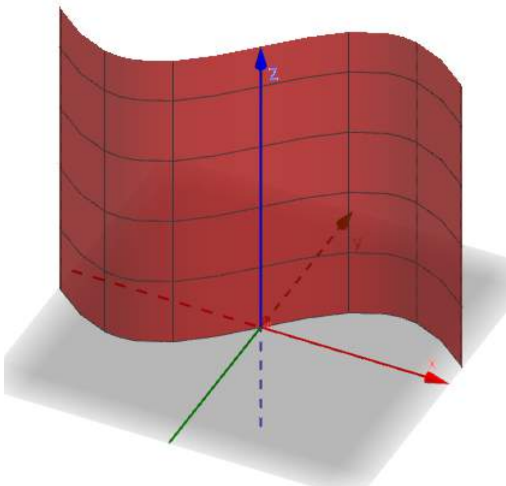


Figura 2.15: Cilindro senoidal reto

Capítulo 3

Tronco de Cilindro

3.1 Definição

Em geometria chama-se tronco a uma "fatia" cortada de um sólido geométrico (prisma, pirâmide, cilindro ou cone) por um plano que não intersecta as bases (ou a única base, no caso da pirâmide e do cone).

No caso de um prisma ou de um cilindro, o plano que corta o sólido formando um tronco não pode ser paralelo às bases, caso contrário, ficamos com outros dois prismas ou outros dois cilindros. O mesmo não acontece com o cone e a pirâmide.

Neste capítulo realizamos a construção de um tronco de cilindro usando o *software* GeoGebra $5.0.414.0 - d$ [3]. Também demonstramos uma forma de calcular sua área total e seu volume.

3.2 Construindo um Tronco de Cilindro.

Para construirmos um tronco de cilindro com o GeoGebra, criamos, na janela de visualização, três controles deslizantes. O primeiro, que chamamos de r, define o raio do cilindro, e configuramos para variar no intervalo de 1 até 5 e incremento de 0.1. O segundo, que chamamos de h, define a altura do cilindro, varia no intervalo de 1 até 10 e incremento de 0.1, e o terceiro, que chamamos de m, define a inclinação da secção do tronco. Neste último controle utilizamos a tangente do ângulo formado entre o plano que contem a base inferior e o plano que intersecta o cilindro formando o tronco. Quando estes planos são paralelos, o valor de m será zero, já que os planos podem ser coincidentes e o ângulo formado é zero, portanto este é o menor valor a ser utilizado no intervalo do controle deslizante. O maior valor a ser utilizado no intervalo do controle deslizante será de h/r já que por definição a secção não pode cortar a base do cilindro, com isso, o maior ângulo formado entre esses planos terá tangente igual a h/r, veja Figura 3.1.

Com os controles deslizantes criados, passamos à construção do tronco de cilindro pro-

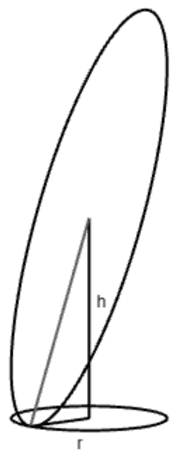


Figura 3.1: Maior ângulo entre os planos.

priamente dito. Para isso, abrimos a janela de visualização $3D$, e, nesta janela, utilizamos o comando:

Superfície (<Expressão>, <Expressão>, <Expressão>, <Variável Parâmetro 1 >, <Valor Inicial>, <Valor Final>, <Variável Parêmetro 2 >, <Valor Inicial>, <Valor Final>),

Com este comando construímos a superfície lateral, as bases inferior e superior, e a superfície lateral, que é a parte mais complexa desta construção, pois, a base superior não é paralela à base inferior.

Na construção da base inferior do tronco de cilindro, utilizamos o comando superfície, fazendo as seguintes substituições:

- <Expressão> por $p\cos(t)$
- <Expressão> por $p\,\text{sen}(t)$
- <Expressão> por 0
- <Variável Parâmetro 1 > por t
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por 2π
- <Variável Parâmetro 2 > por p
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por r

Após as substituições o comando fica assim descrito:

Superfície $(p\cos(t),\ p\,\mathrm{sen}(t),\ 0,\ t,\ 0,\ 2\pi,\ p,\ 0,\ r)$.

Com essas descrições, estamos inserindo nas expressões as equações da parametrização de um círculo de centro $(0,0)$, raio de medida igual a r e contido no plano OXY conforme equação (2.17). Este círculo fica totalmente preenchido e nesta construção é denotado por e, veja Figura 3.3.

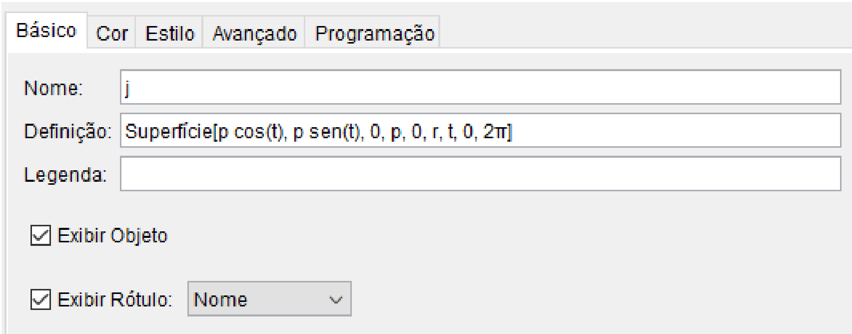


Figura 3.2: Comando para a construção da base inferior.

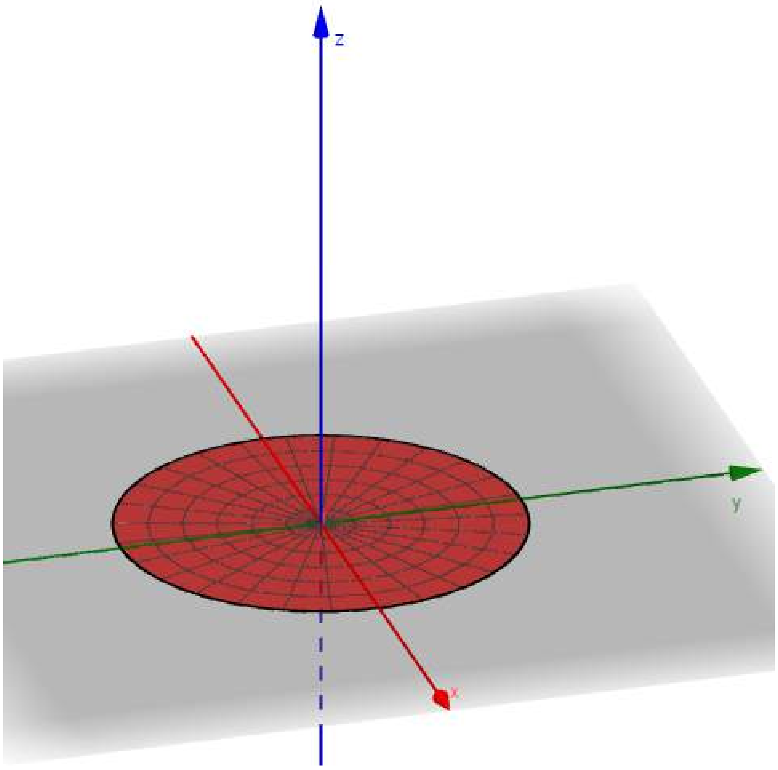


Figura 3.3: Base inferior do tronco de cilindro.

De forma análoga, efetuamos a construção da base superior e da superfície lateral. Na construção da base superior do tronco de cilindro fazemos as seguintes substituições:

- <Expressão> por $p\cos(t)$
- <Expressão> por $p\,\mathrm{sen}(t)$

- <Expressão> por $h + mp\,\mathrm{sen}(t)$
- <Variável Parâmetro 1 > por t
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por 2π
- <Variável Parâmetro 2 > por p
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por r

Após as substituições o comando fica assim descrito:

Superfície $(p\cos(t),\ p\,\mathrm{sen}(t),\ h + mp\,\mathrm{sen}(t),\ t,\ 0,\ 2\pi,\ p,\ 0,\ r)$.

Com essas descrições, estamos inserindo nas expressões as equações da parametrização de uma elipse de centro $(0, 0, h)$ que projeta um círculo de raio r no plano OXY conforme equação (2.27). Assim como no círculo, a elipse fica totalmente preenchida, veja Figura 3.5.

Na construção da superfície lateral, utilizamos a parametrização do cilindro reto conforme equação (2.40). Porém, como neste caso as bases não são paralelas, devemos variar a altura e também a inclinação da borda superior. Assim, fazemos as seguintes substituições:

- <Expressão> por $p\cos(t)$
- <Expressão> por $p\,\mathrm{sen}(t)$
- <Expressão> por $a(h + mr\,\mathrm{sen}(t))$
- <Variável Parâmetro 1 > por a
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por 1
- <Variável Parâmetro 2 > por t
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por 2π

Após as substituições o comando fica assim descrito:

Superfície $(p\cos(t),\ p\,\mathrm{sen}(t),\ a(h + mr\,\mathrm{sen}(t)),\ a,\ 0,\ 1,\ t,\ 0,\ 2\pi)$.

Como multiplicamos os valores da terceira expressão pela variável a, quando $a = 0$, os valores da terceira expressão são iguais aos valores da terceira expressão da base inferior. Como a varia de 0 até 1, os valores da terceira expressão sofrem um crescimento até os valores da terceira expressão da base superior, veja Figura 3.7.

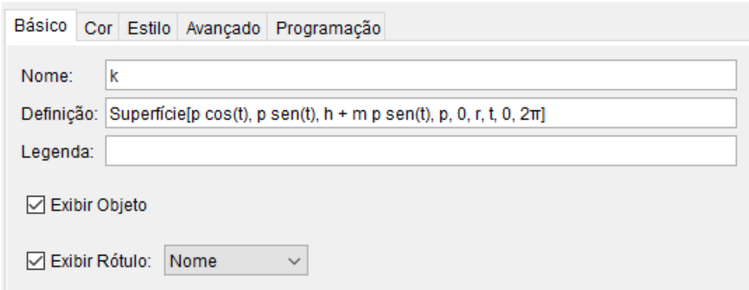


Figura 3.4: Comando para a construção da base superior.

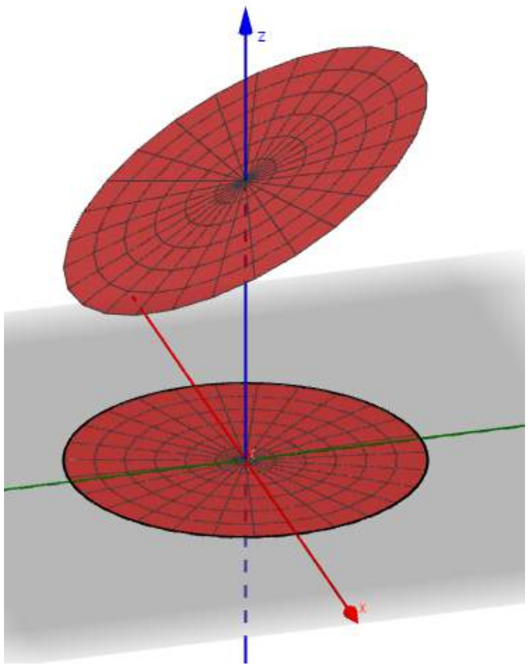


Figura 3.5: Bases inferior e superior do tronco de cilindro.

3.3 Planificação do Tronco de Cilindro.

Com o tronco de cilindro construído, passamos agora para sua planificação. Planificar um tronco de cilindro consiste em planificar a superfície lateral, posteriormente posicionar esta planificação e as bases superior e inferior em um mesmo plano.

Para planificarmos a superfície lateral do tronco de cilindro, marcamos alguns pontos sobre as margens das bases, pontos estes que nos auxiliam na construção da planificação. Como as bases foram construídas utilizando o comando "superfície", precisamos em primeiro lugar construir as margens dessas superfícies. Para construirmos a margem da base inferior utilizamos o comando:

Curva (<Expressão>, <Expressão>, <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)

e fazemos as seguintes substituições:

- <Expressão> por $r\cos(t)$
- <Expressão> por $r\,\mathrm{sen}(t)$
- <Expressão> por 0
- <Variável> por t
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por 2π

Após as substituições o comando fica assim descrito:

Curva $(r\cos(t),\ \ r\,\mathrm{sen}(t),\, 0,\, t,\, 0,\, 2\pi)$.

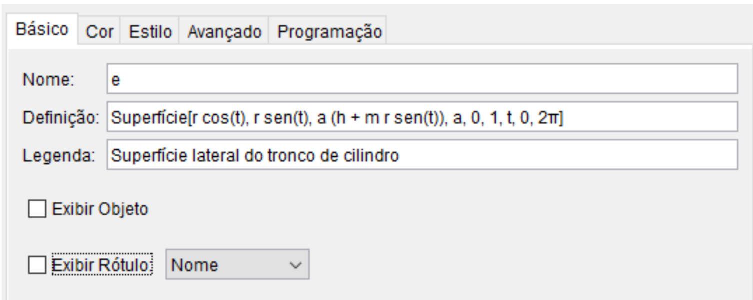


Figura 3.6: Comando para a construção da superfície lateral.

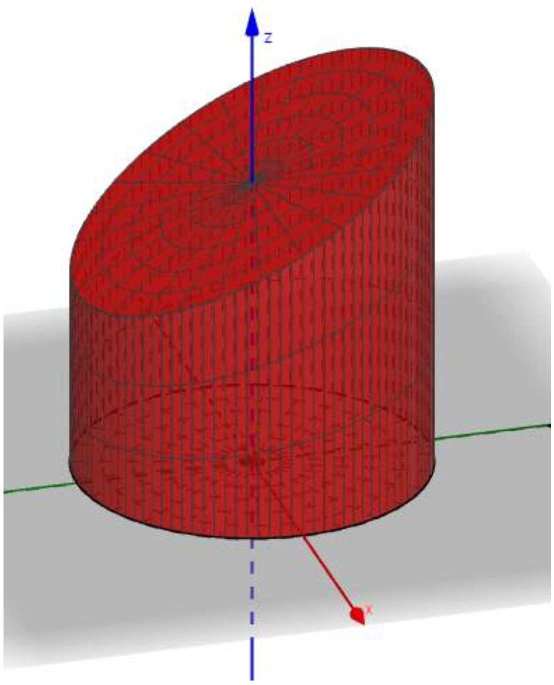


Figura 3.7: Superfície lateral do tronco de cilindro.

As expressões substituídas correspondem às equações da parametrização da base inferior do tronco de cilindro. Nesta construção, esta curva fica denotada por b. Devemos proceder de forma análoga com a margem da base superior, porém, agora utilizamos as equações da parametrização da base superior do tronco de cilindro. Assim, utilizamos o mesmo comando citado acima e fazemos as seguintes substituições:

- <Expressão> por $r\cos(t)$
- <Expressão> por $r\,\mathrm{sen}(t)$
- <Expressão> por $h + mr\,\mathrm{sen}(t)$
- <Variável> por t
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por 2π

Após as substituições o comando fica assim descrito:

Curva $(r\cos(t),\ r\,\mathrm{sen}(t), h + mr\,\mathrm{sen}(t), t, 0, 2\pi)$.

Nesta construção, esta curva fica denotada por a.

Com as margens construídas, marcamos sobre a margem da base superior um ponto. Para isso, utilizamos o comando ponto em objeto na barra de trabalho, e denotamos este ponto por C. Na margem da borda inferior, marcamos a projeção ortogonal do ponto C sobre a base inferior, que denotamos por P. Para isso, digitamos no campo de entrada $P = (x(C), y(C), 0)$. Com isso, o ponto P se desloca em função do ponto C. Marcamos outro ponto sobre a margem da base inferior para indicar o início da planificação. Ele pode ser marcado em qualquer posição da margem da base inferior. Nesta construção, marcamos este ponto, que denotamos B, na intersecção com o eixo X. Para isso, digitamos no campo de entrada $B = (r, 0, 0)$. Utilizamos este ponto também para medir o comprimento do arco formado entre os pontos B e P.

Todas as construções de curvas e pontos devem ser visualizadas apenas na janela $3D$. Para isso, devemos entrar em propriedades avançadas de cada construção e desativar a visualização da janela de visualização $2D$.

Com as curvas e pontos definidos, precisamos apenas definir o comprimento do arco $\widehat{PB}$. Para isso, utilizamos o comando

$$\mathit{Comprimento}[< \mathit{Curva} >,\ < \mathit{Ponto\ Inicial} >,\ < \mathit{Ponto\ Final} >],$$

e fazemos as seguintes substituições:

- $< Curva >$ por b
- $< Ponto\ Inicial >$ por B
- $< Ponto\ Final >$ por P.

Este comprimento fica indicado na janela de álgebra como um número. Nesta construção, este número é denotado por d.

Com a medida do comprimento do arco $\widehat{PB}$ definida, passamos à construção da planificação na janela de visualização. Assim como, toda a construção do tronco de cilindro só deve ser visualizada na janela $3D$, toda a construção da planificação só deve ser visualizada na janela de visualização $2D$. Para isso, todas as construções utilizadas na planificação devem ter, em suas propriedades avançadas, a janela de visualização $3D$ desativada.

Para iniciarmos a planificação, marcamos um ponto que serve de referência para a borda inferior da superfície lateral, denotado por P'. Para isso, digitamos no campo de entrada $P' = (d, 0)$. Dessa forma, este ponto permanece sobre o eixo X e tem deslocamento igual ao comprimento do arco $\widehat{PB}$. Lembramos que o comprimento deste arco pode variar de 0 até o comprimento da circunferência que define a base inferior do tronco de cilindro. Com o ponto P' devidamente marcado, construímos o lugar geométrico deste ponto em relação ao ponto C, utilizando o comando Lugar Geométrico da barra de tarefas. Este lugar geométrico limitará a parte inferior da planificação da superfície lateral do tronco de cilindro.

Para construirmos a curva que limitará a parte superior da planificação da superfície lateral, procedemos de forma análoga. Assim, marcamos um ponto, que denotamos por C', digitando na barra de entrada $C' = (x(P'), z(C))$. Dessa forma, o ponto C' se desloca acompanhando o ponto P' em relação ao eixo X e em relação ao eixo Y mantem a distância PC, definida na construção do tronco. Finalmente, para termos a visualização da curva que delimita a parte superior, utilizamos novamente o comando Lugar Geométrico da barra de tarefas, lembrando que o ponto C' se desloca em função do deslocamento do ponto C.

As linhas laterais são traçadas utilizando o comando:

Segmento(<Ponto>, <Ponto>)

na barra de entrada. Para traçarmos a lateral esquerda, fazemos as seguintes substituições:

- <Ponto> por $(0, 0)$
- $< Ponto >$ por $(0, h)$

pois, ao marcarmos o ponto B na construção do tronco de cilindro, este ponto é posicionado de forma que a distância BC é igual à altura h. E, este ponto é utilizado como início da planificação da superfície lateral. Já na lateral esquerda, fazemos as seguintes substituições:

- <Ponto> por $(2\pi r, 0)$
- $< Ponto >$ por $(2\pi r, h)$

pois o comprimento da curva que define a parte inferior da planificação da superfície lateral é dado por uma circunferência de raio igual a r. Com as laterais direita e esquerda definidas, temos a superfície lateral totalmente planificada, veja Figura 3.8.

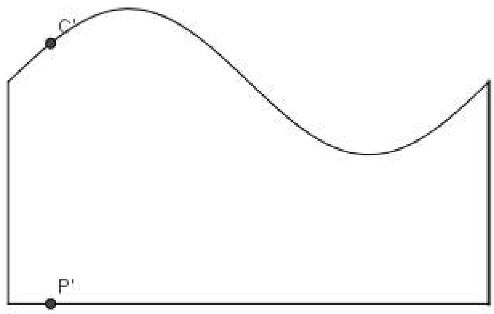


Figura 3.8: Planificação da superfície lateral do tronco de cilindro.

A base inferior deve ser construída digitando na barra de entrada o comando:

Círculo($< Ponto >$, $< Raio >$).

Este círculo deve estar localizado abaixo da planificação da superfície lateral. Como nesta construção a superfície lateral é delimitada na sua parte inferior pelo eixo X, temos que a coordenada Y deve ser $-r$. Já a coordenada X pode ser qualquer ponto entre 0 e $2\pi r$. Nesta construção utilizamos $2\pi r\frac{3}{4}$. Assim, fazemos as seguintes substituições:

- <Ponto> por $(2\pi r3/4, -r)$
- $< Raio >$ por r

Veja as Figuras 3.9 e 3.10.

A base superior é uma elipse e deve ser construída digitando na barra de entrada o comando:

Curva($<$ Expressão $>$, $<$ Expressão $>$, $<$ Variável $>$, $< Valor\ Inicial >$, $< Valor\ Final >$)

Esta elipse deve estar em qualquer localização acima da planificação da superfície lateral. Porém, como a curva que delimita a parte superior da superfície lateral nesta construção apresenta dois pontos críticos, um de máximo a $1/4$ do comprimento máximo e outro de mínimo a $3/4$ do comprimento máximo, utilizamos o ponto crítico de mínimo para facilitar

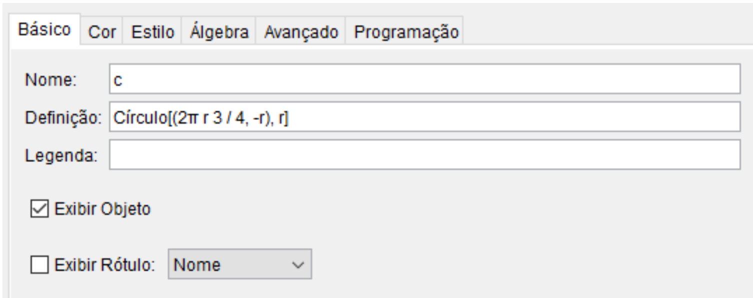


Figura 3.9: Comando para a construção da planificação da base inferior.

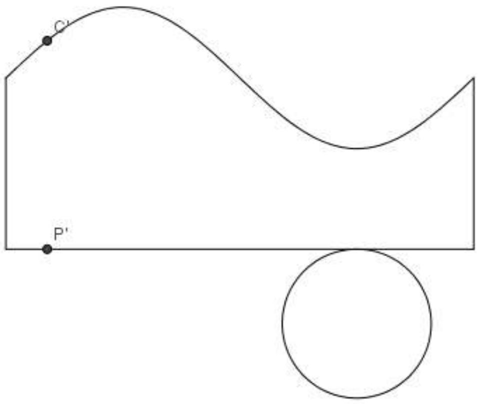


Figura 3.10: Planificação da base inferior do tronco de cilindro.

os cálculos. Com isso, a coordenada x do centro dessa elipse é $2\pi r(3/4)$, que corresponde ao ponto crítico de mínimo. A coordenada y deve ser h menos o deslocamento da curva até o ponto de mínimo, que pode ser calculado utilizando a tangente do ângulo de inclinação entre a base superior e a base inferior, que nesta construção é definido por m. Assim, esse deslocamento é dado por (mr) somado ao raio maior da elipse, que pode ser calculado utilizando o cosseno do ângulo formado pelas bases superior e inferior do tronco. Nesta construção, este ângulo está denotado por α e, portanto, este raio maior é $(r/\cos(\alpha))$. Assim, fazemos as seguintes substituições:

- $<$ Expressão $>$ por $r\cos(t) + 2\pi r\ 3/4$
- $<$ Expressão $>$ por $(r/\cos(\alpha))sen(t) + h - mr + (r/\cos(\alpha))$
- $<$ Variável $>$ por t
- $< Valor\ Inicial >$ por 0
- $< Valor\ Final >$ por 2π

Veja as Figuras 3.11 e 3.12.

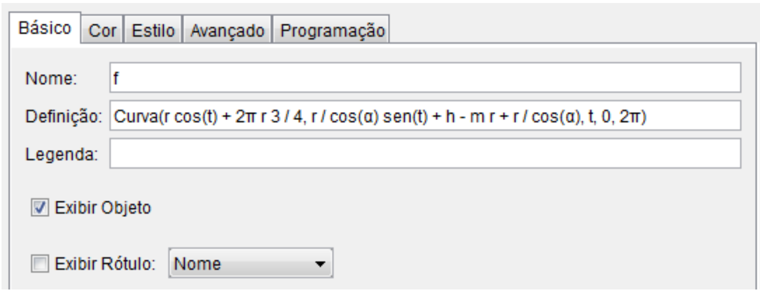


Figura 3.11: Comando para a construção da planificação da base superior.

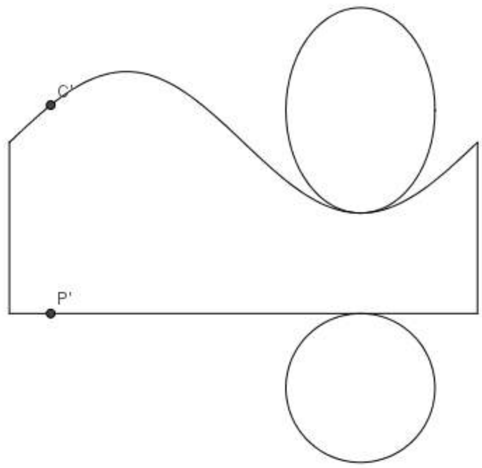


Figura 3.12: Planificação completa do tronco de cilindro, incluindo as bases superior e inferior.

3.4 Curva Formada na Planificação do Tronco de Cilindro.

Ao planificarmos um tronco de cilindro observamos que temos uma circunferência como sua base inferior, uma elipse como sua base superior e sua superfície lateral é uma figura plana com a parte superior definida por uma curva que depende do ponto no qual se inicia a planificação e o sentido do giro.

Para efeito de estudo, tomamos uma elipse e uma circunferência de mesmo centro e com inclinação entre elas igual à inclinação entre a base inferior e a base superior do tronco de cilindro. A circunferência está contida no plano OXY e iniciamos o estudo da curva partindo de um dos pontos de intersecção da circunferência com a elipse, ponto este que denotamos por X O centro da circunferência denotamos por C e o raio por r, veja Figura 3.13.

Como o ponto X foi marcado na intersecção da circunferência com a elipse e tomamos um sentido de giro anti-horário, temos uma curva começando em X_0 e com inclinação de início ascendente. Porém, vale lembrar que este ponto X pode ser marcado em qualquer ponto da circunferência.

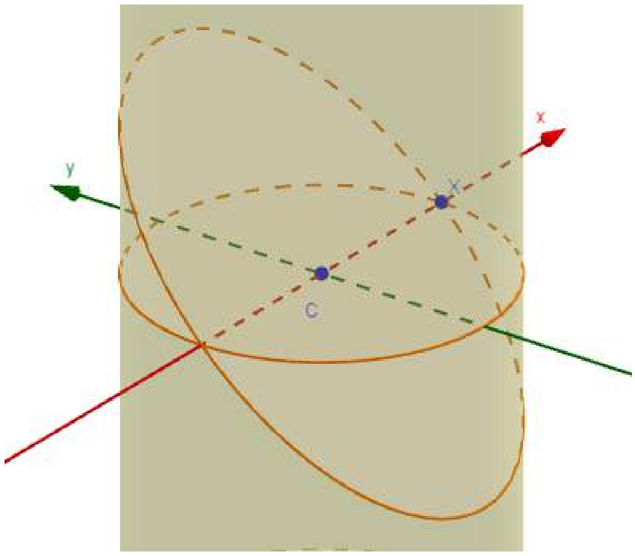


Figura 3.13: Circunferência e elipse de mesmo centro.

Com o objetivo de sanar a curiosidade e facilitarmos o processo de planificação desse objeto, demonstramos por cálculos que curva é essa.

Marcamos um ponto A sobre a circunferência e marcamos também a projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo X, que denotamos por B. Podemos notar que ao ligarmos os pontos A, C e B, temos um triângulo retângulo em B, veja Figura 3.14, e a medida do cateto $\overline{AB}$ é dada por:

$$AB = AC \operatorname{sen} A\widehat{C}B. \tag{3.1}$$

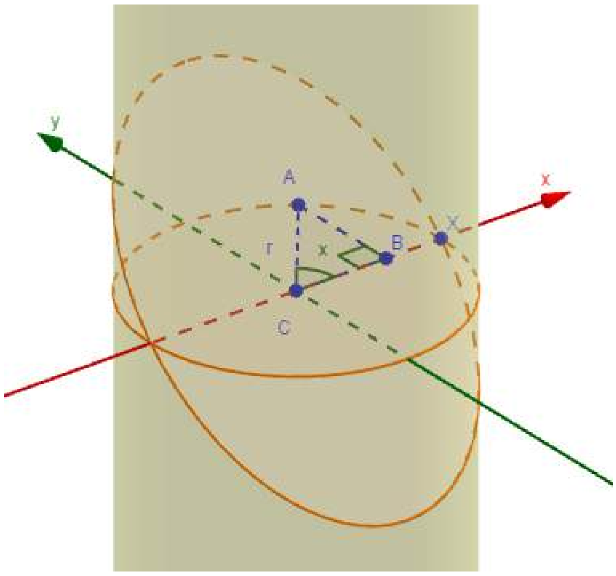


Figura 3.14: Circunferência e elipse de mesmo centro.

Sabendo que a medida do ângulo $A\widehat{C}B$ é dada pelo comprimento do arco $\widehat{AX}$, que aqui denotamos por x, temos:

$$
\begin{aligned}
x &= 2\pi r \frac{A\widehat{C}B}{2\pi} \\
A\widehat{C}B &= \frac{x}{r}. \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Substituindo a equação (3.2) na equação (3.1), e lembrando que $r = AC$, temos:

$$AB = r \operatorname{sen}\left(\frac{x}{r}\right) \qquad (3.3)$$

A projeção vertical do ponto A sobre a elipse gera um ponto que denotamos por D. Ligando os pontos A, B e D temos um triângulo retângulo em A. Nesse triângulo, o ângulo do vértice B é dado pelo ângulo de formação do tronco, ou seja, pelo ângulo formado pelo plano da base superior e pelo plano da base inferior. A medida AB é dada pela equação (3.3) e, com isso, calculamos a medida AD em função de AB, veja Figura 3.15.

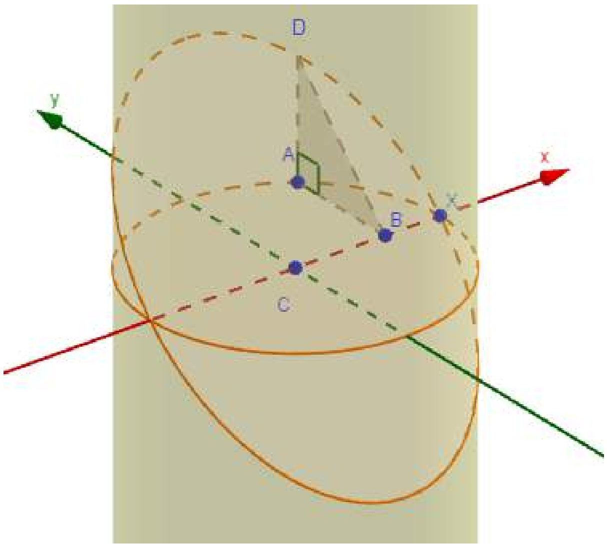


Figura 3.15: Circunferência e elipse de mesmo centro.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} A\widehat{B}D &= \frac{AD}{AB} \\
AD &= AB \ \operatorname{sen} A\widehat{B}D. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

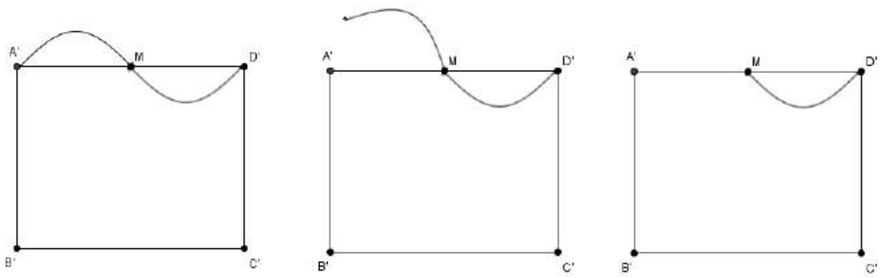
Usando (3.3), temos:

$$AD = r \ \operatorname{sen} A\widehat{B}D \ \operatorname{sen}\left(\frac{x}{r}\right) \qquad (3.5)$$

Como na equação (3.5), os valores de $\operatorname{sen} A\widehat{B}D$ e r são constantes, temos que a curva é uma senóide.

3.5 Área Lateral

Para se calcular a área lateral de um tronco de cilindro, usamos a planificação da superfície lateral Figura 3.8 e precisamos calcular a altura média $A'B'$, pois, a curva que está acima do segmento $A'D'$ se encaixa perfeitamente sobre a curva que está abaixo do segmento $A'D'$, formando um retângulo perfeito.



Com a certeza de que a área lateral é igual a de um retângulo, cuja base tem medida igual ao comprimento da circunferência da base do tronco de cilindro e a altura igual à média entre a maior (H) e a menor altura (h) do tronco do cilindro, e caso conhecemos estas alturas, temos:

$$A_{lateral} = 2\pi r \frac{(H+h)}{2}$$

$$A_{lateral} = \pi r(H+h). \tag{3.6}$$

Caso não tenhamos a menor altura do tronco do cilindro, mas tenhamos a inclinação do plano que determinou o corte do tronco, o cálculo da área lateral será feito subtraindo, de sua altura total, a metade da tangente do ângulo do plano de corte, multiplicado pelo dobro do raio, veja Figura 3.16.

Caso conhecemos apenas a maior altura H (altura total) e a inclinação α do plano que determina o corte do tronco, podemos obter a altura menor h. Pela Figura 3.16, temos:

$$tan\ \alpha = \frac{d}{2r}\ ,$$

com $d = H - h$. Logo,

$$h = H - d = H - 2r\ tan\ \alpha.$$

Usando (3.6),

$$A_{lateral} = \pi r(H + H - 2r\ tan\ \alpha).$$

Portanto,

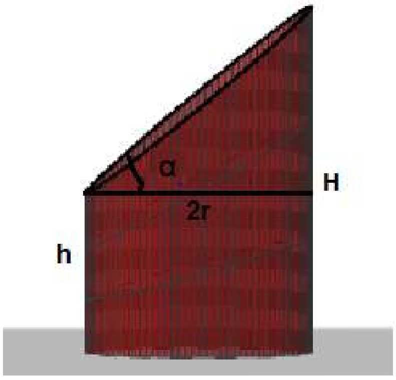


Figura 3.16: Tronco de cilindro, suas alturas e o ângulo de inclinação.

$$A_{lateral} = 2\pi r(H - 2r\ tan\ \alpha). \quad (3.7)$$

3.6 Área Total do Tronco de Cilindro.

Para calcularmos a área total do tronco de cilindro, basta somarmos a área lateral dada pela equação (3.6), a área da base inferior, que nada mais é do que a área de um círculo, e a área da base superior, que é uma elipse e sua área é dada por (1.3). Assim,

$$A_{Total} = \pi r(H + h) + \pi r^2 + \pi ab\ ,$$

com a e b os semi-eixos maior e menor da elipse, respectivamente.

Como a elipse é uma secção do cilindro, temos que $b = r$ e $a = \dfrac{r}{cos\alpha}$, então:

$$A_{Total} = \pi r(H + h) + \pi r^2 + \pi r\frac{r}{cos\alpha}.$$

Portanto,

$$A_{Total} = \pi r\left(H + h + r + \frac{r}{cos\alpha}\right). \quad (3.8)$$

3.7 Volume do Tronco de Cilindro.

Em um cilindro reto, para calcularmos seu volume, basta multiplicarmos a área de sua base por sua altura.

No caso de um tronco de cilindro, temos um plano seccionando parte da altura deste cilindro, portanto, para calcularmos seu volume que aqui chamamos de V, basta percebermos que se isolarmos a parte do cilindro na qual se deu o corte transversal, temos na parte inferior um cilindro reto e na parte superior, a metade de um cilindro reto, com isso podemos calcular os volumes separadamente e posteriormente somá-los ou simplesmente calcularmos o volume do cilindro considerando a média entre a maior altura H e a menor altura h.

$$V = \pi r^2 \, \frac{H + h}{2}. \tag{3.9}$$

Capítulo 4

Cilindro Oblíquo

4.1 Definição

Cilindro circular oblíquo é um cilindro cujas bases são círculos de mesmo raio, situados em planos paralelos, e seu eixo é oblíquo às bases. A secção transversal de um cilindro oblíquo é um círculo de raio igual ao raio da base, a secção meridiana é um paralelogramo.

Neste capítulo realizamos a construção de um cilindro oblíquo usando o *software* GeoGebra $5.0.414.0 - d$. Também demonstramos uma forma de calcular sua área total e seu volume.

4.2 Construindo um Cilindro Oblíquo.

Para construir um cilindro oblíquo com o GeoGebra, criamos, na janela de visualização, três controles deslizantes. O primeiro, que chamamos de r, define o raio do cilindro, e configuramos para variar no intervalo 0 até 5 e incremento de $0,1$. O segundo, que chamamos de h, define a altura do cilindro, varia no intervalo de 0 até 15 e incremento de $0,1$, e o terceiro, que chamamos de β, define a inclinação do cilindro. Neste último controle selecionamos a opção ângulo e configuramos para variar no intervalo de 0 até 90 e incremento de 1, veja a Figura 4.1. Os controles deslizantes r e h podem ter intervalos maiores que os usados nesta construção.

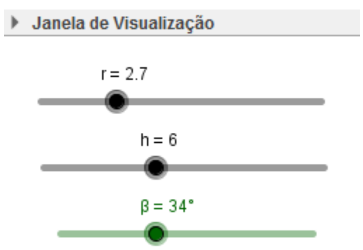


Figura 4.1: Controles deslizantes.

Exibimos agora a janela de visualização $3D$. Com a janela de visualização $3D$ aberta, primeiro traçamos o eixo de inclinação do cilindro, para isso digitamos na barra de entrada o comando:

Segmento(<Ponto>, <Ponto>).

Com o comando selecionado e levando em consideração a inclinação do cilindro, fazemos as seguintes substituições:

- <Ponto> por $(-0.2h\tan(\beta),\ \ 0\ ,\ \ -0.2h\ )$
- $< Ponto >$ por $(1.2h\tan(\beta),\ \ 0\ ,\ \ 1.2h\ )$

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

Segmento($(-0.2h\tan(\beta),\ \ 0\ ,\ \ -0.2h), (1.2h\tan(\beta),\ \ 0\ ,\ \ 1.2h\ )$).

Definido o segmento, alteramos em suas propriedades o estilo para tracejado. Todos os comandos utilizados, na construção do cilindro oblíquo, devem ter suas configurações alteradas para serem exibidos apenas na janela de visualização $3D$, veja Figura 4.2.

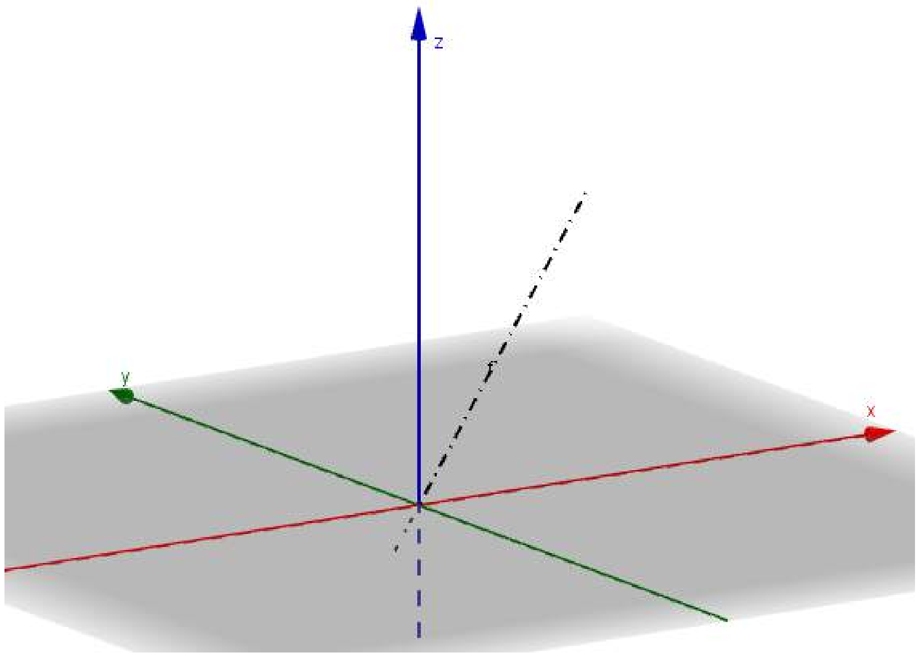


Figura 4.2: Eixo de iclinação do cilindro oblíquo.

Com o eixo de inclinação definido e traçado, utilizamos o comando:

Superfície (<Expressão>, <Expressão>, <Expressão>, <Variável Parâmetro 1 >, <Valor Inicial>, <Valor Final>, <Variável Parâmetro 2 >, <Valor Inicial>, <Valor Final>), para construirmos a superfície lateral e as bases inferior e superior do cilindro oblíquo.

Iniciamos pela construção da base inferior do cilindro oblíquo e no comando Superfície, fazemos as seguintes substituições:

- <Expressão> por $p\cos(t)$
- <Expressão> por $p\,\mathrm{sen}(t)$
- <Expressão> por 0
- <Variável Parâmetro 1 > por t
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por 2π
- <Variável Parâmetro 2 > por p
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por r

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

Superfície $(p\cos(t),\ p\,\mathrm{sen}(t),\ 0,\ t,\ 0,\ 2\pi,\ p,\ 0,\ r)$.

Com isso, estamos inserindo nas expressões os valores da parametrização de um círculo de centro $(0, 0)$ e contido no plano OXY conforme equação (2.17). Com a primeira variável, garantimos uma volta completa (0 até 2π) e com a segunda variável garantimos o preenchimento do círculo, veja Figura 4.3.

Na construção da superfície lateral do cilindro oblíquo, utilizamos também o comando Superfície do GeoGebra. Nele inserimos os valores da parametrização do cilindro reto conforme equação (2.40). Devemos também tomar o cuidado para que as expressões tenham os mesmos valores da parametrização do círculo usado na base inferior do cilindro oblíquo, com exceção da primeira expressão na qual é adicionado $z\tan\beta$. Com isso, quando o valor de z variar, o centro do círculo que gera a superfície lateral do cilindro também varia e, assim, o mesmo fica com inclinação β.

Fazemos então as seguintes substituições:

- <Expressão> por $r\cos(t) + z\tan\beta$
- <Expressão> por $r\ sin(t)$
- <Expressão> por z

- <Variável Parâmetro 1 > por t
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por 2π
- <Variável Parâmetro 2 > por $< z >$
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por $< h >$

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

$$\text{Superfície }(r\cos(t) + z\tan\beta,\ \ r\ sin(t),\ \ z,\ \ t,\ \ 0,\ \ 2\pi,\ \ z,\ \ 0,\ \ h).$$

Com a primeira variável, garantimos uma volta completa (0 até 2π) e com a segunda variável garantimos a altura do cilindro, veja Figura 4.4.

Com a superfície lateral pronta partimos para a construção da base superior do cilindro oblíquo. Para isso, utilizamos novamente o comando Superfície do GeoGebra. As coordenadas, neste caso, são as mesmas da parametrização de um círculo paralelo ao plano OXY (2.27). Esta construção é muito parecida com a da base inferior, tendo como diferencial que, agora, o centro não está mais na origem e sim sobre o eixo de inclinação do cilindro, portanto, as coordenadas são idênticas às usadas na superfície lateral.

Fazemos então as seguintes substituições:

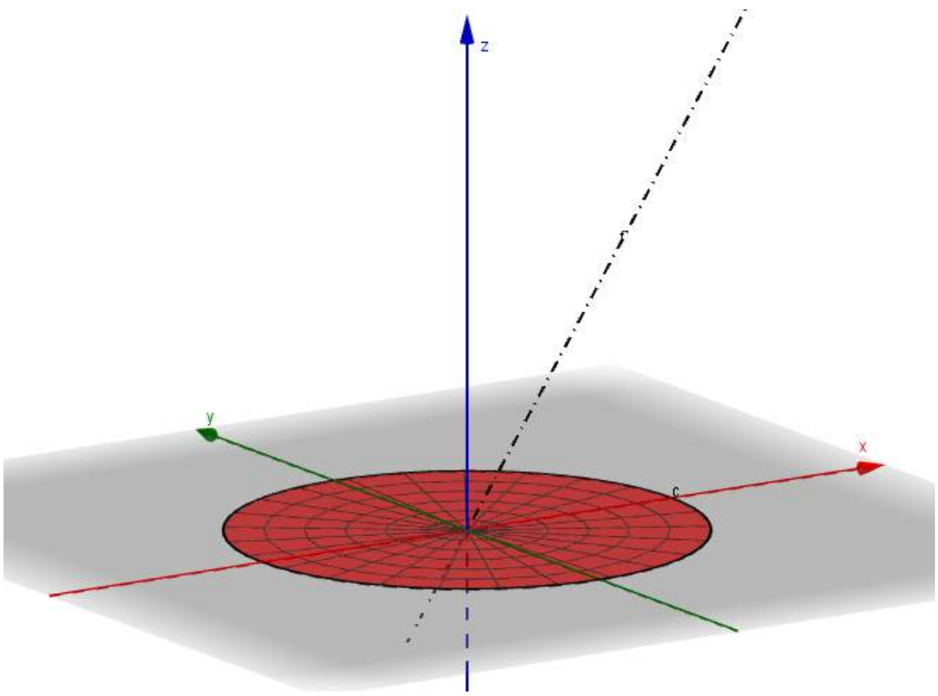


Figura 4.3: Base inferior do cilindro oblíquo.

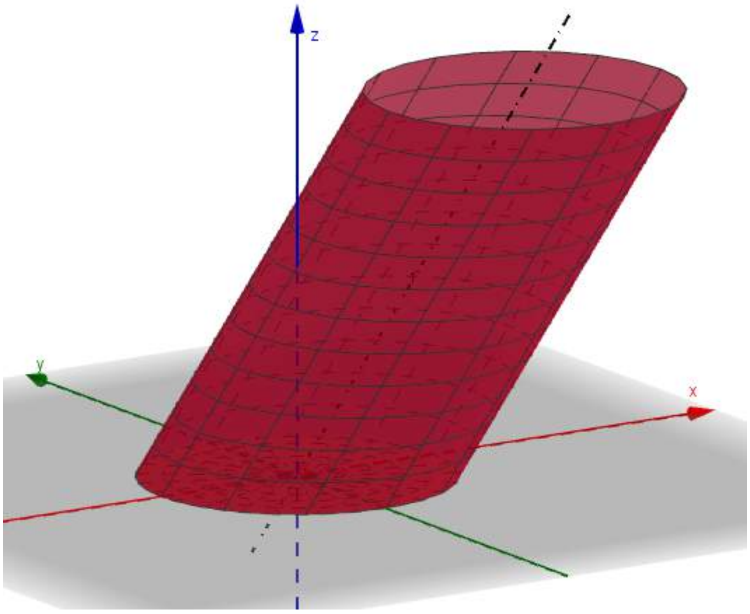


Figura 4.4: Superfície lateral do cilindro oblíquo.

- <Expressão> por $p\cos(t) + h\tan\beta$
- <Expressão> por $p\ sin(t)$
- <Expressão> por h
- <Variável Parâmetro 1 > por t
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por 2π
- <Variável Parâmetro 2 > por p
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por r

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

Superfície $(p\cos(t) + h\tan\beta,\ \ p\ sin(t),\ \ h,\ \ t,\ \ 0,\ \ 2\pi,\ \ < p >,\ \ 0,\ \ r).$

Com a primeira variável, garantimos uma volta completa (0 até 2π) e com a segunda variável garantimos o preenchimento do círculo, veja Figura 4.6.

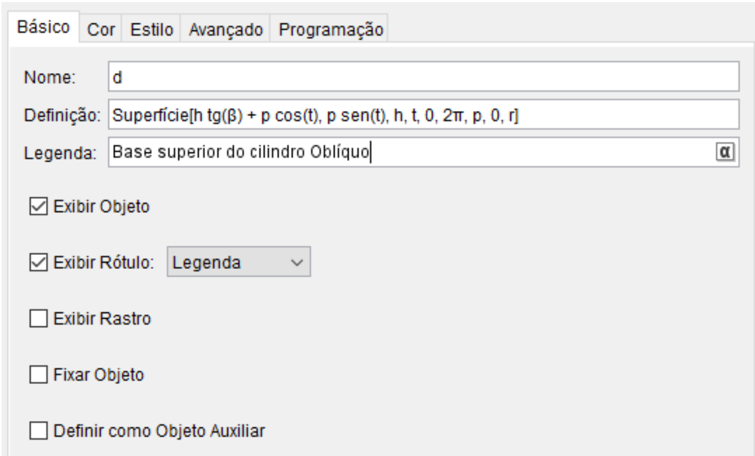


Figura 4.5: Comando para a construção da base superior.

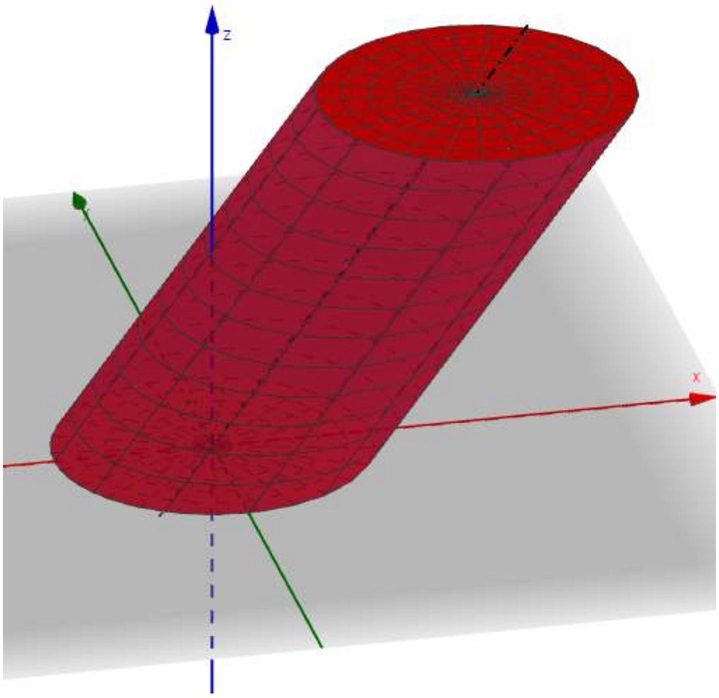


Figura 4.6: Cilindro oblíquo.

4.3 Planificação de um Cilindro Oblíquo.

Para realizarmos a planificação do cilindro oblíquo, temos que planificar a superfície lateral. Para tornar esse processo mais simples, utilizamos apenas uma secção paralela à base do cilindro em qualquer altura, que é uma circunferência. Utilizamos também uma secção perpendicular ao eixo de inclinação f, passando pelo centro da circunferência gerada na secção anterior, que é uma elipse. Essas duas secções são desenhadas fora do cilindro oblíquo, para facilitar a visualização.

Antes de construirmos as secções do cilindro oblíquo, criamos eixos que nos auxiliam nesta construção. Criamos então um novo centro para as secções do cilindro oblíquo. Para isso, marcamos um ponto C' de coordenadas $(-3r, 0, 0)$ e, com este centro definido, passamos à construção dos eixos auxiliares. O eixo X continua sendo o mesmo, o eixo Y, aqui denotado por Y', é paralelo ao eixo Y e, para traçá-lo, utilizamos, na barra de entrada, o comando:

Reta (<Ponto>, <Reta Paralela>).

Com o comando selecionado, fazemos as seguintes substituições:

- <Ponto> por C'
- $< Reta\ Paralela >$ por $EixoY$

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

Reta (C', $EixoY$).

O eixo de inclinação f, aqui denotado por f', é paralelo ao eixo Z. Para traçá-lo também utilizamos na barra de entrada o comando:

Reta (<Ponto>, <Reta Paralela>).

Com o comando selecionado, fazemos as seguintes substituições:

- <Ponto> por C'
- $< Reta\ Paralela >$ por $EixoZ$

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

Reta (C', $EixoZ$).

Já o eixo Z, aqui denotado por Z', deve ter uma inclinação em relação ao eixo f' igual à inclinação do cilindro oblíquo. Para traçá-lo, utilizamos na barra de entrada o comando:

Reta (<Ponto>, <Ponto>).

Com o comando selecionado, fazemos as seguintes substituições:

- <Ponto> por C'
- <Ponto> por $(x(C') - sen(\beta), 0, cos(\beta))$

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

Reta (C', $(x(C') - sen(\beta), 0, cos(\beta))$).

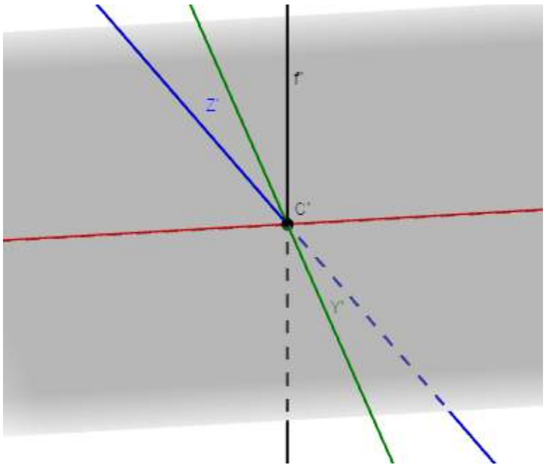


Figura 4.7: Eixos auxiliares para planificação do cilindro oblíquo.

Todas essas construções estão representadas na Figura 4.7 e devem ser visualizadas apenas na janela $3D$.

Com os eixos auxiliares construídos, passamos à construção das secções. A circunferência é formada pela secção paralela ao plano OXY no cilindro oblíquo, portanto, perpendicular ao eixo Z, agora, portanto, a seção é perpendicular ao eixo Z'. Para traçá-la, usamos na barra de entrada o comando:

Círculo (<Ponto>, <Raio>, <Direção>).

Com o comando selecionado, fazemos as seguintes substituições:

- <Ponto> por C'
- <Raio> por r
- <Direção> por Z'

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

Círculo (C', r, Z'),

como mostra a Figura 4.8.

A elipse é formada pela secção perpendicular ao eixo de inclinação f no cilindro oblíquo, agora, portanto, a seção é perpendicular ao eixo f', ou seja, contida no plano OXY' e, para traçá-la, usamos na barra de entrada o comando:

Curva (<Expressão>, <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>).

Com o comando selecionado, utilizamos as coordenadas da parametrização de uma elipse contida no plano OXY, conforme (2.26). Portanto, fazemos as seguintes substituições:

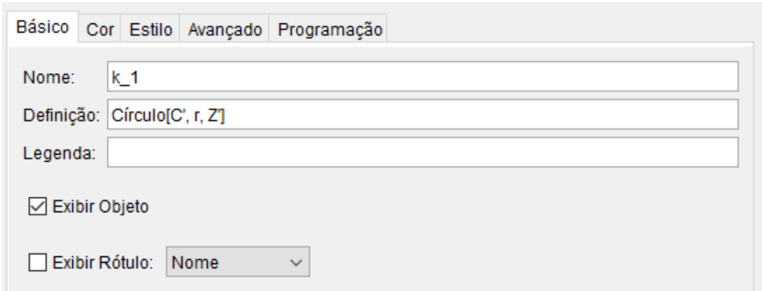


Figura 4.8: Comando para a construção da circunferência.

- <Expressão> por $sen(t)cos(\beta) - 3r$
- <Expressão> por $cos(t)r$
- <Variável> por t
- <Valor Inicial> por 0
- <Valor Final> por 2π

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

Curva $(sen(t)cos(\beta) - 3r,\ cos(t)r,\ t,\ 0,\ 2\pi)$,

como podemos ver na Figura 4.9.

A construção desta elipse, denotada por e, deve ser visualizada apenas na janela $3D$, veja Figura 4.10.

Com as secções definidas e construídas, precisamos tomar a decisão de onde iniciar a planificação da superfície lateral, pois quando realizamos esse processo em um cilindro reto, temos sempre um retângulo como resultado da planificação da superfície lateral, já com um cilindro oblíquo, temos curvas paralelas nas partes superior e inferior da planificação da superfície lateral.

Nesta construção, iniciamos a planificação por um dos pontos de intersecção entre a circunferência e o eixo Y'. Para isso, na segunda caixa de ferramentas, na barra de ferramentas localizada na parte superior da tela, selecionamos a ferramenta intersecção entre dois objetos. Com a ferramenta selecionada, clicamos na intersecção desejada para criar o ponto. A seguir, clicamos com o botão direito do *mouse* sobre o ponto, selecionamos a opção renomear e denotamos este ponto por A. Depois, marcamos também um ponto sobre a elipse. Para isso, utilizamos também a segunda caixa de ferramentas e selecionamos a ferramenta ponto em objeto. Com a ferramenta selecionada, clicamos sobre a elipse criando um ponto e denotamos por P.

Com o ponto P marcado, precisamos de sua distância até a circunferência, pois esta distância define a trajetória da curva formada na planificação. Como esta distância varia

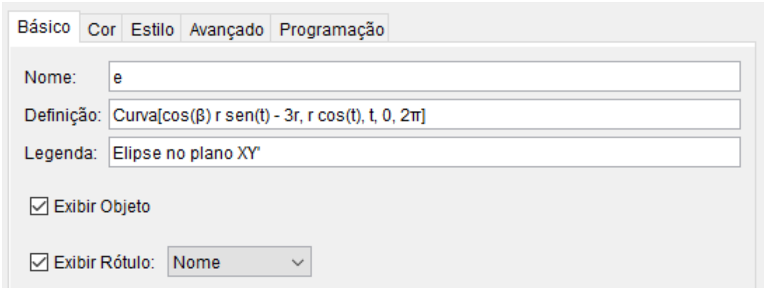


Figura 4.9: Comando para a construção da elipse.

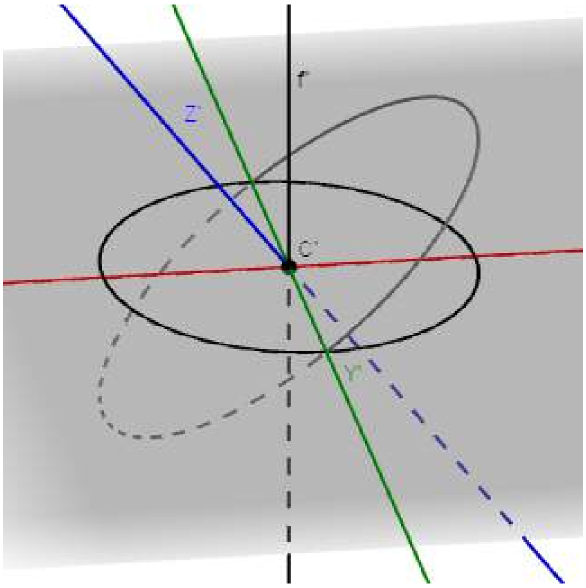


Figura 4.10: Secções do cilindro oblíquo.

em função da localização de P na elipse, traçamos uma reta auxiliar passando por P e perpendicular à elipse. Para isso, na quarta caixa de ferramentas da barra de ferramentas, selecionamos a ferramenta reta perpendicular, clicamos no ponto P e, depois, na elipse. Criamos agora um ponto na intersecção entre a reta perpendicular que passa por P e a elipse. Para isso, usamos novamente a ferramenta intersecção entre dois objetos e, com a ferramenta selecionada, clicamos na intersecção desejada para criar o ponto. A seguir, clicamos com o botão direito do *mouse* sobre este ponto, selecionamos a opção renomear e denotamos este ponto por P', como na Figura 4.11.

Com todos os pontos marcados, precisamos saber qual a medida do arco formado entre os pontos A e P na elipse e. Para isso, usamos na barra de entrada o comando:

Comprimento (<Função>, <Ponto Inicial>, <Ponto Final>).

Com o comando selecionado, fazemos as seguintes substituições:

- <Função> por e
- <Ponto Inicial> por A

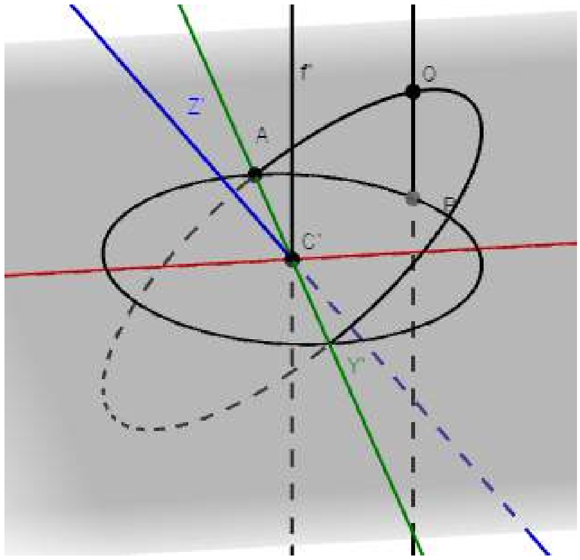


Figura 4.11: Secções do cilindro oblíquo.

- <Ponto Final> por P

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

Comprimento (e, A, P).

Esta medida fica registrada na janela de álgebra, no campo dos números, e é denotada pela letra g.

Passamos agora para a construção da planificação na janela de visualização. Iniciamos criando um ponto na origem do sistema. Para isso, digitamos na barra de entrada $A' = (0, 0)$, que fica denotado por A' e representa o ponto A, ponto este escolhido para início da planificação. Criamos também um ponto para representar o ponto P e, para isso, digitamos na barra de entrada $P' = (g, 0)$. Com isso, a distância entre os pontos A' e P' é igual ao comprimento do arco $\widehat{AP}$ na elipse e.

Para definirmos a curva formada na planificação do cilindro oblíquo, criamos o ponto que representa o ponto Q, digitando na barra de entrada $Q' = (x(P'), z(Q))$. Com isso, a distância entre P' e Q' é igual à distância entre P e Q. Com estes pontos definidos, ao deslocarmos o ponto P na janela de visualização $3D$ e fazendo com que ele percorra todo o perímetro da elipse e, os pontos P' e Q' também se deslocam, sendo que P' descreve a trajetória de um segmento de reta de comprimento igual ao perímetro da elipse. Já o ponto Q' descreve a trajetória de uma curva.

Para visualizarmos a curva formada pela trajetória do ponto Q' em função do deslocamento de P, utilizamos a ferramenta Lugar Geométrico da quarta caixa de ferramentas, da barra de ferramentas na parte superior da tela. Com o comando selecionado, clicamos uma vez no ponto Q' e depois no ponto P. Com isso, a curva formada representa a parte inferior da planificação da superfície lateral do cilindro oblíquo, veja Figura 4.12.

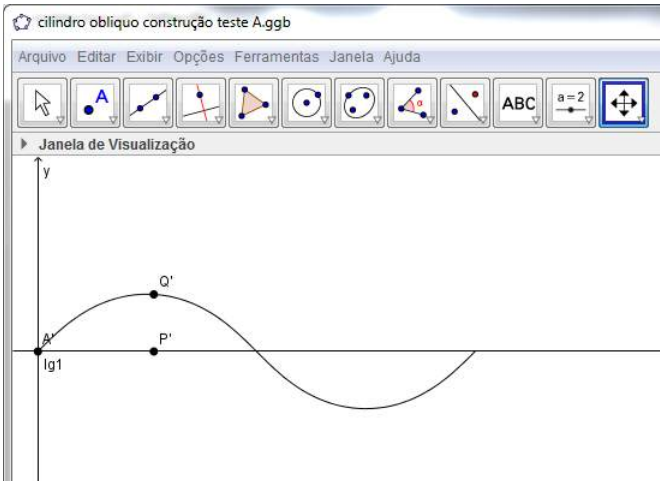


Figura 4.12: Curva inferior da planificação.

Criamos agora um ponto denotado por Q'' para descrever a trajetória da curva da parte superior da planificação da superfície lateral do cilindro oblíquo. Para isso, digitamos na barra de entrada $Q'' = (x(Q'), y(Q') + (h/cos\beta))$. Para visualizarmos a curva, novamente utilizamos o comando Lugar Geométrico da barra de tarefas e, com o comando selecionado, clicamos uma vez no ponto Q'' e, depois, no ponto P.

Para ligarmos as duas curvas da planificação da superfície lateral, devemos construir dois segmentos de retas nas extremidades das curvas. Para isso, utilizamos na barra de entrada o comando:

Segmento (<Ponto>, <Ponto>).

O primeiro segmento liga as extremidades iníciais das duas curvas e, como a distância entre elas é a medida da geratriz $h/cos(\beta)$, fazemos as seguintes substituições:

- <Ponto> por A'
- <Ponto> por $(0, h/cos(\beta))$

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

Segmento (A', $(0, h/cos(\beta))$).

O segundo segmento liga as extremidades finais da duas curvas, porém, não temos as coordenadas dessas extremidades. Para obtermos tais coordenadas, utilizamos na barra de entrada o comando:

Comprimento (<Curva>, <Valor de t Inicial>, <Valor de t Final>).

Fazemos as seguintes substituições:

- <Curva> por e
- <Valor de t Inicial> por 0
- <Valor de t Final> por 2π

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

Comprimento (e, 0, 2π)

Nesta construção, o comprimento do segmento fica registrado na janela de álgebra, denotado por c.

Com o comprimento da elipse definido, podemos construir o segundo segmento de reta. Para isso, utilizando o comando Segmento, procedemos de forma análoga à construção do primeiro segmento e fazemos as seguintes substituições:

- <Ponto> por $(c, 0)$
- <Ponto> por $(c, h/cos(\beta))$

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

Segmento ($(c, 0)$, $(c, h/cos(\beta))$).

Concluída a construção do segundo segmento, temos a planificação da superfície lateral do cilindro oblíquo pronta, veja Figura 4.13.

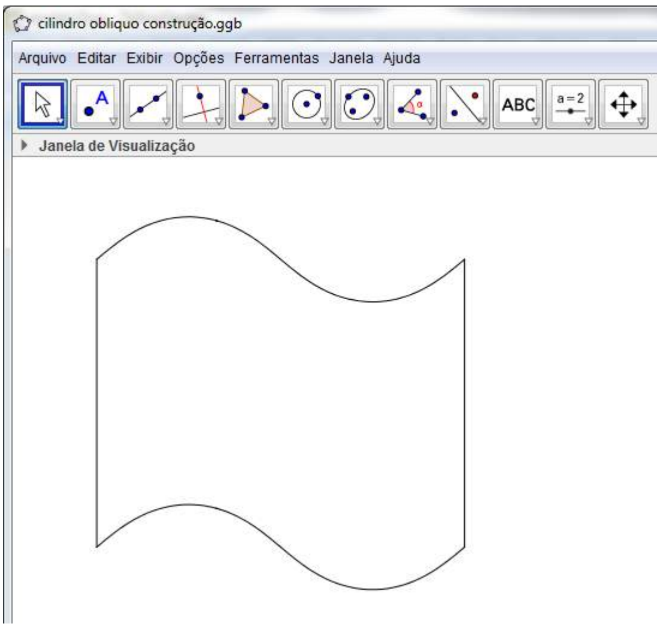


Figura 4.13: Planificação da superfície lateral do cilindro oblíquo.

Para concluirmos a planificação, necessitamos apenas construir as circunferências que representam as bases superior e inferior do cilindro oblíquo. Tais circunferências são construídas no ponto mais baixo da curva superior e no ponto mais alto da curva inferior, para isso, utilizamos na barra de entrada o comando:

Círculo (<Ponto>, <Raio>).

Como o ponto mais baixo da curva superior ocorre quando o ponto P atinge $3/4$ da elipse, a primeira coordenada do centro do círculo que representa a base superior é $c\ 3/4$. Já a segunda coordenada é igual a maior distância entre P e Q, que pode ser facilmente obtida observando que essa distância só acontece quando P atinge $1/4$ ou $3/4$ da elipse. Com isso, temos um triângulo retângulo $C'PQ$, sendo $C'Q$ o raio do cilindro e o ângulo $QC'P$ tem medida β. Portanto, PQ é igual a $r\ cos(\beta)$, veja Figura 4.14.

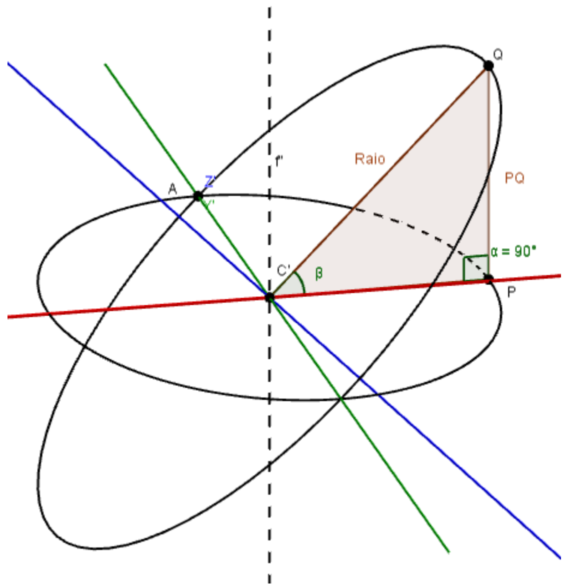


Figura 4.14: Triângulo $C'PQ$.

A geratriz desse cilindro já foi utilizada na construção das curvas e é $h/cos(\beta)$, portanto a segunda coordenada do centro do círculo que representa a base superior é $rsen(\beta) - h/cos(\beta) + r$.

Definidas as coordenadas do centro do círculo que representa a base superior, fazemos as seguintes substituições no comando Círculo:

- <Ponto> por $(c\ 3/4, r\ sen(\beta) - h/cos(\beta) + r)$
- <Raio> por r

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

Círculo $((c\ 3/4, r\ sen(\beta) - h/cos(\beta) + r),\ r)$

Este círculo fica denotado, nesta construção, pela letra p.

Procedemos de forma análoga para a construção da circunferência que representa a base inferior. Neste caso, fazemos as seguintes substituições:

- <Ponto> por $(c/4, r\ sen(\beta) - r)$
- <Raio> por r

Após as substituições, o comando fica assim descrito:

Círculo $((c/4, r\ sen(\beta) - r),\ r)$.

Este círculo fica denotado pela letra k e, com isso, a planificação do cilindro oblíquo esta pronta, veja Figura 4.15.

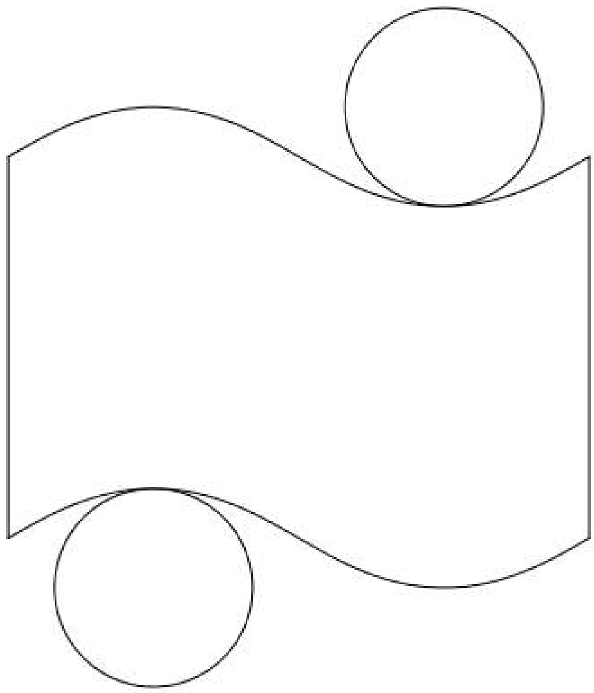


Figura 4.15: Planificação do cilindro oblíquo.

4.4 Área do Cilindro Oblíquo.

Para calcularmos a área de um cilindro oblíquo de raio r e altura h, devemos observar que sua planificação gera três superfícies planas distintas, duas circunferências de mesmo raio, que são geradas a partir das bases do cilindro oblíquo, e a superfície lateral do cilindro oblíquo, que gera a terceira superfície plana com as extremidades superior e inferior formadas por curvas idênticas.

4.4.1 Área da Base do Cilindro Oblíquo.

A área da base pode facilmente ser calculada já que é uma circunferência, neste caso denotamos a área da base por A_{base}.

$$A_{base} = \pi r^2 \tag{4.1}$$

4.4.2 Área Lateral do Cilindro Oblíquo.

A área lateral do cilindro oblíquo também pode facilmente ser calculada já que a parte inferior da planificação é formada por uma curva idêntica à curva da parte superior. Com isso, podemos afirmar que uma curva complementa a outra formando um retângulo de comprimento igual ao comprimento da elipse que podemos calcular utilizando a fórmula (1.23). A altura desse retângulo é igual à geratriz do cilindro oblíquo (Figura 4.16).

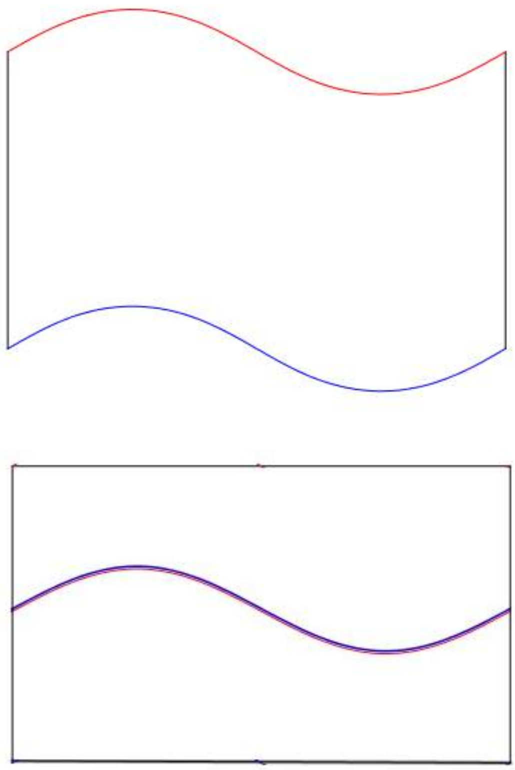


Figura 4.16: Planificação da superfície lateral do cilindro oblíquo.

Assim, a área lateral é aproximada por:

$$A_{lateral} \approx \pi a \left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32} - \frac{5e^6}{128}\right)\left(\frac{h}{cos(\beta)}\right) \tag{4.2}$$

4.4.3 Área Total do Cilindro Oblíquo.

Utilizando (4.1) e (4.2), a área total aproximada, que aqui denotamos por A_{total}, é dada por:

$$A_{total} \approx 2\pi r^2 + \pi a \left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32} - \frac{5e^6}{128}\right)\left(\frac{h}{cos(\beta)}\right)$$

4.5 Volume do Cilindro Oblíquo.

Nos livros didáticos e apostilas de sistemas de ensino utilizados no ensino fundamental e médio, o volume de um cilindro oblíquo é calculado utilizando o princípio de Cavalieri. Portanto, para calcularmos o volume de um cilindro oblíquo de raio r e altura h basta multiplicarmos a área da base pela sua altura.

$$Volume = \pi r^2 h \tag{4.3}$$

Podemos também calcular seu volume tomando como referência o eixo de inclinação f' (ver Figura 4.17.). Seccionando o cilindro oblíquo por um plano perpendicular ao eixo f', ele fica dividido em dois sólidos. Unindo estes dois sólidos por suas bases circulares obtemos um cilindro elíptico reto de altura igual à geratriz do cilindro oblíquo. As bases deste cilindro elíptico são elipses congruentes e paralelas.

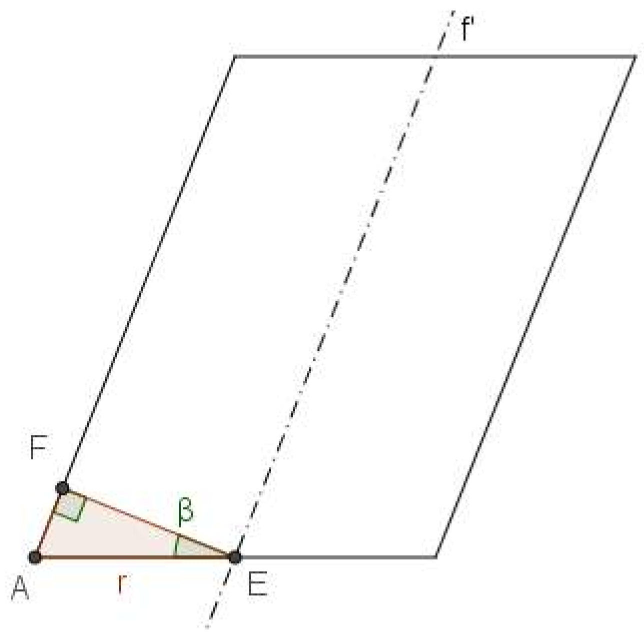


Figura 4.17: Secção meridiana do cilinndro oblíquo.

Para calcularmos o volume do cilindro elíptico reto, novamente utilizando o Princípio de Cavalieri, basta multiplicarmos a área de sua base por sua altura. A área da base pode ser calculada utilizando a equação (1.3), em que a medida a é o raio r do cilindro oblíquo e a medida b é a menor medida da distância do eixo f' do cilindro oblíquo até a superfície lateral.

Para obtermos a medida b, tomamos a secção meridiana do cilindro oblíquo e traçamos um segmento de reta partindo do centro do cilindro oblíquo, que denotamos por E (ver Figura 4.17), e perpendicular à superfície lateral. Com isso, formamos um triângulo AEF retângulo em F e com ângulo $A\hat{E}F$ igual ao ângulo de inclinação do cilindro, que denotamos por β. A medida b é a medida de $\overline{EF}$ e pode ser encontrada utilizando o cosseno de β. Assim, $b = r\cos\beta$.

Já a medida da altura do cilindro elíptico, que é a geratriz do cilindro oblíquo, pode ser encontrada de forma análoga a b, Figura 4.18.

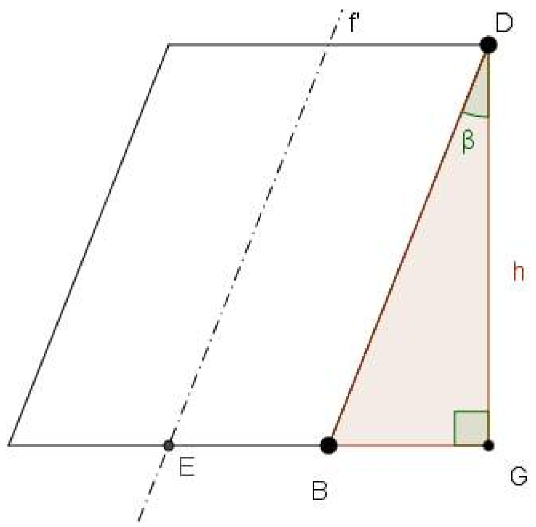


Figura 4.18: Secção meridiana do cilinndro oblíquo.

Formamos o triângulo BGD, retângulo em G, e com o ângulo $B\hat{D}G$ igual ao ângulo de inclinação do cilindro oblíquo, denotado por β. A medida da geratriz é a medida de $\overline{BD}$. Utilizando também o cosseno de β, temos $BD = \dfrac{h}{\cos\beta}$.

Com as medidas de b e da geratriz do cilindro oblíquo já calculadas, podemos calcular o volume do cilindro elíptico:

$$\begin{aligned} Volume &= (area\ da\ base).(altura) \\ &= \pi ab.(geratriz) \\ &= \pi r\ r\cos\beta\ \frac{h}{\cos\beta} \\ &= \pi r^2 h \qquad (4.4) \end{aligned}$$

Com isso, podemos observar que (4.3) e (4.4) possuem a mesma expressão.

Capítulo 5

Propostas de Planos de Aulas

Neste capítulo, apresentamos sugestões de atividades que aproximam os alunos do *software* GeoGebra e de construções geométricas por meio de conceitos matemáticos.

As atividades têm o propósito de fazer com que os alunos sejam capazes de efetuar construções de cilindros oblíquos e troncos de cilindros no *software* GeoGebra e, com isso, possam apropriar-se de conhecimentos que os auxiliem no cálculo de área e volume desses sólidos, bem como melhorar a percepção espacial.

Ressaltamos que é necessário que os alunos tenham conhecimento prévio sobre equações de retas, cálculo de distância entre dois pontos, equações de circunferência e razões trigonométricas. Caso algum desses conceitos não seja de conhecimento prévio dos alunos, o professor deve fazer as adaptações necessárias ou até mesmo a introdução de tais conceitos, sempre respeitando o nível de aprendizagem dos alunos.

5.1 Análise de Diferentes Tipos de Cilindros

Análise de cilindros retos, cilindros oblíquos e cilindros truncados.

5.1.1 Orientações.

Número de aulas: 2

Público alvo: Alunos de ensino fundamental II ou alunos de ensino médio.

Material Utilizado: Sólidos geométricos (cilindro reto, cilindro oblíquo e tronco de cilindro).

5.1.2 Objetivos:

- Identificar diferentes tipos de cilindros;

- Reconhecer diferenças entre cilindro reto e cilindro oblíquo;

- Reconhecer diferenças entre cilindro reto e tronco de cilindro;
- Planificar sólidos geométricos.

5.1.3 Atividade 1

Orientação ao professor:

Nesta atividade o aluno irá identificar as diferenças entre um cilindro reto, um cilindro oblíquo e um tronco de cilindro, e irá também reconhecer as planificações de tais cilindros.

Roteiro:

Entregue aos alunos um cilindro reto, um cilindro oblíquo e um tronco de cilindro. A seguir, oriente-os a analisarem esses sólidos e descreverem as principais diferenças. Para auxiliar esta parte da atividade encontram-se, no Apêndice C, moldes para construir cilindro reto, cilindro oblíquo e tronco de cilindro.

Caso os alunos não consigam identificar todas as diferenças entre os sólidos, as devidas interferências devem ser feitas para que todas as diferenças fiquem evidenciadas e claras a todos.

Com as diferenças devidamente identificadas, solicite que planifiquem esses sólidos. Os alunos devem ser orientados para que esbocem como seria a planificação de cada um dos sólidos que eles receberam. Para esse momento, permita que eles usem de criatividade para realizar os esboços. A planificação do cilindro reto provavelmente é de conhecimento de todos, porém, os demais sólidos exigem muito dos alunos. Caso eles não consigam esboçar as planificações de forma correta, faça interferências para que eles consigam compreender tais planificações. Uma possível interferência, que geralmente dá bons resultados, é orientar os alunos a girarem o sólido sobre uma folha de papel sulfite e marcar pontos que definam essa planificação. Outra interferência que também gera bons resultados é enrolar uma folha de sulfite sobre o sólido e, com o auxílio de um lápis, traçar os limitantes do sólido, e, assim, ao desenrolar esse sulfite, obter a planificação da superfície lateral.

Com as planificações definidas, oriente os alunos que pensem uma forma de calcular a área da superfície lateral de cada uma das planificações. Para auxiliar nessa tarefa, encontram-se no apêndice D as planificações das superfícies laterais do cilindro oblíquo e do tronco de cilindro. Caso os alunos não notem que todas as planificações podem ser transformadas em retângulos, mostre a eles que no tronco de cilindro basta efetuar um traço na altura média e utilizar a área que excede a linha traçada para completar a parte que ficou vazia abaixo da linha traçada. Já na superfície lateral do cilindro oblíquo, mostre a eles que basta cortar transversalmente a figura e utilizar uma parte para completar a outra, obtendo assim, um retângulo.

5.2 Explorando o *Software* GeoGebra

Explorando o GeoGebra na construção de pontos, retas, semirretas e segmentos de retas.

5.2.1 Orientações.

Número de aulas: 4 aulas divididas em 2 atividades.

Público alvo: Alunos de ensino fundamental II ou alunos de ensino médio.

Material Utilizado: Equipamento eletrônico com o *software* GeoGebra instalado.

5.2.2 Objetivos:

- Recordar conceitos de geometria plana (ponto, reta, semirreta e segmento de reta);
- Recordar conceitos de posições relativas entre duas retas (paralelas, concorrentes e perpendiculares);
- Reconhecer e diferenciar tipos de equações de retas (geral e reduzida);
- Estabelecer relações entre funções afim e equações de retas.

5.2.3 Atividade 1

Orientação ao professor:

Nesta atividade o aluno irá conhecer o *software* GeoGebra e algumas formas de marcar um ponto, traçar uma reta, uma semirreta ou segmento de reta.

Roteiro:

Abra o *software* GeoGebra, com o *software* aberto você terá acesso à barra de ferramentas, a janela de visualização e a janela de álgebra conforme Figura 5.1.

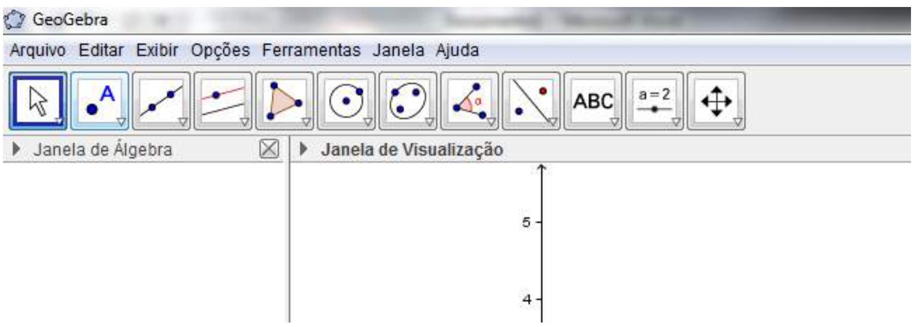


Figura 5.1: Janela de Álgebra e Janela de Visualização do GeoGebra.

Com a *software* aberto, oriente os alunos sobre a função de cada uma das ferramentas existentes na barra de ferramentas. Após essa breve introdução sobre o *software*, oriente os alunos a acessarem a segunda ferramenta e marcarem pontos livremente na janela de visualização, porém, alerte a eles que a cada construção feita na janela de visualização haverá um registro na janela de álgebra, registro este que permite que eles façam a interpretação matemática.

Posteriormente, com o conceito de ponto já assimilado, oriente os alunos a usarem a terceira ferramenta da barra de ferramentas e traçarem retas livremente, porém, novamente alerte os alunos que a cada construção feita na janela de visualização, haverá uma informação matemática registrada na janela de álgebra e que eles precisam fazer a interpretação dessa informação. Alerte os alunos que no registro da reta eles podem efetuar mudanças na forma desse registro, para isso, basta clicarem com o botão direito sobre o registro e escolher uma das três formas disponíveis.

Por fim, oriente os alunos que é possível efetuar mudanças nos registros matemáticos de cada construção. Para isso, basta clicar com o botão direito do *mouse* sobre a construção na janela de visualização ou sobre a informação matemática registrada na janela de álgebra e selecionar a opção *Propriedades*. Fazendo assim, aparece uma nova janela na qual é possível fazer várias alterações na construção. Novamente, permita que eles façam alterações das mais variadas, porém sempre analisando os resultados nas janelas de visualização e de álgebra.

Espera-se que nesta aula os alunos percebam que a cada ponto construído, suas coordenadas bem como o seu nome ficam registrados na janela de álgebra, espera-se também que os alunos percebam que a cada reta construída na janela de visualização o registrado na janela de álgebra refere-se à equação dessa reta.

5.2.4 Atividade 2

Orientação ao professor:

Nesta atividade o aluno irá relacionar o valor do coeficiente linear de uma reta e a ordenada na qual a reta intersecta o eixo Y e notar que o coeficiente angular indica a inclinação da reta.

Roteiro:

Oriente os alunos a criarem um controle deslizante. Para isso, oriente-os para que digitem na barra de entrada uma letra, por exemplo a letra a, em seguida, pressione a tecla *enter*. Com isso, abrirá uma nova janela e nela os alunos devem clicar em *Criar Controles Deslizantes*. Uma vez criado o controle deslizante, tal controle aparecerá tanto na janela de visualização como na janela de álgebra, veja Figura 5.2.

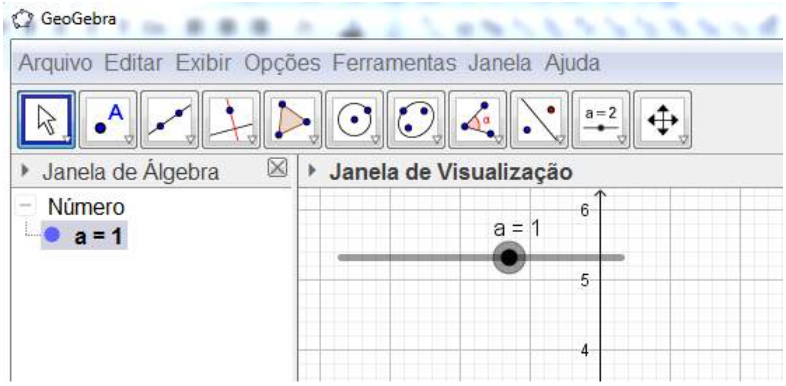


Figura 5.2: Controle deslizante no GeoGebra.

De forma análoga, oriente os alunos a criarem um segundo controle deslizante, porém, agora, com a letra b.

Esses controles deslizantes terão a finalidade de indicar as medidas do coeficiente angular e do coeficiente linear em uma equação de reta.

Com os dois controles criados, oriente os alunos em como definir valores para cada controle deslizante. Para isso, os alunos devem clicar com o botão direito do *mouse* sobre um dos controles deslizantes na janela de álgebra ou na janela de visualização. Aparecerá uma nova janela e nela os alunos devem clicar em propriedades, o que fará abrir outra janela que contém os intervalos de atuação do controle deslizante, veja Figura 5.3.

Oriente os alunos que os intervalos de mínimo e de máximo referem-se aos valores que o controle pode assumir e que o incremento é o intervalo assumido entre os valores no controle deslizante, ou seja, se usarmos $0,1$ os valores serão alterados de $0,1$ em $0,1$. Com as orientações dadas, permita que eles usem os valores que quiserem, porém lembre-os que posteriormente terão que analisar os resultados dessa escolha. Ao término dessas configurações, os alunos devem proceder de forma análoga para configurar o outro controle deslizante.

Com os controles configurados, oriente os alunos que uma reta também pode ser traçada utilizando a barra de entrada. Para isso, basta digitar a equação da reta na barra de entrada e clicar na tecla *enter*. Permita que eles tracem algumas retas aleatórias e vejam os resultados de suas construções.

Quando os alunos já estiverem adaptados a traçarem uma reta utilizando a barra de entrada, oriente-os que tracem uma reta utilizando os controles deslizantes criados anteriormente, como coeficientes angular e linear. Caso tenham dúvidas, auxilie-os a usarem o controle a como coeficiente angular e o controle b como coeficiente linear, ou seja, digitar na barra de entrada $ax + b = y$ e pressionar a tecla *enter*, veja Figura 5.4.

.

Com a reta traçada, oriente os alunos a deslocarem o controle deslizante e verificar o que acontece com a reta. Para isso, basta clicar e segurar o botão esquerdo do *mouse* sobre o círculo do controle deslizante e arrastá-lo para a direita ou para a esquerda.

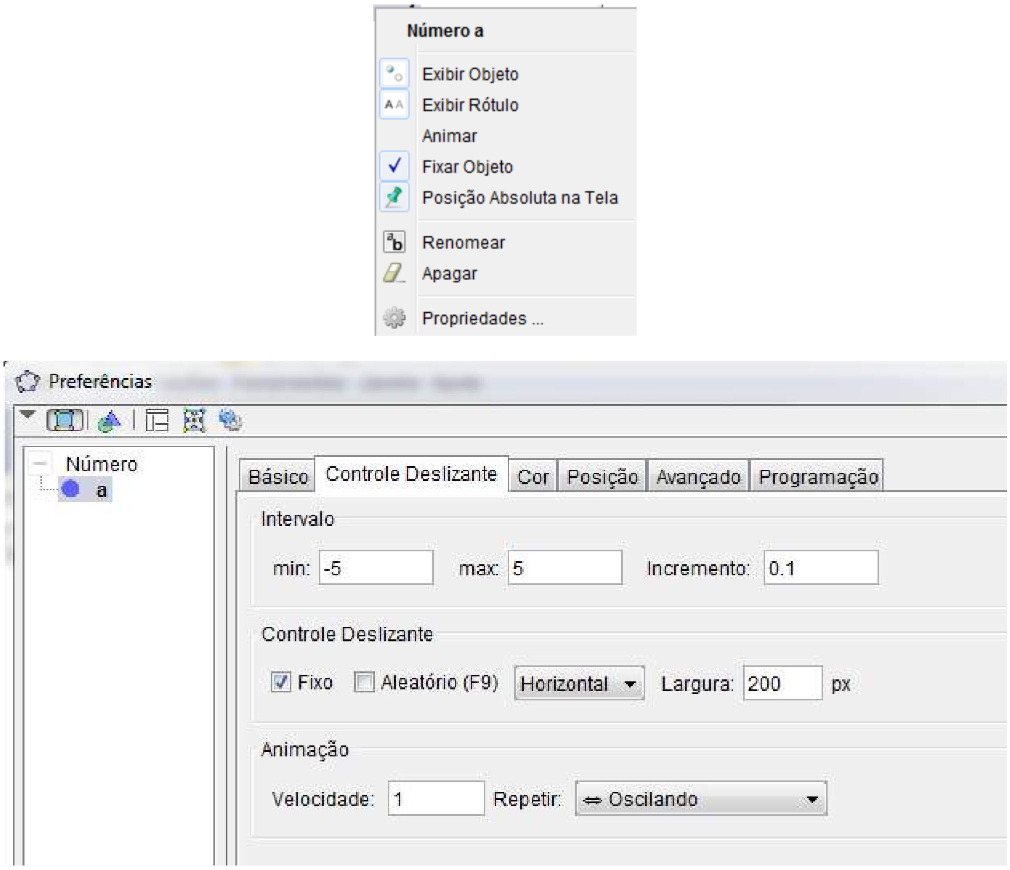


Figura 5.3: Configuração do controle deslizante no GeoGebra.

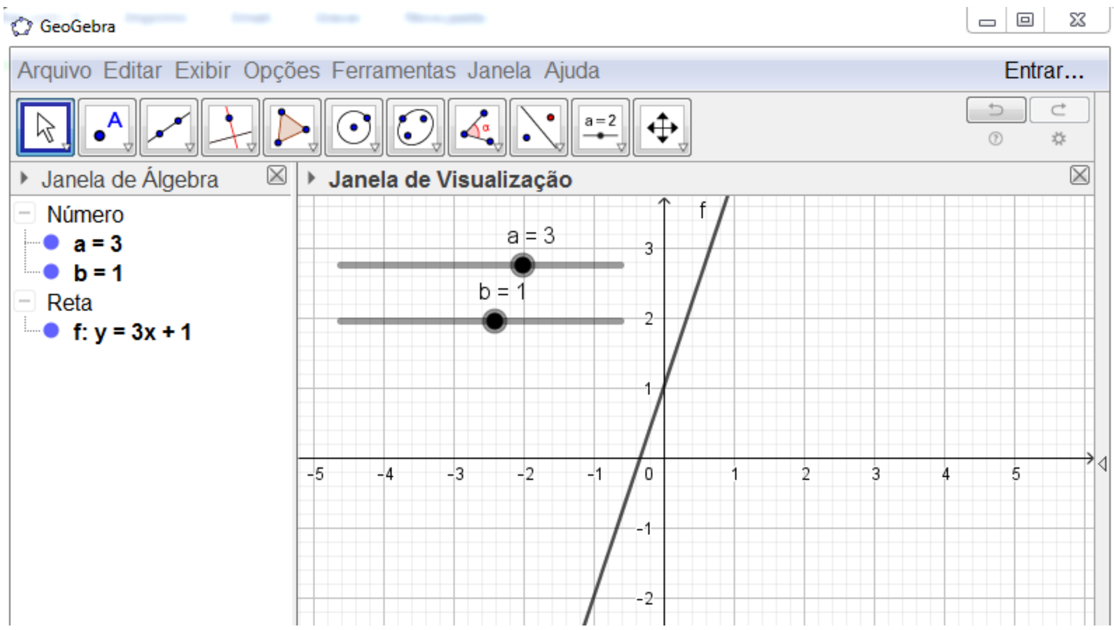


Figura 5.4: Reta traçada utilizando os controles deslizantes como coeficiente angular e linear.

Terminada a análise dos resultados, oriente-os que os intervalos dos controles deslizantes podem ser alterados e que isso pode alterar o comportamento da reta.

Espera-se que nesta aula os alunos notem que o coeficiente angular define a inclinação da reta e que o coeficiente linear define a posição da reta em relação ao eixo Y.

5.3 Apresentação do Comando Curva

Explorando o GeoGebra na construção de curvas a partir de suas parametrizações.

5.3.1 Orientações.

Número de aulas: 6 aulas divididas em 3 atividades.
Público alvo: Alunos de ensino fundamental II ou alunos de ensino médio.
Material Utilizado: Equipamento eletrônico com o *software* GeoGebra instalado.

5.3.2 Objetivos:

- Reconhecer e diferenciar uma equação normal e reduzida de uma circunferência (círculo);
- Estabelecer relação entre os valores encontrados na equação do círculo com a localização do centro e a medida do raio desse círculo.
- Escrever uma equação paramétrica a partir de uma equação de reta ou de círculo.
- Traçar um círculo no plano com o auxílio do comando curva.
- Traçar um círculo no espaço com o auxílio do comando curva.

5.3.3 Atividade 1

Orientação ao professor:

Nesta atividade o aluno irá aprender a traçar uma circunferência utilizando ferramentas do *software* GeoGebra e também a relacionar os termos constantes de sua equação com sua localização no plano cartesiano.

Roteiro:

Oriente os alunos a utilizarem a sexta ferramenta da barra de ferramentas e com ela construírem círculos (circunferências). Para isso, eles poderão utilizar qualquer ferramenta existente no sexto conjunto de ferramentas para traçar um círculo, veja Figura 5.5.

Lembre os alunos de que a cada construção feita na janela de visualização, um registro na janela de álgebra será criado e que eles devem fazer uma análise desse registro e relacioná-lo com a construção.

Caso nenhum aluno perceba que esse registro se trata da equação do círculo traçado e que nela estão contidos o valor de seu raio e a localização de seu centro, faça interferências

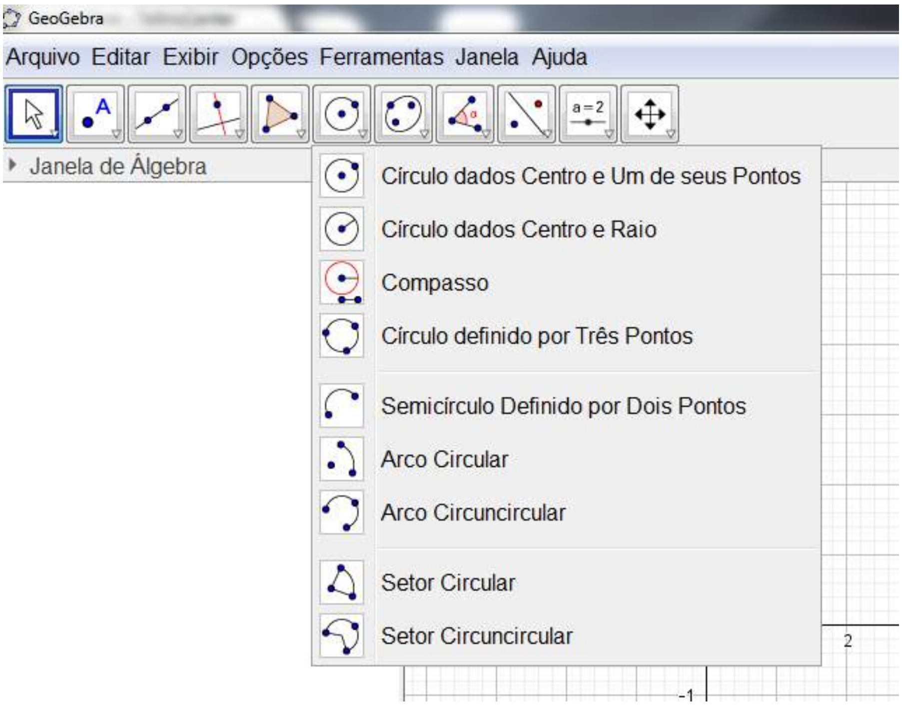


Figura 5.5: Ferramentas a serem utilizadas na construção de um círculo.

até que cheguem a essa conclusão. Lembre-os também de que, ao clicar com o botão direito do *mouse* sobre o registro na janela de álgebra, é possível escolher entre equação reduzida e equação normal.

Após todos terem percebido que tal registro se trata da equação do círculo e compreendido que nesse registro encontram-se as coordenadas do centro do círculo e seu raio, oriente os alunos que, com o auxílio da equação do círculo, é possível efetuar seu traçado. Para isso, basta digitar a equação do círculo desejado na barra de entrada e clicar na tecla *enter*, veja Figura 5.6.

Permita que os alunos construam alguns círculos a partir da barra de entrada para que os mesmos tenham melhor domínio da utilização da equação de um círculo.

5.3.4 Atividade 2

Orientação ao professor:

Nesta atividade o aluno irá aprender a traçar um círculo no plano utilizando o comando curva do *software* GeoGebra.

Roteiro:

Para esta atividade faz-se necessário orientar os alunos sobre o conceito de curva, que neste trabalho foi apresentado no Seção 2.1.

Apresente aos alunos o comando curva existente no *software* GeoGebra. Para isso,

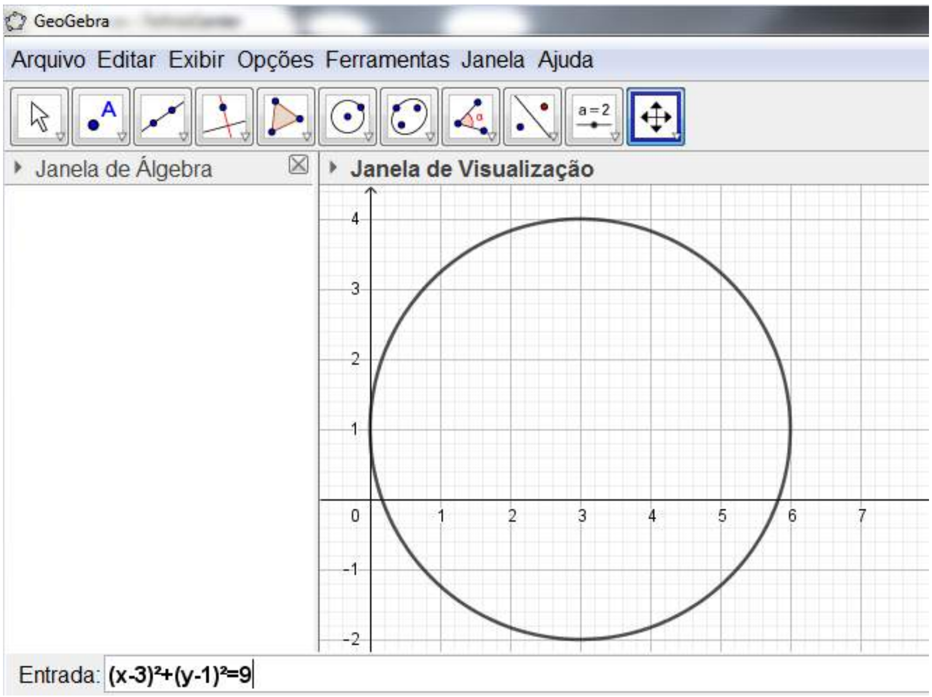


Figura 5.6: Construção de um círculo a partir da barra de entrada.

oriente-os a digitar na barra de entrada a palavra *curva*, veja Figura 5.7. Ao escrever *curva*, aparecem algumas opções. Para esta atividade, a primeira opção deve ser escolhida.

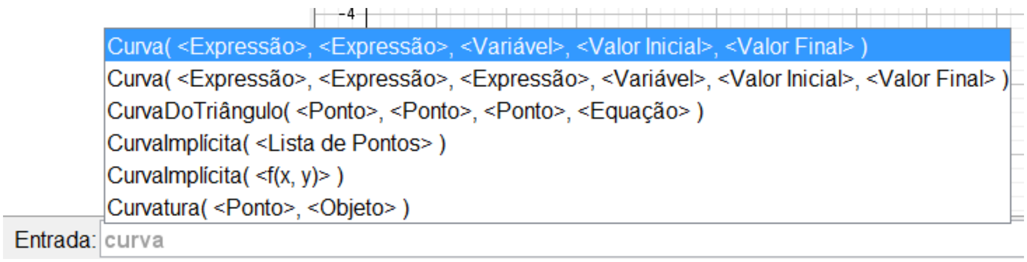


Figura 5.7: Comando curva no traçado de uma reta.

Com o comando selecionado, oriente os alunos que o primeiro intervalo <Expressão> é reservado para a digitação dos valores referentes a x de uma equação paramétrica. Já o segundo intervalo <Expressão> para a digitação dos valores referentes a y de uma equação paramétrica.

O intervalo <Variável>, é reservado para a digitação da variável utilizada na equação paramétrica da curva em questão, o intervalo $< Valor\ Inicial >$ é reservado para a digitação do valor inicial da variável. Já o intervalo $< Valor\ Final >$ é reservado para a digitação do valor final da variável utilizada na parametrização da curva em questão.

Inicie as construções por uma reta, pois sua equação paramétrica é mais simples e facilitará a compreensão do comando. Para isso, oriente os alunos a parametrizar a equação da reta $y = 2x + 5$.

Espera-se que os alunos cheguem a uma parametrização como:

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 2t+5 \end{cases}.$$

Caso tenham chegado a outras formas paramétricas não há problemas.

Com a forma paramétrica definida oriente aos alunos que introduzam estes valores no comando curva e que no intervalo $< Valor\ Inicial >$ eles devem digitar um valor para x, valor este que indicará o início do segmento de reta. No intervalo $< Valor\ Final >$ eles devem digitar um valor para x, valor este que indicará o final do segmento de reta. Após isso, é só pressionar a tecla *enter*, veja Figura 5.8.

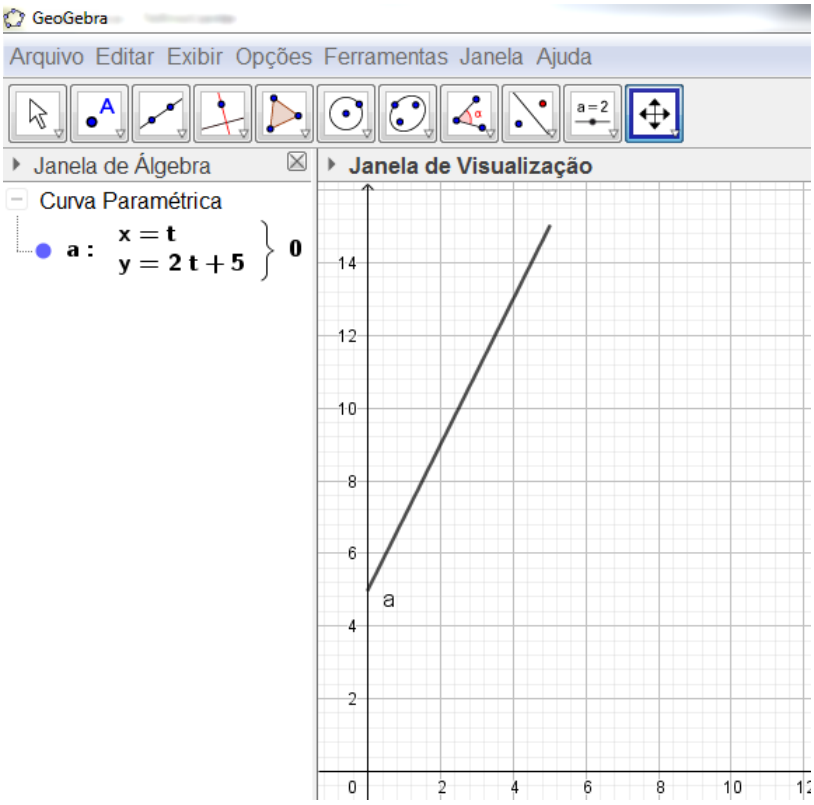


Figura 5.8: Comando curva na barra de entrada.

Nesta cosntrução foram usados como Valor Inicial o 2 e como Valor Final o 5.

Com a reta construída a partir do comando curva, oriente os alunos a alterarem os valores inicial e final no comando e verificarem os efeitos disso na construção. Para isso, basta orientá-los a clicarem com o botão direito sobre a construção na janela de visualização ou sobre o registro na janela de álgebra e efetuarem tais alterações.

Com a compreensão de como utilizar o comando curva, oriente-os a fazerem agora a parametrização do círculo $(x-5)^2+(y-4)^2=25$.

Espera-se que os alunos cheguem a uma parametrização como:

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 4+\sqrt{25-(t-5)^2} \end{cases}.$$

Caso tenham chegado a uma forma paramétrica utilizando seno e cosseno, isso poupará tempo. Caso tenham chegado a outras formas paramétricas, não há problemas.

De forma análoga ao traçado da reta com o comando curva, oriente os alunos a traçar o círculo, veja Figura 5.9.

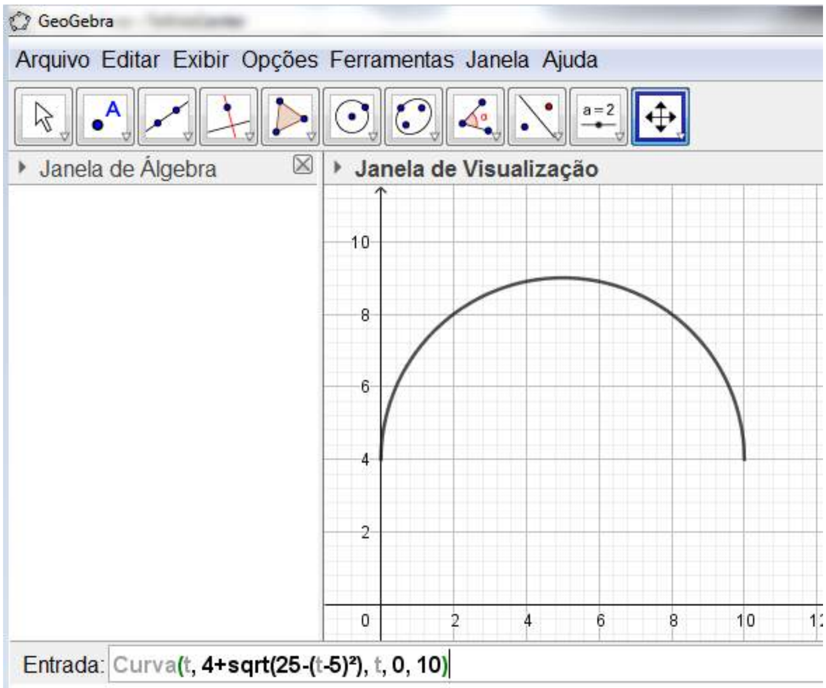


Figura 5.9: Comando curva no traçado de um círculo.

Com o traçado pronto peça para os alunos analisarem este traçado e debatam sobre as conclusões. Caso ninguém tenha compreendido o motivo de termos apenas metade do círculo, oriente-os que isso acontece devido a termos apenas os resultados positivos da raiz, e que para termos a outra metade, será necessário utilizar o comando curva novamente colocando um sinal negativo antes da raiz, veja figura veja Figura 5.10.

De forma análoga à reta, oriente os alunos a alterarem os valores nos intervalos $Valor\ Inicial$ e $Valor\ Final$ e analisarem os resultados.

Para todos os alunos que não utilizarem a parametrização com seno e cosseno, oriente-os que a parametrização com a utilização dessas funções é mais eficiente. Para isso, basta utilizar a seguinte parametrização:

$$\begin{cases} x = 5+5\cos t \\ y = 4+5\sin t \end{cases}.$$

Neste tipo de parametrização, a variável continua sendo t, porém ela define como os

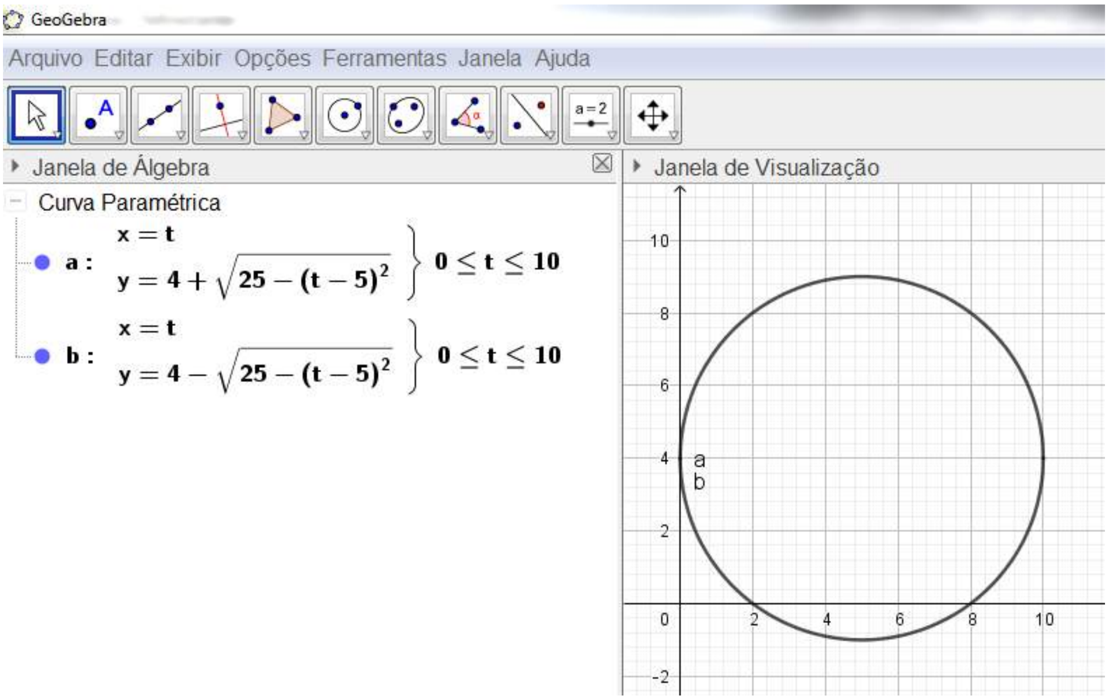


Figura 5.10: Comando curva no traçado de um círculo.

valores de seno e cosseno variam. Para isso, se quisermos um círculo completo alteramos o intervalo $< Valor\ Inicial >$ para 0 e o intervalo $< Valor\ Final >$ para 2π, veja Figura 5.11.

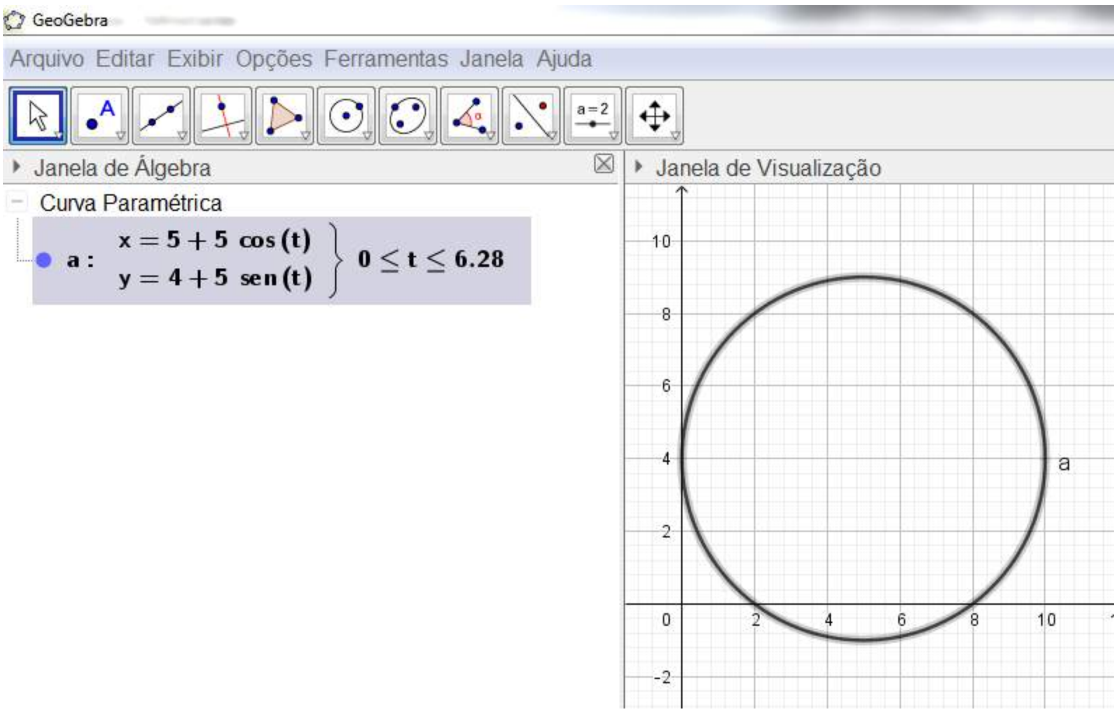


Figura 5.11: Comando curva no traçado de um círculo utilizando sen e cos.

Com a parametrização do círculo por seno e cosseno apresentada aos alunos, permita que eles criem outros círculos e variem os valores nos intervalos $< Valor\ Inicial >$ e $<$

$Valor\ Final >$ e analisem os resultados e, ao final, debatam sobre os resultados de tais construções.

5.3.5 Atividade 3

Orientação ao professor:

Nesta atividade o aluno irá aprender a traçar um círculo no espaço e fora do plano OXY utilizando o comando curva do *software* GeoGebra.

Roteiro:

Oriente os alunos que para termos um círculo fora do eixo OXY, devemos utilizar também o comando curva, porém, ao digitar curva na barra de entrada, devemos escolher o comando que apresenta três intervalos de expressão. Este comando será o segundo a aparecer na lista que o *software* abrirá, veja Figura 5.12.

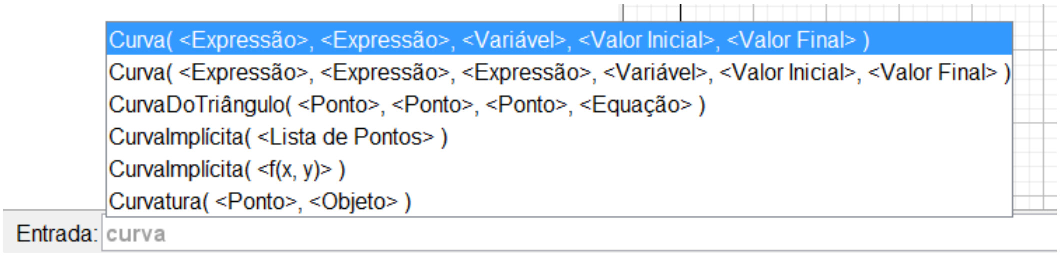


Figura 5.12: Comando curva com três intervalos de expressão na barra de entrada.

Oriente os alunos que a forma de utilizar este comando é muito parecida com a forma de utilizar o comando curva com dois intervalos de expressão. O que difere é que o terceiro intervalo destina-se às informações referentes ao terceiro eixo Z. Com isso, podemos tirar o círculo do plano e trabalharmos com ele no espaço.

Após a orientação sobre o comando, solicite que eles construam e analisem a seguinte curva:

$$\text{curva}(3\,\text{sen}\,t,\ 3\cos t,\ 4,\ \text{t},\ 0,\ 2\pi).$$

Agora, oriente os alunos a construírem novas curvas, porém trocando a ordem entre as três expressões, os valores parametrizados podem ser os mesmos ou serem trocados, e, a analisarem os resultados das construções. Com essas novas construções, espera-se que os alunos percebam que é possível traçar um círculo em qualquer posição no espaço e que, para isso, basta organizar de forma adequada os parâmetros no comando curva, veja Figura 5.13.

Com o comando curva compreendido pelos alunos, passe para a parte mais complexa que é a construção de uma curva inclinada no espaço. Esta curva será usada posteriormente na cosntrução do tronco de cilindro. Oriente os alunos que uma curva inclinada no espaço

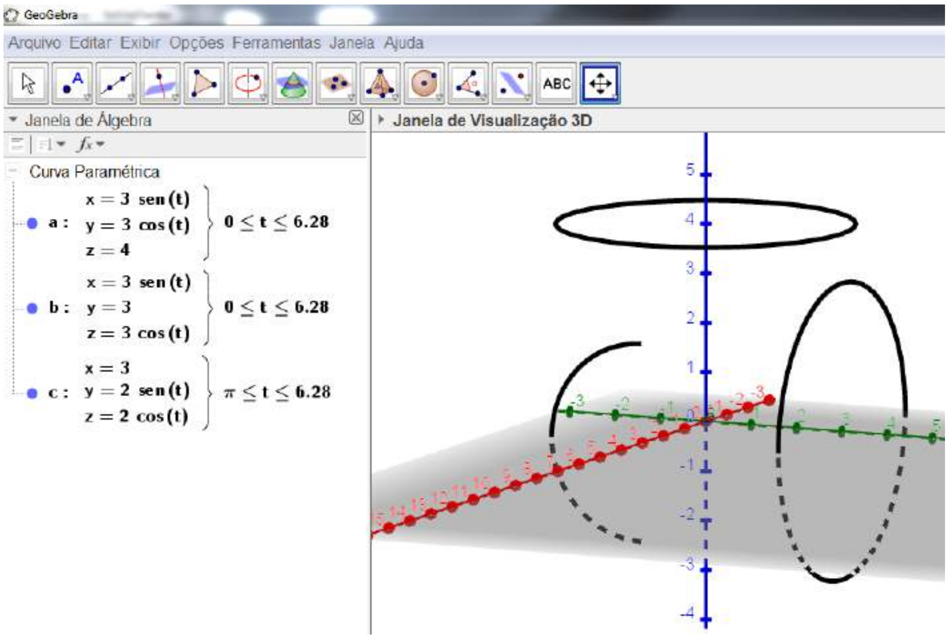


Figura 5.13: Círculos no espaço.

terá sempre as coordenadas da imagem que ela projeta sobre o plano. Portanto, neste caso, use as coordenadas de um círculo no plano e, o diferencial será que deve ser escolhido um eixo para realizar a inclinação e, com o eixo escolhido, indique essa inclinação por meio da tangente do ângulo de inclinação, veja Figura 5.14.

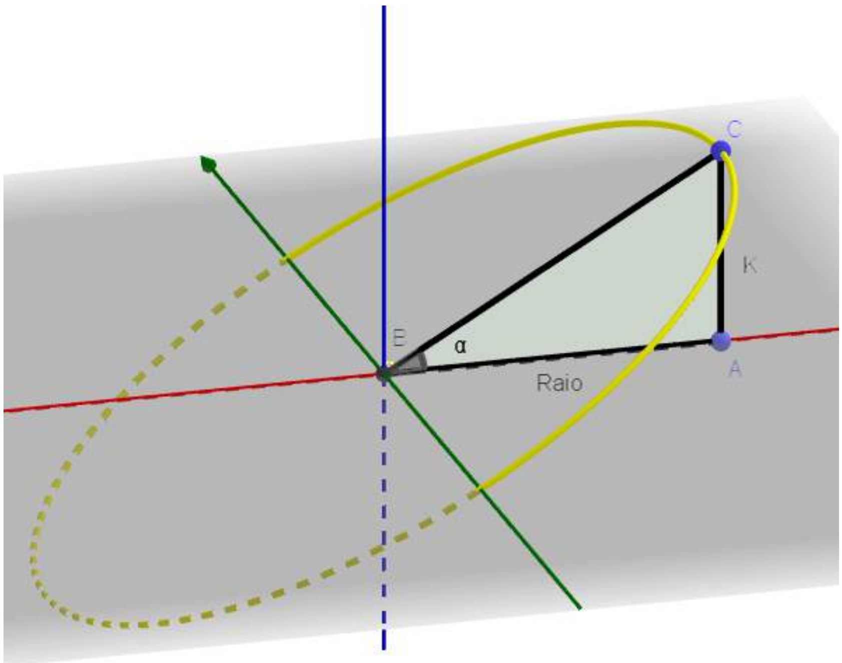


Figura 5.14: Círculos inclinado no espaço.

Para definirmos essa inclinação, acrescentamos no eixo escolhido o valor K, conforme mostra a Figura 5.14. Para isso usamos:

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{K}{Raio}\\ K &= Raio\tan\alpha\end{aligned}$$

Portanto, oriente os alunos que se tivermos um círculo orientado pelos eixos X e Y, com inclinação escolhida no eixo X, devemos, na terceira expressão, indicar a altura do círculo mais a parametrização do eixo escolhido multiplicada pelo valor de K, com isso, temos:

curva$(5\,\mathrm{sen}\,t,\ 5\cos t,\ 3+\mathrm{sen}\,t\ \ 5\ \ \tan 30°,$ t, $0,\ 2\pi)$

Com esse comando temos a construção de um círculo de raio 5 cm, com 4 cm de altura do plano OXY e com inclinação de 30°, em relação ao eixo X, veja Figura 5.15.

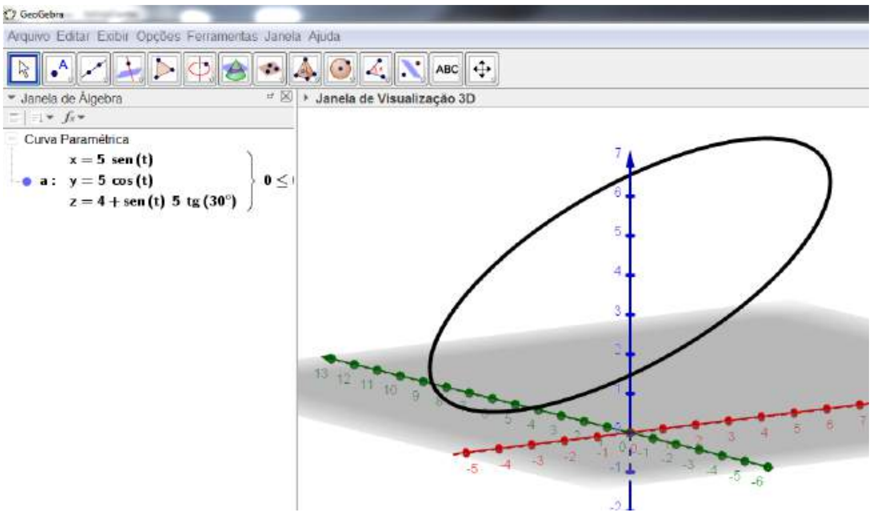


Figura 5.15: Elipse que projeta um círculo sobre o plano OXY.

Após todas essas orientações, permita que os alunos façam novas construções alterando o raio, a altura e a inclinação dos círculo e, ao final, debatam sobre os resultados de tais construções.

5.4 Apresentação do Comando Superfície

Explorando o GeoGebra na construção de superfícies a partir de sua parametrização.

5.4.1 Orientações.

Número de aulas: 2 aulas / 1 atividade.

Público alvo: Alunos de ensino fundamental II ou alunos de ensino médio.

Material Utilizado: Equipamento eletrônico com o *software* GeoGebra instalado.

5.4.2 Objetivo:

- Construir uma superfície plana ou cilíndrica com o auxílio do comando superfície.

5.4.3 Atividade 1

Orientação ao professor:

Nesta atividade o aluno irá aprender a utilizar o comando superfície do *software* GeoGebra.

Roteiro:

Oriente os alunos que para se construir as faces de um poliedro ou não poliedro, precisamos utilizar o comando superfície. Para isso, basta digitar na barra de entrada a palavra Superfície e selecionar o terceiro comando, com três expressões, disponível na janela que se abrirá, veja Figura 5.16.

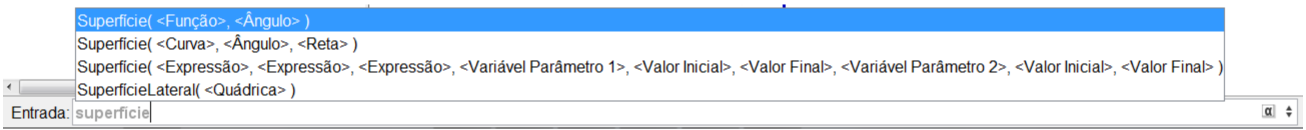


Figura 5.16: Comando superfície na barra de entrada.

Este comando, apesar de ser bem extenso e parecer ser complexo, é muito parecido com o comando curva, a única diferença é que nele existem duas variáveis.

Utilizamos o comando Superfície de forma idêntica ao comando curva e, na segunda variável, usamos de criatividade para gerar superfícies. Alguns exemplos podem ser utilizados para ajudar a orientar os alunos, exemplos como:

- Na parametrização da reta $2x + 5 = y$, utilizando na segunda variável uma incógnita em Z, temos o comando assim descrito,

  $$\text{Superfície}(t,\ 2t + 5,\ k,\ t,\ 0,\ 5,\ k,\ 0,\ 3)$$

  Com isso, temos uma reta no plano OXY, variando no eixo X de 0 até 5 e essa reta irá gerar uma superfície com seu deslocamento entre 0 e 3 no eixo Z, veja Figura 5.17.

- Na parametrização do círculo $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$, utilizando na segunda variável uma incógnita no raio do círculo, temos o comando assim descrito,

  $$\text{Superfície}(3 + r \operatorname{sen} t,\ 4 + r \cos t,\ 2,\ t,\ 0,\ 2\pi,\ r,\ 0,\ 5)$$

  Com isso, temos um disco paralelo ao plano OXY e com raio de 5cm, veja Figura 5.18.

Com o comando Superfície já devidamente explicado aos alunos, permita que eles criem superfícies e discutam sobre os resultados de tais construções.

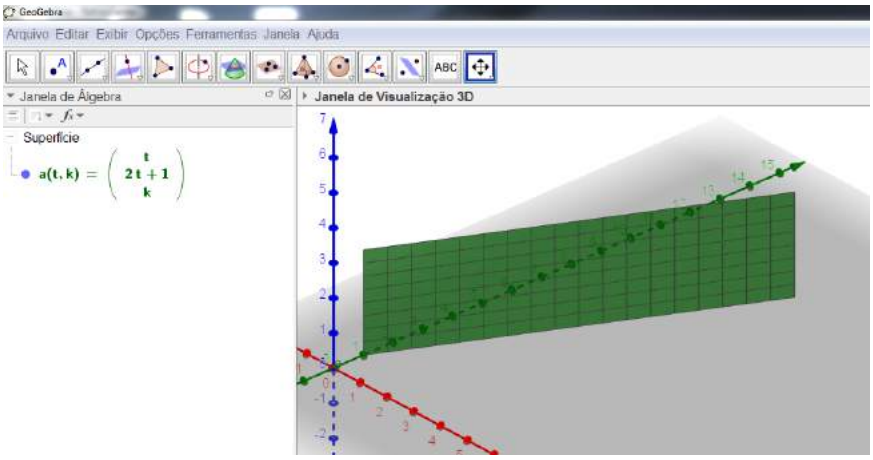


Figura 5.17: Comando superfície com parametrização de uma reta.

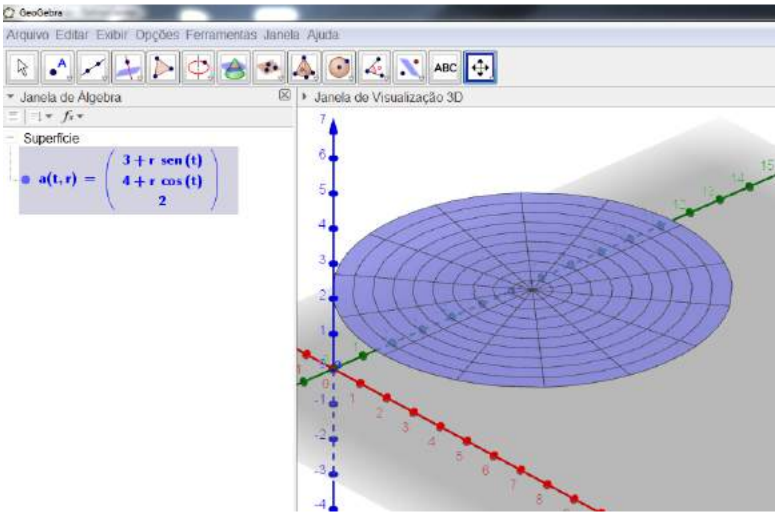


Figura 5.18: Comando superfície com parametrização de um círculo.

5.5 Construção de Cilindro

Construção de cilindro oblíquo e tronco de cilindro com o auxílio do *software* GeoGebra.

5.5.1 Orientações.

Número de aulas: 4 aulas, sendo 2 aulas para cada atividade

Público alvo: Alunos de ensino fundamental II ou alunos de ensino médio.

Material Utilizado: Equipamento eletrônico com o *software* GeoGebra instalado e sólidos geométricos utilizados na proposta de Plano de Aula 5.1.3.

5.5.2 Objetivos:

- Construir um cilindro oblíquo com o auxílio do comando superfície.

- Construir um tronco de cilindro com o auxílio do comando superfície.

5.5.3 Atividade 1

Orientação ao professor:

Nesta atividade o aluno irá aprender a construir um cilindro oblíquo utilizando comandos do *software* GeoGebra.

Roteiro:

Primeiramente oriente os alunos que, com a janela de visualização $3D$ aberta, é possível criar vários sólidos geométricos com o auxílio de ferramentas existentes na caixa de ferramentas. Com a nona ferramenta, um cilindro pode ser construído com o objetivo de iniciar a compreensão sobre os sólidos.

Na nona ferramenta, os alunos devem clicar no canto inferior direito e escolher a opção Cilindro do menu disponível. Em seguida, devem marcar na janela de visualização $3D$ dois pontos que serão, o centro da base inferior e superior do cilindro, posteriormente digitar a medida do raio. Com isso, um cilindro circular reto é construído na janela de visualização $3D$ e suas equações matemáticas aparecem na janela de álgebra, veja Figura 5.19.

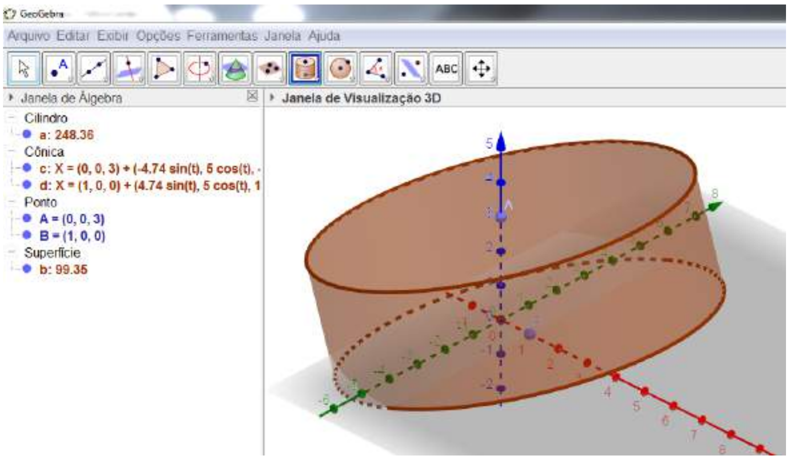


Figura 5.19: Cilindro Circular Reto.

Com o cilindro construído, oriente os alunos que na janela de álgebra foram criadas duas equações de cônicas e uma letra que nomeia o cilindro. Na Figura 5.19, o cilindro foi denotado por a. Peça para que os alunos ocultem as cônicas, para isso, basta clicar com o botão esquerdo do *mouse* sobre o círculo azul que antecede a equação na janela de álgebra e debata com os alunos sobre os resultados.

Espera-se que eles tenham percebido que o sólido sem a base superior e sem a base inferior tenha ficado parecido com um cano, totalmente vazado. Caso não tenham percebido, oriente os alunos a utilizarem a última ferramenta da barra de ferramentas e, com o auxílio da ferramenta, girem a construção, isso facilitará a visualização.

Agora que os alunos já compreenderam que o sólido será composto por duas bases e uma superfície lateral, oriente a eles que cliquem novamente no círculo azul que antecede a equação na janela de visualização e, com isso, retornem as bases à construção. Com o sólido recomposto, oriente aos alunos que, com o auxílio da primeira ferramenta, tentem mover ou inclinar o cilindro para tentar torná-lo oblíquo. Debatam sobre as conclusões.

Espera-se que os alunos notem que até é possível inclinar o cilindro, porém ele se inclina por completo, continuando a ser um cilindro reto e que também é possível deslocar uma de suas bases e com isso aumentar sua altura. Oriente os alunos a observarem que quando se inclina o cilindro, o número que se apresenta na janela de álgebra na representação do cilindro não se altera, porém, quando alteramos sua altura, ele se altera pois esse número é a medida do volume do sólido.

Oriente os alunos que o GeoGebra só realiza construções de cilindros retos com a ferramenta existente na barra de ferramentas. Para construirmos um cilindro oblíquo temos que realizar a construção de cada uma de suas partes. Para facilitar a compreensão é mais fácil iniciar as construção por suas bases.

Para construir a base inferior, basta utilizar o comando Superfície visto na Proposta de Plano de Aula 5.4.3, nesta construção, utilizamos como exemplo um círculo de centro na origem, contido no plano OXY e de raio 5 cm. Com isso o comando Superfície fica assim descrito:

Superfície $(r\,\mathrm{sen}\,t,\ r\cos t,\ 0,\ t,\ 0,\ 2\pi,\ r,\ 0,\ 5)$

Já para construir a base superior, primeiro precisamos saber qual será a coordenada de seu centro, como neste exemplo, usamos uma altura de 10 cm e uma inclinação de 20° no eixo X, podemos encontrar essa informação por meio de razões trigonométricas, veja Figura 5.20.

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}\\ \tan\alpha &= \frac{x}{z}\\ x &= z\tan\alpha\end{aligned}$$

Com isso, temos o centro da base superior de coordenada $x = 10\tan 20°$, $y = 0$ e $z = 10$, e, deste modo, o comando fica assim descrito:

Superfície $(10\tan 20°{+}r\,\mathrm{sen}\,t,\ r\cos t,\ 10,\ t,\ 0,\ 2\pi,\ r,\ 0,\ 5)$.

Assim, temos a duas bases construídas. Veja Figura 5.21.

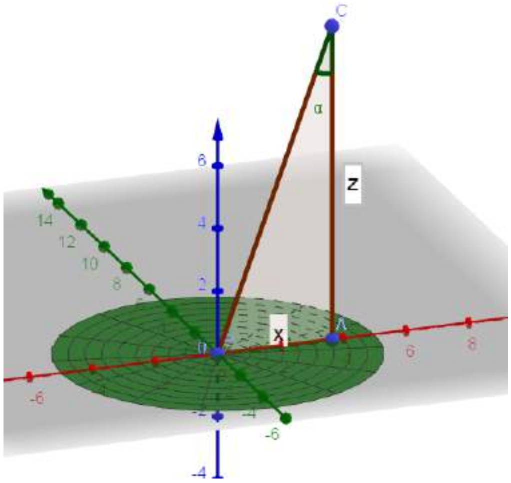


Figura 5.20: Coordenada do Centro da Base Superior.

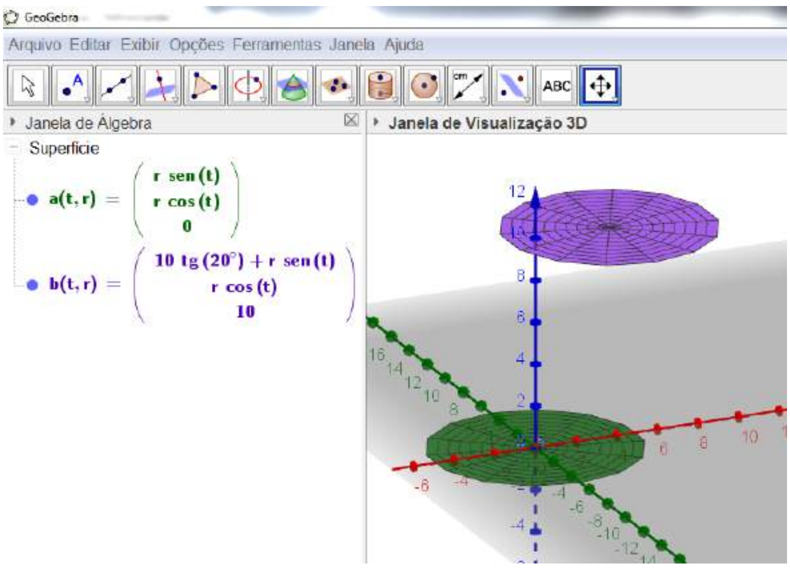


Figura 5.21: Bases do Cilindro Oblíquo.

Para finalizar a construção do cilindro oblíquo, será necessário construir a superfície lateral. Essa superfície será composta pela sobreposição de infinitos círculos de parametrização idêntica à base superior, porém, na segunda variável não será necessário variar o raio, mas sim a altura, portanto usamos uma incógnita h na segunda variável, com isso o comando fica assim descrito:

Superfície ($h \tan 20° + 5 \,\text{sen}\, t$, $5 \cos t$, h, t, 0, 2π, h, 0, 10).

Com essa superfície construída, concluímos a construção do cilindro oblíquo, veja Figura 5.22.

Ao final da construção, permita que os alunos alterem os parâmetros dos comandos usados na construção e que verifiquem as alterações ou até mesmo construam novos cilindros oblíquos. Após essas novas construções, solicite que debatam sobre os resultados.

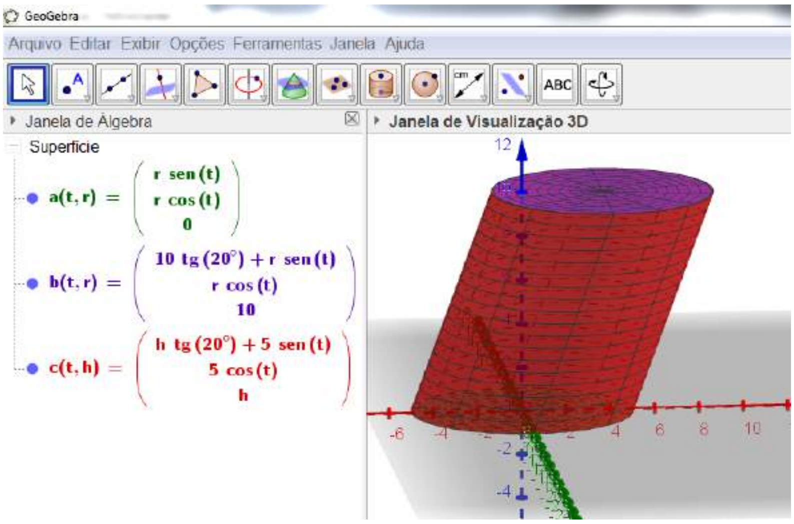


Figura 5.22: Cilindro Oblíquo.

5.5.4 Atividade 2

Orientação ao professor:

Nesta atividade o aluno irá aprender a construir um tronco de cilindro utilizando comandos do *software* GeoGebra.

Roteiro:

Assim como não é possível criar um cilindro oblíquo com as ferramentas do *software* GeoGebra, não é possível criar um tronco de cilindro, portanto, procedemos de forma análoga à construção do cilindro oblíquo. Primeiro oriente os alunos a criarem a base inferior que nesse exemplo será um círculo de raio 5 cm, de centro na origem e contido no plano OXY Para isso, basta usar a mesma parametrização utilizada na construção da base do cilindro oblíquo na Proposta de Plano de Aula 5.5.3. O comando superfície fica assim descrito:

Superfície $(r \operatorname{sen} t,\ r \cos t,\ 0,\ t,\ 0,\ 2\pi,\ r,\ 0,\ 5)$.

Já para construir a base superior, oriente os alunos que a parametrização é conforme o estudado na Proposta de Plano de Aula 5.3.5. Nesta atividade, o objetivo é construir um tronco de cilindro de raio 5 cm, altura média 10 cm e corte com inclinação de 30°. A parametrização é muito parecida com a parametrização da base inferior, com diferença apenas na terceira expressão que tem coordenadas $10 + \operatorname{sen} t\ r\ \tan 30°$. Assim, o comando Superfície fica assim descrito:

Superfície $(r \operatorname{sen} t,\ r \cos t,\ 10 + \operatorname{sen} t\ r\ \tan 30°,\ t,\ 0,\ 2\pi,\ r,\ 0,\ 5)$.

Assim, temos a base superior a 10cm de altura e com inclinação de 30° em relação a base inferior, veja Figura 5.23.

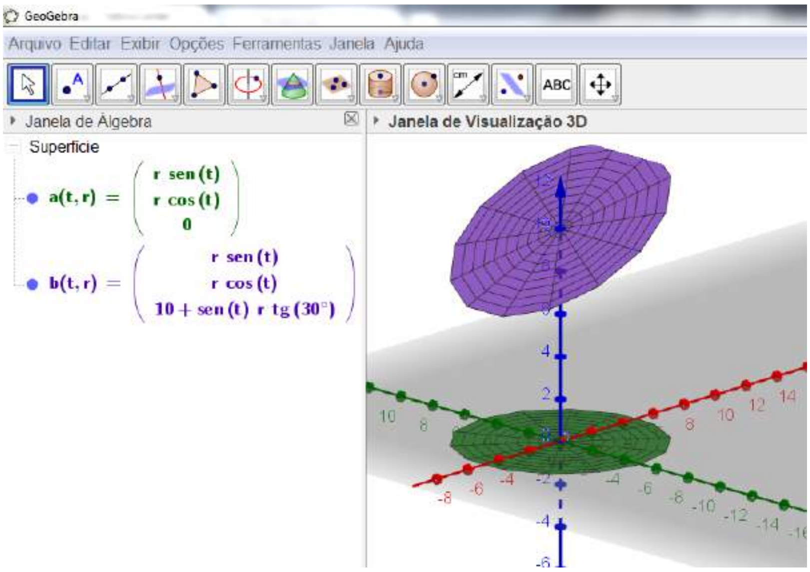


Figura 5.23: Bases do Tronco de Cilindro.

Com as bases construídas, oriente os alunos que necessitamos apenas da superfície lateral para concluirmos a construção do tronco de cilindro. Porém, esta é a construção de maior grau de dificuldade, pois, temos que variar três incógnitas, t que define a volta no círculo, h que define a altura da superfície lateral e temos agora α que define a inclinação dos círculos, pois, como vimos no cilindro oblíquo, a superfície lateral é formada por infinitos círculos sobrepostos. Na construção do cilindro oblíquo, todos os círculos são paralelos ao plano OXY e seus deslocamentos laterais são sempre os mesmos, já no tronco de cilindro, estes círculos têm sempre a mesma coordenada de centro em relação aos eixos X e Y, porém se deslocam verticalmente e, como as bases não são paralelas, necessitamos ir alterando a inclinação dos círculos para que gradativamente eles atinjam a inclinação da base superior. Porém, isso não é possível apenas utilizando duas variáveis.

Para resolver este problema, oriente os alunos que a resposta está em tornar a parametrização da base superior igual à parametrização da base inferior, dê um tempo para que eles tentem descobrir como.

Caso nenhum dos alunos tenha descoberto uma forma de fazer estas parametrizações se tornarem iguais, oriente-os que isso será possível desde que, ao invés de usarmos uma variável para a altura h e outra para a inclinação α, utilizarmos uma única variável em evidência, controlando ambos os casos. Já que essas variáveis começam em zero e seus términos são distintos, essa variável, tem início em 0 e final em 1. Com isso, ao multiplicar os valores da parametrização da base superior por 0, elas se tornam iguais à parametrização da base inferior, e gradativamente aumentam até que a variável atinja seu máximo que será 1 e, com isso, a parametrização se torna igual à da base superior. Feito isso, o comando Superfície fica assim descrito:

$$\text{Superfície } (5\,\text{sen}\,t,\ 5\cos t,\ a(10+\text{sen}\,t\ 5\ \tan 30°),\ t,\ 0,\ 2\pi,\ a,\ 0,\ 1).$$

Com a superfície lateral construída, o tronco de cilindro esta pronto, veja Figura 5.24.

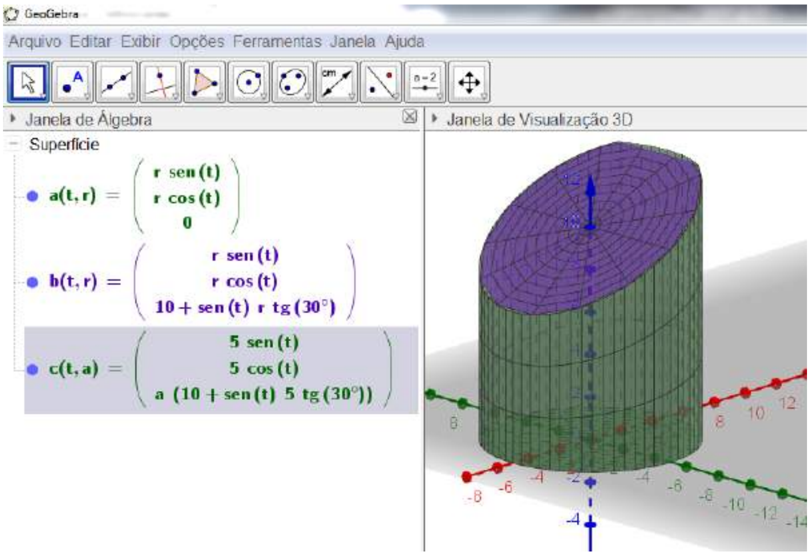


Figura 5.24: Tronco de Cilindro.

Assim como no cilindro oblíquo, permita que após o término da construção os alunos façam alterações ou mesmo novas construções e debatam os resultados de tais construções.

5.6 Cálculo de Área e Volume de Cilindros

Explorando o GeoGebra na construção de círculos.

5.6.1 Orientações.

Número de aulas: 4 aulas, sendo 2 aulas para cada atividade

Público alvo: Alunos de ensino fundamental II ou alunos de ensino médio.

Material Utilizado: Equipamento eletrônico com o *software* GeoGebra instalado, sólidos geométricos utilizados na Proposta de Plano de Aula 5.1.3 e equipamento eletrônico para calcular.

5.6.2 Objetivos:

- Calcular a área e o volume de um cilindro oblíquo com e sem o auxílio do *software* GeoGebra.
- Calcular a área e o volume de um tronco de cilindro com e sem o auxílio do *software* GeoGebra.

5.6.3 Atividade 1

Orientação ao professor:

Nesta atividade o aluno irá aprender a determinar a área e o volume de um tronco de cilindro por meio de cálculos. Para isso, contará com o auxílio de instrumentos eletrônicos como calculadora e o *software* GeoGebra.

Roteiro:

Oriente os alunos que, para calcular a área de um tronco de cilindro, em primeiro lugar é necessário fazer sua planificação, o que já foi feito na Proposta de Plano de Aula 5.1.3. Com a planificação pronta, necessitamos dimensionar cada uma das partes dessa planificação. Para realizar esse dimensionamento é necessário que os alunos tenham conhecimento sobre razões trigonométricas.

Com todas as partes dimensionadas, podemos orientar os alunos a calcular a área isoladamente de cada parte da planificação e, com isso, possibilitar o cálculo de sua área total. Para isso, é necessário que os alunos tenham o conhecimento das fórmulas de cálculo de área de figuras planas, como retângulo, círculo e principalmente da elipse, que não é apresentada na maioria dos livros didáticos e nesse trabalho pode ser encontrada na Seção 1.2.

O cálculo do volume do tronco de cilindro também é fácil. Pelo resultado apresentado de forma detalhada na Seção 3.7 deste trabalho, após termos dimensionado a planificação do tronco de cilindro, para obter o seu volume basta multiplicar a área da base pela altura média do tronco de cilindro.

Para facilitar o desenvolvimento dessa atividade, temos no Anexo A uma proposta de atividade completa, já com fórmulas, para ser trabalhada com alunos.

Com todos os cálculos prontos, mostre aos alunos que o GeoGebra possibilita obter o perímetro e até o cálculo de área de polígonos, porém, para isso, é necessário a construção do polígono, o que em muitos casos é mais trabalhoso do que o próprio cálculo.

5.6.4 Atividade 2

Orientação ao professor:

Nesta atividade o aluno irá aprender a calcular a área e o volume de um cilindro oblíquo por meio de cálculos. Para isso contará com o auxílio de instrumentos eletrônicos como calculadora e o *software* GeoGebra.

Roteiro:

Oriente os alunos que, para calcular a área de um cilindro oblíquo, em primeiro lugar é necessário fazer sua planificação, o que já vimos na Proposta de Plano de Aula 5.1.3. Com a planificação pronta, necessitamos dimensionar cada uma das partes dessa planificação. Para realizar esse dimensionamento é necessário que os alunos tenham conhecimento sobre razões trigonométricas.

Com todas as partes dimensionadas, podemos orientar os alunos a calcular a área de cada parte da planificação isoladamente e, com isso, possibilitar o cálculo de sua área total. Para isso, é necessário que os alunos tenham o conhecimento das fórmulas de cálculo de área de figuras planas, como retângulo e círculo.

Porém, o que pode parecer fácil, os alunos podem achar complicado quando notarem que a planificação da superfície pode ser transformada em um retângulo de comprimento igual ao perímetro da elipse que forma o corpo do cilindro. Esse perímetro pode ser encontrado de forma aproximada na Seção 1.4 deste trabalho e a altura desse retângulo não é a altura do cilindro oblíquo mas sim o comprimento do eixo de inclinação desse cilindro.

O volume do cilindro oblíquo pode ser facilmente calculado pelo Princípio de Cavalieri. O enunciado desse princípio pode ser encontrado detalhadamente no livro do Elon [5].

Para facilitar o desenvolvimento dessa atividade, temos no Apêndice B, uma proposta de atividade completa, já com fórmulas, para ser trabalhada com alunos.

Com todos os cálculos prontos mostre aos alunos que o GeoGebra possibilita o dimensionamento do perímetro e até o cálculo de área de polígonos. Porém, para isso, é necessário a construção do polígono, o que em muitos casos é mais trabalhoso do que o próprio cálculo.

Capítulo 6

Experiências com Aplicações das Atividades Propostas.

Neste capítulo contamos algumas das experiências vividas durante a aplicação das Propostas dos Planos de Aulas do capítulo 5. Essas propostas foram aplicadas a alunos de oitavo e nono anos da Escola Municipal Evandro Brito da Cunha, localizada na cidade de Extrema - MG.

Durante o ano de 2017, um grupo de 22 alunos participaram de um programa denominado *OBMEP na Escola*. Ao término desse programa, no mês de setembro, os alunos foram convidados a continuarem com aulas de treinamento, porém agora sobre construções e cálculos geométricos com o auxílio de um *software* de desenho geométrico chamado GeoGebra, deste de grupo, apenas seis aceitaram participar.

Como na escola Municipal Evandro Brito da Cunha não há um laboratório de informática, as primeiras aulas foram aplicadas em outra escola municipal onde há um laboratório de informática. Porém, por uma questão de distância, e como o grupo de trabalho foi reduzido, as demais aulas foram na própria escola em *Notebooks* cedidos por professores.

6.1 Análise de Diferentes Tipos de Cilindros.

Nesta primeira aula, os alunos foram informados que o objetivo era conhecermos cilindros retos, truncados e oblíquos para posteriormente efetuarmos suas construções no *software* GeoGebra e calcularmos sua área total e seu volume.

Para que os alunos pudessem compreender melhor o formato e as diferenças do cilindro reto, do cilindro oblíquo e do cilindro truncado, eles receberam estes sólidos que foram construídos com antecedência com os moldes do Apêndice C. De posse dos sólidos, os alunos começaram a comparar e logo perceberam que, apesar de formatos diferentes, apresentavam muitas caracteristicas comuns e poucas diferenças. Relataram que em todos a base inferior era uma círculo, que todos possuiam uma certa altura e que apenas no cilindro truncado a base superior não era um círculo. Relataram também que o cilindro oblíquo possuia uma certa inclinação em sua cosntrução, veja Figura (foto) 6.1.

Figura 6.1: Aluno analisando um cilindro oblíquo.

Como os alunos demonstraram bastante interesse na análise dos sólidos, foram incentivados a descobrirem como seria a planificação da superfície lateral de cada um dos sólidos que eles receberam. De início todos disseram que o cilindro reto formaria na planificação da superfície lateral um retângulo, o que já era esperado, pois, se tratava de um sólido já estudado anteriormente. Quando passaram a analisar o cilindro oblíquo, todos disseram que a planificação da superfície lateral seria um paralelogramo, veja Figura (foto) 6.2, então foi proposto a eles que recortassem um paralelogramo e tentassem enrolá-lo e, assim, gerar um cilindro oblíquo.

Figura 6.2: Aluno analisando a planificação do cilindro oblíquo.

Os alunos aceitaram o desafio e recortaram um paralelogramo de sulfite, porém, para a decepção coletiva ao enrolar, todos puderam perceber que formaria um cilindro reto e não oblíquo, então foi sugerido a eles que fossem girando o sólido sobre uma folha de sulfite e marcando alguns pontos na trajetória desse giro, posteriormente eles ligaram os pontos e assim tiveram uma ideia de como ficaria essa planificação. Ao realizarem essa nova proposta, os alunos ficaram encantados em descobrir que não se tratava de um paralelogramo, mas sim de uma figura delimitada por duas curvas, neste momento entregamos a eles o molde do Apêndice D, os alunos recortaram o molde e logo foram enrolar sobre o cilindro oblíquo para ver se realmente formaria um cilindro oblíquo e novamente ficaram encantados com o resultado, pois o molde com aquelas linhas curvadas formava exatamente um cilindro oblíquo, veja Figura (foto) 6.3.

Figura 6.3: Aluno enrolando a planificação sobre um cilindro oblíquo.

Após a descoberta do formato da planificação da superfície lateral do cilindro oblíquo, os alunos foram questionados sobre como fariam para calcular a área dessa planificação. Como nas aulas regulares os alunos sempre calculavam áreas de quadrados, retângulos, triângulos e círculos, ficaram por muito tempo pensando em uma forma de transformar essa planificação em uma forma geométrica conhecida, porém ninguém conseguiu. Nesse momento, os alunos foram orientados a dividir a figura ao meio no sentido horizontal e posteriormente a sobrepor as curvas. Ao fazerem o que foram orientados os alunos indagaram "isso é bruxaria professor, formou um retângulo!", veja Figura (foto) 6.4, com isso, eles puderam perceber que a base inferior e superior são círculos e a planificação da superfície lateral forma depois de uma decomposição, um retângulo.

Com todas as descobertas feitas na análise do cilindro oblíquo, os alunos não tiveram nenhuma dificuldade ao analisar o tronco de cilindro, foram girando o sólido sobre uma folha de sulfite e logo perceberam que se tratava de uma figura em que a parte superior era delimitada por uma curva e que se traçássemos uma reta na altura média dessa curva, a parte da figura que fica acima da linha complementa a parte da figura que fica abaixo da linha, formando novamente uma retângulo, veja Figura (foto) 6.5.

Figura 6.4: Aluno descobrindo que a planificação da superfície lateral do cilindro oblíquo forma uma retângulo.

Figura 6.5: Alunos analisando tronco de cilindro.

6.2 Explorando o *Software* GeoGebra

6.2.1 Atividade 1

Na primeira aula destinada a exploração do *software* GeoGebra os alunos a princípio ficaram receiosos com a possibilidade de não darem conta de mexerem no *software* devido à quantidade de ferrametas existentes, porém foram acalmados de que iríamos aos poucos conhecendo cada uma das ferramentas e que nessa primeira aula utilizariamos apenas a segunda e a terceira ferramentas para realizarmos a marcação de pontos e construções de retas.

Na apresentação da segunda ferramenta, os alunos facilmente compreenderam a forma de escolher qual ferramenta utilizar e como marcar um ponto na janela de visualização. Como isso foi para todos de certa forma fácil, os alunos foram orientados de que um ponto também poderia ser marcado a partir de suas coordenadas, sem a necessidade de clicar em um ponto da janela de visualização, para isso bastava eles digitarem o nome do ponto na barra de entrada e, em seguida, digitar o sinal de igual seguido de parênteses, dentro desses parênteses eles deveriam digitar as coordenadas desse ponto e, finalmente, para terminar, clicar na tecla *enter*. Isso para eles também foi bem fácil. Foi aí que eles foram orientados que todos aqueles pontos criados por eles no início clicando na janela de visualização tinham seus nomes criados automaticamente em ordem alfabética pelo *software* e que eles poderiam alterar esses nomes.

Para realizar alterações no nome de cada ponto eles deveriam clicar com o botão direito do *mouse* sobre o ponto, com isso se abriria uma janela e nela eles deveriam clicar em renomear, o que faria aparecer uma nova janela para digitação desse novo nome. Os alunos ficaram encantados com a possibilidade de dar o nome que eles quisessem para cada ponto, pois perceberam que diferente do que aprenderam em aulas em que um ponto deve ter seu nome dado por uma única letra maiúscula, eles poderiam dar qualquer nome para os pontos e foi exatamente isso que fizeram, os pontos tinham nomes como $Pedro$, $Joana$, $Maria$, entre outros, veja Figura 6.6.

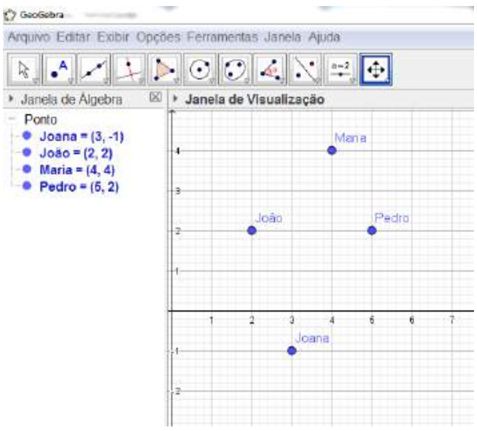


Figura 6.6: Pontos renomeados pelos alunos.

Já na apresentação da terceira ferramenta ficaram muito curiosos, pois ao clicarem no canto inferior direito da janela, abriram-se varias ferramentas, foram orientados de que, no momento, eles só iriam utilizar as ferramentas reta, segmento e semirreta e que as demais só seriam utilizadas posteriormente, quando os conhecimentos matemáticos estivessem mais avançados.

Os alunos foram orientados a escolher uma das três ferramentas e construir a reta ou segmento ou semirreta dependendo de sua escolha, foram orientados também que caso tivessem alguma dúvida de como utilizar a ferramenta era só parar com o *mouse* sobre a janela referente à ferramenta escolhida que abriria uma janela com orientações. Após cada uma das construções, eles teriam que analisar os registros matemáticos que surgiam na janela de álgebra. Alguns alunos perceberam que tal registro se tratava da equação da reta já outros ficaram sem saber o que era tal registro. Para auxiliar aos que não entederam sobre os registros matemáticos, todos foram orientados a clicar com o botão direito do *mouse* sobre o registro matemático na janela de álgebra e notar que se abriria uma nova janela e nela essa informação matemática estaria especificada e que, no caso da reta, eles ainda poderiam escolher entre forma reduzida, forma geral e forma paramétrica.

Os alunos gostaram muito da praticidade de transformar uma equação reduzida em geral, ou geral em reduzida, com apenas dois cliques de um *mouse* o que eles em sala de aula levavam tempo e, por vezes, acabavam errando em alguma escrita, veja Figura 6.7.

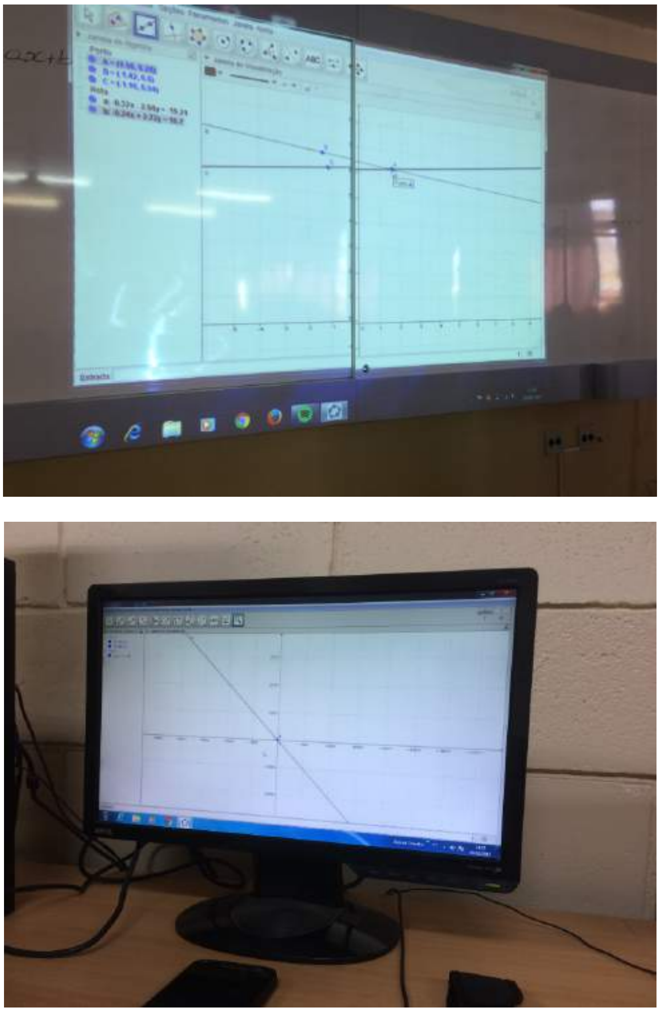


Figura 6.7: Da construção de uma reta feita por aluno durante aula.

6.2.2 Atividade 2

Nesta segunda aula, destinada ao traçado de retas, foi necessário em primeiro lugar retomar o conceito de equação de retas e por consequência as definições de coeficiente angular e coeficiente linear. Esta revisão foi muito tranquila para os alunos, pois já haviam estudado este conteúdo nas aulas de treinamento para OBMEP. Após essa breve revisão, os alunos foram orientados em como criar um controle deslizante conforme descrito no plano de aula. Criar os controles deslizantes foi bem fácil, mas os alunos não estavam entendendo qual seria a vantagem em escrever uma equação de reta usando letras ao invés de números. Neste momento foi necessário tranquilizá-los e dizer a eles que o resultado seria muito bom, bastava que eles confiassem.

Com os controles criados, os alunos foram orientados a clicar com o botão direito do *mouse* sobre o controle deslizante e posteriormente clicar em propriedades para que pudéssemos fazer os devidos ajustes no intervalo mínimo, no intervalo máximo e no incremento, para que o controle funcionasse corretamente. Estes ajustes também foram feitos com facilidade pelos alunos, porém um dos alunos ao clicar com o botão direito do *mouse* sobre o controle deslizante, notou que na janela que se abria havia a opção de animar e questionou como funcionava essa função. Com esse questionamento, foi necessário sair um pouco da aula planejada e orientá-los que essa função faria o controle deslizante se movimentar sozinho, foi ai que alguns alunos de imediato clicaram no controle deslizante e ativaram o comando animar, isso fez com que os valores desse controle deslizante ficassem se movendo o que fez os alunos se interessassem ainda mais pela aula.

Com os controles criados e os alunos acalmados, pois, nesse momento eles só queriam animar os controles deslizantes, foram orientados, conforme o plano de aula, que uma reta poderia ser traçada sem a necessidade de criar pontos, como na aula anterior, e que para isso bastava eles digitarem a equação correspondente à reta na barra de entrada, o que novamente para eles foi bem fácil. Traçaram algumas retas, mas continuavam com a ideia fixa de animar e um dos alunos perguntou, “o que o controle deslizante tem a ver com a equação da reta”, foi nesse momento que foram orientados a digitarem na barra de entrada uma equação com os controles deslizantes no lugar dos coeficiente angular e linear. Com a reta traçada foram logo animar os controles e as telas ficaram uma loucura, eram retas subindo e descendo o tempo todo, veja Figura (foto) 6.8.

Para concluirmos a aula, os alunos foram orientados a animar apenas o controle deslizante referente ao coeficiente angular e analisar os resultados. Todos perceberam claramente que essa animação fazia com que a reta mudasse de inclinação, já quando os alunos animaram apenas o controle deslizante referente ao coeficiente linear, a maioria dos alunos chegou à conclusão de que a reta estava se deslocando horizontalmente sobre o eixo X, o que visualmente dependendo da inclinação da reta realmente dava essa impressão, foi necessário deixar as retas com pouca inclinação e fazer uma nova análise. Nessa nova análise, todos os alunos perceberam que, conforme o coeficiente linear mudava, a reta se deslocava verticalmente sobre o eixo Y.

Figura 6.8: Retas traçadas na barra de entrada.

6.3 Apresentação do Comando Curva

6.3.1 Atividade 1

Nesta aula, conforme planejado no plano de aula, os alunos aprenderam a traçar círculos no GeoGebra. Primeiro foi apresentado a eles a sexta ferramenta e nela eles clicaram no canto inferior direito, ao abrir a nova janela, os alunos foram orientados a utilizarem apenas a primeira e segunda ferramentas que apareceram nessa nova janela, pois, se tratavam de ferramentas mais simples e mais úteis às nossas construções. Os alunos entenderam bem como utilizar essas novas ferramentas e com o avançar das aulas já estavam mais familiarizados com o *software*, realizando algumas construções por intuição.

Quando foram questionados sobre os círculos traçados e os registros matemáticos contidos na janela de álgebra, nenhum aluno sabia interpretar tal registro, e isso já era esperado, pois estes alunos ainda não conheciam a equação do círculo, porém, como já sabiam calcular a distância entre dois pontos e também já conheciam o Teorema de Pitágoras, aproveitamos a oportunidade e a curiosidade dos alunos e introduzimos o conteúdo de equações de círculos.

Com o conteúdo introduzido, os alunos passaram a entender o registro da janela de álgebra e acharam muito interessante como o centro e o raio do círculo aparecem na equação. Foi uma atividade rápida e muito proveitosa, pois, os alunos aprenderam de uma forma prática o conteúdo de equações de círculos.

6.3.2 Atividade 2

Essa atividade, com certeza, foi a mais complexa para os alunos, pois, foi necessário o uso de equações paramétricas, que não eram de conhecimento dos mesmos. Para iniciar a aula, os alunos foram informados sobre o conceito de curva, pois, para eles, curva era qualquer coisa que não fosse uma reta, quando entenderam que curva era a trajetória de um ponto em um determinado intervalo de tempo, um dos alunos questionou:

"Então uma reta pode ser considerada uma curva?"

A responta a este aluno foi sim, o que gerou uma curiosidade geral, pois eles acharam o máximo dizer "uma curva reta". Com esse conceito de curva compreendido por todos e com os alunos ainda muito curiosos, foi introduzido o conteúdo de parametrização de uma reta, que para eles foi bem fácil, pois entenderam com facilidade que era necessário escrever a equação em duas partes, a primeira com valores referentes ao eixo X e a segunda com valores referentes ao eixo Y, e que os valores deveriam variar em função de uma terceira incógnita, em nossa aula foi usado t. Com isso, os alunos, após exemplos, escreveram a equação $y = 5x + 7$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 5t + 7 \end{cases}$$

Com a parametrização concluída, os alunos foram orientados a digitar na barra de entrada do *software* GeoGebra a palavra *curva* e notaram que se abriu uma janela com seis opções para esse comando, porém, apenas a primeira e a segunda opções usam expressões. Foram então orientados a escolherem a primeira, pois como havia apenas dois campos para digitação de expressões, esse seria o comando usado para desenhar uma curva no plano. Já o comando com três campos para digitação de expressões seria usado para desenharmos uma curva no espaço, e que faríamos isso em breve.

Foi necessário orientá-los que no campo <Variável>, eles deveriam digitar a letra t, pois, foi essa a variável usada por eles na parametrização da equação da reta e que nos campos $< Valor\ Inicial >$ e $< Valor\ Final >$ eles poderiam digitar quaisquer valores, isso iria definir onde o segmento de reta iria iniciar e terminar. Com essas orientações, os alunos utilizaram o comando com facilidade e, por várias vezes, eles alteravam os valores dos campos $< Valor\ Inicial >$ e $< Valor\ Final >$ para mudar o tamanho do segmento de reta.

Com o comando curva compreendido por todos, os alunos foram orientados a seguirem os mesmos passos e tentarem desenhar um círculo usando o comando curva. Essa nova tarefa não foi fácil, muitos tiveram dificuldade na parametrização, mas com pequenas orientações foi possível. Na hora de escrever o comando curva, todos tiveram dificuldade pois não sabiam como escrever raiz quadrada no GeoGebra, resolvido este problema, os alunos questionaram: "Por que só aparece metade do círculo?". Os alunos foram informados que só aparece metade do circulo, pois o GeoGebra só utiliza o resultado positivo da raiz quadrada, caso queiram a outra metade do círculo seria necessário escrever um novo comando curva e utilizar o sinal negativo antes da raiz ou, então, escrever a parametrização do círculo usando seno e cosseno. Como os alunos só aprenderam a equação do círculo na aula anterior, também não conheciam a equação paramétrica utilizando seno e cosseno, então foi necessário introduzir este conteúdo a eles.

A introdução da parametrização de um círculo foi, de certa forma fácil, pois nas aulas de treinamento da OBMEP e nas aulas regulares, eles já haviam aprendido a fazer cálculos utilizando seno e cosseno para encontrar medidas desconhecidas em triângulos. Foi só usar a demonstração do círculo trigonométrico, que eles acharam muito mais fácil a parametrização por seno e cosseno e, com um resultado melhor no *software* do que a parametrização pela equação cartesiana do círculo.

Com a parametrização do círculo por seno e cosseno compreendida, os alunos realizaram vários traçados de círculos no GeoGebra usando o comando curva, veja Figura (foto) 6.10.

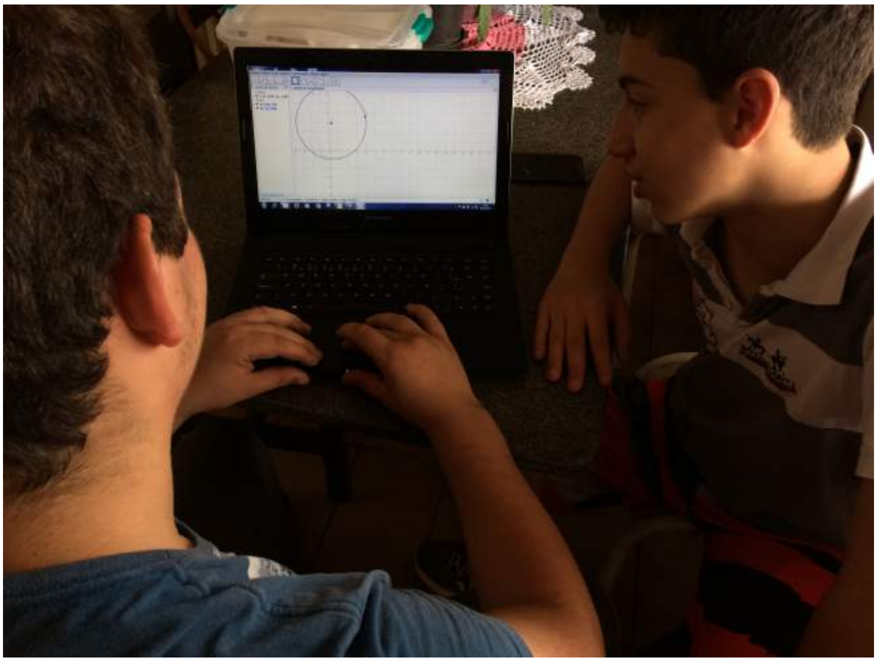


Figura 6.9: Alunos construindo círculo com comando curva.

6.3.3 Atividade 3

Nesta terceira aula destinada ao traçado de curvas, os alunos não tiveram problemas para traçarem círculos paralelos aos planos OXY, OXZ e OYZ. Como a parametrização de um círculo no plano ou fora dele é a mesma e o comando curva também é igual apenas, com a inclusão de uma terceira expressão, os alunos realizaram vários traçados com facilidade.

Como os alunos acharam tudo muito fácil, foi dado a eles o tronco de cilindro e perguntado como desenhar o contorno da base superior, um dos alunos disse: “Eu bem que estava

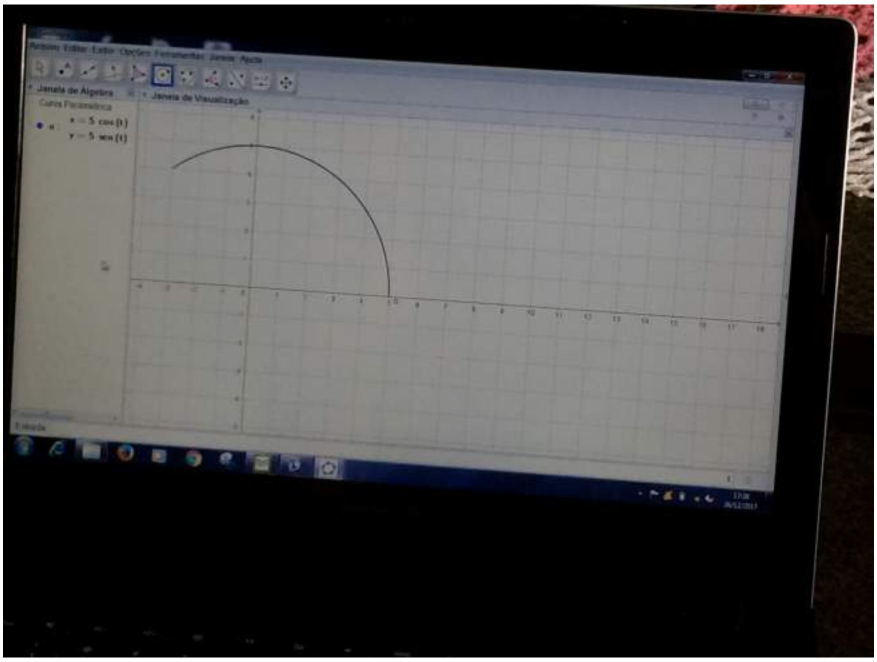


Figura 6.10: Círculo construído por alunos durante aula.

achando essa aula muito fácil, mas e agora? Isso nem círculo é professor!". Nesse momento os alunos foram orientados a observar o tronco de cilindro verticalmente ou colocar o tronco de cilindro no chão, apoiado pela base inferior e observar de cima para baixo, verticalmente para que notassem que a imagem do contorno da base superior, mesmo sendo uma elipse, projetava um círculo no plano OXY que nesse caso seria o chão da sala, veja Figura (foto) 6.11.

Figura 6.11: Aluno observando o tronco de cilindro verticalmente.

Os alunos foram orientados que para desenhar uma elípse não paralela ao plano OXY seria necessário calcular a altura gerada pela inclinação, com o auxílio da Figura 6.12, puderam notar que essa altura K, não era constante, variava conforme o giro na elipse, então seria necessário calcular essa altura em função do ângulo formado entre a elipse e o plano OXY.

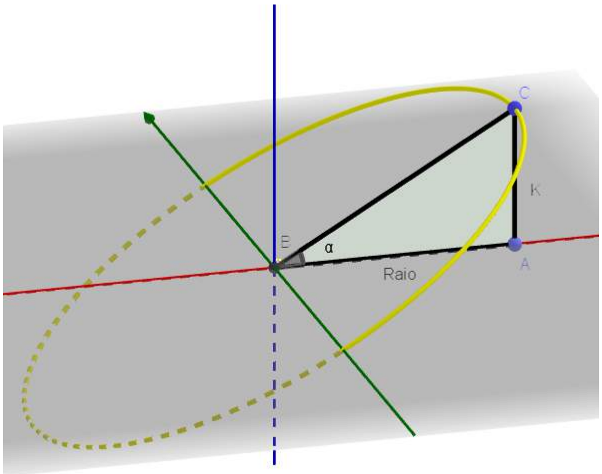


Figura 6.12: Desenho usado para explicar a inclinação de uma elipse no espaço.

Para determinarmos essa altura usamos a tangente do ângulo de inclinação, já que a medida do raio era sempre constante, então, chegamos a conclusão que:

$$K = Raio \ \times \ tan\alpha$$

Para desenhar uma elipse que projeta um círculo no plano OXY, os alunos foram orientados que na utilização do comando curva, as informações das duas primeiras expressões continuavam iguais e que teríamos mudança apenas na terceira expressão, nela deveríamos informar a altura do centro da elipse em relação ao plano OXY acrescido da informação $raio. \operatorname{sen} t. \tan \alpha$, a informação $\operatorname{sen} t$, refere-se ao eixo em relação ao qual acontecerá a inclinação e a informação $\tan \alpha$, refere-se à inclinação da elipse. Com essas informações, os alunos conseguiram utilizar o comando curva para traçar curvas que projetam um círculo no plano OXY. Após, a utilização do comando algumas vezes os alunos notaram que essa inclinação era muito simples, bastava alterar o ângulo da tangente e conseguiam novas curvas.

6.4 Apresentação do Comando Superfície

6.4.1 Atividade 1

Trabalhar com o comando superfície com os alunos foi bem fácil, pois, bastou orientá-los que esse comando era muito parecido com o comando curva. Para selecioná-lo bastava digitar, na barra de entrada, a palavra superfície e escolher o comando com expressões que apareceria na nova janela que se abriria.

Foram orientados que a forma de utilizar o comando superfície também é muito parecida com o comando curva, tendo apenas o diferencial que no comando superfície há duas variáveis, enquanto que no comando curva tem-se uma variável. A parte mais trabalhosa da aula foi que os alunos não sabiam o que fazer com essa segunda variável. Foram então orientados que seria necessário, na construção das primeiras expressões do comando superfície, utilizar uma incógnita na medida em que se pretendia realizar a variação. Foram dados a eles os exemplos citados no plano de aula.

No primeiro exemplo, que se tratava de um retângulo, os alunos foram orientados que nas primeiras expressões do comando superfície, foram usadas as equações paramétricas da reta que servia de base para o retângulo, já na terceira expressão como a altura não era uma medida fixa foi usado a incógnita k e, na segunda variável, foi inserido a mesma incógnita k com valor inicial de 0 e valor final de 3. Com isso foi gerado um retângulo de altura 3 cm.

Já no segundo exemplo, a finalidade era desenhar um disco de diâmetro 5 cm, então os alunos foram orientados que nas expressões fossem usadas as equações paramétricas de um círculo, porém, o diâmetro desse círculo não poderia ser fixo, então no lugar do raio foi usado uma incógnita r e na segunda variável também foi inserida a incógnita r com valor inicial de 0 e valor final de 5 cm. Com isso foi gerado um disco de diâmetro 5 cm.

Dadas essas orientações os alunos criaram várias superfícies principalmente usando o disco, veja Figura 6.13 e Figura 6.14.

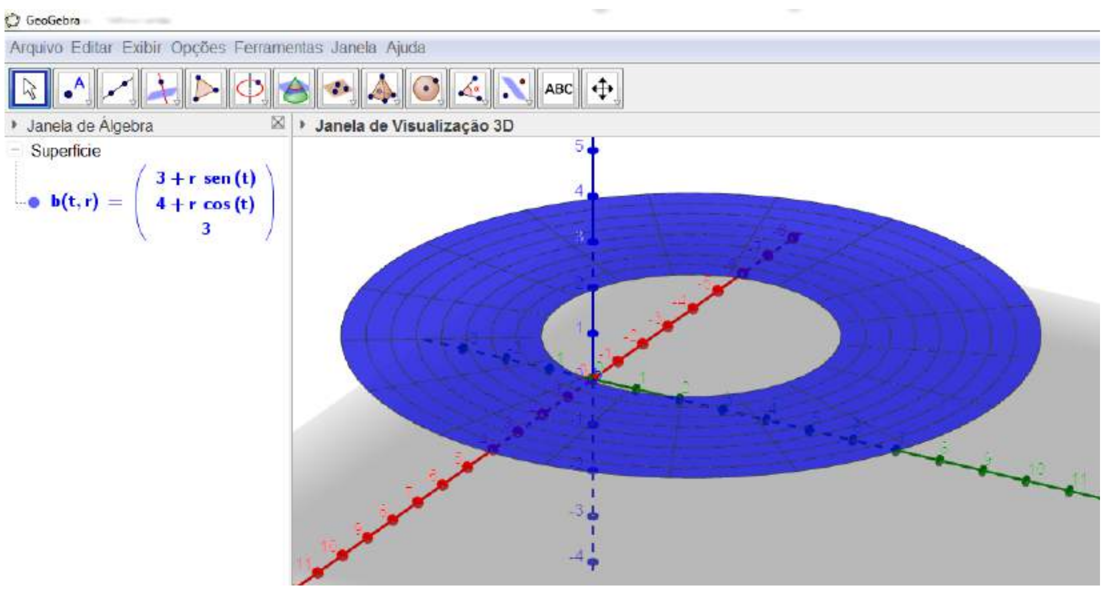


Figura 6.13: Disco com furo construído pelos alunos durante a aula.

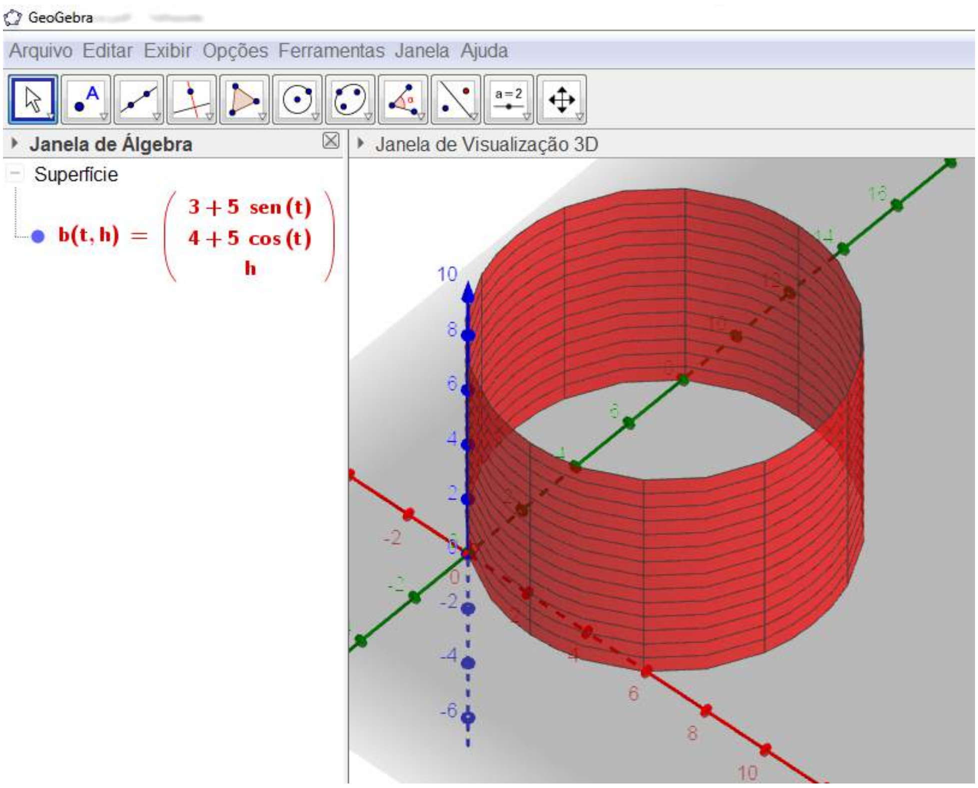


Figura 6.14: Tubo construído pelos alunos durante a aula.

6.5 Construção de Cilindros

6.5.1 Atividade 1

Nesta aula, a principal finalidade era fazer com que os alunos compreendessem e fossem capazes de construírem um cilindro oblíquo no *software* GeoGebra. Porém, como eles ainda não conheciam as ferramentas para construção de sólidos já existentes no GeoGebra, primeiramente foi apresentada a eles a nona ferramenta da barra de ferramentas da janela de visualização $3D$. Nela, os alunos foram orientados a clicar no canto inferior direito e na nova janela que se abriu, puderam conhecer as oito ferramentas pré-existentes para construção de sólidos. Um dos alunos ao ver a última ferramenta da janela que se abriu ficou muito contente, pois achou que com ela poderiamos planificar os cilindros sem maiores problemas, porém foi alertado que esta ferramenta só planifica poliedros e como cilindro não é um poliedro, essa ferramenta não teria utilidade nenhuma em nossas aulas.

Com as ferramentas já apresentadas aos alunos, eles começaram a criar cilindros retos, veja Figura 6.15.

Com os cilindros criados, os alunos foram orientados a analisarem a janela de álgebra e interpretarem os registros lá criados. Como os registros estavam diferentes dos usados por eles nas aulas anteriores, eles não souberam interpretar. Então, foram orientados que os registros das cônicas eram referentes às bases do cilindro e o registro da superfície era referente

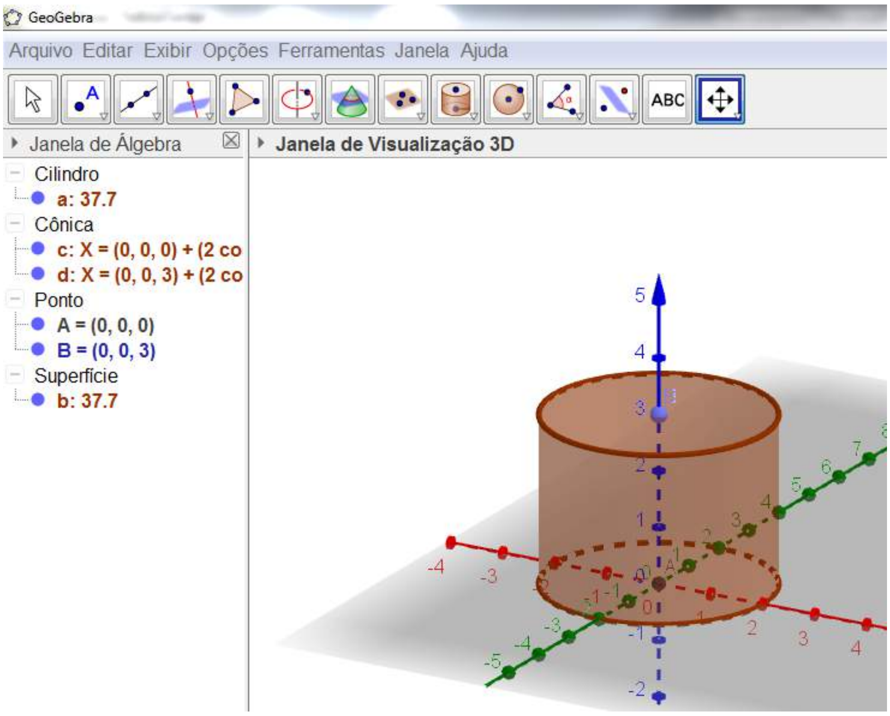


Figura 6.15: Cilindro reto criado por aluno durante a aula.

à superfície lateral do cilindro. Foram também orientados a usarem a primeira ferramenta da barra de ferramentas e tentar mover os pontos usados para construir o cilindro de forma a torná-lo um cilindro oblíquo. Os alunos moveram os pontos de muitas formas, e todos relataram que o cilindro se movia, e sempre continuava sendo um cilindro reto, veja Figura 6.16.

Após todas as tentativas dos alunos em mover os cilindros retos para os tornarem oblíquos, os alunos foram informados que a ferramenta de construção de cilindros do GeoGebra só possibilita a construção de cilindros retos, e que, para construir um cilindro oblíquo, seria necessário construir parte por parte. Foram instruídos também que para realizar essa construção seria mais fácil começar pelas bases.

Com as orientações, os alunos, que em aulas anteriores já haviam construído discos, criaram a base inferior sem maiores problemas, porém, no momento de criarem a base superior tiveram problemas com as coordenadas do centro e tiveram que ser auxiliados com os cálculos usando tangente, após o auxílio entenderam que seria necessário apenas acrescentar a parametrização do eixo no qual estaria a inclinação a medida da altura multiplicada pela tangente do ângulo de inclinação, veja a Figura 5.20 no plano de aula.

Com as bases prontas, foi necessário auxiliar os alunos na construção da superfície lateral, pois, eles até já haviam construído tubos antes, porém não inclinados. Essa orientação de certa forma foi fácil, como já tinham a base superior pronta, bastou informá-los que as coordenadas seriam as mesmas da base superior, porém, ao invés de variar o raio, iríamos variar a altura, veja Figura (foto) 6.17.

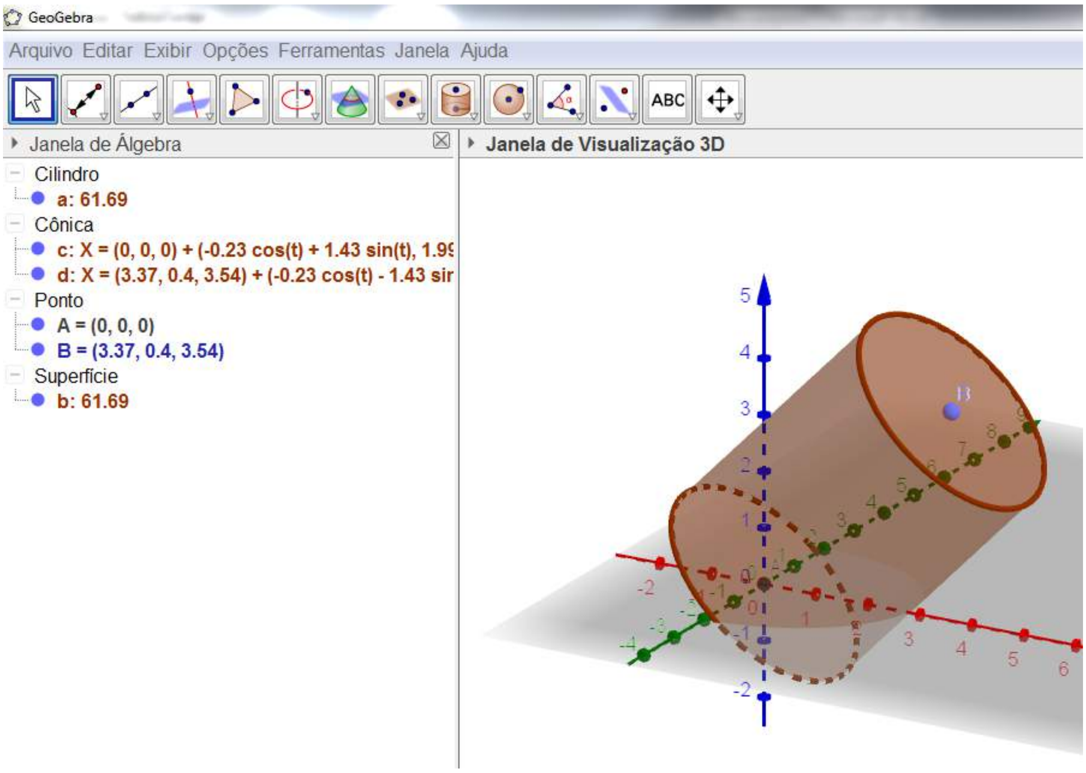


Figura 6.16: Cilindro reto, após movimentação feita por aluno durante a aula.

Com a construção pronta, os alunos começaram a realizar alterações na inclinação do cilindro para ver os resultados e quando um deles resolveu usar 89° como inclinação, todos acharam que não havia funcionado ou na linguagem deles "havia bugado", pois, não conseguiam ver o cilindro, então foi necessário orientá-los que, como usaram uma inclinação muito grande para se manter a altura do cilindro a superfície lateral ficou muito grande, seria necessário utilizar a décima terceira ferramenta da barra de ferramentas e, clicando no canto inferior direito, selecionar a ferramenta *reduzir* para minimizar o tamanho da visualização da imagem e, com isso, poder ver o cilindro todo.

6.5.2 Atividade 2

Nesta aula, a principal finalidade era fazer com que os alunos compreendessem e fossem capazes de construírem um tronco de cilindro no *software* GeoGebra. Como na Aula 6.5.1 já haviam construído um cilindro oblíquo, não tiveram problemas para iniciar a construção do tronco de cilindro, começaram com a construção da base inferior e, neste caso, na construção da base superior também não tiveram problemas, pois já haviam construído uma elipse que projetava um círculo no plano OXY na Aula 6.3.3.

Quando foram construir a superfície lateral tiveram muitas dúvidas, pois, seria necessário usar uma variável para controlar o giro, uma variável para controlar a altura do cilindro e uma terceira variável para controlar a inclinação do tronco e, como o comando superfície

Figura 6.17: Cilindro oblíquo construído por alunos durante aula.

só nos permite usar duas variáveis, os alunos não sabiam o que fazer. Para resolver este problema os alunos foram orientados que assim como no cilindro oblíquo, as coordenadas da parametrização da superfície lateral deveriam iniciar como as coordenadas da parametrização da base inferior e terminarem como as coordenadas da parametrização da base superior e, como agora teriamos que controlar três variáveis, também usaríamos as parametrizações da base superior na construção da superfície lateral, mas como sugerido no Plano de Aula 5.5.4, colocaríamos a terceira expressão toda entre parênteses e multiplicada por um parâmetro que será usado como variável, com valor inicial *zero* e valor final *um*. Com isso, quando a variável assumir o valor *zero*, a terceira expressão ficará com coordenadas iguais às da base inferior e quando assumir o valor *um*, a terceira expressão ficará com coordenadas iguais às da base superior.

Com as orientações dadas, os alunos ainda assim tiveram algumas dúvidas na digitação do comando superfície, porém, com alguns auxílios, conseguiram concluir a construção do tronco de cilindro. Assim como no cilindro oblíquo, quando conseguiram concluir, passaram a fazer alterações e comentar os resultados. Na figura 6.18, resolveram usar a base superior e a base inferior com furo, reproduzindo o tronco de cilindro que usaram nas análises.

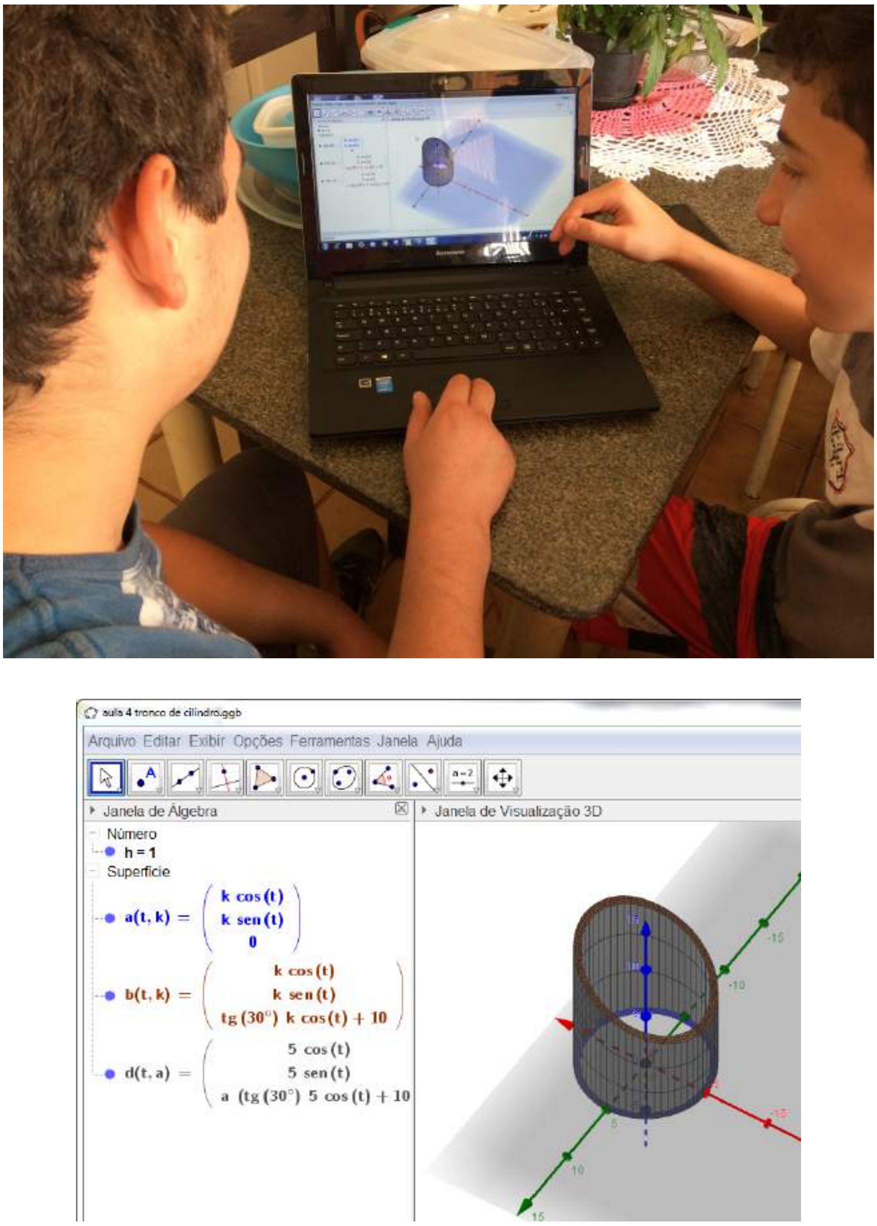


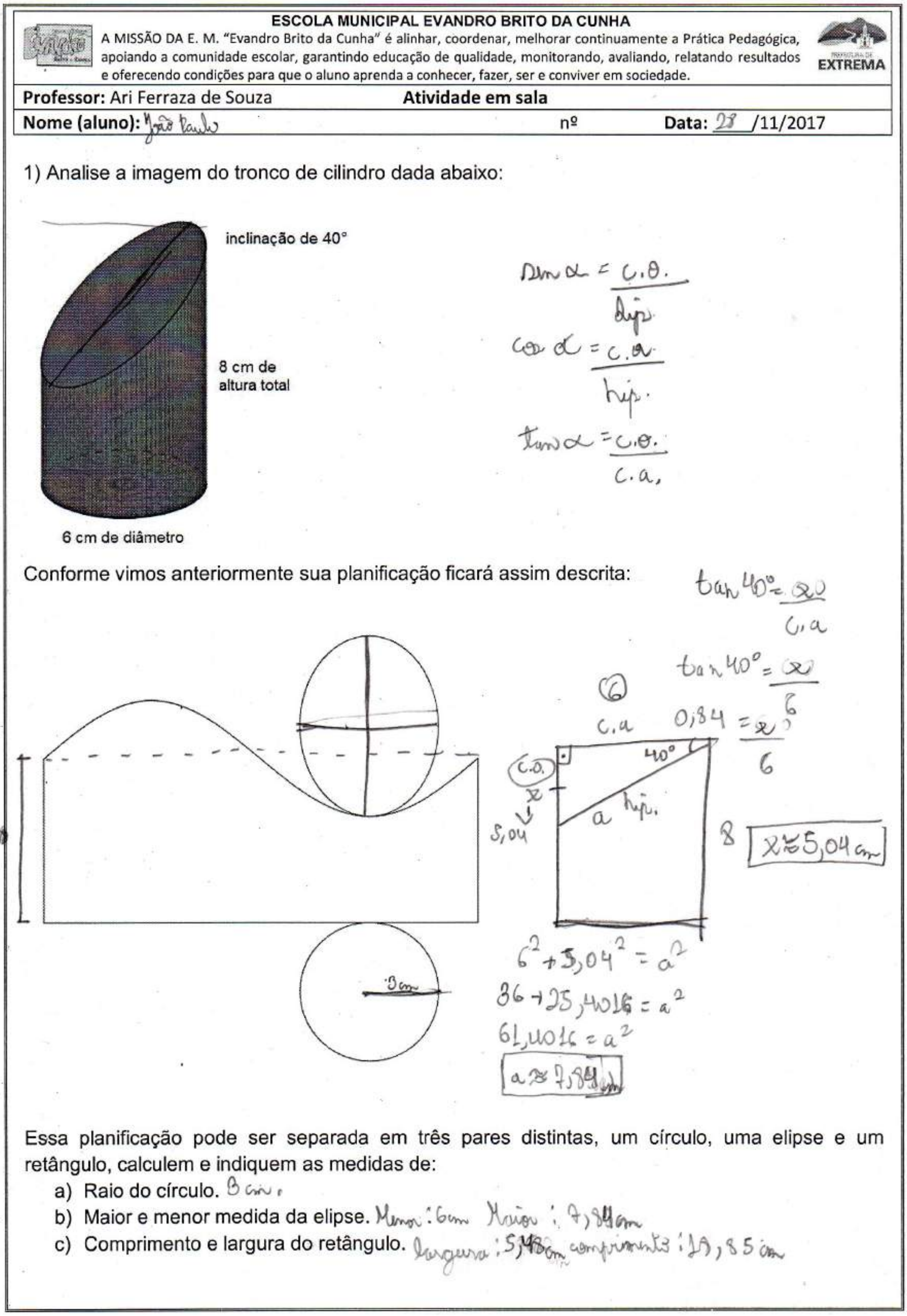
Figura 6.18: Tronco de Cilindro construído por alunos durante aula.

6.6 Cálculo de Área e Volume de Cilindros

6.6.1 Atividade 1

Nesta aula, os alunos receberam a atividade do Apêndice A e foram orientados a efetuar os cálculos necessários para se resolver as questões apresentadas na atividade. Como os alunos já haviam realizado a construção do tronco de cilindro no *software* GeoGebra e também já haviam trabalhado a planificação do tronco de cilindro, a única dificuldade encontrada nessa atividade foi calcular a altura média do sólido.

Para que os alunos calculassem a altura média foi necessário orientá-los em como posicionar um triângulo retângulo dentro do sólido de forma que pudessem utilizar as razões trigonométricas para encontrar essa altura média. Compreendido esse posicionamento, os alunos realizaram os demais cálculos com facilidade, as atividades realizadas pelos alunos estão listadas a seguir começando na Figura 6.19 e terminando na Figura 6.26.



ESCOLA MUNICIPAL EVANDRO BRITO DA CUNHA

A MISSÃO DA E. M. "Evandro Brito da Cunha" é alinhar, coordenar, melhorar continuamente a Prática Pedagógica, apoiando a comunidade escolar, garantindo educação de qualidade, monitorando, avaliando, relatando resultados e oferecendo condições para que o aluno aprenda a conhecer, fazer, ser e conviver em sociedade.

EXTREMA

Professor: Ari Ferraza de Souza **Atividade em sala**

Nome (aluno): João Paulo **nº** **Data:** 28 /11/2017

1) Analise a imagem do tronco de cilindro dada abaixo:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{c.o.}{hip.}$

$\cos\alpha = \frac{c.a.}{hip.}$

$\tan\alpha = \frac{c.o.}{c.a.}$

Conforme vimos anteriormente sua planificação ficará assim descrita:

$\tan 40° = \frac{x}{c.a}$

$\tan 40° = \frac{x}{6}$

$0,84 = \frac{x}{6}$

$\boxed{x \cong 5,04\ cm}$

$6^2 + 5,04^2 = a^2$

$36 + 25,4016 = a^2$

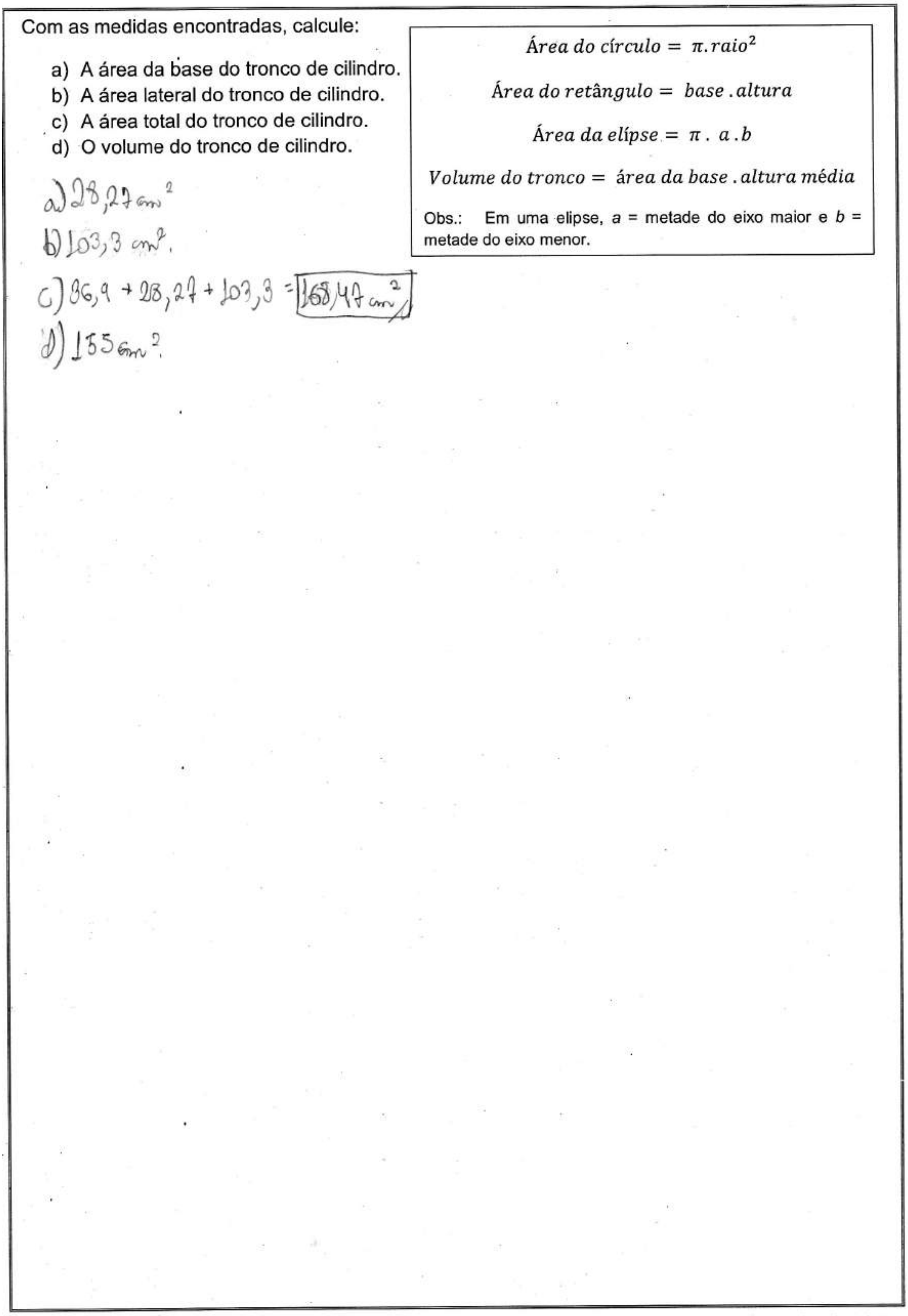
$61,4016 = a^2$

$\boxed{a \cong 7,84\ cm}$

Essa planificação pode ser separada em três pares distintas, um círculo, uma elipse e um retângulo, calculem e indiquem as medidas de:

a) Raio do círculo. 3 cm.
b) Maior e menor medida da elipse. Menor: 6cm Maior: 7,84cm
c) Comprimento e largura do retângulo. largura: 5,48cm comprimento: 18,85 cm

Figura 6.19: Atividade realizada pelo aluno João Paulo



Com as medidas encontradas, calcule:

a) A área da base do tronco de cilindro.
b) A área lateral do tronco de cilindro.
c) A área total do tronco de cilindro.
d) O volume do tronco de cilindro.

Área do círculo $= \pi . raio^2$

Área do retângulo $=$ *base . altura*

Área da elípse $= \pi \,.\, a \,.\, b$

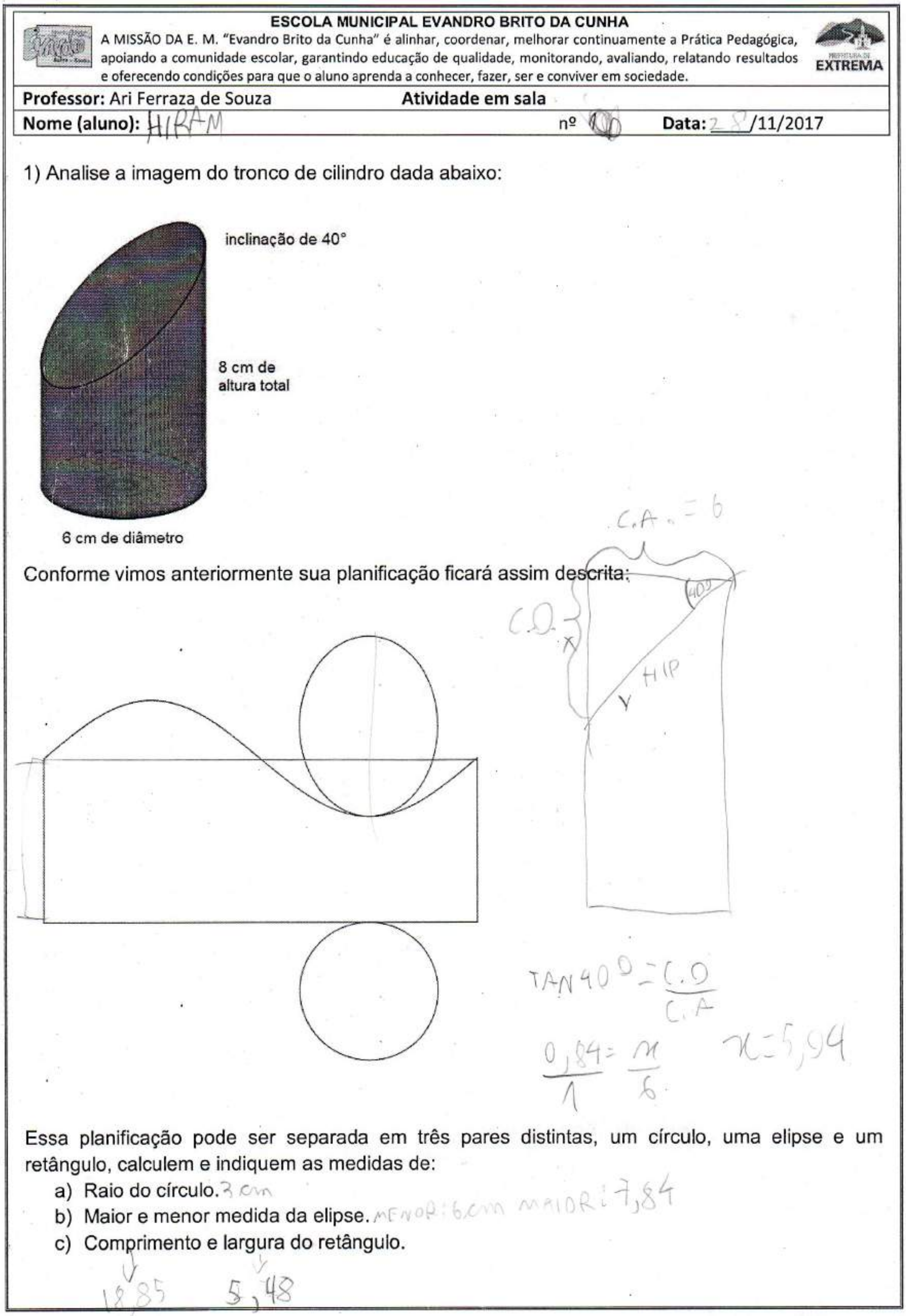
Volume do tronco $=$ *área da base . altura média*

Obs.: Em uma elipse, *a* = metade do eixo maior e *b* = metade do eixo menor.

a) 28,27 cm²
b) 103,3 cm².
c) $36{,}9 + 28{,}27 + 103{,}3 = \boxed{168{,}47\ \text{cm}^2}$
d) 155 cm².

E. M. Evandro Brito da Cunha - 2017

Figura 6.20: Atividade realizada pelo aluno João Paulo



ESCOLA MUNICIPAL EVANDRO BRITO DA CUNHA

A MISSÃO DA E. M. "Evandro Brito da Cunha" é alinhar, coordenar, melhorar continuamente a Prática Pedagógica, apoiando a comunidade escolar, garantindo educação de qualidade, monitorando, avaliando, relatando resultados e oferecendo condições para que o aluno aprenda a conhecer, fazer, ser e conviver em sociedade.

EXTREMA

Professor: Ari Ferraza de Souza	**Atividade em sala**
Nome (aluno): HIRAM	**nº** 10 **Data:** 28/11/2017

1) Analise a imagem do tronco de cilindro dada abaixo:

Conforme vimos anteriormente sua planificação ficará assim descrita:

$TAN\,40^\circ = \frac{C.O}{C.A}$

$\frac{0{,}84}{1} = \frac{x}{6}$ $\quad x = 5{,}94$

Essa planificação pode ser separada em três pares distintas, um círculo, uma elipse e um retângulo, calculem e indiquem as medidas de:

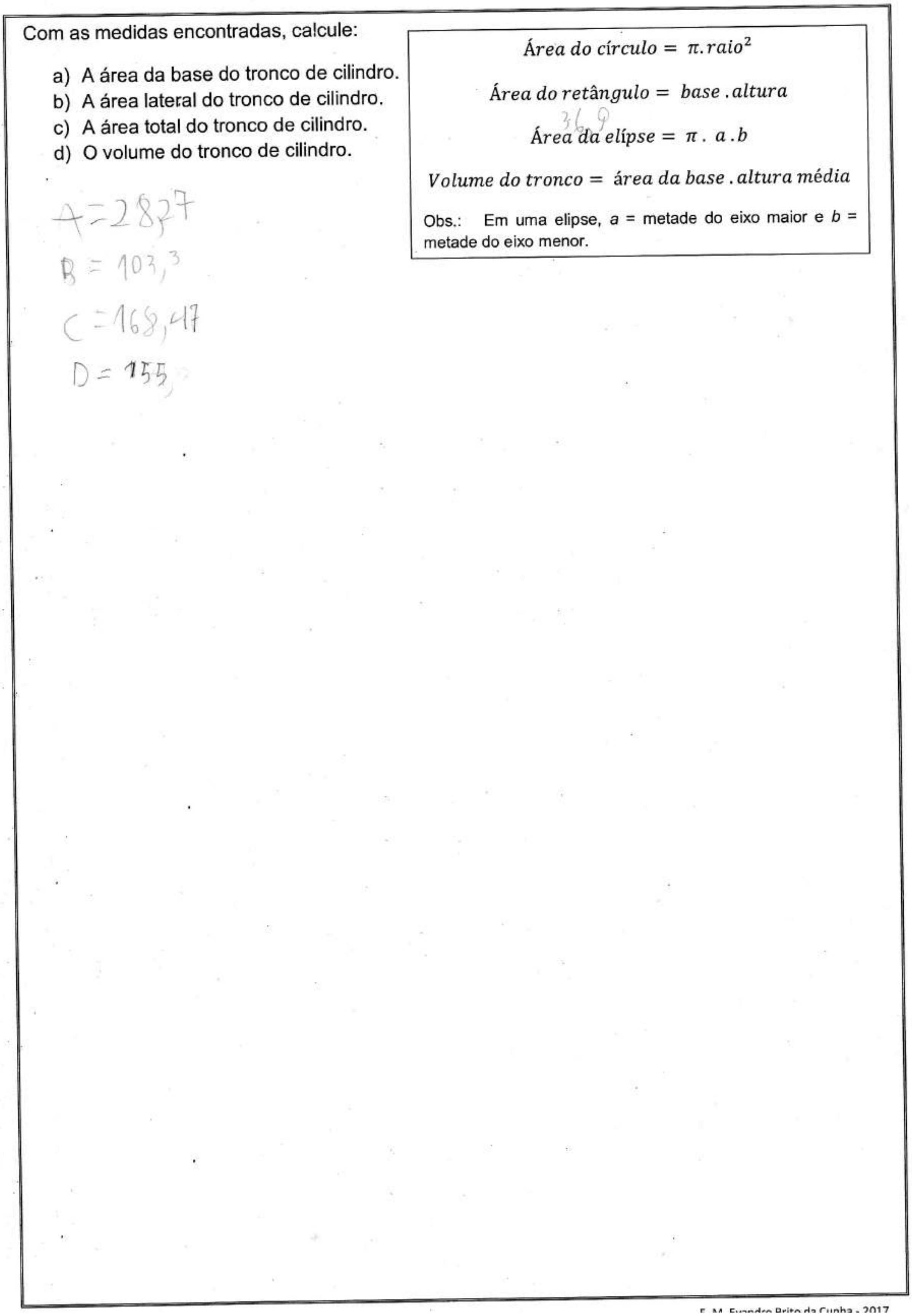
a) Raio do círculo. 3 cm

b) Maior e menor medida da elipse. MENOR: 6 cm MAIOR: 7,84

c) Comprimento e largura do retângulo.

18,85 5,48

Figura 6.21: Atividade realizada pelo aluno Hiram



Com as medidas encontradas, calcule:

a) A área da base do tronco de cilindro.
b) A área lateral do tronco de cilindro.
c) A área total do tronco de cilindro.
d) O volume do tronco de cilindro.

$$Área\ do\ círculo = \pi . raio^2$$

$$Área\ do\ retângulo = base\ .\ altura$$

36,9

$$Área\ da\ elípse = \pi\ .\ a\ .\ b$$

$$Volume\ do\ tronco = área\ da\ base\ .\ altura\ média$$

Obs.: Em uma elipse, *a* = metade do eixo maior e *b* = metade do eixo menor.

A = 28,27

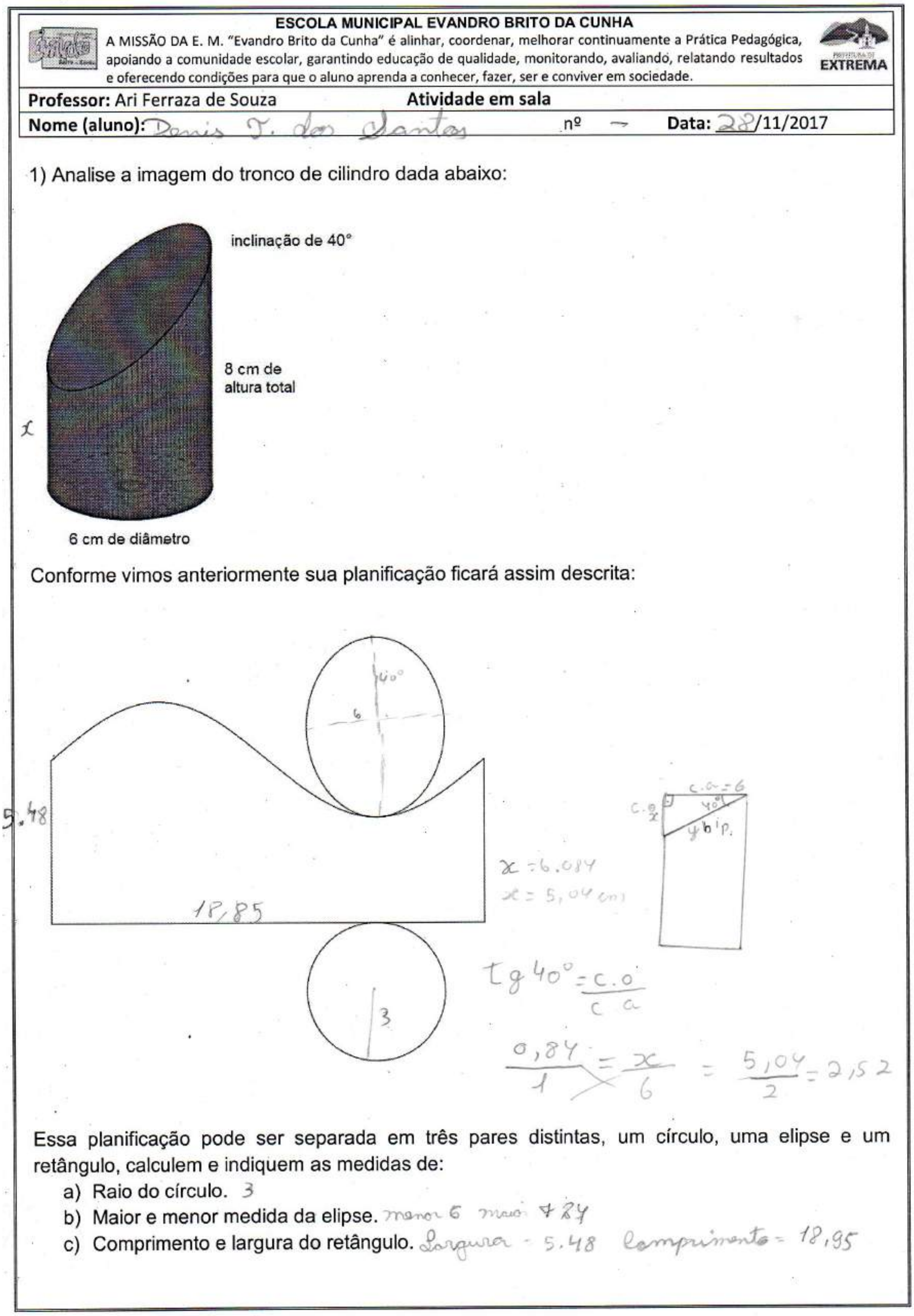
B = 103,3

C = 168,47

D = 155

E. M. Evandro Brito da Cunha - 2017

Figura 6.22: Atividade realizada pelo aluno Hiram



ESCOLA MUNICIPAL EVANDRO BRITO DA CUNHA

A MISSÃO DA E. M. "Evandro Brito da Cunha" é alinhar, coordenar, melhorar continuamente a Prática Pedagógica, apoiando a comunidade escolar, garantindo educação de qualidade, monitorando, avaliando, relatando resultados e oferecendo condições para que o aluno aprenda a conhecer, fazer, ser e conviver em sociedade.

EXTREMA

Professor: Ari Ferraza de Souza **Atividade em sala**

Nome (aluno): Denis T. dos Santos nº — **Data:** 28/11/2017

1) Analise a imagem do tronco de cilindro dada abaixo:

inclinação de 40°

8 cm de altura total

x

6 cm de diâmetro

Conforme vimos anteriormente sua planificação ficará assim descrita:

40°

6

5.48

18,85

3

c.o = 6

c.a

40°

hip.

$x = 6{,}084$

$x = 5{,}04$ cm

$tg\,40° = \frac{c.o}{c.a}$

$\frac{0{,}84}{1} = \frac{x}{6} = \frac{5{,}04}{2} = 2{,}52$

Essa planificação pode ser separada em três pares distintas, um círculo, uma elipse e um retângulo, calculem e indiquem as medidas de:

a) Raio do círculo. 3

b) Maior e menor medida da elipse. menor 6 maior 7,84

c) Comprimento e largura do retângulo. Largura - 5.48 Comprimento = 18,95

Figura 6.23: Atividade realizada pelo aluno Denis

Com as medidas encontradas, calcule:

a) A área da base do tronco de cilindro.
b) A área lateral do tronco de cilindro.
c) A área total do tronco de cilindro.
d) O volume do tronco de cilindro.

$$\text{Área do círculo} = \pi . raio^2$$

$$\text{Área do retângulo} = base \, . altura$$

$$\text{Área da elípse} = \pi \, . \, a \, . b$$

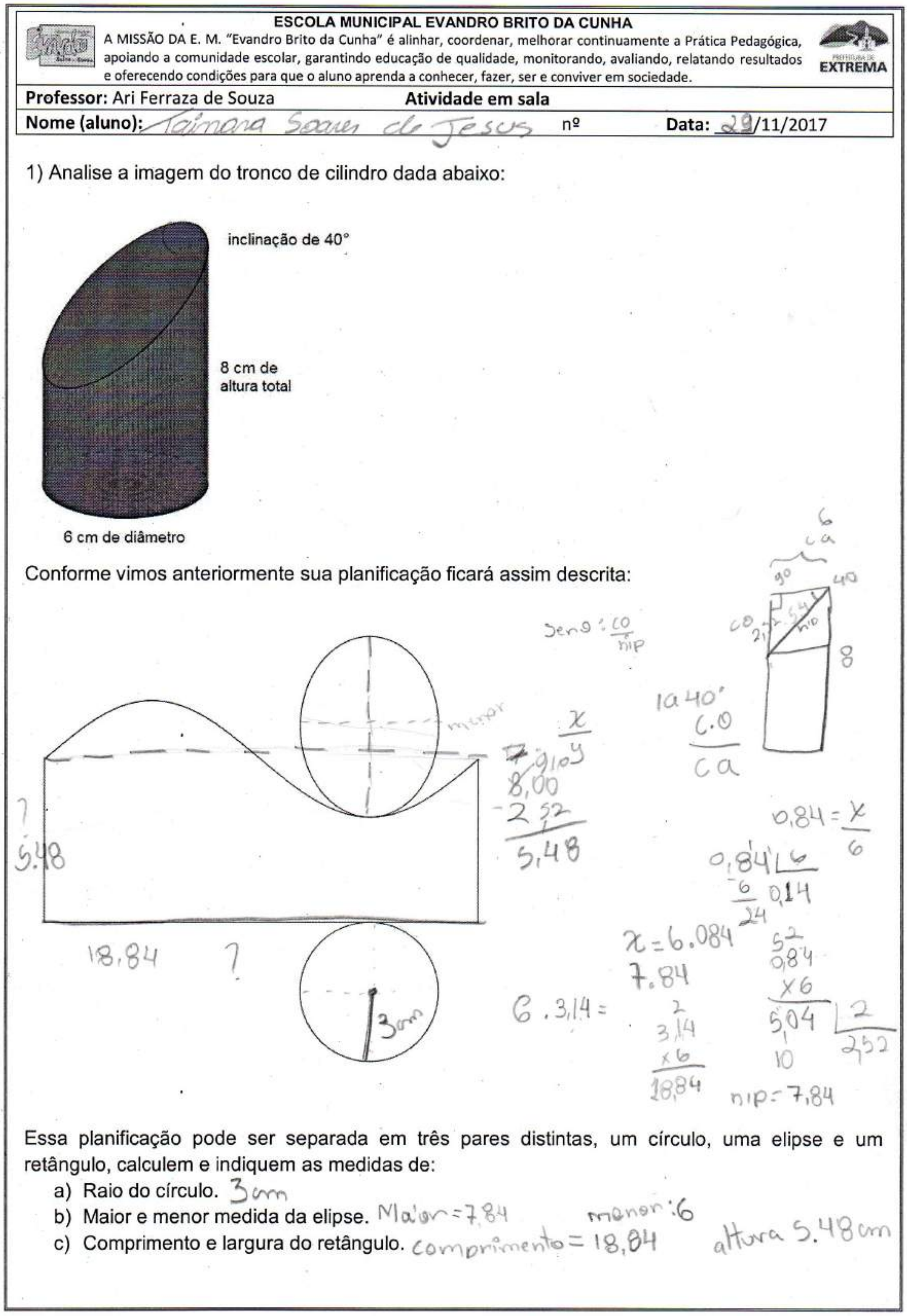
$$\text{Volume do tronco} = \text{área da base} \, . \text{altura média}$$

Obs.: Em uma elipse, a = metade do eixo maior e b = metade do eixo menor.

a) 28,27 cm²
b) 103,3 cm²
c) 168,47 cm²
d) 155 cm²

F. M. Evandro Brito da Cunha - 2017

Figura 6.24: Atividade realizada pelo aluno Denis



ESCOLA MUNICIPAL EVANDRO BRITO DA CUNHA

A MISSÃO DA E. M. "Evandro Brito da Cunha" é alinhar, coordenar, melhorar continuamente a Prática Pedagógica, apoiando a comunidade escolar, garantindo educação de qualidade, monitorando, avaliando, relatando resultados e oferecendo condições para que o aluno aprenda a conhecer, fazer, ser e conviver em sociedade.

PREFEITURA DE EXTREMA

Professor: Ari Ferraza de Souza **Atividade em sala**

Nome (aluno): Tainara Soares de Jesus nº **Data:** 29/11/2017

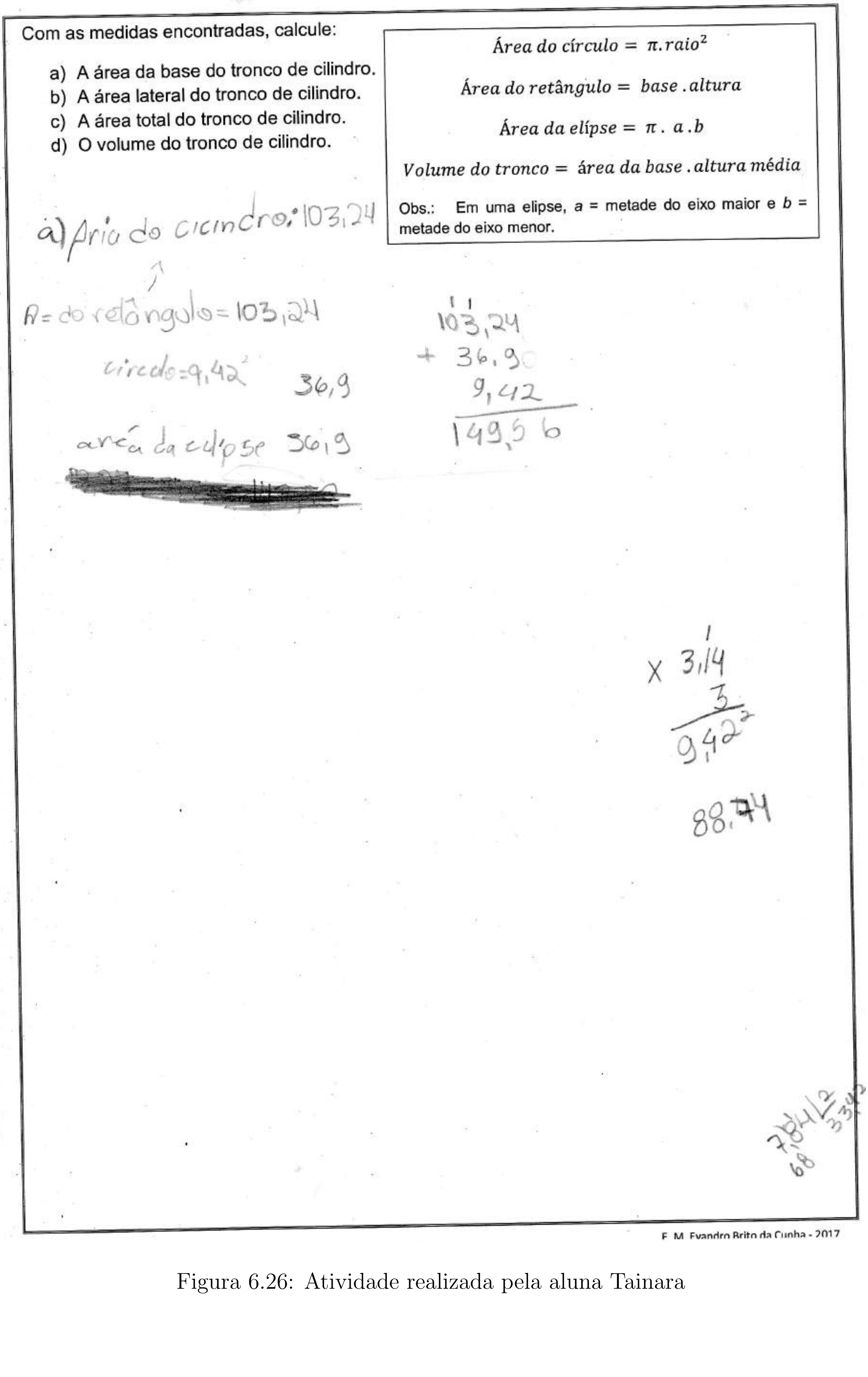
1) Analise a imagem do tronco de cilindro dada abaixo:

Conforme vimos anteriormente sua planificação ficará assim descrita:

Essa planificação pode ser separada em três pares distintas, um círculo, uma elipse e um retângulo, calculem e indiquem as medidas de:

a) Raio do círculo. 3cm
b) Maior e menor medida da elipse. Maior = 7,84 menor: 6
c) Comprimento e largura do retângulo. comprimento = 18,84 altura 5.48 cm

Figura 6.25: Atividade realizada pela aluna Tainara



Com as medidas encontradas, calcule:

a) A área da base do tronco de cilindro.
b) A área lateral do tronco de cilindro.
c) A área total do tronco de cilindro.
d) O volume do tronco de cilindro.

$$Área\ do\ círculo = \pi . raio^2$$

$$Área\ do\ retângulo = base . altura$$

$$Área\ da\ elípse = \pi\ .\ a . b$$

$$Volume\ do\ tronco = área\ da\ base . altura\ média$$

Obs.: Em uma elipse, *a* = metade do eixo maior e *b* = metade do eixo menor.

a) Ária do cilindro: 103,24

A = do retângulo = 103,24

circulo = 9,42²

36,9

área da elipse 36,9

$$\begin{array}{r} 103,24 \\ +\ 36,90 \\ 9,42 \\ \hline 149,56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 3,14 \\ 3 \\ \hline 9,42^2 \end{array}$$

88,74

E. M. Evandro Brito da Cunha - 2017

Figura 6.26: Atividade realizada pela aluna Tainara

Com a atividade concluída, os alunos foram orientados que seria possível calcular a área do tronco de cilindro no GeoGebra e que para isso, bastava construir cada uma das partes da planificação e posteriormente utilizar a oitava ferramenta da barra de ferramentas. Nela deveriam clicar no canto inferior direito e, na janela que se abriria, selecionar a ferramenta Área. Porém, com a facilidade encontrada pelos alunos nos cálculos das áreas durante a execução da atividade, eles acharam muito mais fácil e rápido não usar o GeoGebra para encontrar essas áreas.

6.6.2 Atividade 2

Nesta aula os alunos receberam a atividade do Apêndice B e foram orientados a efetuar os cálculos necessários para resolver as questões apresentadas na atividade. Como os alunos já haviam realizado a construção do cilindro oblíquo no *software* GeoGebra e também já haviam trabalhado a planificação desse cilindro anteriormente, não tiveram problemas para interpretar a atividade. Calcularam com facilidade a área da base, mas quando foram calcular a área da superfície lateral as dificuldades começaram a aparecer, pois, a secção perpendicular ao eixo de inclinação do cilindro oblíquo, revela uma curva em formato elíptico e apesar de terem a fórmula para calcular o perímetro de uma elipse na atividade, eles não possuiam todas as informações necessárias.

A primeira dificuldade foi em encontrar a medida do eixo menor da elipse formada pelo corpo do cilindro oblíquo, foi necessário descobrir como posicionar um triângulo retângulo no corpo do sólido e com isso, usando razões trigonométricas, encontrar a medida procurada.

Com as medidas dos dois eixos calculadas, foi necessário dar aos alunos uma aula de como traçar uma elipse para que pudessem entender melhor sobre foco e excentricidade de uma elipse, valores estes necessários no cálculo do perímetro da elipse.

Com a compreensão sobre medida de foco e excentricidade de uma elipse, os alunos puderam efetuar os cálculos e encontrar a medida do comprimento (perímetro) da elipse formada pela secção perpendicular ao eixo de inclinação do cilindro oblíquo. Tiveram bastante dificuldade para concluir esse cálculo, pois se tratava de uma fórmula com várias operações, sendo que uma aluna, apesar de ter efetuado os cálculo corretos, registrou o valor errado em sua atividade. Passada a dificuldade em calcular o comprimento da elipse, os alunos concluiram os demais cálculos sem dificuldades. As atividades realizadas pelos alunos estão apresentadas a seguir, começando na Figura 6.28 e terminando na Figura 6.38.

Com todos os cálculos concluídos, os alunos foram orientados que o GeoGebra possui um comando chamado comprimento e que com ele é possível obter a medida do comprimento de uma elipse, e que para isso, era necessário construir a elipse com equações paramétricas e posteriormente selecionar o comando *comprimento* na barra de entrada e utilizar o quarto comando que se abrirá na nova janela, veja Figura 6.27.

Neste quarto comando, *comprimento*, os alunos realizaram as seguintes substituições:

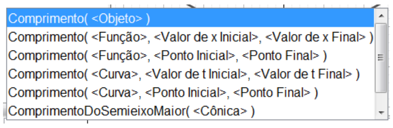
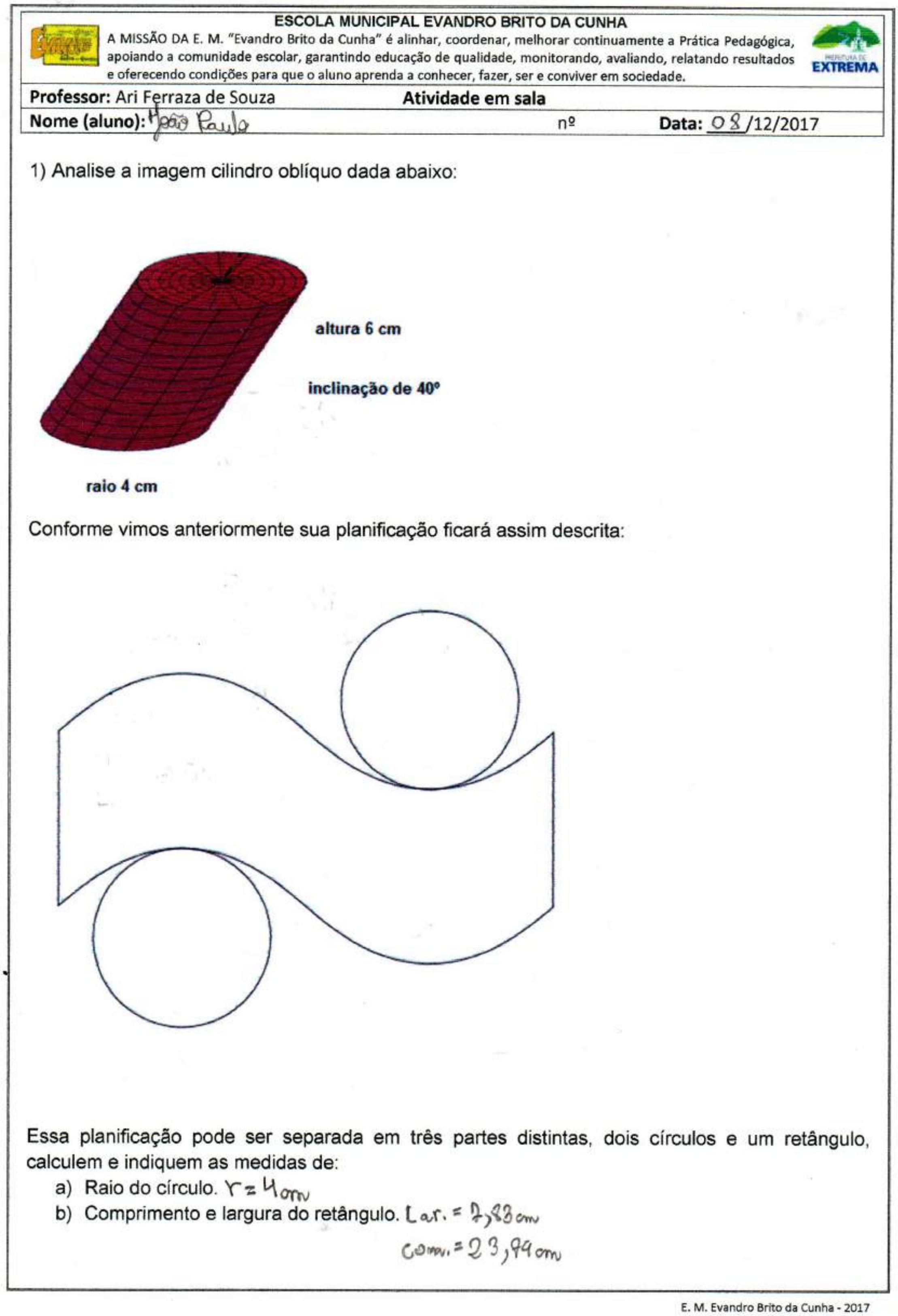


Figura 6.27: Comando comprimento na barra de entrada do GeoGebra.

- <Curva> pela letra correspondente à curva criada no GeoGebra.
- <Valor de t Inicial> por 0
- <Valor de t Final> por 2π

Com essas substituições, a medida do comprimento é exibida na janela de álgebra, os alunos ficaram encantados com a facilidade em encontrar o comprimento de uma elipse com o auxílio do GeoGebra, pois, durante a aula tiveram muitas dificuldades para conseguir encontrar esse comprimento, tendo em vista a quantidade de cálculos necessários para se chegar ao resultado final.



ESCOLA MUNICIPAL EVANDRO BRITO DA CUNHA

A MISSÃO DA E. M. "Evandro Brito da Cunha" é alinhar, coordenar, melhorar continuamente a Prática Pedagógica, apoiando a comunidade escolar, garantindo educação de qualidade, monitorando, avaliando, relatando resultados e oferecendo condições para que o aluno aprenda a conhecer, fazer, ser e conviver em sociedade.

PREFEITURA DE EXTREMA

Professor: Ari Ferraza de Souza **Atividade em sala**

Nome (aluno): João Paulo nº **Data:** 08/12/2017

1) Analise a imagem cilindro oblíquo dada abaixo:

altura 6 cm

inclinação de 40º

raio 4 cm

Conforme vimos anteriormente sua planificação ficará assim descrita:

Essa planificação pode ser separada em três partes distintas, dois círculos e um retângulo, calculem e indiquem as medidas de:

a) Raio do círculo. r = 4cm

b) Comprimento e largura do retângulo. Lar. = 7,83 cm

Comp. = 23,99 cm

E. M. Evandro Brito da Cunha - 2017

Figura 6.28: Atividade realizada pelo aluno João Paulo

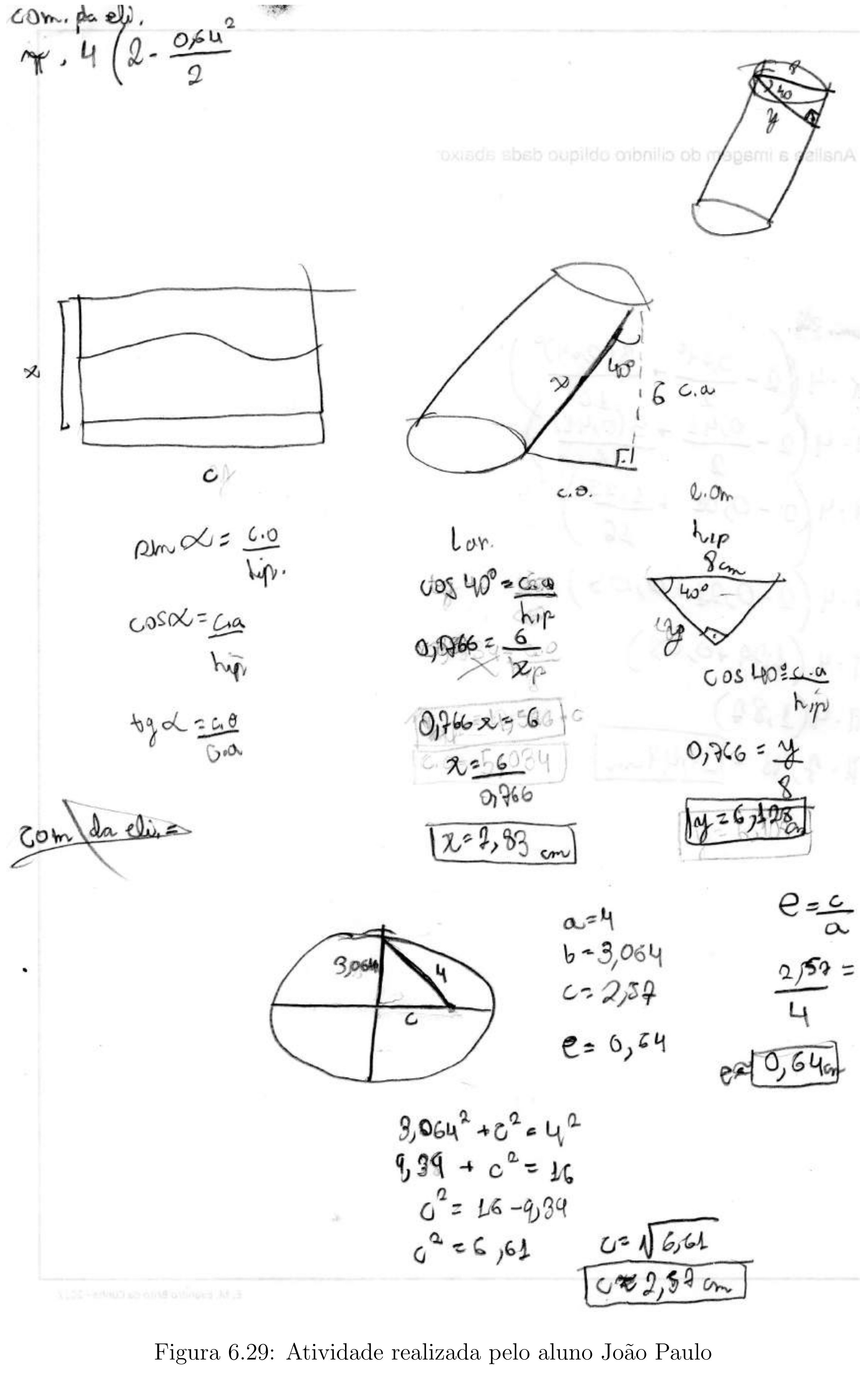
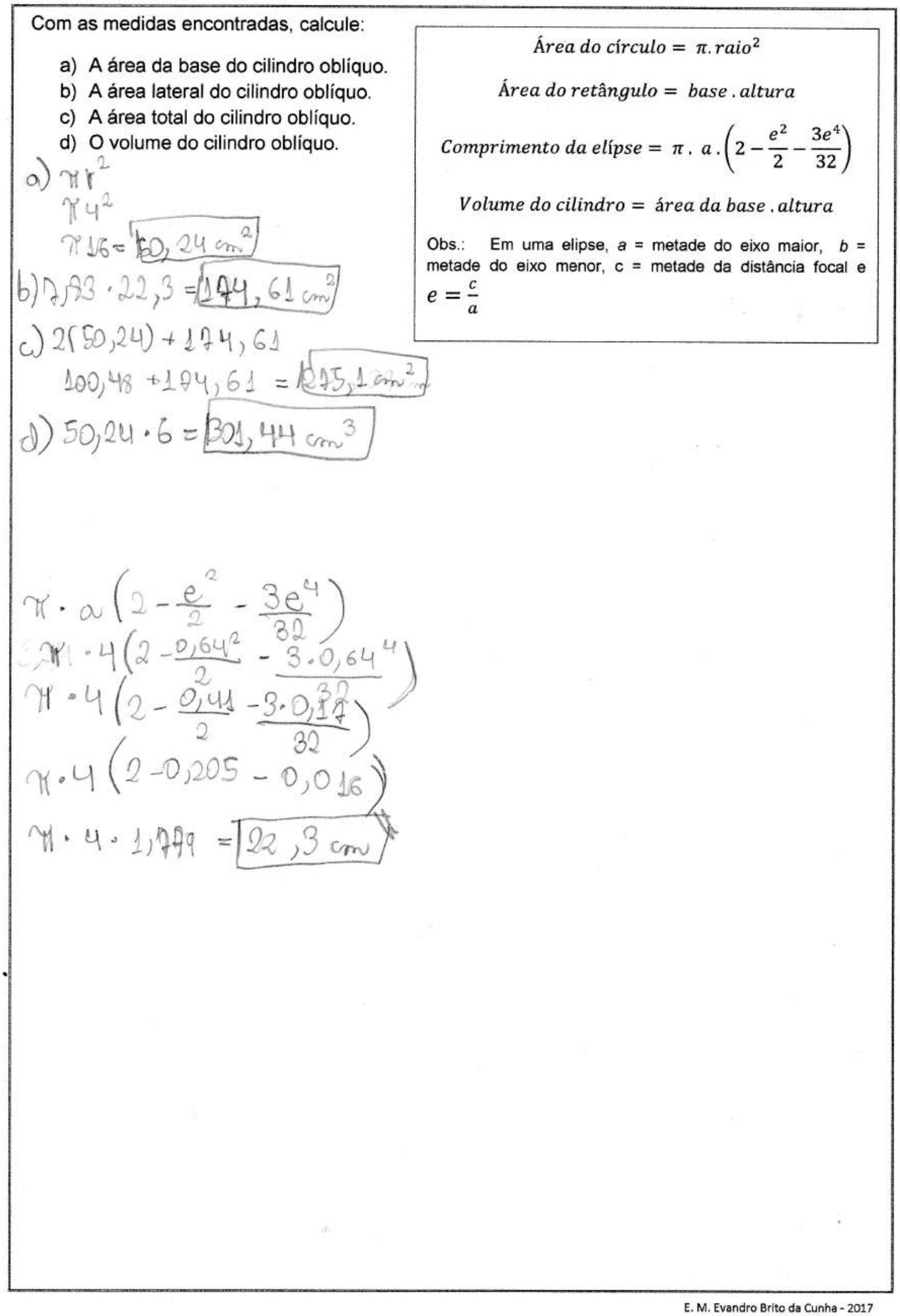


Figura 6.29: Atividade realizada pelo aluno João Paulo



Com as medidas encontradas, calcule:

a) A área da base do cilindro oblíquo.
b) A área lateral do cilindro oblíquo.
c) A área total do cilindro oblíquo.
d) O volume do cilindro oblíquo.

$$\text{Área do círculo} = \pi . raio^2$$

$$\text{Área do retângulo} = base \,.\, altura$$

$$\text{Comprimento da elípse} = \pi \,.\, a \,.\left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32}\right)$$

$$\text{Volume do cilindro} = \text{área da base} \,.\, altura$$

Obs.: Em uma elipse, a = metade do eixo maior, b = metade do eixo menor, c = metade da distância focal e $e = \frac{c}{a}$

Figura 6.30: Atividade realizada pelo aluno João Paulo

ESCOLA MUNICIPAL EVANDRO BRITO DA CUNHA

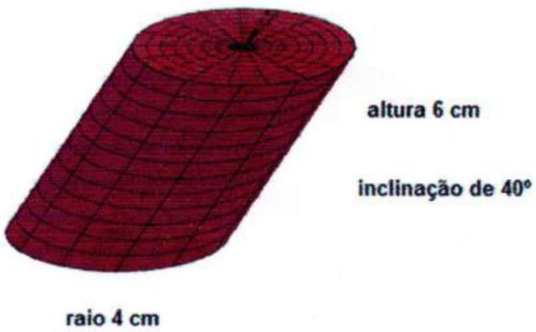
A MISSÃO DA E. M. "Evandro Brito da Cunha" é alinhar, coordenar, melhorar continuamente a Prática Pedagógica, apoiando a comunidade escolar, garantindo educação de qualidade, monitorando, avaliando, relatando resultados e oferecendo condições para que o aluno aprenda a conhecer, fazer, ser e conviver em sociedade.

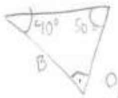
PREFEITURA DE EXTREMA

Professor: Ari Ferraza de Souza **Atividade em sala**

Nome (aluno): HifAm nº **Data:** ____/12/2017

1) Analise a imagem cilindro oblíquo dada abaixo:





$\cos(40°) = \frac{C.A.}{HIP}$

$0{,}766 = \frac{B}{8}$

$B = 6{,}128$

$a^2 = b^2 + c^2$

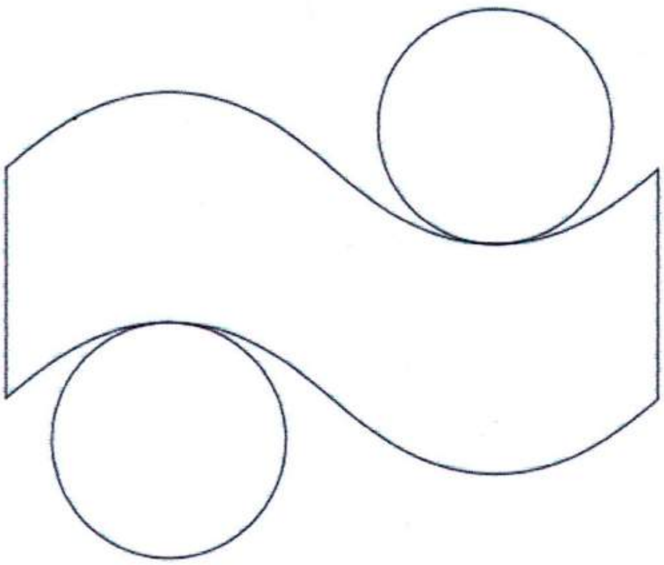
$4^2 = 3{,}064^2 + c^2$

$16 = 9{,}39 + c^2$

$c^2 = 16 - 9{,}39$

$c = \sqrt{6{,}61}$

Conforme vimos anteriormente sua planificação ficará assim descrita:



$l = \frac{c}{a}$ $\quad l = \frac{2{,}57}{4}$

$l = 0{,}64$

$\cos(40°) = \frac{C.A.}{HIP}$

$0{,}766 = \frac{6}{x}$

$6 = 0{,}766 \cdot x$

$\frac{6}{0{,}766} = x$

$x = 7{,}83$

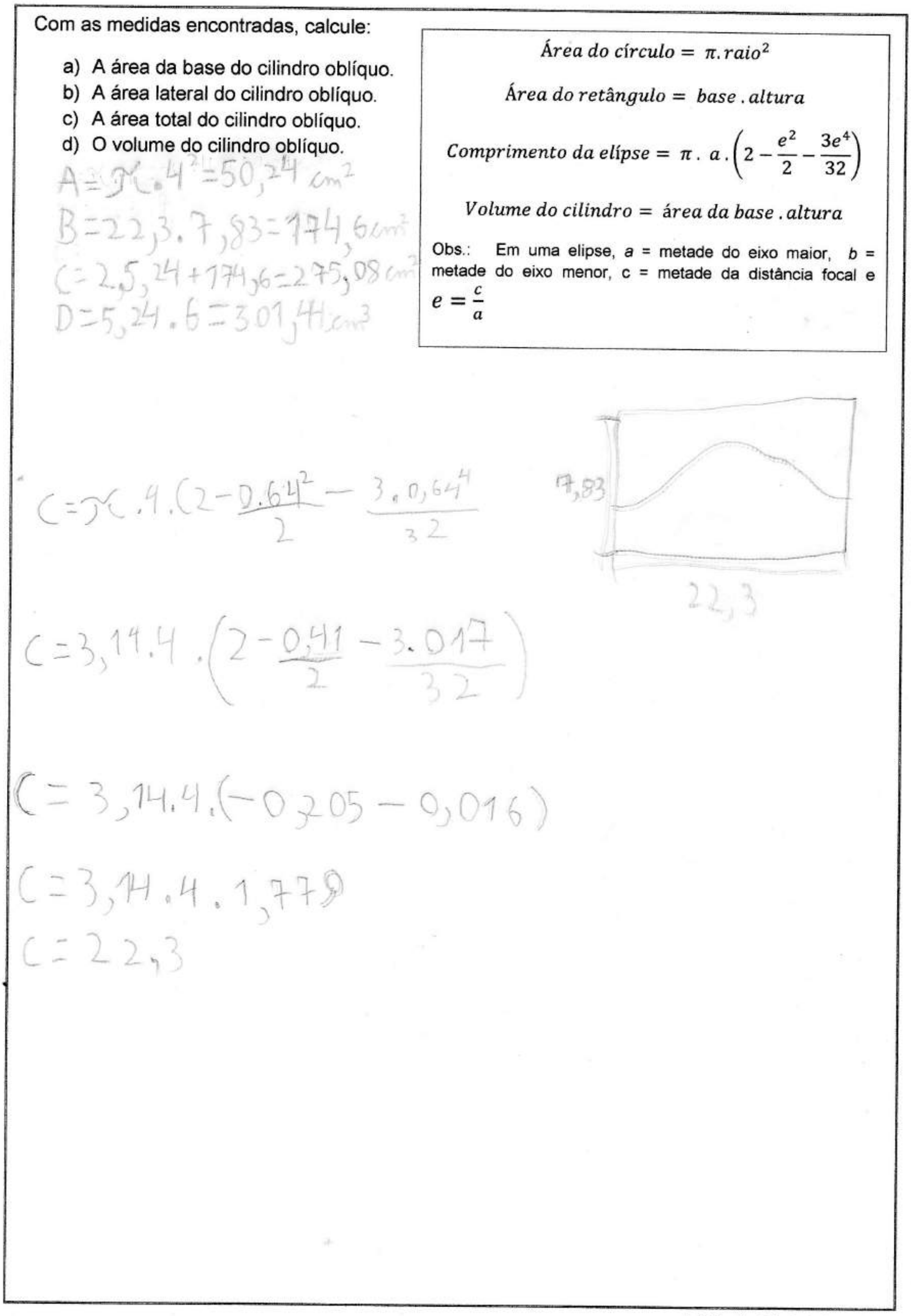
$a = 4 \quad b = 3{,}64 \quad c = 2{,}57 \quad l = 0{,}64$

Essa planificação pode ser separada em três partes distintas, dois círculos e um retângulo, calculem e indiquem as medidas de:

a) Raio do círculo.
b) Comprimento e largura do retângulo.

E. M. Evandro Brito da Cunha - 2017

Figura 6.31: Atividade realizada pelo aluno Hiram



Com as medidas encontradas, calcule:

a) A área da base do cilindro oblíquo.
b) A área lateral do cilindro oblíquo.
c) A área total do cilindro oblíquo.
d) O volume do cilindro oblíquo.

$Área\ do\ círculo = \pi . raio^2$

$Área\ do\ retângulo = base\ .\ altura$

$Comprimento\ da\ elípse = \pi\ .\ a\ .\left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32}\right)$

$Volume\ do\ cilindro = área\ da\ base\ .\ altura$

Obs.: Em uma elipse, a = metade do eixo maior, b = metade do eixo menor, c = metade da distância focal e $e = \frac{c}{a}$

A = π.4² = 50,24 cm²
B = 22,3.7,83 = 174,6 cm²
C = 2.5,24 + 174,6 = 275,08 cm²
D = 5,24.6 = 301,44 cm³

$C = \pi . 4 . (2 - \frac{0.64^2}{2} - \frac{3 . 0,64^4}{32}$

$C = 3,14 . 4 . \left(2 - \frac{0,41}{2} - \frac{3 . 017}{32}\right)$

$C = 3,14.4.(-0,205 - 0,016)$

$C = 3,14 . 4 . 1,779$

$C = 22,3$

E. M. Evandro Brito da Cunha - 2017

Figura 6.32: Atividade realizada pelo aluno Hiram

ESCOLA MUNICIPAL EVANDRO BRITO DA CUNHA

A MISSÃO DA E. M. "Evandro Brito da Cunha" é alinhar, coordenar, melhorar continuamente a Prática Pedagógica, apoiando a comunidade escolar, garantindo educação de qualidade, monitorando, avaliando, relatando resultados e oferecendo condições para que o aluno aprenda a conhecer, fazer, ser e conviver em sociedade.

PREFEITURA DE EXTREMA

Professor: Ari Ferraza de Souza **Atividade em sala**

Nome (aluno): Denis T. dos Santos. nº **Data:** 08/12/2017

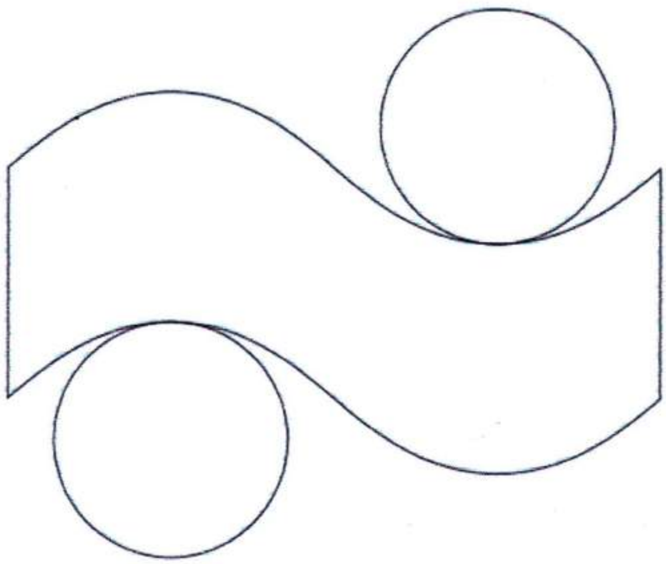
1) Analise a imagem cilindro oblíquo dada abaixo:

altura 6 cm

inclinação de 40°

raio 4 cm

Conforme vimos anteriormente sua planificação ficará assim descrita:



Essa planificação pode ser separada em três partes distintas, dois círculos e um retângulo, calculem e indiquem as medidas de:

a) Raio do círculo. = 4 cm
b) Comprimento e largura do retângulo. = Com. = 22,3 cm
Largura: 7,83 cm

E. M. Evandro Brito da Cunha - 2017

Figura 6.33: Atividade realizada pelo aluno Denis

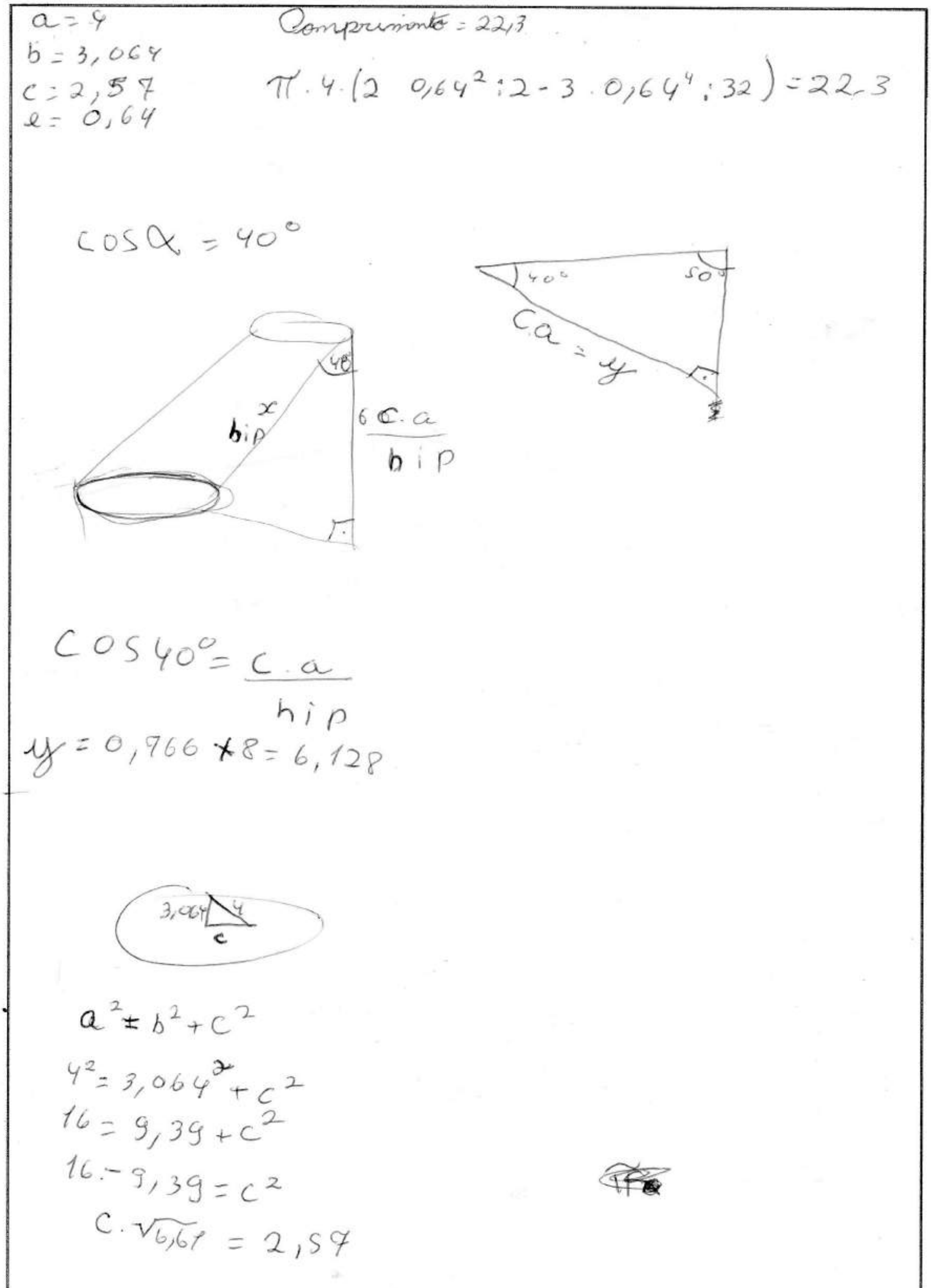
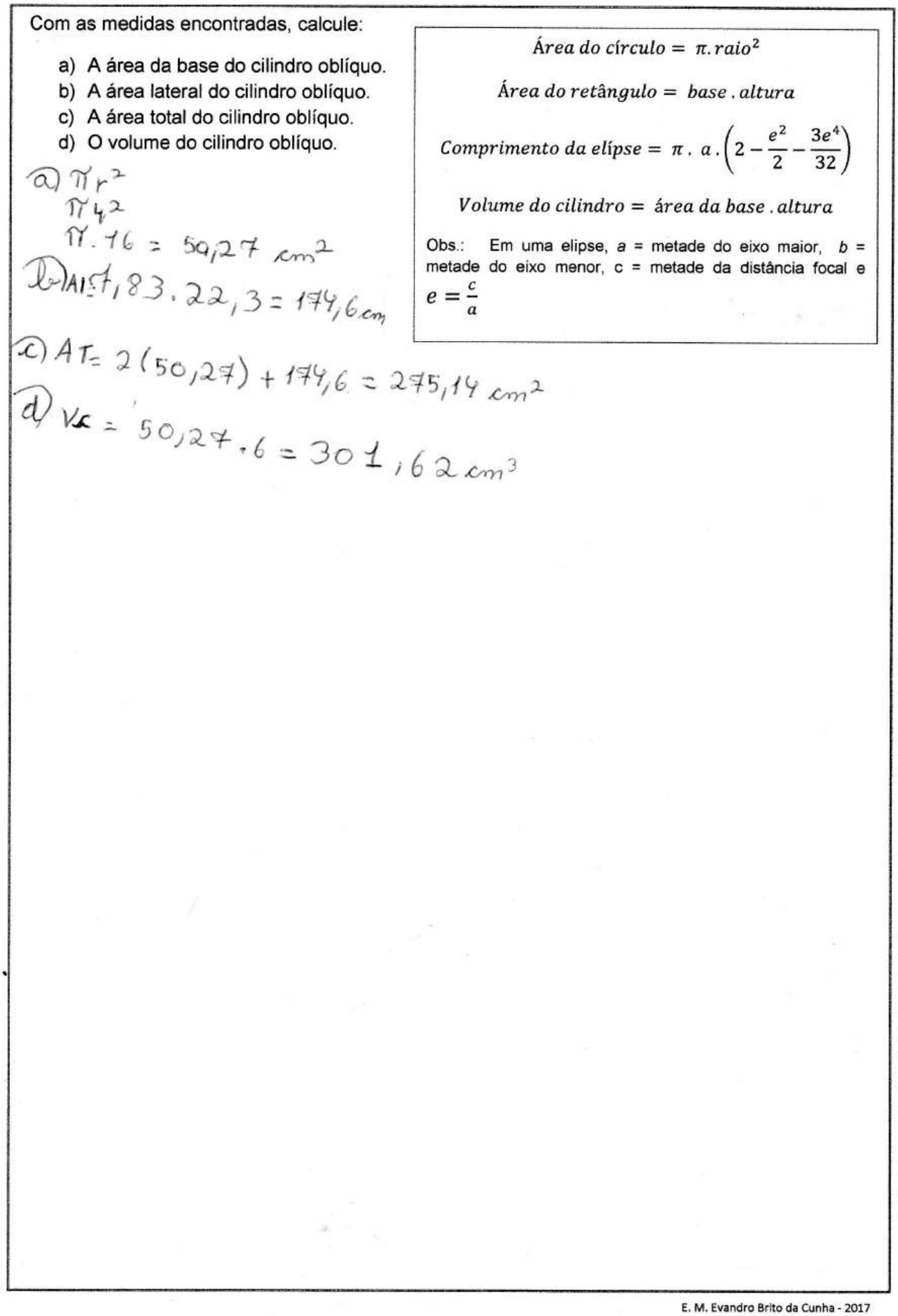


Figura 6.34: Atividade realizada pelo aluno Denis



Com as medidas encontradas, calcule:

a) A área da base do cilindro oblíquo.
b) A área lateral do cilindro oblíquo.
c) A área total do cilindro oblíquo.
d) O volume do cilindro oblíquo.

$$Área\ do\ círculo = \pi . raio^2$$

$$Área\ do\ retângulo = base\ .\ altura$$

$$Comprimento\ da\ elípse = \pi\ .\ a\ .\left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32}\right)$$

$$Volume\ do\ cilindro = área\ da\ base\ .\ altura$$

Obs.: Em uma elipse, a = metade do eixo maior, b = metade do eixo menor, c = metade da distância focal e $e = \frac{c}{a}$

a) πr^2
$\pi 4^2$
$\pi . 16 = 50,27\ cm^2$

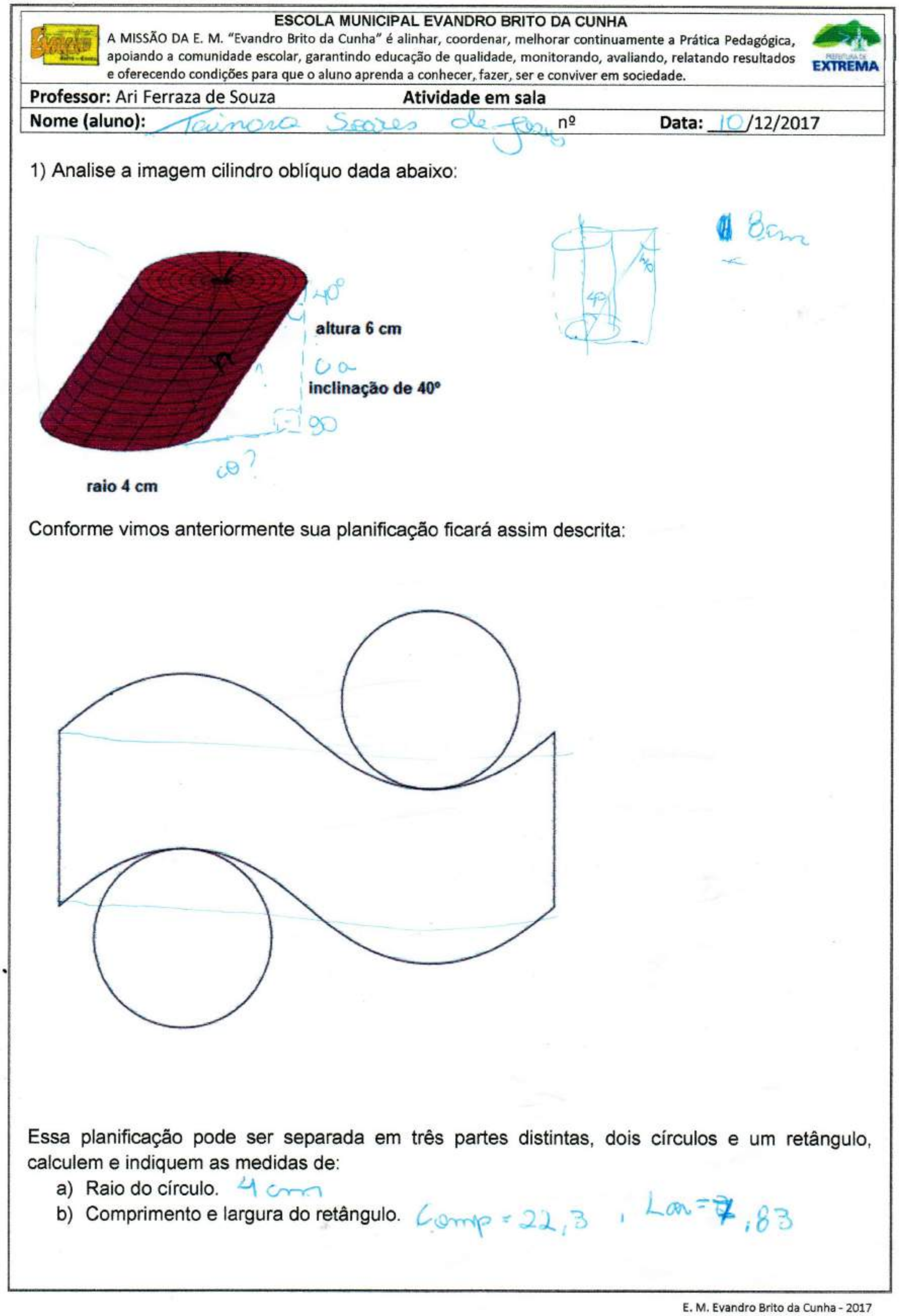
b) $AL = 7,83 . 22,3 = 174,6\ cm$

c) $AT = 2(50,27) + 174,6 = 275,14\ cm^2$

d) $Vc = 50,27 . 6 = 301,62\ cm^3$

E. M. Evandro Brito da Cunha - 2017

Figura 6.35: Atividade realizada pelo aluno Denis



ESCOLA MUNICIPAL EVANDRO BRITO DA CUNHA

A MISSÃO DA E. M. "Evandro Brito da Cunha" é alinhar, coordenar, melhorar continuamente a Prática Pedagógica, apoiando a comunidade escolar, garantindo educação de qualidade, monitorando, avaliando, relatando resultados e oferecendo condições para que o aluno aprenda a conhecer, fazer, ser e conviver em sociedade.

PREFEITURA DE EXTREMA

Professor: Ari Ferraza de Souza **Atividade em sala**

Nome (aluno): Tainara Soares de Faria nº **Data:** 10/12/2017

1) Analise a imagem cilindro oblíquo dada abaixo:

Conforme vimos anteriormente sua planificação ficará assim descrita:

Essa planificação pode ser separada em três partes distintas, dois círculos e um retângulo, calculem e indiquem as medidas de:

a) Raio do círculo. 4 cm

b) Comprimento e largura do retângulo. Comp = 22,3 , Lar = 7,83

E. M. Evandro Brito da Cunha - 2017

Figura 6.36: Atividade realizada pela aluna Tainara

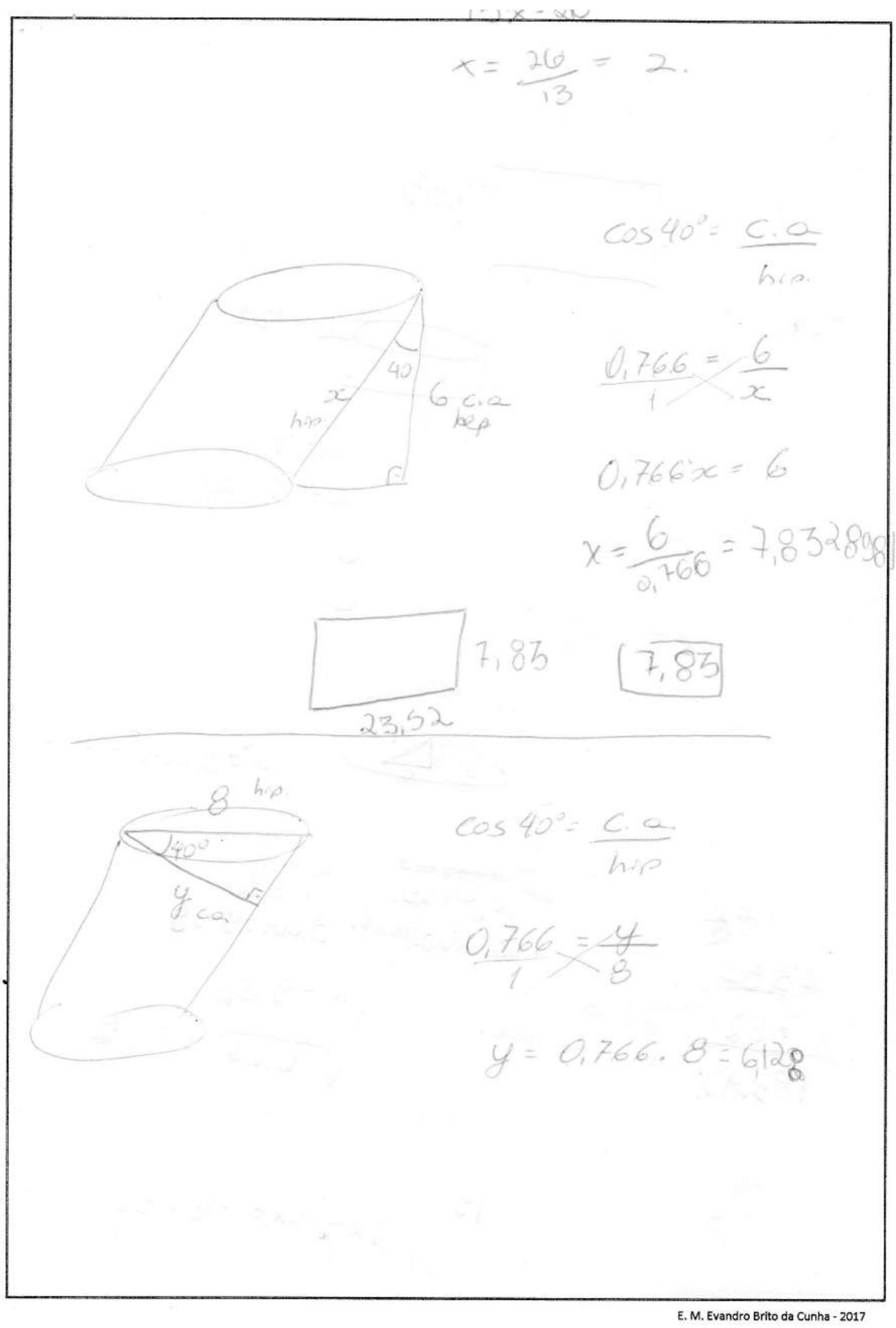


Figura 6.37: Atividade realizada pela aluna Tainara

Com as medidas encontradas, calcule:

a) A área da base do cilindro oblíquo.
b) A área lateral do cilindro oblíquo.
c) A área total do cilindro oblíquo.
d) O volume do cilindro oblíquo.

$$Área\ do\ círculo = \pi . raio^2$$

$$Área\ do\ retângulo = base\ .\ altura$$

$$Comprimento\ da\ elípse = \pi\ .\ a\ .\left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32}\right)$$

$$Volume\ do\ cilindro = área\ da\ base\ .\ altura$$

Obs.: Em uma elipse, a = metade do eixo maior, b = metade do eixo menor, c = metade da distância focal e $e = \frac{c}{a}$

a) 50,24

b) 22,3 . 7,83 = 174,61

c) 174,61 + 50,24 + 50,24 = 275,09

d) 50,24 . 6 = 301,44

med. a = 4
med. b = 3,064
med c = 2,57
med e = 0,64

$a^2 = b^2 + c^2$
$4^2 = 3{,}064^2 + c^2$
$16 - 9{,}39 = c^2$
$\sqrt{6{,}62} = 2{,}57$

$e = \frac{2{,}57}{4}$

$e = 0{,}64$

$3{,}14 . 4 . \left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32}\right)$

$3{,}14 . \left(8 - \frac{4e^2}{2} - \frac{12e^4}{32}\right)$

$3{,}14 . (8 - 0{,}82 - 0{,}06)$

22,3

E. M. Evandro Brito da Cunha - 2017

Figura 6.38: Atividade realizada pela aluna Tainara

Considerações finais

Inicialmente, fizemos uma análise e uma demonstração sobre a figura formada pela intersecção de um plano com um cilindro circular reto, de tal maneira a não formar outro cilindro reto. Tal análise nos revelou a necessidade de um estudo mais amplo sobre a elipse, gerando assim uma demonstração sobre o cálculo da área e do perímetro de elipses.

No decorrer do trabalho, aprofundamos nosso estudo sobre a parametrização de curvas e superfícies, relatando vários exemplos de parametrizações de curvas e alguns exemplos de parametrizações de superfícies. Foi possível perceber durante este aprofundamento que muitas parametrizações, tanto de curvas como de superfícies, usam como base a parametrização da circunferência.

Analisando o *software* GeoGebra, notamos ser possível a construção e planificação de muitos poliedros, mas notamos também que apesar de ser possível construir cilindros retos com o *software*, não era possível sua planificação. Portanto, para auxiliar os professores e alunos do ensino fundamental e médio, apresentamos neste trabalho uma descrição completa sobre a construção e a planificação de tronco de cilindros e de cilindros oblíquos com o auxílio do *software* GeoGebra.

Percebendo um grande distanciamento de professores e alunos com relação ao conteúdo de geometria, preparamos alguns planos de aulas voltados a alunos de ensino fundamental II e médio, objetivando uma aproximação maior do aluno com o *software* GeoGebra e, consequentemente, com a geometria. Todas as atividades propostas foram aplicadas a alunos do ensino fundamental II. A aplicação dessas atividades em sala com os alunos foi muito gratificante. Foi surpreendente ver a facilidade com que os alunos compreendiam e executavam os comando do *software* GeoGebra. A aproximação dos alunos com a geometria se deu de forma natural, mesmo para alunos tão jovens, conteúdos complexos como parametrização de curvas ocorreu de forma simples, e com interesse e participação.

Esperamos que este trabalho colabore com a prática de professores e que ajude a tornar o conteúdo de geometria cada vez mais trabalhado nas escolas. Almejamos que este trabalho contribua para a melhoria do ensino de Matemática, principalmente nas escolas públicas.

Referências Bibliográficas

[1] EDWARDS JR., C. Henry; PENNEY, David E.. Cálculo com Geometria Analítica. 4.ed. Rio de Janeiro, Pearson Prentice Hall do Brasil Ltda, (1997).

[2] FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mírian Bus. Cálculo A: funções, limites, derivação, integração. São Paulo, Pearson Prentice Hall, (2006).

[3] GEOGEBRA 5.0.414.0-d. *Software* de Matemática. Disponível em `https://www.geogebra.org/download`. Acesso em: 08 set. 2017.

[4] KUROKAWA, Cecilia Yumi, Áreas e volumes: de Eudoxo e Arquimedes a Cavalieri e o cálculo diferencial e integral. Disponível em `http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306082/1/Kurokawa_CeciliaYumi_M.pdf` Acessado em 02/02/2016.

[5] LIMA, Elon Lages.: CARVALHO, Paulo Cezar Pinto.: WAGNER, Eduardo.; MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio - volumes 2 e 3 - 6.ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

[6] MUNIZ, Maria Inês Sparrapan; SOARES, Maria Zoraide Martins; SANTINHO, Miriam Sampeiri; MACHADO, Rosa Maria; RODRIGUES, Wilson Roberto. Guia do Professor - Experimento - Que curva é essa chamada elipse?. São Paulo. Disponível em `http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1374` Acessado em 03 de maio de 2016.

[7] MUNIZ NETO, Antonio Caminha, Geometria - Coleção PROFMAT, 1. ed., Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, (2013).

[8] NETO, Ernesto Rosa, Corte e Costura. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, edição 9. Disponível em `http://www.rpm.org.br/BuscaAvancada.aspx`. Acesso em 13 de set. 2016.

[9] PISKUNOV, Nikolai Semenovich. Differential and Integral Calculus, vol. 1. Traduzido do russo por G. Yankovsky. MIR Publishers - Moscow, 1974. pp. 98-108, 311-313.

[10] SILVA, Josiel Pereira, Como calcular a área e o perímetro de uma elipse? Revista Eletrônica Paulista de Matemática, São Paulo, v3 n1, dezembro 2014. Disponível em www2.fc.unesp.br/revistacqd/v3n1/v3n1_art1.pdf. Acesso em 04 de out. 2017.

[11] STEWART, James, Cálculo - volume II - 5.ed. - São Paulo: Pioneira Thomson Learning, (2006).

[12] VALLADARES, Renato J. C., Elipse, sorrisos e sussuros. Revista do Professor de Matemática (RPM) v.36, pp. 24-28. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. Disponível em http://www.rpm.org.br/cdrpm/36/5.htm. Acesso em 13 de set. 2016.

[13] VILCHES, Mauricio A.; CORREA, Maria Luiza. Cálculo: volume III. Rio de Janeiro. Disponível em https://docs.ufpr.br/~jcvb/online/UERJ-calculovolume3.pdf. Acessado em 05 de out. 2017.

Apêndice A

Proposta de Atividade Sobre o Cálculo de Área e Volume de Tronco de Cilindro.

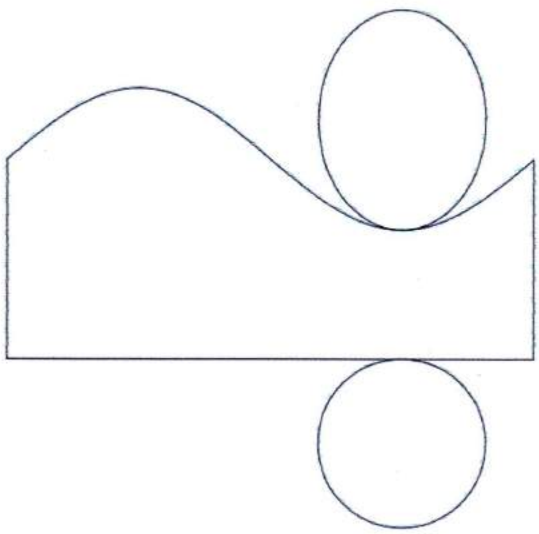
ESCOLA MUNICIPAL EVANDRO BRITO DA CUNHA

A MISSÃO DA E. M. "Evandro Brito da Cunha" é alinhar, coordenar, melhorar continuamente a Prática Pedagógica, apoiando a comunidade escolar, garantindo educação de qualidade, monitorando, avaliando, relatando resultados e oferecendo condições para que o aluno aprenda a conhecer, fazer, ser e conviver em sociedade.

Professor: Ari Ferraza de Souza	**Atividade em sala**
Nome (aluno): nº	**Data:** ____/11/2017

1) Analise a imagem do tronco de cilindro dada abaixo:

Conforme vimos anteriormente sua planificação ficará assim descrita:



Essa planificação pode ser separada em três partes distintas, um círculo, uma elipse e um retângulo, calculem e indiquem as medidas de:

a) Raio do círculo.
b) Maior e menor medidas da elipse.
c) Comprimento e largura do retângulo.

Com as medidas encontradas, calcule:

a) A área da base do tronco de cilindro.
b) A área lateral do tronco de cilindro.
c) A área total do tronco de cilindro.
d) O volume do tronco de cilindro.

$$\text{Área do círculo} = \pi . raio^2$$

$$\text{Área do retângulo} = base\ .\ altura$$

$$\text{Área da elipse} = \pi\ .\ a\ .\ b$$

$$\text{Volume do tronco} = \text{área da base}\ .\ \text{altura média}$$

Obs.: Em uma elipse, *a* = metade do eixo maior e *b* = metade do eixo menor.

Apêndice B

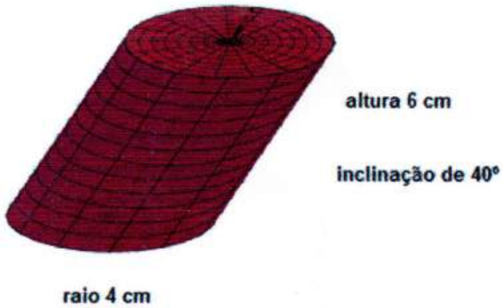
Proposta de Atividade Sobre o Cálculo de Área e Volume de Cilindro Oblíquo.

ESCOLA MUNICIPAL EVANDRO BRITO DA CUNHA

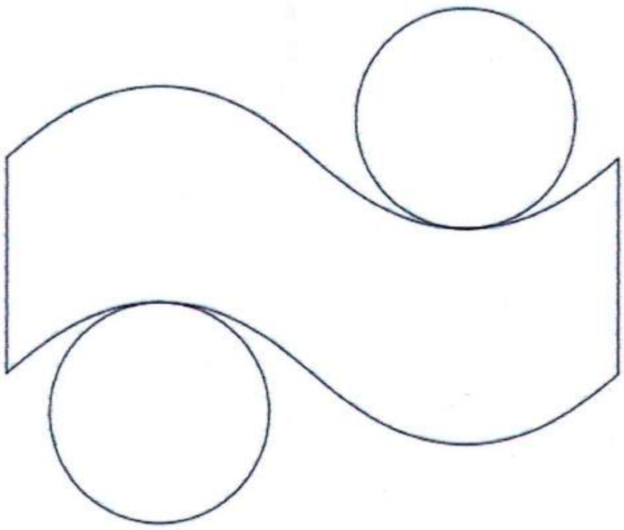
A MISSÃO DA E. M. "Evandro Brito da Cunha" é alinhar, coordenar, melhorar continuamente a Prática Pedagógica, apoiando a comunidade escolar, garantindo educação de qualidade, monitorando, avaliando, relatando resultados e oferecendo condições para que o aluno aprenda a conhecer, fazer, ser e conviver em sociedade.

Professor: Ari Ferraza de Souza	**Atividade em sala**
Nome (aluno): nº	**Data:** ____/12/2017

1) Analise a imagem cilindro oblíquo dada abaixo:



Conforme vimos anteriormente sua planificação ficará assim descrita:



Essa planificação pode ser separada em três partes distintas, dois círculos e um retângulo, calculem e indiquem as medidas de:

a) Raio do círculo.
b) Comprimento e largura do retângulo.

Com as medidas encontradas, calcule:

a) A área da base do cilindro oblíquo.
b) A área lateral do cilindro oblíquo.
c) A área total do cilindro oblíquo.
d) O volume do cilindro oblíquo.

$$\text{Área do círculo} = \pi . raio^2$$

$$\text{Área do retângulo} = base \,.\, altura$$

$$Compr.aprox.da\ elipse \approx \pi \,.\, a \,.\left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32}\right)$$

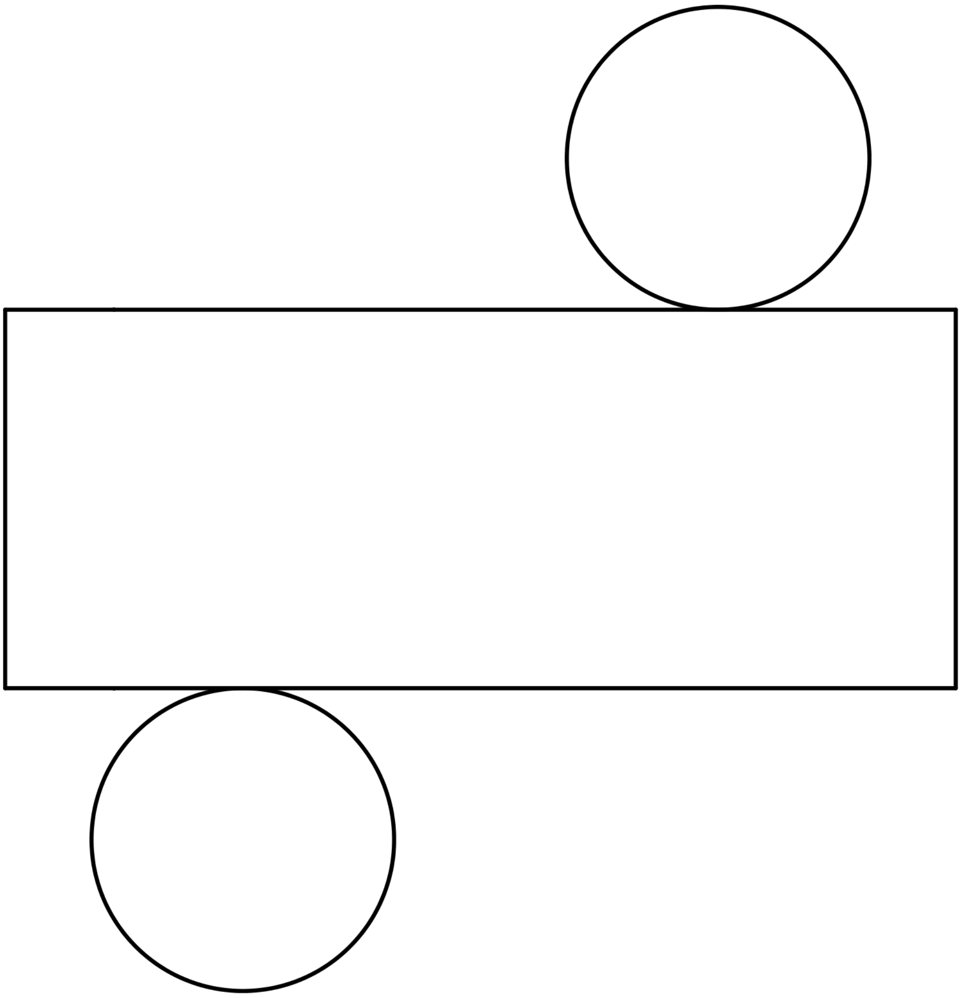
$$Volume\ do\ cilindro = \text{área da base} \,.\, altura$$

Obs.: Em uma elipse, *a* = metade do eixo maior, *b* = metade do eixo menor, c = metade da distância focal e $e = \frac{c}{a}$

Apêndice C

Moldes Para Construção de Sólidos

C.1 Molde para cilindro reto com 2cm de raio e 5cm de altura.



C.2 Molde para cilindro oblíquo com 2,5cm de raio, 6cm de altura e 30° de inclinação.

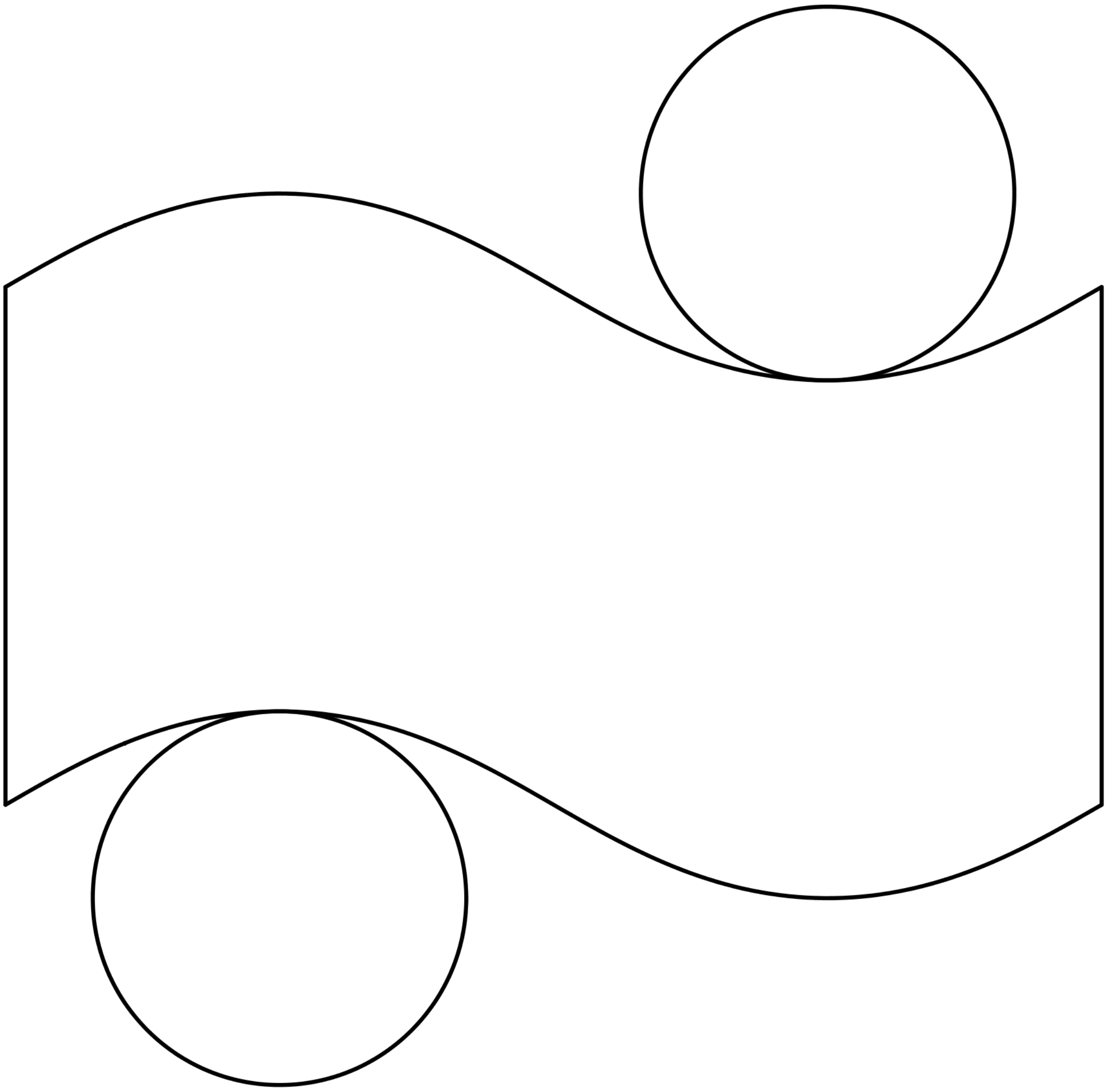


Figura C.1: Molde Para Cilindro Oblíquo.

C.3 Molde para tronco de cilindro com 3cm de raio, 7cm de altura media e 30° de inclinação.

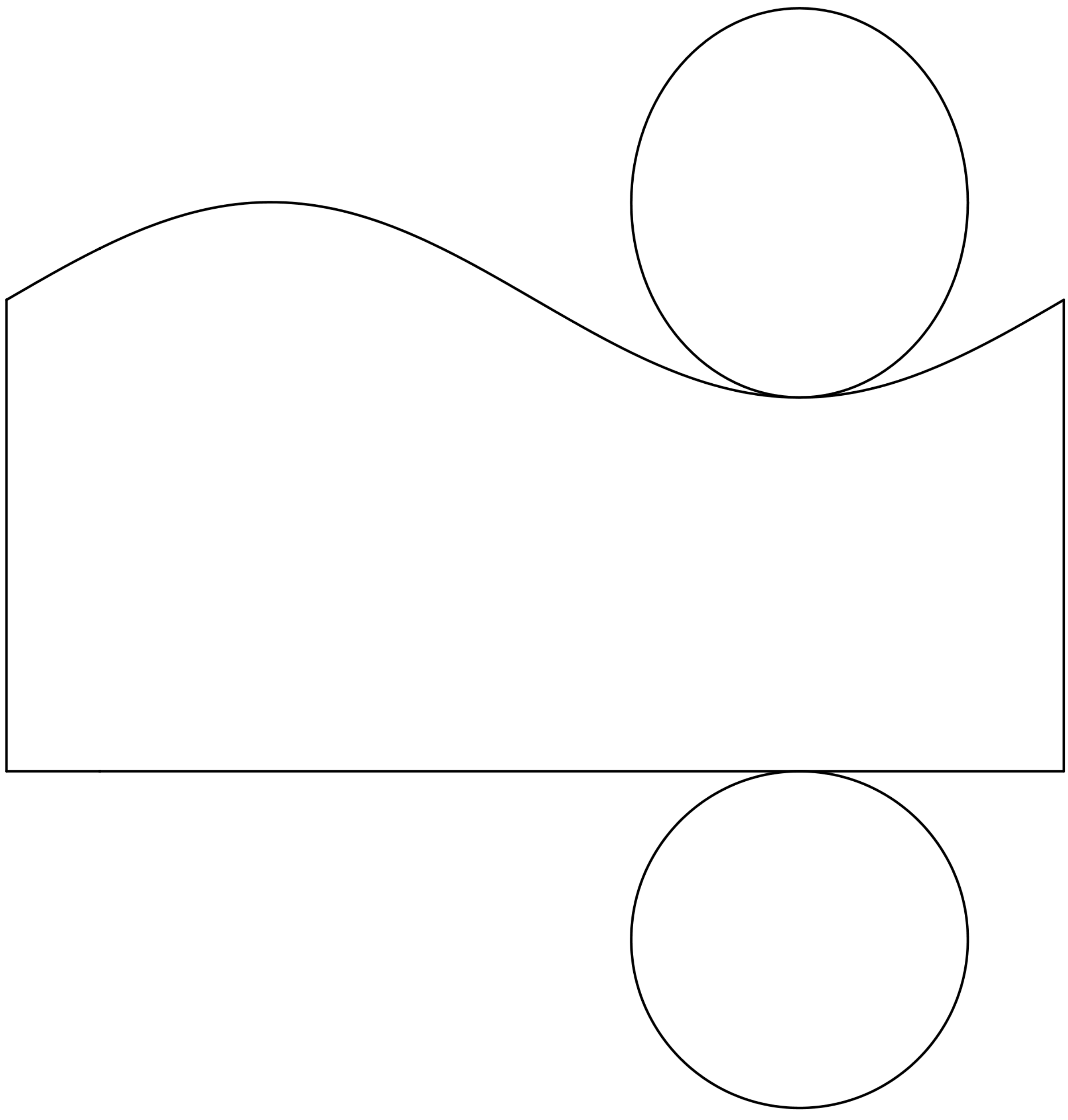


Figura C.2: Molde Para Tronco de Cilindro.

Apêndice D

Planificações de Superfícies Laterais

D.1 Molde da planificação da superfície lateral do cilindro oblíquo com 2,5cm de raio, 6cm de altura e 30° de inclinação.

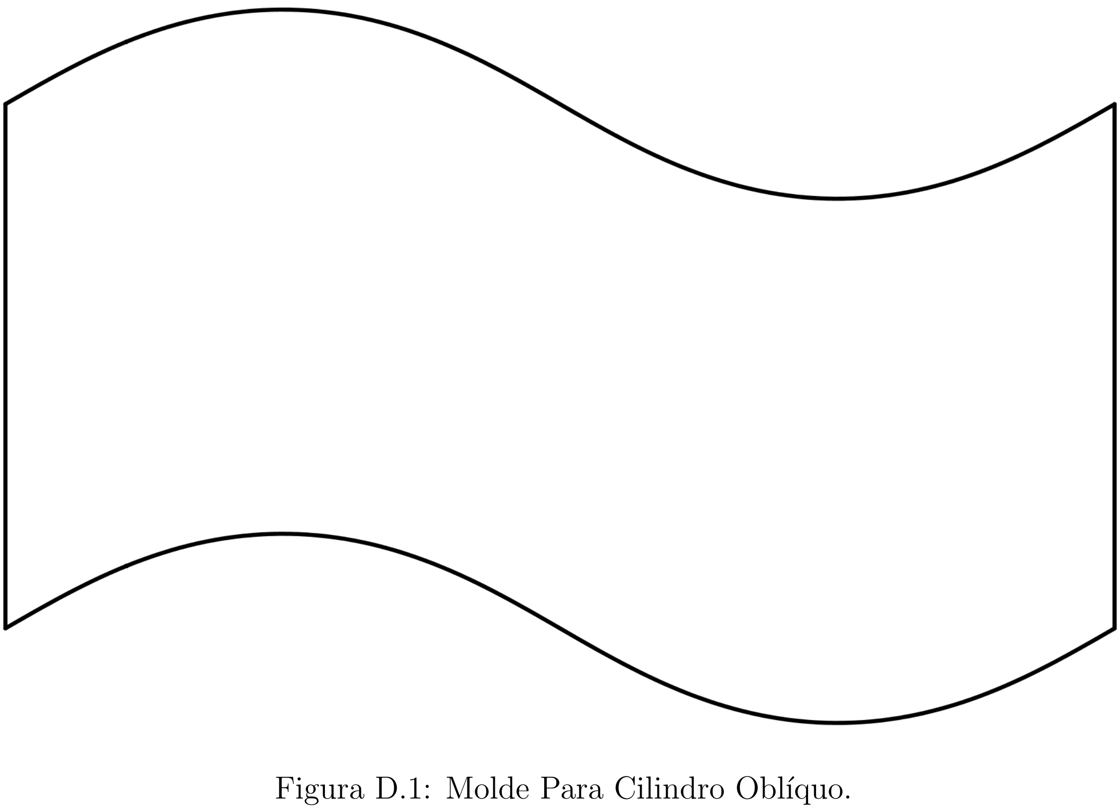


Figura D.1: Molde Para Cilindro Oblíquo.

D.2 Molde da planificação da superfície lateral do tronco de cilindro com 2,5cm de raio, 6cm de altura e 30° de inclinação.

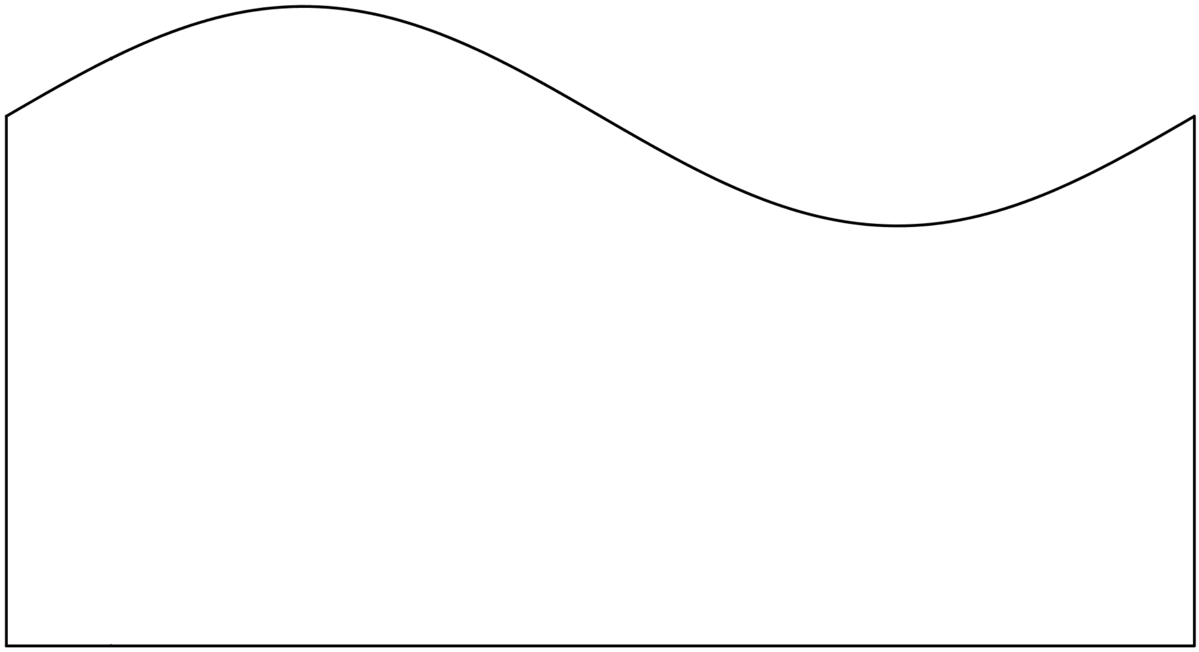


Figura D.2: Molde Para Cilindro Oblíquo.

Apêndice E

Autorizações.

E.1 Termo de Anuência.

Declaração de Anuência

Declaro para os devidos fins que concordo com o desenvolvimento de aulas em contra turno para alunos de 8º e 9º anos da Escola Municipal Evandro Brito da Cunha referentes ao Projeto de Mestrado do professor Ari Ferraza de Souza, com período de execução previsto de setembro a dezembro de 2017.

Vivian Alves Andrade Toledo
Gestora Escolar
CPF: 040.666.306 – 85
e-mail: ediviviam@gmail.com
telefone: (35) 3435 2976
Extrema, 20 de setembro de 2017

Vivian Alves Andrade Toledo
Gestora Escolar
REG/MEC: 5670

E. M. "EVANDRO BRITO DA CUNHA"
Portaria S.E.E. 277/98 de 10/03/1998
Rua Conchetta C. Comanducci, 250
Jardim Nova Extrema II
Tel.: 35-3435-2976
37.640-000 - EXTREMA - MG

E.2 Termo de Autorização de Uso de Imagem.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM (CRIANÇA)

Hiram Camargo Capozzoli, nacionalidade brasileiro, menor de idade, neste ato devidamente representado por seu (sua) (responsável legal), Benedita do Esp Santo Camargo, nacionalidade brasileira, estado civil casada, portador da Cédula de identidade RG nº. 5711738, inscrito no CPF/MF sob nº 80004644620, residente à Av/Rua 08 de março - Ponte Alta, nº. 181, município de Extrema - MG/Campinas. AUTORIZO o uso de imagem em todo e qualquer material entre fotos e documentos, para ser utilizada em Dissertação de Mestrado e todos os demais produtos deste trabalho, desenvolvido pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP sejam essas destinadas à divulgação ao público em geral. A presente autorização é concedida a título gratuito, abrangendo o uso da imagem acima mencionada em todo território nacional e no exterior, das seguintes formas: (I) folhetos em geral (encartes, mala direta, catálogo, etc.); (II) folder de apresentação; (III) anúncios em revistas e jornais em geral; (IV) home page; (V) cartazes; (VI) back-light; (VII) mídia eletrônica (painéis, vídeo-tapes, televisão, cinema, programa para rádio, entre outros), artigos e demais produtos oriundos do presente estudo. Por esta ser a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito sem que nada haja a ser reclamado a título de direitos conexos à minha imagem ou a qualquer outro, e assino a presente autorização.

Extrema, dia 04 de Dezembro de 2017.

BCamargo

(assinatura)

Nome da criança: Hiram Camargo Capozzoli
Por seu Responsável Legal: BCamargo
Telefone p/ contato: 988157936

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM (CRIANÇA)

Camila Coutto da Costa, nacionalidade brasileira, menor de idade, neste ato devidamente representado por seu (sua) (responsável legal), Cinthia Couto Ferreira, nacionalidade brasileira, estado civil solteira, portador da Cédula de identidade RG nº. 25.813.923-4, inscrito no CPF/MF sob nº 174.208.548-23, residente à Av/Rua Felicia Morbidelli, nº. 156, município de Extrema/Campinas. AUTORIZO o uso de imagem em todo e qualquer material entre fotos e documentos, para ser utilizada em Dissertação de Mestrado e todos os demais produtos deste trabalho, desenvolvido pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP sejam essas destinadas à divulgação ao público em geral. A presente autorização é concedida a título gratuito, abrangendo o uso da imagem acima mencionada em todo território nacional e no exterior, das seguintes formas: (I) folhetos em geral (encartes, mala direta, catálogo, etc.); (II) folder de apresentação; (III) anúncios em revistas e jornais em geral; (IV) home page; (V) cartazes; (VI) back-light; (VII) mídia eletrônica (painéis, vídeo-tapes, televisão, cinema, programa para rádio, entre outros), artigos e demais produtos oriundos do presente estudo. Por esta ser a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito sem que nada haja a ser reclamado a título de direitos conexos à minha imagem ou a qualquer outro, e assino a presente autorização.

Extrema, dia 08 de dezembro de 2017.

Cinthia C. Ferreira

(assinatura)

Nome da criança: Camila Coutto da Costa

Por seu Responsável Legal:

Telefone p/ contato: (35) 98434-3669

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM (CRIANÇA)

JOÃO PAULO RIBEIRO PEREIRA, nacionalidade Brasileiro, menor de idade, neste ato devidamente representado por seu (sua) (responsável legal), ANA PAULA RIBEIRO PEREIRA, nacionalidade BRASILEIRO, estado civil SOLTEIRO, portador da Cédula de identidade RG nº. 19.762.353, inscrito no CPF/MF sob nº 134 904 996 - 46, residente à Av/Rua Praça Álvaro Silva, nº. 37, município de Extrema/Campinas. AUTORIZO o uso de imagem em todo e qualquer material entre fotos e documentos, para ser utilizada em Dissertação de Mestrado e todos os demais produtos deste trabalho, desenvolvido pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP sejam essas destinadas à divulgação ao público em geral. A presente autorização é concedida a título gratuito, abrangendo o uso da imagem acima mencionada em todo território nacional e no exterior, das seguintes formas: (I) folhetos em geral (encartes, mala direta, catálogo, etc.); (II) folder de apresentação; (III) anúncios em revistas e jornais em geral; (IV) home page; (V) cartazes; (VI) back-light; (VII) mídia eletrônica (painéis, vídeo-tapes, televisão, cinema, programa para rádio, entre outros), artigos e demais produtos oriundos do presente estudo. Por esta ser a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito sem que nada haja a ser reclamado a título de direitos conexos à minha imagem ou a qualquer outro, e assino a presente autorização.

Extrema MG, dia 26 de dezembro de 2017.

A Paula Rib Per.

(assinatura)

Nome da criança: João Paulo Ribeiro Pereira
Por seu Responsável Legal: Ana Paula Ribeiro Pereira
Telefone p/ contato: (35) 98821-6864

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM (CRIANÇA)

Taínara Soares de Jesus, nacionalidade Ilhéus-Bahia, menor de idade, neste ato devidamente representado por seu (sua) (responsável legal), Cláudia Isabel Soares, nacionalidade Ilhéus - Bahia, estado civil casada, portador da Cédula de identidade RG nº. 63.641.441-3 inscrito no CPF/MF sob nº 025054825794, residente à Av/Rua Olegario Marciel - centro, nº. 31, município de Extrema - MG /Campinas. AUTORIZO o uso de imagem em todo e qualquer material entre fotos e documentos, para ser utilizada em Dissertação de Mestrado e todos os demais produtos deste trabalho, desenvolvido pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP sejam essas destinadas à divulgação ao público em geral. A presente autorização é concedida a título gratuito, abrangendo o uso da imagem acima mencionada em todo território nacional e no exterior, das seguintes formas: (I) folhetos em geral (encartes, mala direta, catálogo, etc.); (II) folder de apresentação; (III) anúncios em revistas e jornais em geral; (IV) home page; (V) cartazes; (VI) back-light; (VII) mídia eletrônica (painéis, vídeo-tapes, televisão, cinema, programa para rádio, entre outros), artigos e demais produtos oriundos do presente estudo. Por esta ser a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito sem que nada haja a ser reclamado a título de direitos conexos à minha imagem ou a qualquer outro, e assino a presente autorização.

~~Exetra~~ Extrema, dia 17 de Dezembro de 2017.

(assinatura)

Nome da criança: Tainara Soares de Jesus
Por seu Responsável Legal: Cláudia Isabel Soares
Telefone p/ contato: (35) 9 8401-2640

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM (CRIANÇA)

Denis Toledo dos Santos, nacionalidade Brasileiro, menor de idade, neste ato devidamente representado por seu (sua) (responsável legal), Jefferson Carlos Ap. Santos, nacionalidade Brasileiro, estado civil Casado, portador da Cédula de identidade RG nº. 29.360.475-7, inscrito no CPF/MF sob nº 252.137.498.95, residente à Av/Rua José Tomé José Benedito, nº. 25, município de Extrema MG. /Campinas. AUTORIZO o uso de imagem em todo e qualquer material entre fotos e documentos, para ser utilizada em Dissertação de Mestrado e todos os demais produtos deste trabalho, desenvolvido pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP sejam essas destinadas à divulgação ao público em geral. A presente autorização é concedida a título gratuito, abrangendo o uso da imagem acima mencionada em todo território nacional e no exterior, das seguintes formas: (I) folhetos em geral (encartes, mala direta, catálogo, etc.); (II) folder de apresentação; (III) anúncios em revistas e jornais em geral; (IV) home page; (V) cartazes; (VI) back-light; (VII) mídia eletrônica (painéis, vídeo-tapes, televisão, cinema, programa para rádio, entre outros), artigos e demais produtos oriundos do presente estudo. Por esta ser a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito sem que nada haja a ser reclamado a título de direitos conexos à minha imagem ou a qualquer outro, e assino a presente autorização.

Terço Fino, dia 26 de Dezembro de 2017.

Jefferson Carlos Ap. Santos

(assinatura)

Nome da criança: Denis Toledo dos Santos
Por seu Responsável Legal: Jefferson Carlos Aparecido Santos
Telefone p/ contato: (35) 9 9135-0379

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM (CRIANÇA)

Pedro Leandro Bueno de Andrade, nacionalidade Brasileira, menor de idade, neste ato devidamente representado por seu (sua) (responsável legal), Clayton Bueno de Andrade, nacionalidade brasileira, estado civil casado, portador da Cédula de identidade RG nº. 21967193-X, inscrito no CPF/MF sob nº 004.928006-69, residente à Av/Rua Maestro B. Carlinho, nº. 350 F., município de Extrema/MG. /Campinas. AUTORIZO o uso de imagem em todo e qualquer material entre fotos e documentos, para ser utilizada em Dissertação de Mestrado e todos os demais produtos deste trabalho, desenvolvido pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP sejam essas destinadas à divulgação ao público em geral. A presente autorização é concedida a título gratuito, abrangendo o uso da imagem acima mencionada em todo território nacional e no exterior, das seguintes formas: (I) folhetos em geral (encartes, mala direta, catálogo, etc.); (II) folder de apresentação; (III) anúncios em revistas e jornais em geral; (IV) home page; (V) cartazes; (VI) back-light; (VII) mídia eletrônica (painéis, vídeo-tapes, televisão, cinema, programa para rádio, entre outros), artigos e demais produtos oriundos do presente estudo. Por esta ser a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito sem que nada haja a ser reclamado a título de direitos conexos à minha imagem ou a qualquer outro, e assino a presente autorização.

Extrema, dia 26 de Dezembro de 2017.

(assinatura)

Nome da criança: PEDRO LEANDRO BUENO DE ANDRADE

Por seu Responsável Legal: CLAYTON BUENO DE ANDRADE

Telefone p/ contato: (35) 98833-2611