UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

A RAZÃO ÁUREA NA BOTÂNICA – PRÁTICAS CONTEXTUALIZADAS UTILIZADAS COMO ELEMENTO DE MOTIVAÇÃO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Tiago Loyo Silveira

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

A RAZÃO ÁUREA NA BOTÂNICA – PRÁTICAS CONTEXTUALIZADAS UTILIZADAS COMO ELEMENTO DE MOTIVAÇÃO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TIAGO LOYO SILVEIRA

Sob a Orientação do Professor

Vinícius Leal do Forte

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Abril de 2018

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S587r

SILVEIRA, TIAGO LOYO, 1984-
A RAZÃO ÁUREA NA BOTÂNICA - PRÁTICAS CONTEXTUALIZADAS UTILIZADAS COMO ELEMENTO DE MOTIVAÇÃO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA / TIAGO LOYO SILVEIRA. - 2018.
95 f.: il.

Orientador: Vinícius Leal do Forte.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT, 2018.

1. Razão Áurea. 2. Sequência de Fibonacci. 3. Práticas Contextualizadas. 4. Motivação em sala de aula. 5. Botânica. I. Forte, Vinícius Leal do , 1985-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

TIAGO LOYO SILVEIRA

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 24/04/2018

____

Vinícius Leal do Forte. Dr. UFRRJ
(Orientador)

____

Aline Mauricio Barbosa. Dr.ª UFRRJ

____

Marilis Bahr Karam Venceslau. Dr.ª CPII

À minha esposa,

não é um livro para você, mas certamente foi por você.

Ao meu filho,

motivo de todos os meus planos e sonhos.

Aos meus pais

Cleber e Edna,

Com saudades, aos meus pais

Carlos e Conceição.

Obrigado por tudo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter honrado sua promessa e me permitido chegar até aqui. Tudo que tenho é dEle e graças a Ele.

A minha esposa, depois de mim, provavelmente a única testemunha de todo sacrifício, cansaço e lutas desse caminho.

Aos meus amigos, Alecsandro Baltasar, Edson Patrício, Eduardo Brittes, Osni Júnior e Pablo Silva. Vocês que sempre estiveram dispostos a me ajudar e a compartilhar tudo que sabem, o meu muito obrigado. Que bom ter amigos de verdade.

Ao professor Vinícius Leal do Forte, meu orientador, obrigado pelo incentivo e pelo conhecimento compartilhado.

Aos professores André Luiz e Aline Maurício, que acreditaram e me ajudaram ao longo desse caminho.

Aos demais professores da UFRRJ que me conduziram e tanto conhecimento compartilharam para que eu pudesse chegar até aqui.

RESUMO

SILVEIRA, Tiago Loyo. **A Razão Áurea Na Botânica – Práticas Contextualizadas Utilizadas Como Elemento De Motivação Da Educação Matemática**. 2018. 95 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2018.

A temática central desse trabalho é o uso em sala de aula da interação entre a Matemática e a Botânica. A justificativa para a escolha da temática abordada é a presença inegável de elementos matemáticos na Biologia e a harmonia resultante da combinação destes. Para apresentar e relacionar essas duas diferentes áreas, iremos descrever os conceitos por trás do número irracional, Fi (Φ), que é resultado de uma razão, denominada Razão Áurea. Primeiramente, traremos o contexto histórico, no qual são apresentados os nomes dos principais matemáticos, filósofos e pensadores por trás da projeção da Razão Áurea. Nesse caminho, veremos que diversos matemáticos contribuíram para a evolução dos conceitos sobre a Razão Áurea, sem saber que o faziam. Em seguida são descritas as construções e bases teóricas para o campo observacional, que será de grande importância para o bom desenvolvimento das atividades de sala de aula, aqui propostas. Então, sua presença será observada por meio de imagens, que demonstram com os números a Razão Áurea em suas estruturas. A contextualização do tema é proposta de uma forma dinâmica dentro e fora da sala de aula. Buscamos que essa contextualização com elementos naturais, onde o homem não exerceu influência em suas formas e padrões, possa contribuir para a motivação dos alunos. Esperamos que a ideia de que estudar Matemática é sempre resolver cálculos no papel, sem que essa tenha uma relação natural com o mundo real, seja modificada na concepção do aluno. Sugestões de atividades serão apresentadas com o objetivo de auxiliar o professor durante a abordagem da contextualização entre Razão Áurea e a Botânica. Porém, diversas outras atividades podem ser desenvolvidas dentro desse tema. A aplicação de algumas dessas atividades faz parte desse trabalho, bem como uma pesquisa com os alunos sobre os resultados obtidos através dessa aplicação. E assim, embora um observador leigo possa passar toda uma vida sem perceber a beleza e o propósito lógico por trás de várias espécies em seu jardim - após a leitura deste trabalho, o leitor será apresentado a uma nova forma de encarar a Matemática. Concluindo que a contextualização é um elemento indispensável a motivação do aluno, e que sem essa motivação, o aluno não consegue visualizar a matemática ao seu redor e suas aplicações concretas.

Palavras-chave: Razão Áurea; Fibonacci; Botânica; Filotaxia; Contextualização.

ABSTRACT

SILVEIRA, Tiago Loyo. **The Golden Ratio in Botany - Contextualized Practices Used as Element of Motivation in Mathematics Education**. 2018. 95 f. Dissertation (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2018

The central theme of this work is the use in the classroom of the interaction between Mathematics and Botany. The justification for choosing the subject is the undeniable presence of mathematical elements in Biology and the harmony resulting from their combination. To present and relate these two different areas, we will describe the concepts behind the irrational number, Fi (Φ), which is the result of a reason, called the Golden Ratio. First, we will bring the historical context in which the names of the main mathematicians, philosophers and thinkers are presented behind the projection of the Golden Reason. In this way, we will see that several mathematicians contributed to the evolution of concepts about the Golden Reason, without knowing that they did. Next, the theoretical constructions and bases for the observational field are described, which will be of great importance for the good development of classroom activities proposed here. Then their presence will be observed by means of images, which demonstrate with numbers the Golden Reason in their structures. The contextualization of the theme is proposed in a dynamic way inside and outside the classroom. We seek that this contextualization with natural elements, where man has not exerted influence in its forms and patterns, can contribute to the motivation of the students. We hope that the idea that studying mathematics is always to solve calculations on paper, without having a natural relation with the real world, is modified in the student's conception. Suggestions for activities will be presented with the objective of assisting the teacher during the approach of the contextualization between Golden Reason and Botany. However, several other activities can be developed within this theme. The application of some of these activities is part of this work, as well as a research with the students about the results obtained through this application. And so, while a lay observer can spend a lifetime without realizing the beauty and logical purpose behind various species in his garden - after reading this work, the reader will be introduced to a new way of looking at Mathematics. Concluding that contextualization is an indispensable element of student motivation, and that without this motivation, students can not visualize the mathematics around them and their concrete applications.

Keywords: Golden Ratio; Fibonacci; Botany; Phyllotaxis; Contextualization.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Conhecida desde a Antiguidade, a Razão Áurea, possui diversos nomes, Número Áureo, Número de Ouro, Seção Áurea, Divina Proporção, entre outros nomes. O Fi (Φ), letra grega que representa a Razão Áurea é, em muitos aspectos naturais, muito mais presente que seu "primo", o Pi (π), também irracional, ainda assim, continua bem menos conhecido. O que haveria em comum, por exemplo, entre o quadro "O Sacramento da Última Ceia", de Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de alguns moluscos, a formação espiralada das galáxias e a forma como os coelhos procriam? A resposta: a Razão Áurea.

Este trabalho deixa de se ater nas aparições da Razão Áurea onde o homem foi o arquiteto da obra, como por exemplo, em construções ou artes, e se dedica a um dos ramos das ciências naturais, a Botânica. Isso porque, devido aos impressionantes efeitos da Razão Áurea, ao longo da história, muitas inverdades foram atribuídas a ela, como nas medidas das pirâmides do Egito. Porém, esse trabalho busca motivar os alunos ao estudo da Matemática apresentando propostas concretas, cujas formas não sofreram intervenção humana. Dessa forma, o aluno tende a enxergar a Matemática como uma linguagem criada pelo homem capaz de explicar fenômenos naturais, então perceber que ele precisa dela para facilitar a compreensão do mundo a sua volta. Por isso serão abordados os pontos onde a Razão Áurea surge naturalmente e serão citadas hipóteses dessas inesperadas associações naturais. Seria pretensioso demais querer provar o porquê desse aparecimento, mas serão analisadas algumas teorias sobre o assunto, bem como apresentados fatos e ilustrações que têm o objetivo de fazer o leitor formular suas hipóteses e tirar suas conclusões da presença da Matemática em nosso cotidiano.

Assim serão apresentadas proporções áureas presentes na Botânica, na intenção de despertar a curiosidade sobre os números, dando ao aluno a possibilidade de encontrar Matemática ao olhar para um abacaxi, ou quando observar o crescimento de uma planta, ou em uma simples margarida.

Portanto, a pesquisa optou por um recorte e utilizou a presença do Número de Ouro na Botânica. Abrangendo os grupos vegetais, suas formas e formatos, a Botânica torna o campo de pesquisa observacional muito mais amplo, fazendo assim com que as comprovações das existências áureas se deem por meio de populações e seus espaços amostrais naturais.

A filotaxia é um ramo da botânica que estuda a forma, formato e função das folhas. É um campo de pesquisa muito abrangente e por isso não pode deixar de ser incluído nesse estudo, considerando a forte ligação com o Número Áureo.

Portanto, o fascínio por este número é notado de forma quase natural quando tomamos esse caminho. É claro que a Botânica é apenas uma pequena parte das existências naturais da Razão Áurea, entretanto, é um caminho belo e fácil de ser observado.

Quase todo professor de Matemática que trabalhe com turmas de educação básica já ouviu frases desmotivadas dos alunos, como: “nunca vou usar isso!”, “tenho raiva de quem inventou a Matemática”. Frases ou atitudes como essa devem nos incomodar para o fato de que a Matemática não tem feito sentido para esses alunos.

Muito se fala em uma educação contextualizada. De fato, pouco se pode afirmar a respeito da geração que tem sido educada sob esse aspecto. Porém, o que se pode afirmar é que temas bem contextualizados, ou vistos sob um ponto de vista real, despertam um maior interesse, e normalmente são assimilados com maior facilidade.

Dessa forma, nosso objetivo geral será fazer com que o aluno reflita sobre o fato de que a Matemática é autossuficiente e inerente ao mundo, independente da intervenção humana, que apenas criou símbolos para representar fenômenos que existem por si mesmos. Para isso, faremos a contextualização da Razão Áurea em aspectos naturais da Botânica, trazendo ao aluno a percepção da Matemática e a leitura do mundo a sua volta por meio dela.

O objetivo específico desse trabalho é apresentar algumas sugestões de atividades para o uso contextualizado da Razão Áurea, não somente associados à Botânica, buscando motivar os alunos com uma Matemática mais visual.

A metodologia adotada será inicialmente por meio de aulas expositivas, na intenção de que o aluno compreenda o que é a Razão Áurea e como a sequência Fibonacci se associa a ela. Na sequência o aluno irá conhecer construções básicas relacionadas. Por fim, o aluno poderá experimentar as atividades contextualizadas relacionadas à Razão Áurea, tendo assim a compreensão de uma matemática que é utilizada para representar fenômenos naturais a sua volta.

No capítulo 2 será abordado um pouco da história do Número Áureo, seus principais pensadores e estudiosos. Nesse caminho, será apresentada a história da descoberta dos incomensuráveis, números que não podem ser representados por uma fração de números inteiros, e a da própria Razão Áurea. É difícil datar e confirmar o período de sua descoberta, mas pode-se presumir os potenciais pensadores e filósofos que se depararam com os incomensuráveis, e seguindo essa linha, existem as teorias mais aceitas da origem da Razão Áurea.

Fibonacci e sua sequência serão apresentados como ligação para a Razão Áurea. Será mencionada a relação da sequência de Fibonacci e a razão que leva ao Número de Ouro.

Em seguida, no capítulo 3, serão abordados propriedades geométricas da Razão Áurea, seu conceito e suas construções. As formas algébricas de se chegar ao Número de Ouro serão abordadas de uma forma mais breve, pois não é o objetivo deste trabalho bem como as comprovações e demonstrações, mas por necessidade mínima algumas serão exemplificadas.

Muitas construções que envolvem o Número de Ouro serão desenvolvidas a partir da ideia inicial, embora seja impossível exemplificar todas as abordagens. As construções escolhidas serão aquelas que possuem relação íntima com a Botânica, tais como: o Segmento Áureo, o Ângulo Áureo, a Espiral Logarítmica e as figuras áureas que nos levam a estas construções.

Por motivos didáticos, as construções serão detalhadas. Assim, o leitor terá uma experiência na construção das proporções áureas e caso seja educador, poderá utilizar o material no dia a dia em sala de aula.

O capítulo 4 fará a ligação entre a Razão Áurea e alguns elementos da Botânica. Nesse capítulo serão apresentadas diversas imagens, inclusive, algumas sendo fruto desse trabalho. As associações entre os componentes áureos e a Botânica serão feitas, citando as relações com a sequência de Fibonacci e com as construções áureas. Os exemplos das aparições da Razão Áurea na natureza pretendem transmitir a ideia de relação íntima entre a observação e a demonstração, entre o teórico e o prático, que acabam complementando-se.

O cerne desse trabalho situa-se no capítulo 5, que apresentará diversas sugestões para a aplicação da Razão Áurea em sala de aula. Inicialmente serão abordados fatores que podem contribuir para o melhor desempenho dos alunos, bem como um maior interesse pela Matemática. Se a Matemática na Botânica tiver sido apresentada de uma forma agradável e concreta, será razoável esperar que o conhecimento transmitido dessa forma seja mais atraente para os alunos. Em seguida sugestões de ligação entre o Número de Ouro e outros tópicos serão apresentadas, sempre buscando a botânica como ideia central do trabalho.

Ainda no capítulo 5, veremos os resultados da aplicação de algumas dessas práticas em sala de aula, e no item 5.3 poderemos ver o resultado de uma pesquisa feita após a aplicação das mesmas.

Assim, algumas teorias sobre os motivos que levam ao surgimento do Número de Ouro na Botânica serão mencionadas. A pesquisa procura esclarecer que a maioria dessas associações ainda necessita de estudos e comprovações mais detalhadas, que são o cerne do rigor científico, porém, que não foi o objetivo desse trabalho.

Encerraremos este trabalho com a expectativa de ter aberto ao leitor e ao aluno que tenha participado das atividades aqui propostas, uma nova janela de possibilidades. Seja para enxergar padrões naturais, seja para trabalhar uma diferente forma de contextualização.

2 UM BREVE HISTÓRICO DA RAZÃO ÁUREA

Nesse capítulo, faremos uma síntese da abordagem histórica da Razão Áurea. Dessa forma, acreditamos que será possível visualizar melhor a evolução dos conceitos e conhecimentos sobre essa razão.

Por volta de 300 a.C., Euclides (2009) definiu uma proporção derivada da simples divisão de uma linha no que chamou de "razão extrema e média".

Uma linha reta é dividida em dois segmentos na razão extrema e média quando, assim como a linha toda (AB) está para o maior segmento (AC), o maior segmento (AC) está para o menor (CB). Foi com uma definição semelhante a essa que Euclides apresentou pela primeira vez a Razão Áurea.

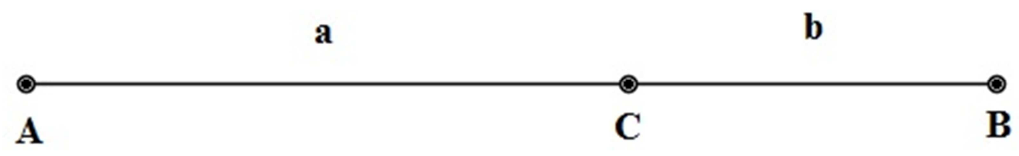


Figura 1 - Segmento Áureo.
Fonte: O Autor.

Em outras palavras, se a razão do comprimento de AC para CB for igual à razão de AB para AC, então o segmento foi dividido na razão extrema e média ou na Razão Áurea.

Conforme Euclides (2009), o conhecimento da razão extrema e média, vem desde a Antiguidade, mas foi somente no século XIX que essa razão recebeu o título honorífico de "Número Áureo", "Razão Áurea" e "Seção Áurea". O livro de Luca Pacioli[1], do começo do século XVI, chegou a chamá-la de "Proporção Divina" (BERTATO, 2008).

Proporção é uma palavra que utilizamos para fazer comparações entre partes, tamanhos ou quantidades. Na Matemática essa palavra é utilizada para determinar e igualar razões, tais como: nove está para três $\left(\frac{9}{3}\right)$ assim como seis está para dois $\left(\frac{6}{2}\right)$.

Lívio (2009) descreve como as lendas Matemáticas contam que quando Hipaso de Metaponto descobriu, no século V a.C., que a Razão Áurea é um número que não é nem

[1] Luca Bartolomeo de Pacioli, nasceu em Sansepolcro em 1445, foi um monge franciscano e célebre matemático italiano. É considerado o pai da contabilidade moderna

inteiro e nem uma fração de dois números inteiros, isso o deixou totalmente chocado e também aos outros seguidores de Pitágoras.

Isso significa dizer que a razão entre AC e CB, não pode ser expressa por um quociente de dois números inteiros. Dois segmentos com estas características são chamados incomensuráveis. Ou seja, a razão entre AC e CB é um número irracional e, portanto, possui representação decimal infinita e não periódica, a saber, 1,6180339887...

O número 1,61803..., é um número surpreendente. Mas poucas são as pessoas que já ouviram falar dele.

> ... na literatura Matemática profissional, o símbolo habitual para a Razão Áurea é a letra grega tau (τ , que significa "o corte" ou "a seção"). Entretanto, no início do século XX, o matemático americano Mark Barr deu à razão o nome de Fi (Φ) ou minúsculo (φ), a primeira letra grega no nome de Fídias, o grande escultor grego que viveu entre 490 e 430 a.C. (LÍVIO, 2009, p 16)

Fídias foi quem construiu o "Partenon de Atenas" e o "Zeus" no templo de Olímpia, uma das sete maravilhas do Mundo Antigo. Alguns historiadores de arte dizem que Fídias fazia uso frequente da Razão Áurea em suas esculturas, por isso Barr o homenageou.

Figura 2 – Réplica do Parthenon em Nashville, Tennessee, Estados Unidos.
Fonte: Disponível em: <http://www.touristlink.com.br/Estados-Unidos/partenon/overview.html>.

Por outro lado, o próprio Lívio (2009), afirma existirem autores que discordam da aplicação da Razão Áurea no Parthenon, tão pouco, existem comprovações sobre quais são as dimensões da estátua de Zeus. Portanto é difícil a comprovação da aplicabilidade da Razão Áurea nas obras supracitadas.

Segundo Lívio (2009, p.16): "De fato, provavelmente é correto dizer que a Razão Áurea tem inspirado pensadores de todas as disciplinas mais do que qualquer outro número na história da Matemática".

É possível que antes de Fídias, Pitágoras tenha sido o primeiro matemático a deparar-se com os incomensuráveis, e sabendo ou não, com o próprio Φ.

"Pitágoras nasceu por volta de 570 a.C. na ilha de Samos, no mar Egeu" (LÍVIO, 2009, p. 37). Fundou uma espécie de sociedade secreta de estudiosos em filosofia e ciências, em geral, conhecida como Escola Pitagórica ou simplesmente os Pitagóricos.

Tanto Boyer (1996) quanto Lívio (2009) concordam em não haver provas que confirmem a descoberta dos números irracionais pelos hindus ou mesmo se o próprio Pitágoras conhecia tais números, mas algumas evidências apontam para esta possibilidade.

O que se pode constatar é que os Pitagóricos utilizavam a estrela de cinco pontas e o pentágono como símbolos geométricos aos quais eles atribuíam poderes místicos.

Apesar da utilização do pentágono e do pentagrama pelos pitagóricos como elementos simbólicos característicos, Pitágoras é notadamente conhecido pelo seu famoso teorema da hipotenusa de um triângulo retângulo, segundo o qual a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, lado oposto ao ângulo de 90º. Seguindo o desenvolvimento desse teorema, talvez os pitagóricos tenham se deparado com a diagonal de um quadrado de lado 1, o que resultaria uma hipotenusa igual a $\sqrt{2}$. Assim os pitagóricos teriam encontrado os segmentos incomensuráveis.

Se construirmos um pentágono regular e traçarmos as cinco diagonais, elas formam um pentágono regular menor (Figura 3) e as diagonais do segundo formam um terceiro pentágono regular, que é menor ainda. Podemos repetir o processo indefinidamente e sempre encontraremos um pentágono cada vez menor, veremos no próximo capítulo que a relação entre o lado do pentágono e sua diagonal, não resulta em um número racional. Na verdade, resulta exatamente no Número Áureo. A Figura 3 representa a auto propagação da Seção Áurea no pentágono regular.

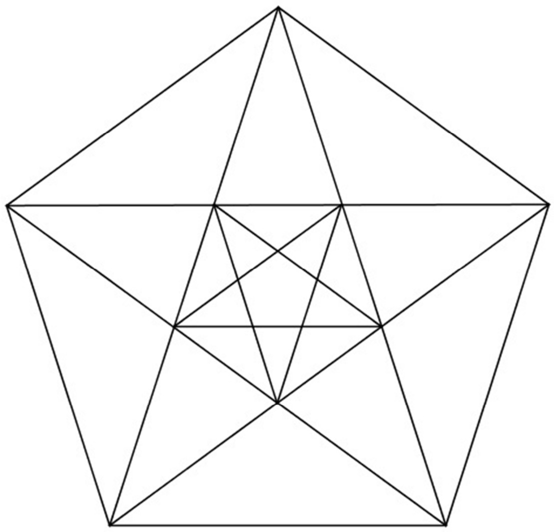


Figura 3 - Pentágono Pitagórico.
Fonte: O Autor.

A construção dessa auto propagação e sua relação com a Razão Áurea será apresentada no próximo capítulo.

Não há documentos que provem que realmente os Pitagóricos sabiam dessa propriedade, mas, segundo Lívio (2009), a sugestão da relação entre pentágono e pentagrama é aceitável, o que teria levado o pitagórico Hipaso de Metaponto à descoberta dos incomensuráveis. Então não seria $\sqrt{2}$ mas $\sqrt{5}$ que primeiro revelou a existência de medidas incomensuráveis, pois a solução da equação $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ nos leva a $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ como sendo a razão entre o lado de um pentágono regular e a diagonal.

Segundo Boyer (1996, p. 50), “a essência de tudo, tanto na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, pode ser explicada em termos de arithmos, ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões, era um artigo de fé fundamental do pitagorismo”. Então a descoberta desses números irracionais, como diz a lenda, fez com que, aturdidos, os Pitagóricos se sacrificassem apavorados. Algo desse tipo era um erro cósmico, ou ao menos deveria ser mantido em segredo.

Segundo Lívio (2009), alguns historiadores defendem a tese de que os Pitagóricos mataram Hipaso por tal descoberta e erigiram uma lápide a ele, outros afirmam que a lápide foi erigida apenas por simbolismo da morte de Hipaso para a Escola Pitagórica.

Platão surge na história da Razão Áurea de uma forma indireta. Ele mesmo nunca escreveu sobre ela de uma forma direta, mas em *Timeu*, ele descreve cinco possíveis sólidos regulares como fundamento da harmonia do Universo. Seus estudos serviram de base anos depois, para que Euclides escrevesse *Elementos* (EUCLIDES, 2009). Em seu livro, Euclides demonstra a criação dos sólidos platônicos e sua estreita relação com o segmento áureo, portanto, fica registrada a presença de Platão na história da Razão Áurea.

Ainda sobre Hipaso de Metaponto, Lívio (2009, p. 49) escreve: “Muitos pesquisadores – entre eles Kurt Von Fritz, em seu artigo intitulado ‘A descoberta da incomensurabilidade por Hipaso de Metaponto’, publicado em 1945 – sugerem que os pitagóricos foram os primeiros a descobrir a Razão Áurea e a incomensurabilidade”. De fato pode-se traçar uma relação: sabe-se que o símbolo que representava a sociedade dos pitagóricos era o pentagrama, o pentágono ou o pentágono com o pentagrama inscrito. Mas esses polígonos estão diretamente associados ao segmento áureo, o que nos leva realmente aos discípulos de Pitágoras.

Alguns autores argumentam que o surgimento da Razão Áurea é anterior aos pitagóricos. Esses autores se baseiam em diversas fontes, uma delas seria a aparição da Razão Áurea nas pirâmides no Egito. Acontece que muitos truques de prestidigitação numérica ocorrem relacionados à Razão Áurea, e por descaso, muitos autores as propagam sem confirmar as fontes. Acreditamos que a repetição sem critérios de uma informação equivocada pode conferir-lhe valor de verdade ao longo dos anos.

No caso das Pirâmides do Egito, diversos autores escreveram sobre suas dimensões áureas. Gazalé, M. J., escreveu em seu livro Gnomon: Dos faraós aos fractais (1999): “Disseram que o historiador grego Heródoto aprendeu com os sacerdotes egípcios que o quadrado da altura da Grande Pirâmide é igual à área da sua face lateral triangular”. Essa afirmação é de extrema relevância, porque significa dizer que a Grande Pirâmide foi projetada de forma que a razão entre a altura de sua face triangular e metade do lado da base, seja igual à Razão Áurea.

Lívio (2009), alerta para o fato de que afirmações como essa, tem corroborado para que os autores afirmem que “as pirâmides” possuem proporções áureas.

Entretanto, ainda segundo Lívio (2009), tais informações baseiam-se em uma tradução equivocada do livro *Euterpe* de Heródoto. As informações se baseavam em uma pirâmide com altura de 244 metros e base quadrada com os lados medindo os mesmo 244 metros. Quando na verdade a altura real é de aproximadamente 147 metros, e sua largura é de cerca de 230 metros, ainda longe dos 244 metros calculados, portanto, as medidas utilizadas são inexatas, o que invalida as afirmativas.

São dados, como esses, errados ou manipulados de forma engenhosa a fornecer proporções áureas que motivaram esse trabalho no campo das ciências naturais, ambiente no qual os números surgem de forma espontânea e sem questionamentos, requerendo apenas compreensão.

De fato, é quase impossível determinar a origem dos irracionais ou da Razão Áurea. Talvez tenha surgido da relação infinita entre o pentagrama, seus lados e suas diagonais, símbolo dos Pitagóricos, ou da relação entre o quadrado e suas diagonais.

Para tratar da história da Razão Áurea, não podemos deixar de abordar Euclides. Esse pode não ser o nome do maior matemático de todos os tempos, mas é sem dúvida um personagem único para a história da Matemática, já que decidiu reunir todo o conhecimento matemático de seu tempo em um único acervo, que chamou de *Elementos*.

Boyer (1996) e Lívio (2009), contam sua história: Por volta de 306 a.C., Ptolomeu I, após a morte de Alexandre (o Grande), adquiriu o controle da cidade de Alexandria, importante entreposto comercial e cultural. Uma de suas primeiras ações foi a instalação de algo equivalente a uma universidade, mais tarde chamado de Universidade de Alexandria. Entre os membros dessa universidade encontrava-se Euclides, autor da obra mais conhecida da história da Matemática – *Elementos* (*Stoichia*). Até o século XX, somente a Bíblia havia vendido mais exemplares.

Com base nos estudos contidos nos *Elementos* é possível que Euclides tenha estudado em Atenas com alguns alunos de Platão, porém seus estudos e sua naturalidade são incertos.

Elementos, uma obra composta por treze volumes aborda basicamente Geometria e Teoria dos Números. Euclides faz questão de mencionar os autores originais. Acrescenta ainda, seus próprios conhecimentos a obra, além da importância de reunir na coletânea séculos de conhecimento matemático.

Após apresentados alguns fatos históricos, e ressaltando a relevância de Euclides para a Matemática, em especial para a geometria plana, que ficou mais tarde conhecida como Geometria Euclidiana, estabeleceremos a relação entre Euclides e a Razão Áurea.

Em *Elementos*, um acervo de tamanha importância Matemática, a definição da Razão Áurea é citada e exemplificada diversas vezes durante os treze volumes, o que contribuiu para uma grande divulgação do Número Áureo, ou Número de Ouro. Durante a idade Medieval, o livro foi traduzido para diversos idiomas. A primeira definição da Razão Áurea ("razão extrema e média") é feita de forma indireta no livro II. Outra definição mais objetiva é feita no livro VI. A Razão é especialmente usada por Euclides no livro IV, para a construção de um pentágono, e no livro XIII para construir um dodecaedro e um icosaedro.

Ao longo deste trabalho demonstraremos a relevância da Razão Áurea para a construção de um pentágono regular, ressaltando para tanto a importância de Euclides na divulgação da Razão Áurea.

“As nove figuras dos hindus são 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 1. Com estas nove, e com o símbolo 0 [...] podem se escrever todos os números [...]” (LEONARDO FIBONACCI, 1228)

Foi com essas palavras que Leonardo de Pisano, ou Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci, começou seu primeiro livro, *Liber Abaci* (*Livro do Ábaco*) em 1202. Nessa época poucos na Europa conheciam os algarismos hindus. Apenas alguns poucos estudiosos e comerciantes tinham contato com essa forma de escrita dos números.

Boyer (1996) e Lívio (2009) nos contam que Leonardo de Pisa (1170 – 1250) era filho de um comerciante, o que fez com que Leonardo conhecesse várias regiões do norte da África e da Ásia, onde teve contato com os algarismos hindus. O apelido Fibonacci foi introduzido provavelmente pelo historiador de Matemática Guillaume Libri.

No *Liber Abaci*, Fibonacci faz a apresentação dos algarismos e afirma que eles, juntamente com o sistema de valor posicional, eram um sistema muito superior a todos os outros métodos conhecidos até então.

A cidade de Pisa naquela época era um importante porto, que recebia uma intensa movimentação comercial. Fibonacci certamente observou por diversas vezes os escribas da época usando o ábaco, ou fazendo anotações de valores utilizando o sistema romano. Os números que hoje podemos representar com quatro algarismos poderiam ter facilmente mais de uma dezena de símbolos em algarismos romanos, o que certamente tornava as operações mais trabalhosas.

Para facilitar ou quase substituir o sistema posicional, os europeus usavam o ábaco, mas operações diferentes de soma e subtração continuavam trabalhosas. No *Liber Abaci*, Fibonacci descreve de forma detalhada o método indo-arábico, ensina como fazer as devidas conversões entre os sistemas, além de trazer vários problemas do cotidiano resolvidos de mais de uma forma pelo novo método, tornando assim os cálculos bem menos trabalhosos. Consequentemente o primeiro livro de Fibonacci fez tanto sucesso, que sua fama chegou aos ouvidos do imperador Frederico II, que o chamou para resolver alguns problemas que o matemático da corte não conseguia. Alguns dos problemas foram publicados em um outro livro, intitulado *Flor*. Fibonacci publicou ainda *Practica Geometriae* (Prática de Geometria) obra na qual faz várias utilizações da Razão Áurea para o cálculo das diagonais e da área do pentágono e outras formas geométricas. Foram mais de quatro livros escritos, e um tesouro inestimável somado a história da Matemática.

Seu primeiro livro foi realmente o mais fantástico de todos. E foi nele, sem imaginar, que Fibonacci fez um grande avanço para a Razão Áurea. Em um problema aparentemente simples sobre coelhos do Capítulo XII que dizia:

"Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir deste par em um ano se, supostamente todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?" (LÍVIO, 2009).

Óbvio que a interpretação seria de um casal de coelhos, e que esse casal sempre viesse a gerar um novo casal, sem que nenhum dos coelhos morresse no período de tempo do problema. Ao final dos doze meses, não devemos contabilizar o total de coelhos, mas sim quantos casais haveria no total.

Fibonacci deu uma simples solução a esse problema, tentamos representar de forma mais clara com o esquema (Figura 4), onde cada coelho representa, na verdade, um casal:

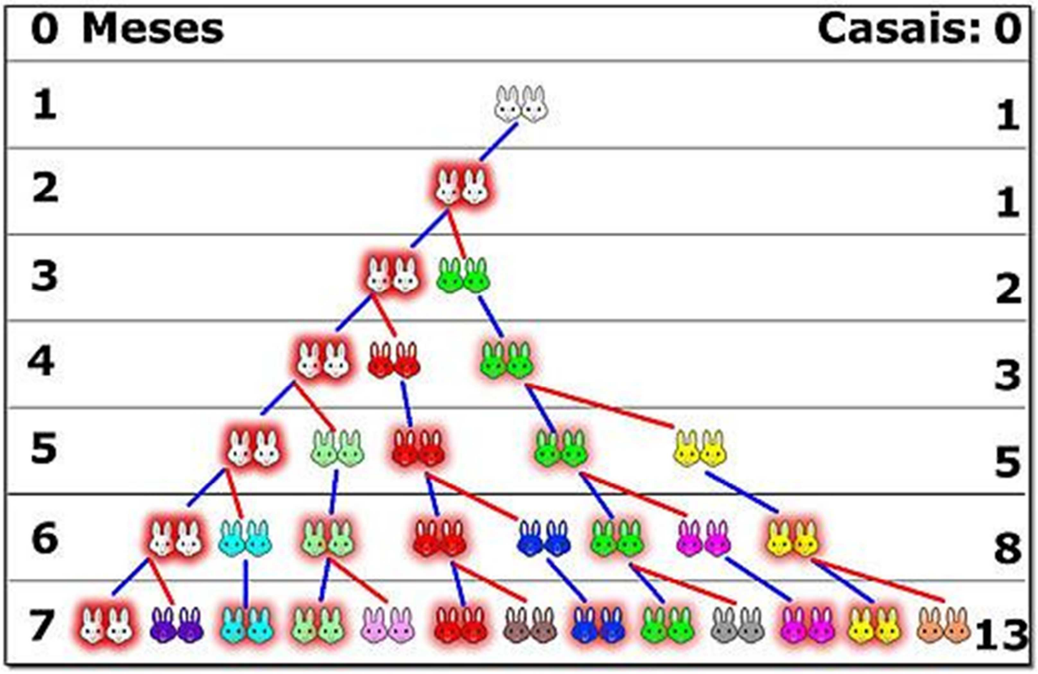


Figura 4 - Coelhos de Fibonacci.
Fonte: Disponível em: <https://www.estudofacil.com.br/sequencia-de-fibonacci/>.

Note que em cada linha o número de casais adultos segue a seguinte sequência: 1, 1, 2, 3, 5, ... e que cada termo desta a partir do terceiro é o resultado da soma dos dois termos anteriores. Essa sequência ficou conhecida como Sequência de Fibonacci.

A Sequência de Fibonacci não se limita a reprodução de coelhos. O que tornou essa sequência e seu autor tão conhecidos, foi o fato de que ela surge nos mais diversos temas mesmo sem percebermos. Infelizmente, nosso trabalho não teria como abordar tantos aspectos, mas deixamos exemplos de ocorrência da sequência, e a pesquisa fica a cargo do leitor: na árvore genealógica das abelhas, no número de galhos de algumas árvores, na óptica de raios, entre outros diversos casos. Porém, ainda é preciso associar a Sequência Fibonacci à Razão Áurea.

Vamos observar a razão entre dois números consecutivos da sequência de Fibonacci (calculados aqui com seis casas decimais):

$$1/1 = 1{,}000000$$
$$2/1 = 2{,}000000$$
$$3/2 = 1{,}500000$$
$$5/3 = 1{,}666666$$
$$8/5 = 1{,}600000$$
$$13/8 = 1{,}625000$$
$$21/13 = 1{,}615385$$
$$34/21 = 1{,}619048$$
$$55/34 = 1{,}617647$$
$$89/55 = 1{,}618182$$
$$144/89 = 1{,}617978$$
$$233/144 = 1{,}618056$$
$$377/233 = 1{,}618026$$
$$610/377 = 1{,}618037$$
$$987/610 = 1{,}618033$$

À medida que avançamos na sequência, a razão entre esses números torna-se cada vez mais próxima do irracional Φ, oscilando uma posição menor e outra maior, mas a cada razão aumenta a precisão das casas decimais.

Contudo, Lívio (2009) ressalta que mais tarde ficou-se sabendo que qualquer sequência de números que tenha a mesma propriedade da sequência de Fibonacci, ou seja, que o n-ésimo termo seja a soma dos dois termos anteriores, independente de qual seja o n-ésimo termo escolhido, essa sequência também se aproximará de Φ. A esse tipo de sequência em que $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, damos o nome de sequência de Lucas, em homenagem ao matemático francês François-Édouard-Anatole Lucas (1842-1891), que criou sequências com essas características, a partir da sequência de Fibonacci.

Essa última descoberta não diminui a importância da sequência de Fibonacci, pois não muda o fato de que ela está inserida em diversos fenômenos naturais de forma inexplicável e fascinante. Pelo contrário, esse fato ressalta que o próprio Φ é que está relacionado aos fatos naturais de uma forma no mínimo misteriosa, uma vez que independente da sequência que a origina ser a de Fibonacci ou de Lucas, encontraremos a Razão Áurea.

3 CONSTRUÇÕES ÁUREAS

> A Geometria possui dois grandes tesouros. Um é o Teorema de Pitágoras. O outro, a divisão de uma linha nas razões extrema e média. O primeiro podemos comparar a uma medida de ouro. O segundo podemos chamar de uma joia preciosa. (JOHANNES KEPLER 1571-1630)

3.1 O SEGMENTO ÁUREO

Retomemos o segmento que representa a razão extrema e média:

Figura 5 - Segmento Áureo
Fonte: O Autor.

Basta chamar $AC = x$ e $CB = 1$, nesse caso 1 representaria qualquer unidade de medida. Se a razão entre x e 1 é a mesma que entre $x + 1$ (comprimento total do segmento AB) e x, então o segmento terá sido dividido na razão extrema e média. Fazendo as substituições teremos:

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x},$$

logo $x^2 = x + 1$, com $x \neq 0$, segue que $x^2 - x - 1 = 0$.

As soluções da equação são $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, entretanto, consideramos apenas a solução positiva, já que estamos tratando da medida de um segmento: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$, dessa maneira, encontramos o Número Áureo.

Agora vejamos como construir um segmento áureo com régua e compasso:

Dado um segmento AB qualquer, obtemos o ponto médio de AB da seguinte maneira: com o centro do compasso em A e depois em B traçamos circunferências com raios maiores que a metade do segmento AB, que se intersectam como mostra a Figura 6, ligando os pontos onde os arcos se intersectaram.

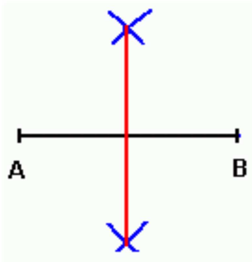


Figura 6 - Construindo o segmento áureo – 1º Passo.
Fonte: Carvalho, 2008, p.10.

Usando régua e compasso, traçamos uma reta perpendicular a AB, pelo ponto B com metade do comprimento de AB;

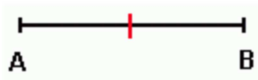


Figura 7 - Construindo o segmento áureo – 2º Passo.
Fonte: Carvalho, 2008, p.10.

Veja o traçado:

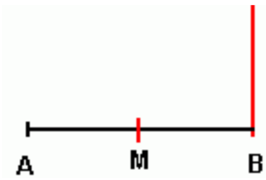


Figura 8 - Construindo o segmento áureo – 3º Passo.
Fonte: Carvalho, 2008, p.10.

Com o compasso faça centro em B, traçando uma circunferência que intercepte a perpendicular no ponto C de raio BM (veja Figura 9).

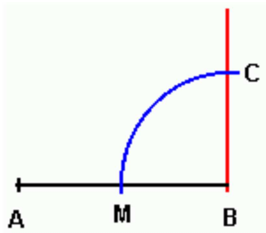


Figura 9 - Construindo o segmento áureo – 4º Passo.
Fonte: Carvalho, 2008, p.11.

O novo segmento BC é perpendicular a AB medindo a metade de AB. Unindo os pontos A e C obtemos um triângulo ABC (veja Figura 10);

Figura 10 - Construindo o segmento áureo – 5º Passo.
Fonte: Carvalho, 2008, p.11.

Com o centro do compasso em C abrindo até B, marcamos um novo ponto E em AC (hipotenusa) do triângulo (veja Figura 11);

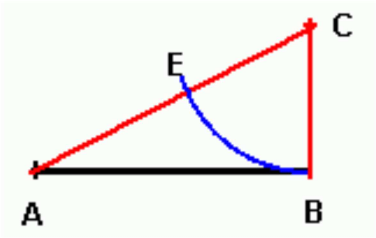


Figura 11 - Construindo o segmento áureo – 6º Passo.
Fonte: Carvalho, 2008, p.11.

Finalmente com o centro do compasso no vértice A, abrindo até E marcamos em AB o ponto D (veja Figura 12). Este é o ponto que divide o segmento AB em média e extrema razão, ou ainda, que AD é 1,618... vezes maior que BD.

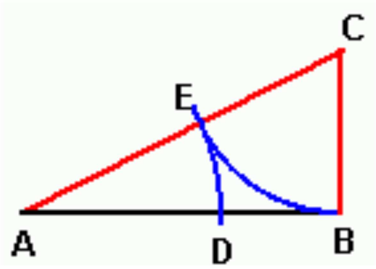


Figura 12 - Construindo o segmento áureo – 7º Passo.
Fonte: Carvalho, 2008, p.12.

De fato, sendo AB = 1, mostraremos que $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{BD}$.

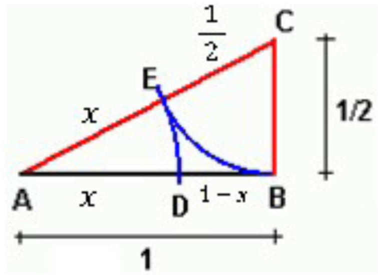


Figura 13 - Construindo o segmento áureo – 8º Passo.
Fonte: Carvalho, 2008, p.12.

Como o triângulo ABC é retângulo, pelo teorema de Pitágoras: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$, equação que tem as seguintes soluções $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, que nos leva à Razão Áurea, solução positiva $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cong 0{,}618$.

3.2 O RETÂNGULO ÁUREO

Denominamos retângulo áureo um retângulo em que a razão das medidas de seus lados é igual à Φ. Adotaremos o retângulo (Figura 14) com proporções áureas entre seus lados.

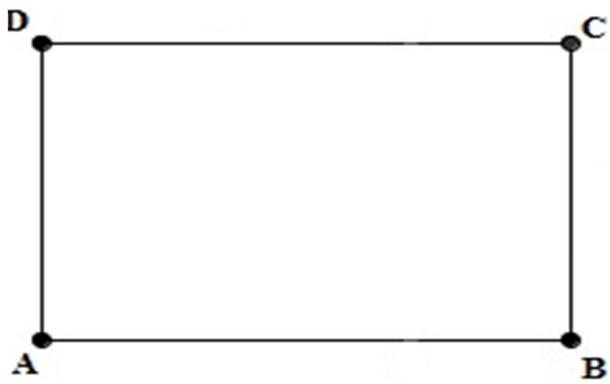


Figura 14 - Retângulo Áureo.
Fonte: O Autor.

Seja ABCD um retângulo áureo. Destacando o quadrado ADEF na Figura 15 do retângulo áureo na Figura 14, temos, de acordo com a definição, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FB}}$.

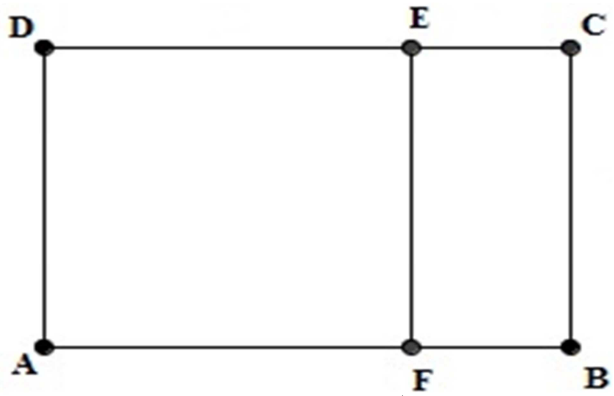


Figura 15 - Retângulo Áureo.

Fonte: O Autor.

Como $\overline{EF} = \overline{AD} = x$, $\overline{AB} = a$, temos $\overline{FB} = a - x$ e assim,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$$

Como x é positivo, obtemos

$$\frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Portanto, $\frac{\overline{EF}}{\overline{FB}} = \Phi$ e, então, o novo retângulo BCEF, interior ao primeiro, também é áureo. Novamente, construindo um quadrado no novo retângulo áureo interior ao primeiro, obteremos outro retângulo interior a este segundo, também nas proporções áureas, e este processo é *ad infinitum* (ao infinito), sempre preservando a Razão Áurea entre seus lados.

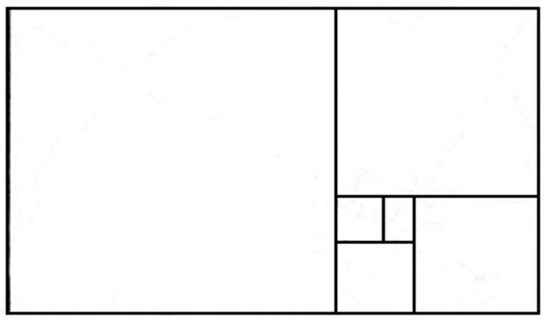


Figura 16 - Retângulo Áureo.
Fonte: O Autor.

O retângulo áureo possui ainda uma propriedade muito interessante. Segundo Lívio (2009, p. 103), ele é o único retângulo com a capacidade de se replicar ao retirarmos dele um quadrado, como apresentado na Figura 16, e ainda, se traçarmos uma diagonal em um retângulo “pai” e uma diagonal no retângulo “filho” (retângulo pai é aquele que dá origem ao lado do quadrado menor, e esse irá fazer parte do retângulo filho) na série, como na Figura 17, e todas irão se cruzar no mesmo ponto. Como os retângulos se replicam de uma forma cada vez menor até o infinito, essa propriedade levou o matemático Clifford A. Pickover a sugerir o nome desse ponto de encontro das diagonais como “O Olho de Deus” (LÍVIO, 2009 p.104).

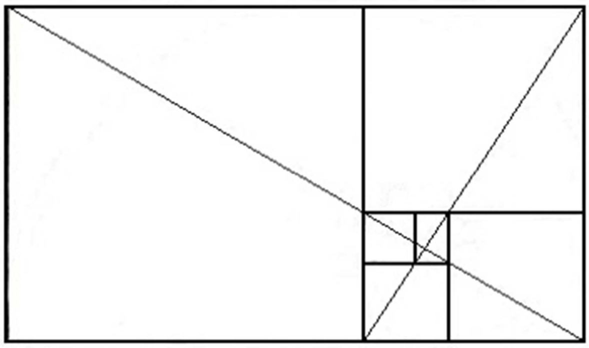


Figura 17 - Retângulo Áureo.
Fonte: O Autor.

3.3 O TRIÂNGULO ÁUREO

Os debates a respeito da descoberta dos números irracionais estão centrados no questionamento de sua origem: eles vieram do Teorema de Pitágoras aplicado a um quadrado, o que resulta na $\sqrt{2}$, ou eles vieram da razão entre a diagonal de um pentágono e seus lados, que resulta no irracional Φ.

Lembremos que o pentagrama era o símbolo da Escola dos Pitagóricos.

Se conectarmos todos os vértices do pentágono por diagonais, iremos chegar a um pentagrama, e se conectarmos as diagonais desse, voltaremos a outro pentágono menor no centro, como mostra a Figura 18. É fato que essa repetição pode ser feita indefinidamente. Mas segundo Lívio (2009, p. 48), a propriedade mais incrível é que se olharmos os segmentos de linha em ordem decrescente de comprimento (aqueles marcados com *a, b, c, d, e, f* na Figura 18), podemos provar facilmente, usando geometria elementar, que cada segmento é menor que seu antecessor por um fator que é exatamente igual à Razão Áurea. Isto é a razão entre os comprimentos a e b é Φ, a razão entre b e c é Φ, e assim por diante.

Essas relações de comprimento encontradas, não podem ser expressas por razões de números inteiros, propriedade que define os irracionais. Simplificando, em um pentágono regular, a razão entre a diagonal e o lado é igual a Φ.

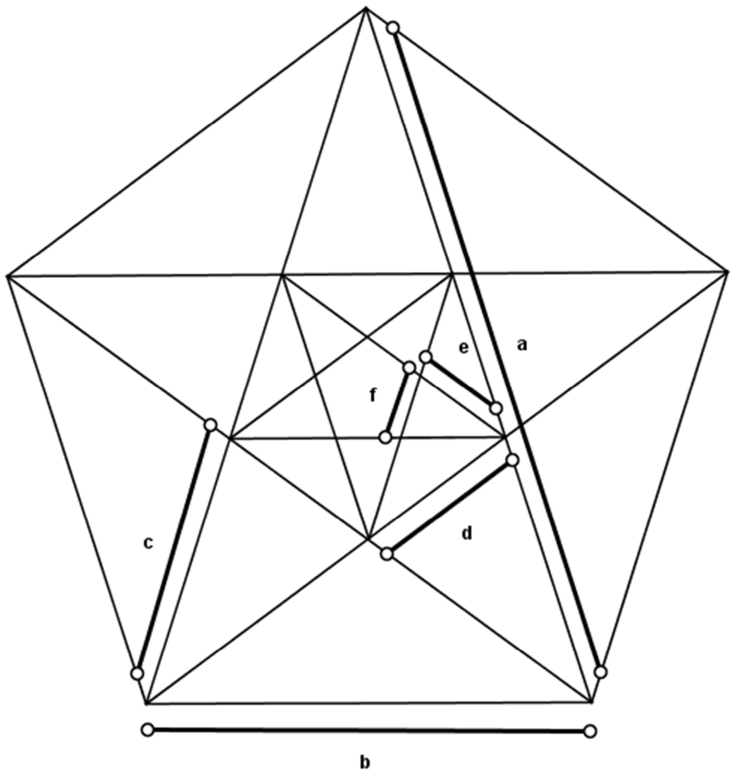


Figura 18 - Pentágono *ad infinitum.*
Fonte: O Autor.

Faremos a demonstração dessa relação entre lado do pentágono e suas diagonais:

Demonstração:

Dado o pentágono regular ABCDE (Figura 19), com lado l e diagonais AE = CE = d, queremos provar que d é maior que l na razão de Φ.

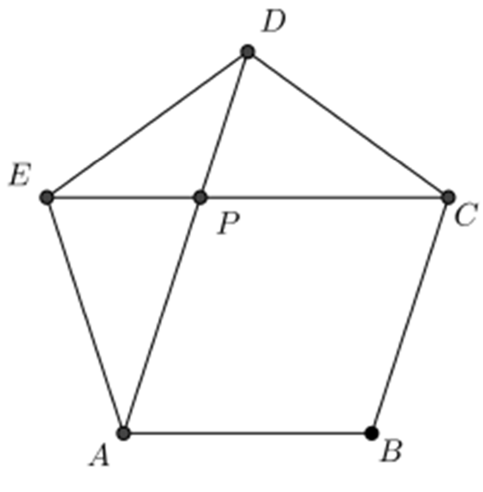


Figura 19 – Pentágono regular.
Fonte: Exame Nacional de Qualificação 2015/1 - Disponível em: < http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/ENQ-20151_Gabarito_e_Pauta_OFICIAL.pdf>.

Temos que AD é base do triângulo isósceles ADE, como ABCDE é regular, $A\hat{E}D$ = 108º, logo $D\hat{A}E$ = $A\widehat{D}E$ = 36º.

De maneira análoga, traçamos CE como base do triângulo CDE, e dessa forma, $D\hat{E}C$ = $E\hat{C}D$ = 36º (Figura 20).

Então, temos que o triângulo de base no lado DE e vértice no encontro das diagonais P, também é isósceles, com ângulos 36º, 36º e 108º. Dessa forma, semelhante ao triângulo ADE de base na diagonal.

Note também, que o triângulo APE também é isósceles de base PE (Figura 20), logo PA = l.

Então, podemos montar a razão de semelhança entre os lados e bases dos triângulos ADE e PDE.

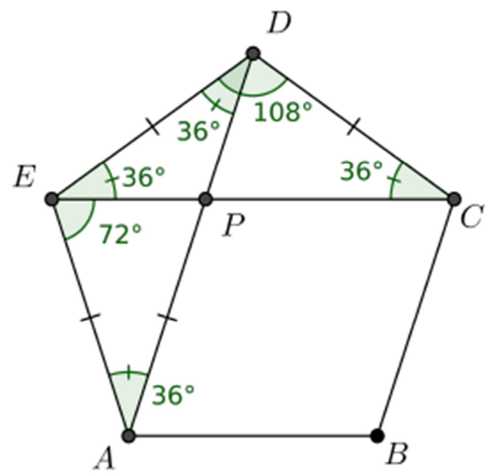


Figura 20 – Pentágono regular.
Fonte: Exame Nacional de Qualificação 2015/1 - Disponível em: < http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/ENQ-20151_Gabarito_e_Pauta_OFICIAL.pdf>.

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \rightarrow \frac{d-l}{l} = \frac{l}{d} \rightarrow$$

$$d^2 - ld = l^2 \rightarrow d^2 - ld - l^2 = 0$$

Vamos resolver essa equação polinomial do 2º grau em d:

$$\Delta = (-l)^2 - 4.1.(-l^2)$$

$$\Delta = 5l^2$$

$$d = \frac{l \pm \sqrt{5l^2}}{2.1} = l\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$$

Tomando a solução geométrica, positiva, temos:

$$d = l.\Phi \qquad \blacksquare$$

Agora, partindo da Figura 21, vamos desenhar apenas duas diagonais partindo do mesmo vértice. Assim obtemos um triângulo isósceles de ângulos 36°, 72° e 72°, como mostra a Figura 22. Se bissectarmos um dos ângulos da base, obteremos um triângulo menor com os mesmos ângulos. Mas a propriedade mais interessante, nesse caso, é que a bissetriz corta o lado AC no ponto D (Figura 22), dividindo o segmento em razão extrema e média. Esse processo também pode ser repetido indefinidamente, criando vários triângulos isósceles cada vez menores e todos eles com as mesmas propriedades. A esse triângulo chamamos de Triângulo Áureo.

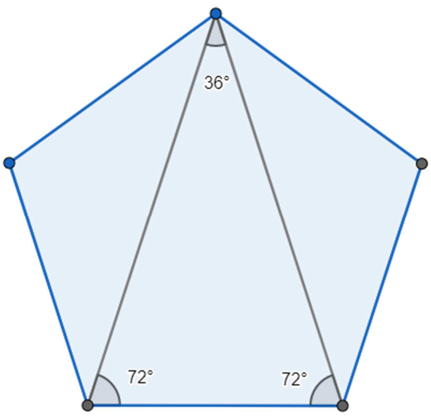


Figura 21 – Pentágono Regular.
Fonte: O Autor.

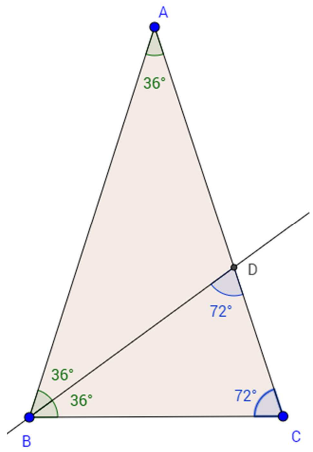


Figura 22 - Triângulo Áureo.
Fonte: O Autor.

3.4 RELAÇÕES DO NÚMERO ÁUREO COM A TRIGONOMETRIA

Demonstraremos agora a ligação existente entre uma equação trigonométrica e a Razão Áurea.

Quais os valores de $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tais que $tanx = cosx$?

Se analisarmos as funções f e g expressas, respectivamente, por $f(\mathrm{x}) = \cos\mathrm{x}$ e $g(\mathrm{x}) = \tan\mathrm{x}$ no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico, observaremos que a solução da equação, ou seja, o ponto no qual os gráficos dessas duas funções se intersectam, dá-se no intervalo $(0{,}2\pi; 0{,}25\pi)$.

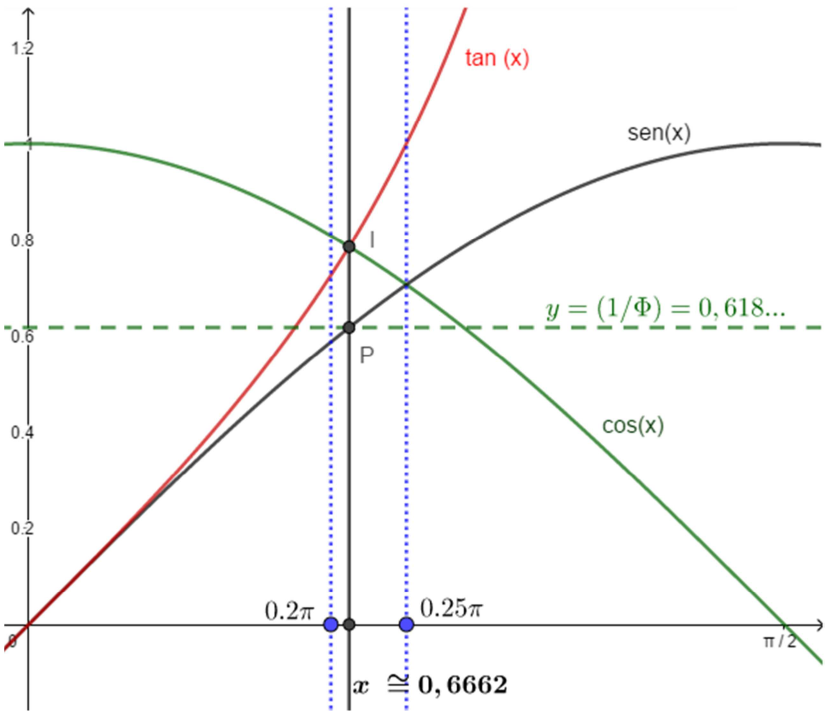


Figura 23 – Gráfico das funções sen(x), cos(x) e tan(x) no intervalo $[0{,}2\pi; 0{,}25\pi]$.
Fonte: O Autor.

Vamos então, a resolução da equação proposta:

$$tanx = cosx \Leftrightarrow \frac{senx}{cosx} = cosx \Leftrightarrow senx = cos^2x \Leftrightarrow senx = 1 - sen^2x$$

$$\Leftrightarrow sen^2x + senx - 1 = 0$$

Segue que:

$$senx = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$$

Ou

$$senx = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\Phi$$

Desconsiderando a raiz negativa, pois estamos no primeiro quadrante, temos:

$$senx = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$$

Não é trivial obter manualmente uma representação decimal para o valor do arco x no qual $senx = \frac{1}{\Phi}$. Porém, provamos uma relação entre o seno do arco x e a Razão Áurea.

Utilizando *softwares* geométricos, é possível calcular um valor aproximado para $x = arcsen\left(\frac{1}{\Phi}\right)$. Na Figura 23, podemos ver que o ponto $P = (x, y)$ sobre o arco de seno onde $tanx = cosx$ tem coordenada de abscissa aproximadamente 0,6662... ou 0,2120...π radianos, que resulta x = 38,17270760...º

Já o ângulo áureo foi descoberto de uma forma um pouco mais sutil e com mais observação que de fato cálculos algébricos. Segundo Lívio (2009, p. 132), em 1837, os irmãos Bravais, descobriram que em algumas espécies de plantas o ângulo de abertura entre uma folha e sua sucessora é em geral, próximo de 137,5º (Figura 32 e 54).

Se tomarmos um ângulo de volta completa, 360º, e o dividirmos por Φ, encontraremos 222,5º, sendo esse valor maior que a metade de uma volta (180º), deveríamos medi-lo indo no sentido oposto, ou seja, devemos utilizar o menor ângulo. Em outras palavras, deveríamos subtrair 222,5° de 360°, o que nos resultaria em um ângulo observado de 137,5º, conhecido como Ângulo Áureo.

Um processo inverso pode ser realizado ao considerarmos um arco de volta completa (360º). Então, vamos procurar qual o ponto onde esse arco será dividido na Razão Áurea:

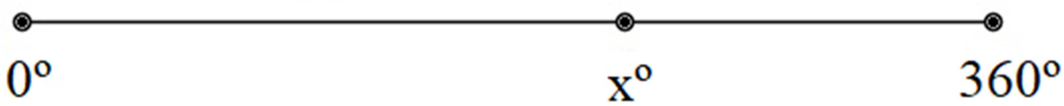


Figura 24 – Arco de volta completa dividido na Razão Áurea.
Fonte: O Autor.

$$\frac{360}{360 - x} = \frac{360 - x}{x}$$

$$= (360 - x)^2 = 360x$$

$$= x = \frac{1080 \pm 360\sqrt{5}}{2} = 180(3 \pm \sqrt{5})$$

Que tem como soluções um arco côngruo a aproximadamente 222,5º e outro de 137,5º.

3.5 A ESPIRAL LOGARÍTMICA E A SUA ASSOCIAÇÃO ÁUREA

Nesse trabalho, defendemos a ideia de que somos seres que pensamos por meio de palavras e imagem. Quando vemos algo conhecido, inconscientemente associamos a uma palavra, e de igual forma, quando ouvimos o nome de algo conhecido, associamos uma imagem. E a maioria de nós quando escuta ou lê a palavra espiral, logo é tomado por imagens.

Sejam essas imagens pequenas ou grandes, em preto e branco ou coloridas, galáxias ou caracóis. Dentre as diversas imagens possíveis, somente as formadas por indivíduos com mentes brilhantes enxergariam padrões de ângulos e crescimento dessas espirais e questionariam se elas crescem ou se retraem? São finitas ou infinitas? Seguem padrões ou são irregulares?

Entre os séculos XVII e XVIII, dois membros da família Bernoulli, importante família de matemáticos, entraram em um conflito tentando encontrar a solução de um famoso problema de Mecânica, conhecido como braquistócrona (do grego, “mais curto tempo”). Tal problema consistia em achar a curva ao longo da qual uma partícula, sujeita a força da gravidade, passaria no menor tempo de um ponto a outro.

Em face desse problema Jacques Bernoulli, passou a estudar espirais. Foi quando ele conheceu a Razão Áurea. Sobre o assunto, ele escreveu um tratado intitulado *Spira Mirabilis* (Espiral Maravilhosa). Segundo Lívio (2009, p. 137), “Jacques ficou tão impressionado com a beleza da curva conhecida como espiral logarítmica que pediu que essa forma fosse gravada em seu túmulo junto com o lema que atribuiu a ela – “*Eadem mutato resurgo”* (embora mudado, ressurjo o mesmo)”.

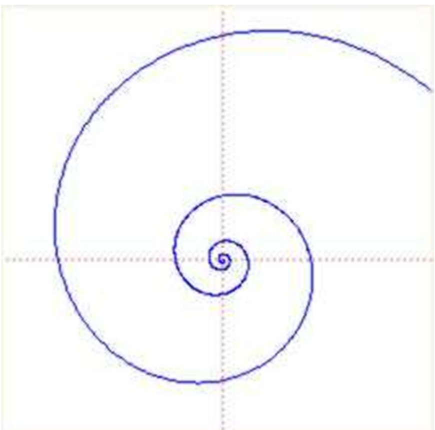


Figura 25 - Espiral Logarítmica.
Fonte: Disponível em:
<http://www.ite.educacion.es/formacion/enred/web_espiral/matematicas/logaritmica/espiral%20logaritmica.htm>.

O nome dessa espiral advém de sua expressão analítica, que pode ser escrita na forma de logaritmo do quociente entre os raios em diferentes posições da espiral.

Retomando agora nosso pensamento sobre espirais, vamos refletir sobre a beleza da espiral na Figura 25 e a frase na lápide de Bernoulli. Em qualquer ponto dessa espiral, ela será simplesmente igual, independente de seu crescimento. Esse padrão de beleza e proporção é encontrado em diversos ramos naturais, tais como: folhas, caramujos, furacões, até galáxias. De acordo com os objetivos deste trabalho, nos ateremos aos fatos e ocorrências na Botânica.

Segundo Lívio (2009), a cada aumento no comprimento, ocorre um crescimento proporcional no raio, de modo a sua curva e forma se manter inalterada. Essa seria uma definição simples da *Spira Mirabilis.* Mas ela é ainda mais complexa.

A espiral logarítmica é conhecida também como espiral equiangular pelo fato de que se traçarmos raios em qualquer ponto dessa espiral, o ângulo que esses raios farão em relação a uma tangente serão sempre congruentes (Figura 26). Para saber mais sobre as espirais logarítmicas, sua demonstração e propriedades, consultar < http://mathworld.wolfram.com/LogarithmicSpiral.html>.

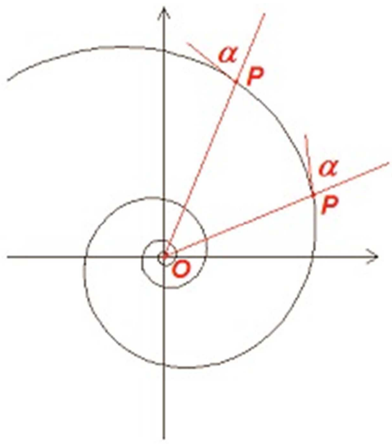


Figura 26 - Espiral equiangular.
Fonte: Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~picado/conchas/espiral.html>.

Uma forma simples para se construir uma espiral logarítmica, é começar do retângulo áureo e suas infinitas sucessões (Figura 17). Tendo esses retângulos, basta tomar o encontro das diagonais, como na Figura 17, e ir desenhando a espiral pelos quadrados, sempre um quarto de volta em cada quadrado como na Figura 27.

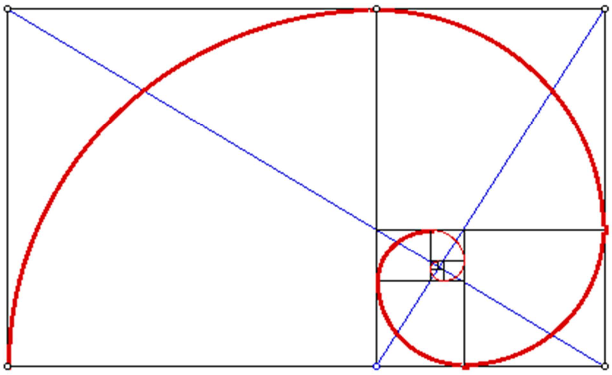


Figura 27 - Espiral logarítmica partindo do retângulo áureo.
Fonte: O Autor.

Assim vemos a espiral construída preservando a Razão Áurea. Mas não é só pelo fato de construir uma espiral equiangular dentro dos múltiplos retângulos áureos que ela está associada à Razão Áurea.

A relação da espiral com a Razão Áurea pode ser apresentada, por exemplo, através da sequência de Fibonacci, uma vez que ela passa por ângulos diagonalmente opostos de quadrados sucessivos. Segundo Huntley (1985, p. 101), os comprimentos dos lados desses quadrados formam uma série de Fibonacci. O processo de construção pode ser melhor explicado se considerarmos, segundo Zahn (2011, p. 38), que os menores quadrados mostrados na Figura 28 possuem lado *u*, o quadrado adjacente terá lado *2u*; o quadrado seguinte tem lado de comprimento *3u*, o seguinte *5u* e assim por diante, resultando na série *1u*, *1u*, *2u*, *3u*, *5u*, *8u, 13u* ... Como vimos, essa propagação irá resultar em termos da sequência Fibonacci cada vez maiores, e então, o quociente entre as medidas desse retângulo estará cada vez mais próxima da Razão Áurea.

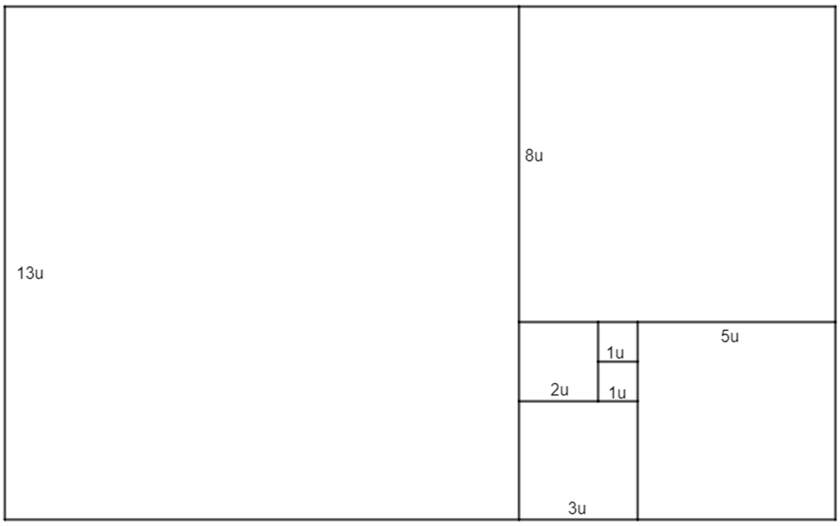


Figura 28 – Retângulos da Sequência Fibonacci.
Fonte: O Autor.

Outra propriedade curiosa dessa espiral é que, se tomarmos dois segmentos desta espiral, de tamanhos diferentes, se ampliarmos um deles ou o reduzirmos adequadamente, eles poderão ser encaixados um ao outro perfeitamente, isso devido ao fato, citado anteriormente, de que em qualquer ponto dessa espiral, o ângulo entre uma tangente e o raio é constante.

4 A PRESENÇA DA RAZÃO ÁUREA NA BOTÂNICA

Segundo Lívio (2009, p. 11), Kelvin disse certa vez em uma conferência: “Quando não podemos expressar algo em números, nosso conhecimento é do tipo escasso e insatisfatório.” O que Kelvin quis dizer é que a Matemática com sua lógica precisa e inquestionável traz segurança ao ser humano.

Acreditamos que a maior parte dos leitores já viveu a seguinte experiência: você está fazendo uma prova objetiva, seja ela de concurso ou não, e chega a uma questão de Matemática na qual perde preciosos minutos, mas ao final encontra o resultado exato de uma das alternativas. A sensação de certeza do processo realizado nos traz segurança, apesar da possibilidade do resultado estar errado. Essa segurança se dá pela confiança nos mecanismos que usamos, 1+1 são sempre dois, assim como $3+2^2$ sempre serão sete. Quem puder resolver equações astronômicas complexas, por exemplo, com tanta certeza quanto podemos resolver as equações anteriores, certamente saberá que o faz porque se utilizou de ferramentas exatas: os números.

Nesse contexto de exatidão e comprovação, a Razão Áurea precisa ser trabalhada com cautela e seriedade. Grandes feitos são atribuídos a Razão Áurea, mas nem todos são reais ou verdadeiros. Então, nos feitos naturais onde pesquisas podem atestar ocorrências quase absolutas, precisamos ter cuidado com as aferições bem como devemos evitar o sensacionalismo.

> Euclides definiu a Razão Áurea porque estava interessado em usar esta proporção simples na construção do pentágono e do pentagrama. Se esta fosse a única aplicação da Razão Áurea, este livro nunca teria sido escrito. O prazer que extraímos desse conceito hoje se baseia principalmente no elemento surpresa. Por um lado, a Razão Áurea veio a se tornar a mais simples das frações contínuas (mas também o “mais irracional” de todos os números irracionais) e, por outro lado, o coração de um número infinito de fenômenos naturais complexos. (LÍVIO, 2009, p 257 - 258)

A Matemática não surge na Botânica apenas por meio dos números da Sequência de Fibonacci e da Razão Áurea. Proporções e formas geométricas podem ser observadas com facilidade na natureza, e o desenvolvimento do estudo dos fractais, formas geométricas não euclidianas, tem estreitado os laços da Matemática e das ciências botânicas.

> A **geometria fractal** estuda as propriedades e comportamentos de figuras mais complexas que a geometria euclidiana (ou dimensão topológica) abrange, descreve situações que não podem ser descritas pela geometria euclidiana, por esta falhar nesses casos. A geometria euclidiana falha na descrição de formas encontradas na natureza. A geometria fractal, em destaque a dimensão fractal, tem utilização em varias áreas cientificas, como no estudo dos sistemas caóticos, reconhecimento de padrões em imagens, tecnologia, ciências, artes e música, etc.
> O fractal é uma estrutura geométrica ou física, e geralmente são muito similares em diferentes níveis de escala, porem nos fractais naturais essa característica é limitada em função da escala. O objeto é composto por partes reduzidas com forma semelhantes à dele próprio. O nome deriva do Latim fractus, que significa quebrado ou fraturado. Varias estruturas naturais são do tipo fractal, são igualmente complexas no detalhe e na forma global. A dimensão de um fractal não é necessariamente um número inteiro, podendo ter dimensão fracionaria. A maioria não se enquadra nas definições tradicionais, e gera dúvida em relação a comprimento, área e volume destas entidades Matemáticas. Com a ampliação dos fractais eles não perdem definição, porque sempre possuem estrutura idêntica com a original. (CLEMENTE, 2018)

Um exemplo de fractal na botânica pode ser observado em uma couve-flor. Se observarmos um couve-flor por inteiro e depois ampliarmos a visão de apenas um de seus pequenos ramos, poderemos perceber sua autossimilaridade. Os detalhes infinitos e autossimilares são características da Geometria Fractal.

Figura 29 – Corte transversal de uma Couve-Flor.
Fonte: Disponível em: < http://www.snv.jussieu.fr/bmedia/Marche/chouRomanesco.htm>.

Uma das áreas de estudo da Botânica é a Filotaxia, que pode ser definida como o estudo da propriedade de simetria das plantas em relação às suas funções em seu ambiente natural (reprodução, fotossíntese e filogênese); é o estudo da relação das taxas de crescimento, alometria e morfogênese do meristema apical. A Filotaxia estudada nesse trabalho teve como base Ferri (2006) e Jean (1984) que descrevem as relações matemáticas, botânicas e suas associações.

Uma definição mais simples diz que filotaxia é a parte da Botânica que estuda a disposição das folhas no caule.

Quando visualizamos uma grande árvore com suas milhares de folhas, não conseguimos imaginar nenhum padrão. Parece apenas ser uma confusão de galhos e folhas buscando um lugar ao sol, mas é justamente por trás dessa confusão que estão padrões matemáticos. Segundo Lívio (2009), tais padrões já haviam sido notados por Pitágoras, Goethe, e Leonardo da Vinci, mas a observação desses padrões não entrou no campo teórico por séculos.

Segundo Jean (1984), artigos sobre o assunto só começaram a surgir por volta de 1950 com a expansão da BioMatemática e seu novo ramo, a Phytomathematics, que nada mais é que a abordagem matemática para o crescimento das plantas. Ainda segundo Jean (1984), o estudo da Botânica consistia apenas em nomear e classificar plantas; Leonardo da Vinci foi um dos primeiros a se surpreender com os padrões regulares das plantas; Nehemiah Grew, notável botânico, declarou que as plantas são um incentivo para pesquisas matemáticas; Goethe é o autor da famosa teoria da metamorfose das folhas. Esses foram alguns marcos no avanço das relações Matemáticas na botânica.

Para entendermos a Filotaxia, precisamos conhecer alguns de seus objetos de estudo, e o faremos baseado nas definições de Ferri (2006):

1) Caule – é o elemento de ligação entre as raízes e as folhas. Possui, em seu interior, um sistema de tubos, os vasos lenhosos e liberianos, que se encarregam do transporte de materiais, em ambos os sentidos, entre a copa e o sistema radicular. Além disso, suportam o peso da copa, no que são auxiliados por fibras que lhe dão grande resistência.

Distingui-se da raiz por apresentar, além das folhas, gemas ou botões vegetativos, os quais, ao se desenvolverem, darão origem a ramos e a novas folhas.

2) Folha – é o órgão da planta onde a elaboração dos alimentos orgânicos, em presença de luz (fotossíntese), se processa com maior intensidade. Para isso é dotada de um pigmento verde, a clorofila, com a capacidade de fixar energia luminosa, energia essa utilizada no preparo de material orgânico a partir de substâncias inorgânicas simples, como água e gás carbônico. A água, absorvida do solo pelas raízes, chega até as folhas através dos vasos que aí formam um sistema de nervuras. O gás carbônico é absorvido diretamente do ar atmosférico e se difunde na folha através de pequenos orifícios, somente visíveis com o auxílio do microscópio, os estômatos.

Para melhor realizar a fotossíntese, a folha deve possuir uma superfície grande. Assim se compreende a existência do limbo ou lâmina foliar. Essa se prende ao caule, muitas vezes, por uma parte geralmente cilíndrica mais resistente, o pecíolo, cuja inserção no caule pode ser direta ou através de uma expansão mais ou menos desenvolvida, a bainha.

Com o conhecimento das funções do caule e das folhas podemos chegar a conclusão de que uma planta qualquer para sobreviver precisa, entre outras coisas, da luz. E nessa busca, o caule tende a se ramificar, distribuindo galhos e folhas em uma disposição que potencialize a exposição à luz. Esse arranjo e crescimento possuem os padrões que Leonardo da Vinci observou e que a filotaxia buscou teorizar. Esses padrões variam de uma espécie para outra. Os três padrões possíveis de filotaxia são: oposta, verticilada e alterna.

O padrão de filotaxia que mais nos interessa nesse trabalho é o padrão de filotaxia alterna. Esse padrão se caracteriza pela presença de só uma folha em cada nó. Nesse caso, em um galho de folhas ainda verdes, as folhas parecem estar em um padrão aleatório. Vamos traçar um fio imaginário, partindo do ponto de inserção de uma folha, girando ao redor do caule, passando por todas as hastes pelo caminho mais curto e seguindo até chegar a uma folha que esteja aproximadamente sobreposta à primeira. Assim como a folha 3 e 11, na Figura 30:

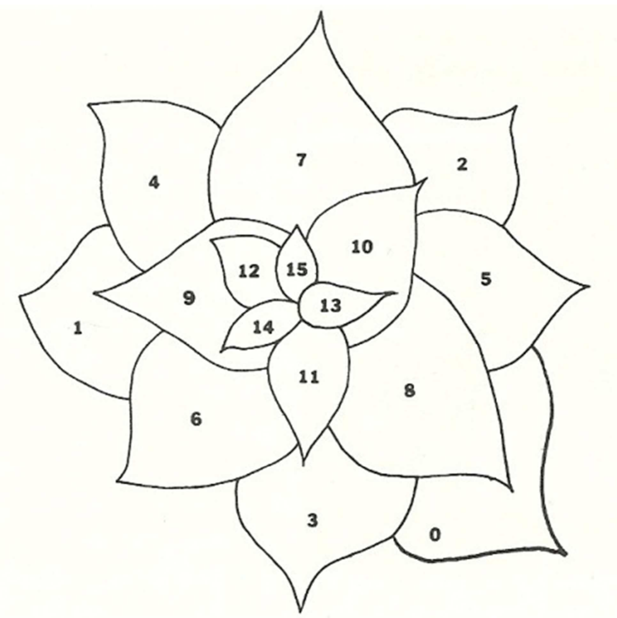


Figura 31 – Folhas sobrepostas (vista superior).
Fonte: Jean, 1984, p. 4.

Tocando todos os pontos de inserção de folhas ao longo do caminho, essa linha imaginária terá descrito uma hélice. Unindo-se verticalmente folhas superpostas obtêm-se linhas chamadas ortósticas. A linha que percorre a planta na Figura 31 é uma ortóstica.

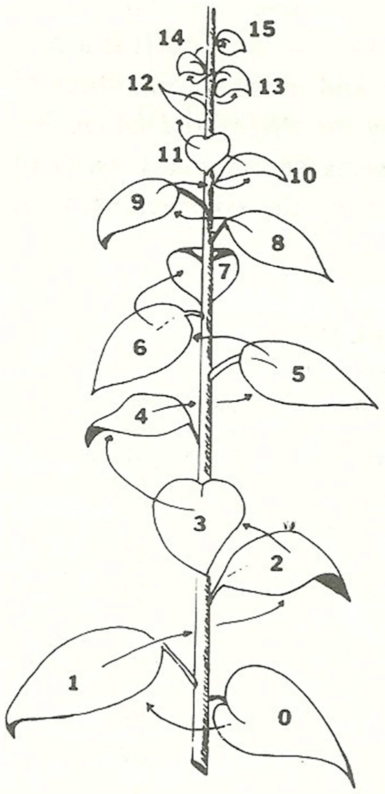


Figura 31 - Folhas sobrepostas (vista frontal).
Fonte: Jean, 1984, p.10.

Divergência é, segundo Huntley (1985), o termo técnico empregado para descrever a separação angular das bases de duas folhas sucessivas no caule, medida através de uma espiral. A disposição das folhas pode enquadrar uma espécie em um determinado gênero. Na Figura 31, tomando p como o número de voltas da espiral e q como número de bases de folhas pelas quais a espiral passou (a primeira folha deve ser desconsiderada, ou adotada como 0), portanto, temos que $\frac{p}{q}$ será a razão que determina a divergência de uma espécie.

Seguindo ainda o exemplo da Figura 31, a espiral partindo da folha de número 0, completa três giros completos até alcançar a folha de número 8 que está superposta a folha de número 0, portanto sua divergência é $\frac{3}{8}$.

4.1 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA BOTÂNICA

Os números da sequência de Fibonacci surgem inúmeras vezes e de diferentes maneiras na botânica. Na razão de divergência das plantas, no número de pétalas de uma flor, no número de galhos em cada camada de uma Espirradeira (*Achillea ptarmica*), na quantidade de espirais de um girassol ou de uma pinha, entre outras.

Como dito anteriormente, costuma-se representar a filotaxia por uma razão, cujo numerador é dado pelo número de voltas completas que um fio imaginário irá descrever de uma folha até outra que esteja sobreposta ou superposta à primeira, e o denominador será o número de folhas, levando-se em conta a menor distância pelas quais o fio irá passar. Essa será a razão de divergência de uma determinada espécie. As divergências mais frequentes são $\frac{1}{2}$ (dística), $\frac{1}{3}$ (trística), e as de índice $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}$ e $\frac{8}{21}$. Todas essas razões estão entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$. Sabemos que todos os inteiros presentes nas razões anteriores pertencem a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... que é a sequência de Fibonacci.

Vejamos algumas dessas divergências:

Divergência $\frac{2}{5}$

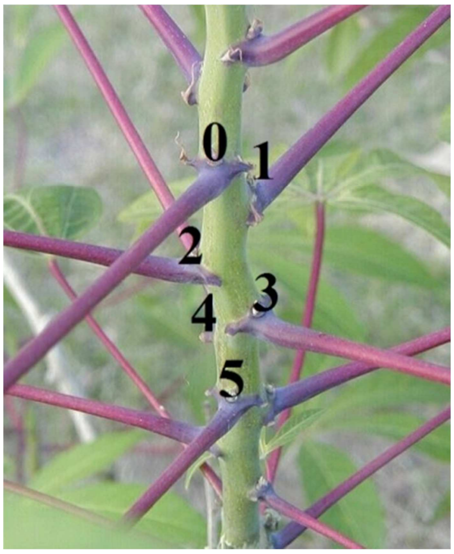


Figura 32 - Mandioca (*Manihot esculenta*).
Fonte: Disponível em: <http://www.feiradeciencias.com.br/sala26/26_feira_02.asp>.
Edição: O Autor.

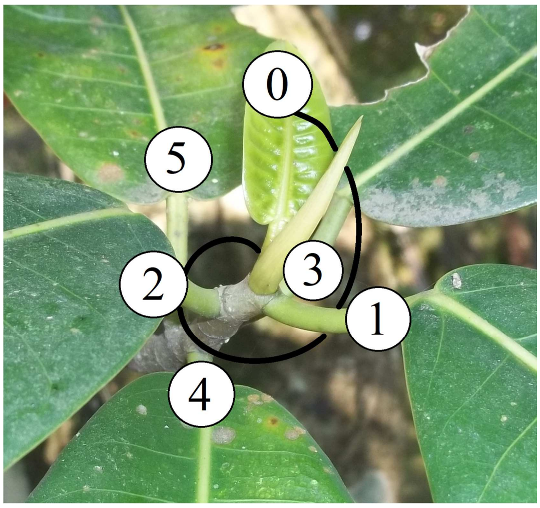


Figura 33 - Carvalho Branco (*Quercus sp.*).
Fonte: O Autor.

Divergência $\frac{3}{8}$

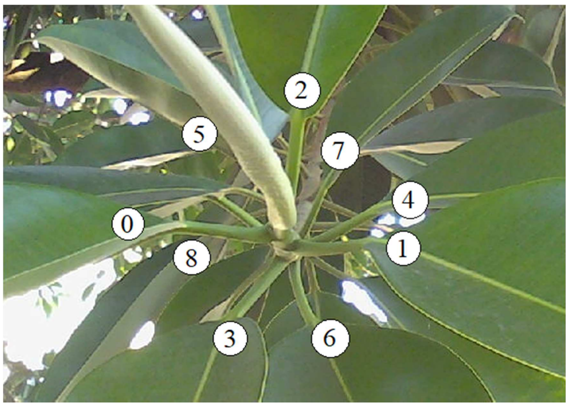


Figura 34 – Divergência $\frac{3}{8}$.
Fonte: O Autor.

Outros exemplo das divergências mais comuns são:

$\frac{1}{2}$ = tílias americanas (*Tília americana*), gramíneas comuns;

$\frac{1}{3}$ = aveleira (*Corylus avellana*), amoreira (*Morus nigra*), faia (*Fagus grandifolia*), ciperáceas;

$\frac{2}{5}$ = carvalho (Quercus), damasqueiro (*Prunus armeniaca*), roseiras (*Rosa spp.*), pessegueiro (*Prunus pérsica*), frutíferas (como a macieira);

$\frac{3}{8}$ = pereira (*Pyrus communis*), salgueiro chorão (*Salix chilensis*), alcachôfra-dos-telhados (*Sempervivum tectorum*), linho (*Linum usitatissimum*), tanchagens;

$\frac{5}{13}$ = dente-de-leão (*Taraxacum officinale*), verbasco (*Verbascum phlomoides L.*), Artemísia (*Artemisia vulgaris*), bonina ou margarida (*Bellis perennis*), solidago (*Solidago microgrossa DC.*), liliáceas;

$\frac{8}{21}$ = posicionamento folhear de isatis (*Isatis tinctoria L.*) e principalmente coníferas e domina a ordenação das pinhas.

A razão de divergência pode ainda, ser planificada, fornecendo assim a espiral geratriz. Essa forma de respresentação serve principalmente para representar o ângulo correspondente a cada divergência e será melhor apresentada no tópico 4.3.

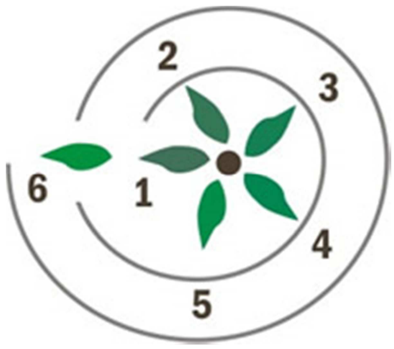


Figura 35 – Divergência $\frac{2}{5}$.
Fonte: Disponível em: <http://www.republicaeditorial.com.br/?p=594>.

A sequência de Fibonacci surge de uma forma ainda mais bela e colorida nas pétalas de rosas e flores, tais como:
Íris – 3 pétalas (Figura 36)
Primavera – 5 pétalas (Figura 37)
Cosmo Amarelo – 8 pétalas (Figura 38)
Tasneira – 13 pétalas (Figura 39)
Margarida – 21 pétalas (Figura 41)
Margarida – 34 pétalas (Figura 42)
Margarida – 55 pétalas (Figura 43)

Figura 36 – Íris Azul – 3 pétalas (*Moraea villosa*).
Fonte: Disponível em: <https://www.pacificbulbsociety.org/pbswiki/files/Moraea/Moraea_villosa_br3.jpg>.

Figura 37 – Primavera lilás – 5 pétalas (*Bougainvillea*).
Fonte: Disponível em: <https://pixabay.com/pt/flor-primavera-natureza-p%C3%A9talas-488954/>.

Figura 38 – Cosmo Amarelo – 8 pétalas (*Cosmos sulphureus*).
Fonte: Disponível em: <http://www.meucantinhoverde.com/2012/04/cosmos-amarelo-cosmos-sulphurea.html>.

Figura 39 – Tasneira – 13 pétalas (*Senecio lividus*).
Fonte: Disponível em: <http://www.pbase.com/valterj/olympus_omd_em5>.

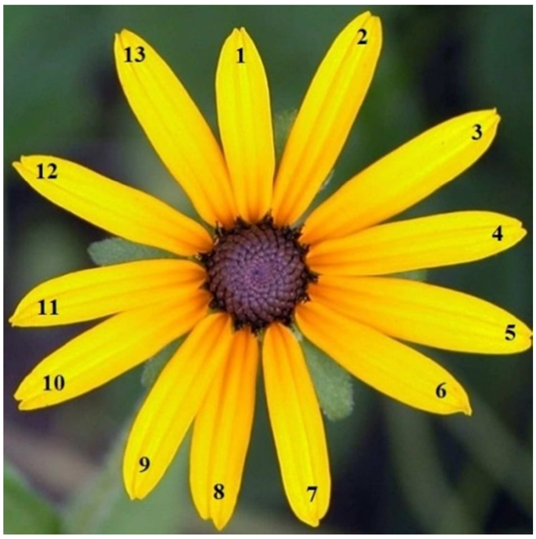


Figura 40 – Margarida 13 pétalas.
Fonte: Disponível em: <http://ultradownloads.uol.com.br/papel-de-parede/Margarida-Amarela/>. Edição: O Autor.

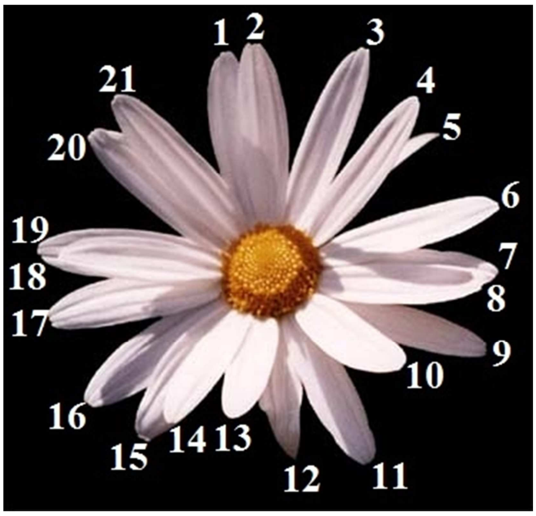


Figura 41 – Margarida 21 pétalas.
Fonte: Disponível em: <http://flowerpower.blogs.sapo.pt/arquivo/2004_07.html>.
Edição: O Autor.

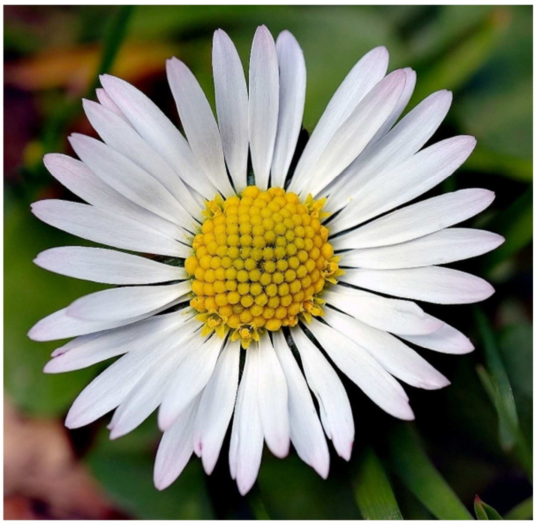


Figura 42 – Margarida 34 pétalas.
Fonte: Disponível em: <https://healthplantsshop.com/nl/bellis-perennis-madeliefje-volgroeide-plant-in-17-cm-pot>.

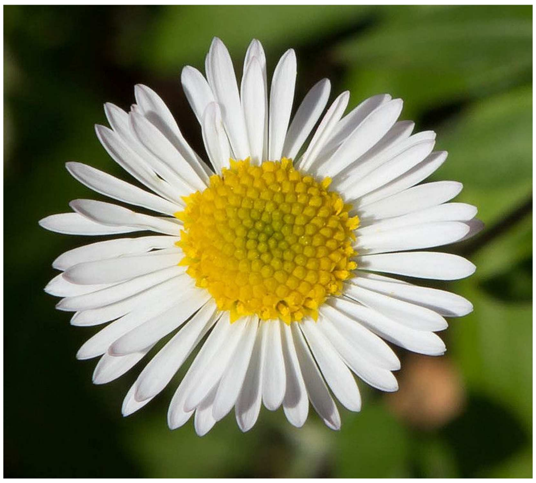


Figura 43 – Margarida 55 pétalas (*Erigeron Karvinskianus*).
Fonte: Disponível em: <https://healthplantsshop.com/nl/bellis-perennis-madeliefje-volgroeide-plant-in-17-cm-pot>.

Muitas rosas ao serem dissecadas também exibem uma quantidade de pétalas pertencente à sequência de Fibonacci. Os Trevos normalmente possuem 3 pétalas, as Granolas e os lírios possuem 5 pétalas, entre outras diversas espécies.

Um caso mais incomum e que possui certa dificuldade de percepção, é a presença da sequência de Fibonacci no número de axilas (bifurcações dos galhos) de uma planta ou árvore.

O caso mais comum dessa presença é visto na Espirradeira (*Achillea ptarmica*), na qual podemos visualizar diversos níveis que apresentam números de galhos pertencentes à sequência de Fibonacci, como no esquema (Figura 44):

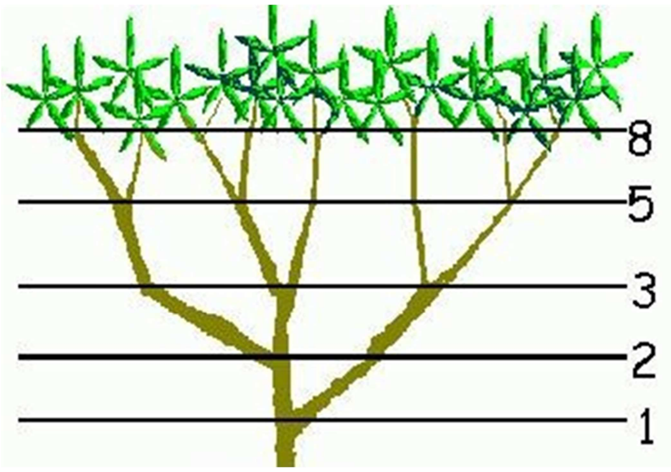


Figura 44 – Espirradeira (*Achillea ptarmica*).
Fonte: Disponível em: <http://universodagil.blogspot.com/2011/08/divina-proporcao-proporcao-aurea-numero.html>.

Mesmo em plantas primitivas, como a alga (*Fucus spimlis*), essa sequência pode surgir. Nesse caso, a Fucus, uma alga marinha, cria uma espécie de simetria baseada na sequência para poder se equilibrar e resistir melhor aos movimentos marinhos.

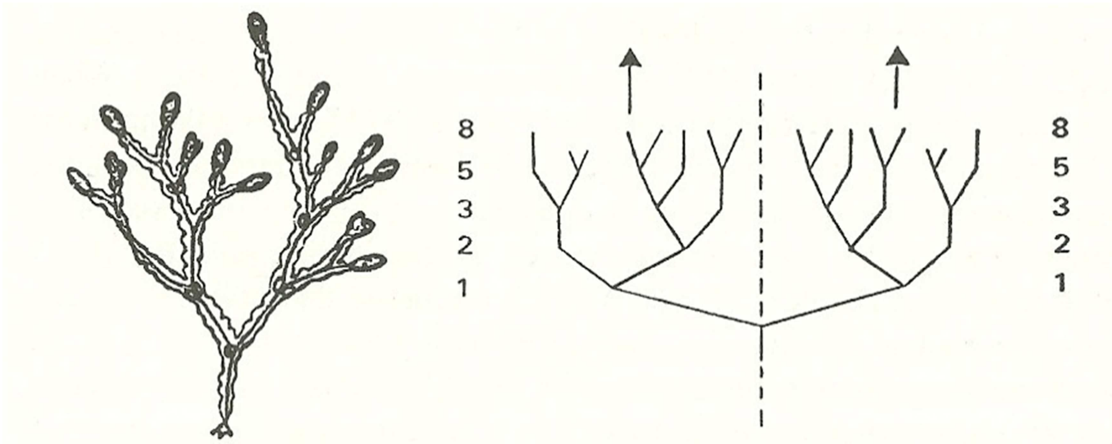


Figura 45 – (*Fucus spimlis*).
Fonte: Jean, 1984, p.142.

Contudo, o caso mais belo e surpreendente do aparecimento dos números de Fibonacci na Botânica, fica por conta do número de espirais, *parastichies*, presentes no abacaxi, nas pinhas e no girassol.

Sobre o abacaxi (*Ananas comosus L. Merril*) cita Lívio (2009, p. 131) “Os abacaxis de fato fornecem uma manifestação verdadeiramente bela de filotaxia baseada em Fibonacci”. Um abacaxi possui escamas hexagonais, e cada uma é parte de três diferentes espirais. Dessas espirais, oito sobem paralelas da esquerda inferior para a direita superior de forma suave, outras treze sobem com um ângulo mais inclinado da direita inferior até a esquerda superior, por fim, outras vinte e uma são muito inclinadas e sobem da esquerda inferior para a direita superior. A Figura 46 demonstra essas espirais:

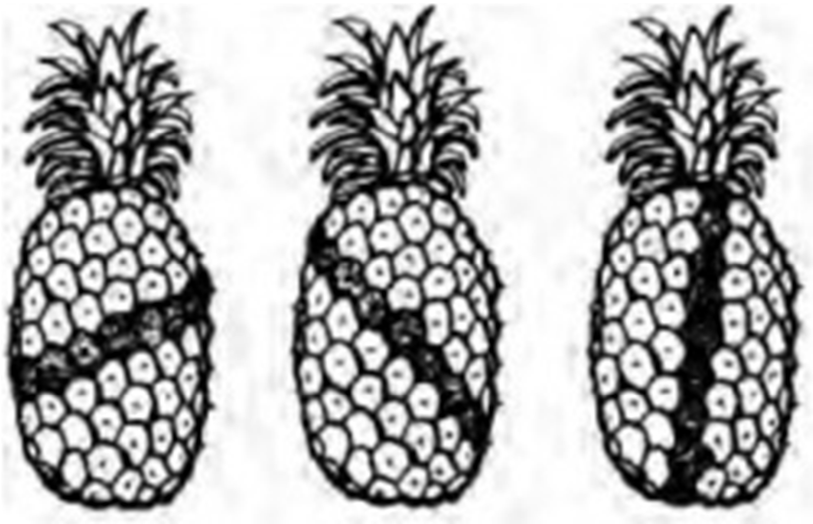


Figura 46 – Abacaxi (*Ananas comosus L. Merril*).
Fonte: Lívio, 2009, p. 131.

Em diversas espécies de pinheiros a Razão Áurea também pode ser observada através dos números de Fibonacci. As pinhas, frutos que podem variar de formato dentro da família dos pinheiros, possuem duas espirais concorrentes de sementes. Uma dessas espirais cresce no sentido horário, enquanto a outra cresce no sentido anti-horário. Assim como no abacaxi, o número dessas espirais é diferente. Sendo expressos por dois números da sequência de Fibonacci. Os números encontrados são: 2, 3, 5, 8, e 13.

Como vimos ao longo de trabalho, quando dividimos dois números consecutivos da sequência, nos aproximamos do valor do número áureo. Essa aproximação tende a se tornar mais precisa quanto maior forem os números utilizados na razão. Na espécie (*Pinus pinaster*), comum em regiões serranas, esses números variam de acordo com o tamanho da pinha. As Figuras 47 e 48 apresentam as espirais horárias e anti-horárias de uma mesma pinha, onde a razão entre ambas é 1,625000, que tende a se aproximar do valor de Φ.

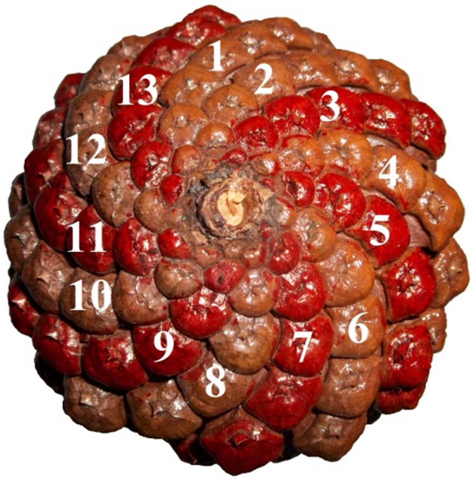


Figura 47 – Pinha com 13 espirais no sentido horário.
Fonte: O Autor.
Fonte de Inspiração: <http://www.mat.uc.pt/~mat0839/fibo.html>.

Figura 48 – Pinha com 8 espirais no sentido anti-horário.
Fonte: O Autor.
Fonte de Inspiração: <http://www.mat.uc.pt/~mat0839/fibo.html>.

Talvez a mais impressionante aparição dos números da sequência de Fibonacci, e consequentemente da Razão Áurea, seja apresentado nos girassóis (*Helianthus annuus*).

Assim como o abacaxi e a pinha, o girassol também é associado a Razão Áurea devido as suas espirais. O diferencial está no fato de que nos girassóis, essa presença consegue se aproximar do número áureo de uma forma mais bela e discreta.

Segundo Jean (1984, p. 2): “Church observou em 1899 em Oxford um enorme girassol, 56 cm de diâmetro, com 144 + 233 parastichies; O'Connell (1951) relata ter encontrado este padrão em uma amostra em Vermont”.

A razão no número de espirais do girassol, 233 e 144, se aproxima de Φ com precisão de quatro casas decimais após a vírgula (1,6180).

Jean (1984, p. 9), determina uma tabela com o número de espirais horárias e anti-horárias que variam de acordo com o tamanho do girassol como apresentado na Tabela 1:

TABELA 1 - **A Filotaxia do Girassol (Jean, 1978)**

Tamanho da Flor do Girassol	Número de Espirais	
	Sentido Horário	Sentido Anti-horário
Muito Pequena	13	21
Pequena	21	34
Normal (14 – 15 cm de diâmetro)	34	55
Grande	55	89
Muito Grande	89	144
Enorme (≅ 55 cm de diâmetro)	144	233

Fonte: Jean, 1984, p. 9.

A Figura 49 mostra o esquema de um girassol e suas diagonais:

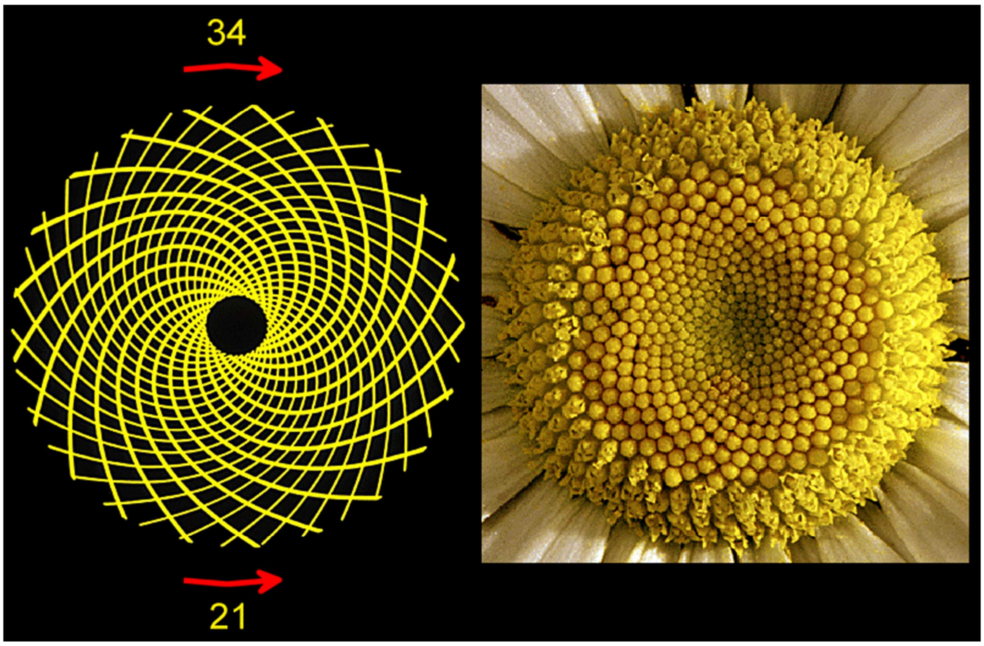


Figura 49 – Girassol (*Helianthus annuus*).
Fonte: Disponível em: <stoa.usp.br/franklinpda/files/-1/5834/ApresentacaoRazaoAurea.ppt>.

Esses são alguns belos casos onde os números de Fibonacci surgem na botânica. A maioria desses casos continua como um mistério para botânicos e matemáticos. No caso das espirais, mais especificamente do girassol, acredita-se que a disposição dos seus flósculos em padrões espirais, tende a maximizar a ocupação da área horizontal. Sendo assim, uma mesma área pode abrigar mais sementes e aumentar a difusão da espécie.

4.2 O SEGMENTO ÁUREO NA BOTÂNICA

O crescimento das plantas ocorre na ponta do caule (meristema). O formato do meristema é cônico, e o caule tende a ser mais grosso quanto mais perto da raiz estiver. Portanto, conforme o caule se desenvolve, cada folha mais antiga tende a estar mais afastada radialmente do centro do caule, como mostra a Figura 50:

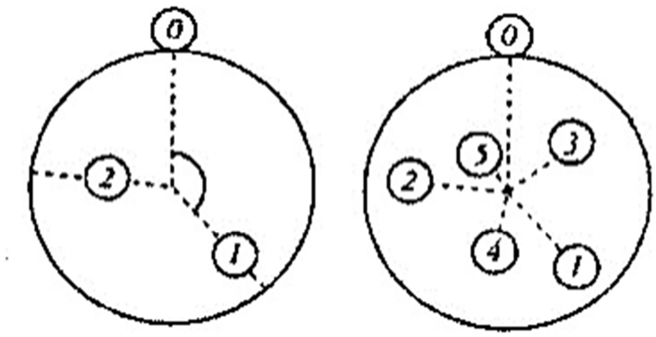


Figura 50 – Distanciamento das folhas do centro do caule.
Fonte: Lívio, 2009, p. 131.

Esse fato parece bem lógico se levarmos em conta a principal função das folhas, que é a de realizar a fotossíntese. E, portanto, precisam receber a maior quantidade de luz possível. Logo, além do ângulo de divergência, as folhas tendem a se afastar radialmente do centro do caule.

Esse afastamento é proporcional ao crescimento da planta, e assim, as folhas tendem a estarem mais distantes na base do caule e mais próximas na zona do meristema.

A Figura 51 apresenta o distanciamento entre as folhas conforme se aproxima da raiz. Esses segmentos são baseados na razão extrema e média, que define a Razão Áurea.

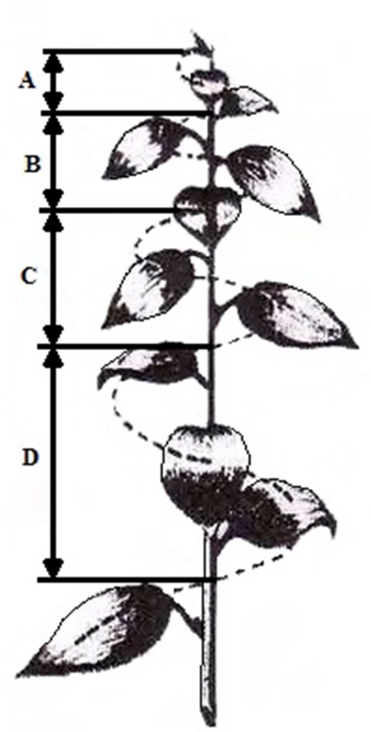


Figura 51 – Segmento áureo a partir do meristema.
Fonte: Disponível em: <http://riwersun-math.blogspot.com/2010/10/razao-aurea.html>.

Assim, a cada giro completo da espiral imaginária, podemos traçar um segmento. Esses segmentos são tais que o antecessor será sempre maior que sucessor na Razão Áurea. Portanto, $\frac{D}{C} = \frac{C}{B} = \frac{B}{A} = 1{,}618 \ldots$

4.3 O ÂNGULO ÁUREO NA BOTÂNICA

De acordo com as divergências mais comuns podemos determinar os ângulos formados pelas folhas em cada uma delas. Como já apresentamos, todas as razões de divergência $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}$ e $\frac{8}{21}$, na verdade estão no intervalo entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, que também são divergências muito comuns na natureza.

Para determinarmos o ângulo de divergência entre as folhas de uma espécie, precisamos projetar o arranjo das folhas em um plano como mostra a Figura 52:

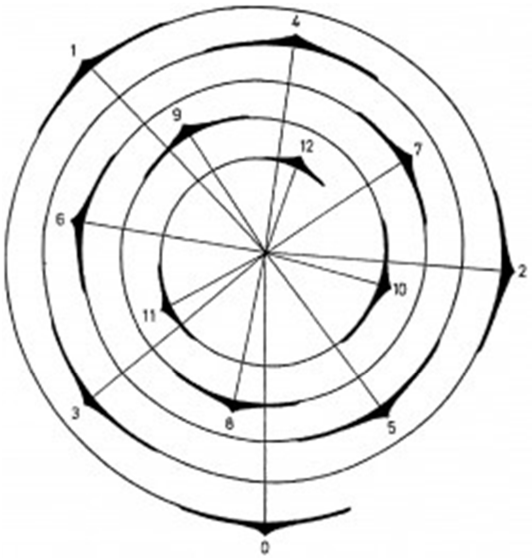


Figura 52 – Arranjo das folhas planificado.
Fonte: King; Beck; Lüttge. On the mystery of the golden angle in phyllotaxis. Disponível em: <http://tinyurl.com/32ny6wt>.

Quando ligamos cada folha, desde a mais antiga até a mais nova, por uma linha, obtém-se a espiral geratriz. Unindo cada folha com linhas que vão até o centro do caule, ou da espiral, podemos determinar ângulos entre as folhas consecutivas. Esse ângulo representa a divergência entre ela e recebe o nome de ângulo de divergência.

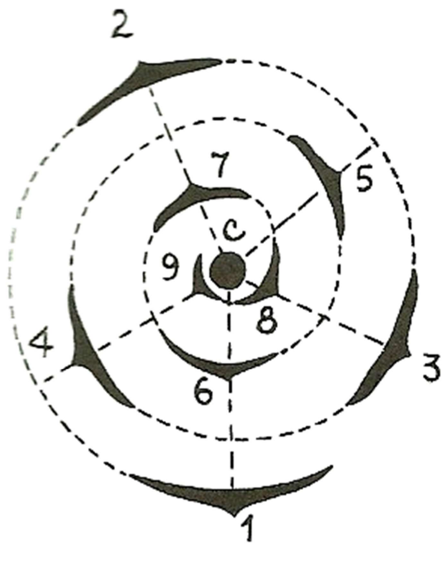


Figura 53 – Filotaxia $\frac{2}{5}$ planificada.
Fonte: Ferri, 2006, p. 51.

Na filotaxia da Figura 53, $\frac{2}{5}$, o ângulo de divergência é 144° (ângulo aferido entre as folhas 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4, etc).

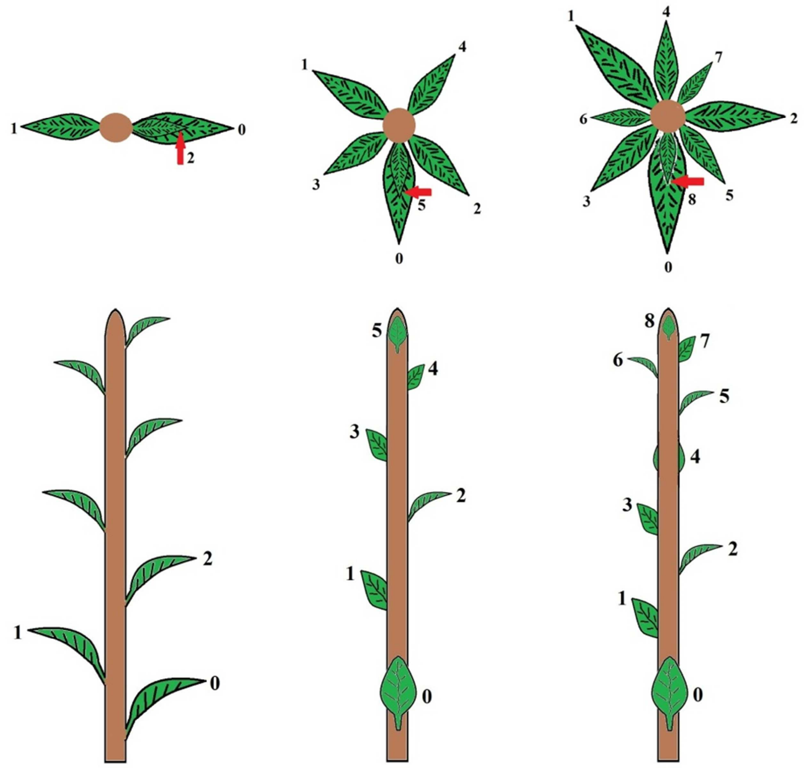


Figura 54 – Divergências $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$.
Fonte: O Autor.
Fonte de Inspiração: Ferri, 2006, p. 51.

As filotaxias mais comuns possuem os seguintes ângulos de divergência:

½	$^{1}/_{3}$	$^{2}/_{5}$	$^{3}/_{8}$	$^{5}/_{13}$	$^{8}/_{21}$	$^{13}/_{34}$
180º	120º	144º	135º	138º28''	137º9''	137º39''

Segundo Huntley (1985, p. 158) “estas frações são as convergentes da fração contínua:

$$\mathbf{1}/\mathbf{2} + \mathbf{1}\Big/(\mathbf{1}+) + \mathbf{1}/(\mathbf{1}+) + \cdots$$

Ou

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{1} + \cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \cdots}}}}}$$

Percebemos que os valores das razões de Filotaxia se aproximam rapidamente de um determinado ângulo. Uma continuação ilimitada dessas razões poderia ser obtida somando sempre o numerador e o denominador das duas razões anteriores. Nesse caso, o limite da sequência formada por essas razões seria um ângulo de Filotaxia determinado pelo resultado da razão cujo limite tende a 1,618.

Então o valor limite resulta na divisão da circunferência segundo a Razão Áurea, que corresponde a 137°30’28’’, o qual já definimos. No tópico 3.4 uma forma mais simples de se obter o ângulo áureo foi apresentada.

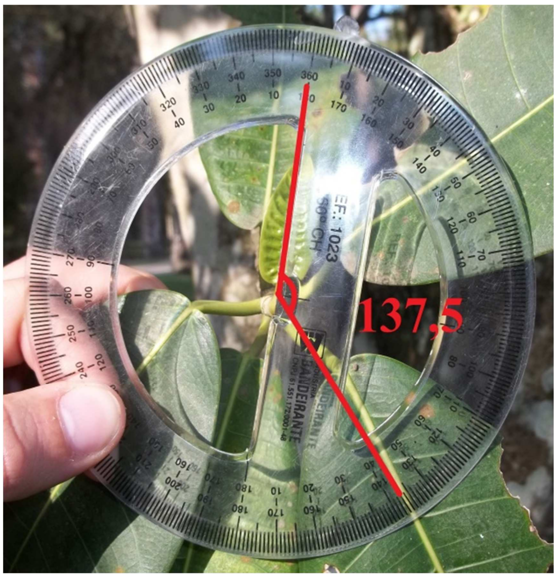


Figura 55 – Ângulo Áureo.
Fonte: O Autor.

4.4 A ESPIRAL LOGARÍTMICA NA BOTÂNICA

A espiral logarítmica não é menos presente que qualquer um dos elementos anteriores apresentados nesse capítulo. Isso porque se em uma pinha o número de espirais são membros da sequência de Fibanocci, devemos também perceber que aquelas não são espirais comuns e que o mesmo acontece no girassol. Todas essas são espirais logarítmicas.

Vamos lembrar a definição de espiral logarítmica: a cada aumento no comprimento, ocorre um crescimento proporcional no raio, desse modo a sua curva e forma se mantém inalterada.

Essa característica garante que as espirais da pinha ou do girassol sempre crescerão mantendo a possibilidade de todas as outras espirais crescerem na mesma proporção, sem tomarem espaço umas das outras.

Figura 56 – Cactus Rotorua (*Euphorbia sp.).*
Fonte: Disponível em: <http://blog.lib.umn.edu/victor/hereandthere/2008/09/cactus.html>.

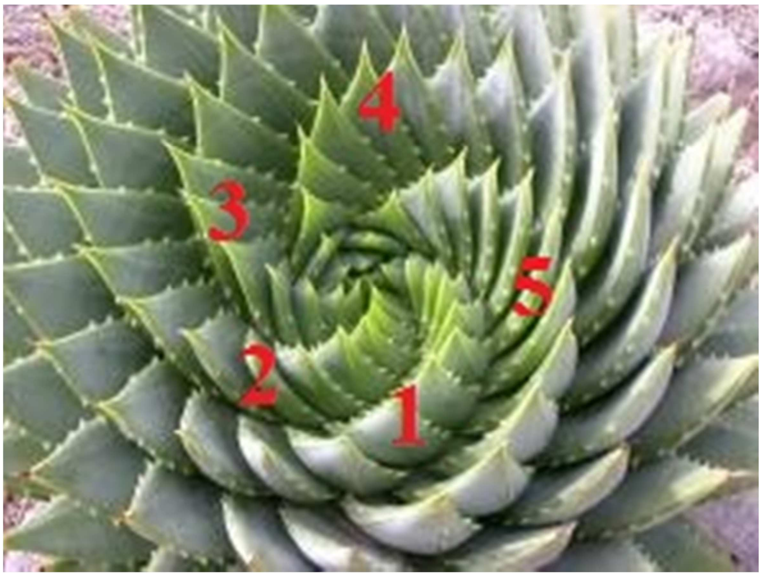


Figura 57 – Cactus Rotorua (*Euphorbia sp.).*
Fonte: Disponível em: <http://haaguaemmat.blogs.sapo.pt/arquivo/2005_09.html>.
Edição: O Autor.

Na Figura 57, além da espiral apresentada pelo Cactus Rotorua (*Euphorbia sp.*) ser logarítmica, e nesse tipo de espiral já conhecermos as diversas relações com a Razão Áurea, é possível perceber a quantidade dessas espirais, que são 5, um número da sequência de Fibonacci.

Um caso mais comum ocorre nas folhas de algumas bromélias. Essas folhas crescem a partir do interior. O desenrolar de sua espiral nos permite fazer uma bela associação como mostra a Figura 58:

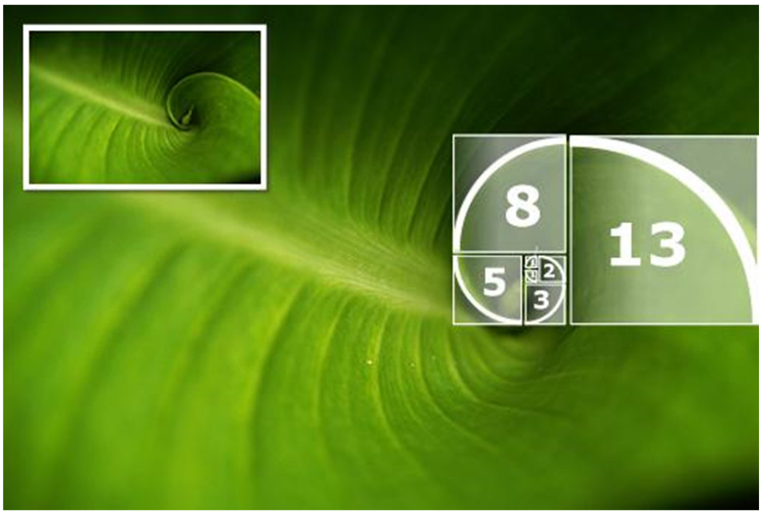


Figura 58 – Folha de Bromélia (*Bromelia* sp.).
Fonte: Disponível em: <http://www.grupoescolar.com/pesquisa/a-sequencia-de-fibonacci.html>.

Como mostrado no tópico 3.5, essa espiral possui uma ligação muito íntima com a Razão Áurea, e o exemplo da Figura 58 nos permite visualizar esse fato.

4.5 TEORIAS SOBRE A FILOTAXIA

Em livros de Botânica, como em Ferri (2006), existem apresentações puramente teóricas para todas as relações demonstradas até agora neste trabalho entre a Matemática e a Botânica. Diversas teorias e experimentos buscam comprovar os padrões de morfogênese das plantas, bem como entender o porquê desses padrões. Pouco se tem provado e muito ainda não passa de especulações.

Segundo Lívio (2009), existem duas linhas principais que tentam explicar a associação da Matemática e da Botânica: teorias que se concentram na geometria da configuração e em regras Matemáticas simples que podem gerar essa geometria; e modelos que sugerem uma causa verdadeiramente dinâmica para o comportamento observado.

Um experimento dinâmico que se baseia na economia de energia é descrito por Lívio (2009):

> Experimentos em Física feitos por L. S. Levitov (em 1991) e por Stephane Douady e Yves Couder (de 1992 até 1996), mostraram um modelo fascinante. Eles mantiveram um prato cheio de óleo de silicone em um campo magnético que era mais forte perto da borda do prato do que no centro. Gotas de um fluído magnético, que agem como minúsculos imãs, eram pingadas periodicamente no centro do prato. Os pequenos imãs se repeliram e foram empurrados radialmente pelo gradiente do campo magnético. Douady e Couder observaram padrões que oscilavam e em geral convergiram para uma espiral em que o ângulo áureo separava as gotas sucessivas.

> Sistemas físicos geralmente se acomodam em estados que minimizam a energia. Portanto a evidência é de que a filotaxia simplesmente representa um estado de mínima energia para o sistema de folhas, de flósculos ou de botões de uma flor. (LÍVIO, 2009, p. 135)

Jean (1984) buscou formas mais teóricas e puramente Matemáticas, de definir quatro principais modelos para explicar a divergência das folhas e sua associação com a Matemática: difusão, pressões de contato, primeiro espaço disponível ou preenchimento do espaço, e sistema inibidor. Todos esses necessitam de um alto nível de conhecimento matemático e botânico, portanto, fogem a proposta desse trabalho, que tem caráter observacional. Ele definiu a morfogênese dando um exemplo similar aos experimentos de Levitov, Douady e Couder, que foi descrito por Lívio (2009). Esse sistema recebe o nome de Teoria da Difusão de Inibidor:

> Quando uma substância de cor, tais como permanganato de potássio, uma solução de iodo, ou uma gota de tinta, é colocado em um recipiente com água, um fenômeno de difusão tem início: em primeiro lugar, a substância é separada da água por um limite distinto, então as moléculas da substância tornam-se distribuídas na água uniformemente sob a ação de uma concentração gradiente. Onde a concentração é alta o número de moléculas tende a diminuir, e vale o inverso, seu número aumenta quando a concentração baixa. O movimento das moléculas da substância de cor sob a ação das moléculas de água não possuem qualquer preferência quanto ao sentido, é uma questão de puro acaso que elas se tornam distribuídas de maneira uniforme. Este processo aleatório de migração, de transferência de matéria dentro de um sistema, chega ao fim quando a densidade das moléculas é a mesmo em todos os lugares. Lehninger (1969) define difusão como a tendência das moléculas para se mover na direção da menor atividade de termodinâmica (concentração), de modo a atingir uma concentração uniforme, e uma entropia máxima, no sistema como um todo.
>
> Em 1913, Schoute, seguido por Richards em 1948, postulou que o meristema apical, onde cresce cada um dos primórdios, produz uma substância inibidora, cuja difusão evita a formação de novos primódios imediatamente ao seu redor, onde a concentração do inibidor é maior que um valor limite dado. Assim que a concentração do inibidor cai abaixo deste valor determinado em um ponto, um primórdio novo nasce.

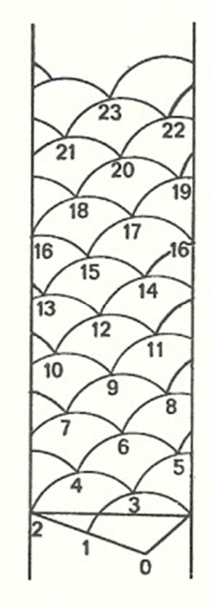


Figura 59 – Difusão do Inibidor.
Fonte: JEAN, 1984, p. 95.

> Na Figura 59, os arcos de círculos representam o limite da concentração do inibidor produzido pelos primórdios considerados como pontos. Um novo primórdio sempre surge com o menor ponto de interseção de dois ou três arcos. (JEAN, 1984, p. 94 e 95).

Existem outras inúmeras teorias sobre a filotaxia. Muitas foram descartadas, outras figuram em outros estudos. Porém, nesse capítulo, procuramos mostrar que a Matemática esta ligada a Botânica de uma forma muito mais complexa é teórica que o campo observacional e filosófico, que é o objetivo do nosso trabalho. Estudos criteriosos, com teoremas e equações buscam provar a união entre a mãe das ciências exatas e o mundo da Botânica em geral.

5 SUGESTÕES E APLICAÇÕES PARA O ENSINO DA RAZÃO ÁUREA CONTEXTUALIZADA

O objetivo desse capítulo é apresentar ao aluno uma Matemática bela e natural. Dessa forma, esperamos que o aluno enxergue a Matemática de uma forma menos abstrata, e muito mais real e próxima.

Esse capítulo está apoiado em diversas fontes teóricas, tais como os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) (1997) e BIEMBENGUT (1996). Mas também usou aplicações das atividades em sala de aula ao longo de três anos letivos (2015, 2016 e 2017) e as pesquisas baseadas nessas aplicações. Entre essas pesquisas, um formulário aplicado a 83 alunos de diferentes turmas e segmentos. O formulário, bem como os resultados da pesquisa constam no item 5.3 desse trabalho.

A Matemática é tida por muitos como uma matéria difícil por sua complexidade e sem aplicações. É preciso mostrar que inúmeras profissões como Astronomia, Biologia, Medicina e até História, abordam conhecimentos oriundos da Matemática.

Galileu Galilei descreve com perfeição a justificativa para esse trabalho:

> A Filosofia está escrita neste grande livro – refiro-me ao Universo – que se mantém continuamente aberto ao nosso escrutínio, mas que não pode ser compreendido, a menos que primeiro se aprenda a entender a linguagem e interpretar as letras com que foi escrito. Ele foi escrito na linguagem da Matemática, e sua escrita são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível entender uma palavra sequer dele. Sem elas, fica-se vagando em labirinto escuro. (LÍVIO, 2009, p. 271)

A Razão Áurea é um mistério que pode ser revelado e visto a qualquer momento onde menos se espera. E uma das intenções desse trabalho é usar a Razão Áurea como ferramenta atrativa ao conhecimento matemático, e dessa forma, motivar o aluno na busca e prazer pelo conhecimento.

A Razão Áurea pode ser utilizada como matéria complementar em diversas áreas, não só da Matemática, mas de diversas outras disciplinas.

Visando cumprir nosso objetivo, abordaremos temas que enfatizem a Botânica, porém, outras formas de contextualização serão exemplificadas.

5.1 A BOTÂNICA COMO TEMA TRANSVERSAL AO ESTUDO DA RAZÃO ÁUREA

Segundo os PCN's (1997), os temas transversais não são disciplinas novas, são conteúdos que devem ser incorporados às disciplinas já existentes visando que elas se enquadrem na "realidade" de cada aluno. Sendo assim esses temas tem por objetivo construir cidadãos mais interativos, conscientes da realidade e dos problemas sociais que os rodeiam. A esse tipo de inserção de conteúdo, damos o nome de tema transversal.

Um dos temas transversais sugeridos para uso em sala de aula é o Meio Ambiente. E dentro do meio ambiente podemos contextualizar a Botânica com grande facilidade na Matemática, como veremos nesse capítulo.

As formas algébricas e geométricas apresentadas até agora, com as quais podemos encontrar o Número de Ouro, assim como a sequência de Fibonacci não são as únicas formas de encontrarmos esse número. Esse trabalho mostrou que todas as formas anteriores são encontradas em abundância na Botânica.

Hoje se discute no meio acadêmico, formas de atrair a atenção e interesse dos alunos, buscando motivá-los. As novas tendências apontam para o fato de que devemos, como educadores, ensinar o aluno a aprender, e um desses recursos é a contextualização dos conteúdos com a realidade e interesse dos alunos, visando um melhor resultado na aprendizagem.

Na Matemática, a dificuldade de se obter resultados é acentuada. Existe uma preconcepção de que a Matemática é uma disciplina difícil, além de outros fatores como: professores com má formação, pais e responsáveis que sabem pouco de Matemática, e uma sociedade que se torna cada vez mais automatizada, e que vem perdendo conceitos primários e necessários ao aprendizado de Matemática.

Devemos lembrar que hoje as calculadoras, os celulares ou os computadores fazem os cálculos, mas somos nós, humanos, quem precisamos de conhecimento para programar tais máquinas e criar tais tecnologias. É importante saber lidar com esses equipamentos, mas é fundamental sabermos os cálculos que estão presentes por traz das simples teclas.

A Razão Áurea na Botânica é um bom tema para exemplificar que a Matemática está a nossa volta, apresentando ao aluno que aquela planta que ele tem em casa e que julgava simples e sem atrativos, pode gerar resultados positivos para a prática de ensino da Matemática.

Formas diversas, tais como: quadrados, retângulos, triângulos e espirais, noções de ângulos, construção de figuras geométricas, razões e proporções, números irracionais, entre outros temas que podem ser inseridos nesse contexto com facilidade. O melhor nesse caso, é que essa interdisciplinaridade está em todo lugar: no canto das calçadas, nos jardins de praças, no canteiro de um quintal, ou em uma imensa floresta. Uma sugestão por exemplo, seria um passeio a um parque florestal, onde os alunos poderiam procurar espécies conhecidas, onde possivelmente encontrariam a Razão Áurea, ou descobrir novas espécies baseados em conceitos que podem ter sido vistos previamente e aprimorados em campo.

Outro fato importante nessa combinação são os mitos por trás da Razão Áurea. O aluno ainda em uma fase cognitiva, repleta de imaginação e crenças ainda vivas, pode facilmente ser levado pelos mistérios existentes na Divina Proporção. Assim nessa fase ele absorveria a ideia de uma Matemática mais fascinante e presente no seu dia a dia.

A Botânica é apenas uma das facetas que podem ser exploradas e combinadas com a Razão Áurea para atrair a curiosidade do aluno e despertar sua motivação pelo conhecimento. Em quase todos os temas relacionados à Razão Áurea, encontramos mistérios e mitos, começando desde as proporções do nosso próprio corpo, passando por civilizações antigas e indo ao formato de imensas galáxias (LÍVIO, 2009 p.142). Cabe nesse caso, ao professor, despertar no aluno a curiosidade pela Botânica como tema transversal à Matemática. Atividades relacionadas entre Matemática e Botânica serão sugeridas no próximo tópico, mas vale ressaltar que devemos ser criativos e nos adequarmos a cada situação de acordo com a realidade da escola e principalmente do aluno, pois o mesmo é o centro do processo ensino-aprendizagem.

5.2 SUGESTÕES PARA O USO DA RAZÃO ÁUREA NA PRÁTICA DE ENSINO

Elaboramos e relacionamos algumas atividades para utilização da Razão Áurea como ferramenta didática, algumas das quais aplicamos em sala de aula, e passaremos aqui a experiência com essas atividades.

5.2.1 Como tema de pesquisa

Atividade – Arcos, ângulos e trigonometria no círculo.

Público Alvo: 2° ciclo do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Material: Diversas fontes de pesquisa, principalmente a internet.

A Razão Áurea é desconhecida para a maioria da população. Assim sendo, uma pesquisa poderia ser uma ferramenta de descoberta aos alunos.

Essa forma de primeiro encontro com a Razão Áurea pode ser interessante pela riqueza de mistérios que o aluno até então não imaginava existir. Nessa forma de conhecimento o aluno vê o assunto sem preconceitos. Ele busca compreender e assimilar o assunto com as ligações cognitivas existentes. Em determinados ciclos de ensino, essa poderia ser uma forma de despertar no aluno o interesse pela Matemática.

Hoje sabemos que mesmo os segmentos mais carentes da população possuem acesso à internet, e sendo assim podemos utilizá-la como meio de pesquisa.

Quando o aluno em fase de construção de conhecimento tiver o contato com as misteriosas relações, verdadeiras ou não, das Pirâmides do Egito e de plantas que ele tem em casa com um mesmo número, ele irá começar uma busca pela Razão Áurea. Ele poderá imaginar que tudo ao seu redor possui uma relação Matemática. Portanto, a Razão Áurea pode ser uma ferramenta interessante nos primeiros anos do Ensino Fundamental.

Os temas dessa pesquisa podem ser diversos. Desde a pura e simples Razão Áurea, ou a sequência de Fibonacci, ou a presença da Matemática nas plantas, e até os mistérios da Divina Proporção.

O professor deverá verificar que os temas, assuntos discutidos e o nível de aprofundamento, irão variar de acordo com o ano trabalhado e o objetivo a ser alcançado.

Uma sugestão seria o professor utilizar o tema como pesquisa em sites de busca e assim, avaliar os resultados que seus alunos irão encontrar. Lembrando que o objetivo principal dessa pesquisa deveria ser a descoberta em si, e não o grau de aprofundamento utilizado.

5.2.1.1 Experiência em sala de aula

Público Alvo: Duas turmas de 3º Ano do Ensino Médio.
Escola: (Estadual) CIEP 210 – Mario Alves de Souza Vieira - Belford Roxo – RJ.
Quantidade de alunos envolvidos: Atividade em dupla, no total de 66 alunos.
Período: Entre outubro e novembro de 2017.

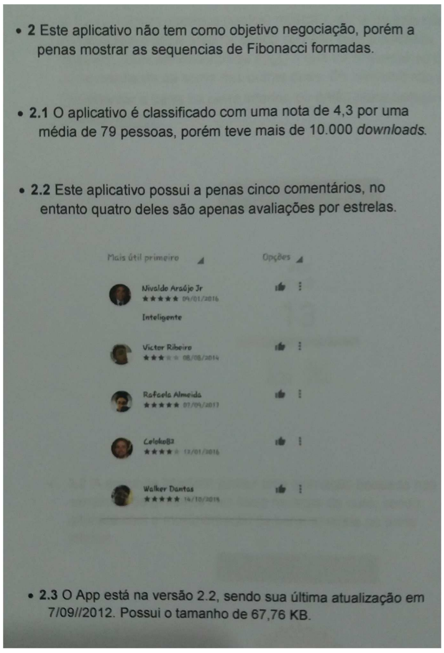
A atividade consiste em uma pesquisa por aplicativos de celular nas lojas virtuais, que se relacionassem com a Razão Áurea.

Após a pesquisa e download, os alunos deveriam avaliar o aplicativo, seguindo critérios e tópicos como:

* Categoria do Aplicativo;
* Número de downloads na loja virtual;
* Dados da patente;
* Objetivos do Aplicativo;
* Principais comentários dos usuários;
* Tutorial da interface do Aplicativo.

Os trabalhos foram produzidos seguindo normas básicas da ABNT, que dessa forma, começaram a ser introduzidas entre esses jovens, que normalmente, não tem contato com essas regras antes do ensino superior.

O trabalho foi proposto em duplas, para facilitar a fase crítica da avaliação. Cada dupla fez a apresentação e análise do aplicativo escolhido para a turma.



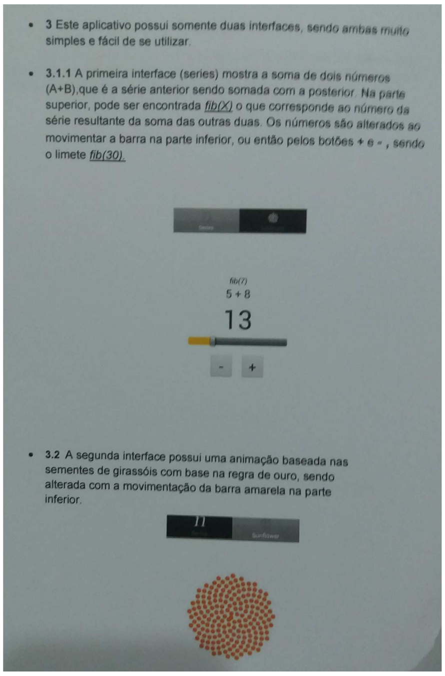
- **2** Este aplicativo não tem como objetivo negociação, porém a penas mostrar as sequencias de Fibonacci formadas.

- **2.1** O aplicativo é classificado com uma nota de 4,3 por uma média de 79 pessoas, porém teve mais de 10.000 *downloads*.

- **2.2** Este aplicativo possui a penas cinco comentários, no entanto quatro deles são apenas avaliações por estrelas.

- **2.3** O App está na versão 2.2, sendo sua última atualização em 7/09//2012. Possui o tamanho de 67,76 KB.

Figura 60 – Trabalho de Avaliação de Aplicativo Fibonacci Series.
Fonte: O Autor.



- 3 Este aplicativo possui somente duas interfaces, sendo ambas muito simples e fácil de se utilizar.
- 3.1.1 A primeira interface (series) mostra a soma de dois números (A+B),que é a série anterior sendo somada com a posterior. Na parte superior, pode ser encontrada fib(X) o que corresponde ao número da série resultante da soma das outras duas. Os números são alterados ao movimentar a barra na parte inferior, ou então pelos botões + e - , sendo o limete fib(30).

- 3.2 A segunda interface possui uma animação baseada nas sementes de girassóis com base na regra de ouro, sendo alterada com a movimentação da barra amarela na parte inferior.

Figura 61 – Trabalho de Avaliação de Aplicativo Fibonacci Series.
Fonte: O Autor.

5.2.2 Como pesquisa de campo

Atividade – Sequências, arcos, ângulos e trigonometria no círculo.

Público Alvo: 2° ciclo do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Material: Régua e transferidor.

Esse método pode ser realizado de duas maneiras: em grupos escolares, ou em pesquisa individual. Ambas visam o contato com as formas que apresentem Razão Áurea, e a própria visualização das mesmas.

Caso a forma escolhida seja a pesquisa em grupos escolares, fica recomendado que o professor visite antes o local de pesquisa. Seja um parque nacional, um horto, ou qualquer outra área escolhida, o professor precisa antes certificar-se da existência dos espécimes que apresentam Razão Áurea naquele local.

Uma opção seria o Jardim Botânico, onde árvores, folhas e flores podem ser vistas em larga escala e a segurança facilita o deslocamento em grupo. Escolher o Jardim Botânico, ou um horto, possui a vantagem de que o professor pode, com antecedência, buscar os espécimes desejados com facilidade e ajuda local.

Outra opção seriam os parques ecológicos, sejam federais, estaduais, municipais ou de iniciativa privada, que possuem um enorme acervo, mas que exige do professor um olhar mais atento e um planejamento estratégico mais bem elaborado junto às administrações dos respectivos parques.

Caso a forma escolhida seja a pesquisa individual, o público alvo deve ser o Ensino Médio, pois exige uma maior maturidade e conceitos mais desenvolvidos, além de ser uma pesquisa mais complicada pelo grau de independência.

Como foi citado, em ambas as formas o objetivo central é que o aluno perceba a Razão Áurea. Uma ideia interessante seria que os alunos levassem régua, transferidor e calculadora para o local da pesquisa.

Durante a pesquisa de campo os alunos podem recolher dados para a elaboração de um relatório previamente determinado. Além dos dados anotados e calculados, os alunos deveriam fazer fotos das espécies analisadas.

Nesse caso no relatório deveriam constar: data, local, foto e análise de cada espécie (nome vulgar, nome científico, razão de Filotaxia, ângulo de abertura entre as folhas, distância entre as folhas no caule, entre outras).

5.2.3 Como atividade interdisciplinar com Artes, Biologia e História

Atividade – Pesquisa teórica e produção de cartazes com temas interdisciplinares.

Público Alvo: 2° ciclo do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Material: Régua, transferidor, cola e cartolina, além de figuras previamente pesquisadas.

Essa atividade pode ser explorada somente pelo professor de Matemática, ou em conjunto com professores de outras disciplinas.

O professor de Matemática poderá previamente trabalhar os conceitos básicos da Razão Áurea e depois pedir para que os alunos pesquisem imagens para a produção dos cartazes, ou poderá trazer ele mesmo as O Autor e explorar o tema em sala de aula paralelamente com a produção dos cartazes.

Além da interdisciplinaridade, essa atividade traz como vantagem o grande apelo visual. Os alunos estarão em contato com as diferentes imagens não só durante a produção da atividade, mas também durante sua exposição, que pode ser na própria sala de aula, ou em uma área em comum da escola, ajudando assim, a divulgar a ideia na escola.

5.2.3.1 Experiência em sala de aula:

Público Alvo: 8º Ano do Ensino Fundamental.

Escola: (Estadual) CIEP 210 – Mario Alves de Souza Vieira - Belford Roxo – RJ.

Quantidade de alunos envolvidos: Atividade em grupo, no total de 22 alunos.

Período: Entre outubro e novembro de 2017.

Os alunos do 8º ano do ensino fundamental tiveram uma palestra sobre a Razão Áurea, com apresentação de slides e vídeos sobre o tema. Foram separados em grupos, ainda nesse primeiro contato, e sorteados temas para pesquisa de imagens.

Na aula seguinte, os alunos trouxeram as imagens e cartazes de diferentes temas foram confeccionados e expostos em sala de aula.

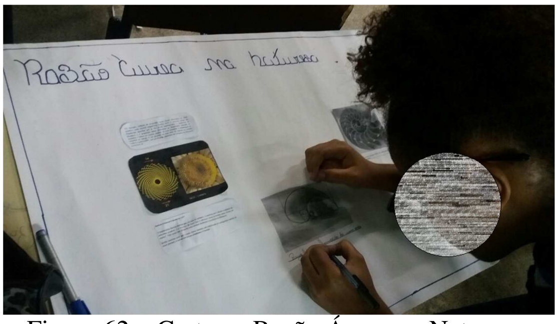


Figura 62 – Cartaz – Razão Áurea na Natureza.
Fonte: O Autor.

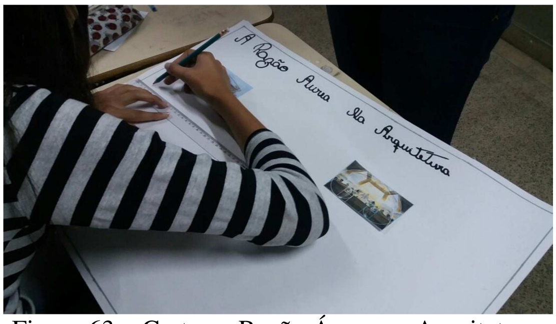


Figura 63 – Cartaz – Razão Áurea na Arquitetura.
Fonte: O Autor.

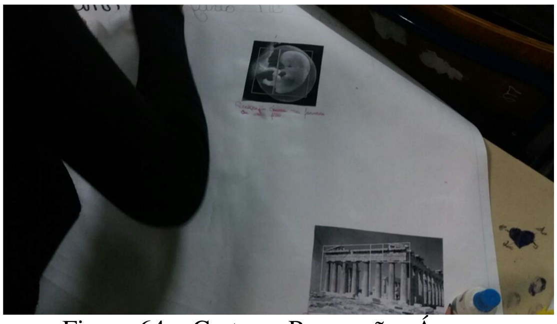


Figura 64 – Cartaz – Proporções Áureas.
Fonte: O Autor.

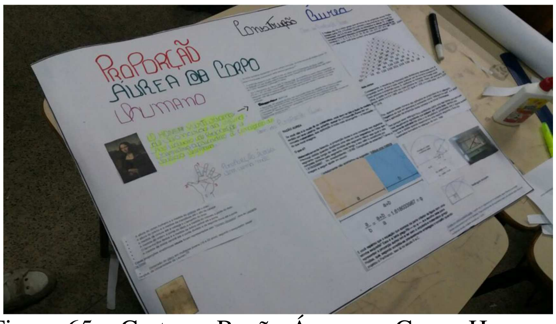


Figura 65 – Cartaz – Razão Áurea no Corpo Humano.
Fonte: O Autor.

5.2.4 Reforçando conceitos em sala de aula

Nesse tópico, irei utilizar largamente Biembengut (1996). Em seu livro ela relaciona diversas atividades que podem ser utilizadas em sala de aula, todas relacionadas à Razão Áurea. Utilizarei aqui, algumas dessas atividades.

5.2.4.1 Atividade 1 – Reforçando conceitos sobre: sistema de medida linear e divisão com números decimais.

Público Alvo: 5° e 6° ano do Ensino Fundamental.

Material: Fita métrica e/ou régua.

Desenvolvimento: Divida a turma em grupos e proponha:

a) Que cada aluno faça uma tabela no caderno, conforme a Tabela 2:

TABELA 2 – **Relação de Alunos e suas Medidas**

i	Nomes	Idade	Altura - a	Umbigo – chão - u	a/u	u/a
1	Maria	12	1,50 m	93 cm	150/93	93/150
2						

Fonte: BIEMBENGUT, 1996, p. 49.

b) Que meçam uns aos outros, no grupo, registrando as respectivas medidas na tabela;
c) Que dividam cada valor **a** (altura) por **u** (umbigo até o chão) e vice versa;
d) Peça também, que cada grupo verifique o resultado da divisão entre os colegas do grupo, e depois, compare com os demais;

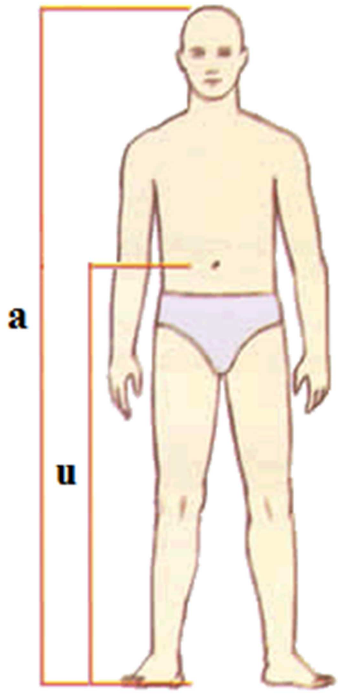


Figura 66 – Proporção áurea no corpo humano.
Fonte: Disponível em: <http://universodagil.blogspot.com/2011/08/divina-proporcao-proporcao-aurea-numero.html>.

A razão entre a altura e a medida do umbigo até o chão será a mesma para a maioria dos alunos. Use, para facilitar, apenas uma casa decimal depois da vírgula.

Não é necessário mostrar o valor do Número de Ouro (Razão Áurea). Apenas comente sobre a Razão Áurea, que por representar beleza e harmonia do corpo humano.

Segundo Biembengut, essa atividade permitirá que os alunos façam uma grande quantidade de divisões com números decimais de forma divertida.

5.2.4.2 Atividade 2 – Falando de números irracionais.

Público Alvo: 8° ano do Ensino Fundamental.

Material: Régua e compasso.

Desenvolvimento: Esta atividade pode ser subdividida em etapas; iniciando pelo desenho de um retângulo e depois um pentágono.

Retângulo Áureo com régua e compasso.

a) Proponha que tracem um quadrado ABCD de lado = 4u conforme a Figura 67;

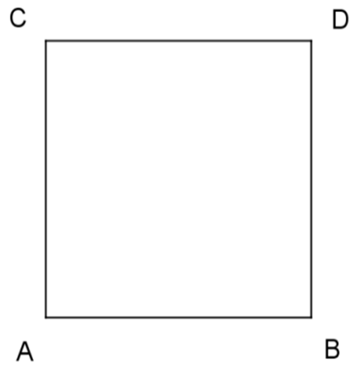


Figura 67 – Retângulo Áureo com régua e compasso – 1º Passo.
Fonte: O Autor.

b) Com uma régua, dividam o quadrado em duas partes iguais por um segmento $\overline{MN}$;

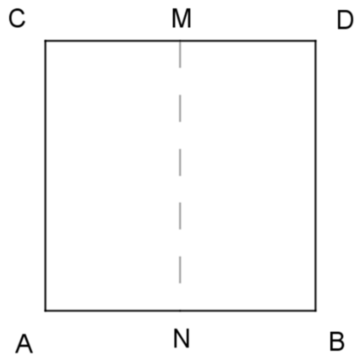


Figura 68 – Retângulo Áureo com régua e compasso – 2º Passo.
Fonte: O Autor.

c) Façam um arco DE, centrado em N e raio $\overline{DN}$;

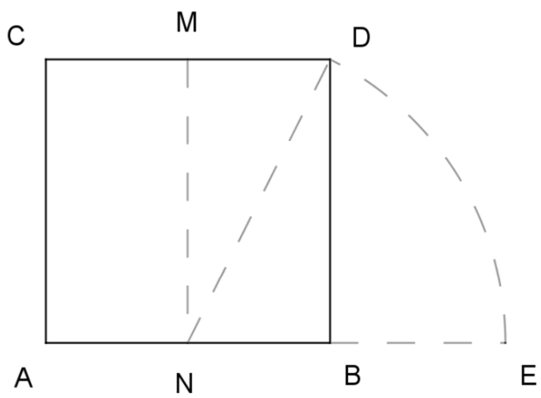


Figura 69 – Retângulo Áureo com régua e compasso – 3º Passo.
Fonte: O Autor.

d) Estendam o lado $\overline{AB}$ até interceptar o arco no ponto E e o lado $\overline{DC}$ e levantem uma perpendicular EF tal que, EF ⊥ AE.

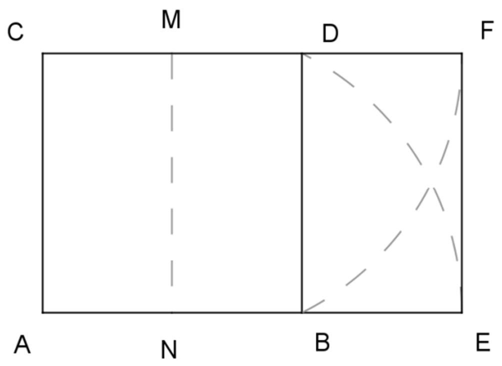


Figura 70 – Retângulo Áureo com régua e compasso – 4º Passo.
Fonte: O Autor.

O retângulo AEFC é áureo.

Feito o retângulo, peça aos alunos que tomem as medidas dos lados do retângulo (comprimento e largura) dividindo-as uma pela outra e vice versa.

Qualquer que seja a medida do quadrado inicial, a razão entre o comprimento e a largura será aproximadamente 1,618... = Φ, e a largura pelo comprimento será aproximadamente 0,618... = $\frac{1}{\Phi}$.

Pentagrama e o Pentágono.

a) Proponha que desenhem um círculo de raio qualquer e, fazendo uso do transferidor, dividam o ângulo central em 5 ângulos de 72° cada;

$$\frac{C}{n^{\underline{o}}\ lados} = \frac{360^{\underline{o}}}{5} = 72^{\underline{o}}$$

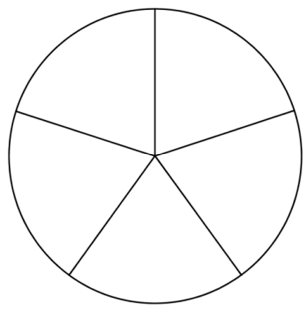


Figura 71 – Pentagrama e pentágono com régua e compasso – 1º Passo.
Fonte: O Autor.

b) Liguem os pontos ABCDE, obtendo assim um pentágono regular depois;

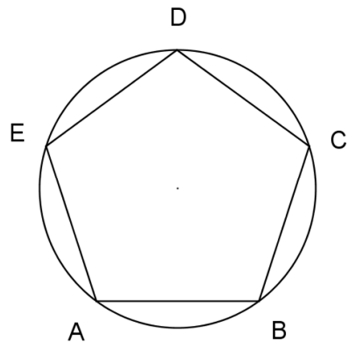


Figura 72 – Pentagrama e pentágono com régua e compasso – 2º Passo.
Fonte: O Autor.

c) Tracem as diagonais, formando uma Estrela – Símbolo da Escola dos Pitagóricos;

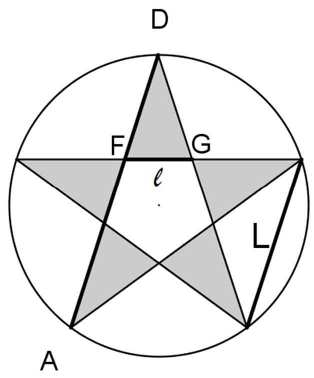


Figura 73 – Pentagrama e pentágono com régua e compasso – 3º Passo.
Fonte: O Autor.

d) Dividam: uma diagonal maior **D** por um lado **L**; e, o lado do pentágono maior **L** pelo lado do menor ℓ:

$$\frac{D}{L} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{L}{l} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} \cong 1{,}618\ldots \cong \Phi$$

A razão entre diversos segmentos (dois a dois) fará surgir o Número de Ouro.

É válido sugerir aos alunos como atividade de pesquisa, que verifiquem em quais outros polígonos regulares é possível encontrar esta relação.

Uma vez definido, os irracionais, a partir da Razão Áurea, o que pode ter ocorrido ao longo de nossa história, passa-se para outras relações, que levam números irracionais, por exemplo:

* dividindo o comprimento da circunferência pelo respectivo diâmetro, dará o número 3,1415... (pi);

* dividindo a diagonal de um quadrado (de lado qualquer) por um dos lados, terá o número 1,41... = $\sqrt{2}$.

5.2.4.3 Atividade 3 – Espiral Logarítmica, Progressão Geométrica e Soma.

Público Alvo: 1° ano do Ensino Médio.

Material: Régua e compasso.

Desenvolvimento: Vamos construir uma espiral logarítmica.

Por comodidade, tome $\frac{1}{\Phi}$ como aproximadamente 5/8 = 0,625.

a) Agora, faça um retângulo áureo, tal que a razão entre a largura e o comprimento seja 5/8. Por exemplo, se o comprimento for 10 cm a largura será 6,25 cm;

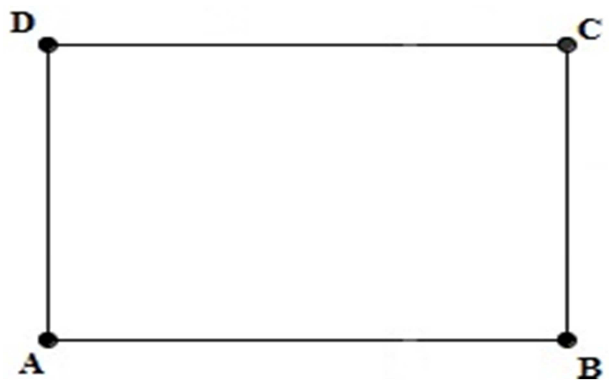


Figura 74 – Espiral logarítmica com régua e compasso – 1º Passo.
Fonte: O Autor.

b) Coloque a ponta do compasso em B e raio BC e marque um ponto E em AB;

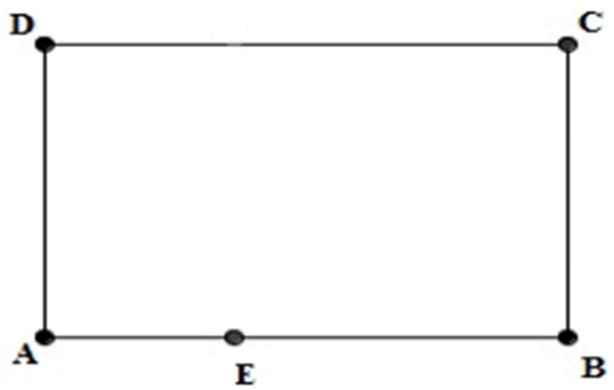


Figura 75 – Espiral logarítmica com régua e compasso – 2º Passo.
Fonte: O Autor.

c) Agora, com a ponta do compasso em E, raio EF = EB, trace um arco BF;

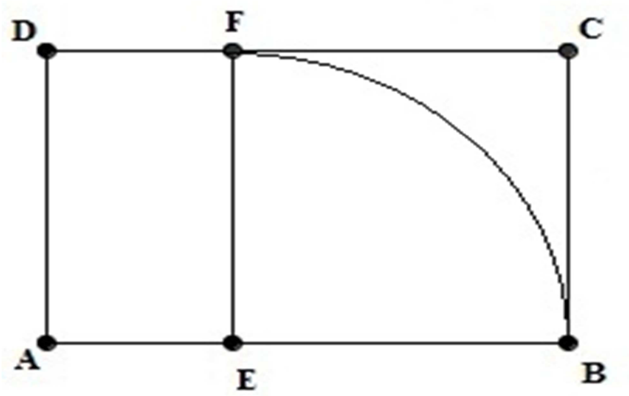


Figura 76 – Espiral logarítmica com régua e compasso – 3º Passo.
Fonte: O Autor.

d) Repita o processo no retângulo ADFE, centrando em D e raio DF marcar G em AD e H em EF;

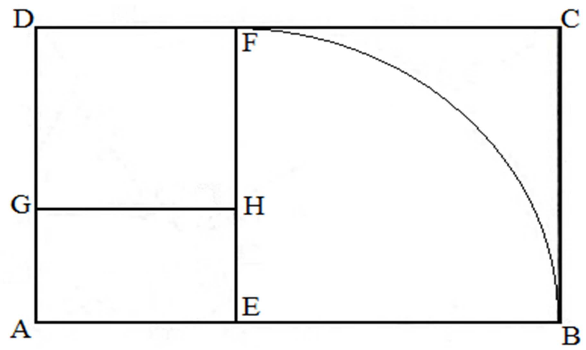


Figura 77 – Espiral logarítmica com régua e compasso – 4º Passo.
Fonte: O Autor.

e) Com centro em H e raio HG = HF faça um arco FG;

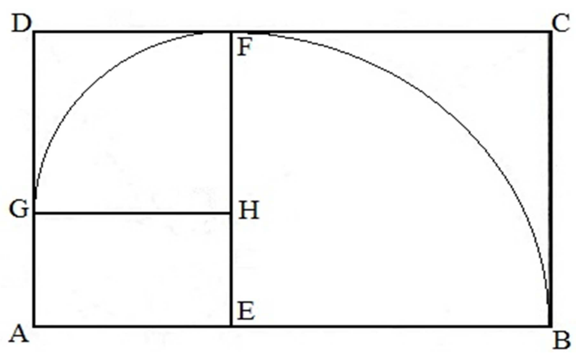


Figura 78 – Espiral logarítmica com régua e compasso – 5º Passo.
Fonte: O Autor.

f) Repetindo sucessivamente, o procedimento anterior, em cada retângulo (que é áureo) que surge, determine uma espiral logarítmica.

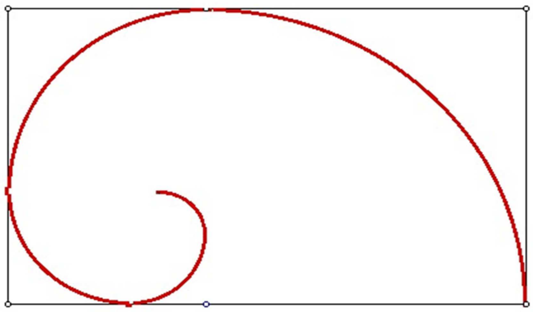


Figura 79 – Espiral logarítmica com régua e compasso – 6º Passo.
Fonte: O Autor.

Existem ainda muitas formas de utilizar a Razão Áurea em sala de aula, perceba que foram citadas aqui formas diretas e indiretas, ficando mais interessante e estimulador o ensino e aprendizagem da Matemática.

Cabe a cada professor, adaptar as formas aqui apresentadas à realidade de cada escola e turma.

O importante é não perder o foco principal de usar a Razão Áurea como objeto associado à Matemática presente de uma forma natural, onde o homem não foi o responsável pelas formas e medidas, fazendo o aluno ver um lado diferente dos números e do mundo a sua volta.

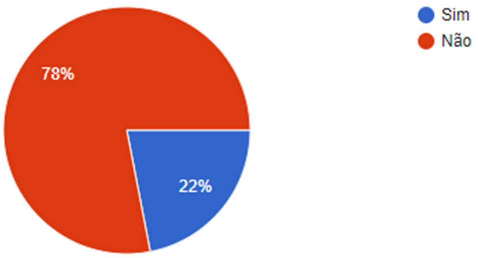
5.3 PESQUISA DE "FEEDBACK" SOBRE APLICAÇÃO DE ATIVIDADES SOBRE A RAZÃO ÁUREA

O presente formulário de pesquisa foi disponibilizado para diversos alunos do Ensino Fundamental e Médio. Após aulas expositivas sobre a história e conceitos básicos envolvendo a Razão Áurea, diversas turmas realizaram trabalhos sobre o tema. Em seguida, alguns alunos foram convidados a participar, sem nenhuma obrigação, desse formulário, disponível somente via internet.

Entre o 2º semestre de 2017 e o 1º semestre de 2018, 83 alunos responderam ao formulário, obtendo os seguintes dados:

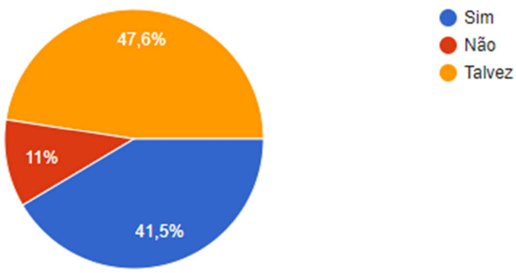
Formulário disponível em: <https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdeqBKioAdfzoaXlwijvpvNLugOeJ7673wDy6473KurU4VBSw/viewform?usp=sf_link>

1) Você já havia ouvido falar na Razão Áurea (RA) antes das atividades propostas durante o ano letivo de 2017?



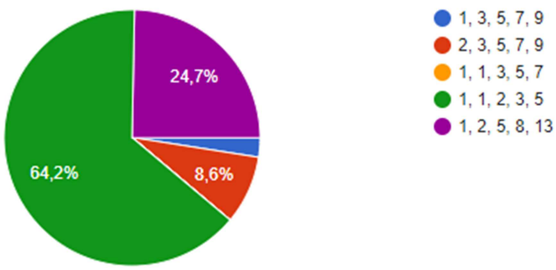
Observa-se que a maioria dos alunos teve contato com o tema pela primeira vez durante as atividades do presente trabalho.

2) Você conseguiu compreender a relação entre a RA e a Sequência de números de Fibonacci?

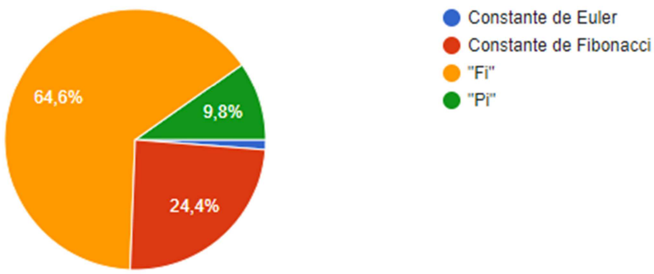


No gráfico 2, uma importante observação, é que apenas 11% dos alunos disseram que participaram das atividades ainda sem entender as relações entre a Sequência de Fibonacci e a Razão Áurea.

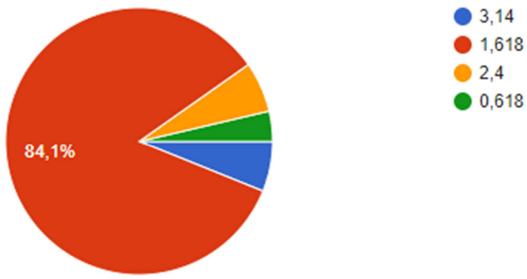
3) Quais são os 5 primeiros números da Sequência Fibonacci?



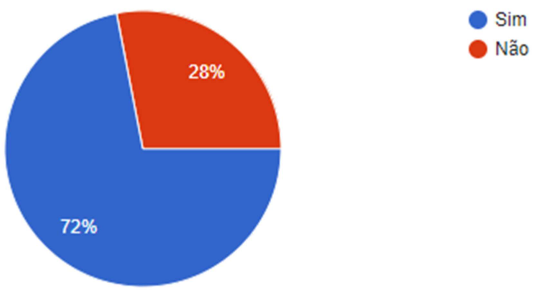
4) Razão Áurea é apenas o nome dado à razão entre dois segmentos ou números que resultam em um número irracional. Qual o nome desse número?



5) Qual o valor aproximado de "Fi"?

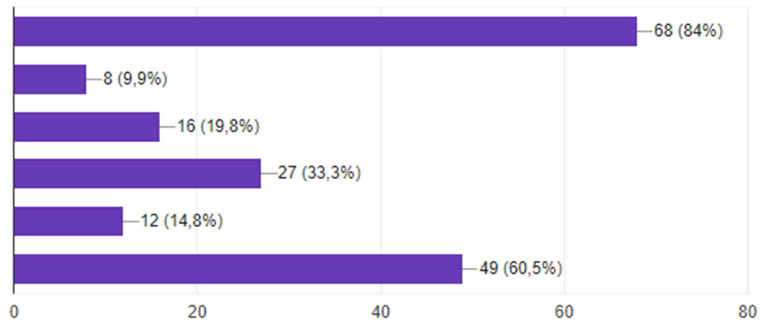


6) Você é capaz de citar fenômenos naturais nos quais é possível encontrar a RA?

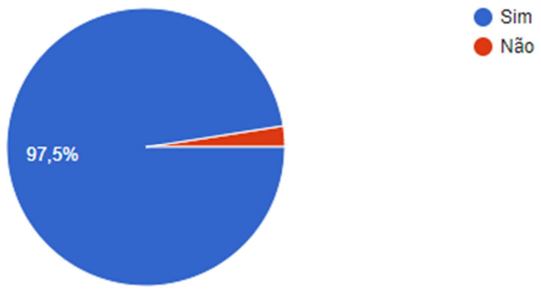


Após as atividades propostas, 72% dos alunos responderam que são capazes de citar fenômenos naturais relacionados à Razão Áurea. Esses dados reforçam o fato de que as atividades tiveram êxito em apresentar a Matemática presente onde não houve a intervenção humana nas formas e proporções.

7) Marque abaixo a(s) opção(ões) que apresenta(m) a RA?

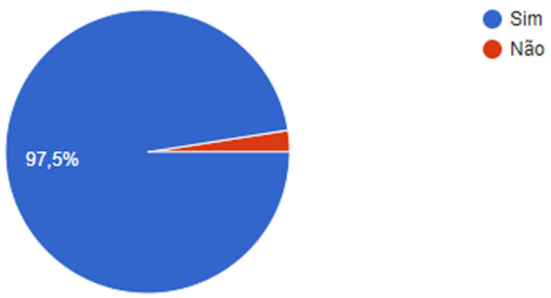


8) Após as pesquisas realizadas que se relacionaram com a RA, você consegue ver a Matemática mais presente ao seu redor?



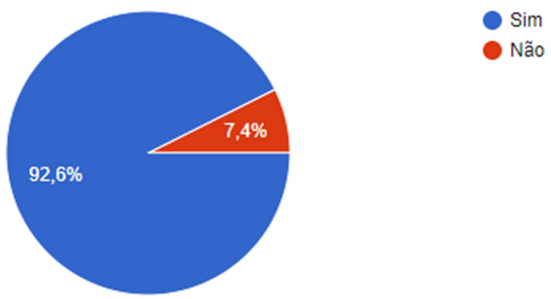
Se o aluno passa a ver o mundo sob um aspecto mais observador ativo, buscando o porquê nos fenômenos, e assim enxergando mais matemática ao seu redor, então o objetivo desse trabalho foi alcançado. Para 97,5% dos alunos esse objetivo foi alcançado.

9) Você acredita que a Matemática pode estar presente em bem mais fenômenos ao seu redor do que você tenha conhecimento?



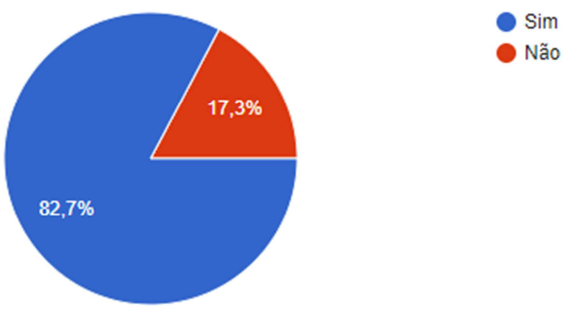
Esse resultado traz a reflexão de que para quase totalidade dos alunos, ainda há muito que se aprender sobre a presença da Matemática em fenômenos ao seu redor.

10) Se dividirmos nossa altura total pela altura até nosso umbigo, encontramos, aproximadamente, "Fi" 1,618... Curiosidades matemáticas como essa despertam sua atenção?

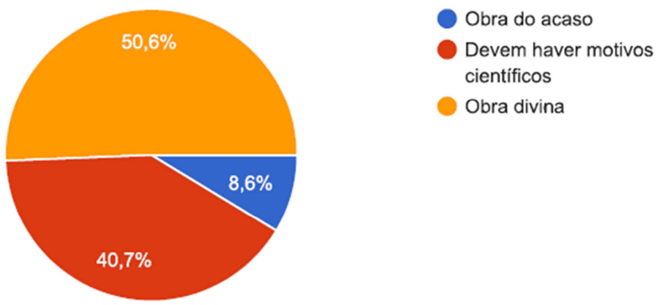


Se os alunos se interessam por curiosidades matemáticas, então, o professor deve explorar esse viés. Envolver suas aulas conceituais com mais atividades lúdicas, mas história da Matemática e mais curiosidades envolvendo os números e o contexto no qual os encontramos no cotidiano.

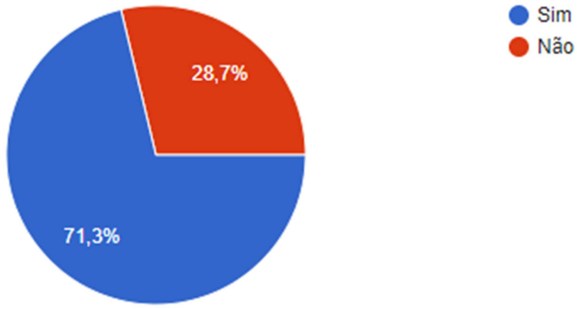
11) Se você pudesse ter acesso a uma coletânea de curiosidades Matemáticas, isso iria despertar seu interesse?



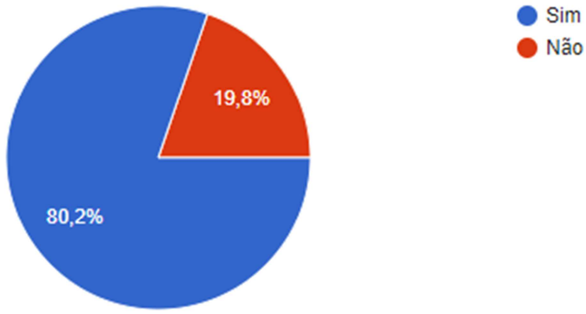
12) A Razão Áurea também é conhecida como Divina Proporção, por apresentar-se em diversas partes do corpo humano e em muitos fenômenos naturais. Você considera todas essas relações como:



13) Você teria interesse em ler mais sobre a RA?

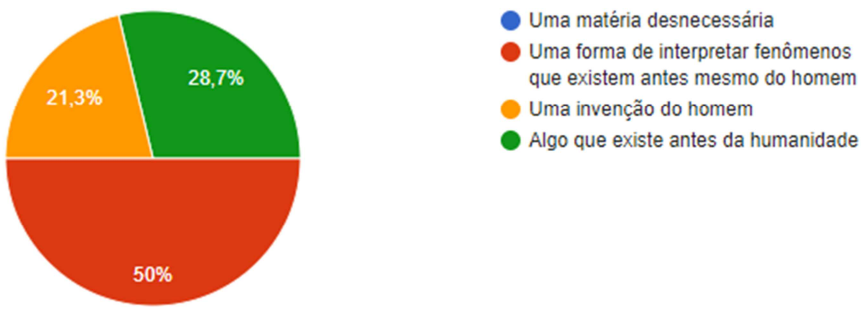


14) Descobrir que no seu corpo existe muita RA e em diversos fenômenos ao seu redor também, mudou de alguma forma como você vê a Matemática?

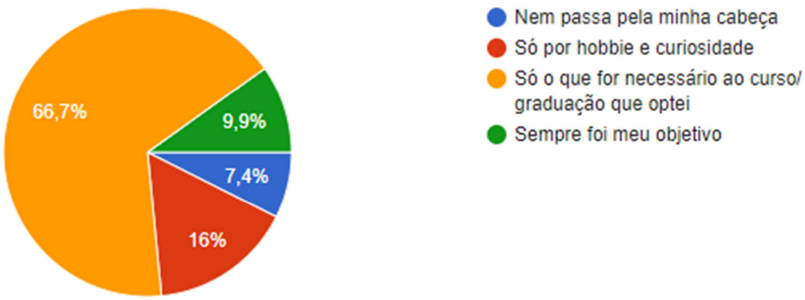


Para 80,2% dos alunos a forma de ver a Matemática foi modificada após perceber que seu corpo está cheio de proporções baseadas na Razão Áurea.

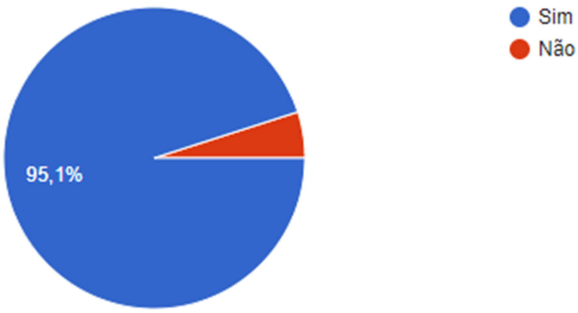
15) Você considera que a Matemática é:



16) Estudar mais Matemática após a conclusão da educação básica:

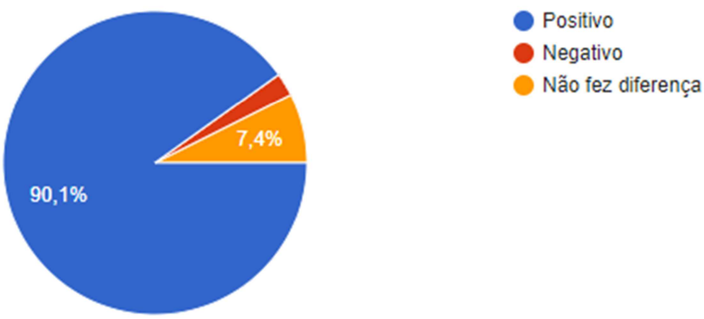


17) Contextualizar um conteúdo é mostrar onde podemos utilizá-lo na vida real. A RA é apenas uma das formas de mostrar onde a Matemática surge em diversas áreas científicas. Você considera a contextualização importante para motivar sua aprendizagem?



Se a contextualização é tão importante na opinião dos docentes, então, ela não pode de forma alguma ser desconsiderada no processo de ensino-aprendizagem. O aluno precisa saber onde poderá utilizar cada assunto abordado. Ou onde ele poderá encontrar Matemática no seu dia-a-dia.

18) Se você ainda vai estudar Matemática, mesmo que em outro curso ou graduação que pretenda fazer, responda: A contextualização da RA teve impacto:



6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho de pesquisa atingiu seu objetivo ao quantificar em gráficos que a Razão Áurea pôde auxiliar o aluno a enxergar a Matemática de uma forma mais simples e bela. Uma forma que pode ser expressa com cores e bom gosto, e não só com números. Enfim, uma forma simples e natural que pode ser encontrada desde o pequeno jardim na calçada até as mais densas florestas. Essa presença da Razão Áurea na Botânica vista com os próprios olhos e com sensibilidade, buscando assim, motivar o aluno com um tema, até então, desconhecido, para que o mesmo seja mais receptivo ao estudo da Matemática, foi o objetivo desse trabalho.

Ao longo deste trabalho, foram utilizados, alguns elementos naturais para relacionar a Razão Áurea e Botânica. Uma infinidade de espécies deixou de ser apresentada e muitas outras podem ter uma relação ainda escondida aos nossos olhos. Talvez os alunos descubram de forma ocasional uma nova relação em uma espécie.

Quando utilizamos a Matemática associada a uma ciência biológica, devemos levar em conta que cada indivíduo de uma espécie é um ser diferente, possui características comuns e peculiares, e, portanto, a exatidão dos cálculos nem sempre se traduz em verdade absoluta. Se essa for à atividade proposta, o professor precisará se atentar a essas diferenças. Nesse caminho irá se deparar com os indivíduos diferentes de cada espécie, e precisará delimitar o que é padrão e o que é uma exceção. Afinal, tudo o que foi dito aqui a respeito de Razão Áurea empregada na Botânica e na filotaxia, não é uma regra, ou uma lei que seguirá sempre criteriosos padrões. O matemático canadense Coxeter define esses eventos como "apenas uma tendência fascinantemente predominante".

Provar o porquê das proporções áureas na Botânica seria equivalente a provar o porquê das proporções áureas no corpo humano, como por exemplo, nas falanges que seguem proporções do segmento áureo, ou na forma espiral das tempestades e galáxias. Quem sabe descobrir o porquê da natureza adotar 1,618... como seu número favorito, seja encarar mistérios ainda encobertos ao homem sob uma espessa neblina da falta de conhecimento.

Mas certamente o leitor se lembrará das espirais quando observar novamente um abacaxi, uma pinha enfeitando uma árvore de natal ou um belo girassol. Não esquecerá que as folhas não nascem no lugar que bem querem em seu galho, saberá que elas seguem um padrão de divergência, e que esse padrão está intimamente ligado a sequência de Fibonacci, ou ainda, que a abertura entre cada uma delas resulta em um ângulo conhecido pelas propriedades áureas.

Para que fosse possível visualizar o retorno da aplicação desse trabalho, turmas de 8º ano do Ensino Fundamental, 1º ano do Ensino Médio e 3º ano do Ensino Médio, participaram de uma pesquisa on-line para avaliar diversos pontos que consideramos importantes para o aprimoramento das propostas aqui apresentadas.

Todas as turmas tiveram uma aula prévia sobre a história e os elementos básicos que envolvem a Razão Áurea. De certa forma, o planejamento dessa aula prévia seguiu o ordenamento dos capítulos desse trabalho.

Após a aula prévia, em cada turma foi aplicada uma das atividades propostas no capítulo 5, de forma que se enquadrasse ao currículo do referido ano, mas que trouxesse a Razão Áurea como elemento motivador. Dessa forma, os alunos estavam aprendendo de uma forma contextualizada e mais atrativa, visto que a quase totalidade deles nunca havia ouvido nada sobre o tema, e isso fez com que ficassem mais focados nas atividades.

Um possível desdobramento desse trabalho, poderia se ater as associações da Razão Áurea em outros elementos e áreas de concentração, como fenômenos climáticos ou físicos, estudos de simetrias na natureza, e assim, na forma como o aluno passa a encarar a Matemática. Na pesquisa, conseguimos verificar que a maior parte dos alunos afirmou que consegue compreender melhor o conteúdo contextualizado, além de conseguir enxergar a Matemática mais presente ao seu redor.

Um dado importante dessa pesquisa, foi que cerca de 80% dos alunos respondeu que descobrir que no seu corpo existe Razão Áurea e em diversos fenômenos ao seu redor, mudou de alguma forma a maneira de ver a Matemática.

Mais dados interessantes e de grande importância podem ser verificados nos gráficos da pesquisa que constam no item 5.3 desse trabalho.

Sabemos das dificuldades e limitações da educação no Brasil, principalmente na educação pública. Porém, a maior parte das atividades propostas ao longo desse trabalho irá exigir pouco ou nenhum gasto e infraestrutura. Sabemos que tais atividades não devem saturar o currículo, porém, são ótimas para quebrar a rotina de sala de aula e despertar a curiosidade dos alunos a respeito da Matemática presente na Natureza.

Dessa forma, o professor deve buscar uma adaptação de tais contextualizações ao seu currículo e ano, sem que a atividade não passe de um apêndice letivo.

Motivar a curiosidade dos alunos e tornar o clima de descoberta agradável ao longo da atividade deve ser o foco do professor, para que o aluno não acabe associando essa com simplesmente mais um conteúdo que ele "não será capaz de associar".

Se a proposta de uma Matemática mais palpável, colorida e motivadora puder ser levada para a sala de aula, certamente esse trabalho terá alcançado seu objetivo.

Contudo, compreendemos que apenas trilhamos um pequeno caminho de uma longa jornada que pode fazer uso da Matemática e seus fascinantes mistérios como orientação para uma prática mais agradável e motivacional em sala de aula.

> Espero que da próxima vez que comer um abacaxi, mandar uma rosa para a pessoa amada ou admirar as pinturas de girassóis de Van Gogh, você se lembre que o padrão de crescimento dessas plantas incorpora esse número admirável que chamamos de Razão Áurea. (LÍVIO, 2009, p. 136).

REFERÊNCIAS

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Número de Ouro e Seção Áurea**, Considerações e Sugestões para a Sala de Aula. Blumenau – SC: Ed. da FURB, 1996.

BERTATO, Fabio Maia. **"De Divina Proportione" –** de Luca Pacioli – (Tradução anotada e comentada). Doutorado em Filosofia – Universidade Estadual de Campinas - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, 2008. Disponível em: <http://www.scribd.com/doc/18161028/De-Divina-Proportione-de-Luca-Pacioli-Traducao-Anotada-e-Comentada->. Acesso em: 04 março 2018.

BONELL, Carmen. **La divina proporción.** Las formas geométricas. Barcelona – Espanha: Edicions UPC, 1999.

BOYER, Carl B. **História da Matemática/**Carl B. Boyer, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 2.ed. São Paulo: Edgard Blücler, 1996.

BRASIL. PCN: **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/33038>. Acesso em: 29 março 2018.

CARVALHO, Jurandir Jacques de. **Razão Áurea**. Monografia (curso de especialização para professores do ensino fundamental e médio) – Universidade Federal de Minas Gerais, 2008. Disponível em: < https://docgo.net/philosophy-of-money.html?utm_source=monografia-razao-aurea >. Acesso em: 04 março 2018.

CLEMENTE, Isaac. **Geometria Fractal**. Disponível em: < https://www.infoescola.com/matematica/geometria-fractal/>. Acesso em: 28 março 2018.

COLE, K. C.. **O Universo e a Xícara de Chá**. São Paulo – SP: Ed. Record, 2006.

EUCLIDES. **Os Elementos/Euclides**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo – SP: Ed. UNESP, 2009.

FERRI, Mario Guimarães. **Botânica, Morfologia Externa das Plantas.** São Paulo – SP: Ed. Nobel, 2006.

GAZALÉ, Midhat J. **Gnomon: from pharaohs to fractals**. Princeton, New Jersey - EUA: Princeton University Press, 1999.

HEMENWAY, Priya. **O Código Secreto, A fómula misteriosa que governa a arte, a natureza e a ciência.** EUA: Ed. Evergreen, 2005.

HUNTLEY, H. E.. **A Divina Proporção,** Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática. Nova Iorque – EUA. Trad. de Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 1985.

JEAN, Roger V.. **Mathematical Approach to Pattern and Form in Plant Growth**. EUA: Ed. John Wiley & Sons, 1984.

LÍVIO, Mario. **Razão Áurea**. A história de FI, um número surpreendente. Rio de Janeiro/São Paulo: Ed. Record, 2009.

PISANO, Leonardo (Leonardo Fibonacci). **Liber Abaci** – Versão Resumida – 1228. Disponível em: < http://jnsilva.ludicum.org/hm2008_9/LiberAbaci.pdf>. Acesso em: 04 março 2018

POSAMENTIER, Alfred S. & LEHMANN, Ingmar. **The Fabulous Fibonacci Numbers**. Nova Iorque – EUA: Ed. Prometheus Books, 2007.

TAPIA, Jesús Alonso & FITA, Enrique Caturla. **A Motivação em Sala de Aula - o que é, e como se faz**. 11. Ed – São Paulo: Ed. Loyola, 2015.

WEISSTEIN, Eric W. **Logarithmic Spiral**. MathWorld - A Wolfram. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/LogarithmicSpiral.html>. Acesso em: 04 março 2018.

ZAHN, Maurício. **Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.** Bagé – RS: Ed. Ciência Moderna, 2011.

GLOSSÁRIO

Ábaco – Antigo instrumento de cálculo, formado por uma moldura com bastões ou arames paralelos, dispostos no sentido vertical, correspondentes cada um a uma posição (unidade, dezenas, ...) e nos quais estão os elementos de contagem (fichas, bolas, contas, ...) que podem deslizar livremente.

ad infinitum (ao infinito) – Que se propaga ou repete ao infinito.

Alometria – Lei que estabelece que, no mesmo indivíduo, "os crescimentos específicos de seus órgãos são proporcionais". Isso significa dizer, que nem todos os órgãos do corpo de um indivíduo têm em cada instante um desenvolvimento proporcional ao todo, mas cada um deles possui um crescimento específico proporcionais entre si.

Autossimilaridade – Descreve a geometria de objetos no qual uma pequena parte quando expandida parece a parte inteira do objeto. Qualquer que seja a ampliação considerada obteremos sucessivas cópias do objeto inicial. Existem dois tipos de semelhança: a exata (réplicas perfeitas) e a estatística (imagens que apresentam os mesmos padrões, as mesmas características).

Auto propagação – Forma que dá origem a outra de maneira irracional, sendo um processo infinito.

Axilas – Bifurcação dos galhos de um vegetal qualquer.

Bainha – Parte do pecíolo que ajuda a dar maior sustentação da folha no caule.

BioMatemática – Campo da Matemática que estuda suas relações com as ciências biológicas.

Botânica – Campo da biologia responsável pelo estudo dos vegetais.

Botões vegetativos – Gemas.

Clorofila – Pigmento verde, presente no reino vegetal, com a capacidade de fixar energia luminosa, energia essa utilizada no preparo de material orgânico por meio da fotossíntese.

Divergência – Nome dado a razão determinada por $\frac{p}{q}$, onde p é o número de voltas da espiral que circunda o caule e q é número de bases de folhas pelas quais a espiral passa (a primeira folha deve ser desconsiderada, ou adotada como 0).

Estômatos – Estruturas situadas geralmente na parte de baixo das folhas. Responsável por realizar as trocas gasosas com o ambiente.

Euterpe – O segundo livro de Heródoto, historiador grego que viveu no século V a.C. (485?–420 a.C.).

Filogênese – É o termo comumente utilizado para hipóteses de relações evolutivas (ou seja, relações filogenéticas) de um grupo de organismos, isto é, determinar as relações ancestrais entre espécies conhecidas.

Filotaxia – Parte da Botânica que estuda a disposição das folhas no caule.

Flósculos – Cada uma das pequenas flores que compõe o capítulo, uma inflorescência caracterizada por ter as flores inseridas num receptáculo discóide ou arredondado protegido por brácteas, exemplo do girassol.

Folha – É a principal sede de elaboração de alimentos orgânicos sob ação da luz (fotossíntese) e de eliminação de água na forma de vapor (transpiração). Seus tecidos constituintes são, na maior parte, vivos e respiram.

Fotossíntese – Fenômeno de elaboração de alimento orgânico em presença de luz, a partir de substâncias inorgânicas simples, como água e gás carbônico.

Gemas – Região de meristema, ou desenvolvimento celular. Pode originar novos galhos, folhas, ou em contato com o solo, enraizar e gerar uma nova planta.

Lâmina foliar – Limbo

Limbo – Superfície da folha de formato extremamente variável, pode ter bordos lisos, denteados, recortados, etc. Sua superfície pode ser lisa e brilhante, ou recobberta por cera, pêlos, espinhos, etc.

Morfogênese – Palavra de origem grega que segnifica "desenvolvimento da forma". São o conjunto de padrões que cada espécie desenvolve ao longo do seu processo de crescimento, incluindo distriibuição de axilas e divergência foliar.

Ortósticas – Referente a posição vertical. Na Botânica se refere às folhas imediatamente superpostas.

Parastichies – Botânica - Termo utilizado para definir as espirais imaginárias presentes em diversas espécies. Tais espirais podem determinar a divergência foliar, estarem presentes nas pinhas, abacaxis ou nos flósculos de um girassol.

Pecíolo – Parte geralmente cilíndrica mais resistente que prende a folha ao caule

Phytomathematics – Ramo da BioMatemática que se refere especificamente a Botânica e a filotaxia.

Sistema radicular – É constituído das raízes, que são órgãos especializados em fixação, absorção, reserva e condução.

Timeu – É um tratado teórico de Platão na forma de um diálogo socrático, escrito cerca de 360 a.C. A obra apresenta especulações sobre a natureza do mundo físico.