UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Uma sequência didática para o estudo de derivadas no Ensino Médio

Fabrício Borges Moreira

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Fabrício Borges Moreira

Uma sequência didática para o estudo de derivadas no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares

USP – São Carlos
Junho de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M838s
Moreira, Fabrício Borges
Uma sequência didática para o estudo de derivadas no Ensino Médio / Fabrício Borges Moreira; orientador Sérgio Henrique Monari Soares. -- São Carlos, 2018.
67 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Derivadas. 2. Ensino Médio . 3. Cinemática. 4. Interdisciplinar. I. Soares, Sérgio Henrique Monari, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Fabrício Borges Moreira

A didactic sequence for the study of derivatives in High School

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares

USP – São Carlos
June 2018

Este trabalho é dedicado a todos os docentes,
em especial aos professores de Matemática
que se importam com a melhoria da Educação no país.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, que sem o suporte afetivo não seria possível o término desta dissertação. Agradeço também aos meus familiares que sempre deram apoio aos projetos que desenvolvi.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, cujo suporte financeiro foi muito importante para o estabelecimento do projeto.

Ao meu orientador, que foi paciente e compreensivo até mesmo nos piores momentos do desenrolar deste curso.

À Profa. Dra. Ires Dias que, além de ser a coordenadora do programa e ter trazido para a USP esse projeto muito importante para o currículo de matemática, me auxiliou nas mais diversas questões desde o início do primeiro ano de graduação até o término do mestrado.

Agradeço também ao Pedro Max Schwarz, que ajudou em diversos momentos no decorrer dessa jornada e sempre incentivou os estudos e a dedicação. Além de ter ajudado na revisão gramatical do texto.

A todos os meus amigos, os quais não citarei os nomes pelo receio de esquecer de algum, que me deram o suporte emocional para o desfecho dessa empreitada.

Aos meus colegas de turma, pelos momentos de estudos em grupo. Em especial, para Francine Dalavale Tozatto e Liliane Menezes Cabrera, que se tornaram minhas grandes amigas.

Ao Fidelis Zanetti de Castro, que auxiliou nos últimos momentos da escrita e comigo vibrou a cada vez que era compilada a dissertação.

A Maria Luísa Liesack pela ajuda na tradução dos termos em inglês.

"O que sabemos é uma gota;
o que ignoramos é um oceano."
(Isaac Newton)

RESUMO

MOREIRA, F.B. **Uma sequência didática para o estudo de derivadas no Ensino Médio**. 2018. 67 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Este trabalho apresenta estratégias para desenvolver alguns tópicos de derivadas para o Ensino Médio. Essas estratégias são mostradas em uma sequência didática de planos de aula. Também salienta alguns tópicos de Cinemática, o que traz um caráter interdisciplinar. Aspectos geométricos também são desenvolvidos utilizando a inclinação da reta tangente à curva. Os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio não abordam o assunto, então foi necessário desenvolver a teoria e separá-la em oito planos. Como o tema é um assunto estudado no Ensino Superior, fez-se necessário uma abordagem bem mais branda com pouco uso do formalismo matemático, ou seja, a noção intuitiva foi mais usada em todos os aspectos.

Palavras-chave: Derivadas, Ensino Médio, Interdisciplinar, Cinemática..

ABSTRACT

MOREIRA, F.B. **A didactic sequence for the study of derivatives in High School**. 2018. 67 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

This work presents strategies to develop some topics of derivatives for High School. These strategies are shown in a didactic sequence of class plannings. It also highlights some topics of Kinematics which reveals an interdisciplinary approach. Geometric designs are also developed using the inclination of the tangent line to the curve. The Mathematics Textbooks of High School do not teach the subject, so it was necessary to develop the theory and separate it into eight class plannings. As this subject has been studied in undergraduate courses, a more simplistic approach was necessary with little use of mathematical formalism, that is, the intuitive sense was fostered in all aspects.

Keywords: Derivatives, High School, Interdisciplinary, Kinematics..

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – A reta $y = 2x$ . . . 28
Figura 2 – A reta $y = 3x$ . . . 28
Figura 3 – A reta $y = -x$ . . . 29
Figura 4 – A reta $y = \frac{1}{2}x$ . . . 29
Figura 5 – A reta $y = -2x$ . . . 29
Figura 6 – A reta $y = 2x + 1$ em comparação à reta $y = 2x$ . . . 31
Figura 7 – A reta $y = -x + 3$ em comparação à reta $y = -x$ . . . 31
Figura 8 – Reta $y = 5x + 1$ com a representação geométrica dos valores Δx e Δy . . . 33
Figura 9 – Parábola $y = x^2$ . . . 37
Figura 10 – Deformação no esboço da parábola . . . 39
Figura 11 – Inclinação crescente da reta tangente à parábola . . . 40
Figura 12 – Gráfico de uma função usado para construção da reta secante . . . 41
Figura 13 – Marcação do ponto onde passará a secante . . . 41
Figura 14 – Escolha de outro ponto, distinto do primeiro, para passar a secante . . . 42
Figura 15 – A Reta Secante . . . 42
Figura 16 – Reta secante por A e B . . . 43
Figura 17 – Reta secante por A e C . . . 43
Figura 18 – Reta secante por A e D . . . 44
Figura 19 – Várias secantes se aproximando da tangente . . . 44
Figura 20 – A reta tangente . . . 45
Figura 21 – Exercício 3.1 . . . 46
Figura 22 – Aproximação do ponto Q ao ponto P . . . 48
Figura 23 – Gráfico de $f(x) = x^2$ . . . 55
Figura 24 – Variação do espaço pelo tempo . . . 57
Figura 25 – Gráfico para resolução do exercício 2 . . . 60
Figura 26 – Representação Geométrica do Teorema do Valor Médio . . . 63

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 19

2 CARACTERÍSTICAS DO TRABALHO 21
2.1 As últimas inserções nas políticas educacionais brasileiras 21
2.2 Análise da dificuldade do aprendizado de Cálculo 23
2.3 Análise dos materiais didáticos de física 24
2.3.1 Livros didáticos usados em escolas públicas 24
2.3.2 Apostila da rede particular de ensino 25

3 PLANOS DE AULA 27
3.1 Aula 1 27
3.1.1 Objetivo 27
3.1.2 Estratégias 27
3.1.3 Atividades 30
3.2 Aula 2 31
3.2.1 Objetivo 31
3.2.2 Estratégias 31
3.2.3 Atividades 35
3.3 Aula 3 36
3.3.1 Objetivo 36
3.3.2 Estratégias 36
3.3.3 Atividades 38
3.4 Aula 4 39
3.4.1 Objetivos 39
3.4.2 Estratégias 39
3.4.3 Atividades 46
3.5 Aula 5 47
3.5.1 Objetivos 47
3.5.2 Estratégias 47
3.5.3 Atividades 50
3.6 Aula 6 51
3.6.1 Objetivo 51
3.6.2 Estratégias 51

3.6.3 Atividades *54*
3.7 Aula 7 55
3.7.1 Objetivos *55*
3.7.2 Estratégias *55*
3.7.3 Atividades *60*
3.8 Aula 8 62
3.8.1 Objetivos *62*
3.8.2 Estratégias *62*
3.8.3 Atividades *64*

4 CONCLUSÃO **65**

REFERÊNCIAS **67**

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral é de grande relevância para o desenvolvimento das ciências desde sua invenção, por Newton e Leibniz, no século XVII. Com diversas aplicações, desde modelos simples até outros bastante elaborados, o Cálculo é amplamente estudado nos cursos de graduação na área de exatas e em alguns cursos das áreas de humanas e biológicas graças a sua extensa aplicabilidade e por ser uma ferramenta poderosa para resolver problemas.

Dessa forma, o interesse matemático em desenvolver esse assunto ao longo do tempo foi enorme com bastante pesquisa incrementando o Cálculo com novos e belos resultados. Esse desenvolvimento resultou nas ideias que criaram a Análise Matemática, que é a área do conhecimento que investiga os números e funções reais (aqui está sendo citada a Análise Real). Essa área do conhecimento, ainda hoje, é pesquisada sob diversas ópticas, pois a resolução de intrigantes problemas ainda é desconhecida.

Por conseguinte, o estudo do Cálculo, suas aplicações e formas de desenvolver o conhecimento são os grandes motivadores para o desenvolvimento dessa pesquisa.

É possível notar que muitas ideias do cálculo já aparecem no Ensino básico, como, por exemplo, o vértice de uma parábola no Ensino Médio, ou a área de um círculo no Ensino Fundamental, dois conceitos que remetem à derivada e à integral, respectivamente.

O propósito deste trabalho não é defender que conceitos abrangentes, como derivadas ou integrais, sejam amplamente discutidos no Ensino Médio, mas incrementar as aulas com algumas ideias do cálculo pode ser muito útil para o aprendizado de matemática. Essa dissertação irá discutir o conceito da derivada e algumas de suas aplicações, como foi defendido por (ÁVILA, 2007):

> O conceito de derivada é da maior importância na fundamentação de toda a Matemática que se originou no século XVII e que vem se desenvolvendo até os dias de hoje. Juntamente com o conceito da integral, que remonta a Arquimedes na Antiguidade,

> esses dois conceitos fundamentam o Cálculo, que tem sido a alavanca mestra de toda a ciência moderna. Daí a enorme importância de se ensinar a derivada já no ensino médio. Mas isso tem de ser feito de maneira adequada a esse nível de ensino, não como se faz nas disciplinas dos cursos universitários de Cálculo.

Como aplicação da derivada será dada a Cinemática. A questão multidisciplinar pode trazer pontos positivos para o aprendizado da derivada. Um estudo mais aprofundado das funções e derivadas deve facilitar a assimilação dos conteúdos que fazem parte da Cinemática.

Por si só, o estudo dos conceitos da matemática é de grande importância nos anos do ensino básico, pois é a disciplina que ocupa o maior espaço na grade curricular. Desse modo, um conceito estabelecido há mais de trezentos anos, e que foi fundamental para todo o desenvolvimento da ciência e continua sendo até hoje, não deve ser deixado de fora das mentes curiosas de crianças e jovens.

O aprendizado da matemática pode trazer muitas contribuições para todas as áreas do conhecimento. Atualmente se discute muito, nas escolas, a questão da interdisciplinaridade, que deve ser colocada em prática com frequência cada vez maior, mas o docente constantemente é desafiado com essa abordagem. Essa dissertação tenta facilitar a incorporação dos conteúdos de cálculo em outras áreas.

Hoje em dia, a matemática é fundamental para o ingresso nos melhores cursos e no mercado de trabalho. Portanto, estudar ferramentas poderosas para a resolução de vários tipos de problemas é cada vez mais importante.

É possível notar que, no Ensino Médio, os alunos questionam mais o ensino, já que são maiores e buscam sempre por aplicações práticas do conhecimento adquirido.

Com relação à matemática, em particular ao estudo das funções, foi defendido por (ÁVILA, 2007):

> O ensino de funções, como vemos em vários livros, é que está carregado de terminologia e notação, de maneira artificial e descontextualizada. O excesso de "conjuntos"continua presente em vários livros, "entulhando"o currículo. Tudo isso pode ser reduzido substanciavelmente e com vantagens, beneficiando o bom aprendizado das ideias matemáticas. São ideias que devem ser enfatizadas, a linguagem e a notação somente quando são necessárias.

O que ele defende é consistente. O ensino de conteúdos na Educação Básica que em geral ficam restritos ao Ensino Superior pode atrair mais jovens para o mundo da matemática.

Esse trabalho tem como objetivo propor uma alternativa didática para os professores que consideram adequado apresentar a derivada já no Ensino Médio. A sequencia de planos de aulas leva em conta a questão da interdisciplinaridade para o tratamento de temas da física.

CAPÍTULO

2

CARACTERÍSTICAS DO TRABALHO

2.1 As últimas inserções nas políticas educacionais brasileiras

Primeiramente, foram criados os parâmetros para o Ensino Fundamental. Em 1999, os parâmetros para o Ensino Médio foram divulgados. É possível observar que a proposta é aberta a características regionais de cada escola e flexível quanto aos temas abordados, de maneira possível de se trabalhar abordagens diferenciadas de determinados tópicos, como é especificado em (NACIONAIS, 1998):

> Por sua natureza aberta, configuram uma proposta flexível, a ser concretizada nas decisões regionais e locais sobre currículos e sobre programas de transformação da realidade educacional empreendidos pelas autoridades governamentais, pelas escolas e pelos professores. Não configuram, portanto, um modelo curricular homogêneo e impositivo, que se sobreporia à competência político-executiva dos Estados e Municípios, à diversidade sociocultural das diferentes regiões do País ou à autonomia de professores e equipes pedagógicas.

Em primeira instância, foi criado os parâmetros que direcionavam e Educação para os anos do Ensino Fundamental. Para o Ensino Médio, a a divulgação dos parâmetros se deu em 1999. Com essa reformulação do Ensino Médio, nota-se que que as competências para Matemática e suas tecnologias foram bem delimitadas em três tópicos, como especificado em (BRASIL, 2002):

> A área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias elegeu três grandes competências como metas a serem perseguidas durante essa etapa da escolaridade básica e complementar do ensino fundamental para todos os brasileiros:

• representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;

• investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;

• contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das idéias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

Salientamos que o nosso trabalho não está em desacordo com as orientações dos PCN, como visto em (BRASIL, 2002):

> [...]o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado, juntamente com os estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares. Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas.

Portanto, esta dissertação não está em desacordo com as normas vigentes para o ensino de funções para a primeira série do Ensino Médio, visto que uma lacuna é deixada para ser preenchida pelo docente na abordagem do tema.

Alguns conceitos do Cálculo podem ser abordados com problemas simples e de fácil absorção. Mais adiante serão tratados alguns desses instigantes desafios.

A Matemática tem alicerces bem fundamentados, e o aprendizado dos alunos pode ser facilitado se lhes for ensinado como surgiram os conceitos fundamentais para o desenvolvimento da ciência.

A Física abordada aqui estará embasada em aplicações diretas da derivada, visto que a origem da Cinemática e do Cálculo estão intrinsecamente conectados, logo menções a fatos históricos relacionados à criação do Cálculo Diferencial concomitantemente à Cinemática devem ser feitos pelo professor em sala de aula.

Além disso, o enfoque interdisciplinar pode ajudar a despertar a curiosidade dos alunos.

2.2 Análise da dificuldade do aprendizado de Cálculo

Nas Universidades Brasileiras, assim como na maioria dos livros didáticos usados pelos professores universitários, a seguinte sequencia de ensino é unânime: Limite, Derivada e Integral. Existe uma lógica para que seja dado dessa maneira: o Limite é ensinado antes justamente para se ter definições da Derivada e da Integral como Limites. Por isso, concordamos com (REIS *et al.*, 2001):

> A "tradição"dos limites é, indiscutivelmente, a tendência predominante no ensino atual de Cálculo. Nossa afirmação se sustenta com base nas seguintes constatações:
>
> 1) Influenciados pelo modelo cauchyano, tradicionalmente, iniciamos o estudo do Cálculo pela noção de limite de uma função e, em seguida, destacamos que: a continuidade depende de um limite (existir e ser igual ao valor da imagem da função no ponto); a derivada é um limite (do quociente incremental); a integral é um limite (das somas de Riemann);
>
> 2) A partir do refinamento weierstrassiano das definições, verificamos na maioria dos livros didáticos atuais, o desenvolvimento da teoria de derivadas e integrais posterior à apresentação dos limites. Estes, em geral, são definidos a partir do par $\varepsilon - \delta$ e em seguida, são destacadas as principais propriedades e alguns teoremas mais importantes relacionados aos limites.

É possível, então, notar que a disciplina de Cálculo é fundamentada pelo conceito de Limite. Contudo, historicamente, a ordem cronológica dos conceitos é: Integral, Derivada, Limite e Números Reais. Segundo (REIS *et al.*, 2001):

> "...a história nos mostra o desenvolvimento do Cálculo, na seguinte ordem: cálculo integral; cálculo diferencial; cálculo de limites; noção de número real. Entretanto, o ensino inverte completamente esta ordem: números – limites – derivadas – integrais."

Sendo assim, pode-se perguntar se as dificuldades no aprendizado do Cálculo pelos alunos são uma consequência da troca na ordem do ensino, que não segue a ordem histórica, e sim uma ordem que, supostamente, formaliza os conceitos de uma maneira mais rigorosa. Esse questionamento foi proposto por (PEREIRA, 2009):

> Porque devemos esperar que os alunos aprendam de forma significativa os conceitos do Cálculo se eles são apresentados em uma ordem totalmente diferente da qual eles foram concebidos? Não seria mais natural pensarmos que as dificuldades epistemológicas do Cálculo, encontradas historicamente, antecipariam em determinados momentos algumas dificuldades encontradas pelos estudantes? Dessa forma, a observação de como se deu a construção dos principais conceitos do Cálculo se torna, a nosso ver, imprescindível.

2.3 Análise dos materiais didáticos de física

A maioria dos materiais didáticos de física não desenvolve bem o conceito da velocidade instantânea. Ora ele é trabalhado de maneira restrita ao Movimente Uniformemente Variado, ora é feita a menção ao conceito pelo limite, porém sem muitas explicações.

A análise dos materiais didáticos de física da primeira série do ensino médio feita nesse trabalho será dividida em duas partes:

2.3.1 Livros didáticos usados em escolas públicas

Cada livro traz uma abordagem diferente mesmo quando o assunto é o mesmo. A comparação entre dois livros didáticos, que atualmente estão sendo usados no ensino de física, será restrita à abordagem do tema velocidade instantânea. Embora cada livro faça uma discussão dos primeiros conteúdos da cinemática, ambos trilham o mesmo caminho para o conhecimento dos conceitos básicos.

Logo depois da apresentação do Movimento Uniforme e seu estudo vem a introdução ao Movimento Uniformemente Variado. Para esse caso, como a aceleração é constante, os materiais introduzem a função velocidade em relação ao tempo e até mostram que seu gráfico é uma reta:

$$v = v_0 + at$$

No entanto, vale ressaltar que a Cinemática não é composta apenas por esses dois movimentos. Isto é, o professor pode se deparar com algum aluno que questione quando a aceleração não é constante, ou seja, como se faz para identificar a velocidade em determinado ponto do movimento.

Destarte, esse trabalho poderá contribuir na formação do aluno, pois ele apresenta mais casos que é possível efetuar os cálculos da velocidade instantânea de um móvel. É importante também frisar que essa contribuição se dará de maneira interdisciplinar.

2.3.2 Apostila da rede particular de ensino

As apostilas das escolas particulares, em geral, são desenvolvidas para agilizar o aprendizado, e por isso apresentam o conhecimento em tópicos, com o objetivo de dinamizar os conteúdos que serão estudados.

A apostila de uma grande rede de escolas particulares foi analisada. O material já aborda os conteúdos de uma maneira interdisciplinar, que inclui a matemática, ou seja, ele busca retomar os conhecimentos sobre funções, gráficos, grandezas proporcionais e trigonometria no triângulo retângulo antes de iniciar os conteúdos de física. Essa revisão do conhecimento possivelmente facilita muito o aprendizado.

No entanto, o estudo da velocidade instantânea se dá através do limite, e esse conceito não é abordado antes em momento algum, como visto na apostila:

> A velocidade escalar instantânea é o limite para o qual tende a velocidade escalar média, quando o intervalo de tempo considerado tende a zero.
>
> $$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$
>
> O cálculo desse limite é uma operação matemática chamada derivação. Escreve-se $V = \frac{ds}{dt}$ e lê-se: a velocidade escalar é a derivada do espaço em relação ao tempo. Em nosso estudo de Cinemática, só nos interessa a derivação da função polinomial:
>
> $$s = at^n + bt + c$$
>
> $$V = \frac{ds}{dt} = nat^{n-1} + b.$$

É possível notar que o conceito muito importante do limite foi abordado sem uma introdução apropriada. Em seguida fala-se sobre a derivada, mas esse tema também é introduzido de maneira inadequada.

CAPÍTULO

3

PLANOS DE AULA

3.1 Aula 1

3.1.1 Objetivo

A aula introdutória tem como objetivo a retomada de conhecimentos e a introdução da equação da reta que passa pela origem na forma reduzida.

3.1.2 Estratégias

A primeira aula deve resgatar conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, por isso uma revisão sobre o conceito de proporcionalidade é o ideal para o conhecimento que será apresentado em sequência.

Primeiramente, define-se uma **proporção**:

Definição 1. As grandezas a, b, c e d são proporcionais nessa ordem quando $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são razões iguais, ou seja

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ou equivalentemente,

$$ad = bc.$$

Em seguida mostra-se ao aluno que quando duas variáveis estão em proporção, podemos ter uma em **função** da outra, ou seja, uma **depende** da outra. Sejam x e y duas variáveis, tais que

$$ax = by.$$

Assim

$$y = mx$$

onde $m = \frac{a}{b}$, se $b \neq 0$.

No caso em que x e y são variáveis, temos que y é a váriavel que depende de x.

Nesse momento seria interessante para o docente mostrar ao aluno que o gráfico dessa relação $y = m.x$ é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano. O professor deve montar as tabelas para diferentes valores reais de m e os gráficos correspondentes a cada uma das tabelas. Assim, ficará fácil a percepção que a figura encontrada para a equação $y = m.x$ é sempre uma reta.

Logo em seguida, cabe mostrar que nas relações anteriores teremos o gráfico de uma reta. Isso deve ser feito com muitos exemplos:

1. $y = 2x$

x	**y**
$-\frac{1}{2}$	-1
$+1$	$+2$

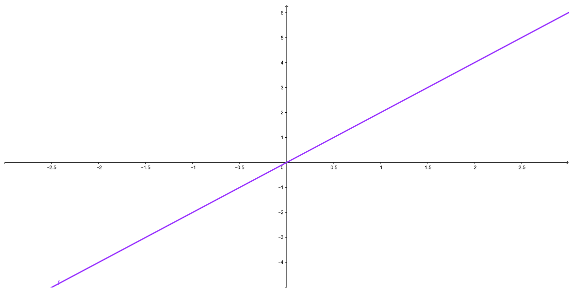

Figura 1 – A reta $y = 2x$

2. $y = 3x$

x	**y**
-1	-3
$+2$	$+6$

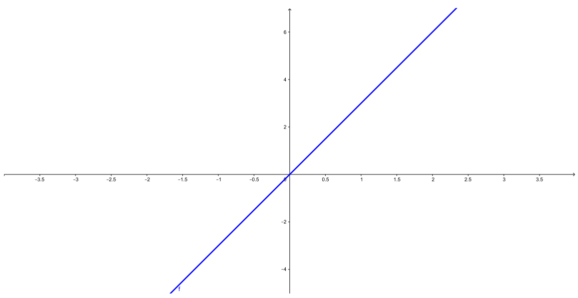

Figura 2 – A reta $y = 3x$

3. $y = -x$

x	**y**
-2	$+2$
$+1$	-1

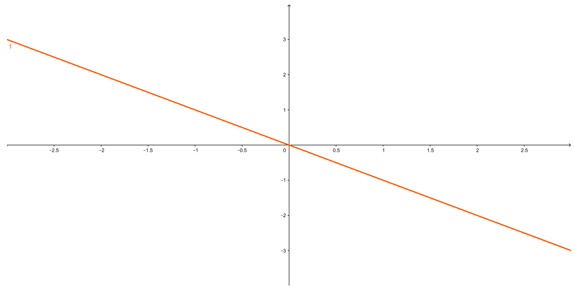

Figura 3 – A reta $y = -x$

4. $y = \frac{1}{2}x$

x	**y**
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
$+3$	$+\frac{3}{2}$

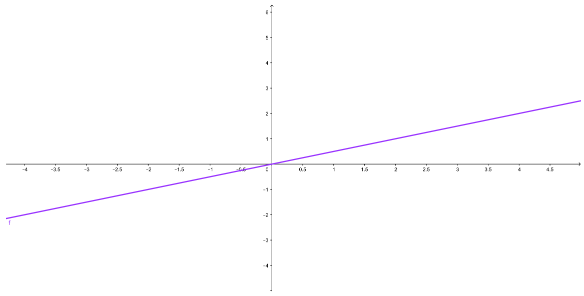

Figura 4 – A reta $y = \frac{1}{2}x$

5. $y = -2x$

x	**y**
$-\frac{1}{2}$	$+1$
0	0

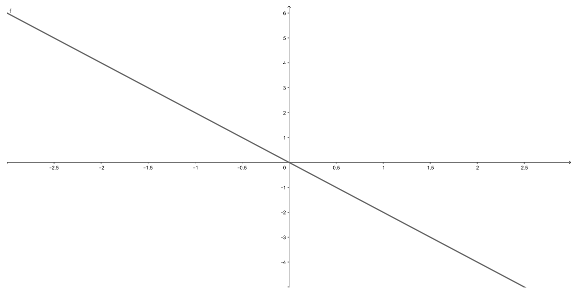

Figura 5 – A reta $y = -2x$

3.1.3 Atividades

1. Preencha a tabela e faça o gráfico usando a função

   (a) $y = -\frac{2}{3}x$

x	y
-3	
$-\dfrac{3}{4}$	
0	
$+2$	
$\dfrac{1}{3}$	

   (b) $y = \dfrac{6}{5}x$

x	y
-3	
$-\dfrac{3}{4}$	
0	
$+2$	
$\dfrac{1}{3}$	

2. Represente geometricamente as retas:

   (a) $y = 3x$

   (b) $y = -\dfrac{1}{2}x$

   (c) $y = -4x$

   (d) $y = 0,3x$

3.2 Aula 2

3.2.1 Objetivo

Estender o conhecimento da equação da reta que passa pela origem para o caso geral da equação da reta na forma reduzida. Traçar o paralelo entre função afim e a equação da reta na forma reduzida em geometria analítica. E apresentar o conceito de incremento em uma variável.

3.2.2 Estratégias

Depois de trabalhado muitos exemplos com tabelas e gráficos de $y = mx$, é natural estender o conhecimento para o caso geral da equação da reta na forma reduzida. Para tanto, vale novamente fazer uso de tabelas e de gráficos. Em cada um dos exemplos abaixo, será muito interessante para o aluno, se o professor apresentar os gráficos de $y = mx + n$ e $y = mx$ no mesmo plano cartesiano.

1. $y = 2x + 1$

x	**y**
-1	-1
$+2$	5

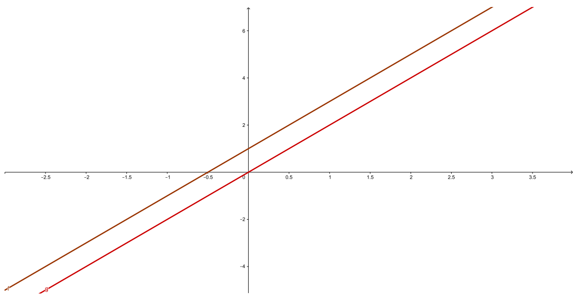

Figura 6 – A reta $y = 2x + 1$ em comparação à reta $y = 2x$

2. $y = -x + 3$

x	**y**
-3	$+6$
$+3$	0

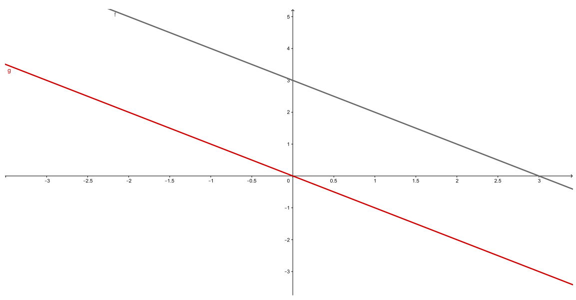

Figura 7 – A reta $y = -x + 3$ em comparação à reta $y = -x$

Ao comparar os gráficos acima, ficará fácil o aluno perceber que no primeiro caso, a reta $y = 2x + 1$ é uma translação de uma unidade na vertical do reta $y = 2x$, e no segundo exemplo, a reta $y = -x+3$ é uma translação da reta $y = -x$. Assim a generalização é o gráfico de $y = mx+n$ é a reta $y = mx$ com uma translação de magnitude n.

Sempre é pertinente observar que os valores x e y estão relacionados e que isso permite dizer que há uma **dependência** entre eles. Essa dependência é justamente o conceito de **função**, que é o objeto de estudo do primeiro ano do ensino médio.

Ainda nessa aula é o momento de apresentar um conceito muito importante: **incremento em uma variável**.

Definição 2.

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

$$\Delta y = y_1 - y_0$$

Os valores Δx e Δy são chamados incrementos nas variáveis x e y.

Esse conceito por si só não é de grande utilidade, entretanto quando usamos a *razão incremental*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

teremos uma forte ferramenta.

De fato, no caso $y = mx+n$, a razão incremental será a **inclinação** da reta, isso é, há uma relação muito forte com o ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas.

Alguns exemplos serão de grande ajuda na compreensão.

Exemplos:

1. $y = 5x+1$

   Consideraremos $x_0 = -2$, então $y_0 = 5.(-2)+1 = -10+1 = -9$ e $x_1 = 0$, que implica $y_1 = 5.0+1 = 0+1 = 1$.

   Assim,

   $\Delta x = x_1 - x_0 = 0-(-2) = +2$

   $\Delta y = y_1 - y_0 = 1-(-9) = +10$

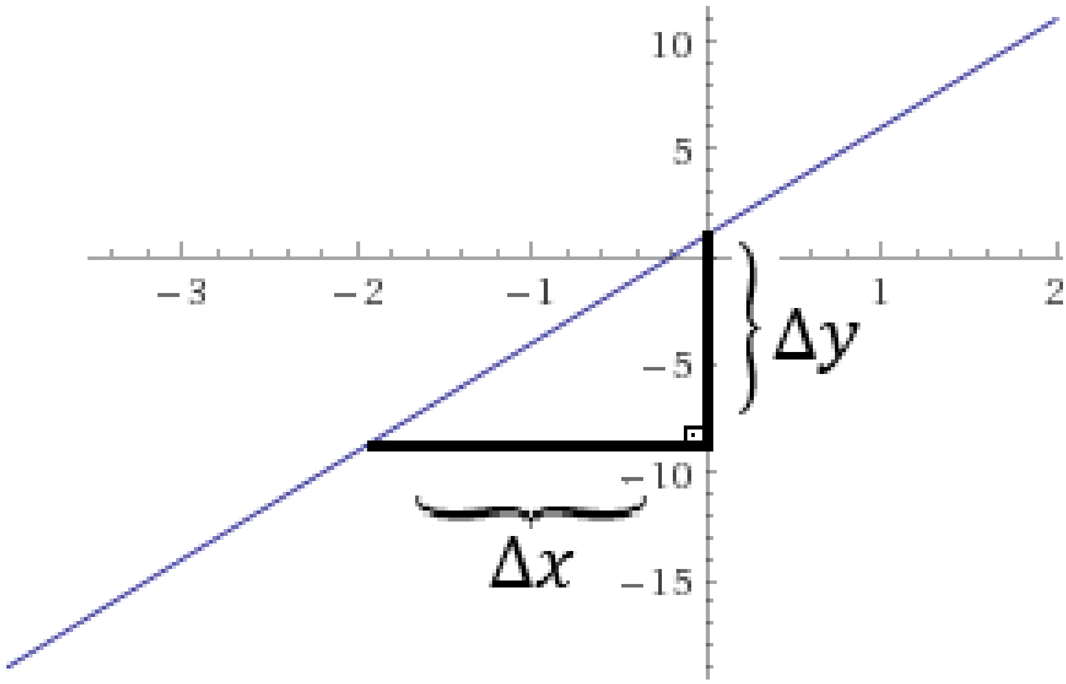

Figura 8 – Reta $y = 5x + 1$ com a representação geométrica dos valores Δx e Δy

Portanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+10}{+2} = 5$$

que é a inclinação da reta $y = 5x + 1$.

Vale observar que, quaisquer que sejam os valores escolhidos para o Δx e o Δy, tem-se a mesma inclinação. Veja com outro cálculo:

Consideraremos $x_0 = 8$, então $y_0 = 5.8 + 1 = 40 + 1 = 41$ e $x_1 = 32$, que implica $y_1 = 5.32 + 1 = 160 + 1 = 161$.

Assim,

$\Delta x = x_1 - x_0 = 32 - 8 = 24$

$\Delta y = y_1 - y_0 = 161 - 41 = 120$

Portanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{120}{24} = 5$$

que é a inclinação da reta $y = 5x + 1$ como já se havia calculado anteriormente.

2. $y = -2x + 3$

   Para esse exemplo será interessante não fixar os valores para x_0 e x_1

   $\Delta x = x_1 - x_0$, ou seja, $\Delta x + x_0 = x_1$

   $\Delta y = y_1 - y_0 = (-2x_1 + 3) - (-2x_0 + 3) = -2(\Delta x + x_0) + 2x_0 = -2\Delta x$

   Portanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\Delta x}{\Delta x} = -2$$

   que é a inclinação da reta $y = -2x + 3$.

3.2.3 Atividades

1. Preencha a tabela e esboce a reta $y = -\frac{2}{3}x + 4$

x	y
-2	
$-\dfrac{3}{2}$	
0	
$+1$	
$\dfrac{5}{3}$	

2. Construa o gráfico das seguintes funções:

   (a) $f(x) = 2x + 2$

   (b) $g(x) = -\dfrac{1}{2}x - 1$

   (c) $h(x) = -x + 4$

3. Calcule a razão incremental das funções abaixo para os valores dados de x:

   (a) $y = 3x - 1$ para $x_0 = 1$ e $x_1 = -1$

   (b) $y = -\dfrac{1}{2}x - 1$ para $x_0 = -2$ e $x_1 = \frac{1}{2}$

4. Determine a razão incremental das funções:

   (a) $f(x) = 3x - 10$

   (b) $g(x) = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{3}{8}$

3.3 Aula 3

3.3.1 Objetivo

Apresentação da função quadrática.

3.3.2 Estratégias

É natural que a primeira função quadrática a ser apresentada seja $y = x^2$. Mas essa introdução deve ser feita com cálculos para diferentes valores de x, construção de uma tabela para tais valores de x e os y correspondentes e a apresentação do gráfico.

Serão escolhidos alguns valores de x para o cálculo do correspondente y:

x	y
0	0
$+1$	$+1$
-1	$+1$
$+0,5$	$+0,25$
$-0,5$	$+0,25$
$+2$	$+4$
-2	$+4$
$+\frac{5}{2}$	$+\frac{25}{4}$
$-\frac{5}{2}$	$+\frac{25}{4}$
$+3$	$+9$
-3	$+9$

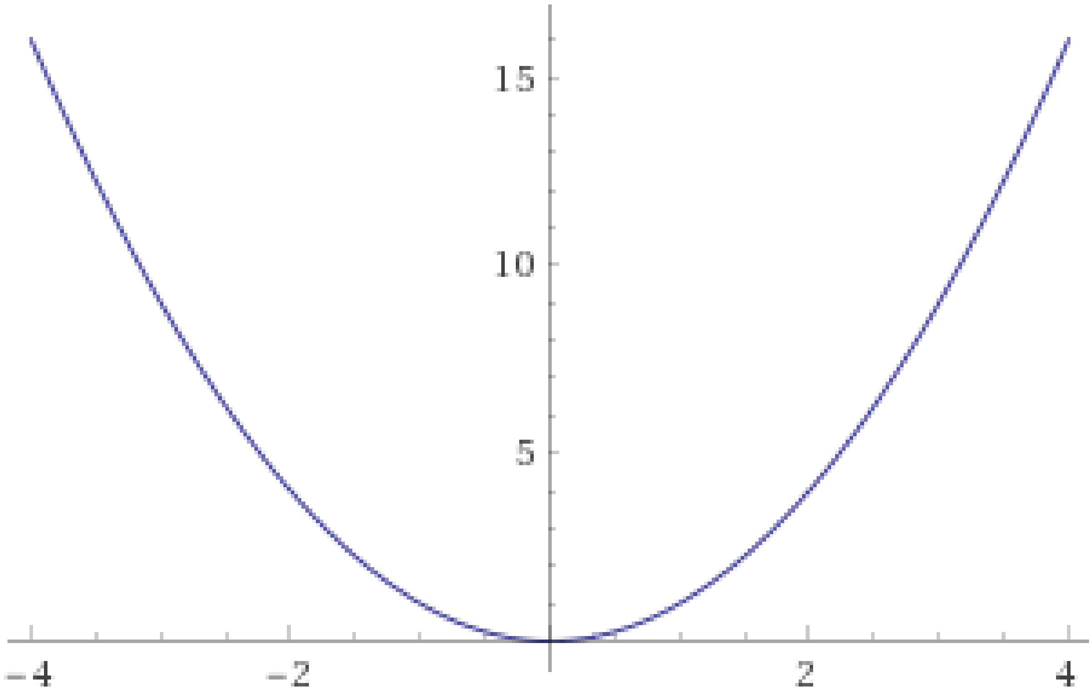

Figura 9 – Parábola $y = x^2$

O professor, nesse momento, tem a opção de mostrar ao aluno que a parábola admite um eixo de simetria sempre.

3.3.3 Atividades

1. Calcule valores de y para a função $y = x^2$ para os valores dados de x:

x	y
$0,2$	
-4	
$-0,7$	
$+1,8$	
$\frac{3}{2}$	
$-\frac{4}{9}$	
$-\frac{1}{5}$	
$+4$	
$\frac{7}{10}$	
$-\frac{9}{5}$	

2. Estabeleça valores para x e monte uma tabela e o gráfico da função $y = -x^2$

3.4 Aula 4

3.4.1 Objetivos

Estabelecer a compreensão do significado geométrico da reta tangente à uma curva.

3.4.2 Estratégias

Reapresentar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e questionar os alunos do porquê o gráfico realmente é dessa forma, isto é, será que para um valor bem grande ou intermediário aos valores da tabela de x, o gráfico não teria alguma alteração?

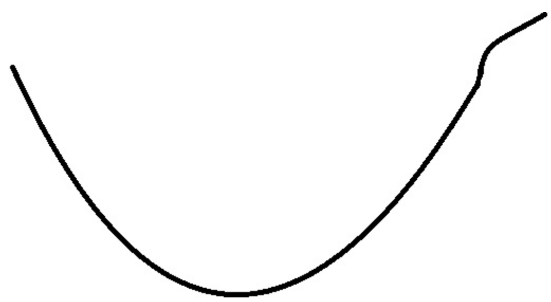

Figura 10 – Deformação no esboço da parábola

Isto é uma motivação para apresentar o conceito da reta tangente à uma curva e através deste demonstrar que o gráfico é realmente uma parábola.

Vale salientar ao discente que a concavidade de uma parábola indica o lado, para o qual encontra-se a abertura da mesma.

A primeira observação a ser feita é que qualquer curva que tenha concavidade voltada para cima terá reta tangente com inclinação crescente, como mostra a próxima figura:

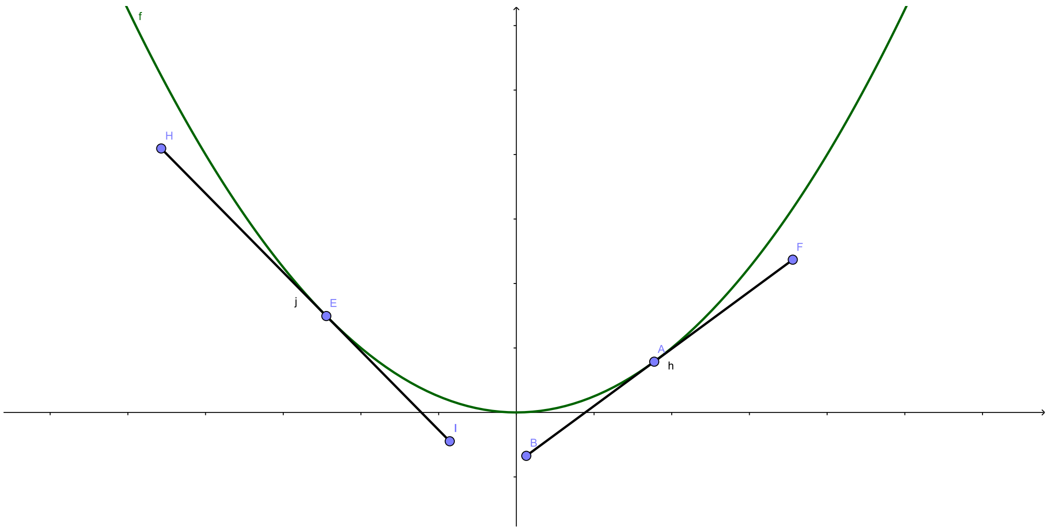

Figura 11 – Inclinação crescente da reta tangente à parábola

Claro que esse desenho não demonstra o fato. É somente uma ilustração para que o discente possa visualizar o que será feito. Ele mostra também o que está sendo questionado, ou seja, se o aspecto do gráfico é aquele mesmo, e se for, então a reta tangente ao gráfico terá sempre inclinação crescente.

Será necessário definir o que é uma função crescente:

Definição 3. Uma função real $f(x)$ é dita **crescente** se a medida que x cresce, $f(x)$ também cresce. E $f(x)$ será dita **decrescente** se $f(x)$ decresce ao passo que x cresce.

Esse é o momento de afirmar ao aluno e mostrar a veracidade desse fato:

Afirmação 1. A inclinação da reta tangente a curva estabelecida pela função $f(x) = x^2$ é sempre crescente.

Para demonstrar esse fato, é necessário que o aluno tenha conhecimento do que é a reta tangente à uma curva qualquer. Se isso for perguntado a eles, provavelmente, por causa da noção de reta tangente à circunferência, a resposta será "a reta que toca em somente um ponto"ou "a reta que passa nesse ponto e é perpendicular ao raio da circunferência ". Apesar de muito úteis para esse caso particular, não são tão abrangentes para qualquer curva. Logo, será necessário desenvolver esse conceito.

A definição aos alunos do que é a reta secante à uma curva qualquer deve vir de maneira natural, isto é, de um modo que o discente consiga abstrair o significado sem necessariamente introduzir uma definição formal carregada com símbolos. É recomendado que o professor utilize o software *GeoGebra*Observe uma sugestão:

1. Construa o gráfico de uma função qualquer;

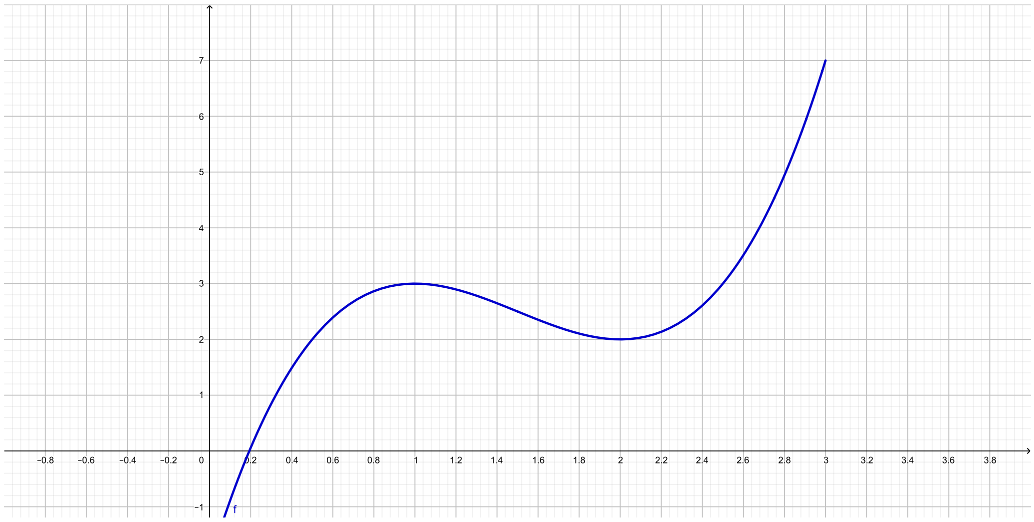

Figura 12 – Gráfico de uma função usado para construção da reta secante

2. Marque um ponto $A = (x_1, f(x_1)$ qualquer nessa curva;

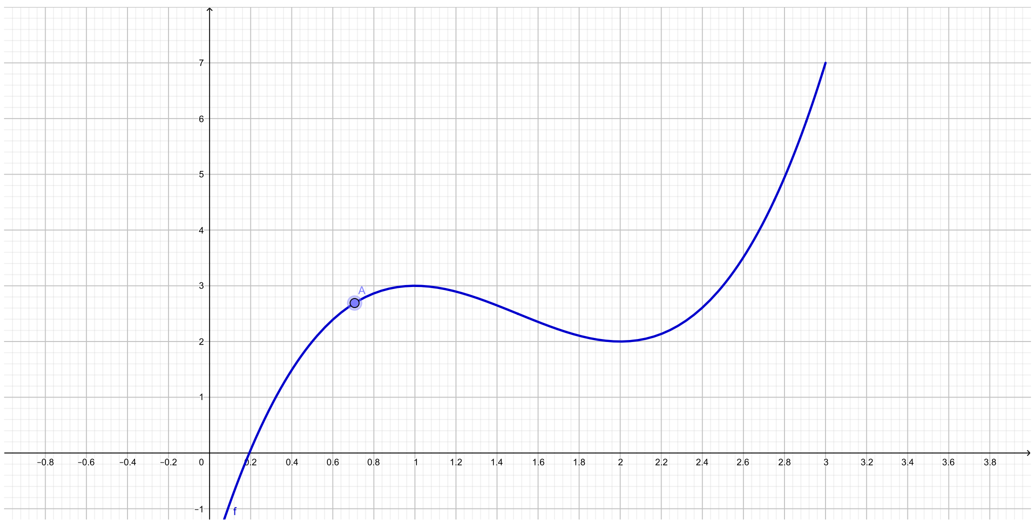

Figura 13 – Marcação do ponto onde passará a secante

3. Marque um ponto $B(x_2, f(x_2)$ distindo de A na curva;

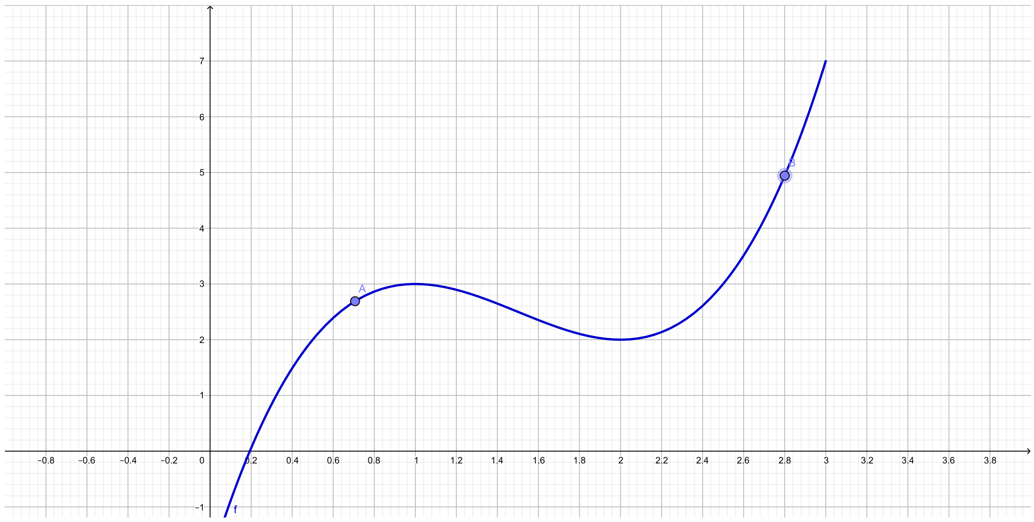

Figura 14 – Escolha de outro ponto, distinto do primeiro, para passar a secante

4. Trace a reta que liga A e B. Essa reta é definida como a **reta secante** à curva em A e B.

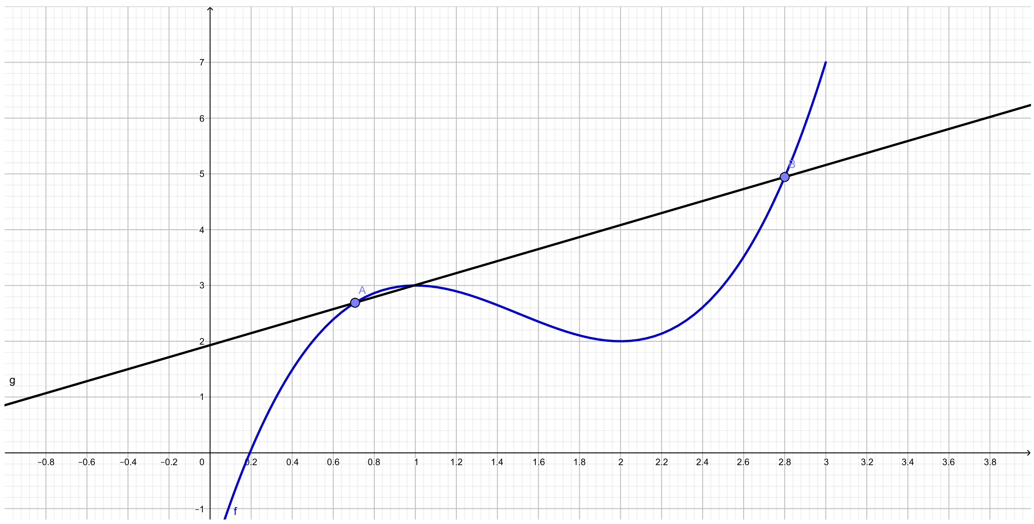

Figura 15 – A Reta Secante

Após esse trabalho, é muito importante frisar os conceitos aprendidos. Repetir a definições acima verbalmente.

Depois do passo a passo para definir a reta secante, vai se tornar mais natural a introdução da reta tangente:

1. Construir um gráfico de função e marcar dois pontos na curva, sejam eles $A = (x_1, f(x_1)$ e $B = (x_2, f(x_2)$. Trace a secante nesses dois pontos;

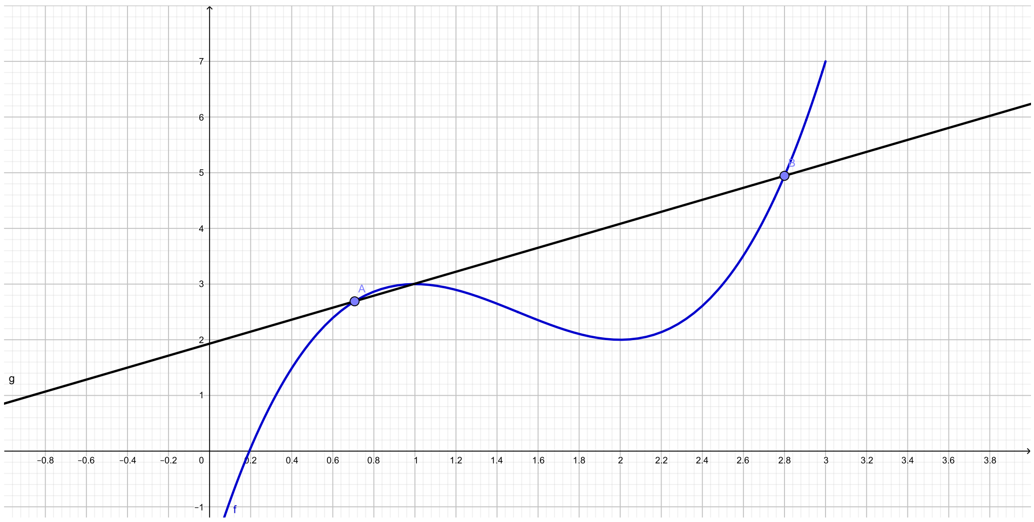

Figura 16 – Reta secante por A e B

2. Tomar um ponto $C = (x_3, f(x_3)$ mais próximo de A, entre A e B e traçar a secante por A e C;

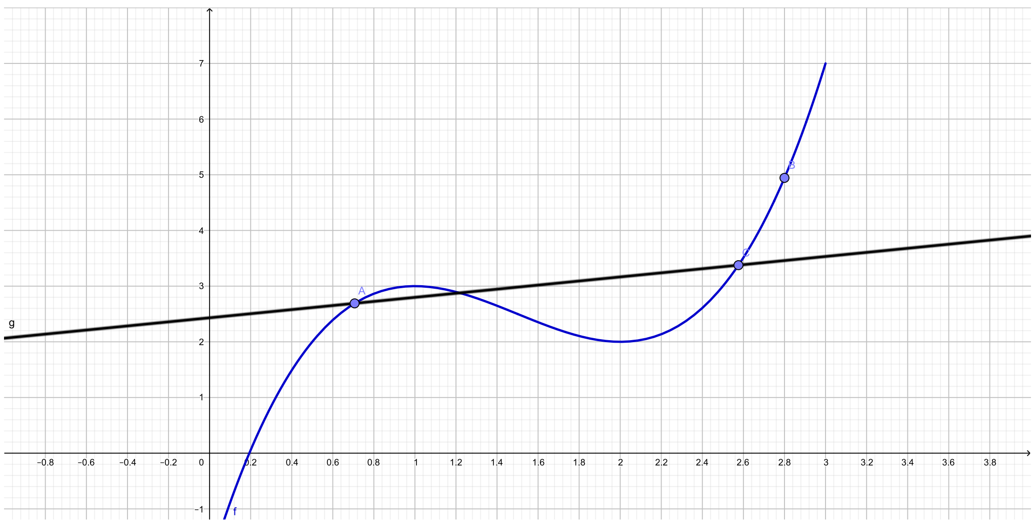

Figura 17 – Reta secante por A e C

3. Tomar um ponto D mais próximo de A e traçar a secante por A e D;

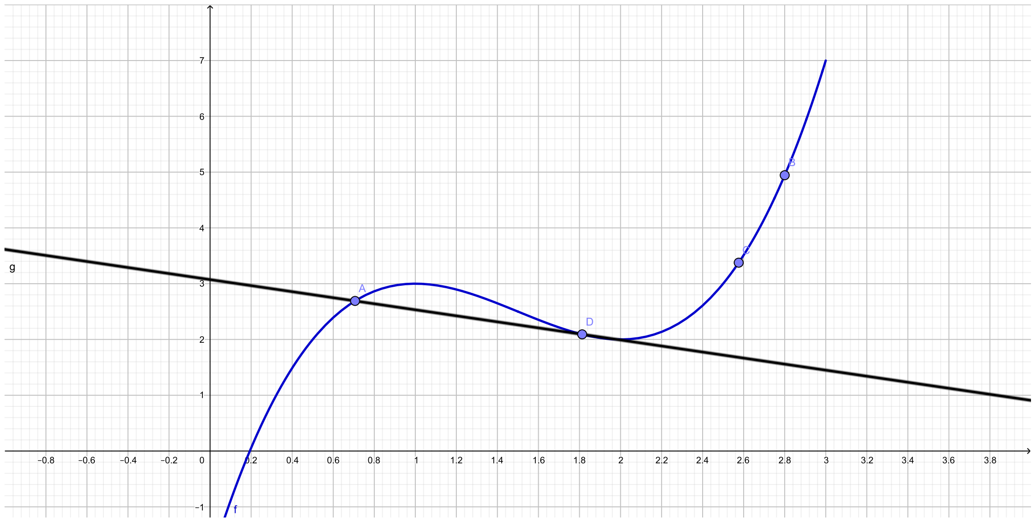

Figura 18 – Reta secante por A e D

4. Mostrar ao aluno que esse processo é recursivo, ou seja, sempre é possível tomar pontos mais próximos de A. E em cada um desses pontos é possível estabelecer a reta secante entre A e este ponto;

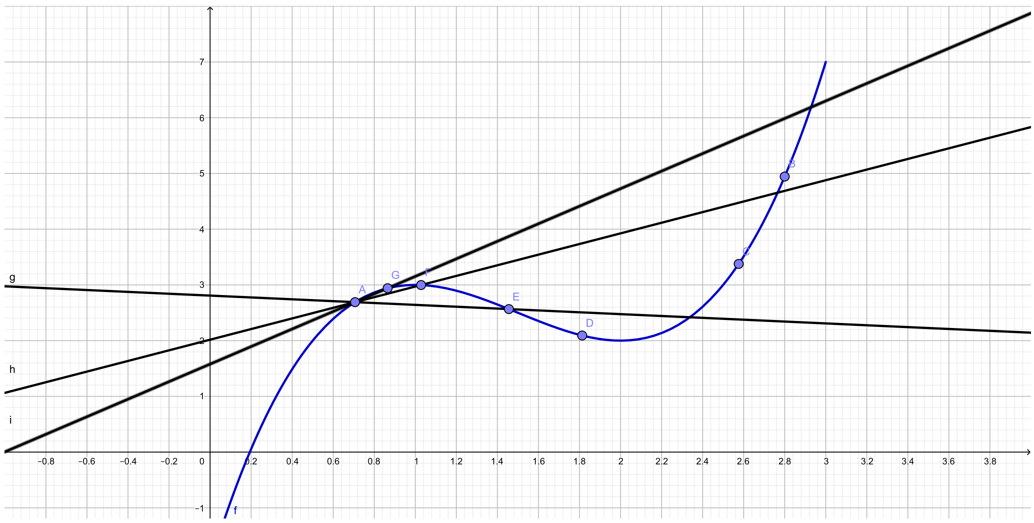

Figura 19 – Várias secantes se aproximando da tangente

5. Definir a **reta tangente** como sendo essa reta limite quando os pontos Q se tornam tão próximos de P quanto se queira.

   Observe que esse reta existe sempre nos casos que estão sendo estudados. Uma melhor interpretação desse fato será discutida mais adiante quando alguns exemplos já tiverem sido trabalhados.

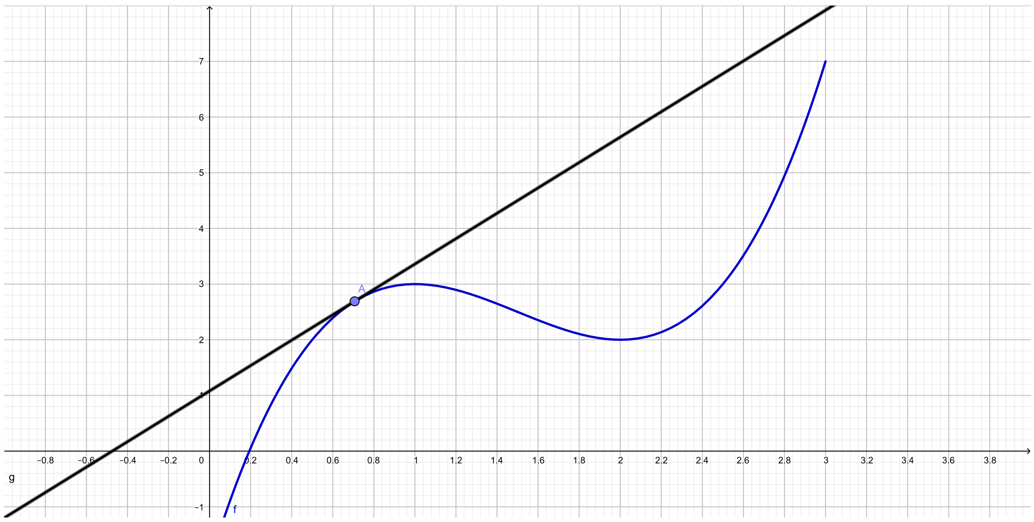

Figura 20 – A reta tangente

Lembrando que antes dessa definição, é muito importante que o professor esteja preparado para trabalhar com outros recursos. A sugestão é que se faça uma animação utilizando o software *GeoGebra* para ilustrar a definição acima. Este programa possibilita a plotagem de um gráfico da função com uma reta secante mudando de posição até chegar na posição da reta limite que será a reta tangente.

3.4.3 Atividades

1. Dada a função $y = f(x)$ abaixo representada no gráfico. Responda o que se pede:

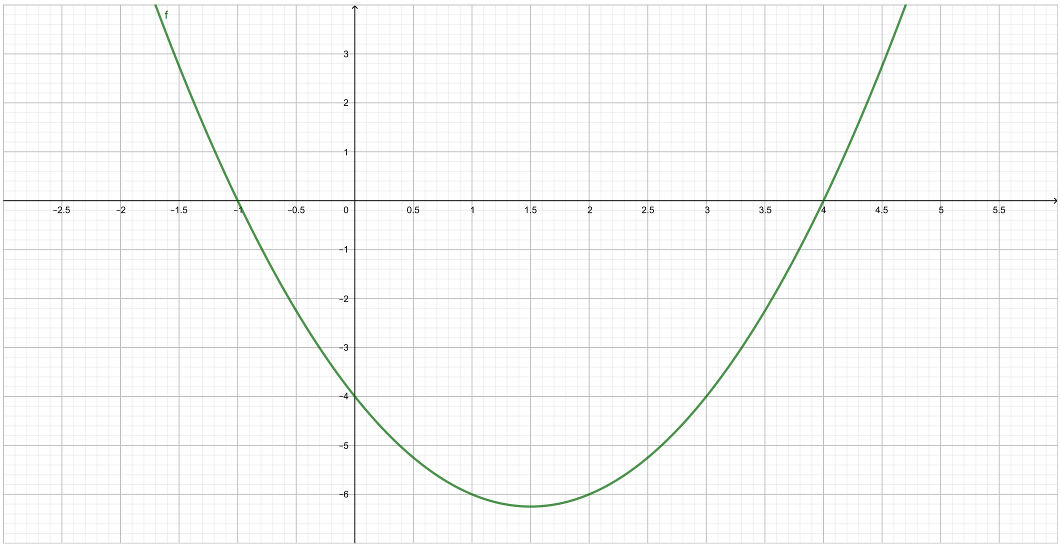

Figura 21 – Exercício 3.1

   (a) Qual o valor de $f(-1)$? E de $f(2)$?

   (b) Calcule, para $x_0 = -1$ e $x_1 = 2$ a razão incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ e explique o que signfica esse valor.

   (c) Trace a reta secante ao gráfico em $P = (2, f(2))$ e $Q = (-1, f(-1))$

2. Dada a função $f(x) = x^2$ e depois responda:

   (a) Escolha o ponto $P = (-2, f(-2))$ e trace a reta secante deste ponto com $Q = (1, f(1))$. Qual o valor da razão incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para esses pontos?

   (b) Escolha o ponto $R = (-\frac{3}{2}, f(-\frac{3}{2}))$ e trace a reta secante deste ponto com $S = (0, f(0))$. Qual o valor da razão incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para esses pontos?

   (c) Fixe o ponto P e desenhe várias retas secantes a esse ponto. Qual será a reta tangente?

3.5 Aula 5

3.5.1 *Objetivos*

Apresentar o conceito da derivada de uma função.

3.5.2 *Estratégias*

Essa aula é o ponto central, pois abordará a derivada de uma função. Portanto, deve-se falar com bastante cuidado da próxima definição, para que a compreensão do conceito seja efetivado.

Primeiramente, é necessário resgatar o que foi aprendido nas aulas anteriores. Então desenhar um gráfico de função e escolher pontos P e Q para traçar a reta secante se faz preciso.

Logo após, lembrar o signficado da razão incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

que é o coeficiente angular dessa reta, ou simplesmente a inclinação dela.

É conveniente falar novamente que a reta tangente será dada quando o ponto Q fica muito próximo de P de tal sorte que é praticamente impossível distinguí-los. Dessa forma, se $x_Q \neq x_P$, então pode-se considerar

$$h = x_Q - x_P = \Delta x$$

Logo, h é tão próximo de zero quanto se queira quando Q está muito próximo a P. Pode-se escrever, então, que a inclinação

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

quando h é muito pequeno é a **inclinação da reta tangente**. A esse valor limite, será dado o nome de <u>derivada</u> de f em x, e será denotado por $f'(x)$.

Vale observar que a existência desse valor é garantida para algumas funções. Os exemplos que serão estudados na primeira série estão resguardados nessa classe de funções. Mas ainda será mostrado quando não faz sentido calcular essa inclinação.

Agora é hora de voltar ao exemplo de $f(x) = x^2$. Escolhendo um ponto qualquer $P = (x, f(x))$, a construção da reta tangente à esse ponto será feita. Para tanto, escolha $Q = (x + h, f(x+h))$. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x+h) - f(x) \\ &= (x^2 + 2xh + h^2) - x^2 \\ &= 2xh + h^2 \\ &= h(2x+h) \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$$

será a inclinação da reta secante aos pontos P e Q.

Observamos que, ao manter fixo o valor de x e diminuindo o valor de h, teremos que P permanece fixo, ao passo que o ponto Q varia de posição se aproximando de P.

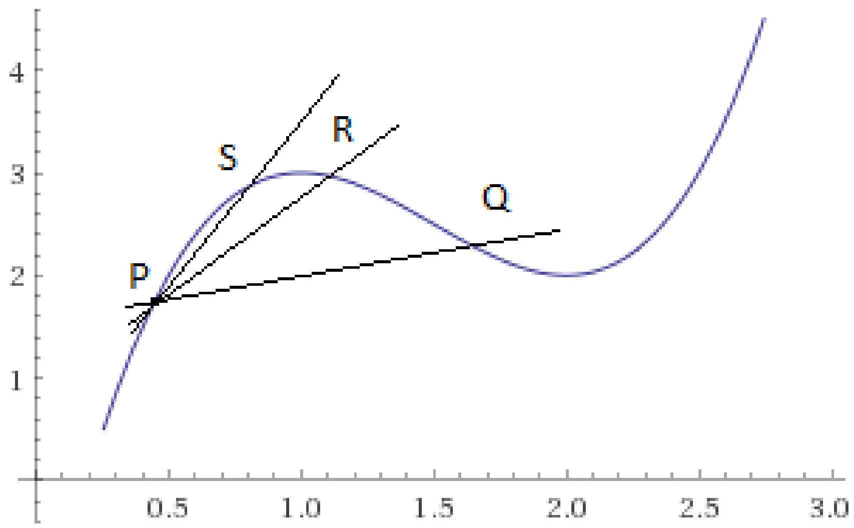

Figura 22 – Aproximação do ponto Q ao ponto P

Como é visível no gráfico acima, a *reta secante* muda de posição toda vez que um valor h menor é escolhido. Vale observar também que, $h \neq 0$ sempre. Quando h é tão próximo de zero quanto se queira, a reta secante se posiciona em uma posição limite, que é justamente a definição **reta tangente** à curva no ponto P.

Pelo que foi visto acima, a inclinação da reta tangente será exatamente o valor limite da expressão $2x+h$, quando h se aproxima de zero. Usaremos a expressão quando h tende a zero. Esse valor limite é $2x$.

Algo muito importante a salientar é que h nunca é zero, pois esse valor não faria sentido algum na razão incremental, onde h é o denominador. Deve-se mostrar ao aluno que o importante é saber o *valor limite* da razão incremental, valor que pode se tornar tão próximo quanto quisermos, desde que se faça *h suficientemente pequeno*.

Com isso, segue a importante

Definição 4. Esse valor limite, se existir, será chamado de derivada de f em x_P e será denotado por $f'(x_P)$.

É oportuno depois da definição da derivada calcular o valor de $f'(x)$ para alguns valores de x:

* $x = 1$:

$$f'(1) = 2.1 = 2$$

* $x = \frac{3}{2}$:

$$f'(\frac{3}{2}) = 2.\frac{3}{2} = 3$$

* $x = -2$

$$f'(-2) = 2.(-2) = -4$$

3.5.3 Atividades

1. Dados os pontos P, Q e a função $f(x)$, calule em cada caso a razão incremental:

    (a) $P=(1,f(1))$, $Q=(-3,f(-3))$ e $f(x)=x^2$.

    (b) $P=(\frac{1}{3},f(\frac{1}{3}))$, $Q=(-2,f(-2))$ e $f(x)=3x+6$.

    (c) $P=(-1,f(-1))$, $Q=(1,f(1))$ e $f(x)=x-1$.

    (d) $P=(2,f(2))$, $Q=(-\frac{3}{4},f(-\frac{3}{4}))$ e $f(x)=2x+2$.

2. Para $P=(x,f(x))$, $Q=(x+h,f(x+h))$, calcule $f'(x)$:

    (a) $f(x)=2x$

    (b) $f(x)=2x-3$

    (c) $f(x)=5x-1$

    (d) $f(x)=ax+b$

    (e) $f(x)=2x^2$

    (f) $f(x)=-x^2$

    (g) $f(x)=4x^2$

3.6 Aula 6

3.6.1 Objetivo

Introduzir algumas funções. Estender o caso da função quadrática e efetuar o cálculo da derivada.

3.6.2 Estratégias

Primeiramente, será mostrado que a derivada de funções constantes é sempre zero.

Demonstração. Seja c um número real fixo e considere $f(x) = c$. Assim, para $h > 0$,

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = c - c = 0$$

Logo,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{h} = 0$$

Portanto $f'(x) = 0$ para todo x real.

$\square$

Observe ao aluno que as derivadas para funções afim e para a função $f(x) = x^2$ já foram calculadas. Agora é o momento para ampliar os cálculos para quaisquer funções quadráticas.

Exemplos:

Para todos os exemplos, será considerado $h \neq 0$

1. Calcular a derivada de $f(x) = x^2 + 4$

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x+h) - f(x) \\
&= [(x+h)^2 + 4] - [x^2 + 4] \\
&= x^2 + 2xh + h^2 + 4 - x^2 - 4 \\
&= 2xh + h^2 \\
&= h(2x+h)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

Dessa maneira, fazendo h bem pequeno, tem-se que $f'(x) = 2x$.

2. Calcular a derivada de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$

$$\begin{array}{rcl}\Delta y & = & f(x+h) - f(x) \\ & = & [\frac{1}{2}(x+h)^2 + 3(x+h)] - [\frac{1}{2}x^2 + 3x] \\ & = & \frac{1}{2}x^2 + xh + \frac{1}{2}h^2 + 3x + 3h - \frac{1}{2}x^2 - 3x \\ & = & xh + \frac{1}{2}h^2 + 3h \\ & = & h(x + 3 + \frac{1}{2}h)\end{array}$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h} = \frac{h(x+3+\frac{1}{2}h)}{h} = x + 3 + \frac{1}{2}h$$

Dessa maneira, fazendo h bem pequeno, tem-se que $f'(x) = x + 3$.

3. Calcular a derivada de $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$

$$\begin{array}{rcl}\Delta y & = & f(x+h) - f(x) \\ & = & [2(x+h)^2 + 4(x+h) - 5] - [2x^2 + 4x - 5] \\ & = & 2x^2 + 4xh + 2h^2 + 4x + 4h - 5 - 2x^2 - 4x + 5 \\ & = & 4xh + 4h + 2h^2 \\ & = & h(4x + 4 + 2h)\end{array}$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h} = \frac{h(4x+4+2h)}{h} = 4x + 4 + 2h$$

Dessa maneira, fazendo h bem pequeno, tem-se que $f'(x) = 4x + 4$.

4. Calcular a derivada de $f(x) = \sqrt{3}x^2$

$$\begin{array}{rcl}\Delta y & = & f(x+h) - f(x) \\ & = & \sqrt{3}(x+h)^2 - \sqrt{3}x^2 \\ & = & \sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}xh + \sqrt{3}h^2 - \sqrt{3}x^2 \\ & = & 2\sqrt{3}xh + \sqrt{3}h^2 \\ & = & h(\sqrt{3}x + \sqrt{3}h)\end{array}$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h} = \frac{h(\sqrt{3}x + \sqrt{3}h)}{h} = \sqrt{3}x + \sqrt{3}h$$

Dessa maneira, fazendo h bem pequeno, tem-se que $f'(x) = \sqrt{3}x$.

5. De maneira geral, pode-se calcular $f'(x)$, onde $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a,b e c números reais e a é não nulo:

$$\begin{array}{rcc} \Delta y & = & f(x+h) - f(x) \\ & = & [a(x+h)^2 + b(x+h) + c] - [ax^2 + bx + c] \\ & = & ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c \\ & = & 2axh + bh + ah^2 \\ & = & h(2ax + b + ah) \end{array}$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h} = \frac{h(2ax + b + ah)}{h} = 2ax + b + ah$$

Assim, fazendo h bem pequeno, tem-se que $f'(x) = 2ax + b$.

3.6.3 Atividades

Calcule f'(x):

(a) $f(x) = 4x^2 + x$

(b) $f(x) = 3x^2 + 5$

(c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

(d) $f(x) = x^2 + x + 1$

(e) $f(x) = 3x + x^2$

(f) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{4}x$

(g) $f(x) = 5x^2 + bx + c$, onde b e c são constantes.

3.7 Aula 7

3.7.1 Objetivos

Nessa aula, ficará muito oportuno trabalhar com algumas aplicações muito interessantes do conceito da derivada. A sugestão é de uma aplicação geométrica e de uma aplicação na cinemática.

3.7.2 Estratégias

Primeiramente, será feita uma abordagem sobre a aplicação geométrica. Voltando ao exemplo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$:

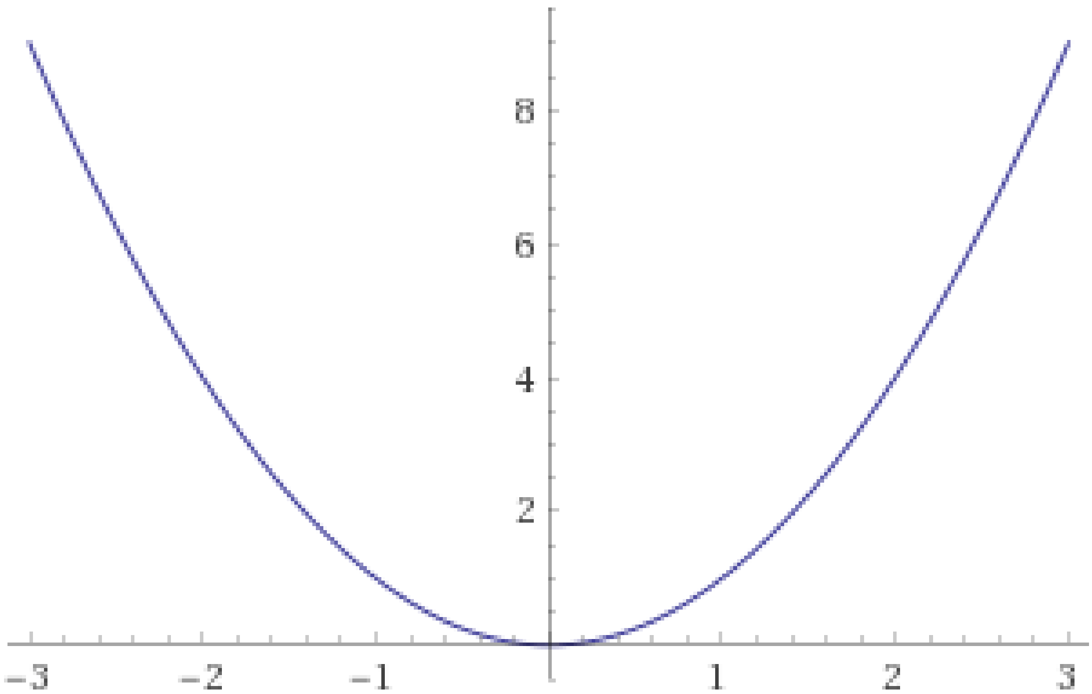

Figura 23 – Gráfico de $f(x) = x^2$

Observe que $y = f(x)$ é crescente para $x > 0$ e decrescente para $x < 0$.

De fato, se $a > b > 0$, implica que $a = b + c$, para algum $c > 0$. Logo,

$$f(a) = (a)^2 = (b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 > b^2 = f(b).$$

Analogamente, se $a < b < 0$ implica que $-a > -b > 0$ e $-a = -b + c$, com $c > 0$. Então,

$$f(a) = (a)^2 = (-a)^2 = (-b+c)^2 = (-b)^2 + 2(-b)c + c^2 = b^2 + 2(-b)c + c^2 > b^2 = f(b).$$

Já a derivada $f'(x) = 2x$ é crescente em todo a reta real. Como estudado na aula anterior, a derivada é a inclinação da reta tangente. **Concluímos que essa inclinação é sempre crescente**. Portanto, o gráfico da função $f(x) = x^2$ não pode ter o aspecto como a da figura 10.

Ou seja, o gráfico tem concavidade voltada para cima para todo x real.

Vale notar também que a reta tangente em $x = 0$ é horizontal, pois a derivada nesse ponto é zero.

$$f'(0) = 2.0 = 0$$

Consequentemente a estes fatos, o gráfico tem realmente o aspecto da figura 9.

Essa parte do plano de aula foi inspirado no livro (BARALLOBRES; CAMUS; FONCUBERTA, 1993):

Agora, a aplicação à Cinemática:

Se em duas horas uma partícula percorre em linha reta 144 km que separam o ponto A do ponto B, temos que a velocidade média será:

$$V_m = \frac{144km}{2h} = 72km/h$$

ou ainda,

$$V_m = 20m/s$$

isto sugere a seguinte fórmula:

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

onde Δx é a variação do espaço percorrido e Δt é a variação do tempo gasto para percorrer tal espaço. Note que a razão incremental V_m é taxa de variação média do espaço percorrido em um intervalo de tempo.

Como visto acima, a *velocidade média* descreve qual é a variação de espaço percorrida em um intervalo de tempo. Mas pode-se ter uma situação em que uma partícula se locomove mais rápido em uma parte do tempo e depois mais devagar no restante do percurso. Com isso vem a pergunta "Qual será a velocidade com que uma partícula se move no instante em que passou pelo ponto C. Por exemplo, se a partícula se moveu 1 km em 20s à partir do momento em que passou por C. Teremos

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1km}{\frac{20}{3600}h} = 180km/h$$

Logo, essa será uma aproximação para a velocidade instantânea em C. Com isso, podemos calcular uma melhor aproximação, ou seja com intervalo de tempo de 10s, depois com 5s, 1s, 1 milésimo de segundo, etc.. Portanto, o valor para o qual tenderá a velocidade instantânea virá, a medida que tomamos intervalos de tempo cada vez menores, isto será o que é chamada **Velocidade instantânea em C**.

Exemplo:

Suponha que um móvel se desloca ao longo do eixo x segundo $x(t) = 3t^2$. Qual a velocidade instantânea em $t = 2$?

Tome um intervalo de tempo pequeno, por exemplo $t = 0,1$, para fazer um cálculo aproximado:

$$\Delta x = x(2+0,1) - x(2)$$

$$\Delta x = x(2,1) - x(2)$$

$$\Delta x = 13,23 - 12$$

$$\Delta x = 1,23$$

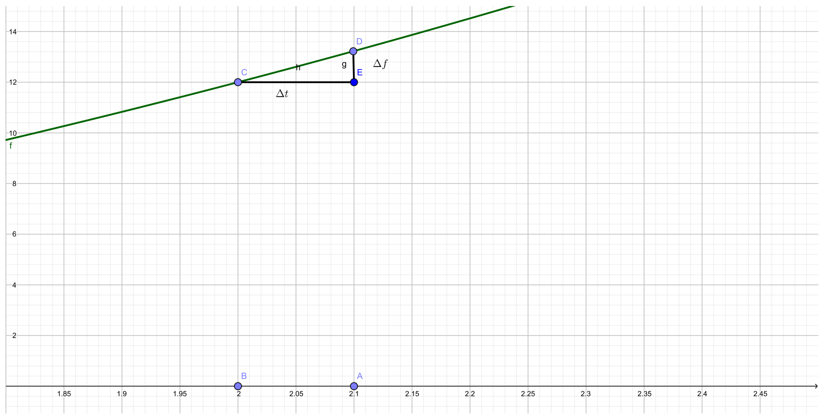

Figura 24 – Variação do espaço pelo tempo

Logo a *velocidade média* entre $t = 2$ segundos e $t = 2,1$ segundos é:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1,23}{0,1} = 12,3m/s$$

Mas, para uma melhor aproximação, toma-se, por exemplo, $\Delta t = 0,01s$. Qual seria a velocidade média nesse intervalo?

Contudo, nestes dois exemplos não é calculada a **velocidade instantânea** em $t = 2$, porque sempre pode-se tomar Δt menor.

Logo, ao invés de continuar calculando velocidades médias para distintos Δt pequenos, faz-se o cálculo análogo ao já feito antes para $\Delta t = h$:

$$\Delta x = x(2+h) - x(2) = 3(2+h)^2 - 3.(2)^2 = 3(4+4h+h^2) - 12 = 12h + 3h^2$$

Dessa forma, a velocidade média no intervalo de tempo $\Delta t = h$ será:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{h(12+3h)}{h} = 12+3h$$

Observa-se que se

* $\Delta t = 0,1$, a velocidade média será:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 12+3.(0,1) = 12,3$$

* $\Delta t = 0,01$, a velocidade média será:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 12+3.(0,01) = 12,03$$

Para obter aproximações melhores, basta tomar Δt cada vez menor:

* $\Delta t = 0,001$, a velocidade média será:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 12+3.(0,001) = 12,003$$

* $\Delta t = 0,00001$, a velocidade média será:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 12+3.(0,00001) = 12,00003$$

Definição 5. A **velocidade instantânea** é o valor limite, o qual as velocidades médias se aproximam a medida que Δt se torna cada vez menor, se esse valor existir.

Com essa definição, faz-se a observação que é a mesma definição da derivada já dada. Assim,

Teorema 1. Dada uma partícula se movendo segundo a função $x(t)$, em que t é o tempo e x é a posição, então a **velocidade instantânea** será $x'(t)$, se a derivada existir.

Portanto, a **velocidade instantânea** em $t = 2$ para a partícula que se move segundo a lei $f(t) = 3t^2$ será $12m/s$

Segue que é possível calcular a velocidade instantânea para um instante t qualquer. Para isso, considere $h \neq 0$:

$$\Delta x = x(t+h) - x(t) = 3(t+h)^2 - 3t^2 = h(6t+3h)$$
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{h(6t+3h)}{h} = 6t+3h$$

Como feito antes no cálculo da derivada, h é tão próximo de zero quanto se queira, logo

$$x'(t) = 6t$$

Note que, com essa fórmula fica mais fácil calcular a velocidade instantânea para qualquer valor:

1. para $t = 2$: $f'(2) = 6.2 = 12m/s$
2. para $t = 4,5$: $f'(4,5)6.4,5 = 27m/s$

Se uma partícula se move seguindo a lei

$$x(t) = t^2$$

onde t representa o tempo, então a velocidade instantânea em um tempo t qualquer séra

$$x'(t) = 2t$$

3.7.3 Atividades

1. Um objeto cai livremente sob a ação da gravidade. Sabe-se que a lei desse movimento é $x(t) = 4,9t^2$, onde x é medido em metros e o tempo em segundos. Calcule:

   (a) A velocidade instantânea para $t = 3s$ e $t = 10s$.

   (b) Quantos metros o objeto se deslocou depois de 5 segundos?

   (c) Quanto tempo levou para o objeto deslocar 245 metros?

   (d) Faça o gráfico de $x(t)$. Qual o seu significado?

   (e) Faça o gráfico de $x'(t)$. Qual o seu significado?

2. Um móvel se desloca em um trajeto retilíneo, partindo de um ponto A. No gráfico está representado a que distância do ponto A se encontra o móvel em cada instante t.

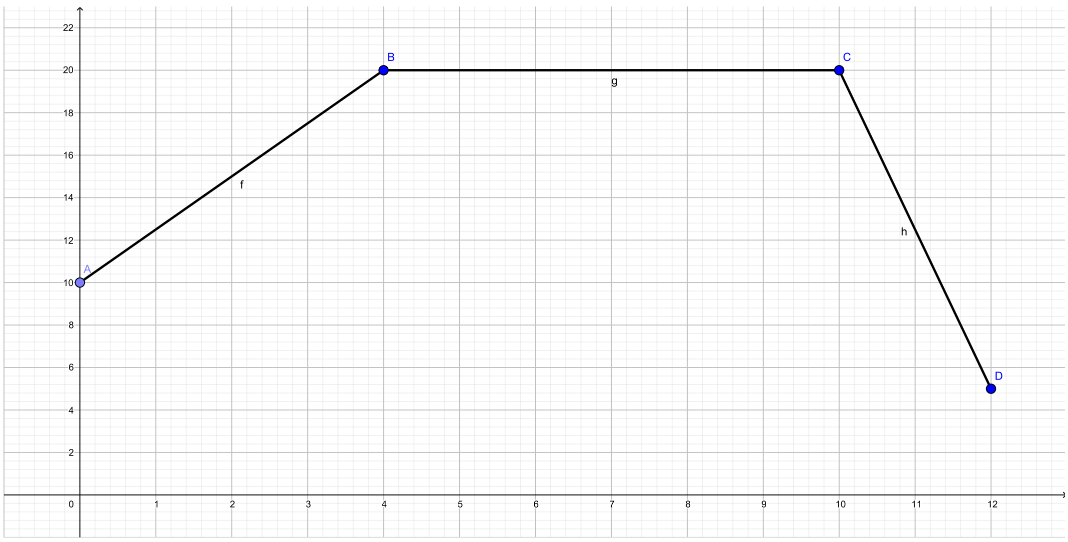

Figura 25 – Gráfico para resolução do exercício 2

   (a) O que houve com o móvel em $t = 4$ e em $t = 10$?

   (b) Qual foi a velocidade média nos intervalos [0,4]; [4,10] e [10,12]?

3. No problema (1) foi obtida uma fórmula para a velocidade instantânea de um objeto em queda livre pela ação da gravidade:

$$v(t) = 9,8t$$

   (a) Complete a tabela:

t	$0,5$	1	2	$2,5$	$2,1$	$2,01$	$2,001$	$1,99$
$v(t)$								

   (b) Calcule:

   * $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v(2,5) - v(2)}{0,5}$

   * $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v(2,1) - v(2)}{0,1}$

   * $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v(2,01) - v(2)}{0,01}$

   Qual o significado físico desses cocientes?

   (c) O que significa fisicamente o valor $v'(2)$?

   (d) Calcular $v'(t)$.

3.8 Aula 8

Esse plano de aula foi inspirado no livro (GUIDORIZZI; CÁLCULO,):

3.8.1 Objetivos

Apresentar uma aplicação de um teorema muito importante do Cálculo, o Teorema do Valor Médio.

3.8.2 Estratégias

Como na aula anterior foram estudadas os conceitos de velocidade média e velocidade instantânea, fica bastante oportuno estabelecer o seguinte problema aos alunos:

Suponha um veículo se locomovendo segundo a função $s(t) = \frac{1}{2}t^2$, entre $t = 0$ e $t = 10$, onde s indica o espaço percorrido e t o tempo. Será que ao calcular as velocidades instantâneas, em algum momento o valor da velocidade instantânea será igual ao valor da velocidade média? Em outras palavras, se traçarmos o gráfico da derivada, para algum t o gráfico de $s'(t)$ vai cruzar o gráfico da velocidade média?

A resposta é sim e é intuitivo que será dessa forma. No entanto, o intuito aqui é mostrar ao aluno que:

Teorema 2. Suponha uma função f contínua em [a,b] e derivável em (a,b), então existirá pelo menos um c em (a,b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Talvez a melhor apresentação desse teorema importante não seja essa descrita acima, visto que a formalidade matemática nos livros de Cálculo são maiores do que o texto aqui apresentado. Tal formalidade é muito importante e deve sempre ser trazida na medida do possível. Contudo, para o primeiro ano do Ensino Médio, esse desenvolvimento formal ainda não pode ser muito estabelecido, pois eles não o compreenderiam bem.

Logo, um exemplo vem bem a calhar, seja o exemplo já citado acima do problema das velocidades:

Temos que o veículo se locomove segundo a função $s(t) = \frac{1}{2}t^2$, logo sua velocidade média será

$$V_m = \frac{s(10) - s(0)}{10 - 0} = \frac{50 - 0}{10} = 5$$

Dessa forma, deve-se encontrar t em (0,10) tal que $s'(t) = 10$

Para isso, considere $h > 0$:

$$\Delta s = s(t+h) - s(t) = \frac{1}{2}(t+h)^2 - \frac{1}{2}t^2 = h(t + \frac{1}{2}h)$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{h(t+\frac{1}{2}h)}{h} = t + \frac{1}{2}h$$

Como feito antes, h é tão próximo de zero quanto se queira, logo

$$s'(t) = t$$

Dessa forma, como se busca t em (0,10) tal que $s'(t) = 5$,

$$s'(t) = t = 5$$

Logo, em $t = 5$ a velocidade instantânea é igual a velocidade média.

Geometricamente, o Teorema do Valor Médio pode ser interpretado da seguinte forma: considere a reta que passa pelos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, então existirá um ponto $C = (c, f(c))$, c entre a e b tal que a reta tangente ao gráfico da função, nesse ponto c, tem a mesma inclinação que a reta que passa pelos pontos A e B.

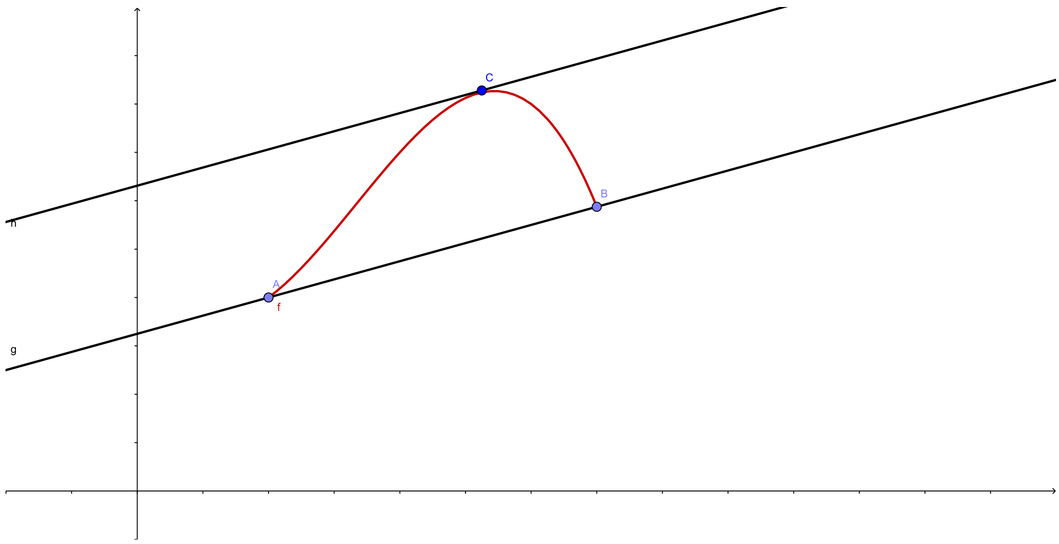

Figura 26 – Representação Geométrica do Teorema do Valor Médio

3.8.3 Atividades

1. Se uma partícula se locomove segundo a função $s(t)$. Em cada caso, calcule a velocidade média (V_m) e encontre c tal que $s'(t) = V_m$:

   (a) $s(t) = 2t + 1$, para $t = 2$ até $t = 5$.

   (b) $s(t) = \frac{1}{3}t + 1$, para $t = 0$ até $t = 6$.

   (c) $s(t) = at + b$, para $t = 1$ até $t =$.

   (d) $s(t) = t^2$, para $t = 4$ até $t = 7$

   (e) $s(t) = t^2 - 4t$, para $t = 0$ até $t = 5$

   (f) $s(t) = t^2 - 6t + 9$, para $t = 1$ até $t = 3$

2. Em cada função f, faça um esboço do gráfico, da reta que liga $(a, f(a))$ e $(bf(b))$ e encontre o ponto c tal que a inclinação da reta tangente à $f(c)$ seja a mesma inclinação dessa reta:

   (a) $f(x) = x^2$, $a = \frac{1}{2}$ e $b = 2$.

   (b) $f(x) = 3x^2 - 3$, $a = 2$ e $b = \frac{7}{2}$

CAPÍTULO

4

CONCLUSÃO

Este trabalho teve por objetivo contribuir com o enriquecimento de conteúdos abordados no Ensino Médio, levando em consideração o estudo da derivada. Para tanto, foi desenvolvido uma sequência didática, mostrando um caminho para o docente que gostaria de introduzir tal assunto para alunos do primeiro ano.

Foi razoável a estimativa de que o melhor público para esse tópico seja já o primeiro ano, dado que é onde se inicia o estudo das funções.

O trabalho espera ajudar na aprendizagem da matemática e também da física, dado o caráter interdisciplinar desenvolvido em planos de aula e a relevância do assunto para a Cinemática.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. Várias faces da matemática–tópicos para licenciatura e leitura geral. **São Paulo: Blucher**, 2007. Citado nas páginas 19 e 20.

BARALLOBRES, G.; CAMUS, N.; FONCUBERTA, J. **Matemática, Cálculo Diferencial e Integral**. [S.l.]: Aique, Bs. As, 1993. Citado na página 56.

BRASIL, S. Pcn+ ensino médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC**, 2002. Citado nas páginas 21 e 22.

GUIDORIZZI, H. L.; CÁLCULO, U. C. de. vol 1. **Editora LTC**. Citado na página 62.

NACIONAIS, P. C. matemática. **Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF**, 1998. Citado na página 21.

PEREIRA, V. M. C. Cálculo no ensino médio: uma proposta para o problema da variabilidade. 2009. Citado na página 23.

REIS, F. d. S. *et al.* A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. [sn], 2001. Citado na página 23.

ICMC USP
SÃO CARLOS