UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOÃO ALFREDO MONTENEGRO CASTELO

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS: UM RESGATE HISTÓRICO DOS MÉTODOS E UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO DA *SEQUENCIA FEDATHI* NO SEU ENSINO.

FORTALEZA
2013

JOÃO ALFREDO MONTENEGRO CASTELO

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS: UM RESGATE HISTÓRICO DOS MÉTODOS E UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO DA *SEQUENCIA FEDATHI* NO SEU ENSINO.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro.
Coorientador: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves

FORTALEZA
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Matemática

Castelo, João Alfredo Montenegro.

Resolução de equações quadráticas: um resgate histórico dos métodos e uma proposta de aplicação da *Sequência Fedathi* no seu ensino. / João Alfredo Montenegro Castelo. – 2013.

55 f. : il. pb., enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Fortaleza, 2013.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro.

Coorientação: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves.

JOÃO ALFREDO MONTENEGRO CASTELO

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS: UM RESGATE HISTÓRICO DOS MÉTODOS E UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO DA *SEQUENCIA FEDATHI* NO SEU ENSINO.

Dissertação apresentada ao programa PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional pela Universidade Federal do Ceará como requisito à obtenção do título de Mestre. Área de concentração: Matemática Básica.

Orientador: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro.
Coorientador: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves

Aprovada em: ___/___/______.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro. (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____
Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves
Universidade Estadual do Ceará (IFCE)

____
Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho à minha Esposa Luciana Guedes Araújo, companheira para todas as horas e aos meus filhos João Pedro Guedes Castelo, que faleceu a uma semana do nascimento, Luísa Guedes Castelo e Heitor Guedes Castelo que me enchem de felicidade e são a razão de toda a minha força para vencer as dificuldades impostas pela vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pela vida e pela capacidade de realizar este trabalho.

A toda a minha família, em especial a minha esposa Luciana Guedes e a minha mãe Wládia Castelo, além de meus irmãos e minha sogra, pelas orações e por todo apoio que me deram no andamento deste mestrado.

A todos os colegas do PROFMAT, da Universidade Federal do Ceará, em especial a meu fiel amigo Francisco Ricardo Sampaio, que lutaram comigo para a obtenção deste título.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro e Prof. Dr. Francisco Regis Viera Alves, que com o conhecimento que me transmitiram e a paciência com minhas dificuldades tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Ao governo Federal e a CAPES pelo financiamento desse curso de mestrado.

A todos, meus sinceros agradecimentos.

A Matemática é a honra do espírito humano. (Leibniz)

ÍNDICE

RESUMO

Desenvolvemos neste trabalho um estudo a respeito das equações do 2º grau em um contexto histórico que visa dar ao professor de matemática dos Ensinos Fundamental e Médio condições de instigar o aluno a levantar importantes questionamentos sobre o assunto aumentando o seu interesse e, consequentemente, melhorando o seu aprendizado.

Para atingir este objetivo, destinamos o Capítulo 2 para tratar de história da matemática em um contexto geral e também mostrar algumas formas como os povos antigos trabalharam as equações quadráticas. Neste Capítulo, escrevemos sobre os seguintes métodos: Árabe, Egípcio, Mesopotâmio (Babilônio), Grego, Hindu, Chinês e Europeu.

Pesquisamos maneiras de abordar o ensino das equações do 2º grau, que fugissem de uma simples apresentação da conhecida fórmula de “Bhaskara” e reservamos o Capítulo 3 para sugerir um exemplo de aplicação da “*Seqüência Fedathi”*, que cria e possibilita uma hierarquização dos momentos que podem ser trabalhados por meio de sua história.

No último capítulo, apresentamos algumas considerações com influência de LAGES (2001), que sugere a vigilância a certos elementos relacionados ao livro didático do ensino médio e, particularmente, ao conteúdo que foi objeto desta investigação.

Por fim, acrescentamos alguns anexos que falam um pouco sobre a vida e obra de dois importantes matemáticos da antiguidade: Bhaskara (hindu) e Al-Khwarizmi (árabe) além de expormos alguns problemas antigos como sugestão de utilização em aula.

Palavras-chave: história da matemática, geogebra, resolução de problemas e proposta didática.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

I. JUSTIFICATIVA

Como professor de Ensinos Fundamental e Médio, tive muitos alunos que, por pouco interesse matemático, sentiam-se satisfeitos em apenas cumprir o que era determinado mesmo que não tivessem entendido direito o que estava sendo explicado. Ao ensinar equações quadráticas não foi diferente. Percebi, então, que não era suficiente apenas repassar o que o livro didático adotado sugeria.

As equações do 2º grau são estudadas desde o ensino fundamental, mais precisamente 9º ano, e pelo que pude observar em nos livros didáticos que analisei, os autores iniciam o estudo da maneira que lhe convém, porém tudo é feito para que ao final desse processo o aluno domine, às vezes sem sequer refletir, a aplicação da fórmula resolutiva, muito conhecida aqui no Brasil como fórmula de Bhaskara.

> O capítulo 4, do livro de Benigno e Cláudio têm o mérito de mostrar que é possível escrever 40 páginas sobre um assunto sem dizer praticamente nada sobre o mesmo. Continuando o estilo dos capítulos anteriores, as afirmações feitas nunca são justificadas, os fatos mais relevantes e básicos sobre as funções quadráticas são omitidos, os exercícios são quase todos de natureza manipulativa... (LAGES, 2001, p. 52)

Algumas vezes são inseridos nos livros, exercícios que tentam se relacionar com situações reais, mas não chegam a dar uma visão ampla aos alunos do que se pode realmente fazer com as equações quadráticas. Podemos ilustrar essa afirmação a partir da leitura da citação abaixo:

> “Dissemos acima que *quase* todos os exercícios são manipulativos. Há exatamente cinco que se referem a situações reais. Na verdade, todos eles são variações triviais do mesmo tema: achar o retângulo de área máxima que tem um perímetro dado. Isto está muito longe de dar a idéia da grande variedade de problemas interessantes que se referem a situações reais e que podem ser tratados via funções quadráticas.” (LAGES, 2001, p. 52)

Apesar de que alguns de meus alunos se contentavam em meramente encontrar as raízes da equação, mas sempre havia aquele que desejava mais, era inquieto, queria saber, por exemplo: Quem foi Bhaskara? Como se chegou à fórmula resolutiva usada atualmente? Será que haveria outras maneiras de solucionar essas equações?

Através desses questionamentos, que podem acompanhar um aluno do ensino fundamental, às vezes, até o ensino superior, resolvi fazer um estudo da história dos métodos de resolução de equações do 2º grau, falar um pouco sobre a vida e obra de seus autores, e principalmente propor uma forma de ensino mais estimulante do assunto.

Este trabalho pode oferecer ao professor de matemática de ensinos fundamental ou médio, condições para esclarecer algumas dúvidas de seus alunos, como as exemplificadas anteriormente, e também enriquecer sua prática com história da matemática, já que o professor pode comentar a respeito de alguns métodos para resolução das equações polinomiais do 2º grau desenvolvidos ao longo de muitos séculos e também utilizar um bom software educacional como apoio para aplicar uma sequência didática de ensino conhecida como Sequência Fedathi.

II. PÚBLICO ALVO

De modo geral as equações quadráticas são abordadas no 9º ano do Ensino Fundamental e se tornam pré-requisito para o estudo de Função do 2º grau estudada no 1º ano do Ensino Médio.

Desta forma este trabalho é direcionado aos professores que trabalham com Ensinos Fundamental e Médio, mas ele pode ser utilizado também por alunos do nível de graduação, principalmente licenciatura em Matemática, para uma ampliação de seus conhecimentos sobre equações do 2º grau podendo transmitir esse estudo aos seus discentes.

III. OBJETIVOS

Investigar na evolução histórica do conceito de equações polinomiais do segundo grau, aspectos de natureza variada que possam promover melhorias na prática do professor de matemática, instigando o docente a conhecer várias maneiras de resolver equações do 2º grau desde a antiguidade e esclarecer dúvidas a respeito da origem e da autoria desses métodos, além de mostrar que o professor deve sair de uma mera reprodução da abordagem do livro didático adotado na sua escola, pois o resgate histórico das equações do 2º grau pode contribuir para uma melhor compreensão desta questão pelos alunos.

Finalmente, aplicar os conteúdos investigados na Seqüência Fedathi usando como ferramenta auxiliar o Software educacional GeoGebra (http://www.geogebra.org/cms/), que pode ser baixado e instalado gratuitamente em qualquer computador e usado em qualquer escola ou em casa.

IV. PROBLEMÁTICA

A citação a seguir de Lages (2001) aponta deficiências encontradas no capítulo de funções quadráticas em um livro de Gelson Iezzi, um dos autores mais adotados no ensino médio no Brasil.

> O capítulo sobre funções quadráticas inicia com três exemplos sendo, a exceção do primeiro, bastante obscuros para o aluno da primeira série do ensino médio e, em seguida, a fórmula de resolução da equação do segundo grau é apresentada sem nenhuma explicação. Os autores devem imaginar que os alunos já conhecem do ensino fundamental, mas seria adequado agora, com um pouco mais de maturidade, eles pudessem conhecer sua demonstração. (LAGES, 2001, p. 109).

A partir dessa citação percebemos que o autor Gelson Iezzi em um de seus livros para 1º ano do ensino médio, não teve a preocupação de demonstrar a fórmula resolutiva, supondo, provavelmente, que o aluno já traz esse conhecimento do 9º ano. Desta forma é importante que o professor do 9º ano, independente do livro adotado apresentar ou não a demonstração, procure conduzir as suas aulas para chegar a tal prova.

Também é interessante mostrar que o próprio IEZZI (2004) em outra obra, Fundamentos de Matemática Elementar, volume 1, diferente da obra citada por LAGES (2001), já tem um rigor bem maior na exposição do tema e apresenta, logo no início do capítulo sobre funções quadráticas, a forma canônica do polinômio do 2º grau, donde tira imediatamente a demonstração da fórmula resolutiva para obter as raízes da equação quadrática, como descrito abaixo.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ, também chamado discriminante do trinômio do 2º grau, temos a forma canônica.

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

Daí a solução da equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Utilizando a forma canônica temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow\ a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right] = 0 \leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right) \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Fonte: Iezzi (1993), Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 1 , p. 140 e 141

Nem tanto, nem tão pouco. Os livros de Gelson Iezzi citados são para ensino médio, ou seja, um aluno do 9º ano teria que estar bastante amadurecido para compreender a demonstração exposta, dado o nível de formalidade que muitos nesta série não estão acostumados. Porém, como já dissemos antes, não se deve omitir a prova da fórmula ainda no 9º ano, sugiro então, a inserção paulatina do assunto através da história da matemática e da resolução de problemas, para que ao final dessas aulas, a demonstração possa ser apreendida naturalmente assim como todo o restante do conteúdo.

Os autores de livros didáticos deveriam escrever se perguntando: O que os professores conhecem além do livro didático sobre equação do 2º grau? A história da matemática recebe a devida importância na sala de aula? Como os alunos reagem aos métodos de ensino utilizados pelos seus professores? Os objetivos são atingidos?

> *"O capítulo 4 do livro de Antonio Machado – Matemática na Escola do segundo grau começa com equações do segundo grau. Este é mais um assunto que o aluno já estudou antes, portanto esperava-se um tratamento mais amadurecido do mesmo, completando certas condições, abordando novos aspectos e, principalmente, salientando os pontos relevantes. Mas nada disso acontece..."* (LAGES, 2001, p.11)

> *“É muito grande a variedade de problemas interessantes, antigos e atuais, que se resolvem usando equações do segundo grau. Os babilônios, há 4 mil anos, já tratavam do problema de determinar dois números conhecendo sua soma e seu produto. Este problema não é mencionado aqui, o que é imperdoável, pois resolver uma equação do segundo grau (qualquer uma) corresponde a procurar dois números conhecendo sua soma e seu produto. Por exemplo, os babilônios já sabiam que se a soma é (positiva e) muito pequena e o produto é (positivo e) grande (exemplo: soma 2 e produto 200) os números procurados não existem, e aqui se tem uma ilustração do caso em que a equação não tem raízes reais.” (LAGES, 2001, p.12)*

Percebemos no excerto acima um cuidado com o entendimento verdadeiro que o aluno terá sobre equação do 2º grau, e não uma preocupação com meras aplicações de fórmulas para encontrar suas raízes e outros malabarismos algoritmizados. Ele sugere ainda que o professor pode desenvolver o ensino da matemática por meio de sua história, para exemplificar e atribuir uma maior significação ao conteúdo.

> “... . A nosso ver, a ordem lógica mais adequada para o ensino de Matemática não é a do conhecimento matemático sistematizado, mas sim aquela que revela a Matemática enquanto Ciência em construção. O recurso à História da Matemática tem, portanto, um papel decisivo na organização do conteúdo que se quer ensinar, iluminando-o, por assim dizer, com o modo de raciocinar próprio de um conhecimento que se quer construir.” (BROLEZZI, 1991, p. 3,4)

Este trabalho tenta mostrar algumas alternativas para o professor trabalhar as equações quadráticas no ensino fundamental e até 1º ano do ensino médio através de uma perspectiva histórica.

V. METODOLOGIA

Como nosso estudo se enquadra na área de pesquisa denominada História da Matemática, desenvolvemos a metodologia de pesquisa que acreditamos ser a mais adequada, tendo em vista nossos objetivos de investigação. Categorizamos as etapas de forma referendada por Bervian e Cervo (2003), que as classificam em: Levantamento Bibliográfico, Documentação, Leitura de Reconhecimento, Leitura Seletiva, Leitura Reflexiva, Leitura Interpretativa e Redação da Pesquisa.

1ª etapa: Levantamento Bibliográfico

A pesquisa foi desenvolvida a partir do levantamento bibliográfico com o intuito de encontrar livros, dissertações, teses e artigos que, de alguma forma, se relacionam com os objetivos estabelecidos acima.

2ª etapa: Leitura de Reconhecimento

As leituras que compuseram o referencial teórico deste trabalho foram obtidas a partir do levantamento bibliográfico de material impresso e on-line.

3ª etapa: Leitura Seletiva – Confirmação da Pergunta

Nesta fase nos prendemos aos fatos essenciais relacionados aos objetivos descritos. Ou seja, diante do universo de informações, nos restringimos àquelas específicas sobre as equações polinomiais do segundo grau e os métodos de abordagem dos problemas utilizados por antigas civilizações.

4ª etapa: Documentação – Objetos de Pesquisa

Distinguimos duas classes de documentos: As *fontes primárias* (trabalhos envolvendo conhecimentos matemáticos) e *fontes secundárias* (teses, dissertações e artigos sobre os aspectos didáticos-pedagógicos).

5ª etapa: Leitura Reflexiva

Passada a fase de seleção do material, realizamos a procura das ideias relacionadas ao nosso objeto de pesquisa e suas implicações pedagógicas para o ensino de matemática com a utilização da *Seqüência Fedathi* e uso do Software GeoGebra.

6ª etapa: Leitura Interpretativa: Nesta etapa desenvolvemos a formulação de *categorias* que devem corresponder aos objetivos da pesquisa.

Neste sentido, a realização das etapas descritas acima apontou aspectos essenciais que forneceram importantes implicações didático-pedagógicas. Contudo, enfrentamos inúmeras dificuldades no que se referem ao acesso direto as *fontes primárias*.

Lembramos que as aplicações elaboradas pelo historiador são sempre limitadas principalmente pelo acesso às fontes de que dispõe, a partir das quais pode tentar captar a lógica interna das formas de pensar, das mentalidades do passado. No caso específico da História da Matemática, para se apreender a lógica do processo de criação matemática, é preciso recorrer a várias espécies de fontes, escritas e não-escritas. Mesmo entre os documentos escritos que se podem utilizar, nem todos são intencionalmente históricos, o que constitui uma dificuldade a mais (BROLEZZI, 1991, p. 286).

CAPÍTULO 2

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E AS EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Uma boa opção para o professor de matemática ao iniciar uma explicação sobre equações do 2º grau ou de qualquer novo assunto é fazer uma introdução histórica. Se essa introdução for rica em detalhes e bem planejada, deverá estimular o interesse do aluno pelo desenrolar do tema abordado, fazendo que o aprendizado fique melhor e mais prazeroso.

Inicialmente, quando falamos em História da Matemática, o nosso pensamento é arremetido às civilizações antigas, portanto, é interessante que comecemos daquela época e finalizemos com os tempos atuais.

> "É costume dividir o passado da humanidade em eras períodos, com particular referência a níveis e características culturais. .... A Idade da Pedra, um longo período que precede o uso de metais, não teve um fim abrupto. Na verdade, o tipo de cultura que representou terminou muito mais tarde na Europa do que em certas partes da Ásia e da África. O surgimento de civilizações caracterizadas pelo uso de metais teve lugar primeiro em vales de rios, como o do Egito, Mesopotâmia, Índia e China.
>
> (BOYER, 1974. p. 23)

I. Egípcios

A civilização Egípcia se desenvolveu ao longo de uma extensa faixa de terra fértil que margeava o rio Nilo. Este rio prestou-se muito ao estabelecimento de grupos humanos. Suas margens férteis revelaram-se propícias à agricultura e, ainda, suas águas caudalosas facilitavam a abertura de canais de irrigação e construção de diques. O estudo do Egito antigo está determinado entre 4.000 a.C. e 30 a.C. Houve vários períodos importantes dentro da história egípcia antiga, mas todos eles tiveram basicamente o mesmo aspecto social político e econômico, bem como matemático e científico. Somente com a invasão pelos romanos no século I a.C. é que ocorre um rompimento com sua cultura milenar.

Alguns ramos da ciência tiveram avanços significativos, dentre eles a medicina e a astronomia.

Os médicos (sacerdotes) egípcios possuíam grande conhecimento, como comprovam as múmias de vários faraós descobertas nos dois últimos séculos, e também os procedimentos médicos encontrados em alguns papiros[1]. Além disso, os sacerdotes egípcios faziam cálculos astronômicos para determinar, por exemplo, quando iriam ocorrer as cheias do Nilo, e baseados nestes cálculos eles construíram um calendário com 12 meses de 30 dias.

A maioria dos relatos históricos sobre a matemática egípcia indica que sempre foi essencialmente prática, baseada em métodos empíricos de tentativa e erro. Por exemplo, quando o rio Nilo estava no período das cheias, surgiam problemas que para serem solucionados foram desenvolvidos vários ramos da matemática que possibilitaram a construção de estruturas hidráulicas, reservatórios de água, canais de irrigação e a drenagem de pântanos e regiões alagadas.

Desenvolveu-se também uma geometria elementar e trigonometria básica (esticadores de corda) para facilitar a demarcação de terras, um princípio de cálculo de áreas, raízes quadradas e frações. Também sabemos que os egípcios conheciam as relações métricas em um triângulo retângulo.

> "Sesóstris... repartiu o solo do Egito entre seus habitantes... Se o rio levava qualquer parte do lote de um homem... o rei mandava pessoas para examinar, e determinar por medida a extensão exata da perda... Por esse costume, eu creio, que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para a Grécia."
>
> *Heródoto*

No século XVIII foram descobertos vários papiros em escavações no Egito. Do ponto de vista matemático os mais importantes são os papiros Kahun, de Berlim, de Moscou e o Papiro Rhind. Estes papiros trazem uma série de problemas e coleções matemáticas em linguagem hieróglifa.

> O papiro matemático de Rhind é uma cópia de um trabalho ainda mais antigo. Foi copiado por um escriba (escriturário egípcio) chamado Ahmes em escrita hierática, em 1650 a.C, e por esse motivo também é referenciado por papiro de Ahmes. O papiro foi adquirido por Alexander Henry Rhind em Luxor, Egito, em 1858. O Museu britânico incorporou-o ao seu patrimônio em 1865, permanecendo em seu acervo até os dias atuais. (*EVES, 2002)*

[1] "Papiro (pelo latim *papyrus)* originalmente, uma planta perene da família das ciperáceas cujo nome científico é *Cyperus papyrus*, por extensão é também o meio físico usado para a escrita, precursor do papel, durante a Antigüidade sobretudo no Antigo Egito. O papiro é obtido utilizando a parte interna, branca e esponjosa, do caule do papiro, cortado em finas tiras que eram posteriormente molhadas, sobrepostas e cruzadas, para depois serem prensadas. A folha obtida era martelada, alisada e colada ao lado de outras folhas para formar uma longa fita que era depois enrolada. A escrita dava-se paralelamente às fibras." (Fonte: *http://www.fascinioegito.sh06.com/papiros.htm*)

É importante mencionar que a linguagem hieróglifa só pôde ser decifrada após os trabalhos de Champolion, na França e Thomas Young, na Inglaterra, ao analisarem a chamada Pedra Rosetta, descoberta em 1799, numa expedição do exército Francês, sob o comando de Napoleão Bonaparte, perto do Forte de Rosetta, antigo porto de Alexandria. A grande pedra Rosetta com escrita em três línguas: grego, demótico e hieróglifa possibilitou decifrar a linguagem hieróglifa e traduzir os papiros obtendo grandes preciosidades matemáticas egípcias.

Os Egípcios também desenvolveram uma técnica para resolver equações polinomiais de **1º grau**, chamada pelos europeus de **"método de falsa posição[2]"**, registrado nos papiros de Moscou e de Rhind, entre outros papiros. Porém não encontramos registros oficiais da resolução de equações do **2º grau** como conhecemos, mas eles desenvolveram um método da falsa posição, conhecido como **"dupla falsa"** para equações simultâneas do tipo $x^2 + y^2 = k$ e $y = ax$, sendo k e a números positivos, como mostra, por exemplo, o problema retirado do papiro de Berlim que pede para solucionar as equações simultâneas $x^2 + y^2 = 100$ e $y = \frac{3}{4}x$.

Vemos abaixo um trecho do livro História da matemática (BOYER 1974, p. 12), que trata do método da falsa posição.

"Os problemas egípcios descritos até agora são de tipo digamos, aritmético, mas há outros que merecem a designação de algébricos. Não se referem a objetos concretos específicos, como pães e cerveja, nem exigem operações entre números conhecidos. Em vez disso, pedem o que equivale a soluções de equações lineares, da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$, onde a, b, c são conhecidos e *x* é desconhecido. A incógnita é chamada de "*aha*". O Prob. 24, por exemplo, pede o valor de *aha*, e as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre esse número suposto. O resultado é então comparado com o resultado que se pretende, e usando proporções chega-se à resposta correta. No problema 24 o valor tentado para a incógnita é 7, de modo que $x + \frac{1}{7}x$ é 8 em vez de 19 como se queria. Como $8(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = 19$, deve-se multiplicar 7 por

[2] "A regra de falsidade é assim chamada, não porque ela ensine qualquer fraude ou falsidade, mas porque, por meio de números tomados à sorte, ensina a encontrar o número verdadeiro que é pedido." (David Eugene Smith, History of Mathematics, vol II, p.441).

$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ para obter a resposta: Ahmes achou $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$. Então conferiu sua resposta mostrando que se a $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ somarmos um sétimo disto (que é $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$) de fato obteremos 19. Aqui notamos outro passo significativo no desenvolvimento da matemática pois a verificação é um exemplo simples de prova."

Para efeito didático podemos propor a qualquer aluno secundarista que resolva o problema abaixo usando o método da falsa posição egípcio.

Problema 25 no papiro Ahmes: *Uma quantidade e sua metade somadas fazem 16. Qual é a quantidade?*

Solução:

i) Admitimos que a quantidade é 2 (um chute para começar)

Obtemos de i) que 2 somado com sua metade é igual a 3. Mas queremos o número que somado com sua metade dê 16. Logo, devemos procurar pelo número que multiplicado por 3 deve dar 16, que é 16/3, e este será o número pelo qual 2 deve ser multiplicado para obtermos o número procurado 32/3.

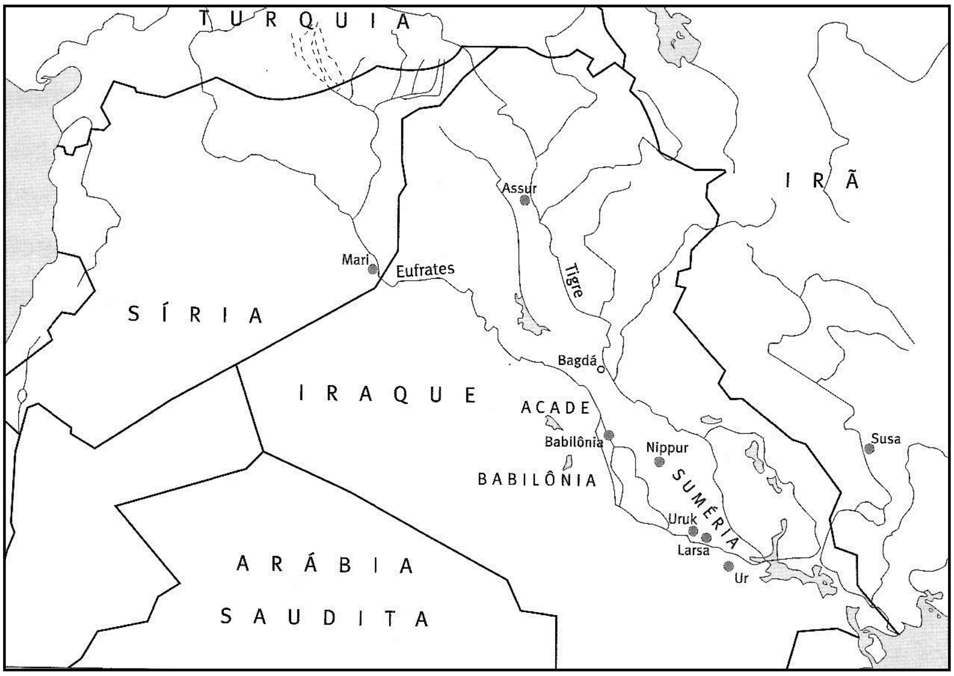
Fonte: Adaptação de Roque (2012, p.80)

A construção das grandes pirâmides faz supor que o conhecimento matemático dos egípcios era muito mais avançado que o apresentado nos papiros. Talvez o fato de a escrita ser muito difícil tenha sido um dos motivos que impediu este registro ou, ainda, estes registros tenham sido feitos em papiros que não chegaram aos nossos dias.

Podemos presumir então, que a matemática egípcia foi um dos pilares da matemática grega, a qual foi base para a matemática moderna, principalmente em geometria, trigonometria e até mesmo na astronomia.

II. Mesopotâmios (Babilônios)

A Mesopotâmia, que em Grego significa “terra entre rios”, situava-se no oriente médio, no chamado crescente fértil, entre os rios Tigre e Eufrates, onde hoje está situado o Iraque e a Síria, principalmente, como mostra a figura a seguir.



Fonte:.ROQUE, 2012, p.37.

Os povos que formavam a Mesopotâmia foram os Sumérios, Acádios, Amoritas, Caldeus e Hititas, os quais lutavam pela posse das terras aráveis.

> “Dentre os que habitaram a Mesopotâmia estão os sumérios e os acadianos, hegemônicos até o segundo milênio antes da Era Comum. As primeira evidências de escrita são do período sumério, por volta do quarto milênio a.E.C. Em seguida a região foi tomada por um império cujo centro administrativo era a cidade da Babilônia, habitada pelos semitas, que criaram o primeiro Império Babilônico. Os semitas são conhecidos como “antigos babilônios”, e não se confundem com os fundadores do Segundo Império Babilônico, denominados “neobabilônios”. Data do período babilônico antigo (2000-1600 a.E.C.) a maioria dos tabletes de argila mencionados na história da matemática.” (ROQUE. 2012, p. 36)

Por estar situado nesta região geográfica, a Mesopotâmia estava mais sujeita às invasões e conquistas de vários povos, ao contrário do que ocorreu no Egito. As duas civilizações, Egípcia e Mesopotâmica, desenvolveram-se no mesmo período. Mas, este desenvolvimento deu-se em separado, não havendo um intercâmbio de informações.

A ciência e, por consequência, a matemática mesopotâmica teve um grande desenvolvimento por parte dos sacerdotes que detinham o saber nesta civilização. Assim como a Egípcia, esta civilização teve a matemática e outras ciências extremamente voltadas para a prática com o objetivo de facilitar o cálculo do calendário, a administração das colheitas, organização de obras públicas e a cobrança de impostos, bem como seus registros.

As águas dos rios Tigre e Eufrates proporcionavam facilidades para o transporte de mercadorias, o que ajudou a desenvolver um processo de navegação.

Foram desenvolvidos nestes rios projetos de irrigação das terras cultiváveis e a construção de grandes diques de contenção, uma forma de engenharia primitiva.

Procedeu-se ao desenvolvimento de uma astronomia rudimentar para o cálculo do período de cheias e vazantes dos rios, mesmo que estes períodos não fossem regulares, como os do rio Nilo no Egito.

Os Babilônicos tinham uma maior habilidade e facilidade para efetuar cálculos, talvez em virtude de sua linguagem ser mais acessível que a egípcia. Eles tinham técnicas para equações quadráticas e bi-quadráticas, além de possuírem fórmulas para áreas de figuras retilíneas simples e fórmulas para o cálculo do volume de sólidos simples. Sua geometria tinha suporte algébrico. Também conheciam as relações entre os lados de um triângulo retângulo e trigonometria básica, conforme descrito na tábua “Plimpton 322”.

Ao contrário dos Egípcios, que tinham um sistema posicional de base 10, os babilônicos possuíam um sistema posicional sexagesimal bem desenvolvido, o qual trazia enormes facilidades para os cálculos, visto que os divisores naturais de 60 são 1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60, facilitando o cálculo com frações.

Na verdade, segundo BOYER (1996, p.23), cerca de 2000 anos antes de Cristo, para os Babilônios, eram muito comuns problemas em que se pediam para achar dois números, dados seu produto e ou sua soma ou sua diferença. Ou seja, eram comuns os sistemas de equações da forma $\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$ o que sua resolução equivale à **da equação quadrática** $x^2 + q = px$.

Pela análise da resolução de um problema tirado de uma tableta cuneiforme de Yale, que Boyer (1996, p.24) apresenta, podemos perceber que a orientação dos Babilónios para resolver o sistema $\begin{cases} x+y=p \\ xy=q \end{cases}$ consistia no seguinte:

Tomar metade de p: $\frac{p}{2}=\frac{x+y}{2}$.

Quadrar o resultado: $\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Subtrair q do resultado obtido: $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy=\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$.

Tomar a raiz quadrada do resultado obtido: $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=\frac{x-y}{2}$.

Somar o resultado obtido a metade de p: $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}+\frac{p}{2}=\frac{x-y}{2}+\frac{x+y}{2}=x$

O resultado obtido é um dos números desejados e o outro é a diferença deste para p:

$$p-x=(x+y)-x=y.$$

Note que os números procurados são:

$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \quad \text{e} \quad y=p-\left(\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2},$$

o que está de acordo com as fórmulas que ainda hoje utilizamos para resolver a equação $x^2-px=q$.

Abaixo sugerimos a resolução de uma equação quadrática pelo método babilônico exposto acima, com o objetivo de mostrar ao professor de ensinos fundamental ou médio que depois que o seu aluno conhecer um pouco da história e ver a construção da fórmula, aplicá-la é algo fácil.

Exemplo sugerido: Resolva a equação quadrática $x^2-5x+6=0$ pelo método babilônico.

Solução: Ao colocarmos a equação na forma $x^2+6=5x$ vemos que $p=5$ e $q=6$.

Pois bem, uma das raízes é $x_1=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{5+\sqrt{5^2-4.6}}{2}=3$

e a outra raiz é $x_2=p-x_1=5-3=2$.

O método indicado para a resolução de equações quadráticas era necessário, porque os Babilónios não podiam ainda trabalhar com números negativos, pois estes números não tinham ainda sido incluídos na sua aritmética.

> "Até os tempos modernos não havia ideia de resolver uma equação quadrática da forma $x^2 + px + q = 0$, onde p e q são positivos, pois a equação não tem raiz positiva. Por isso as equações quadráticas na antiguidade e na Idade Média, e mesmo no começo do período moderno, forma classificadas em três tipos 1) $x^2 + px = 0$, 2) $x^2 = px + q$ e 3) $x^2 + q = px$. Todos esse tipos são encontrados em textos do período Babilônio antigo, de uns 4000 anos atrás." (BOYER, 1974. p. 23)

Por tudo isto que foi descrito, a matemática Babilônica tinha um nível mais elevado que a matemática Egípcia.

Pelo fato da Mesopotâmia estar situada no centro do mundo conhecido da época, o que propiciava grandes invasões e muito contato com outros povos, ela teve um papel de destaque no desenvolvimento da matemática de um povo muito importante na história: o povo Grego. Graças a este contato com os Gregos, muito desta matemática chegou até os nossos dias.

III. Árabes

A mesopotâmia, através do governo dos Sassânidas (reis persas que governaram a mesopotâmia, como Ciro e Xerxes), recuperou sua posição central ao longo das rotas comerciais que sob o domínio romano e heleno haviam perdido.

Não há muitos registros Sassânidas desta época. O que se sabe é que era uma cultura muito rica, como percebemos ao lermos o conto "Mil e uma noites" de Omar Khayyam.

Depois da conquista árabe, em 641 teve origem Bagdá, em substituição à babilônia, que havia desaparecido. A matemática do período islâmico revela a mesma mistura de influências que se tornaram familiares em Alexandria e na Índia.

A matemática e a astronomia foram grandemente incentivadas pelos califas de Bagdá: Al-mansur (754-775), Harun al-Raschid (766-809) e al-Mamun (813-833). Este último organizou em Bagdá a "casa da sabedoria", composta de uma biblioteca e um observatório.

As atividades matemáticas árabes começaram com a tradução dos Siddanthas hindus por al-Fazari e culminaram com uma grande importância com Mohamed Ibu-Musa al-Khowarizmi, por volta de 825. Ele escreveu vários tratados sobre matemática e astronomia. Estes tratados explicavam o sistema de numeração hindu. A Europa ficou conhecendo este sistema de numeração graças a uma cópia latina do século XII, visto que o original árabe se perdeu. A astronomia de Al-Khowarizmi era um resumo dos Siddanthas, o qual mostrava uma influência grega nos textos sânscritos.

Mas é importante ressaltar que os árabes foram os responsáveis pela maior destruição do conhecimento ocidental, com o incêndio da biblioteca de Alexandria, mas acabaram tendo um papel muito importante na preservação da matemática produzida pelo ocidente, pois eles traduziram, fielmente, os clássicos gregos (Apolônio, Arquimedes, "*Os Elementos" de* Euclides, "*O Almagesto"* de Ptolomeu e outros). Estes clássicos estariam perdidos para nós sem os árabes, por causa do fechamento da escola de Atenas por Justiniano.

É importantíssimo também falar que Mohammed Ben Musa Al-Khowarizmi foi o primeiro autor islâmico que escreveu "sobre a solução de problemas por al-jabr[3] e al-muqabala".

Por jabr, entende-se a operação de somar um número ou expressão algébrica a ambos os membros de uma equação, para eliminar termos negativos. Também se diz jabr a operação de multiplicar ambos os membros de uma equação por um mesmo número, para eliminar frações.

Por muqabala entende-se a operação de subtrair números ou expressões algébricas a ambos os membros de uma equação a fim de mudar um termo de um membro para o outro.

Segundo MORGADO[4] (1999), (Al-Khowarizmi usou dois métodos gerais para resolver equações quadráticas da forma $x^2 + px = q$.

[3] Foi a partir de al-jabr, que significa restauração, que nasceu a palavra álgebra e foi a partir do próprio nome Al-Khowarizmi que nasceu a palavra algoritmo e também a palavra algarismo.

[4] José Morgado (1921-2003), foi professor da Universidade de Ciências do Porto e também a Universidade Federal de Pernambuco, e merece destaque por ter mais de uma centena de trabalhos publicados, essencialmente nas áreas de Álgebra e História da Matemática.

Um exemplo de um dos métodos de Al-Khowarizmi é o seguinte:

Constrói-se um quadrado de lado x e, sobre esse lado, para o exterior do quadrado, constrói-se um retângulo de lados x e $\frac{1}{4}p$.

Completa-se a Figura 1, construindo em cada um dos quatro cantos um quadrado de lado igual a $\frac{1}{4}p$.

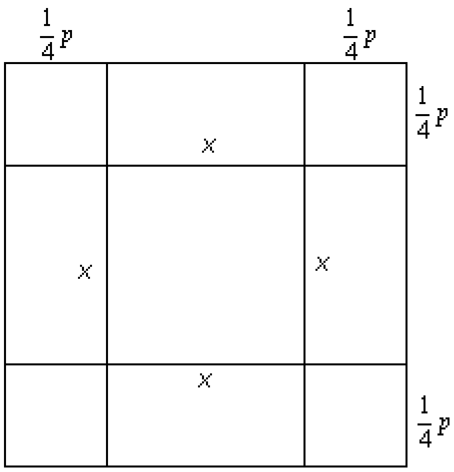


Figura 1

Então a área do quadrado maior é $x^2 + 4x.\frac{1}{4}p + 4.\frac{1}{16}p^2 = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$.

Somando $\frac{1}{4}p^2$ a ambos os membros da equação $x^2 + px = q$, vem $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$, $\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$ donde $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$ e, por consequência, $x = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} - \frac{1}{2}p$.

O outro método de Al-Khowarizmi baseia-se na construção da Figura 2:

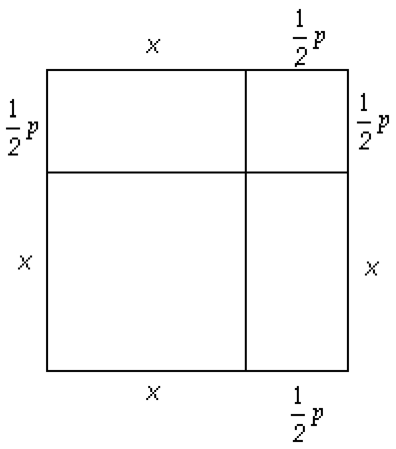


Figura 2

Então a área do quadrado maior é $\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2 = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$, por ser $x^2 + px = q$, donde $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$ e, consequentemente, $x = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} - \frac{1}{2}p$.

Por fim, devemos saber que Al-Khowarizmi também apresentou resoluções de equações quadráticas de forma retórica, porém o seu método só apresentava uma das raízes positivas.

Vejamos abaixo, como exemplo, as orientações retóricas dadas por Al-Khowarizmi para solucionar o problema: "Um quadrado mais dez raízes do mesmo é igual a trinta e nove" que é equação $x^2 + 10x = 39$ em linguagem matemática atual.

"*Tome a metade do número de raízes, obtendo cinco. Isto é multiplicando por si mesmo – o produto será vinte e cinco. Adicione isto a trinta e nove – a soma é sessenta e quatro. Tome então a raiz quadrada disto, que é igual a oito e subtraia disto a metade do número de raízes que é cinco. A diferença é três. Esta é a raiz do quadrado procurado – e o próprio quadrado é nove..*"

(NOBRE, 2003, p.18)

IV. Gregos

A civilização grega, propriamente dita, foi formada nos séculos XX a.C. a XII a.C. por invasões de Aqueus, Jônios, Eólios e Dórios.

A Grécia antiga é considerada o berço da civilização ocidental. Mas, na realidade ela desenvolveu-se a partir da civilização cretense. Como a Grécia antiga era chamada de Hélade, este povo foi denominado, na antiguidade, "Helenos".

A história da Grécia pode ser dividida em quatro períodos: Período Homérico (Séculos XII até VIII a.C.), Período Arcaico (Séculos VIII até VI a.C.), Período Clássico – Época de Ouro (Séculos VI até IV a.C.) e Período Helenístico (Séculos IV até I a.C.).

A base da revolução matemática exercida pela civilização Grega partiu de uma ideia muito simples. Enquanto Egípcios e Babilônicos perguntavam: "como"? Os filósofos gregos passaram a indagar: "por quê"? Assim, a matemática que até este momento era, essencialmente, prática, passou a ter seu desenvolvimento voltado para conceituação, teoremas e axiomas.

A matemática, através da história, não pode ser separada da astronomia. Foram as necessidades relacionadas com a irrigação, agricultura e com a navegação que concederam à astronomia o primeiro lugar nas ciências, determinando o rumo da matemática.

Dois fatores estimularam e facilitaram o grande desenvolvimento da ciência e da matemática pelos filósofos gregos: a substituição da escrita grosseira do antigo oriente por um alfabeto fácil de aprender e a introdução da moeda cunhada, o que estimulou ainda mais o comércio.

A matemática moderna teve origem no racionalismo jônico, e teve como principal estimulador Tales de Mileto. Este racionalismo objetivou o estudo de quatro pontos fundamentais: compreensão do lugar do homem no universo conforme um esquema racional, encontrar a ordem no caos, ordenar as ideias em seqüências lógicas e obtenção de princípios fundamentais. Estes pontos partiram da observação que os povos orientais tinham deixado de fazer todo o processo de racionalização de sua matemática, contentando-se, tão somente, com sua aplicação.

Neste período surgiram divisões nas ciências. Na Grécia deram-se dois grupos distintos de filósofos: os Sofistas e os Pitagóricos, os quais passam a analisar as ciências de dois modos diferentes.

Os Sofistas abordavam os problemas de natureza matemática como uma investigação filosófica do mundo natural e moral, desenvolvendo uma matemática mais voltada à compreensão do que à utilidade. É o começo da abstração matemática, em detrimento da matemática essencialmente prática.

Os Pitagóricos, sociedade secreta criada por Pitágoras de Samos, enfatizavam o estudo dos elementos imutáveis da natureza e da sociedade. O chefe desta sociedade foi Arquitas de Tarento. Os Pitagóricos estudavam o *quadrivium* (geometria, aritmética, astronomia e música). Sua filosofia pode ser resumida na expressão “tudo é número”, com a qual diziam que tudo na natureza pode ser expresso por meio dos números. Pitágoras dizia que: “tudo na natureza está arranjado conforme as formas e os números”. Aos Pitagóricos (Pitágoras, principalmente) podemos creditar duas descobertas importantes: o conceito de número irracional por meio de segmentos de retas incomensuráveis e a axiomatização das relações entre os lados de um triângulo retângulo (teorema de Pitágoras), que já era conhecido por babilônicos e egípcios.

Paralelo a isto, os matemáticos gregos do período clássico começam a trabalhar com o princípio da indução lógica (apagoge), que é o início da axiomática, a qual foi desenvolvida por Hipócrates. Os três problemas que deram início ao estudo da axiomática foram: trissecção de um ângulo, duplicação do volume do cubo (problema délico) e quadratura do círculo.

Com as campanhas de Alexandre, o grande, houve um avanço rápido da civilização grega em direção ao oriente. Assim, a matemática grega sofreu as influências dos problemas de administração e da astronomia desenvolvidas no oriente. Este contato entre as duas matemáticas foi extremamente importante e produtivo, principalmente no período de 350 a 200 a.C.. Neste contexto, Alexandria torna-se o centro cultural e econômico do mundo helenístico.

Durante todo o período grego, vários filósofos e matemáticos deram sua contribuição ao desenvolvimento da matemática. Neste período surgem os cientistas, homens que dedicavam sua vida à procura do conhecimento e que por isso recebiam um salário. Será citado, agora, um breve comentário sobre a contribuição dos matemáticos considerados mais importantes e influentes deste período.

<u>Euclides</u> (360 a.C - 295 a.C.)

Seu trabalho mais famoso é a coleção “Os elementos”, obra em 13 volumes, que contém aplicações da álgebra à geometria, baseados numa dedução estritamente lógica de teoremas, postulados, definições e axiomas. Até os dias de hoje, este é o livro mais impresso em matemática.

Arquimedes (287 – 212 a.C.)

É considerado o maior matemático do período helenístico e de toda antiguidade. Suas maiores contribuições foram feitas no campo que hoje denominamos "cálculo integral", por meio do seu "método de exaustão". Arquimedes também deu importante contribuição na mecânica e engenharia, com o desenvolvimento de vários artefatos, principalmente militares. Foi morto por um soldado romano quando da queda de Siracusa.

Apolônio de Perga (247-205 a.C.)

Com Apolônio há uma volta à tradicional geometria grega. Ele escreveu um tratado de oito livros sobre as cônicas (parábola, elipse e hipérbole), introduzidas como seções de um cone circular.

Ptolomeu (150 d.C.)

Publicou o "Almagesto", obra de astronomia com superior maestria e originalidade. Nesta obra encontra-se a fórmula para o seno e o cosseno da soma e da diferença de dois ângulos e um começo da geometria esférica.

Nicómaco de Gerasa

Publicou "Introdução à aritmética", que é a exposição mais completa da aritmética pitagórica. Muito do que sabemos sobre Pitágoras provém desta publicação.

Diofanto

Publicou "Arithmética", a qual recebeu uma forte influência oriental. Este trabalho trata da solução e análise de equações indeterminadas.

Com o domínio da Grécia e do oriente pelos romanos, estas regiões tornaram-se colônias governadas por administradores romanos. A estrutura econômica do império romano permanecia baseada na agricultura. Com o declínio do mercado de escravos a economia entrou em decadência e existiam poucos homens a fomentar uma ciência, mesmo medíocre.

Podemos, então, determinar uma relação entre a crise da matemática e a crise do sistema social, pois a queda de Atenas significou o fim do império da democracia escravagista. Esta crise social influenciou a crise nas ciências que culminou com o fechamento da escola de Atenas, marcando com isto o fim da matemática grega clássica.

Podemos observar que as descobertas matemáticas estão relacionadas com os avanços obtidos pela sociedade, tanto intelectuais como comerciais. Se no princípio a matemática era essencialmente prática, visto que as sociedades eram rudimentares, com o desenvolvimento destas sociedades a matemática também evoluiu, passando de uma simples ferramenta que auxiliava aos problemas práticos para uma ciência que serviu como chave para analisar o mundo e a natureza em que vivemos.

Todas as descobertas matemáticas realizadas pelos povos pré-históricos, egípcios e babilônicos serviram como subsídio para a matemática desenvolvida pelos gregos. Esta matemática grega foi, e continua sendo, a base de nossa matemática. Todo o desenvolvimento tecnológico obtido em nossos dias tem como ponto de partida a matemática grega.

Assim, sem a axiomatização desenvolvida pelos gregos, não haveria o desenvolvimento da matemática abstrata e dos conceitos, postulados, definições e axiomas tão necessários à nossa matemática.

Da matemática da antiguidade, fundamental a nós hoje, podemos citar: processos de contagem, numeração, trigonometria, astronomia, geometria plana e volumes de corpos sólidos, sistema sexagesimal, equações quadráticas e biquadráticas, relações métricas nos triângulos retângulos, seções cônicas e o método de exaustão, que foi o germe do cálculo integral.

Porém queremos agora ressaltar o método utilizado para resolver **equações quadráticas**, que era, geralmente, por meio de construções geométricas.

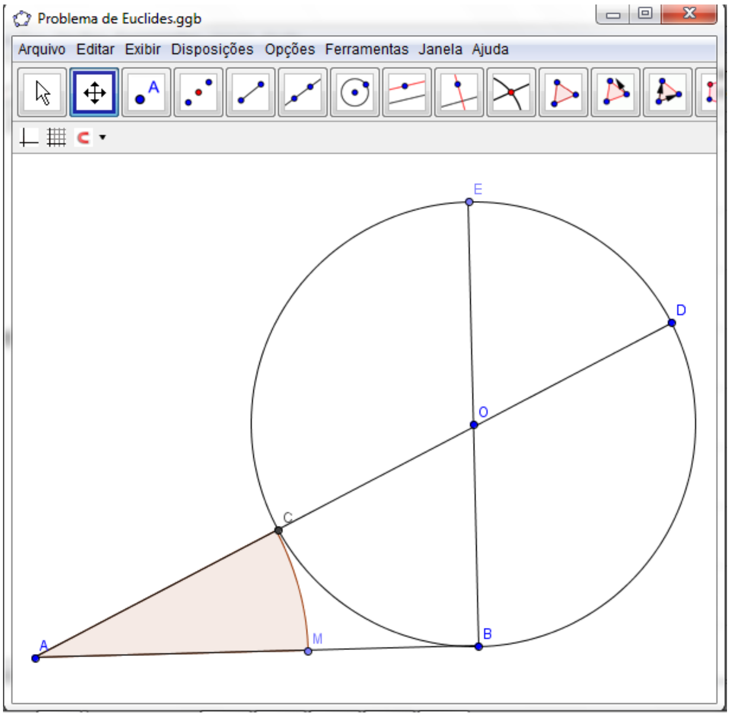
José Morgado, em um de seus trabalhos publicado na internet (Millenium, nº 16, Out. de 1999) diz que nos Elementos de Euclides, ensina-se a resolver o seguinte problema:

"Dividir um segmento de recta em duas partes tais que o rectângulo contido pelo segmento dado e uma das partes seja igual ao quadrado da outra parte."

Resolve-se este problema, solucionando a equação $a(a-x)=x^2$, onde "a" é o segmento dado. A equação pode ser escrita sob a forma $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$; trata-se de *dividir o segmento "a" em média e extrema razão.*

Seja AB o segmento dado e consideremos a circunferência tangente a AB em B e cujo raio é $\frac{a}{2}$.

A reta definida por A e pelo centro O da circunferência encontra a circunferência nos pontos C e D.



O arco de circunferência de centro A e raio AC encontra AB no ponto M. As partes pedidas são precisamente AM e MB e tem-se $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$.

Com efeito, tem-se $a^2 = (a + x).x$, onde a e x designam, respectivamente, o comprimento da tangente AB(=CD) e o comprimento de AM (o quadrado da tangente é igual ao produto da secante pela sua parte externa) e da igualdade $a^2 = (a + x).x$, resulta $a(a - x) = x^2$, quer dizer, a área do retângulo que tem para lados "a" e a parte $a - x$ é igual ao quadrado da outra parte, já que $a - (a - x) = x$.

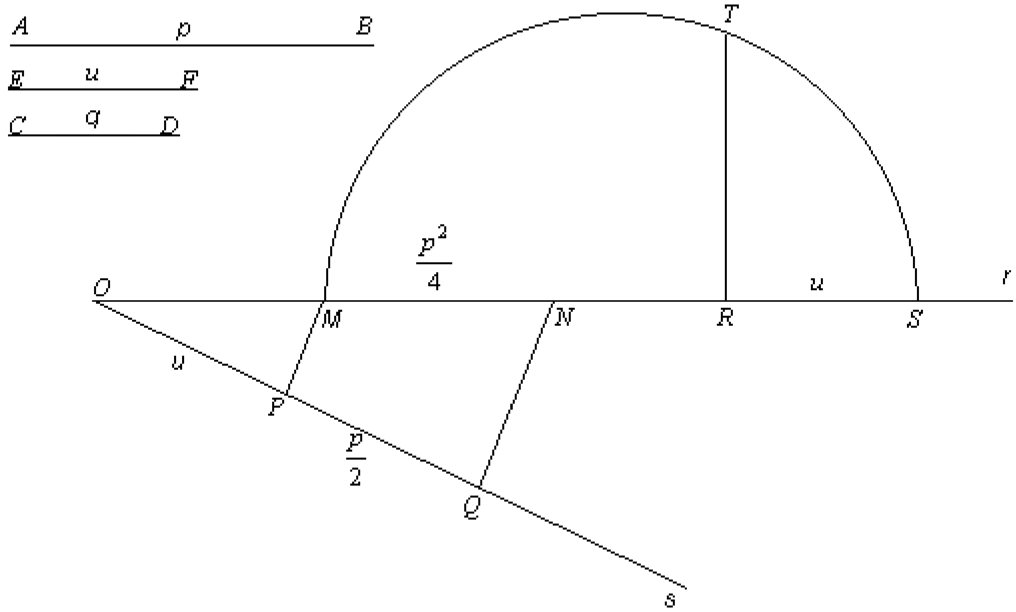
A igualdade $a^2 = (a + x).x$ resulta imediatamente da aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABO. Assim, tem-se $AB^2 + BO^2 = OA^2$, isto é, $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$, onde $a^2 = x^2 + ax = x(a + x)$ como se pretendia.

Ainda no mesmo trabalho, Morgado (Millenium, nº 16, Out. de 1999) apresenta outra solução geométrica de uma equação quadrática, como vemos abaixo.

Suponhamos agora que queremos resolver a seguinte equação $x^2 + px = q$.

Esta equação é, evidentemente, equivalente à equação $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q$.

Então, para resolver a equação, basta construir $\frac{p^2}{4}+q$, extrair-lhe a raiz quadrada e subtrair-lhe, em seguida, $\frac{p}{2}$.



Fonte: MORGADO (Millenium, nº 16, Out. de 1999)

Comecemos por considerar duas retas r e s, concorrentes em O e, sobre r, um ponto M tal que $OM = \frac{p}{2}$, sendo p o comprimento do segmento AB relativamente ao segmento unidade EF=u e consideremos sobre s dois pontos P e Q tais que OP=u e $PQ = \frac{p}{2}$. Unamos P e M e conduzamos por Q uma paralela a PM; seja N o ponto de intersecção dessa paralela com r.

Tem-se $\frac{OP}{OM} = \frac{PQ}{MN}$ e, portanto, $MN = \frac{OM.PQ}{OP} = \frac{p^2}{4}$.

Consideremos agora o ponto R, de r, tal que: $MR = MN + NR = \frac{p^2}{4} + q$.

Trata-se de extrairmos a raiz quadrada de $\frac{p^2}{4} + q$.

Para isso, marquemos sobre r o ponto S tal que RS tenha comprimento u e R fique entre M e S.

Consideremos uma semicircunferência γ, de diâmetro MS e seja T o ponto de encontro dessa semicircunferência com a perpendicular a r conduzida por R. Por um teorema conhecido da geometria Elementar (a altura de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa é o meio proporcional dos segmentos que o seu pé determina na hipotenusa) conclui-se que RT é precisamente a raiz quadrada de $\frac{p^2}{4} + q$, visto que $RT^2 = \left(\frac{p^2}{4} + q\right).u = \frac{p^2}{4} + q$.

Para obter x, basta determinar o valor de $RT - \frac{p}{2}$.

V. Hindus

Escavações arqueológicas ocorridas em Mohenjo Daro nos dão uma indicação de uma civilização muito antiga e de uma cultura muito alta na Índia, ocorrida na mesma época em que eram construídas as pirâmides no Egito. Posteriormente o país foi ocupado pelos invasores arianos que impuseram o sistema de castas, o qual trouxe um atraso muito grande ao desenvolvimento. Estes invasores arianos desenvolveram na Índia a literatura sânscrita. Na mesma época em que Pitágoras começou a desenvolver seus teoremas e axiomas na Grécia, Buda agia na Índia. Especula-se que Pitágoras esteve em contato com Buda e que desenvolveu seu mais famoso teorema com os hindus.

Os indianos dos primeiros tempos foram exterminados por volta de 1500 a.C. Este país tinha como política, vários pequenos principados desunidos, o que propiciou muitas invasões em seu território (arianas, persas, gregas, árabes e ingleses). Estes invasores se estabeleceram como classe dominante, evitando a miscigenação com o povo nativo.

Entre 3000 a.C. e 1500 a.C. viveu na Índia um povo, da região do rio Indo, que cultivava a agricultura e morava em cidades. Este povo foi destruído pelos arianos. Entre 1500 a.C. e 500 a.C. os arianos desenvolveram o hinduismo, combinação de religião, filosofia e estrutura social, a qual veio a desenvolver a base de sua civilização. O hinduismo é um conjunto de crenças e leis que se baseia em três ideias principais: culto a um grande número de deuses, transmigração da alma e o sistema de castas que dividia rigidamente a sociedade indiana em quatro classes: Brahmana (sacerdotes), kshatriya (guerreiros), vaisya (comerciantes e artesãos) e sudra (camponeses).

Sidarta Gautama (Buda), por volta de 500 a.C. se revolta contra esta filosofia. O budismo foi uma resposta ao caos e à agitação desta época, encontrando muitos adeptos, principalmente entre os pobres. Até começar a declinar, por volta de 500 d.C. o budismo já havia se espalhado pela China, Japão e sudeste asiático.

Em 320 a.C. Chandragupta Mauria unificou todos os pequenos estados indianos e estabeleceu o império Mauriano, seguido pelo seu neto Açoka (272-232 a.C.).. Em 185 a.C. o império voltou a se desintegrar e ficar dividido em pequenos estados. Da queda do império mauriano até 200 d.C. houve um grande desenvolvimento cultural, por meio da literatura, arte, ciência e filosofia. Em 320 d.C. a Índia foi novamente unificada por Chandragupta I, originando o império dos Gupta, que se manteve até 470 d.C., o qual é considerado a era clássica da Índia.

Com a invasão dos árabes, o islamismo foi introduzido na Índia, conquistando partes da Índia ocidental nos séculos VIII, IX e X. Em 1206 Kutb ud-Din-Aibak fundou o sultanato muçulmano de Dehli. Em 1526 Babur instala o império Mogol (Turco). No século XVII a Índia é invadida pelos Ingleses que exercem uma tirania muito grande contra a sua população.

A matemática hindu apresenta mais problemas históricos do que a grega, pois os matemáticos indianos raramente se referiam a seus predecessores e exibiam surpreendente independência em seu trabalho matemático.

A Índia, assim como o Egito, tinha seus “esticadores de corda”. As primitivas noções geométricas tomaram corpo no escrito conhecido como “Sulvasutras” (regras de cordas). Este escrito tem três versões, sendo que a mais conhecida tem o nome de Apastamba. Nesta primeira versão, da mesma época de Pitágoras, são encontradas regras para construção de ângulos retos por meio de ternas de cordas cujos comprimentos formam tríadas pitagóricas. Este escrito, provavelmente, sofreu influência babilônica, visto que estas tríadas encontram-se nas tábuas cuneiformes. A origem e a data dos Sulvasutras são incertos, de modo que não é possível relacioná-los com a primitiva agrimensura egípcia ou com o problema grego de duplicar um altar.

Após esta publicação, surgiram os “Siddhantas” (sistemas de astronomia). O começo da dinastia Gupta (290) assinalou um renascimento da cultura sânscrita e estes escritos podem ter sido um produto disto. A trigonometria de Ptolomeu se baseava na relação funcional entre as cordas de um círculo e os ângulos centrais que subentendem. Para os autores dos Siddhantas, a relação ocorre entre metade de uma corda de um círculo e metade do ângulo subentendido no centro pela corda toda.

Como assinala Howard Eves na sua obra An Introduction to the History of Mathematics, os hindus foram hábeis aritméticos e deram contribuições importantes à álgebra.

Muitos dos problemas aritméticos eram resolvidos pelo **método do retorno**, onde se trabalha do fim do problema para o princípio.

Muitos dos resultados obtidos pelos matemáticos gregos chegaram ao conhecimento dos hindus por intermédio dos árabes. Os hindus ampliaram-nos sob alguns aspectos e traduziram-nos para a sua língua e exprimiram-nos com eloquência poética. Vejamos o exemplo de um problema sugerido por Bhaskara (1114-1185), cujo enunciado era o seguinte:

" Linda donzela de olhos cintilantes, se conheces o método do retorno diz me: qual é o número que, multiplicado por 3, acrescido de 3/4 deste produto, dividido por 7, diminuído de 1/3 do quociente, elevado ao quadrado, diminuído de 52, acrescido de 8 e dividido por 10, dá como resultado o número 2?"

Bhaskara foi um dos últimos grandes matemáticos hindus até aos tempos modernos. A sua obra em verso intitulada Siddhanta-S'iromani (i.e., Diadema de um sistema astronómico) escrita em 1150, consistia de duas partes matemáticas e duas partes astronómicas.

Foi Bhaskara que chamou à Álgebra a arte dos raciocínios perfeitos.

Aryabhata, nascido em 476, foi um poeta, matemático e astrónomo hindu; autor da obra *Aryabhatiya*, escrita em verso, em 499, expõe os resultados de matemática como eram conhecidos no seu tempo, incluindo equações quadráticas. Entre os versos contidos nesta obra, há uns que dizem o seguinte:

"Soma 4 a 100, multiplica por 8 e junta 62000. O resultado é aproximadamente a circunferência de um círculo de diâmetro 20000"

Ora isto equivale a dizer que o valor de π é aproximadamente $\frac{62832}{20000} = 3{,}1416$.

Parece ter sido S'ridhara (aproximadamente 1025) quem primeiro enunciou a chamada regra hindu para a resolução de equações quadráticas que, na citação de Bhaskara (aproximadamente 1150), segundo ROQUE (2012, p.240), consiste no seguinte:

"É por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar"

Na linguagem matemática temos:

Seja a equação $ax^2 + bx = c$.

Multiplicando ambos os membros por $4a$, *vem* $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$.

Somando a ambos os membros o quadrado do coeficiente da quantidade desconhecida, tem-se $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$, *ou seja* $(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac$, *extraindo a raiz quadrada, vem* $2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$. *(Notemos que a raiz negativa não era considerada).*

E agora trata-se de uma equação do primeiro grau, cuja resolução já é conhecida.

VI. Chineses

A civilização chinesa, bem como a civilização indiana, são muito mais antigas que as civilizações grega e romana, mas não mais antigas que as civilizações egípcia e mesopotâmica.

A civilização chinesa originou-se às margens dos rios Yang-Tsé e Amarelo.

Podemos dividir a história chinesa em quatro grandes períodos:

China Antiga (2000 a.C. – 600 a.C.)

China Clássica (600 a.C. – 221 d.C.)

China Imperial (221 d.C. – 1911 d.C.)

China Moderna (1911 d.C. – hoje)

Apesar da China antiga ter sido governada por monarquias Hsia, Shang e Chou, o poder real estava nas mãos de numerosos pequenos senhores, governantes de pequenas cidades. Este período foi caracterizado por inúmeras guerras, taxas sobre a população e muita pobreza do povo.

Durante o período clássico, o filósofo Confúcio pregava uma total reestruturação social e política. Confúcio pregava o respeito pelas autoridades, cuidados com a pobreza, humildade, ética por parte dos governantes e não fazer aos outros o que não queremos que nos façam. Confúcio não conseguiu, em vida, fazer com que suas ideias fossem aceitas pela aristocracia. No mesmo período é criado o taoísmo por Chang Tzu (399 a.C. – 295 a.C.), o qual proclamava uma ordem no universo e recomendava a paz e a benevolência governamental. Estes conceitos foram criados em virtude dos desgovernos dos senhores e a miséria de seus súditos. Em 200 a.C. a dinastia Han criou um império que durou até o fim da china clássica. Esta dinastia expandiu os limites da china e adotou o confucionismo como religião oficial. Vindo da Índia, o budismo fundiu-se com o taoísmo e ganhou ampla aceitação entre os camponeses.

No período imperial, a china esteve envolvida em várias lutas internas. Com a queda da dinastia Han, os senhores começaram a lutar entre si para exercer o domínio em suas regiões. Em 618 d.C. a dinastia Tang unificou a china. Depois dela seguiram-se as dinastias Sung e Yuan. Estas dinastias patrocinaram as artes e a literatura, criando assim a era de ouro. Com isto a china alcançou grandes dimensões e muita influência. Começa a ocorrer a abertura do comércio chinês com a Europa, via oriente médio. As viagens de Marco Pólo à corte de Kublai Khan proporcionaram o primeiro contato da civilização chinesa com o mercado europeu.

O império chinês durou muito mais tempo que o romano. Só foi rompido com a revolução de 1911. É importante ressaltar que ao contrário do império romano, os imperadores chineses, principalmente Kublai Khan, produziram uma cultura rica e uma base intelectual sólida. Enquanto os monarcas romanos eram, geralmente militares analfabetos, os monarcas chineses valorizavam muito a intelectualidade. Pelo fato de que os chineses se interessavam mais por literatura e arte, a matemática e a ciência chinesa sofreram um atraso em relação as outras matérias.

Os historiadores consideram muito difícil datar documentos matemáticos da China. O clássico mais antigo da matemática chinesa “Chou Pei Suang Ching” tem uma variação de quase mil anos entre suas datas mais prováveis de escrita. A maior dificuldade em datar este documento ocorre porque foi escrito por várias pessoas, em períodos diferentes. O Chou Pei indica que na China a geometria originou-se da mensuração, assim como na babilônia, sendo um exercício de aritmética ou álgebra. Neste trabalho há indicações que os chineses conheciam o teorema de Pitágoras.

Outra publicação tão antiga quanto o Chou Pei, é o livro de matemática “Chui Chang Suan Shu” (Nove capítulos sobre a arte da matemática, em torno de 1200 a.C.). Entre vários assuntos abordados, chama a atenção problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, soluções de equações e propriedades dos triângulos retângulos. Nesta mesma época os Gregos compunham tratados logicamente ordenados e expostos de forma sistemática. Os chineses seguiam a mesma linha babilônica, compilando coleções com problemas específicos. Assim como os Egípcios, os chineses alternavam, em seus experimentos, resultados precisos e imprecisos, primitivos e elaborados. Nesta publicação aparecem soluções de sistemas lineares com números positivos e negativos.

Como os chineses gostavam de resolver sistemas, os diagramas foram muito utilizados por eles. É interessante observar que o quadrado mágico teve seu primeiro registro efetuado por este povo, mesmo que sua origem é mais antiga, porém desconhecida.

Durante toda sua história, a ciência chinesa sofreu com vários problemas, que impediram sua continuidade e aprimoramento. Em 213 a.C. o imperador da China mandou queimar os livros existentes. Mesmo que algumas cópias tenham sido salvas, a perda foi irreparável. No século XX, Mao-Tsé-Tung, com sua “Revolução Cultural” também promoveu uma queima generalizada de livros, considerados “subversivos”.

Provavelmente houve contato cultural entre Índia e China e entre a China e o ocidente. Muitos dizem que houve influência babilônica na matemática chinesa, apesar de que a China não utilizava frações sexagesimais. O sistema de numeração chinês era decimal, porém com notações diferentes das conhecidas na época. Eles utilizavam o sistema de "barras" (I, II, III, IIII, T). Não podemos precisar a idade deste sistema de numeração, porém sabe-se que ele é anterior ao sistema de notação posicional.

Esta notação em barras não era simplesmente utilizada em placas de calcular (escrita). Barras de bambu, marfim ou de ferro eram carregadas em sacolas pelos administradores para que os cálculos fossem efetuados. Este método era mais simples e rápido do que o cálculo realizado com ábaco, soroban ou suan phan.

Os chineses conheciam as operações sobre frações comuns, utilizando o m.d.c. Trabalhavam com números negativos por meio de duas coleções de barras (vermelha para os coeficientes positivos e preta para os negativos), porém não aceitavam números negativos como solução de uma equação.

A matemática chinesa é tão diferente da matemática de outros povos da mesma época que seu desenvolvimento ocorreu de forma independente. Lui Hui, no terceiro século, determinou um valor para Pi utilizando, primeiro um polígono regular com 96 lados (3,14) e depois utilizando um polígono regular com 3072 lados (3,14159).

O ponto alto da matemática chinesa ocorreu no século XIII durante o fim do período Sung. Nesta época foi descoberta a impressão, a pólvora, o papel e a bússola. Obras chinesas desta época influenciaram fortemente a Coreia e o Japão. Muitas dessas obras desapareceram da China neste período, reaparecendo apenas no século XIX.

Yang Hui (1261 – 1275), matemático talentoso trabalhou com séries numéricas e apresentou uma variação chinesa para o triângulo de Pascal.

E por volta de 1303, Chu Shih-chieh, mostrou na obra *Ssu-yüan yú-chien,* que significa "Precioso espelho dos quatro elementos", uma técnica para resolver equação polinomial do 2º grau, baseada em aproximações sucessivas, chamada de método *fan*, ou *fan-fa*, que foi apresentado de forma retórica, com grande precisão, porém evidenciando uma única raiz positiva.

Podemos ver, a seguir, um exemplo do método ***fan-fa***, retirado do artigo, *Equação do 2º grau: uma abordagem histórica,* de Wagner da Cunha Fragoso:

Para solucionarem a equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$, procediam da seguinte maneira:

$$x^2 + 252x = 5292$$

$$x_1 = 19 + x$$

"x_1 é a solução aproximada obtida testando o valor 19 na equação acima e vendo que ainda faltava um decimal x para chegar a raiz da equação"

$$(19 + x)^2 + 252(19 + x) = 5292$$

"substituíam o valor de x_1 na incógnita x da equação original"

$$361 + 38x + x^2 + 4788 + 252x = 5292$$

$$x^2 + 290x = 143$$

$$x_1 = 19 + \frac{143}{1 + 290} = 19,49$$

"repetiam o cálculo até que aparecesse (*fan-fa*) um número cujo valor não se modificasse (convergência) sem esse número a solução procurada".

$$x_2 = 19,49 + x$$

$$x^2 + 252x = 5292$$

$$(19,49 + x)^2 + 252(19,49 + x) = 5292$$

$$x^2 + 290,98x = 0,66$$

$$x_2 = 19,49 + \frac{0,66}{1 + 290,98}$$

$x_2 = 19,49$ "valor convergente"

O número $x_2 = 19,49$ é o valor aproximado de uma das raízes da referida equação.

Sabe-se que a partir da idade média na Europa, a matemática chinesa não tinha realizações que se comparassem às europeias e do oriente próximo. Possivelmente a China absorvia mais matemática do que enviava. Possivelmente as ciências chinesas e hindus sofreram influências mútuas durante o primeiro milênio de nossa era.

VII. Europeus (A partir de XVI)

A ideia de usar uma convenção alfabética para diferenciar incógnitas de constantes foi do matemático francês François Viète (Fontenay-le-Comte, 1540 - Paris, 13 de Dezembro de 1603), como pode-se constatar em sua obra de 1591, *In Artem Analyticem Isogoge (*Introdução à arte analítica), onde empregou consoantes para as incógnitas e vogais para as constantes.

> "Viète simbolizava as potências usando uma mesma letra: se *A* é a incógnita, seu quadrado é dito *A quadratum*; o cubo *A cubum*; e assim por diante. Se chamarmos *x* de *A*, a equação $x^2 + b = cx$ (significando área + área = área) seria escrita na notação de Viète*,* como *A quadratum + B aequtur C in A (aequatur* quer dizer *igual*)." (ROQUE, 2012, p. 302*)*

Com o avanço do método analítico[5] (nova Álgebra) os Europeus, a partir do século XVII, já utilizavam a fórmula resolutiva pala solucionar equações polinomiais do 2º grau, mas somente no século XVIII, com a utilização do sinal negativo, a fórmula passa a ser escrita da seguinte forma $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Porém, do século XV ao XVII muitos foram os notáveis matemáticos que apresentaram maneiras diferentes de resolver as equações do 2º grau, dentre eles Descartes, que segundo Boyer (1996, p.248) no capítulo *La Geomètré* da obra *O Discurso do Método,* Descartes solucionou geometricamente a equação do tipo $x^2 - bx - c^2 = 0$, com b e c positivos.

Além de René Descartes, no século XVIII, o alemão Karl G. Christian Von Staudt e o inglês Sir John Leslie, em sua obra *Elements of Geometry*, obtiveram as soluções positivas e negativas de uma equação polinomial do 2º grau, através da utilização de eixos cartesianos e de uma circunferência.

---

[5] "Encontra-se na matemática uma certa maneira de procurar a verdade, que se diz ter sido primeiramente inventada por Platão, que Theon chamou "Análise" e que, para ele, define a suposição daquilo que procuramos como se estivesse concedido para chegar a uma verdade procurada, por meio das conseqüências; ao contrário, a "Síntese" é a suposição de uma coisa concedida para chegar ao conhecimento daquilo que procuramos por meio das conseqüências." ("Explicação do que é Análise da Coleção matemática de Pappus" – *ROQUE, 2012, p. 298)*

Pappus de Alexandria (sec. IV d.C.) foi um grande matemático grego sucessor de Euclides, Arquimedes e Apolônio. Sua principal obra foi a *Coleção matemática*, uma mistura de guia da geometria da época, acompanhada de comentários, com numerosas proposições originais, aprimoramentos, extensões e notas históricas. (Fonte: http://fatosmatematicos.blogspot.com.br)

Assim podemos perceber que os matemáticos buscaram, através da geometria, formas diferentes do método algébrico que hoje usamos para solucionar as referidas equações.

VIII. Atualmente

Os alunos brasileiros estudam equação do 2º grau a partir da 9º ano do Ensino Fundamental, e aprendem a fórmula resolutiva fornecida pelos hindus e a representação herdada dos europeus. Porém é importante que se saibam que desde muitos séculos antes de Cristo já havia uma preocupação com o desenvolvimento desse tipo de equação, analisando, inclusive as relações entre seus coeficientes e raízes.

Atualmente, podemos solucionar algebricamente qualquer tipo de equação polinomial do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, por meio da fórmula $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, em que o valor $b^2 - 4ac$ é conhecido como *discriminante*[6], que discrimina quantas raízes reais uma equação quadrática possui.

Esse discriminante, já no século XX, passou a ser representado pela letra grega Δ (delta maiúsculo), de maneira que a fórmula acima passou a ser escrita do seguinte modo: $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$.

Só depois que o aluno tem condições de calcular as raízes da equação do 2º grau é que ele pode começar a analisar o gráfico de uma função quadrática mesmo que ainda no 9º ano do Fundamental não saiba a definição oficial de função. A partir daí pode-se adiantar vários aspectos do gráfico que ele ira aprofundar no 1º ano do Ensino Médio.

[6] denominação dada pelo matemático inglês James Joseph Sylvester, em 1851.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO DA *SEQUENCIA FEDATHI* NO ENSINO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS POR MEIO DE SUA HISTÓRIA

A *Seqüência Fedathi* caracteriza-se pela criação de um clima experimental de investigação matemática, ou seja, a criação e apresentação de situações semelhantes às quais um matemático profissional enfrenta, quando, em determinados momentos manifesta desconfiança na busca por instrumentos, teórico-conceituais, que lhe possibilitem atacar um problema de forma direta ou indireta. Desta forma, sua utilização permite a *observação* dos sujeitos participantes.

Dentro de nossos objetivos e orientando-nos segundo a hierarquização em quatro níveis constituintes da *Seqüência Fedathi – (SF)* deparamo-nos com alguns momentos descritos a seguir e adaptados ao nosso contexto.

- **Nível 1** - <u>Tomada de posição – apresentação do problema</u>. Neste nível, o pesquisador-professor apresenta uma *situação-problema* para o grupo de alunos, que devem possuir meios de atacar o problema por meio da aplicação do conhecimento a ser ensinado.

Sugestão:

Neste momento da aula de matemática o professor pode fazer uma explanação histórica mostrando os povos e em que período da antiguidade o tema (equações quadráticas) se desenvolveu. Falando ainda de alguns grandes matemáticos que mereceram destaque no assunto. E também mostrando a resolução de uma equação quadrática simples para exemplificar o uso de alguns métodos explanados, por exemplo, o completamento de quadrados que tantos matemáticos da antiguidade utilizaram, ou o mesmo o método babilônio de encontrar dois números cuja soma é um número conhecido e produto outro número dado.

Em seguida deve lançar um problema que possa instigar o aluno a procurar a solução usando qualquer conhecimento que já possua.

Um bom problema que posso sugerir é um que adaptamos do Problema 20 do livro chinês *Chiu Chang Suan Shu*.

***Problema**: Tem-se um quartel quadrado, numa grande região descampada, cercado por uma muralha cujo comprimento de seus lados são desconhecidos. No meio do lado norte da muralha há um portão por onde sai um soldado vigilante que dirige 3km no sentido norte até seu posto fixo. No lado sul da muralha há um portão por onde sai outro vigilante que dirige 2 km no sentido sul e depois vira para oeste dirige mais 6 km, onde só a partir desse ponto consegue observar com um binóculo o primeiro soldado em seu posto. Qual é a medida do lado do quartel?*

Inicialmente não devemos armar uma fórmula analítica para o aluno.

Como se trata especialmente de um aluno de 9º ano podemos ir dando ideia de que ele precisa esboçar o desenho, tentar usar os conhecimentos de geometria plana: semelhança de triângulos, por exemplo, já que foi assunto estudado no 8º ano.

Para esboçar o desenho sugerimos, se possível, que o professor leve os alunos para o laboratório de informática e lá faça os alunos utilizarem o Software GeoGebra, que já deverá ter suas funções essenciais ensinadas previamente aos alunos.

Deve-se então ir auxiliando o aluno para que ele chegue a um esboço pelo menos próximo do ilustrado na Figura G1 abaixo.

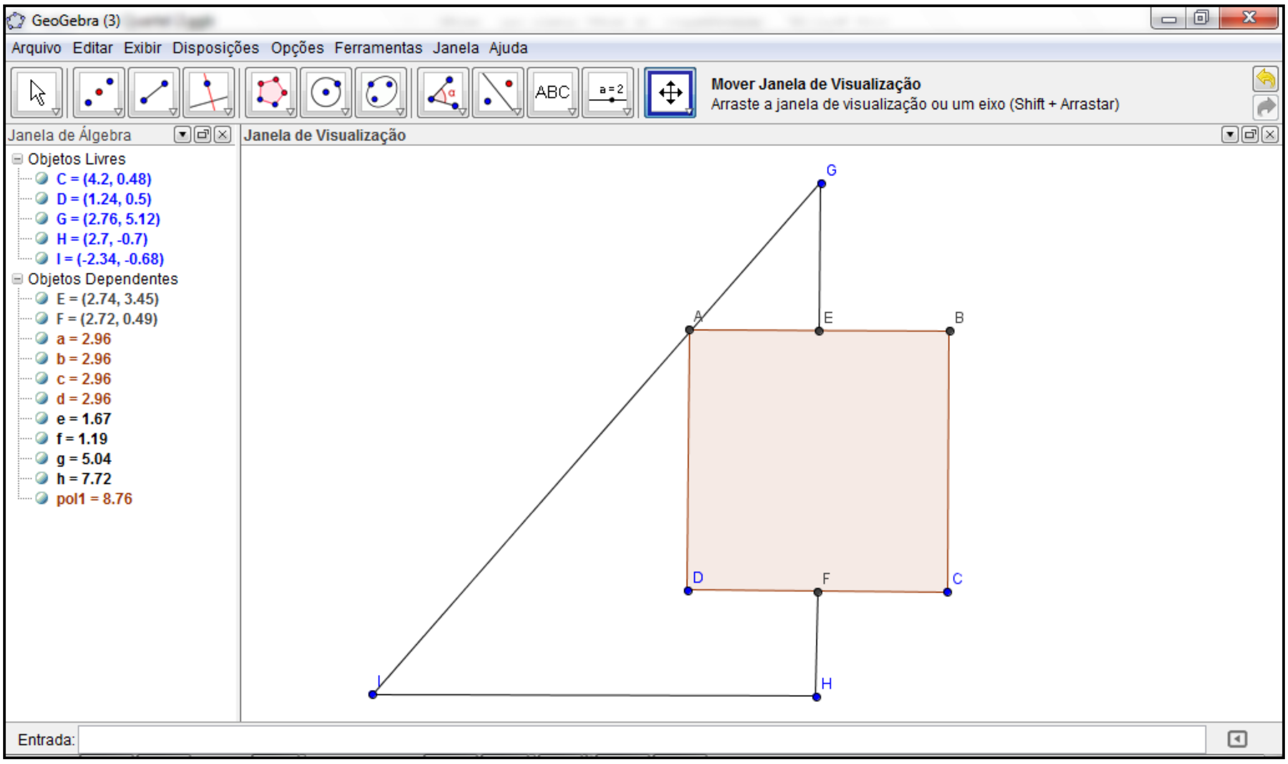


Figura G1 (feita no Geogebra)

- **Nível 2** - <u>Maturação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema</u>. Destinado à discussão e debate envolvendo os seguintes elementos: *professor-alunos-saber*.

Neste nível, a formulação e a adoção da simbologia conveniente podem ser estimuladas; aluno pode escrever os dados do problema na figura. Utilizar seu caderno se quiser transcrever, ou no próprio computador, de modo que obtenha uma figura com os dados organizados como na Figura G2.

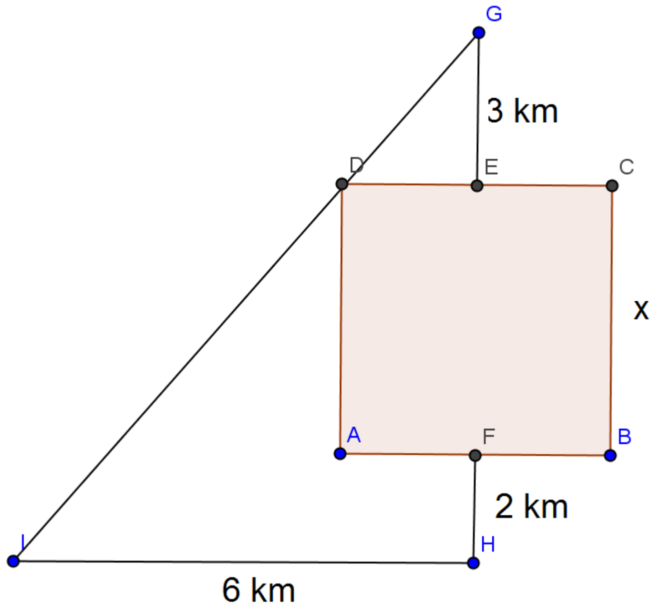


Figura G2

- **Nível 3** - <u>Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem á solução do problema</u>. Aqui, os alunos organizados em grupos de cinco, devem apresentar soluções que possam conduzir aos objetivos solicitados e convencer com suas *argumentações* outros grupos.

Neste nível identificamos as *argumentações* ou *provas* apresentadas pelos alunos de uma maneira progressivamente mais formalizada. O professor pode destacar aspectos positivos e negativos dos argumentos empregados pelos alunos.

Provavelmente os alunos usarão semelhança de triângulos e montarão um equação do segundo grau. A partir daí pode ser que surjam diversas soluções baseadas em métodos que já foram expostos no nível 1, como completamento de quadrados, método babilônio, algum método geométrico grego ou outro que algum aluno já conheça por qualquer motivo.

Depois de toda essa interação entre os grupos, o professor pode sugerir que os alunos levem sua solução para o GeoGebra e confiram se está correta.

Ao final desse processo eles deverão obter a Figura G3, que mostra que o lado da muralha do quartel mede 4 km.

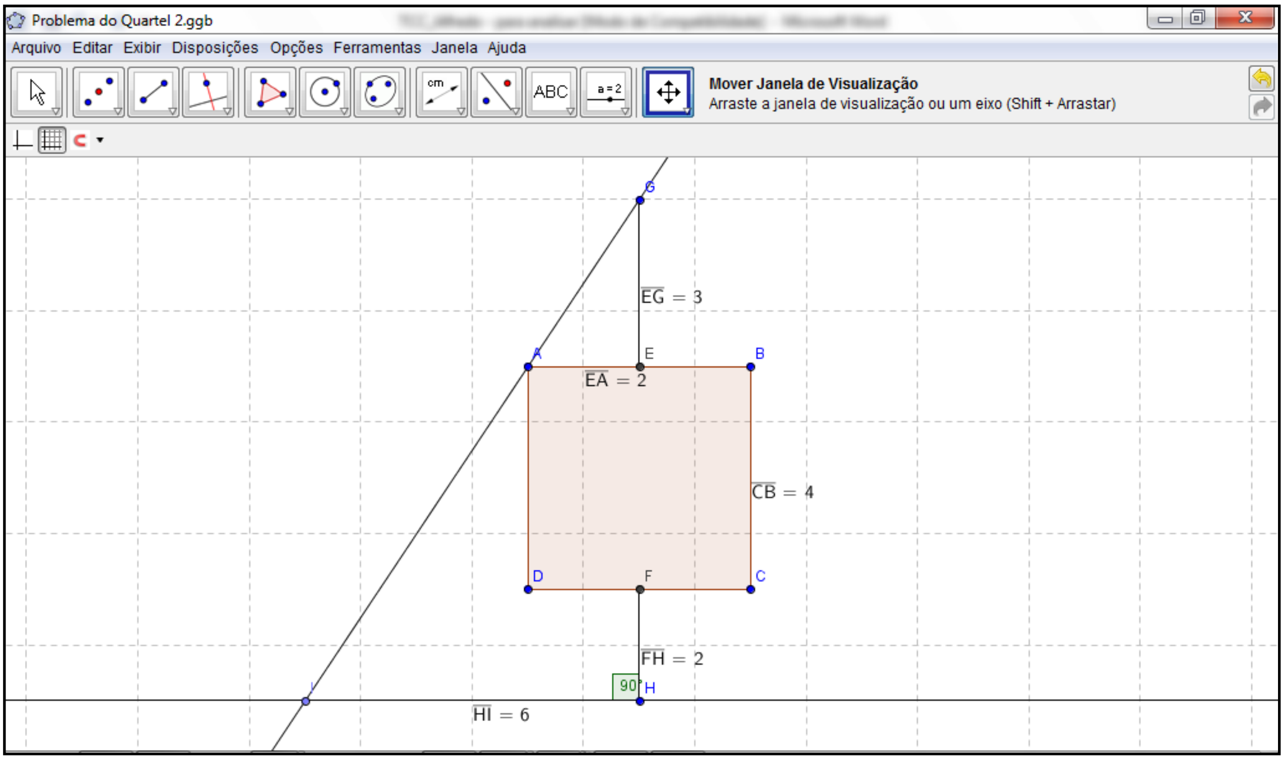


Figura G3

- **Nível 4** - <u>Prova – apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado</u>. Aqui, a didática do professor determinará em que condições ocorrerá a aquisição de um novo *saber*.

Nesta etapa final, o professor de matemática deve apresentar de forma resumida e comparativa as estratégias, ideias intuitivas e formais, bem como as heurísticas empregadas pelos povos do passado.

O professor pode salientar que os Babilônios (4000 a.C.) foram os primeiros a serem atribuídos à resolução destas equações, porém, seus métodos não envolviam nenhuma simplificação ou linguagem que se aproximasse do que hoje chamamos de álgebra.

Por outro lado, Euclides (300 a.C.) desenvolveu um método de aproximação geométrica que, embora usado pelos matemáticos para resolver equações quadráticas, seu objetivo era encontrar um comprimento o que em nossa notação é raiz de uma equação.

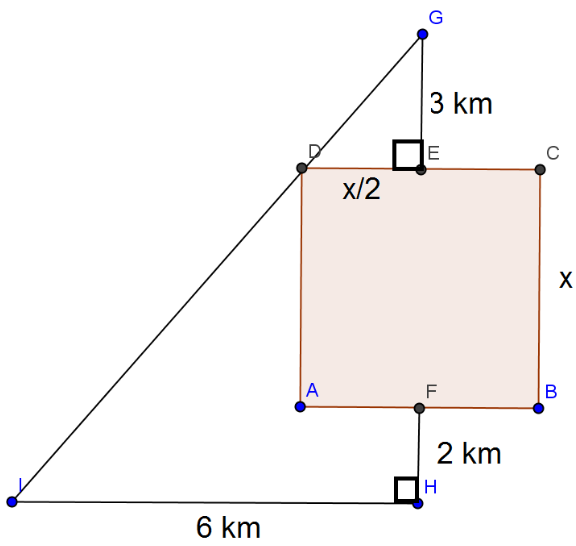
Os matemáticos hindus estudaram os métodos babilônicos, entre eles, Brahamagupta (598-668 d.C.), que descente em parte o método moderno, no qual se admite raízes negativas. Ele também utilizou abreviações para incógnita, normalmente usada em uma cor destacada.

Finalmente, no momento de *institucionalização*, o conhecimento escolhido que se relaciona com as intenções didáticas do professor deve ser destacado a atribuindo-lhe um caráter de *universalidade* por meio, por exemplo, do seguinte teorema (BASTOS, G. Gurgel, 2003, pg. 03), que pode ser demostrado para o aluno.

> ***Teorema:*** *Sendo* $a, b, c \in R$ *com* $a \neq 0$ *temos que a solução de* $ax^2 + bx + c = 0$*, é dada pela expressão* $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Então é dada a solução mais formal e comum do problema sugerido como fazemos abaixo:

Observe a figura



Utilizaremos o fato de que o triangulo GDE é semelhante ao triangulo GIH para armarmos a proporção:

$$\frac{3}{3+x+2} = \frac{x/2}{6} \rightarrow \frac{3}{x+5} = \frac{x}{12}.$$

Donde obtemos a equação

$$x^2 + 5x - 36 = 0.$$

Que pode ser resolvida geral já demonstrada acima.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.(-36)}}{2.1} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

Obtendo-se as raízes $x_1 = 4$ e $x_2 = -9$, mas aproveitando-se apenas a primeira pois o comprimento da muralha tem que ser um valor positivo, no caso 4 km.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em todo este trabalho procuramos mostrar que o professor de ensinos fundamental e médio, ao ensinar equações quadráticas, não pode ficar meramente na exposição de conteúdos do livro didático adotado pela escola, já que sempre encontraremos deficiências que devem ser minimizadas pela sua interferência, como podemos observar com a leitura das seguintes citações de Lages (2001), ao analisar, por exemplo, o livro de Antonio Machado, Matemática na Escola do Segundo Grau-volume 1.

Destacamos o estudo desenvolvido por Prado (citado por Abreu, 2001, pg. 23), cuja finalidade principal foi apresentar e desenvolver uma proposta de Educação Matemática baseada na ordem histórica em que o conhecimento foi produzido, tendo como elemento norteador o princípio genético no ensino e a lei biogenética fundamental de Haeckel (séc. XIX), que defende a história da matemática como um recurso de grande eficácia para o ensino de matemática, de acordo com as ideias de Poincaré, Klein, Polya e Kline, os quais, entre outros, defendem o princípio de que “o aprendizado efetivo requer que o aprendiz retrace os principais passos na evolução histórica do assunto”. (ABREU, 2001, p.24)

É importante ressaltar que a abordagem desse tema para o ensino médio deve ser diferente da que foi dada no fundamental. Porém o que observamos pelos próprios livros didáticos é que essa diferenciação nem sempre é feita de forma adequada.

Neste sentido, este trabalho propõe que no fundamental sejam utilizados vários métodos de resolução de equações quadráticas num contexto histórico, sugerindo ao docente um percurso metodológico para aplicação desses recursos em aula. Para isso utilizamos a *Seqüência Fedathi* em que as aulas podem ser divididas em quatro momentos: Nível 1 (Tomada de posição – apresentação do problema); Nível 2 (Maturação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema); Nível 3 (Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem á solução do problema) e Nível 4 (Prova – apresentação e formalização do modelo matemático e ser ensinado).

Por fim colocamos em anexo uma lista de exercícios presentes em papiros, tabletes de argila e manuscritos antigos para que o professor possa sugerir como tarefa para seus alunos.

Esperamos então, contribuir com a prática do professor no que diz respeito às equações quadráticas para que ele tenha mais opções para ministrar suas aulas sobre este rico assunto.

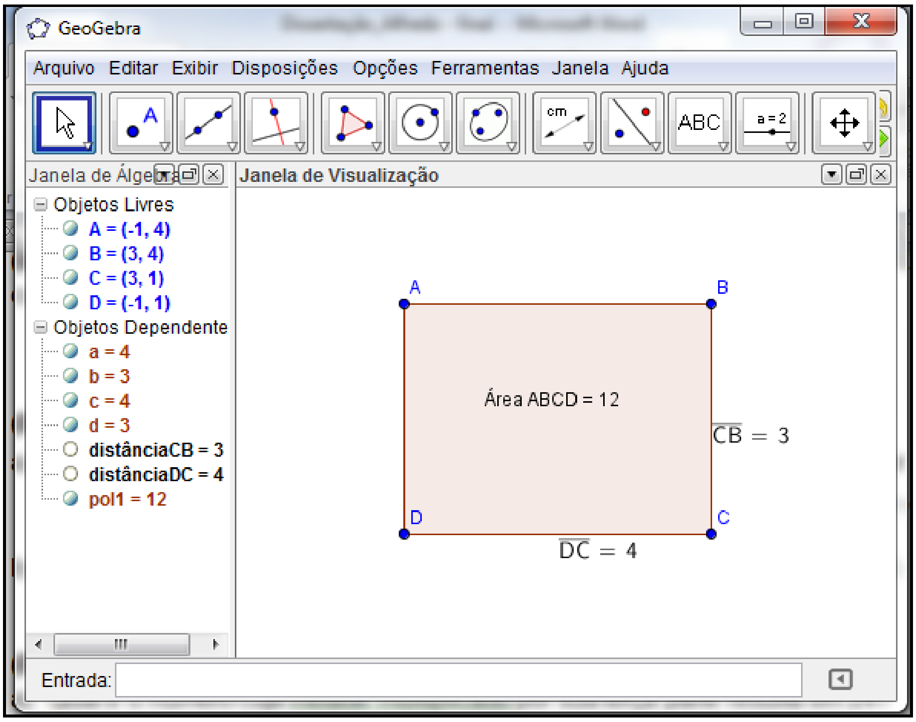
ANEXOS

I. PROBLEMAS ANTIGOS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU?

Todos os problemas apresentados a seguir foram retirados do livro de Sérgio Nobre: História da Resolução da Equação de 2º Grau: Uma Abordagem Pedagógica.

1. **(Exercício 6 – Papiro de Moscou)** Um retângulo tem área 12. Sua largura é 1/2 do comprimento + 1/4 do comprimento. Determine os lados do retângulo.

Sugiro então, que o professor oriente o aluno a construir uma figura no geogebra que represente a solução da questão, como mostramos a seguir.



2. **(Exercícios propostos por al-Khwãrizmi)**
   a) Eu divido 10 em 2 partes. Multiplico a 1ª parte por si mesmo e o resultado por $2\frac{7}{9}$ e o resultado é o mesmo se eu multiplicasse 10 por si mesmo. Quanto vale cada parte?
   Resp.: 6 e 4
   b) Multiplique um número por si mesmo, pegue a 4ª parte e o resultado é 20. Que número é esse?
   Resp.: 10

3. **(Exercícios propostos por Leonard Euler em 1770)**
   a) Qual é o número cuja metade multiplicado por sua terça parte resulta em 24?
   Resp.: 12
   b) É procurado um número com as seguintes características: se adicionarmos 5 a ele e se subtrairmos 5 dele, o produto da soma pela diferença é igual a 96.
   Resp.: 11

4. **(Exercícios presentes em tabletes babilônicos)**
   a) Eu somei a área e o lado de um quadrado e o resultado é 3/4.
   Resp.: o lado mede 1/2
   b) Eu subtrai o lado de um quadrado de sua área e o resultado é 870.
   Resp.: o lado mede 30
   c) Da área de um quadrado, eu subtrai um terço de seu lado e o resultado é 1/12
   Resp.: o lado mede 1/2

5. **(Problemas de Brahmagupta)**
   a) O quadrado de um número é multiplicado por 8 e do resultado se subtrai 1, reduz-se isto à metade e se divide pelo número, obtendo então 1. Meu amigo, diga-me o número.
   Resp.: 1/2
   b) A raiz quadrada da metade de um enxame dirigiu-se a um arbusto de jasmim e 8/9 do exame a outro. Uma abelha esvoaça em torno do único zangão que resta na colmeia. – Mulher formosa diga-me qual era o tamanho do enxame?
   Resp.: 72

6. **(Alguns problemas do livro Liber abbaci de Fibonacci dão origem as equações abaixo)**
   a) $\left(1+\frac{3}{4}x\right).\left(1+\frac{2}{3}x\right)=73$
   Resp.: 32/3
   b) $\frac{60}{x+2}=5+\frac{20}{x}$
   Resp.: 2 e 4

7. **(Problema proposto por Cardano)**
   a) De um número, que é o lado de um quadrado, você subtrai a sua terça parte, a sua quarta parte e a ainda a quantidade 4. Este resultado dever ser multiplicado por ele mesmo, e o produto será igual a este número adicionado de 12.
   Resp.: 96/5 e 12/5

II. QUEM FOI BHASKARA?

Acharya Bhaskara (1114-1185), matemático, professor, astrólogo e astrônomo indiano nascido em Vijayapura, Índia, foi o mais importante matemático do século XII e último matemático medieval importante da Índia. Filho de um astrólogo famoso chamado Mahesvara, tornou-se conhecido pela complementação da obra do conterrâneo Brahmagupta (598–668 d.C), por exemplo dando pioneiramente a solução geral da conhecida equação de Pell[7] e a solução do problema da divisão por zero, ao afirmar também pioneiramente, em sua publicação Vija-Ganita ou Bijaganita, um trabalho em 12 capítulos, que tal quociente seria infinito. Tornou-se chefe do observatório astronômico a Ujjain, cidade onde ficou até morrer e o principal centro matemático da Índia na sua época, fama desenvolvida por excelentes matemáticos como Varahamihira e Brahmagupta que ali tinham trabalhado e construído uma escola forte de astronomia matemática. Sua obra representou a culminação de contribuições hindus anteriores.

O hábito de dar o nome de Bhaskara para a fórmula de resolução da equação do 2º grau se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. Esse costume, aparentemente só brasileiro (não se encontra o nome de Bhaskara para essa fórmula na literatura internacional), não é adequado pois: problemas que recaem numa equação do segundo grau já apareciam, há quase quatro mil anos, em textos escritos pelos babilônios. Nesses textos o que se tinha era uma receita (escrita em prosa, sem uso de símbolos) que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos.

Seis trabalhos de Bhaskara são conhecidos: Lilavati, Bijaganita, Siddhantasiromani, Vasanabhasya of Mitaksara, Karanakutuhala ou Brahmatulya e Vivarana. Em Siddhantasiromani, dois volumes sobre trigonometria e matemática aplicada à astronomia, apresentou as expressões muito utilizadas até hoje *sen*(a + b) = *sen*a.*cos*b + *cos*a.*sen*b e *sen*(a – b) = *sen*a.*cos*b – *cos*a.*sen*b.

A obra Siddhanta-siromani, dedicada a assuntos astronômicos é dividida em duas partes:

· Goladhyaya (Esfera Celeste);

· Granaganita (Matemática dos Planetas);

[7] **Equação de Pell:** Caso particular das equações diofantinas com a forma: $x^2 - ny^2 = 1$. Onde n é um inteiro positivo. Se n não possui raiz exata, então existem infinitas soluções inteiras x, y (Se n tiver raiz exata dá pra mostrar que a única solução é $x = \pm 1$ e $y = 0$).

E Bijaganita que é um livro sobre Álgebra. Bhaskara gasta a maior parte desse livro mostrando como resolver equações. Embora não traga nenhuma novidade quanto à resolução das equações determinadas, ele traz muitos novos e importantes resultados sobre as indeterminadas. Para os matemáticos, é exatamente nas suas descobertas em equações indeterminadas que reside sua importância histórica.

Seu tratado mais conhecido é Lilavati (1150), nome de uma sua filha, um livro com numerosos problemas sobre equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas, mensurações lineares e de áreas e volumes, progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríades pitagóricas e outros. Por exemplo, mostrou a solução para as equações indeterminadas considerando o problema da divisão por zero e a demonstração de forma simplificada do teorema de Pitágoras, além de apresentar tabelas de senos com intervalos de um grau. Definiu valores para *pi* da seguinte forma: 3927/1250 para cálculos acurados, 22/7 para aproximações e raiz quadrada de 10 para exercícios corriqueiros.

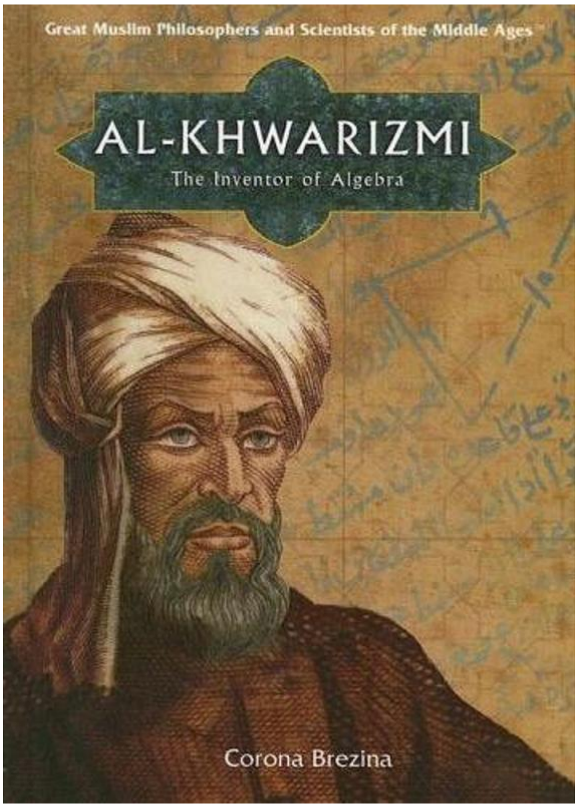
Conta a história que quando Lilavati nasceu, Bhaskara consultou as estrelas e verificou, pela disposição dos astros, que sua filha, condenada a permanecer solteira toda a vida, ficaria esquecida pelo amor dos jovens patrícios. Não se conformou Bhaskara com essa determinação do Destino e recorreu aos ensinamentos dos astrólogos mais famosos do tempo. Como fazer para que a graciosa Lilavati pudesse obter marido, sendo feliz no casamento? Um astrólogo, consultado por Bhaskara, aconselhou-a a casar Lilavati com o primeiro pretendente que aparecesse, mas demonstrou que a única hora propícia para a cerimônia do enlace seria marcada, em certo dia, pelo cilindro do Tempo.

Os hindus mediam, calculavam e determinavam as horas do dia com o auxílio de um cilindro colocado num vaso cheio d'água. Esse cilindro, aberto apenas em cima, apresentava um pequeno orifício no centro da superfície da base. À proporção que a água, entrando pelo orifício da base, invadia lentamente o cilindro, este afundava no vaso e de tal modo que chegava a desaparecer por completo em hora previamente determinada.

Lilavati foi, afinal, com agradável surpresa, pedida em casamento por um jovem rico e de boa casta. Fixado o dia e marcada a hora, reuniram-se então os amigos para assistir à cerimônia.

Posteriormente a Bhaskara, o mais brilhante matemático indiano, já nos tempos modernos talvez tenha sido Srinivasa Ramanujan (1887-1920), descoberto em 1913 pelo notável matemático inglês Godfrey Harold Hardy (1877-1947).

III. QUEM FOI ABU JAFAR MOHAMED IBN MUSA AL-KHWÃRIZMI?



Brilhante matemático e astrônomo persa-muçulmano nascido provavelmente na região de Khwarizmi, sul do mar de Aral, na Ásia central, por volta do século IX, ano de 780, descobridor do Sistema de Numeração Decimal e dos dez símbolos, que hoje são conhecidos como algarismos indo-arábicos, e introdutor desses numerais e dos conceitos da álgebra na matemática europeia. O Califa al-Mamum ocupava o trono do Império Árabe e decidiu transformar seu reino em um grande centro de ensino onde se pudesse dominar todas as áreas do conhecimento, originando a primeira época áurea da ciência islâmica. E para atingir esse objetivo, contratou e trouxe para Bagdá os grandes sábios muçulmanos daquela época. Entre esses sábios estava Al-Khowarizmi, o maior matemático árabe de todos os tempos.

Vivendo sob os califados de al-Mamun e al-Mutasim, de sua vida anterior a Bagdá pouco se sabe, porém escreveu principalmente sobre astronomia, geografia e matemática. Da importância de sua obra também se originou a palavra álgebra (al-jabr = reunir). Seu extraordinário trabalho sobre matemática elementar Kitab Al-jabr w'al-mukabalah (A arte de reunir desconhecidos para igualar ao conhecido, 820), uma compilação de regras para solução aritmética de equações lineares e de segundo grau, baseado nos trabalhos de Diofante, foi traduzido no século XII para o latim e quando deu origem ao termo “álgebra”.

Encarregado de traduzir para o árabe os livros de matemática vindos da Índia, numa dessas traduções o matemático se deparou com aquilo ainda hoje é considerado, a maior descoberta no campo da matemática: O Sistema de Numeração Decimal. Ele ficou tão impressionado com a utilidade daqueles dez símbolos, que hoje são conhecidos como: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, que escreveu um livro explicando como funciona esse sistema. Este importante trabalho (825) foi preservado numa tradução latina Algoritmi de número Indorum (975), um texto sobre a arte hindu de calcular, obra que divulgou os símbolos e o sistema numérico indo-arábico.

Este livro introduziu bibliograficamente na Europa, o sistema numérico dos hindus, que passou a ser conhecido como algarismos arábicos, além de importantes conceitos algébricos. Deste texto surgiu o termo algorítmo.

Al-Khowarizmi Também compilou tabelas astronômicas, baseadas no Sind-hind, versão árabe do original sânscrito Brahma-siddhanta, no século VII da era cristã, e morreu em Bagdá, em 850. O termo algarismo vem de Al-Khowarizmi, usado para denominar os símbolos de 0 a 9, uma homenagem a esse matemático árabe que mostrou a humanidade a utilidade desses dez e magníficos símbolos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

ABREU, I. M. O uso da História da Matemática no ensino de Matemática: reflexões teóricas e experiências, UEPA, Pará, 2001.

BASTOS, G. Gurgel, Resolução de Equações Algébricas por Radicais, UFC, 2003.

BARBEIRO, Heródoto. Et alli. História. Ed. Scipione. 2005

BERUTTI, Flávio. História. Ed. Saraiva. 2004.

BOYER, Carl B. Historia da Matemática. 12ª ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BROLEZZI, A. C., A arte de contar: Uma introdução ao estudo do valor didático da História da Matemática (dissert. de mestrado), Universidade de São Paulo, 1991.

BROLEZZI, A. C., A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática (tese de doutorado), Universidade de São Paulo, 1996.

CERVO, A. e BERVIAN, P. A. Metodologia Científica, 5ª edição, São Paulo, Ed. Prentice hall, 2002.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. 2º ed. UNICAMP, 2002.

FAUVEL, J. & MAANEM, V. J. History in Mathematics Education, ICMI, klumer Academic Publishers, vol. 6, 2000.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. Equação do 2º grau: Uma Abordagem Histórica. Ijuí: UNIJUÍ, 1999.

IEZZI, G. e MURAKAMI C., Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 1, 8ª edição, São Paulo, Ed. Atual, 2004.

JOSÉ, C. P. Uma breve história das equações, Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, GPEM – CEFET, Pato Branco, 2000.

LAGES, E. L. Exame de textos do ensino médio: Análise das coleções de livros do ensino médio, Sociedade Brasileira de Matemática, IMPA. Rio de Janeiro, 2001.

NOBRE, S. História da Resolução da Equação de 2º Grau: Uma Abordagem Pedagógica. SBHM, Unesp, SP, Abril 2003.

ROQUE, T. História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mito s e lendas. Rio de Janeiro. Zahar. 2012.

STRUIK, História concisa das matemáticas. Gradiva. 1989.