UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CAMPUS DE TRÊS LAGOAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

ANGELA PEREIRA BARALDI

MODELAGEM MATEMÁTICA: Um recurso facilitador no processo ensino-aprendizagem

Três Lagoas - MS

2018

ANGELA PEREIRA BARALDI

MODELAGEM MATEMÁTICA: Um recurso facilitador no processo ensino-aprendizagem

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT do Curso de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edivaldo Romanini

Três Lagoas – MS

2018

ANGELA PEREIRA BARALDI

MODELAGEM MATEMÁTICA: Um recurso facilitador no processo ensino-aprendizagem

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT do Curso de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Comissão Julgadora:

Edivaldo Romanini

Prof. Dr. Edivaldo Romanini (Orientador)
UFMS/CPTL

Renato César da Silva

Prof. Dr. Renato César da Silva
UFMS/CPTL

Hashimoto

Profa. Dra. Selma Helena Marchiori Hashimoto
FACET/UFGD

Três Lagoas, 13 de Abril de 2018.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser o guia de minha vida. Aos meus pais e irmãos pelo carinho com que sempre me trataram, e ao meu esposo Roberto que não mediu esforços para me apoiar e ajudar quando precisei.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus pelo dom da vida e por ter me dado saúde para buscar a realização deste sonho.

Ao meu esposo, por todo apoio e paciência que teve comigo nos momentos em que eu achava que não daria conta e por sempre acreditar em mim.

Aos meus pais e irmãos que me deram todo o apoio possível nesta jornada.

Aos colegas e amigos do curso de Mestrado, em especial Cidinha, Giovana, Panda e Zonta, por dividirem comigo as angústias e as alegrias das pequenas conquistas.

Ao corpo diretivo da Escola Estadual Prof.ª Cinélzia Lourenci Maroni por acreditar que meu trabalho pudesse contribuir com a formação de seus alunos.

Aos alunos que participaram deste projeto, todo meu agradecimento por terem me dado a chance de aprender a ser uma educadora melhor.

Gostaria de agradecer também aos professores da UFMS, Campus de Três Lagoas, por cada aprendizado que tivemos. De forma particular ao meu orientador Prof.º Dr. Edivaldo Romanini pela orientação e incentivo, ao professor Prof.º Dr. Renato César da Silva pelas reflexões sugeridas para a escrita do trabalho, e a todos professores que de alguma forma contribuíram para minha formação.

.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de discutir a Modelagem Matemática como um recurso facilitador no processo ensino-aprendizagem nos cursos de Ensino Fundamental II e Médio, tanto para introdução de um determinado assunto como para revisão e resgate de conteúdos já aprendidos, de forma a proporcionar ao aluno uma aprendizagem mais significativa. O trabalho mostra que atividades envolvendo Modelagem Matemática, estabelece uma relação entre a Matemática escolar e situações da realidade vivenciadas pelo aluno. O trabalho também descreve uma mesma atividade de modelagem desenvolvida numa 6ª série de ensino fundamental e em turmas do Ensino Médio, com diferentes enfoques e objetivos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino-aprendizagem. Modelagem Matemática. Modelos.

ABSTRACT

The prime objective of this paper is to discuss Mathematical Modeling as a facilitator resource of the teaching-learning process in Elementary School and High School, both to introduce a certain subject and to review and rescue already learned content, in order to provide the student a more meaningful learning. The paper shows that activities involving Mathematical Modeling, establishes a relationship between School Mathematics and reality situations experienced by the student. The paper also describes the same modeling activity developed in a 6th grade elementary school and in high school classes with different approaches and objectives.

Keywords: Mathematics Education. Teaching-learning progress. Mathematics Modeling.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Reflexões sobre o ensino da Matemática

Atualmente, o ensino da matemática causa preocupações à grande parte da sociedade, pelo fato dos alunos apresentarem um baixo rendimento escolar, em qualquer nível de escolaridade. Sendo assim, a matemática é considerada uma das disciplinas com o maior índice de alunos em recuperação, chegando muitas vezes à reprovação.

Numa sociedade onde o conhecimento é usado de forma intensiva, o diferencial entre as pessoas estará na qualidade da educação recebida. E isso é uma preocupação presente nas esferas responsáveis pela Educação, como pode-se ver na citação a seguir:

> A sociedade de hoje é cada vez mais bombardeada pelo uso intensivo do conhecimento, seja para trabalhar, conviver ou exercer a cidadania, seja para cuidar do ambiente em que se vive. Com mais pessoas tendo acesso ao estudo, além de um diploma de nível superior, as características cognitivas e afetivas são cada vez mais valorizadas, como as capacidades de resolver problemas, trabalhar em grupo, continuar aprendendo e agir de modo cooperativo, pertinentes em situações complexas (SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, 2010, p. 8).

Desta forma encontra-se um problema a ser resolvido. Daí a necessidade de uma prática cotidiana, por parte do professor e da escola, que permita ao aluno autonomia no pensar e no agir. “A autonomia para gerenciar a própria aprendizagem (aprender a aprender) e para a transposição dessa aprendizagem em intervenções solidárias (aprender a fazer e a conviver) deve ser a base da educação das crianças” (SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, 2010, p. 10).

No decorrer da história da Educação no Brasil, vários momentos foram marcados por reformas, reestruturações e reorganizações, alterando a grade curricular e as metodologias utilizadas no ato de ensinar visando os objetivos do poder público que, pelo menos na teoria, buscam a melhora da qualidade do ensino.

Depois da aprovação da Lei de Diretrizes e Bases em 1996 (LDB/96[1]) houve a possibilidade da diversificação do currículo escolar para complementar a base

---

[1] A LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional) é a mais importante lei brasileira que se refere à educação. Esta lei foi aprovada em 20 de dezembro de 1996 com o nº 9394/96. É composta por 92 artigos que versam sobre os mais diversos temas da educação brasileira.

curricular comum (Art. 26 da LDB/96)[2]. Assim a interdisciplinaridade passou a ser quase que obrigatória na prática pedagógica docente. A educação na era da informação não podia mais se fechar num único parâmetro curricular. O art. 22 deixa bem claro que o objetivo da educação deveria ser bem mais do que o acúmulo de conhecimento, mas proporcionar ao aluno o desenvolvimento integral de suas capacidades intelectual, afetiva e social.

> A educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores (BRASIL, 1996).

O professor, a partir de então, deveria primar por propostas de ensino baseadas na busca coletiva do saber e na possibilidade do aluno fazer a própria construção do conhecimento, aliando o saber escolar com o saber que o aluno carrega consigo adquirido com as experiências e vivências fora do ambiente escolar. Neste processo, o aluno passa a ser um elemento ativo do seu processo de aprendizagem deixando de ser o ouvinte passivo das explicações dos professores.

Segundo ARAÚJO (2000), é necessário que o aluno tenha uma aprendizagem que atenda suas reais necessidades, de maneira que possa buscar respostas para os problemas da realidade social, e o professor é o grande responsável por mediar essa construção. O papel do professor é o de propor situações que levem o aluno à novas descobertas e novos conhecimentos, de maneira que este se torne crítico e autônomo, sinta-se desafiado e principalmente encorajado a vencer desafios.

Neste contexto, temos que a escola de hoje deve ser um ambiente de aprendizagem que propicie ao aluno desenvolver atitudes de responsabilidade, compromisso, crítica, satisfação e reconhecimento de seus direitos e deveres.

> Neste aspecto, a matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios (BRASIL, 1998, p. 28).

Com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, a grande questão é: “Como fazer com que o aluno aprenda matemática e que ele se aproprie desse

---

[2] Art. 26. Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos.

conhecimento para se inserir num mundo onde as necessidades sociais, culturais profissionais ganham novos contornos, fazendo com que todas as áreas requeiram alguma competência em matemática”?

Para se chegar a esta resposta, ou à solução deste problema, nos últimos anos, muitos estudiosos da área da Educação Matemática têm investigado novas metodologias de ensino na esperança de encontrar o caminho das pedras. Uma delas é a Modelagem Matemática, que é a “arte de expressar por intermédio de linguagem matemática situações-problema de nosso meio” (BIEMBENGUT e Hein, 2003, p. 7).

Além de adquirir conhecimento matemático é preciso que o aluno aprenda formas de acesso e apropriação do conhecimento, de modo que ele possa praticá-las no decorrer de sua vida, tendo noção de responsabilidade em relação aos outros e com a sociedade. Isso significa ir além das simples resoluções de questões matemáticas, na maioria das vezes sem significado para o aluno, e levá-lo a uma melhor compreensão tanto da teoria matemática quanto da natureza do problema a ser modelado.

De acordo com Carraher T., Carraher D. e Schliemann (2003), não significa que os algoritmos, fórmulas e modelos simbólicos devam ser excluídos da escola, mas que o ensino da matemática deva proporcionar formas dos alunos relacionarem esses modelos a experiências funcionais que lhes proporcionarão significado. Dessa forma,

> a Modelagem Matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p. 18).

Sabe-se que não existem soluções permanentes para as questões da educação. Soluções que num determinado momento parecem ser as melhores, precisam ser sempre reanalisadas em consequência de avanços tanto nas ciências que constituem os conteúdos a serem ensinado como nas ciências auxiliares da educação. Assim, “o professor precisa estar sempre aprendendo, analisando criticamente as propostas de currículo existentes, experimentando e avaliando novas propostas que surgirem” (NUNES, et al., 2005, p. 12). Cabe ao professor escolher a sua melhor forma de ensinar.

1.2 Motivação e objetivos

A intenção deste trabalho é discutir a Modelagem Matemática como um recurso facilitador no processo ensino-aprendizagem nos cursos de Ensino Fundamental II e Médio, tanto para introdução de um determinado assunto como para revisão e resgate de conteúdos já aprendidos, analisar o processo de desenvolvimento dessa metodologia em turmas que, aparentemente, não têm tanto conhecimento para elaboração de modelos matemáticos, e a forma com que essa metodologia colabora para que o aluno tenha um aprendizado com significado.

O fascínio pelo assunto Modelagem Matemática surgiu do contato obtido pela primeira vez na graduação para o desenvolvimento de um trabalho de iniciação científica. Este trabalho deu oportunidade de vivenciar aplicações da matemática em outras áreas do conhecimento, através de modelos matemáticos, que ajudam, "não apenas, melhor entender e dispor de novas informações, como ainda, simular, inferir, efetuar previsão, projeção, tomar decisão e então efetuar possíveis modificações, produzir ou recriar algo" (BIEMBENGUT, 2016, p. 83).

A matemática conhecida até o momento era baseada, essencialmente, em fórmulas e equações sem relação alguma entre o saber da escola e o saber da vida cotidiana. O contato com a Modelagem Matemática possibilitou fazer conexões com outras áreas do conhecimento e despertar a vontade de aprender cada vez mais.

Assim, espera-se que este trabalho possa contribuir como sugestão para conscientizar professores e alunos que o uso de técnicas de modelagem para aplicações matemáticas pode desenvolver, no educando, capacidades e atitudes criativas na resolução de problemas.

1.3 Estrutura do trabalho

Além de pesquisa bibliográfica sobre o tema Modelagem Matemática, para o desenvolvimento deste trabalho, uma das atividades propostas pelos Educadores Maria Sallett Biembengut e Nelson Hein em seu livro MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO, 2003, foi aplicado em turmas de séries distintas (7º ano do Ensino Fundamental e 2º e 3º do Ensino Médio), em anos e escolas diferentes, com o intuito de mostrar que uma mesma atividade de modelagem pode ser adaptada para determinados grupos de pessoas de acordo com o objetivo a ser alcançado. A intenção da aplicação na 6ª série era mostrar a eles a representação algébrica da equação da reta, enquanto para as turmas do Ensino Médio, além de apresentar conteúdos novos, era também revisar assuntos para a prova do Enem.

A prova do Enem é contextualizada e interdisciplinar, colocando diante do aluno situações e problemas que exigem dele aplicações de diferentes conceitos para sua solução, onde sua forma de avaliação não mede a capacidade do estudante em acumular informações, mas verificar sua capacidade de refletir, valorizar sua autonomia na hora de tomar decisões e fazer as próprias escolhas. E tudo isso vai ao encontro de uma proposta que se utiliza da Modelagem Matemática.

A primeira aplicação da atividade foi para uma turma de 6ª série (atual 7ª ano) em 2005, numa escola particular da cidade de Guarulhos/SP, período em que lecionava nesta cidade, ao qual serviu de base para a conclusão do curso de Especialização em Educação Matemática que cursava na época (PEREIRA, 2006). Este trabalho serviu de motivação para o desenvolvimento da atual pesquisa. A segunda aplicação foi para turmas de 2º e 3º anos do ensino médio em 2017, numa escola pública na cidade de Piacatu, localizada no interior do Estado de São Paulo, cujo objetivo era aprofundar o desenvolvimento da atividade dando continuidade ao trabalho desenvolvido em 2005.

O trabalho está organizado em 5 capítulos.

No capítulo 1, há uma breve consideração sobre o processo de ensino-aprendizagem, a motivação pela escolha do tema e os objetivos esperados ao término do trabalho.

No capítulo 2, é apresentado um breve histórico do surgimento da Modelagem Matemática no Brasil e suas contribuições para a educação.

No capítulo 3, é abordado o conceito de Modelo e Modelagem Matemática, o processo de Modelagem Matemática e algumas reflexões sobre a Modelagem Matemática como estratégia de ensino-aprendizagem.

No capítulo 4, são detalhadas as atividades aplicadas nas turmas já mencionadas juntamente com comentários a partir das observações. É também apresentado um breve esclarecimento sobre as diferenças encontradas no desenvolvimento de cada atividade e as considerações finais.

No capítulo 5 é feita a conclusão do trabalho.

Na sequência seguem as referências utilizadas, o apêndice e os anexos.

Espera-se que, após a leitura deste trabalho, o leitor-professor possa sentir-se encorajado a renovar sua prática docente, contribuindo dessa forma para a formação de cidadãos capazes de tomar decisões que, com certeza, refletirão no futuro das próximas gerações.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BRASILEIRA

Nas últimas décadas, reestruturações no currículo e nos métodos de ensino têm sido feitas com o objetivo de fornecer aos alunos elementos que desenvolvam potencialidades, proporcionando a estes a capacidade de pensar crítica e independentemente. Muito tem se falado da necessidade de uma educação que forneça uma aprendizagem significativa, onde o aluno possa encontrar respostas para suas indagações, como: “Por que aprender matemática?”, “Por que saber matemática?”. Com isso, têm-se aumentado o número de pesquisas que tratam do ensino e aprendizagem da matemática.

Neste contexto surgem várias metodologias e estratégias. Porém, todas apontam que a matemática escolar deva estar associada de forma mais efetiva à realidade do aluno. Dentre essas metodologias e estratégias, que têm a intenção de diminuir a dicotomia em relação ao que é ensinado e do que de fato é aprendido pelos alunos, temos a Modelagem Matemática, “que constitui uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da matemática, um problema não essencialmente matemático” (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2016, p. 9).

A Modelagem Matemática veio para amenizar os anseios daqueles professores que buscavam uma alternativa de ensino da matemática, onde os alunos pudessem perceber a aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos em outras áreas do conhecimento, como também se sentirem motivados a aprender conceitos matemáticos a partir de situações práticas.

Vários autores concordam que a Modelagem Matemática é capaz de diminuir a distância entre o que se aprende na escola e suas aplicações na vida social, assim como, despertar no aluno o senso crítico, criativo e independente. Para exemplificar citaremos algumas considerações:

> O desenvolvimento da Modelagem Matemática nas aulas de Matemática, especialmente, na educação básica, pode favorecer: a ativação de aspectos motivacionais e relações com a vida fora da escola ou com as aplicações da Matemática; a viabilização ou a solicitação do uso do computador nas aulas de Matemática; a realização de trabalhos cooperativos; o desenvolvimento do conhecimento crítico e reflexivo; o uso de diferentes registros de representação; a ocorrência de aprendizagem significativa (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2016, p. 29-30).

> A Modelagem Matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Neste

> sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão (BASSANEZI, 2016, p. 17).

> A Modelagem Matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p. 18).

> A Modelagem Matemática vai além da ideia utilitarista de aplicar a Matemática para resolver problemas. O desenvolvimento do conhecimento reflexivo, visando à formação de um cidadão crítico, também se insere entre os objetivos a serem atingidos quando se faz uso da Modelagem Matemática em ambientes de ensino e aprendizagem de cursos regulares (ALMEIDA e DIAS, 2004, p. 22).

Na perspectiva colocada pelos autores citados, vemos que a Modelagem Matemática ajuda o aluno, além de adquirir conhecimentos matemáticos, no entendimento do mundo em que se vive e desenvolve sua capacidade de exercitar seu papel de cidadão, pois um dos grandes objetivos da educação de hoje é a educação para cidadania, onde “exige uma apreciação do conhecimento moderno, impregnado de ciência e tecnologia. Assim, o papel do professor de matemática é particularmente importante para ajudar o aluno nessa apreciação, assim como para destacar alguns dos importantes princípios éticos a ela associados” (D´AMBRÓSIO, 2004, p. 87).

2.1 O surgimento da Modelagem Matemática no Brasil

Na História da Matemática há diversas situações em que um problema prático, muitas vezes do cotidiano, são resolvidos através de ferramentas matemáticas. Assim, muitos autores afirmam que a origem da Modelagem Matemática é tão antiga quanto a própria matemática, como vemos na afirmação a seguir:

> A Modelagem Matemática, arte de expressar por intermédio de linguagem matemática situações-problema de nosso meio, tem estado presente desde os tempos mais primitivos. Isto é, a modelagem é tão antiga quanto a própria matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p. 7).

Biembengut (2009) afirma que na década de 1960, profissionais da área de educação de vários países, começaram a debater sobre a Modelagem Matemática e aplicações na Educação Matemática. Eles defendiam a aplicação dos conhecimentos matemáticos tanto na ciência como no meio social. Mas foi na década de 1970, que as propostas envolvendo modelagem na Educação Matemática se fizeram mais presentes nos congressos em diversos países, incluindo o Brasil (BIEMBENGUT, 2016, p. 161).

Biembengut (2014) aponta dois grandes precursores da Modelagem Matemática no Brasil. Um deles é o professor Aristides Camargo Barreto que nos anos de 1970, na PUC – Rio de Janeiro (RJ), utilizava-se da modelagem como estratégia de ensino em suas aulas na graduação nas disciplinas de Fundamentos da Matemática, Prática de Ensino e Cálculo Diferencial e Integral. Outro, é o professor e pesquisador conceituado Rodney Carlos Bassanezzi, que além de adotar a modelagem como prática docente em suas aulas na graduação em diversos cursos na UNICAMP, tornou-se o maior disseminador da Modelagem, coordenando cursos de pós-graduação e de formação continuada para professores. Aliás foi em um desses cursos de formação continuada, que Bassanezi diz ter surgido a Modelagem Matemática como processo de ensino-aprendizagem.

> A Modelagem Matemática, como processo de ensino-aprendizagem, surgiu entre nós mais por necessidade do que por acaso. Começou quando, num curso de especialização para professores de matemática, foi trocado o enfoque de ensino clássico por atividades relacionadas à situações e problemas locais com características sociais, econômicas, ambientais, etc. O conteúdo de matemática era desenvolvido de acordo com a necessidade para resolver problemas formulados que eram relacionados com o tema escolhido (BASSANEZI, in ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2016, p. 7).

Bassanezi (2016), relata que neste curso uma das atividades propostas aos professores era a formulação de um problema próprio, relativo ao programa que ensinavam na disciplina de Cálculo I. Após duas horas de atividade os problemas propostos foram, quase todos, exemplos encontrados nos livros adotados na época, ou seja, sem novidades. Observando a dificuldade de os professores conseguirem elaborar um problema novo, além do distanciamento entre a prática pedagógica e a participação efetiva do educador no meio em que está inserido, o resultado dessa experiência serviu de motivação para a busca de estratégias que possibilitassem o desenvolvimento de habilidades e criatividade na elaboração de problemas. Neste sentido, a Modelagem Matemática desempenhava este papel.

O primeiro curso de Modelagem Matemática foi realizado na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava – FAFIG, hoje Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO, em 1982, um ano após a experiência citada anteriormente. A partir de então o número de cursos envolvendo Modelagem Matemática e o número de adeptos só têm aumentado.

2.2 Contribuições da Modelagem Matemática para a Educação Brasileira

Segundo Burak (2005), em 1985 começaram os primeiros trabalhos, discussões e ações concretas adotando a Modelagem Matemática como uma metodologia alternativa para o ensino da matemática nos atuais níveis de ensino Fundamental e Médio. Esses trabalhos se deram a partir de artigos, seminários e dissertações de Mestrado, principalmente pelos Egressos do Mestrado em Matemática – área de concentração em Ensino de Matemática e seus Fundamentos Filosóficos e Científicos, promovido pela UNESP – Rio Claro (SP).

Biembengut (2016), aponta que as atividades de Modelagem Matemática em sala de aula no Ensino Superior e na formação continuada de professores, realizadas e divulgadas pelos precursores, foram estimuladas e sustentadas pelo surgimento de comunidades de professores de matemática adeptos a tal proposta de ensino. O esforço destes adeptos para melhor desenvolver o ensino e aprendizagem da matemática proporcionou o desenvolvimento de pesquisas e ganhou espaço nos documentos oficiais de Educação em diversos países, como no *Programme for International Student* – PISA[3]. No Brasil, houve contribuição, nas Diretrizes Curriculares Nacionais – DCN, nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN e nas propostas Curriculares Estaduais. Esses documentos colaboraram para que os livros didáticos passassem a apresentar mais referências sobre problemas e fenômenos da realidade e, principalmente, que os cursos de Licenciatura em Matemática incluíssem na grade curricular disciplinas específicas de Modelagem Matemática ou tópicos de disciplinas como Tendências da Educação Matemática (Etnomatemática, Modelagem

[3] Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – é uma avaliação internacional que mede o nível educacional de jovens na faixa etária de 15 anos por meio de provas de Leitura, Matemática e Ciências. O Pisa é coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), havendo uma coordenação nacional em cada país participante. No Brasil, a coordenação do Pisa é responsabilidade do Inep. O objetivo do Pisa é produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes, de modo a subsidiar políticas de melhoria do ensino básico. A avaliação procura verificar até que ponto as escolas de cada país participante estão preparando seus jovens para exercer o papel de cidadãos na sociedade contemporânea.

Matemática, Mídias Tecnológicas, História da Matemática, Investigação Matemática e Resolução de Problemas).

Ainda segundo Biembengut (2016), a partir dos anos 90, leis e resoluções contribuíram para que estas inclusões se tornassem mais efetivas. Vários estados e municípios promovem cursos de formação continuada para professores sobre Modelagem na Educação com o intuito de promover melhorias no ensino e na aprendizagem de matemática.

2.3 As diferentes concepções sobre a Modelagem Matemática no Brasil

Cada indivíduo tem a sua prática. Cada ser humano é capaz de criar suas próprias concepções a partir de suas crenças, conhecimentos adquiridos de experiências vividas e das interações da pessoa com o meio que a envolve.

> A expressão de cada professor e/ou pesquisador de Modelagem na Educação, traz sua concepção de Modelagem baseada no conhecimento ou na compreensão que ele/ela tem proveniente de experiências, vivências e estudo. Essa concepção, ao ser divulgada, contribui para gerar diferentes tendências (BIEMBENGUT, 2016, p. 166).

Tendo percebido que a Modelagem Matemática no Brasil tomou caminhos diferentes de acordo com a experiência e vivência de cada professor e/ou pesquisador, foi que a educadora e pesquisadora Maria Salett Biembengut, no período de 2009-2010, realizou um mapeamento das produções brasileiras de Modelagem na Educação com o objetivo de identificar as diferentes concepções e tendências geradas nestas últimas décadas de Modelagem na Educação no Brasil. De acordo com Biembengut (2016, p. 168) "esse mapeamento consistiu em identificar, organizar, descrever e analisar produções escritas baseadas em pesquisas". Outros autores já haviam percebido cinco perspectivas diferentes ao analisarem produções na literatura internacional. Comparando essas perspectivas com os trabalhos brasileiros, Biembengut (2016) as reagrupou e a partir daí foram identificadas três concepções de Modelagem na Educação pela autora que são denominadas como:

- Método ou estratégia (realística e epistemológica): desenvolver a teoria matemática a partir de situações-problema de outras áreas do conhecimento, permitindo aos estudantes desenvolver habilidades e competências para resolvê-las, promovendo conexões entre atividades de modelagem e matemática.

- Alternativa pedagógica (contextual e educacional): estruturar os processos de aprendizagem para introduzir e desenvolver conceitos matemáticos, motivar a aprender matemática a partir da resolução de situações-problema a fim de que a matemática necessária à resolução destas situações faça sentido aos estudantes.

- Ambiente de aprendizagem (sociocrítica): os objetivos centram-se no reconhecimento da relação entre a matemática e sociedade e na necessidade de compreensão crítica desta relação sobre o meio circundante; as situações-problema são pontos de partida para analisar a natureza e a relação do modelo matemático na sociedade, reconhecendo a dependência cultural.

Neste trabalho, Biembengut afirma que fez as seguintes verificações:

> É possível difundir a modelagem não apenas como forma de aplicar os conhecimentos matemáticos, mas, especialmente, por instigar nos estudantes senso crítico e criativo no tratamento de situações-problema que incidem na sociedade; conceito de cultura ao inteirarem-se dos modos de vida da comunidade; saber distinguir os propósitos do ensino da matemática, em especial, a partir da utilidade da modelagem. Isto é, estabelecer o princípio da Modelagem com o fim de aprimorar a Educação Brasileira que possa valer base à sociedade (BIEMBENGUT, 2016, p. 169).

Embora haja diferentes concepções de modelagem, todas elas convergem tanto para melhorar o ensino e a aprendizagem como também, para promover uma maior interação entre professor e aluno envolvidos na contínua e necessária produção do conhecimento.

Biembengut (2016, p. 170) ainda afirma que essas concepções de modelagem adotada pelos autores tem um ponto em comum: “tornar os estudantes mais interessados nas aulas de matemática a partir do que entendem, vivenciam e possam participar, seja com base em seus conhecimentos prévios, ou em suas crenças”.

No próximo capítulo serão apresentadas as definições de Modelos e Modelagem Matemática segundo alguns autores, e suas etapas para o processo de modelagem.

3 MODELO E MODELAGEM MATEMÁTICA

De acordo com o Minidicionário Soares Amora (2000), modelagem significa "ação ou efeito de modelar", e modelo tem como um de seus significados "coisa que merece ser imitada". Neste sentido, as palavras modelo e modelagem podem se referir a situações de diversas áreas do conhecimento, como Arte, Moda, Engenharia, Matemática, entre outras. O que muda é a finalidade do modelo e da modelagem. Almeida, Silva e Vertuan, afirmam que:

> O que pode variar é a finalidade para a qual os modelos são construídos, podendo prever o comportamento de um fenômeno, ser demonstrativo de algo (como uma maquete), ter um fim pedagógico (auxiliar na ilustração de algum conceito), ser descritivo de algo, entre outras. Independente da finalidade, o modelo é sempre uma tentativa de expor e/ou explicar características de algo que não está presente, mas se "torna presente" por meio deste modelo (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2016, p. 13).

Desde os primórdios da humanidade, a matemática vem sendo utilizada como instrumento para interpretar o mundo. Várias foram as contribuições do uso da matemática para descrever situações e buscar soluções para os problemas que surgiram no decorrer dos tempos. Isso nada mais é do que Modelagem Matemática, que tem por objetivo estudar uma situação-problema usando a matemática como linguagem para sua compreensão, simplificação e resolução para uma possível previsão ou modificação do objeto estudado.

Já o modelo matemático, segundo Biembengut e Hein, é "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real" (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p.12). Assim, a confecção de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem. Quanto maior o conhecimento, melhor será o modelo e maiores serão as possibilidades de responder a questões que exijam uma matemática mais elaborada.

Vemos então que a Modelagem Matemática pode ser útil a diferentes áreas, como a Biomatemática, que busca compreender os fenômenos biológicos através da Matemática; a Macroeconomia, Microeconomia e Econometria, que estão relacionadas ao uso da matemática na economia; Pesquisa Operacional, que utiliza a matemática para solucionar problemas de planejamento e controle da produção de companhias. As mais diferentes áreas, seja na economia, na indústria ou na política, necessitam de modelos matemáticos para auxiliar na tomada de decisões (FERREIRA, 2003).

Veremos, então, como se dá o processo de modelagem na educação e como ela pode ser utilizada como uma estratégia de ensino a fim de desenvolver uma aprendizagem mais significativa.

3.1 Modelo e Modelagem segundo alguns autores

Diferentemente do que muitos pensam, a Modelagem Matemática não surgiu diretamente na Educação Matemática, mas sim numa área que se convencionou a ser chamada de Matemática Aplicada. Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 12) afirmam que:

> É a partir da Matemática Aplicada que a definição e a caracterização da Modelagem Matemática na Educação Matemática têm tido diferentes abordagens e têm sido realizadas segundo diferentes pressupostos em relação às concepções pedagógicas que norteiam as práticas educativas e as estruturações teóricas das pesquisas científicas (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2016, p. 12).

Para que a prática da modelagem na educação seja bem desenvolvida é preciso que conheçamos os diferentes pontos de vista de alguns autores, e dentre as diversas definições encontrar as possibilidades para que seja possível aplicá-la em sala de aula.

Segundo Bassanezi,

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2016, p. 24).

Almeida, Silva e Vertuan em seu livro Modelagem Matemática na educação básica diz que:

> Uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Nesse sentido, relações entre realidade e matemática, servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ou produzidos e integrados. A essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação matemática, um modelo matemático (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2016, p. 12).

Para Biembengut e Hein,

> Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p. 12-13).

Já na visão de Barbosa,

> Modelagem Matemática é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. Essas se constituem como integrantes de outras disciplinas ou do dia-a-dia (BARBOSA, 2001b, p. 6).

Apesar das diferentes definições para a Modelagem Matemática, todas dão a ideia de um método que parte de um problema real e que se constitui numa estratégia pedagógica para o ensino e aprendizagem da matemática.

A modelagem proporciona uma forma de aplicar a matemática em situações do cotidiano, e esta relação da matemática escolar com o cotidiano dá um sentido ao conteúdo estudado, proporcionando ao aluno uma aprendizagem mais significativa. Assim, a modelagem pode ser um instrumento para que o aluno interprete o mundo em que se vive de acordo com suas próprias conclusões e entendimento, desenvolvendo sua capacidade de exercitar seu papel de cidadão que pensa e discute os problemas da comunidade em que está inserido. Neste caso, o professor desempenha o papel de mediador, auxiliando o aluno na construção do conhecimento e não mais como único detentor do conhecimento.

Sobre esse assunto Almeida diz:

> Levando em consideração que cabe também à educação escolar preparar sujeitos críticos, conscientes e integrados à sociedade, o ensino deve se dar em ambientes onde a aprendizagem aconteça de forma significativa. No contexto da matemática, a aprendizagem nesta perspectiva está vinculada às ações em que o aluno tem oportunidade de experimentar, modelar, analisar situações e desenvolver um espírito crítico a respeito das soluções encontradas (ALMEIDA e DIAS, 2004, p. 20).

D'AMBRÓSIO argumenta que "o ciclo de aquisição de conhecimento é deflagrado a partir da realidade, que é plena de fatos que informam o indivíduo" (D'AMBRÓSIO, [2017]). Desse modo, a construção do conhecimento matemático torna-se mais eficiente se manifestar-se de situações que têm origem na realidade.

A Modelagem Matemática, de forma geral, pode ser apresentada da seguinte maneira: primeiro entra-se em contato com o problema para a listagem dos dados e do problema propriamente dito, define-se quais são as variáveis e as relações entre as variáveis a serem consideradas. A partir daí são feitas as simplificações do problema e o levantamento de hipóteses, pois dificilmente se consegue tratar de todas as situações levantadas no modelo. Essa fase é denominada de representação do problema real na forma matemática, ou seja, o equacionamento do problema real. Essa é uma fase importante, pois um problema mal formulado pode acarretar conclusões equivocadas. Em seguida, procura-se na literatura algoritmos para a solução do problema matemático. É normal fazer analogias com outras representações, já que muitas vezes situações reais distintas são resolvidas pelo mesmo algoritmo matemático. Uma vez descoberta a solução do modelo faz-se a validação da solução. Essa fase é conhecida como fase da interpretação, ou validação do modelo, em que a solução é interpretada e comparada com a realidade (FERREIRA, 2003).

No exercício da Modelagem Matemática professor e alunos têm papéis distintos em determinados momentos e papéis que se fundem em outros. A função principal do professor neste processo é o de orientador. Indicar caminhos, fazer perguntas, levantar dúvidas, não aceitar o que não está bom, não dar respostas prontas e não esperar que o aluno siga apenas exemplos. O professor deve sair das aulas expositivas apenas, onde os alunos são meros espectadores, e procurar promover um ambiente de aprendizagem onde o aluno deixe de ser o agente passivo. O professor deve motivar os alunos para a pesquisa, discussão e questionamentos, pois assim o aluno vai encontrar meios de construir seu próprio conhecimento. Por outro lado o aluno deve ter uma postura ativa, ter iniciativa na busca de informações, demonstrar responsabilidade, ter confiança em suas formas de pensar, querer aprender e buscar soluções para o problema que é proposto. Medeiros nos diz que:

> Para se aprender compreensivamente, criando em matemática, é preciso querer aprender, propor a si mesmo problemas. [...] Uma questão torna-se um problema para o aluno apenas se este necessitar ou desejar a sua solução. Um problema só é **problema** quando o indivíduo se apropria dele e é apropriado por ele, deseja pensar a respeito dele, estabelece uma busca contínua para a compreensão e solução do mesmo (grifo do autor). Para que essas surjam é preciso que o sujeito se correlacione intencionalmente com o objeto de investigação. É preciso que haja participação intelectual do sujeito, que aprende, na construção do conhecimento. É isto que significa uma participação ativa do aluno e não a simples manipulação física de objetos (MEDEIROS, 2005, p. 25-26).

3.2 Etapas da Modelagem Matemática

Todos os autores estudados concordam que a Modelagem Matemática deve seguir uma sequência de etapas.

Para Bassanezi (2016) as atividades da Modelagem Matemática são as seguintes:

- **Experimentação –** É uma atividade essencialmente laboratorial para a obtenção de dados. Pode-se adotar métodos estatísticos para melhor seleção das variáveis envolvidas.

- **Abstração –** É o procedimento que deve levar à formulação dos modelos matemáticos. Nesta fase, o modelador deve fazer a seleção das variáveis a serem utilizadas no modelo, formular o problema real numa linguagem própria da área em que se está trabalhando, formular hipóteses que serão investigadas bem como fazer as simplificações necessárias a fim de transformar o modelo em um problema tratável.

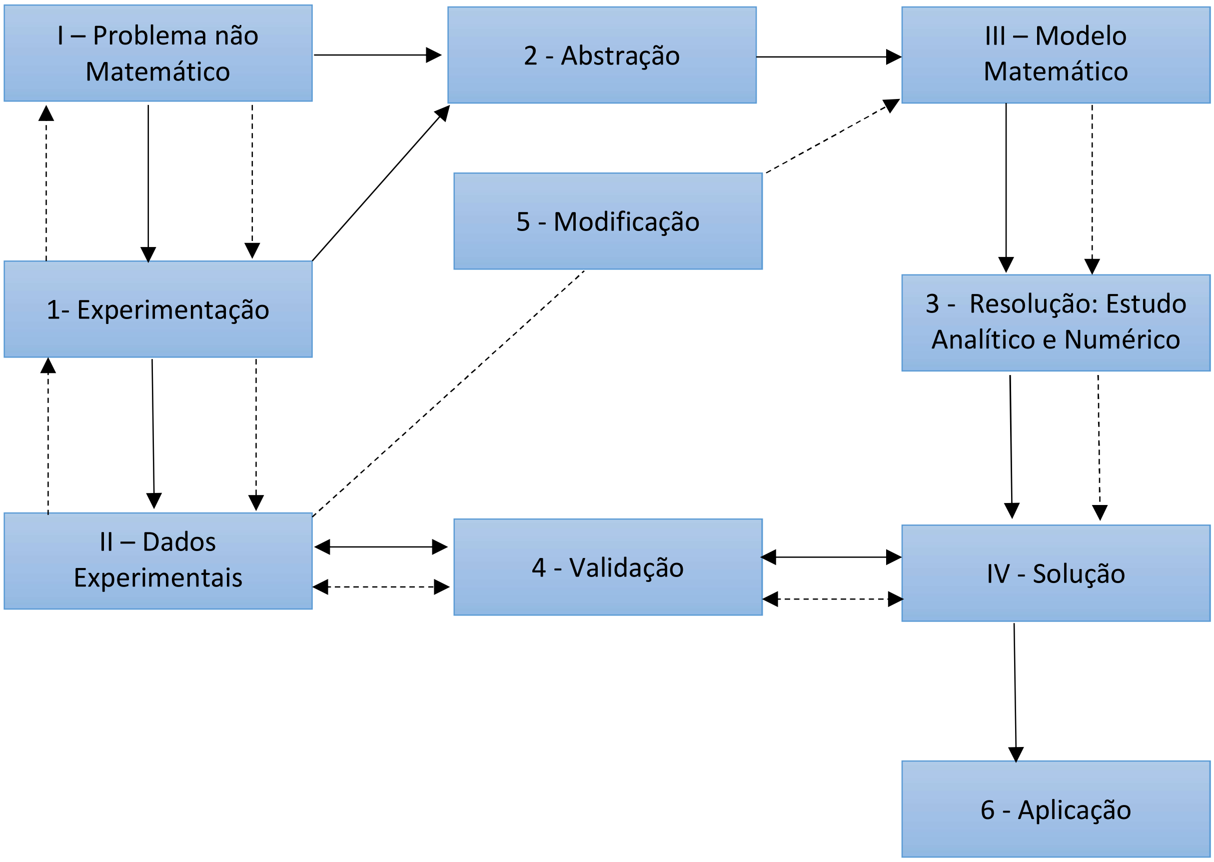
- **Resolução –** Etapa em que é obtido o modelo matemático quando é substituída a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente. Ressalta-se ainda que a resolução de um modelo depende da sua complexidade e que dependendo do caso necessitará de auxílio de métodos computacionais dando uma solução aproximada.

- **Validação –** É o processo de aceitação ou não do modelo proposto. Nesta fase, os modelos juntamente com as hipóteses devem ser testados comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. O grau de aproximação desejado será o fator que define a validação ou não.

- **Modificação –** Esta etapa ocorre caso o grau de aproximação entre os dados reais e a solução não seja aceito. Neste caso deve-se mudar as variáveis ou o modelo.

A figura a seguir esquematiza as etapas da Modelagem Matemática proposta por Bassanezi:

Figura 1 - Esquema de Modelagem



Fonte: Adaptado de Bassanezi: as setas contínuas indicam a primeira aproximação. A busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado torna o processo dinâmico, indicado pelas setas pontilhadas (BASSANEZI, 2016, p. 27).

Ressalta-se aqui que apenas seguir o esquema acima não leva necessariamente a construir um modelo eficiente, serve somente como um guia para a construção de um modelo matemático.

Os autores Almeida, Silva e Vertuan (2016) agrupam e identificam quatro fases para uma atividade de Modelagem Matemática que são:

- **Inteiração –** Nesta etapa há o primeiro contato com a situação-problema que se pretende estudar. É neste momento que são coletados os dados quantitativos e qualitativos que conduzirão a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução.

- **Matematização –** Uma vez identificada a situação-problema substitui-se a linguagem natural para a linguagem matemática evidenciando assim o problema a ser resolvido matematicamente. A transição entre as linguagens é realizada a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido na inteiração.

- **Resolução –** Nesta fase constrói-se o modelo matemático que descreve a situação, permitindo, assim, a análise dos aspetos relevantes, adquire respostas às perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado e até possibilita a realização de previsões para o problema em estudo.

- **Interpretação de resultados e validação –** Nesta fase faz-se a análise da resposta do problema o que implica na validação ou não da representação matemática associada ao problema.

Os autores afirmam que “ainda que essas fases constituam procedimentos necessários para a realização de uma atividade de Modelagem Matemática, elas podem não decorrer de forma linear, e constantes movimentos de ida e vinda entre essas fases caracterizam a dinamicidade da atividade (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2016, p. 17).

A dinamicidade ocorre do fato de o início ser uma situação-problema mas os procedimentos de resolução e as soluções não são previamente definidas e conhecidas, e isso faz que caminhos diferentes possam ser seguidos dentro destas etapas.

Biembengut e Hein (2003) são mais concisos e identificam os procedimentos em três etapas subdivididas em seis subetapas:

- **Interação –** Aqui acontece o reconhecimento da situação-problema e a familiarização com o assunto a ser modelado que pode ser feito através de pesquisas em livros, revistas e sites especializados no assunto ou por meio de experiência em campo e de dados experimentais obtidos com especialistas na área.

- **Matematização –** Nesta etapa ocorre a transposição da situação-problema para a linguagem matemática. O objetivo desta fase é obter um conjunto de expressões matemáticas que levem à solução ou permitam a dedução de uma solução.

- **Modelo Matemático –** Para concluir faz-se necessário a interpretação e validação da solução. Se o modelo não atender às necessidades que o geraram, a segunda etapa deve ser retomada a fim de fazer os ajustes.

Analisando as descrições dos autores vê-se similaridade em todos os processos e todos ratificam que o processo de modelagem é dinâmico, pois, se quando o modelo for comparado à realidade não satisfizer as necessidades do modelador, o processo pode ser reiniciado para ajustes e tentativa de validação novamente. Este ciclo faz com que a modelagem não seja algo estático.

A partir de todas as descrições podemos considerar que a Modelagem Matemática tem por objetivo estudar, resolver e compreender um problema da realidade por meio da matemática.

3.3 Processo para a Modelagem Matemática

Para Bassanezi (2016), a modelagem é eficiente a partir do instante em que temos convicção de que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade. Para o autor a modelagem não deve ser usada em qualquer situação, pois dependendo do caso, o processo pode ser mais destrutivo que esclarecedor. O conteúdo e linguagem utilizados devem ser adequados tanto ao tipo de problema como também ao objetivo que pretende ser alcançado. O seu uso só é de fato adequado se contribuir efetivamente para a compreensão e desenvolvimento da situação analisada.

Para alguns autores, como Biembengut e Hein (2003), quando a Modelagem Matemática é utilizada como estratégia de ensino e aprendizagem em cursos regulares, ela é denominada Modelação Matemática e tem por objetivo desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e criar condições para que os alunos aprendam a fazer modelos matemáticos, aprimorando seus conhecimentos.

Espera-se por meio da modelagem:

> - Incentivar a pesquisa;
> - Promover a habilidade em formular e resolver problemas;
> - Lidar com tema de interesse;
> - Aplicar o conteúdo matemático; e
> - Desenvolver a criatividade (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p. 23).

Para isso, Biembengut e Hein (2003) sugerem que o professor siga 5 passos para pôr o método em prática:

1- Diagnóstico

O professor, a princípio, deve fazer um levantamento sobre a realidade socioeconômica do aluno, o tempo disponível para a realização de trabalho extraclasse, o conhecimento matemático que possuem, o número de alunos e o horário da disciplina. Todos esses fatores são importantes para poder decidir o tema, estabelecer os conteúdos matemáticos e o número de exercícios a serem propostos em cada etapa e a dinâmica da aula.

2- Escolha do tema ou modelo matemático

O tema pode ser escolhido para desenvolver um tópico matemático do programa apenas ou desenvolver todo o conteúdo de um período letivo. Se a escolha for a 2ª opção, deve-se tomar o cuidado para que este seja abrangente o suficiente para desenvolver todo o conteúdo e ao mesmo tempo interessante para o aluno, para não desmotivá-lo.

Ainda em relação ao tema/assunto, este pode ser único para a turma, proposto pelo professor ou pelos alunos de comum acordo. Ou ainda diversos temas, um para cada grupo, que geralmente é composto por 3 ou 4 alunos. A escolha vai depender da experiência que tanto professor como alunos tem em Modelação e do tempo disponível para o desenvolvimento do trabalho (BIEMBENGUT, 2016).

Biembengut (2016) ainda destaca que se em uma turma com mais de 20 alunos forem escolhidos vários temas, os resultados podem não ser muito satisfatórios, uma vez que há razões que dificultariam tais resultados, como:

- Indisponibilidade para o professor inteirar-se de todos os assuntos/temas para posterior orientação;

- Tempo insuficiente para o professor orientar seus alunos em sala de aula; e
- Dificuldades do professor atuar com tantos projetos extraclasse uma vez que a maioria dos professores não dispõem de horas remuneradas para desenvolver trabalhos deste tipo.

3- Desenvolvimento do conteúdo programático

No desenvolvimento do conteúdo programático o professor segue as seguintes etapas:

- Interação – reconhecimento da situação-problema e familiarização. Inicialmente, é feita uma pequena explanação sobre o tema e em seguida faz-se um levantamento de questões, de maneira a estimular os alunos a participarem com sugestões.

- Matematização – formulação e resolução do problema. Das questões levantadas pelos alunos, uma é selecionada e formulada a fim de levar os alunos a proporem respostas. Na medida em que se está formulando a questão, se for preciso fazer uso de um conteúdo matemático que o aluno ainda não tem conhecimento para a continuidade do processo ou obtenção de um resultado, interrompe-se a exposição e desenvolve-se a matemática necessária, retornando no momento adequado. Desenvolvido o conteúdo necessário e suficiente para responder ou resolver essa etapa do trabalho, propõem-se exemplos semelhantes, para que o conteúdo não se limite ao modelo. Nesse momento, retorna-se à questão que gerou o processo, apresentando uma solução. A resolução da questão "norteadora" faz com que o aluno retorne ao problema e verifique novamente a matemática como uma "ferramenta" importante.

- Modelo Matemático – interpretação e validação. A questão formulada pode ser considerada um modelo matemático, e os alunos analisam o resultado obtido quanto a sua validade e importância.

4- Orientação de Modelagem

Para orientar e acompanhar os alunos no desenvolvimento do trabalho de modelagem, é de extrema importância um planejamento sobre interação com o assunto, a forma de encaminhamento e quando orientará seus alunos. Para isso, de acordo com o número de horas-aula da disciplina, faz-se um planejamento do número de horas-aula destinado somente para a orientação do trabalho e em quais dias do período letivo. Essas aulas devem ser inseridas no período letivo de maneira que permita ao aluno adquirir conhecimento matemático, saber aplicar esse conhecimento no trabalho e certa habilidade para fazer modelos a partir do que vem sendo desenvolvido em sala.

Segundo Biembengut (2016), o desenvolvimento do trabalho pode ser realizado durante as aulas ou extraclasse em forma de projetos. No caso de projeto, pode ser para a turma toda ou apenas para um grupo de interessados.

O número de horas-aula destinado a cada etapa e o tempo entre uma reunião e outra fica a critério do professor de acordo com o desenvolvimento das atividades programáticas. As reuniões para acompanhamento e orientação valem como meio de avaliar o processo.

5- Avaliação do processo

A avaliação do processo pode se dar através de dois aspectos: subjetivo (a observação do professor) e objetivos (provas, exercícios, trabalhos realizados). Quanto ao aspecto subjetivo, o professor pode avaliar a participação, a assiduidade, o cumprimento de tarefas, o espírito comunitário. Quanto aos aspectos objetivos podem ser avaliados:

a) produção e conhecimento matemático

- Consolidação de conhecimentos matemáticos teóricos;
- Raciocínio lógico;
- Operacionalização de problemas numéricos;
- Crítica em relação a conceitos de ordem de grandeza;
- Expressão e interpretação gráfica.

b) produção de um trabalho de modelagem em grupo

- Qualidade dos questionamentos;
- Pesquisa elaborada pelo aluno;
- Obtenção de dados sobre o problema a ser modelado;

> - Interpretação e elaboração de modelos matemáticos;
> - Discussão e decisão sobre a natureza do problema levantado;
> - Adequação da solução apresentada;
> - Validade das soluções fornecidas pelo modelo;
> - Exposição oral e escrita do trabalho.
>
> c) extensão e aplicação do conhecimento
>
> - Síntese aliada à capacidade de compreensão e expressão dos resultados matemáticos;
> - Análise e interpretação crítica de outros modelos utilizados (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p.28).

Veja que o processo de avaliação através da Modelagem Matemática vai ao encontro do que sugere os PCN´s quando diz que:

> É imprópria a avaliação que só se realiza numa prova isolada, pois deve ser um processo contínuo que sirva à permanente orientação da prática docente. Como parte do processo de aprendizado, precisa incluir registros e comentários da produção coletiva e individual do conhecimento e, por isso mesmo, não deve ser um procedimento aplicado nos alunos, mas um processo que conte com a participação deles. É pobre a avaliação que se constitua em cobrança da repetição do que foi ensinado, pois deveria apresentar situações em que os alunos utilizem e vejam que realmente podem utilizar os conhecimentos, valores e habilidades que desenvolveram (BRASIL, 2000, p. 51).

De acordo com Bassanezi (2016), mais importante que chegar a um modelo bem sucedido é seguir as etapas onde o conteúdo matemático possa ser desenvolvido e aplicado. Neste sentido ele ainda afirma:

> Na modelação a validação de um modelo pode não ser uma etapa prioritária. Mais importante do que os modelos obtidos é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sociocultural. O fenômeno modelado deve servir de pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática (BASSANEZI, 2016, p. 38).

Em todo o processo o papel do professor deve ser o de mediador na relação ensino-aprendizagem. Diferentemente do ensino tradicional onde o professor é o detentor do conhecimento, na Modelagem Matemática o professor participa e aprende junto com o aluno.

Ainda em relação a Modelagem Matemática, Barbosa (2001a, 2001b) a classifica em 3 casos ou níveis dependendo da complexidade da atividade onde serão avaliados o tempo necessário, as condições de cada sala de aula, de cada escola e da experiência e confiança de cada professor. Assim, nem sempre a atividade de

Modelagem Matemática precisa ser um projeto grande, mas atividades mais simplificadas podem também ser consideradas.

Temos então os seguintes casos:

Caso 1 – O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, o problema formulado e as informações necessárias à sua resolução. O processo de resolução pertence aos alunos e eles não precisam sair da sala de aula.

Caso 2 – O professor leva para a sala de aula uma situação-problema mas cabe aos alunos a tarefa de coletar as informações necessárias à sua resolução.

Caso 3 – Trata-se de projetos desenvolvidos a partir de temas não-matemáticos. Os alunos são responsáveis pela coleta de informações qualitativas e quantitativas, formulam e solucionam problemas.

Em todos os casos o professor aparece como copartícipe no processo, porém em alguns casos seu envolvimento é maior que em outros e à medida que vai mudando de casos espera-se que o aluno assuma maiores responsabidades na condução das atividades.

Quanto ao tempo para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem não há uma definição sobre a duração. Neste sentido podemos ter projetos prolongados com duração de semanas, situações que podem ser desenvolvidas em algumas aulas, e até mesmo situações-problema cuja solução é encontrada em uma única aula (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2016). “A caracterização da atividade reside muito mais nas iniciativas, ações e procedimentos realizados pelo professor e pelos alunos do que em delimitações de tempo e de espaço de realização da atividade” (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2016, p. 23).

3.4 Modelagem Matemática como estratégia de ensino-aprendizagem

Os agentes envolvidos no assunto Modelagem Matemática concordam que o ensino deva ocorrer em um ambiente que promova a aprendizagem de forma significativa. Isso faz com que o aluno perceba todas as ligações existentes entre o saber escolar e a vida cotidiana, valorizando assim o conhecimento que ele já traz consigo, além do aproveitamento de resultados de suas experiências vividas. Também deve ser um ambiente onde o professor passe a atuar como um agente facilitador da aprendizagem, isto é, passe a questionar, investigar e fazer sugestões baseadas nos comentários e ideias dos alunos, substituindo, portanto, os conhecimentos predeterminados. Isso é ressaltado nos PCN's quando diz:

> O conhecimento prévio dos alunos, tema que tem mobilizado educadores, especialmente nas últimas duas décadas, é particularmente relevante para o aprendizado científico e matemático. Os alunos chegam à escola já trazendo conceitos próprios para as coisas que observam e modelos elaborados autonomamente para explicar sua realidade vivida, inclusive para os fatos de interesse científico É importante levar em conta tais conhecimentos, no processo pedagógico, porque o efetivo diálogo pedagógico só se verifica quando há uma confrontação verdadeira de visões e opiniões; o aprendizado da ciência é um processo de transição da visão intuitiva, de senso comum ou de autoelaboração, pela visão de caráter científico construída pelo aluno, como produto do embate de visões (Brasil, 2000, p. 52).

Isso também vai ao encontro da visão que Moreira [2017] tem baseado na Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel[4]:

> A aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos.[...]. Nesse processo, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva (MOREIRA, [2017], p. 2).

A Teoria de Ausubel ainda indica como condição básica para que o ensino conduza a uma aprendizagem significativa, que o aluno deva apresentar uma predisposição positiva para aprender, ou seja, para relacionar o conhecimento que já tem com o que deve aprender, e isto não depende de sua estrutura cognitiva, mas sim de fatores motivacionais e características do ambiente de ensino e aprendizagem (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2016).

Neste contexto, a Modelagem Matemática contribui ao trazer para a aula situações do cotidiano dos alunos fora da escola, viabilizando desta forma a interação da matemática na sala de aula com aquela existente na realidade, pois um ambiente favorável para a aprendizagem é aquele em que as experiências e conhecimentos prévios dos alunos são levados em consideração, o que propicia o desenvolvimento

---

[4] David Ausubel (1918-2008), nasceu nos Estados Unidos, graduou-se em Psicologia e Medicina e doutorou-se em Psicologia do Desenvolvimento e se destacou no estudo de processo de aprendizagem. Desenvolveu seus trabalhos, na década de 60 com o objetivo de propor uma teoria de como se processa a aprendizagem não mecânica, com aplicabilidade em sala de aula.

de um espírito crítico e científico através da observação e reflexão, que, por sua vez, desperta o interesse pela investigação (FERREIRA, 2003).

A Modelagem Matemática auxilia o aluno a compreender o conhecimento como um todo ao possibilitar as diversas conexões com outras áreas do conhecimento, outras disciplinas e até mesmo entre conteúdos da matemática uma vez que, o ambiente de aprendizagem da modelagem é baseado na indagação e investigação, diferenciando-se dessa forma do ensino tradicional em que o currículo escolar está organizado, de maneira linear, onde cada disciplina é um compartimento estanque afirmando a total falta de interconexão com as demais. Neste contexto, Burak corrobora quando diz:

> A adoção da Modelagem Matemática, como alternativa metodológica para o ensino de matemática, pretende contribuir para que gradativamente se vá superando o tratamento estanque e compartimentalizado que tem caracterizado o seu ensino, pois, na aplicação dessa metodologia, um conteúdo matemático pode se repetir várias vezes no transcorrer do conjunto das atividades em momentos e situações distintas (BURAK, 2004).

O professor, em uma atividade de modelagem, é o sujeito que facilita o processo de aprendizagem uma vez que ele é o mais experiente da situação. O professor sempre estará fazendo o papel de mediador e facilitador, pois nessa metodologia o aluno é o agente ativo do seu processo de aprendizagem porque tem a oportunidade de vivenciar a construção do seu saber. Por outro lado, o professor deve também estar aberto ao aprendizado, pois a implementação da modelagem em sala de aula pode exigir do professor uma visão mais ampla, com a possibilidade de relacionar a matemática com diferentes áreas, como também a habilidade de fazer simplificações para obter uma possível solução para o problema (FERREIRA, 2003). Sendo assim, no processo de Modelagem Matemática, a atividade do professor envolve ao mesmo tempo dois processos de ensino-aprendizagem: um relacionado à aprendizagem do aluno e outro relacionado a aprendizagem do professor. O desafio do professor é auxiliar o aluno a compreender a matemática através de relações significativas, passando a trabalhar com uma matemática “útil” e “interessante”. Com isso, junto com os alunos, o professor aprende, cresce e evolui.

Muito são os argumentos defendidos por autores para que se inclua a Modelagem Matemática no currículo. De acordo com Barbosa (2004, p. 2) são cinco os motivos: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da matemática.

Apesar de todos os argumentos favoráveis ao uso da Modelagem Matemática, também há obstáculos que dificultam a inclusão da Modelagem no currículo. Bassanezi (2016) indica três tipos:

- Obstáculos instrucionais – Como de modo geral as atividades de modelagem são longas, o professor acha que não é possível cumprir com a obrigatoriedade do cumprimento dos programas curriculares. E ainda, muitos têm dúvidas se as aplicações e conexões com outras áreas fazem parte do ensino da matemática.

- Obstáculos para estudantes – O aluno está acostumado a ver o professor como o transmissor do conhecimento e quando são colocados no centro do processo de ensino-aprendizagem podem se perder e se tornar desinteressado nas aulas.

- Obstáculos para professores – Muitos professores não se sentem a vontade para desenvolver a Modelagem Matemática, seja por falta de conhecimento ou por medo de encontrar situações complicadas quanto às aplicações da matemática em áreas que desconhecem. Bassanezi (2015) aponta que a maior dificuldade encontrada pelos que decidem adotar a Modelagem Matemática em seus cursos é a de ultrapassar a barreira do ensino tradicional, cujo objeto de estudo se apresenta quase sempre bem delineado, obedecendo a uma sequência predeterminada, com o objetivo final de, muitas vezes, apenas, cumprir o programa curricular, em prol de uma opção mais criativa e motivadora.

Tais obstáculos podem ser contornados à medida que o professor vai adquirindo "habilidades para encontrar o momento oportuno para fazer a sistematização de cada parte do conteúdo trabalhado e utilizar adequadamente, analogias com outras situações-problema" (BASSANEZI, 2016, p. 177).

Embora sejam apontados alguns obstáculos, a maioria dos trabalhos realizados na área mostra-se favorável ao uso da Modelagem Matemática e mostra que como metodologia de ensino traz contribuições que vão muito além do ensino e da aprendizagem matemática, como afirma Biembengut:

> [...] a modelagem pode contribuir não somente para aprimorar o ensino e a aprendizagem matemática, mas especialmente, para provocar uma reação e interação entre corpo docente e discente envolvidos na contínua e necessária produção de conhecimento, que surtirá efeitos no contexto social (BIEMBENGUT, 2009, p. 27).

Sendo assim, o ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática é um dos frutos mais ricos e promissores para aqueles que buscam caminhos para a renovação pedagógica, ao criar ambientes de ensino e aprendizagem favoráveis à capacitação de pessoas com perfil adequado aos novos tempos. (BASSANEZI, 2015).

Dentre todos os autores estudados aqui, as etapas da modelagem sugeridas por Biembengut e Hein nortearão o desenvolvimento da atividade que será apresentada no próximo capítulo.

4 APLICAÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Neste capítulo será feita a apresentação de uma atividade de Modelagem Matemática que foi desenvolvida em duas turmas diferentes, pois segundo Biembengut e Hein (2003) um mesmo modelo pode ser usado na íntegra ou adaptado, cabendo ao professor acrescentar ou excluir tópicos matemáticos de acordo com a série que se está trabalhando, e com o objetivo a ser alcançado.

O trabalho foi desenvolvido a partir de uma das atividades propostas pelos educadores Maria Sallett Biembengut e Nelson Hein em seu livro MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO, 2003, que se encontra disponível no anexo A. O projeto no livro de Biembengut e Hein chama-se Abelhas. A primeira aplicação da atividade foi para uma turma de 6ª série (atual 7ª ano) em 2005, numa escola particular da cidade de Guarulhos/SP, já comentado anteriormente. Esta aplicação serviu de base para o desenvolvimento de um Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização em Educação Matemática em 2006 (PEREIRA, 2006). A segunda aplicação foi para turmas de segundos e terceiros anos do ensino médio em 2017, numa escola pública na cidade de Piacatu, interior do Estado de São Paulo, com a intenção de dar continuidade ao trabalho iniciado em 2005.

As apresentações serão feitas separadamente. No final será apresentado um breve esclarecimento sobre as diferenças encontradas no desenvolvimento de cada atividade.

O modelo apresentado segue as três etapas fundamentais da modelagem no ensino (modelação de acordo com Biembengut e Hein (2003)): interação, matematização e modelo. Na etapa da interação é apresentado uma síntese do tema e das informações essenciais que permitirão gerar a questão norteadora. A síntese permite certa familiarização com o tema ou assunto a ser modelado. A partir da questão norteadora, segue-se para a matematização. Nessa etapa, procura-se formular e resolver o problema, chegando a um modelo que permita interpretar a solução e, possivelmente, ser válido para outras aplicações.

4.1 Apresentação do projeto Abelhas segundo os autores Biembengut e Hein (Texto extraído do livro MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO, 2003)

As abelhas têm nos dado uma lição sobre organização comunitária, comunicação e engenharia. As “operárias” vivendo menos que sessenta dias fazem sua moradia, favo, sua alimentação, mel e proporciona à “rainha” uma vida de até cinco anos, por ser esta a mais importante: pela reprodução e orientação da colmeia.

Os autores dividem o projeto em quatro partes: dispêndio de energia da abelha na busca de alimentos, a forma de comunicação das abelhas, a dinâmica populacional e a geometria dos alvéolos. Dependendo do grau de escolaridade e do objetivo a ser alcançado, podem ser utilizadas as quatro partes ou ser escolhida apenas uma ou algumas para o desenvolvimento do conteúdo.

De início, podemos citar alguns benefícios que serão proporcionados aos alunos com o desenvolvimento do projeto, tais como: uma aprendizagem contextualizada, com um viés interdisciplinar e ainda chamar a atenção para questões ambientais e de preservação do meio ambiente.

4.2 Desenvolvimento do Projeto Abelhas na 6ª série do Ensino Fundamental

De acordo com Pereira (2006), o projeto foi aplicado com a intenção de tentar entender como ocorre a participação dos alunos no desenvolvimento de um trabalho utilizando a Modelagem Matemática.

O trabalho foi desenvolvido no 4º Bimestre do ano letivo de 2005, numa sala de 6º série do Ensino Fundamental, numa escola particular na cidade de Guarulhos no Estado de São Paulo. A sala era composta por 35 alunos que apresentavam um excelente rendimento escolar. Vale ressaltar que a professora acompanhava a turma desde a 5ª série.

A turma seguia material apostilado e toda sexta-feira a escola aplicava prova em forma de teste, logo a programação do conteúdo devia ser seguida sem margem para atrasos. Sendo assim, o projeto foi adaptado para ser desenvolvido em uma semana (seis aulas).

4.2.1 Desenvolvimento do trabalho

Aula 1:

Na primeira aula foi conversado com os alunos sobre o fato de se fazer uma semana de aula diferente do que estavam acostumados. Quando foi falado que eles teriam a oportunidade de ver uma aplicação da matemática em outra área, a sala, de modo geral, mostrou-se entusiasmada.

Foi solicitado que trouxessem na próxima aula, uma pesquisa sobre as abelhas: modo de organização, tempo de vida, reprodução, dentre outros. Foi solicitado também que fizessem uma lista com as informações que considerassem mais importantes.

Aula 2:

Nesta aula, os alunos trouxeram a pesquisa (alguns não, mas a grande maioria sim). Juntamente com a professora confeccionaram uma tabela com algumas informações sobre as abelhas, outras foram apenas comentadas. A professora também forneceu o texto do projeto de Biembengut e Hein (2003) para complementar as informações:

Texto: (BIEMBENGUT E HEIN, 2003)

Uma abelha campeira voa, aproximadamente, 24 quilômetros por hora, consumindo para isso cerca de 0,5mg de mel por quilômetro. Para colocar uma única carga de néctar, capaz de encher o estômago, uma única abelha chega a visitar de 50 a 100 flores. Ao fornecer um litro de mel uma colônia tem que voar nada menos que 40 mil quilômetros, ou seja, a distância aproximada de uma volta ao redor da Terra, isso tudo numa área que não ultrapassa 707 hectares, num raio de 1,5km ao redor da colmeia. No vaivém dessas viagens elas coletam os ingredientes para compor o mel, ou seja, o néctar, suco adocicado das flores, o pólen e a água.

Conforme as informações iam sendo colocadas na lousa, perguntas surgiam por parte dos alunos. Por exemplo:

- Quanto representa um hectare?

Após feita a tabela e analisada as informações, foram apresentados os dois primeiros problemas para serem resolvidos:

1ª Questão: Qual a quantidade de mel que uma colônia necessita consumir para buscar ingredientes para 1 litro de mel?

2ª Questão: Quantas viagens deverão fazer da florada à colmeia para obter 1 litro de mel?

Na primeira questão, surgiu a polêmica sobre se os 40.000km referia-se a uma abelha ou à colônia inteira, como informação para resolver a regra de três. A segunda questão não apresentou polêmicas. Ao resolver a primeira questão, e encontrar o resultado 20.000mg foi perguntado se não seria melhor escrever esse resultado em gramas. Para isso foi relembrado como fazer as transformações de unidades. Assim, com o auxílio da professora construíram o seguinte quadro:

Quadro 1 - Múltiplos e submúltiplos de unidades padrão

Múltiplos			**Padrão**	**Submúltiplos**		
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
kl	hl	dal	l	dl	cl	ml

Fonte: O autor

Com isso, os alunos relembraram que para transformar mg em g basta dividir o resultado por 1000, pois cada 1g equivale a 1000mg. Na segunda questão, relembram o processo para divisão de decimais e a aproximação dos resultados.

A partir destes dados, ao final dessa aula foi perguntado a opinião dos alunos, sobre o trabalho das abelhas: trabalhavam muito ou pouco? Eles responderam que muito, sendo que para fazer apenas 1 litro de mel era necessário todo esse esforço. Adicionalmente, concluíram que os humanos retiram isso da natureza sem dar conta de como isso chega até nós.

A professora fez associação desse fato a situações do dia-a-dia, fazendo comparações com pessoas que tanto trabalham e que não têm o devido valor (pessoas que trabalham na agricultura, indústrias, domésticas, etc). Para terminar, fizeram um levantamento de quais conceitos matemáticos foram utilizados para revolver esses dois problemas: regra de três simples, divisão de decimais, transformação de unidades. Além de interpretação de texto e consciência social.

Aulas 3 e 4:

Neste dia a professora informou aos alunos que as abelhas conseguem informar umas às outras o local e a distância que uma florada está de sua colmeia, a partir de uma comunicação específica entre elas, denominada dança das abelhas. Dependendo do tempo da dança, consegue-se descobrir a distância da florada encontrada. Assim, foi apresentado os dados do quadro a seguir:

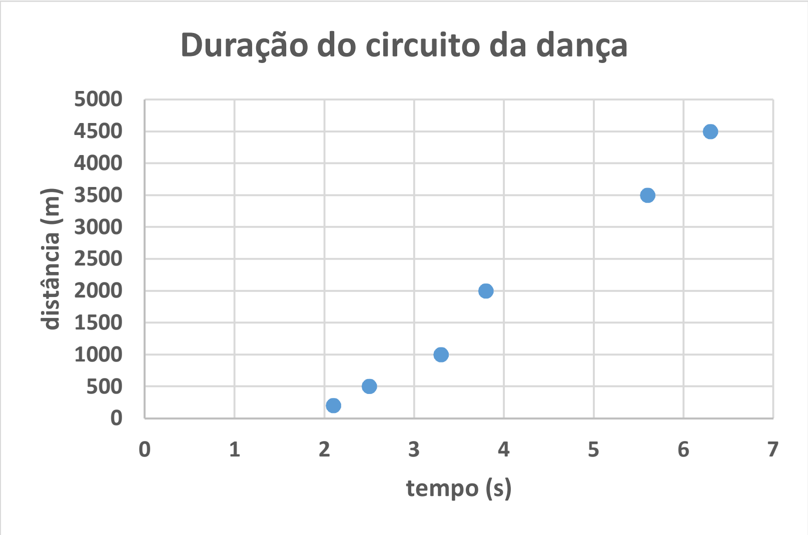
Quadro 2 - Distância versus duração do circuito da dança das abelhas

Distância (m)	200	500	1000	2000	3500	4500
Duração do circuito (s)	2.1	2.5	3.3	3.8	5.6	6.3

Fonte: Biembengut e Hein (2003, p. 98)

Como no 2º bimestre, eles já haviam aprendido a localizar os pontos no plano cartesiano, não tiveram nenhuma dificuldade em representar os dados da tabela (tempo $\times$ distância).

Figura 2 - Pontos marcados no plano cartesiano

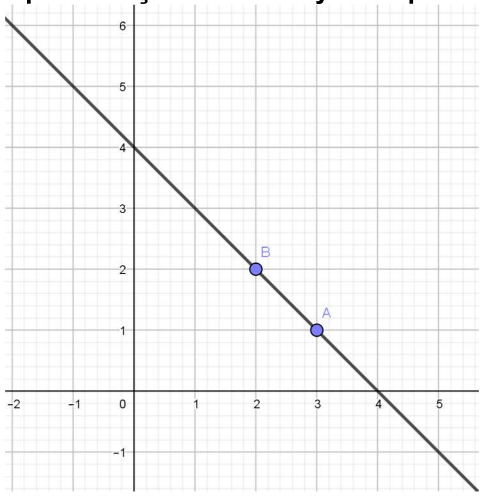


Fonte: o autor

Neste momento a professora parou o exercício e aplicou um outro. Pediu para encontrarem duas soluções para a equação $x + y = 4$. Cabe ressaltar que a escolha da equação para esse exercício poderia ser qualquer uma, uma vez que não precisava ter relação alguma com os dados do gráfico anterior.

Eles apresentaram, como soluções, os pares ordenados $(3,1)$ e $(2,2)$. Colocaram os pontos no gráfico e a professora relembrou para eles o postulado da geometria que diz que por dois pontos distintos passa-se uma única reta. Eles tinham visto este postulado na 5ª série, nas aulas de geometria. Então, foi solicitado que traçassem no plano cartesiano a reta que passa pelos pontos $(3,1)$ e $(2,2)$.

Figura 3 - Representação da reta x+y=4 no plano cartesiano



Fonte: o autor

A professora solicitou que dessem outras soluções e representassem no mesmo plano cartesiano. Assim, eles perceberam que todos os pontos coincidiam sobre a reta obtida. Um dos alunos, então, perguntou:

- Professora, essa equação representa uma reta?

Observa-se que não foi necessário a professora dizer que a representação gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas é uma reta. Os próprios alunos perceberam este fato. Assim, a professora solicitou que escrevessem a equação deixando y isolado:

$$y = -x + 4$$

informando que dessa maneira, é possível dizer que o valor de y depende do valor de x , ou seja, y está em função de x e que y pode ser representado por $f(x)$. Dessa forma, os alunos fizeram mais alguns exemplos:

Quadro 3 - Valores de y em função de x

x	y
2	$-2+4=2$
0	$-0+4=4$
4	$-4+4=0$
6	$-6+4=-2$

Fonte: o autor

Nesse momento, foi apresentado a expressão $y = ax + b$ como uma função do 1º grau. Aqui a professora não se preocupou em definir função, classificá-la, nem dar maiores detalhes, uma vez que não era este o objetivo do trabalho. Nesse instante o que interessava era o entendimento que, como y está dependendo de x, para cada valor atribuído a x teriam um valor diferente para y.

Terminado essa parte, voltaram ao problema solicitado no início da aula. A professora questionou se os pontos do plano representavam uma reta e eles perceberam que não conseguiam traçar uma reta que passasse por todos os pontos. Então informou, que embora aparentemente descrevessem uma curva, era possível fazer uma aproximação dos dados a uma função do 1º grau, escolhendo para isso dois pontos quaisquer da tabela e encontrando a equação de uma reta.

Sejam os pontos P_2 $(2.5,500)$ e P_5 $(5.6,3500)$. Substituindo na equação $y = ax + b$, onde y representa a distância em metros, x representa o número de vezes do circuito em segundos e a e b são os coeficientes da equação, temos:

$$P_2 \rightarrow 500 = 2.5a + b$$
$$P_5 \rightarrow 3500 = 5.6a + b$$

Os alunos já sabiam resolver sistemas e escolheram o método da adição para resolvê-lo. Encontraram como solução $a \cong 967.74$ e $b \cong -1919.35$. Então, $y \cong 967.74x - 1919.35$, $x > 2.1$.

A expressão encontrada permite saber a distância aproximada da florada a partir do número de vezes que a abelha faz o circuito em sua dança por unidade de tempo.

Feito isso, foi solicitado que resolvessem os seguintes problemas:

1) Se a abelha efetuar três voltas ou circuito/segundos, qual será, então, a distância da florada?

2) Se a distância for de 5822.57 metros, quantas voltas a abelha dará?

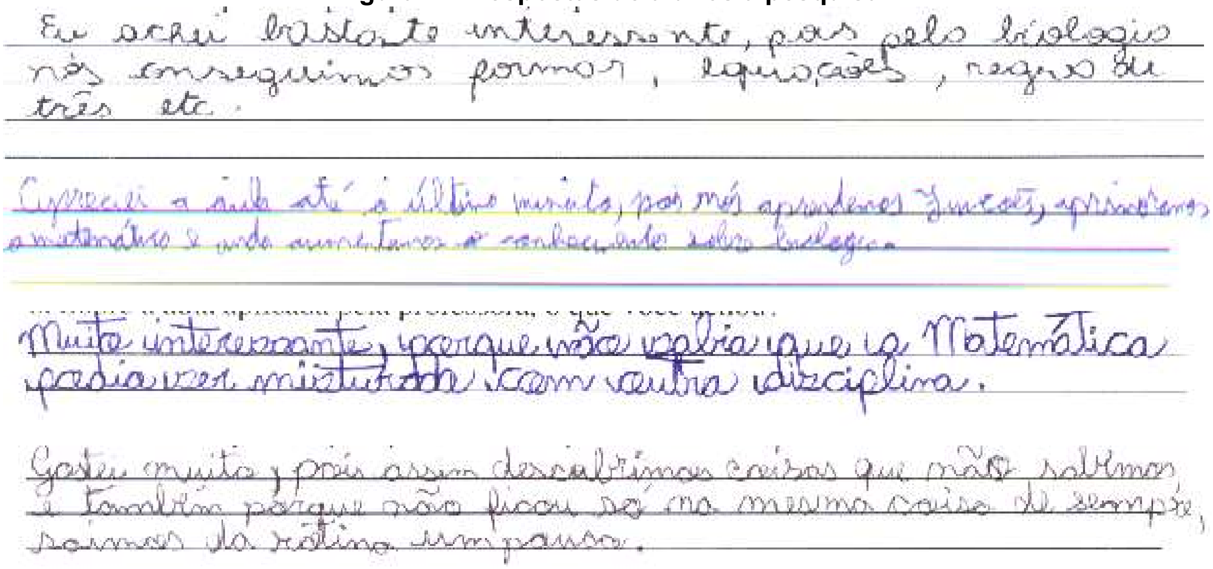
Aulas 5 e 6:

Nestas duas últimas aulas a professora aproveitou para a aplicação de mais alguns exercícios de construção de gráficos e do cálculo do valor função $f(x)$. Fizeram o levantamento de todo conteúdo aprendido, sendo aplicado o questionário que se encontra no apêndice A.

4.2.2 Percepções da professora e dos alunos em relação à atividade

De modo geral, o resultado foi satisfatório, pois os alunos gostaram e participaram da atividade. Conseguiram perceber a presença da matemática em outra área do conhecimento. Percebe-se isso nos seguintes depoimentos de alguns alunos:

Figura 4 – Respostas de alunos à pesquisa



Fonte: Dados da pesquisa

4.3 Desenvolvimento do Projeto Abelhas com alunos dos 2º e 3º anos do Ensino Médio no ano de 2017

Diferentemente da primeira atividade desenvolvida, que foi pela professora da turma e em horário de aula, agora neste caso, a atividade foi aplicada em forma de projeto, em horário externo ao horário habitual de aula. O projeto foi desenvolvido aos sábados, oferecido durante o " Programa Escola da Família"[5], para alunos voluntários com interesse em participar do projeto.

[5] Programa criado em Agosto de 2003 pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Reunindo profissionais da Educação, voluntários e universitários, o Programa oferece às comunidades paulistas atividades que possam contribuir para a inclusão social tendo como foco o respeito à pluralidade e a uma política de prevenção que concorra para uma qualidade de vida, cada vez melhor (SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, 2009).

A ideia inicial era desenvolver o projeto com alunos do 3º ano com o intuito de revisar conteúdos para o Enem. Além disso, ensinar-lhes a encontrar a reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos dados através do Método dos Mínimos Quadrados. Outro objetivo foi introduzir o conceito de volume de prismas. No cronograma do conteúdo curricular do Estado de São Paulo, volume de prismas é oferecido no 4º bimestre do 2º ano do Ensino Médio, mas a coordenadora já havia informado que nunca “dá tempo” de desenvolvê-lo. Mas como geometria é um assunto recorrente no Enem, vê-se a importância da obrigatoriedade do desenvolvimento do assunto.

Realizada a primeira reunião com a coordenadora do Programa Escola da Família e exposto a proposta do projeto, a professora foi alertada que seria conveniente convidar os alunos do 2º ano também, pois só convidando alunos do 3º ano talvez não conseguisse um número suficiente para o desenvolvimento do projeto. A coordenadora acreditava que haviam mais alunos interessados nos segundos anos. Foi aceito a sugestão, uma vez que estes também fariam a prova do Enem, sendo que isto não fugiria do propósito inicial. São dois segundos anos e dois terceiros anos no período da manhã e um 2º e um 3º no período noturno.

Após efetuado o convite por 3 vezes, 30 alunos fizeram a inscrição para o projeto, mas apenas 8 compareceram às aulas, sendo 3 alunos do 2º ano e 5 alunos do 3º ano. Nenhum destes era do período noturno. Houve um certo desapontamento por parte da professora, mas o projeto prosseguiu assim mesmo.

Figura 5 - Alunos que participaram do projeto em momento de desenvolvimento da atividade

Fonte: o autor

O projeto foi desenvolvido por uma sequência de atividades, em 3 sábados seguidos das 10h às 12:30h e foi intitulado de “O Mundo Fantástico das Abelhas”.

4.3.1 Primeiro dia de Projeto

A professora iniciou a aula explicando para os alunos que o projeto era parte de sua dissertação de mestrado. Nestes dias eles revisariam conteúdos importantes que os ajudariam na prova no Enem, além de aprender novos conceitos. Explicou também que tentaria desenvolver as aulas de uma forma diferente, mas eram eles que no final do curso diriam se perceberam ou não alguma diferença. Explicou que o conteúdo seria todo desenvolvido a partir de um assunto, neste caso “abelhas”, mas que poderia ser um outro qualquer. Ao final do projeto eles deveriam ser capazes de responder duas perguntas que seriam as questões norteadoras do projeto:

- Como as abelhas informam às outras a que distância da colmeia está uma florada encontrada?

- Por que o favo é composto de alvéolos em forma de prisma de base hexagonal?

Deu-se início à aula com a apresentação do filme “Você sabe como vivem as abelhas”? cujo link está a seguir, e em seguida a atividade 1.

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=3kMk47GCkT8

Atividade 1: Coleta de alimentos – dispêndio de energia (Texto extraído do livro MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO, 2003)

Uma abelha campeira voa, aproximadamente, 24 quilômetros por hora, consumindo para isso cerca de 0,5mg de mel por quilômetro. Para colocar uma única carga de néctar, capaz de encher o estômago, uma única abelha chega a visitar de 50 a 100 flores. Ao fornecer um litro de mel uma colônia tem que voar nada menos que 40 mil quilômetros, ou seja, a distância aproximada de uma volta ao redor da

Terra, isso tudo numa área que não ultrapassa 707 hectares, num raio de 1,5km ao redor da colmeia. No vaivém dessas viagens elas coletam os ingredientes para compor o mel, ou seja, o néctar, suco adocicado das flores, o pólen e a água.

A partir dessas informações respondam:

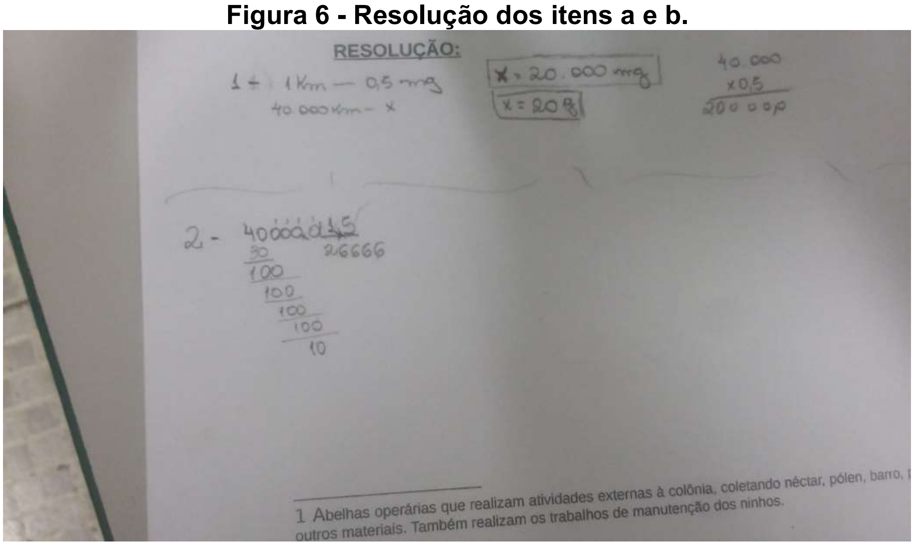
a) Qual a quantidade de mel que uma colônia necessita para buscar ingredientes para 1 litro de mel?

b) Quantas viagens deverão fazer da florada a colmeia para obter 1 litro de mel?

Considerações sobre a atividade 1:

A primeira dificuldade observada aqui foi na interpretação do texto onde deveriam encontrar os dados para a resolução do problema. A professora teve que fazer uma leitura atenciosa com os alunos e ajudá-los a retirar as informações necessárias para a resolução. Após identificados todos os dados, os alunos não tiveram dificuldade para resolver o item a. Todos concordaram em ser possível resolver com uma regra de três. Obtiveram a resolução com uma regra de três já assumindo que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, como pode ser visto na figura a seguir:

Figura 6 - Resolução dos itens a e b.



Fonte: Dados da pesquisa

Mas, ao questionar como se resolve a regra de três eles responderam:

- “multiplica em cruz”.

A professora percebeu que havia uma falha neste ponto: eles não sabiam a diferença entre grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais, e colocou a seguinte situação para eles:

- Você está num carro a uma velocidade de 100 km/h e gasta 2 horas para chegar a um determinado lugar. Se esta velocidade fosse aumentada para 120 km/h, o que aconteceria com o tempo da viagem?

Todos foram unânimes em dizer que chegariam mais rápido ao destino. Então a professora pediu que resolvessem da mesma forma que resolveram o item a. Para surpresa de todos, chegaram à resposta de 2.4 horas. Mas como? Eles tinham certeza que o tempo seria menor. Perceberam que havia algo errado. Assim, a professora aproveitou a situação e mostrou a diferença entre grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais e a forma que a regra de três é resolvida.

Aqui também foi relembrado como fazer as transformações de unidades sendo revisado o seguinte quadro:

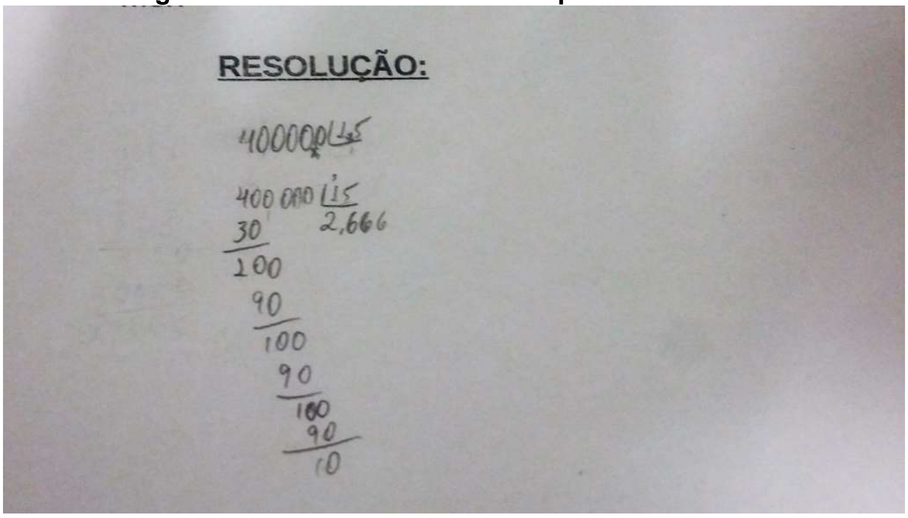
Quadro 4 - Múltiplos e submúltiplos de unidades padrão

Múltiplos			**Padrão**	**Submúltiplos**		
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
kl	hl	dal	l	dl	cl	ml

Fonte: o autor

Na questão b houve dificuldade em efetuar a divisão com decimais. Assim, foi necessário fazer a revisão deste conteúdo, pois eles próprios assumiram que não lembravam como se fazia. A figura a seguir ilustra a resolução do item b:

Figura 7 - Divisão com números apresentando erro



Fonte: Dados da pesquisa

Terminada a atividade 1 deu-se início a atividade 2.

ATIVIDADE 2: A dança das abelhas (Texto extraído do livro MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO, 2003)

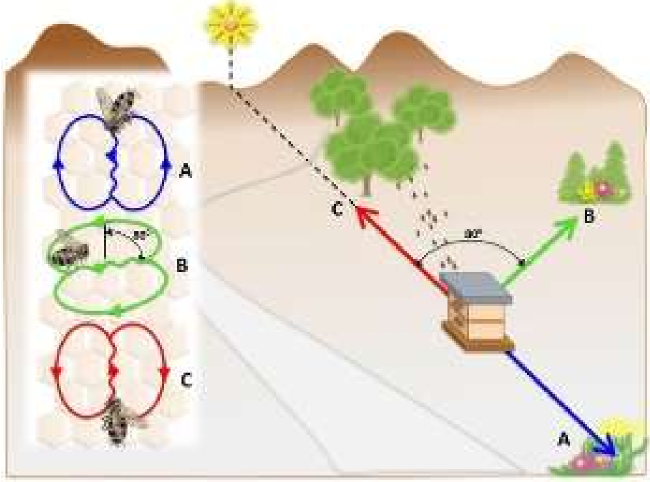
Uma abelha pode lembrar-se da rota de voo a partir da posição do sol no céu, do odor e da cor das flores. É capaz, também, de retornar à mesma fonte de alimento no mesmo horário no dia seguinte. O pesquisador Von Frisch[6] foi quem descobriu a forma de comunicação das abelhas, ou seja, quando encontra uma boa fonte de néctar e pólen retorna para informar às demais a posição do sol, isto é, o ângulo entre sua própria rota de voo e uma linha horizontal da colmeia, na direção do sol.

Sua forma de comunicação é denominada a “dança do requebrado”. Quando as flores estão a menos de 100 metros de distância da colmeia, a dança é circular. Se o alimento está a mais de 100 metros, a abelha corre para frente por uma pequena distância, retornando ao ponto inicial por um semicírculo, e volta descrevendo um outro semicírculo oposto, dando uma ideia de oito. Se a dança é feita a 30º à direita da vertical significa que o alimento está a 30º à direita do sol.

---

[6] Karl von Frish (1886 – 1982): pesquisador austríaco que recebeu o prêmio Nobel de Medicina e Fisiologia em 1973 após 50 anos de estudos sobre comunicação das abelhas. (GONÇALVES, L.S)

Figura 8 - Representação da dança das abelhas



Fonte: http://www.boticasparque.pt/dados.php?ref=abelhas

Ao dançar na colmeia, outras abelhas podem aprender a posição e o odor das flores, embora não aprendam sua cor e sua forma. O número de vezes por segundo que a abelha perfaz o circuito “dançando” indica a distância da florada em relação a colmeia.

Questão a ser resolvida:

O quadro abaixo apresenta a duração de cada circuito versus a distância:

Quadro 5 - Distância versus duração do circuito da dança das abelhas

Distância (m)	200	500	1000	2000	3500	4500
Duração do circuito (s)	2.1	2.5	3.3	3.8	5.6	6.3

Fonte: Biembengut e Hein (2003, p. 98)

Como podemos localizar uma florada a partir da dança da abelha?

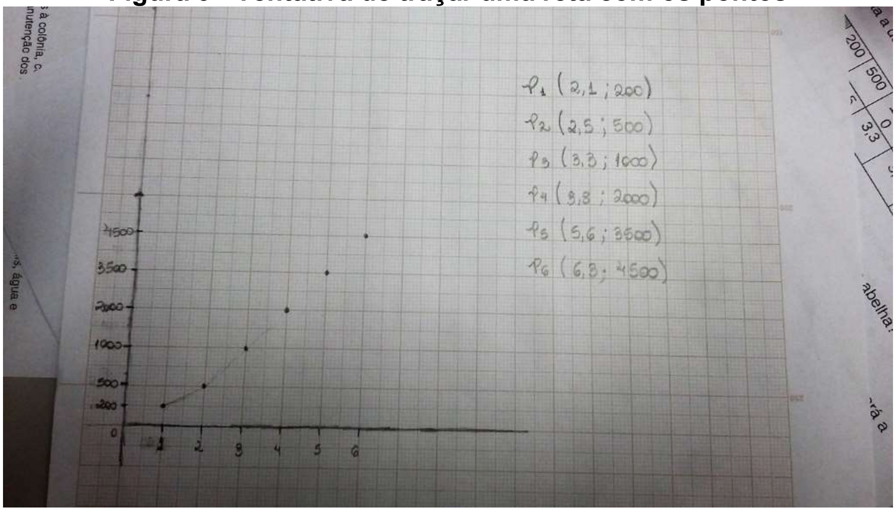
Por exemplo, se a abelha efetuar 4 voltas ou circuito/segundos qual será a distância da florada?

Considerações sobre a atividade 2:

Depois de uma leitura atenta do texto, a professora solicitou que os alunos marcassem os pontos da tabela acima no plano cartesiano, para que pudessem ver se havia alguma relação entre as grandezas.

Os alunos não tiveram dificuldade em marcar esses pontos no plano. Alguns apresentaram dificuldade apenas na escala. Após encontrado os pontos no plano cartesiano, alguns alunos tentaram intuitivamente, sem solicitação da professora, traçar uma reta que unissem esses pontos, como pode ser visto na figura a seguir:

Figura 9 - Tentativa de traçar uma reta com os pontos



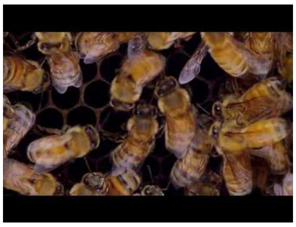
Fonte: Dados da pesquisa

Neste momento, foi desenvolvido o mesmo exercício que aquele aplicado na 6ª série. Identificaram que não era possível encontrar uma reta que passasse por todos os pontos, mas poderiam encontrar uma reta próxima escolhendo dois daqueles pontos.

Com esta atividade revisaram o conceito de equação da reta como uma função do 1º grau, como encontrar a equação a partir de dois pontos dados e resolução de sistemas.

Fizeram o procedimento de encontrar a equação da reta escolhendo dois pares de pontos distintos, e viram que as equações são diferentes, entretanto os coeficientes angular e linear são muitos próximos. Perguntaram se poderia ter várias equações diferentes, então, a professora lhes informou que para a resolução do exercício poderia, isso iria depender de cada par de pontos que fosse escolhido, mas que há um método, conhecido como Método dos Mínimos Quadrados onde é possível encontrar a reta que melhor ajusta esses pontos.

A aula encerrou-se com a apresentação do vídeo “Dança das abelhas – complexidade Irredutível”, que mostra a forma de comunicação das abelhas. O link do vídeo é o seguinte:



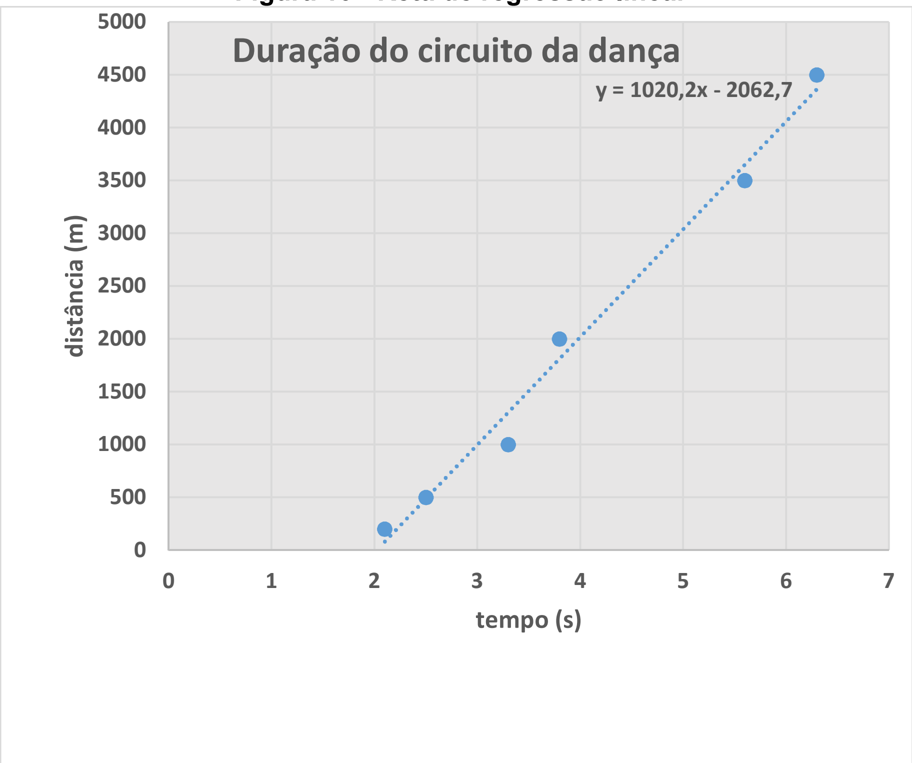
Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=PA_8tAI0IyI

4.3.2 Segundo dia de Projeto

A sequência da programação inicial, antes do início do projeto, era ensinar-lhes o Método dos Mínimos Quadrados. Mas, ao perceber a dificuldade dos alunos em resgatar conceitos já aprendidos, a professora resolveu excluir esse conteúdo do projeto, e utilizar o tempo no desenvolvimento de conceitos de geometria, pois este assunto é corriqueiro em provas do Enem.

A professora apenas mostrou aos alunos a construção da reta que melhor ajusta os pontos com um gráfico feito no Excel.

Figura 10 - Reta de regressão linear



Fonte: o autor

Atividade 3: Método dos Mínimos Quadrados

Esta atividade, como justificado anteriormente, foi retirada do projeto. Ela encontra-se no apêndice B, para servir de auxílio a outros professores que queiram desenvolver o projeto com seus alunos.

Atividade 4: Coordenadas Polares (Texto extraído do livro MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO, 2003)

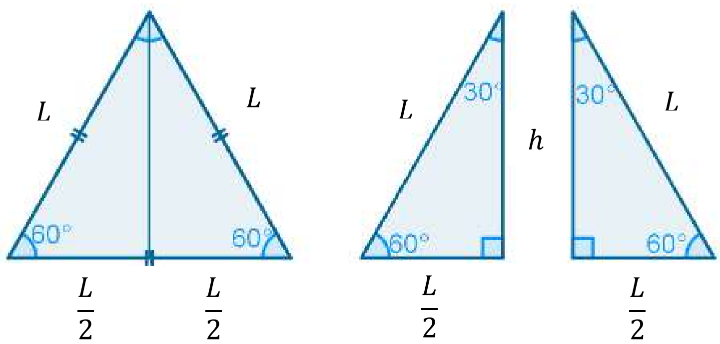
Se a fonte de alimento, por exemplo, estiver a 983.87 metros da colmeia e formar um ângulo α de 60º no sentido horário em relação à direção do sol nascente (leste), qual a distância que a florada está da colmeia em relação aos pontos cardeais leste e sul?

Considerações sobre a atividade 4:

A atividade iniciou-se com este exercício que nada mais é que a aplicação das relações trigonométricas no triângulo retângulo. Os alunos lembravam das relações seno, cosseno e tangente mas não lembravam os valores dessas relações para o ângulo de 60º. A professora propôs então que descobrissem esses valores aplicando as relações em dois triângulos, como forma dos alunos não apenas decorar, mas conseguir sempre que necessário recorrer ao procedimento para encontrar tais valores. Os triângulos utilizados foram o equilátero e o triângulo retângulo isósceles.

A partir do triângulo equilátero construíram as relações para os ângulos de 30º e 60º. A partir do triângulo retângulo isósceles para o ângulo de 45º.

Figura 11 - Triângulo equilátero (a) e triângulos retângulos congruentes (b)



Fonte: o autor

O processo efetuado foi o seguinte:

Se o triângulo é equilátero, a altura em relação a um de seus lados coincide com a bissetriz e com a mediana desse lado. Assim, se os lados desse triângulo medem L, ao traçar a altura h obtém-se dois triângulos retângulos congruentes cujos catetos medem h e $\frac{L}{2}$, e a hipotenusa mede L. Todas essas informações foram colocadas no problema com a ajuda da professora. Daí por diante o desenvolvimento foi tranquilo por parte dos alunos.

Para encontrar o valor da altura em função de L, basta utilizar o Teorema de Pitágoras. Assim,

$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

Resolvendo a equação tem-se $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$, que é a altura de qualquer triângulo equilátero de lado L.

Fazendo, agora, as relações trigonométricas encontra-se:

$$sen30° = \frac{L/2}{L} = \frac{L}{2}.\frac{1}{L} = \frac{1}{2}$$

$$cos30° = \frac{h}{L} = \frac{L\sqrt{3}/2}{L} = \frac{L\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30° = \frac{L/2}{h} = \frac{L/2}{L\sqrt{3}/2} = \frac{L}{2}.\frac{2}{L\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

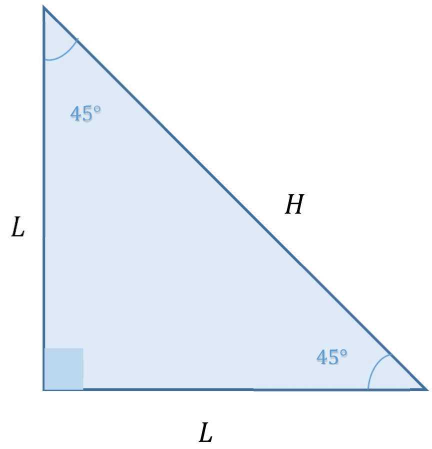
$$sen60° = \frac{h}{L} = \frac{L\sqrt{3}/2}{L} = \frac{L\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos60° = \frac{L/2}{L} = \frac{L}{2}.\frac{1}{L} = \frac{1}{2}$$

$$tg60° = \frac{h}{L/2} = \frac{L\sqrt{3}/2}{L/2} = \frac{L\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{L} = \sqrt{3}$$

O mesmo procedimento foi utilizado no triângulo retângulo isósceles.

Figura 12 - Triângulo retângulo isósceles



Fonte: o autor

Neste segundo caso os alunos se saíram melhor que no primeiro, pois já tinham um exemplo a seguir. Para encontrar a hipotenusa em função de L aplicaram o Teorema de Pitágoras e encontraram $H = L\sqrt{2}$. Daí, foi só aplicar as relações trigonométricas:

$$sen45° = \frac{L}{H} = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

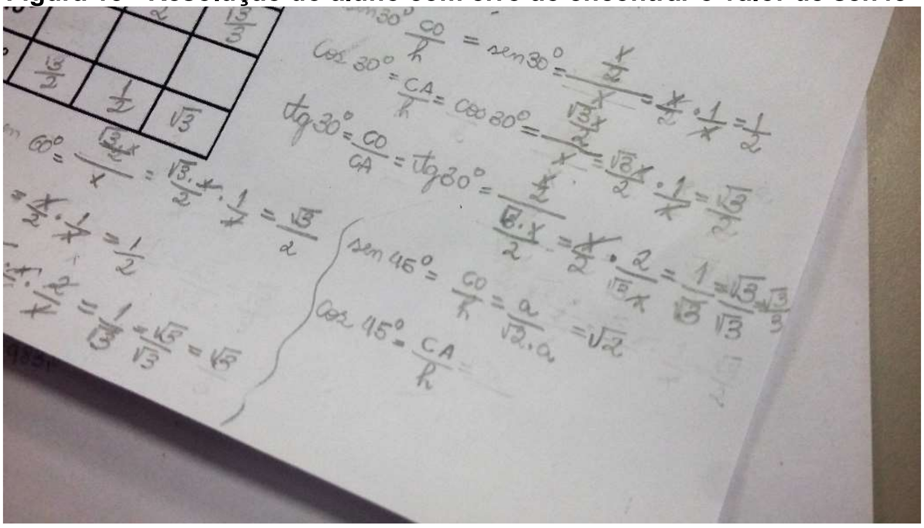
$$cos45° = \frac{L}{H} = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45° = \frac{L}{L} = 1$$

Esse procedimento aparece em muitos livros didáticos como demonstração para encontrar os valores de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, mas infelizmente há professores que simplesmente “passam” uma tabela pronta com os valores para o aluno decorar, sem se preocupar com o desenvolvimento desse aluno. A autora desse trabalho acredita que essa forma, onde o aluno constrói e descobre os valores, ajuda-o a sedimentar seus conhecimentos. Assim, quando precisar utilizar novamente, mesmo que não lembre o valor de uma das razões trigonométricas estudadas, ele consegue resgatar essa construção e chegar novamente ao valor.

Vale ressaltar, que os alunos desse projeto, mesmo estando já em fase de conclusão do Ensino Médio, apresentavam muita dificuldade na manipulação da Álgebra, como pode-se observar, a seguir, na resolução de um exercício feita por um deles:

Figura 13 - Resolução do aluno com erro ao encontrar o valor de sen45°



Fonte: Dados da pesquisa

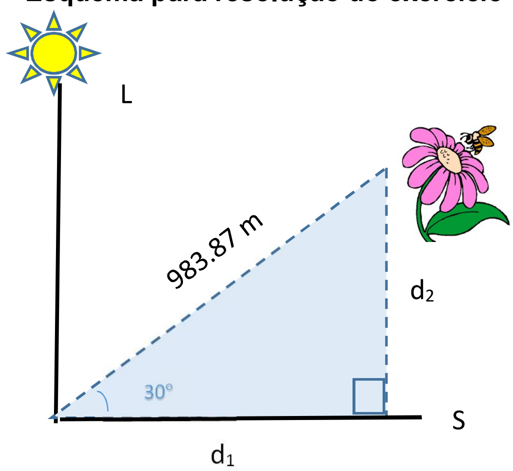
Durante todo o projeto, em todas as atividades, a professora aproveitou para revisar conteúdos básicos, como operações com frações.

Terminado esta etapa, a professora deu sequência ao trabalho retornando na primeira questão da atividade 4. Segue a resolução.

Resolução:

As informações retiradas do texto, com a ajuda da professora, estão representadas na figura abaixo:

Figura 14 - Esquema para resolução do exercício



Fonte: o autor

Aplicando as relações trigonométricas no triângulo retângulo, tem-se:

$$sen30° = \frac{d_2}{983.87} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{d_2}{983.87} \quad \rightarrow \quad d_2 = 491.93$$

e

$$cos30° = \frac{d_1}{983.87} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d_1}{983.87} \quad \rightarrow \quad d_1 = 851.04$$

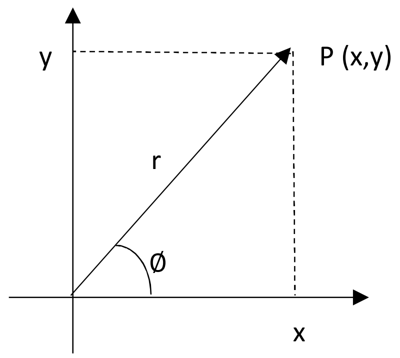
Assim, a florada está a 851.04 metros ao sul e a 491.93 metros a leste.

Somente após a resolução desse exercício foi que a professora introduziu o conceito de coordenadas polares, encontrada na atividade 5.

Atividade 5: Coordenadas polares

Dado um ponto P do plano, utilizando coordenadas cartesianas (retangulares), descrevemos sua localização no plano escrevendo $P = (x, y)$ onde x é a projeção de P no eixo OX e y, a projeção no eixo OY. Pode-se também descrever a localização de P, a partir da distância de P à origem O do sistema, e do ângulo formado pelo eixo OX e o segmento OP, caso $P \neq O$. Seja $P = (r, \emptyset)$ onde r é a distância de P a O e $\emptyset$ o ângulo tomado no sentido anti-horário, da parte positiva do eixo OX ao segmento OP, caso $P \neq O$. Esta maneira de representar o plano é chamada Sistema de Coordenadas Polares.

Figura 15 - Ponto representado por coordenadas polares



Fonte: o autor

<u>Faça você mesmo</u>:

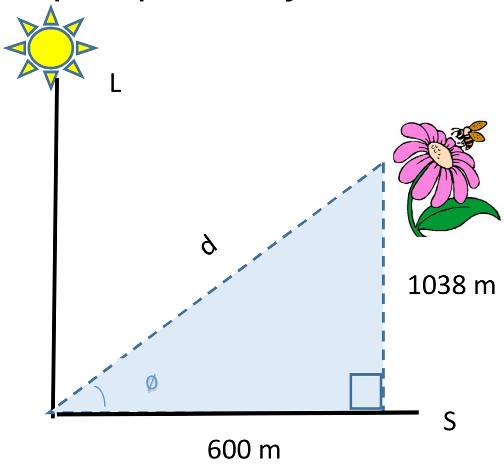
Uma abelha exploradora descobre uma fonte de mel ao entardecer. Esta fonte está localizada a 600 metros ao sul e a 1038 metros a leste da colmeia. Que coordenadas polares serão sinalizadas pela abelha? (Utilize $\sqrt{3} = 1.73$)

Considerações sobre a atividade 5:

Diferentemente do exercício da atividade anterior, em que era dado o valor do ângulo e a distância da origem a um determinado ponto, agora, o aluno terá que descobrir estes valores.

Primeiramente, fez-se o desenho com as informações fornecidas:

Figura 16- Esquema para resolução do exercício



Fonte: o autor

Para encontrar o valor do ângulo, os alunos escolheram a relação da tangente. Então,

$$tg\emptyset = \frac{1038}{600} = 1.73 = \sqrt{3}$$

O interessante é que, agora, o aluno teve que fazer o processo inverso. Ao invés de ter um ângulo e encontrar o valor da tangente desse ângulo, ele teve que se perguntar "qual é o ângulo cuja tangente é $\sqrt{3}$"? Esse ângulo é 60º.

Para encontrar o valor de **d**, mesmo podendo escolher a relação seno ou cosseno, a professora solicitou que fizessem com as duas relações para verificarem que o resultado seria o mesmo. Assim, encontrou-se $d = 1200$ m.

Logo, as coordenadas polares informadas pela abelha são (1200, 60º).

4.3.3 Terceiro dia de Projeto

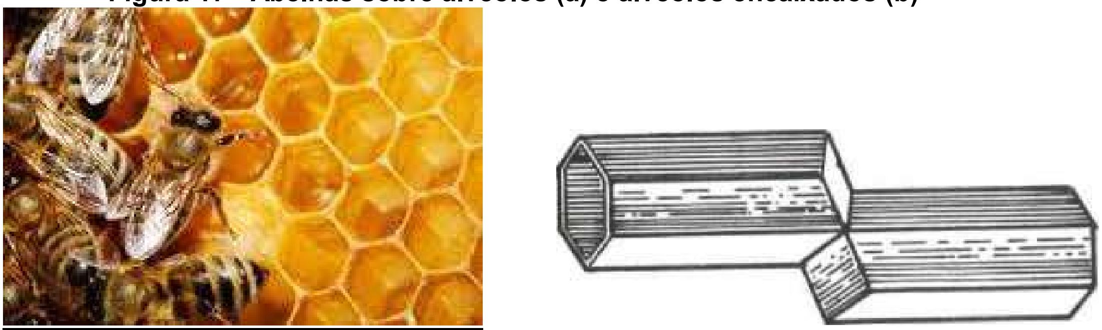
Terceiro e último dia de projeto. O objetivo dessa aula era descobrir o porquê da base de cada alvéolo ser da forma hexagonal regular e fazer os alunos perceberem que os alvéolos são formados a partir da lei natural do mínimo esforço para obter o máximo rendimento. Isto é, a forma apresenta o máximo volume para um mínimo de cera empregada.

O alvéolo é composto por um prisma hexagonal regular mais um ápice triédrico encaixados, mas para o projeto optou-se por trabalhar apenas a parte formada pelo prisma hexagonal.

Atividade 6: A geometria das abelhas (Texto extraído do livro MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO, 2003)

O “mundo” das abelhas é rico em situações que permitem explorar conceitos matemáticos. Por exemplo, o favo, feito de cera, é uma obra espetacular! A cera é um produto derivado da secreção de uma glândula das abelhas entre 18 e 24 dias de idade. Para a produção dessa cera, ela precisa de uma temperatura não inferior a 36º. É com essa cera que faz sua principal “obra arquitetônica”, o favo, depósito de mel e berço para a prole. O favo é composto de alvéolos de base hexagonal. Com apenas 0.3 mm de espessura, o alvéolo pode suportar um esforço de até 30 vezes o correspondente ao seu peso. Um alvéolo, que constitui os favos, é formado no total por 3 losangos e 6 retângulos, possuindo a forma de um prisma hexagonal regular, aberto em uma extremidade e formando um ápice triédrico na outra.

Figura 17 - Abelhas sobre alvéolos (a) e alvéolos encaixados (b)



Fonte: pt.dreamstime.com

Considerações sobre a atividade 6:

Após a leitura do texto anterior, a professora iniciou a aula convidando os alunos a analisarem o que aconteceria se colocassem vários cilindros um ao lado do outro e vários prismas hexagonais regulares um ao lado outro.

Figura 18- Prismas de base hexagonal e cilindros encaixados.

Fonte: o autor

O objetivo aqui era que os alunos percebessem que nos prismas de base hexagonal regular os lados são encaixados, ou seja, como foi dito por um dos alunos "dá para aproveitar as paredes". O mesmo não acontece com os cilindros. Então veio a pergunta feita pela professora:

- Será que isso acontece apenas quando a base é um hexágono ou há outros polígonos regulares com a mesma propriedade?

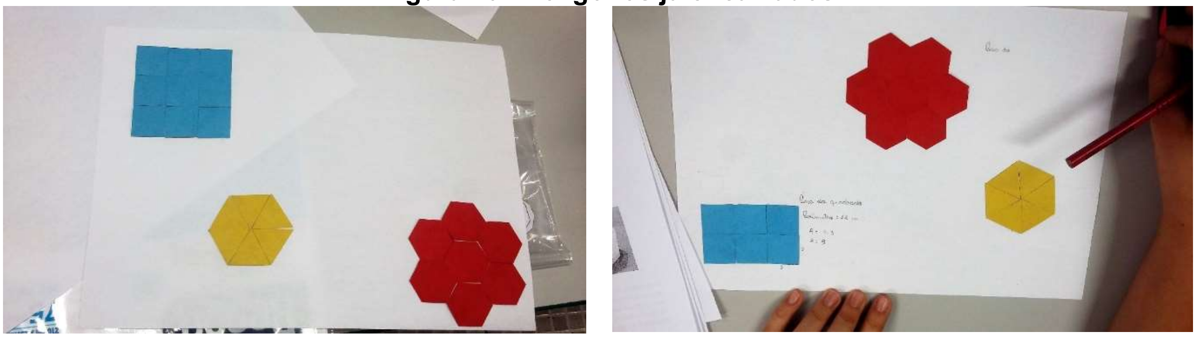
Para ajudar a responder essa pergunta, a professora entregou aos alunos polígonos regulares com número de lados diferentes e pediu para que eles descobrissem outros que pudessem ladrilhar uma folha de sulfite.

Figura 19- Alunos tentando encontrar outros polígonos que se encaixam

Fonte: o autor

Descobriram com esta atividade que ocorre o mesmo com os triângulos e com os quadrados.

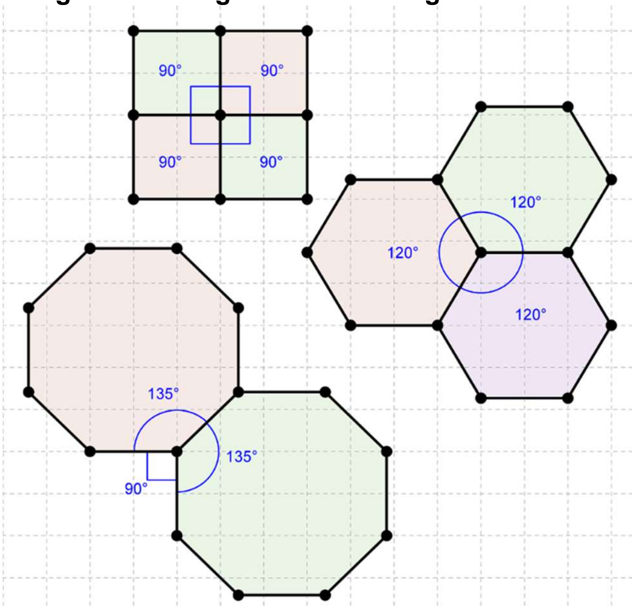
Figura 20 - Polígonos já encaixados



Fonte: o autor

Isto acontece porque os três polígonos têm ângulos internos cujas medidas são divisores de 360º.

Figura 21- Polígonos e seus ângulos internos



Fonte: http://mathluiz.blogspot.com.br/2014/08/questao-58-prova-do-estado-ofa-2014.html

Descoberto os três polígonos possíveis para a pavimentação de um plano, a questão agora era: Por que o hexágono ser a forma escolhida pelas abelhas e não o triângulo ou o quadrado?

Para responder esta pergunta fizeram a seguinte atividade:

- Calcule as áreas de um triângulo equilátero, um quadrado e um hexágono regular, todos com 12 cm de perímetro.

Ao efetuar os cálculos observaram que:

- área do triângulo = 6.92 cm^2;
- área do quadrado = 9.00 cm^2;
- área do hexágono = 10.38 cm^2.

Ou seja, o hexágono possui maior área entre os 3. Daí o motivo da escolha.

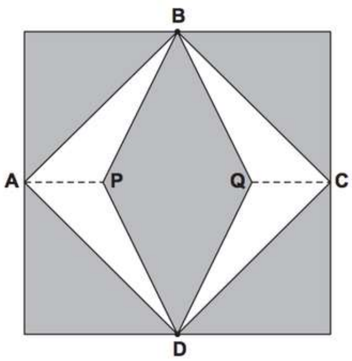
Ressalta-se aqui, que os alunos não sabiam como calcular a área de um hexágono regular. A professora mostrou a eles que a área do hexágono equivale a área de 6 triângulos equiláteros, neste caso, de lado medindo 2 cm.

Para sedimentar os conhecimentos sobre área adquirido, relembrado nesta aula, a professora propôs o seguinte exercício de uma das provas do Enem:

<u>Faça você mesmo:</u>

(Enem 2012) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.

Figura 22- Vitral



Fonte: http://inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30.00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50.00 o m^2. De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

a) R$ 22.50

b) R$ 35.00

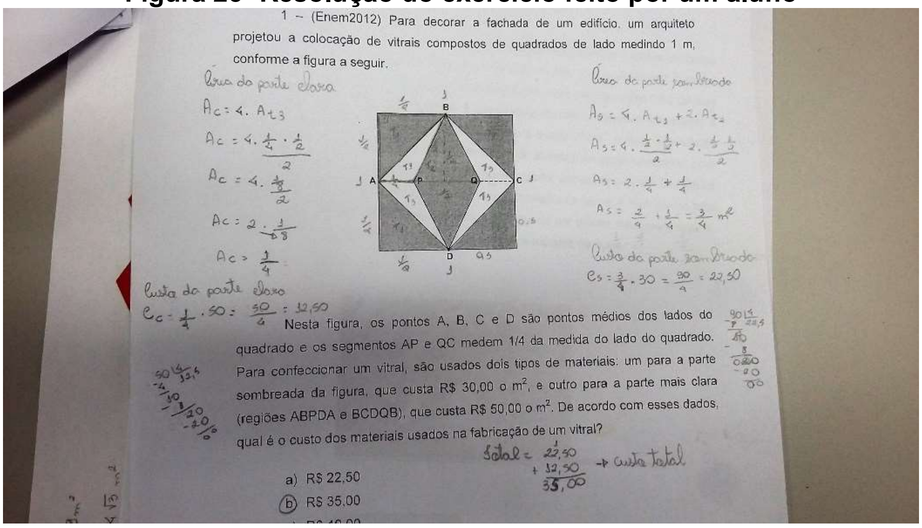
c) R$ 40.00

d) R$ 42.50

e) R$ 45.00

A resolução do exercício pode ser efetuada por diversos caminhos, por isso não será colocada aqui o passo a passo, pois cada aluno juntamente com o seu professor pode encontrar a melhor forma. Na foto seguinte observa-se qual foi a estratégia utilizada pelos alunos, de comum acordo com a professora, nesta atividade.

Figura 23- Resolução do exercício feito por um aluno



Fonte: Dados da pesquisa

Atividade 7: Mas, o que é um prisma?

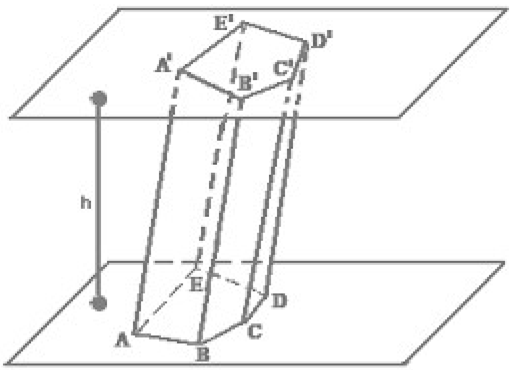
O prisma é um sólido geométrico muito presente no nosso dia a dia. A maioria das embalagens e dos objetos que utilizamos possui essa forma. Como exemplos temos caixa de fósforos, embalagens de pizza, caixas de sapatos e de perfumes, entre outras.

Figura 24 - Exemplos de prismas no cotidiano

Fonte: internet

<u>Definição:</u> **Prisma** é um poliedro cujas bases são duas regiões poligonais congruentes (mesma forma e mesmo tamanho) e paralelas. Suas faces laterais são regiões em forma de paralelogramo.

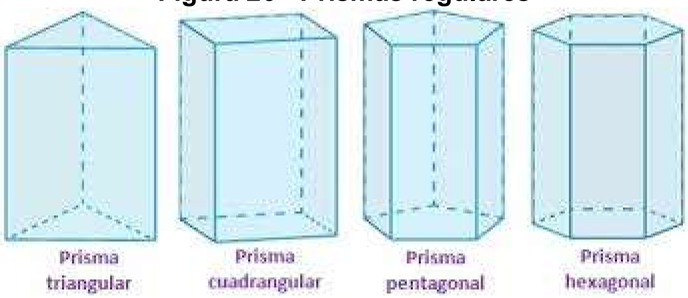
Figura 25 - Prisma



Fonte: https://hpdemat.apphb.com/Espacial

Exemplos:

Figura 26 - Prismas regulares



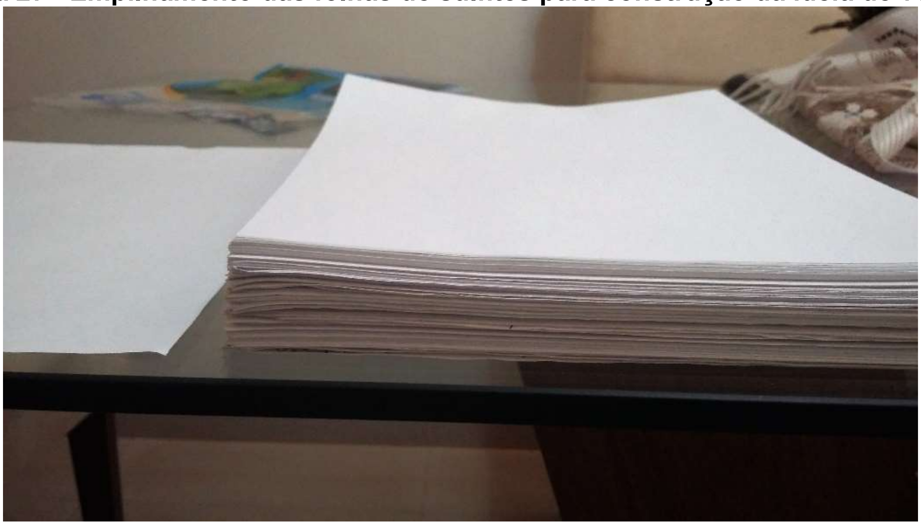
Fonte: http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/tipos-prisma/

Considerações sobre a atividade 7:

O objetivo da atividade 7 era formalizar com os alunos o conceito de prisma e fazer o cálculo de volume.

Para introduzir o conceito de volume com os alunos a professora fez o seguinte: pegou uma folha de sulfite e pediu para os alunos calcularem a área. Foi colocando várias folhas de sulfite uma sobre a outra e questionou se a área mudava. Os alunos tinham que perceber que a única medida que variava era a altura da pilha.

Figura 27 - Empilhamento das folhas de sulfites para construção da ideia de volume



Fonte: o autor

Assim construíram um bloco retangular de área da base igual a área de uma folha de sulfite e altura variava de acordo com o número de folhas empilhadas. A partir desse momento foi fácil introduzir a fórmula para o cálculo de volume de um prisma reto:

$$V = A_b \times h$$

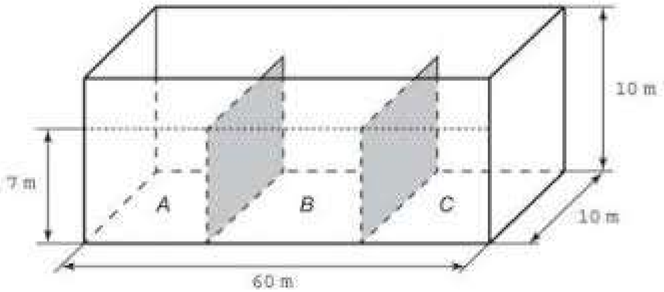
Ao término do assunto eles assistiram ao vídeo “Geometria das abelhas”, cujo link está a seguir, e depois resolveram mais duas questões do Enem.

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=9rMjUZKLgy4

Faça você mesmo:

1 – (Enem 2016) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m x 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados conforme a figura. Assim, caso haja rompimento do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.

Figura 28- Visualização interna do reservatório



Fonte: http://inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias. Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de:

a) 1.4×10^3 m^3

b) 1.8×10^3 m^3

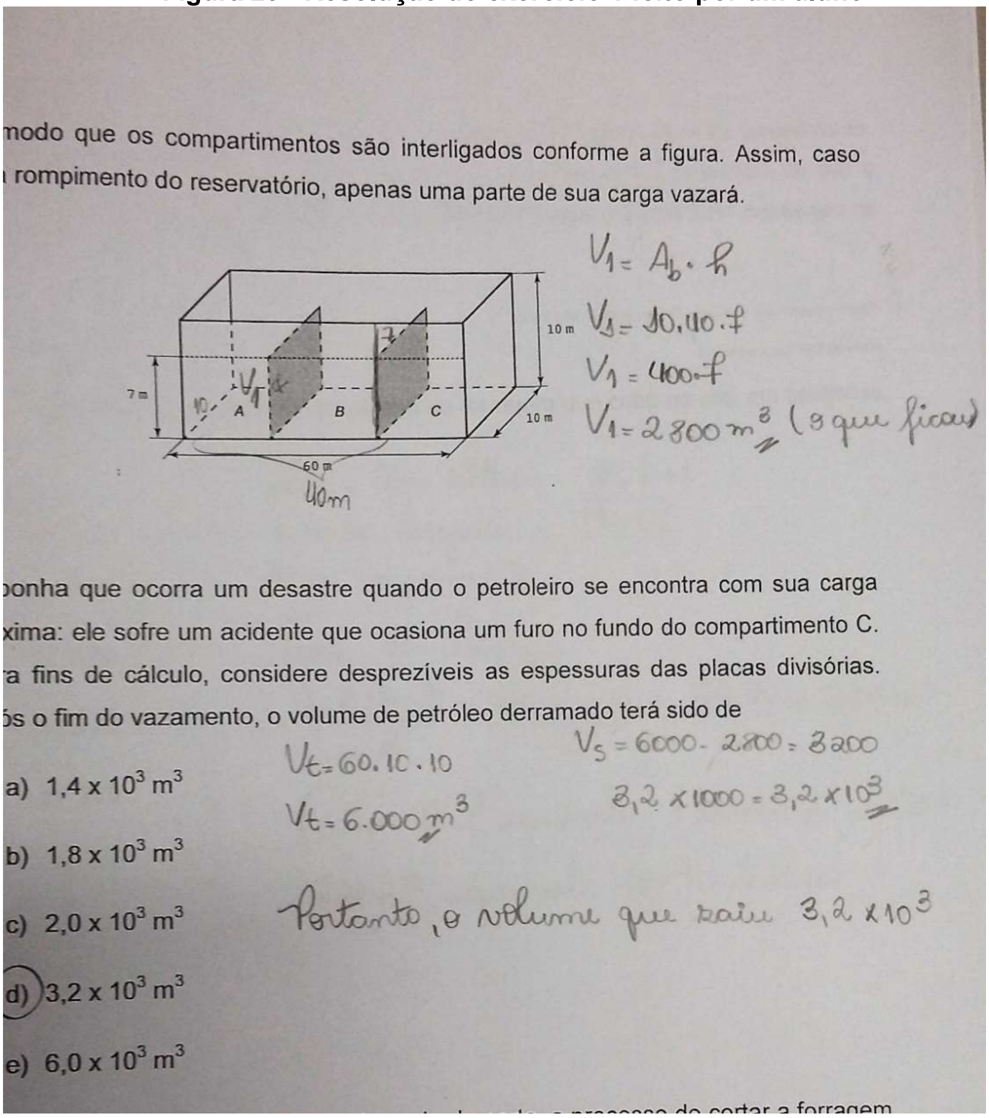
c) 2.0×10^3 m^3

d) 3.2×10^3 m^3

e) 6.0×10^3 m^3

Segue a resolução de um aluno na foto a seguir:

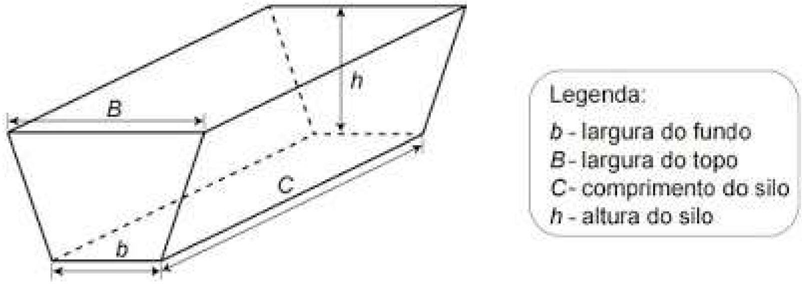
Figura 29 - Resolução do exercício 1 feito por um aluno



Fonte: Dados da pesquisa

2 – (Enem 2014) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação é denominada silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal conforme mostrado na figura.

Figura 30 - Silo em forma de prisma



Fonte: http://inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0.5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

EMBRAPA. Gado de corte. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br.
Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é:

a) 110

b) 125

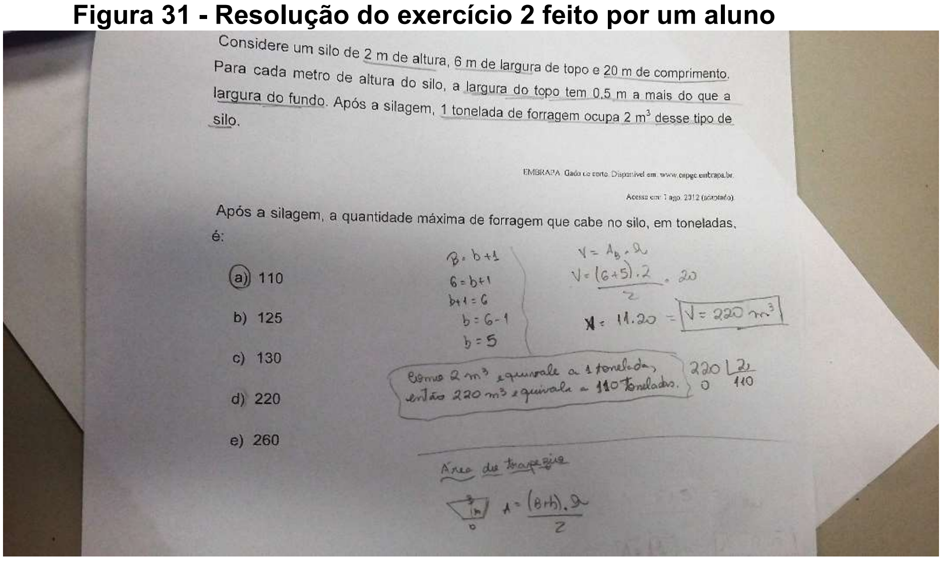
c) 130

d) 220

e) 260

Segue a resolução:

Figura 31 - Resolução do exercício 2 feito por um aluno



Fonte: Dados da pesquisa

Terminada a aula a professora entregou um questionário aos alunos, que está disponível no apêndice C, para registrarem suas percepções.

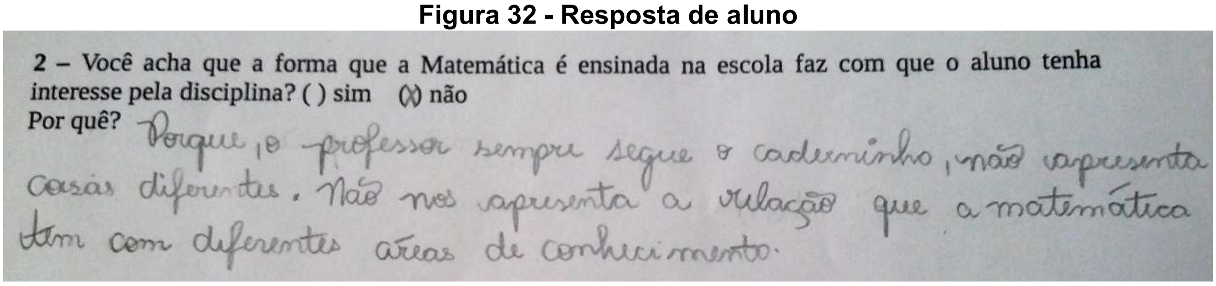
4.3.2 Percepções da professora e dos alunos em relação à atividade

Em relação à primeira atividade aplicada na 6ª série em 2005, na atividade aplicada na turma de ensino médio em 2017, a professora percebeu algumas dificuldades por parte dos alunos. Tanto em conteúdo, pois eles apresentavam falhas em conceitos básicos, como também no relacionamento, pois como a maioria não conhecia a professora, muitas vezes se mostravam tímidos na hora de arriscar uma estratégia ou uma resposta pelo fato de terem medo de errar. Por outro lado, acredita que no segundo caso, em 2017, o projeto foi desenvolvido de forma mais enriquecedora. Mostra também o amadurecimento da professora para efetivamente fazer o papel de facilitadora e condutora do conhecimento desses alunos.

Durante todo o projeto, a professora como mediadora da situação, buscou dar confiança a esses alunos para que eles pudessem se arriscar mais nas suas resoluções. Todo o trabalho foi desenvolvido com o objetivo de fazer com que esses alunos atingissem um determinado grau de satisfação ao alcançar as metas colocadas e, assim, permanecerem motivados.

A professora percebeu que havia alunos bons, interessados, mas pouco estimulados na busca do conhecimento, como podemos ver na resposta de uma aluna:

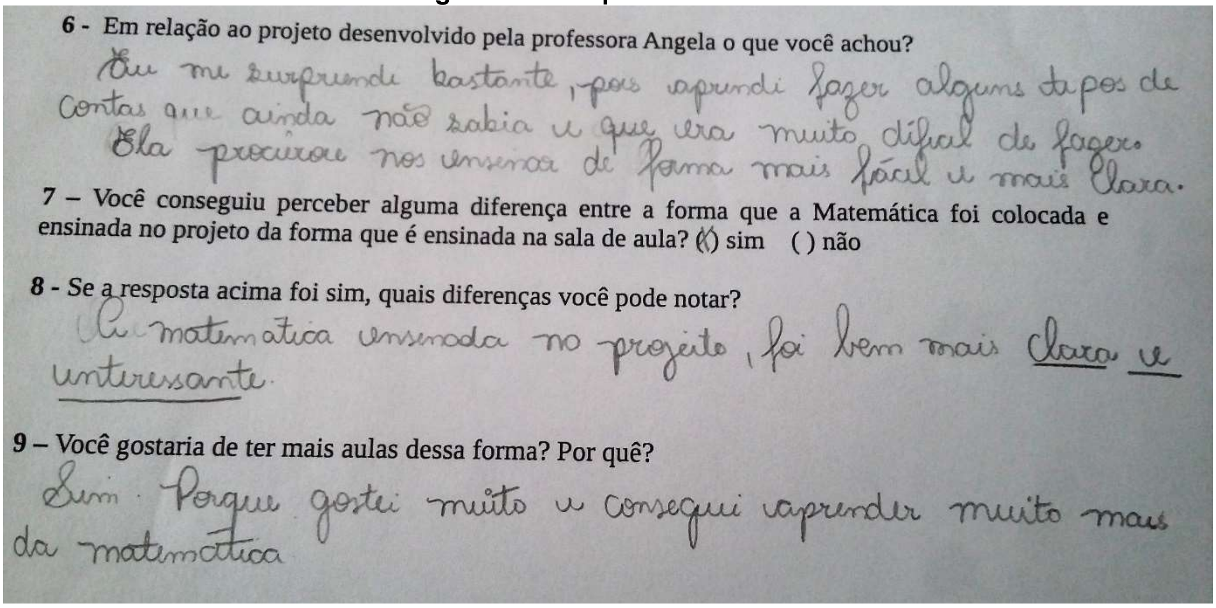
Figura 32 - Resposta de aluno


2 – Você acha que a forma que a Matemática é ensinada na escola faz com que o aluno tenha interesse pela disciplina? ( ) sim (X) não
Por quê? Porque, o professor sempre segue o caderninho, não apresenta coisas diferentes. Não nos apresenta a relação que a matemática tem com diferentes áreas de conhecimento.

Fonte: Dados da pesquisa

Acredita-se que eles conseguiram ver as relações e conexões que a matemática tem com outras áreas. A seguir, alguns comentários dos alunos:

Figura 33 - Respostas de aluno



6 - Em relação ao projeto desenvolvido pela professora Angela o que você achou?

Eu me surpreendi bastante, pois aprendi fazer alguns tipos de contas que ainda não sabia e que era muito difícil de fazer. Ela procurou nos ensinar de forma mais fácil e mais clara.

7 – Você conseguiu perceber alguma diferença entre a forma que a Matemática foi colocada e ensinada no projeto da forma que é ensinada na sala de aula? (X) sim ( ) não

8 - Se a resposta acima foi sim, quais diferenças você pode notar?

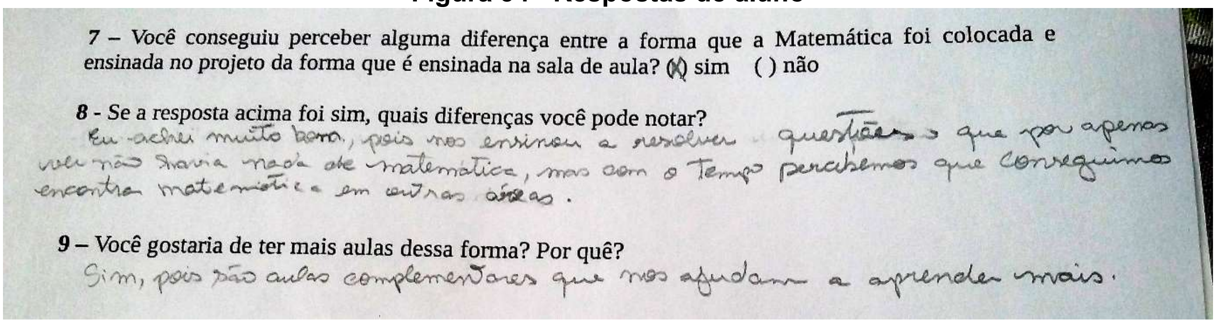
A matemática ensinada no projeto, foi bem mais clara e interessante.

9 – Você gostaria de ter mais aulas dessa forma? Por quê?

Sim. Porque gostei muito e consegui aprender muito mais da matemática

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 34 - Respostas de aluno



7 – Você conseguiu perceber alguma diferença entre a forma que a Matemática foi colocada e ensinada no projeto da forma que é ensinada na sala de aula? (X) sim ( ) não

8 - Se a resposta acima foi sim, quais diferenças você pode notar?

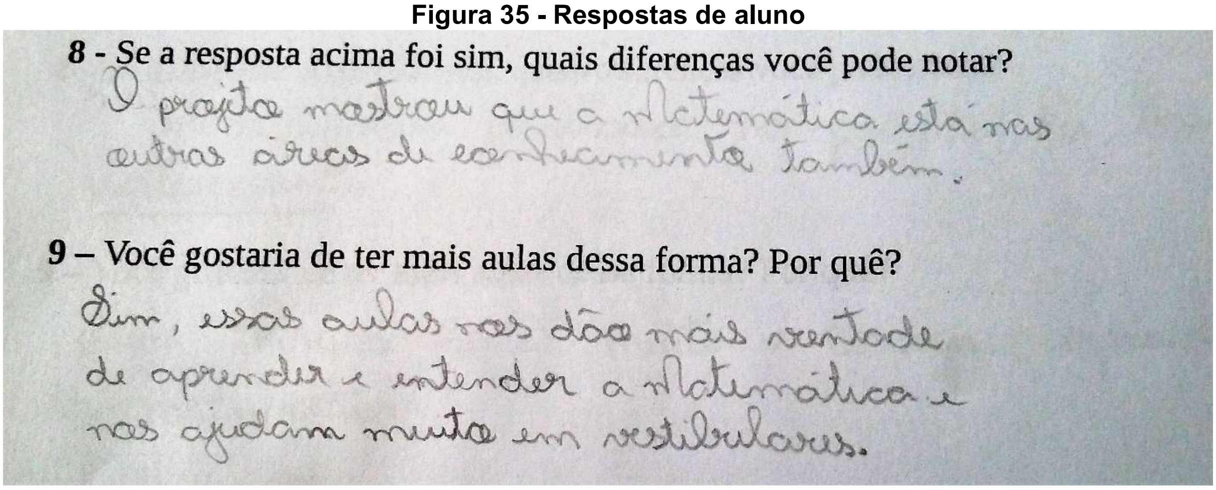
Eu achei muito bom, pois nos ensinou a resolver questões que por apenas ver não havia nada de matemática, mas com o tempo percebemos que conseguimos encontrar matemática em outras áreas.

9 – Você gostaria de ter mais aulas dessa forma? Por quê?

Sim, pois são aulas complementares que nos ajudam a aprender mais.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 35 - Respostas de aluno



8 - Se a resposta acima foi sim, quais diferenças você pode notar?

O projeto mostrou que a Matemática está nas outras áreas de conhecimento também.

9 – Você gostaria de ter mais aulas dessa forma? Por quê?

Sim, essas aulas nos dão mais vontade de aprender e entender a Matemática e nos ajudam muito em vestibulares.

Fonte: Dados da pesquisa

Neste projeto os alunos tiveram contato com conceitos, como: função do 1º grau, equação da reta, sistemas lineares, relações trigonométricas no triângulo retângulo, relação entre coordenadas polares e retangulares, geometria plana e espacial. Geralmente, esses conteúdos matemáticos são apresentados em momentos diferentes, colaborando para que o aluno não perceba a relação entre eles.

4.4 Comparando as atividades

Analisando as duas aplicações, a professora percebeu que o desenvolvimento da atividade fluiu melhor na primeira em 2005. Nesta, os alunos se sentiam mais encorajados a arriscar suas tentativas, enquanto na segunda os alunos se sentiam tímidos e com medo de arriscar. Ela acredita que dois fatores possam ter feito a diferença para que o desenvolvimento na primeira turma ocorresse mais naturalmente. Primeiro, ela era a professora da turma há dois anos, portanto, havia uma proximidade entre professor e aluno, fato que deixa o aluno mais à vontade diante de situações novas. Segundo, os alunos da 6ª série não apresentavam dificuldades nos conteúdos que foram requisitados para o desenvolvimento da atividade, enquanto que, na turma do Ensino Médio sim. Por outro lado, a atividade aplicada no Ensino Médio foi mais desafiadora, pois aqui as dificuldades dos alunos eram maiores.

Em nenhuma das atividades houve uma verificação escrita, apenas diagnóstica que acontecia durante o desenvolvimento da atividade. Mas, fica claro o envolvimento do aluno e o progresso que há em sua aprendizagem.

Dessa forma, percebe-se que quanto mais próximo o professor for do aluno, e quanto mais ele conhecer os pontos fracos e os pontos fortes de sua turma, maiores serão as chances de sucesso no desenvolvimento de uma atividade com Modelagem Matemática.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Baseado no desenvolvimento deste trabalho, percebe-se que a Modelagem Matemática, utilizada como estratégia de ensino, deixa a disciplina muito mais interessante em qualquer nível de ensino. Esta estratégia leva os alunos a incorporarem e compreenderem conceitos matemáticos de forma mais significativa. Trata-se, portanto, de uma alternativa para o ensino-aprendizagem da matemática escolar, que pode fazer com que o aluno estabeleça com a matemática uma relação em que ele possa vê-la como um saber que o cativa e o estimula a conhecer melhor as situações à sua volta. Pode-se dizer que a Modelagem Matemática é um método de aprendizagem ativo, onde o aluno se torna protagonista de seu processo educacional.

A Modelagem Matemática ainda mostra-se como um instrumento que possibilita a revisão e a fixação do que já foi aprendido, destacando a aplicabilidade da matemática e sua interdisciplinaridade. Em todo processo, é fundamental o papel do professor na condução da aula para poder levar seus alunos aos objetivos esperados, e fazer as adaptações devidas de acordo com as necessidades e características da turma.

É também visível, que a Modelagem Matemática é uma atividade onde a cooperação e a interação entre os alunos e o professor têm um importante papel na construção do conhecimento. Por outro lado, a relação com a sociedade também pode ser estimulada, uma vez que o problema a ser investigado pelos alunos tem nela a sua origem.

Quando o aluno participa de uma atividade de Modelagem Matemática, a valorização da interação e da troca entre as pessoas são naturalmente favorecidas, uma vez que a busca da solução para os problemas envolve várias fases, exigindo a participação de indivíduos e a colaboração de pessoas de diversas áreas.

Vale ressaltar que o professor não precisa radicalizar totalmente a sua forma de dar aulas e contextualizar todo o conteúdo, até porque as teorias mais abstratas também são fundamentais para um ensino de matemática de qualidade. A intenção do trabalho é mostrar aos professores/leitores que, dentre as inúmeras alternativas de transformar o ensino da matemática em algo mais próximo do aluno, a Modelagem Matemática é uma delas.

Contudo, é importante registrar que a tarefa não é fácil, pois a realidade educacional pública no Brasil desmotiva o trabalho docente, uma vez que o professor não é valorizado pelos órgãos públicos e pela sociedade, que vê o trabalho do professor como um trabalho qualquer, às vezes até como opção para uma segunda renda, “um bico”. Todo trabalho na educação só surtirá efeito positivo se tiver o envolvimento e a participação de todos os envolvidos: professores engajados no ensino, alunos com sede de aprender, apoio dos pais, valorização da sociedade e incentivo financeiro do governo.

Assim, cada professor deve buscar sua maneira de ensinar e tentar fazer o melhor com aquilo que tem e acreditar que, apesar de tudo, a Educação ainda é o caminho mais bonito para se alcançar a dignidade de um povo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um Estudo sobre o Uso da Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem. **BOLEMA – Boletim de Educação Matemática.** Rio Claro, ano 17, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L.W.; SILVA, P. S.; VERTUAN, R.E. **Modelagem Matemática na educação básica.** São Paulo: Contexto, 2016.

ARAÚJO, I. R. O. **A utilização de lúdicos para auxiliar a aprendizagem e desmistificar o ensino de Matemática.** Florianópolis, 2000. Dissertação. (Mestrado em Engenharia de Produção) Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/78563/178530.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 30 set. 2017.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: **Reunião Anual da ANPED**, 24, 2001a, Caxambu. Anais...Rio de Janeiro: ANPED, 2001a. Disponível em: <http://24reuniao.anped.org.br/tp1.htm#gt19>. Acesso em: 07 nov. 2017.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação. **BOLEMA – Boletim de Educação Matemática.** Rio Claro, ano 14, n. 15, p. 05-23, 2001b.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73- 80, 2004. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_veritati_jonei.pdf>. Acesso em: 08 nov. 2017.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática – uma nova estratégia.** 4. ed. São Paulo: Contexto, 2016.

BIEMBENGUT, M.S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino.** 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BIEMBENGUT, M.S. 30 anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia.** Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, M.S. **Modelagem Matemática no Ensino Fundamental.** Blumenau: Edifurb, 2014.

BIEMBENGUT, M.S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª série):** Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª série):** Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. **Parâmetros Curriculares DO Ensino Médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Mec/Semtec, 2000. p.40 – 56.

BRASIL. **Lei nº 9394**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Dezembro 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em 30 set. 2017.

BRASIL. INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **PISA.** Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/pisa>. Acesso em: 13 out. 2017.

BRASIL. INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **PROVAS E GABARITOS.** Disponível em: <http://inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 15 set. 2017.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a sala de aula. In: **I EPMEM – Encontro Paranaense da Modelagem na Educação Matemática,** 2004, Londrina. Anais do I IPEMEM. Londrina, 2004. Disponível em: <http://www.dionisioburak.com.br/artigos-eventos>. Acesso em: 08 nov. 2017.

BURAK, D. As Diretrizes Curriculares para o Ensino de Matemática e a Modelagem Matemática. **Revista Perspectiva.** Erechim, v. 29, n. 107, p, 153-161, 2005. Disponível em:< http://www.dionisioburak.com.br/artigosperiodicos>. Acesso em: 13 out. 2017.

CARRAHER Terezinha, CARRAHER David, SCHLIEMANN Analúcia. **Na vida dez, na escola zero.** 13. ed. São Paulo: Cortez, 2003.

D´AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papirus, 1996.

D´AMBRÓSIO, Ubiratan. **Dos fatos reais à modelagem: uma proposta de conhecimento matemático.** [2017]. Disponível em: <http://ubiratandambrosio.blogspot.com.br/p/textos.html>. Acesso em: 04 nov. 2017.

GONÇALVES, L.S. **Como as abelhas se comunicam?** Disponível em: <http://www.apacame.org.br/mensagemdoce/71/artigo2.htm>. Acesso em: 30 ago. 2017.

GOLDSTEIN, L. J., LAY, D.C., SCHNEIDER, D.I. **Cálculo e suas implicações.** Ed. Hemus, 1981.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. SECRETARIA DA EDUCAÇÂO. FDE – Fundação para o desenvolvimento da Educação. **O Programa Escola da Família.** 2009. Disponível em: <http://escoladafamilia.fde.sp.gov.br/v2/subpages/sobre.html>. Acesso em: 13 nov. 2017.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação. São Paulo: SEE, 2010.

MEDEIROS, Cleide Farias de. **Por uma Educação Matemática como intersubjetividade.** In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiane. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.** 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005. p. 13-44.

MOREIRA, Marco Antônio. **O que é afinal aprendizagem significativa?** [2017]. Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf>. Acesso em: 06 nov. 2017.

NUNES Terezinha, et al. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – Números e operações numéricas.** São Paulo: Cortez, 2005.

PEREIRA, Angela. **Modelagem Matemática: uma alternativa para uma aprendizagem mais significativa.** São Paulo, 2006. Monografia. (Especialização em Educação Matemática) Faculdades Oswaldo Cruz.

YouTube. **Você sabe como vivem as abelhas?** 15 ago. 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3kMk47GCkT8>. Acesso em: 15 set. 2017.

YouTube. **Dança das abelhas – Complexidade Irredutível.** 06 jul. 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=PA_8tAI0IyI>. Acesso em: 15 set. 2017.

YouTube. **Geometria das abelhas.** 25 jul. 2010. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=9rMjUZKLgy4

ANEXO A – PROPOSTA DE TRABALHO DO LIVRO DOS AUTORES BIEMBENGUT E HEIN (2003)

5. Abelhas

As abelhas têm nos dado uma lição sobre organização comunitária, comunicação e engenharia. As "operárias" vivendo menos que sessenta dias fazem sua moradia, favo, sua alimentação, mel e proporciona à "rainha" uma vida de até cinco anos, por ser esta a mais importante: pela reprodução e orientação da colmeia.

Na proposta a seguir, apresentamos o dispêndio de energia da abelha na busca do alimento, sua forma de comunicação, chamada a dança do requebrado e a dinâmica populacional de uma colméia a partir de uma hipótese: as taxas de mortalidade e natalidade são lineares. Estas três propostas permitem desenvolver regra de três, relações métricas do triângulo retângulo, coordenadas retangulares e polares e progressão aritmética. Como uma progressão é uma função, cujo domínio são os números naturais, pode ser adaptada para desenvolver função, em particular do 1º grau. A proposta pode ser adaptada para qualquer grau de escolaridade. Mais do que tudo, conhecer um pouco sobre as abelhas leva-nos cada vez mais a respeitar a natureza.

5.1. A coleta de alimentos

Uma abelha campeira voa, aproximadamente, 24 quilômetros por hora, consumindo para isso cerca de 0,5 mg de mel por quilômetro. Para colocar uma única carga de néctar, capaz de encher o estômago, uma única abelha chega a visitar de 50 a 100 flores. Ao fornecer um litro de mel uma colônia tem que voar nada menos que 40 mil quilômetros, ou seja, a distância aproximada de uma volta ao redor da Terra, isso tudo numa área que não ultrapasse 707 hectares, num raio de 1,5 km ao redor da colmeia. No vaivém dessas viagens elas coletam os ingredientes para compor o mel ou seja, o néctar, suco adocicado das flores, o pólen e a água.

Qual a quantidade de mel que uma colônia necessita consumir para buscar ingredientes para 1 litro de mel?

Quantas viagens deverão fazer da florada a colmeia para obter 1 litro de mel?

Em uma hora, deve consumir:

$$0{,}5 \text{ mg} \longrightarrow 1 \text{ km}$$
$$x \longrightarrow 24 \text{ km}$$
$$x = 12 \text{ mg}$$

Para voar a abelha consome 0,5 mg de mel por quilômetro. Se em um litro de mel a colônia precisa percorrer 40.000 km, logo:

$$0{,}5 \text{ mg} \longrightarrow 1 \text{ km}$$
$$x \longrightarrow 40.000 \text{ km}$$

Fazendo uma regra de três, obtemos que o consumo médio da colônia é de 20.000 mg ou 20 g de mel para cada órbita.

Supondo que o raio entre a colmeia e a florada seja 1,5 km, fazendo:

40.000 km ÷ 1,5 km ≅ 26.670 idas e vindas entre colmeia e florada.

> As informações apresentadas permitem muitos exemplos fazendo uso da aritmética enquanto tomamos ciência do esforço físico de uma abelha para fazer o seu alimento que também usufruímos.

5.2. A DANÇA DAS ABELHAS

Uma abelha pode lembrar-se da rota de vôo a partir da posição do sol no céu, do odor e da cor das flores. É capaz, também, de retornar à mesma fonte de alimento, no mesmo horário, do dia seguinte. O pesquisador Von Frisch foi quem descobriu a forma de comunicação das abelhas, ou seja, quando encontra uma boa fonte de néctar e pólen retorna para informar às demais a posição e o odor das flores. Ela toma como referência a posição do sol, isto é, o ângulo entre sua própria rota de vôo e uma linha horizontal da colmeia, na direção do sol.

Sua forma de comunicação é denominada a "dança do requebrado". Quando as flores estão a menos de 100 metros de distância da colmeia, a dança é circular (fig. 5.1a). Se o alimento está a mais de 100 metros, a abelha corre para frente por uma pequena distância, retornando ao ponto inicial por um semicírculo, e volta descrevendo um outro semicírculo na direção oposta, dando uma idéia de oito (fig. 5.1b). Se a dança é feita a 30° à direita da vertical (fig. 5.1c) significa que o alimento está a 30° à direita do sol (Batschelet, 1978).

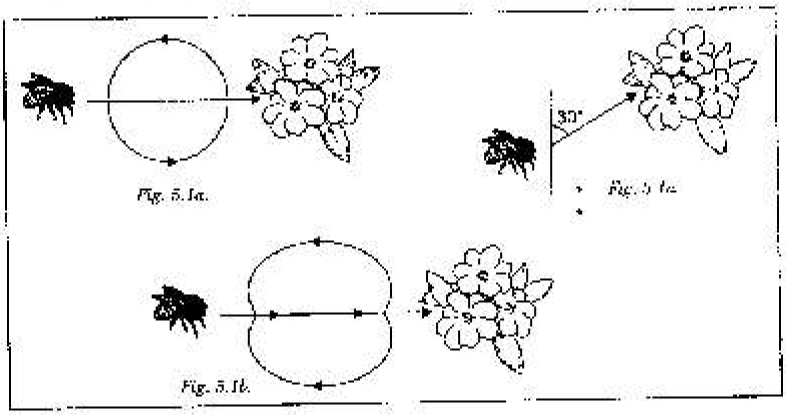


Fig. 5.1a. Fig. 5.1c. Fig. 5.1b.

Ao dançar na colmeia, outras abelhas podem aprender a posição e o odor das flores, embora não aprenda sua cor e sua forma. O número de vezes por segundo que a abelha perfaz o circuito "dançando" indica a distância da florada em relação à colmeia. Crane (1983) apresenta a duração de cada circuito da dança *versus* a distância:

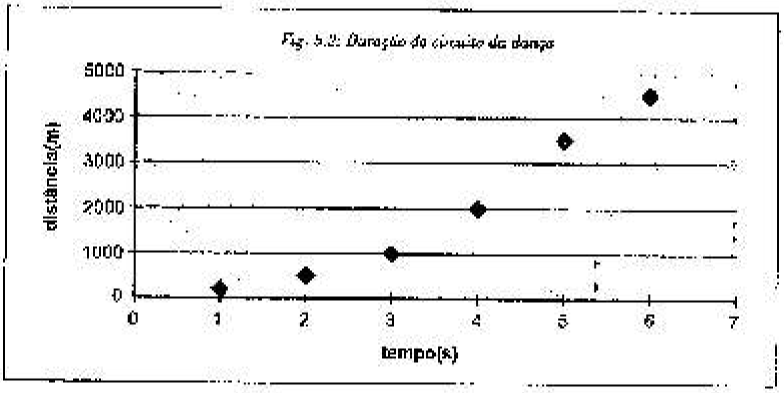
Distância (m)	200	500	1000	2000	3500	4500
Duração do circuito (s)	2,1	2,5	3,3	3,8	5,0	6,3

Como podemos localizar uma florada a partir da dança da abelha?

Para calcular a distância da florada da colmeia, devemos proceder de duas maneiras: aproximando os dados da tabela a uma função de 1º grau e depois por meio de coordenadas polares.

- **Resolução 1**: "Aproximando" dados da tabela a uma função do 1º grau.

Usando os dados de Crane, vamos, inicialmente, representá-los em um sistema cartesiano e, posteriormente, encontrar uma equação de reta que melhor se aproxima dos pontos:



Em geral, a "distância da florada depende da duração do circuito da dança", ou seja, para saber a distância verifica-se o número de vezes que a abelha faz o circuito por segundo.

Embora os dados "aparentemente" descrevem uma curva, vamos escolher dois pontos da tabela, por exemplo o 2º e o 5º, e encontrar a equação da reta que os contém. Chamando de P_2 o par ordenado (2,5; 500) e P_5 o par ordenado (5,6; 3500). Substituindo-os na expressão abaixo:

$$y = ax + b^{(1)}$$

onde y representa a distância em metros; x, o número de vezes do circuito em segundos; e a e b, os coeficientes angular e linear a serem determinados.

$$500 = a(2,5) + b$$
$$3500 = a(5,6) + b$$

Resolvendo o sistema linear encontramos os seguintes valores: $a \cong 967,74$ e $b \cong -1919,35$. Substituindo na expressão (1) temos a função empírica:

$$y = 967,74\ x - 1919,35$$

para $x > 2,1$

A expressão dada permite saber a distância aproximada da florada a partir do número de vezes que a abelha faz o circuito em sua "dança do requebrado" por unidade de tempo. Por exemplo, se a abelha efetuar 3 voltas ou circuitos/segundos:

$$y = 967,74\ (3) - 1919,35$$

logo, a florada está a cerca de 983,87 metros.

• **Resolução 2**: Usando coordenadas polares

Se fonte de alimento, por exemplo, estiver a 983,87 m da colmeia e formando um ângulo de 60° no sentido horário em relação à direção do sol nascente (leste) podemos encontrar a distância em que a florada está da colmeia em relação aos pontos cardeais.

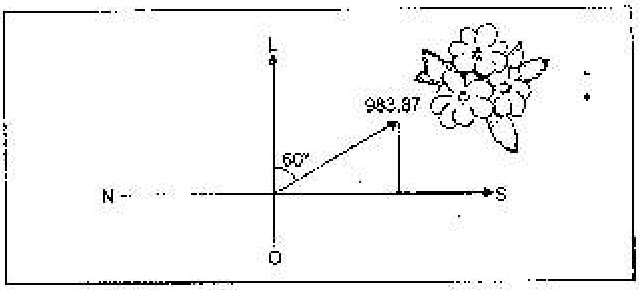


Fig. 5.3.

As abelhas não usam coordenadas retangulares para comunicar a posição da fonte de alimentos. As coordenadas polares têm um papel importante no comportamento animal, principalmente na orientação de aves e peixes.

P: (x, y) coordenadas retangulares

P: (r, θ) coordenadas polares;

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (distância polar) e $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ (ângulo polar)

Esta proposta permite apresentar função do 1º grau, equação da reta, sistemas lineares, relações métricas do triângulo retângulo e relação entre coordenada polar e retangular. Em geral, esses tópicos matemáticos são apresentados em momentos diferentes, colaborando para que o aluno não perceba a relação entre eles. Além disso, no ensino médio, geralmente, a representação gráfica de uma função cíclica somente é demonstrada por coordenadas retangulares. Algumas funções cíclicas, porém, têm gráficos "ornamentais" em coordenadas polares.

Temos que a hipotenusa do triângulo retângulo (distância da colmeia à florada) é 983,87 m. E o ângulo em relação ao eixo x (que aponta para o sul) é 30°.

Assim temos que:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \text{sen}\,30° = \frac{y}{983{,}87} \cong 491{,}93 \text{ m}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos 30° = \frac{x}{983{,}87} \cong 852{,}05 \text{ m}$$

Em coordenadas retangulares podemos dizer que a fonte de alimento está, aproximadamente, a 491,93 m para leste e 852,05 m para o sul, em relação à colmeia.

5.3. Dinâmica populacional

Uma colmeia em plena produção chega a ter entre 60 a 80 mil operárias, 400 zangões e uma rainha. O tempo de vida depende da abundância de alimento, do clima e do período de atividade.

- As operárias são estéreis e no período de vida entre 38 e 42 dias têm como tarefas: a limpeza do favo – faxineira; a alimentação das larvas e da rainha – nutris; a feitura do favo – engenheira; e a coleta e feitura do mel e da geléia real – campeira.
- Os zangões podem viver até oitenta dias. Sua função é "cruzar" com a rainha, quando há o vôo nupcial de uma rainha, que em geral, ocorre uma única vez.
- A rainha vive até cinco anos. Suas tarefas são o comando da colmeia e a reprodução. A capacidade de postura de uma rainha vai até 3 mil ovos por dia. Em caso de morte ou envelhecimento da rainha, as abelhas selecionam algumas larvas para se tornarem rainha, alimentando-as com geléia real. O período larval de uma abelha operária é 21 dias e da rainha de 15 a 16 dias. A partir do segundo ano de vida, a rainha diminui a postura de ovos, o que é percebido pelas nutrizes que passam então a preparar uma "nova" rainha. A "nova" rainha, com nove dias está pronta para o vôo nupcial em que é fecundada por alguns zangões (cerca de 8 a 10). Uma vez fecundada, retorna à colmeia, expulsando a "velha" rainha. A "velha" rainha sai e leva consigo entre 8 a 12 mil operárias: é o enxame voador. A natureza mostra que este enxame voador forma uma nova colmeia.

Em quanto tempo o "enxame voador" vai formar uma "nova" colmeia?

Para responder à questão, vamos fixar alguns valores relativos ao processo de nascimento e morte das abelhas, como, por exemplo:

* número de abelhas numa família nova: 10.000 abelhas
* postura média de uma rainha: 2.000 ovos/dia
* longevidade das operárias: 40 dias
* período entre postura e nascimento: 21 dias

Sabemos que uma colmeia necessita de faxineira para limpar os favos, nutriz para alimentar larvas e rainha, engenheira para fazer o favo e campestre para buscar o alimento. E mais, as abelhas mais velhas fazem o trabalho das mais novas. Isto é, uma campestre pode fazer o trabalho das demais. Como não dispomos de informações quanto à idade dessas operárias do enxame voador e, considerando que as novas operárias só passarão a nascer a partir do 21º dia (período larval é 21 dias), vamos procurar responder à questão por meio da seguinte hipótese:

"As abelhas têm idades eqüidistribuídas"

Como essas 10.000 abelhas podem ter idades entre 0 e 40 dias, a taxa média diária de mortalidade é: $\frac{10000}{40} = 250$

Sendo que o período da postura ao nascimento é de 21 dias, teremos nos primeiros 20 dias uma diminuição da população.

Chamando de P(0) o momento inicial da "nova família", ou momento em que se alojam, obtemos:

$$
\begin{array}{llll}
P(0) & = 10.000 & & \\
P(1) & = 10.000 - 250 & = 9.750 & \text{(população no dia seguinte)} \\
P(2) & = 10.000 - 2(250) & = 9.500 & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
P(20) & = 10.000 - 20(250) & = 5.000 &
\end{array}
$$

Este conjunto disposto numa certa ordem: 10.000, 9.750, 9.500, ... 5250, 5000 é chamado de *seqüência* ou *sucessão*.

No exemplo, podemos chegar a uma fórmula geral, ou seja, para um dia t qualquer, temos:

$$P(t) = 10.000 - t(250)^{(1)} \quad \text{ou}$$
$$P(t) = -250t + 10.000, \quad \text{com } 0 \leq t < 21$$

> Você pode inserir o conceito de *seqüência* ou *progressão*. Como uma seqüência é uma função f(n) cujo domínio são os números naturais e se considerar o tempo contínuo, o exemplo pode servir para apresentar função real, em particular, *função polinomial do 1º grau*.

Analisando a seqüência dada, temos que a diferença entre um termo e seu sucessor é sempre constante. Este é um exemplo de uma *seqüência aritmética* ou *progressão aritmética*.

Chamando a população inicial (10.000) de a_1, a taxa de mortalidade (-250) de r e o tempo t de $(n-1)$ e substituindo na expressão (1), obtemos:

$a_n = a_1 + (n-1) \times r$ termo geral de uma progressão aritmética.

Dando continuidade, temos que a partir do 21º dia passam a nascer 2.000 operárias. Assim:

$P(20) = 5.000$ (população no 20º dia)
$P(21) = (5.000 - 250 + 2.000) = 5.000 + (1)1.750 = 6.750$
(população anterior menos as que morrem mais as que nascem)
$P(22) = (6.750 - 250 + 2.000) = 5.000 + (2)\,1.750 = 8.500$
$P(23) = (8.500 - 250 + 2.000) = 5.000 + (3)\,1.750$
....
$P(t) = 5.000 + (t - 20)\,1.750$ ou
$P(t) = 1.750t - 30.000$, para $21 \leq t < 41$

Considerando para efeito didático que no 40º dia desapareceram as operárias do enxame voador inicial e as operárias que nasceram no 21º dia estão em sua "plena juventude" e, portanto, nos próximos 20 dias não haverá mortes, logo:

$P(40) = 40.000$
$P(41) = 40.000 + 1\,(2.000)$
$P(42) = 40.000 + 2\,(2.000)$
$P(43) = 40.000 + 3\,(2.000)$
....
$P(t) = 40.000 + (t - 40)\,2.000$ ou
$P(t) = 2.000\,t - 40.000$, para $41 \leq t \leq 60$

A partir do 61º dia passam a morrer as operárias que nasceram a partir do 21º dia enquanto continuam nascendo 2.000. Isto é:

$P(60) = 80.000$
$P(61) = 80.000 - 2.000 + 2.000 = 80.000$
$P(62) = 80.000 - 2.000 + 2.000 = 80.000$ ou seja, para $t \geq 60$
$P(t) \ = 80.000$

Neste exemplo das abelhas, a função ou seqüência está subdividida em quatro momentos: primeiros 20 dias, entre 21º e o 40º dia, entre o 41º e o 60º dia e a partir do 60º dia. Vamos analisar:

- Nos primeiros 20 dias a população diminui na razão de 250 por dia. Isto é, a taxa média de mortalidade é 250. Por se tratar de mortalidade, a taxa é negativa e, portanto, a função ou seqüência é decrescente.

- Entre o 21º dia e o 41º dia continuam morrendo abelhas na mesma taxa de mortalidade (250 abelhas/dia), porém nascem 2000 abelhas/dia, resultando em uma taxa de sobrevivência de 1750 abelhas/dia, portanto, positiva. Nestes termos, a população começa a crescer, isto leva a dizer que a função ou a seqüência é crescente.

- No período entre o 41º e o 60º dia não há mortes, só nascimentos. Assim, a população aumenta, nesse período, mais rapidamente que no período anterior, na razão de 2.000 abelhas/dia. Disto resulta na função ou seqüência, também, crescente.

- A partir do 61º dia passam a morrer 2.000 abelhas/dia, porém nascem outras 2.000. Como a taxa de mortalidade é igual à taxa de natalidade, a população permanece constante. Dessa forma, podemos dizer que a função ou seqüência é constante.

As seqüências podem ser representadas, graficamente, em um sistema cartesiano. A representação gráfica facilita a compreensão e a visualização da situação analisada. Representando o exemplo das abelhas:

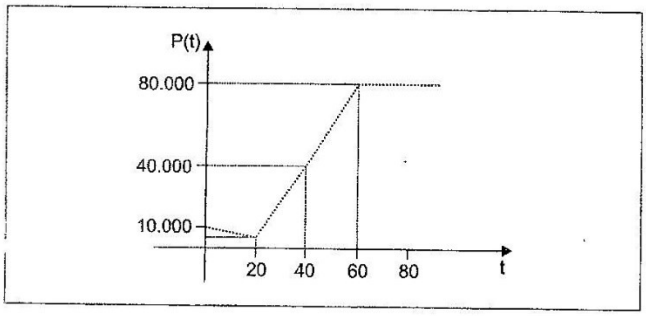


Fig. 5.4.

Vamos representar, geometricamente, a variação da população de abelhas do enxame voador nos primeiros 40 dias. Podemos verificar que as taxas de mortalidade, sobrevivência, natalidade: -250; 1750; 2000; 0, respectivamente, são representadas geometricamente, como a razão entre os catetos do triângulo retângulo formado.

$$250 = \frac{10000}{40} = \frac{5000}{20} = \frac{10000-5000}{|0-20|} = \frac{P_{(0)} - P_{(20)}}{t_{(0)} - t_{(20)}} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

Para uma melhor compreensão ligando os pontos (0; 10.000); (20; 5000) e (40, 0) – (apesar de cometer um "abuso" matemático, no que diz respeito ao exemplo em questão) – resultam triângulos retângulos semelhantes.

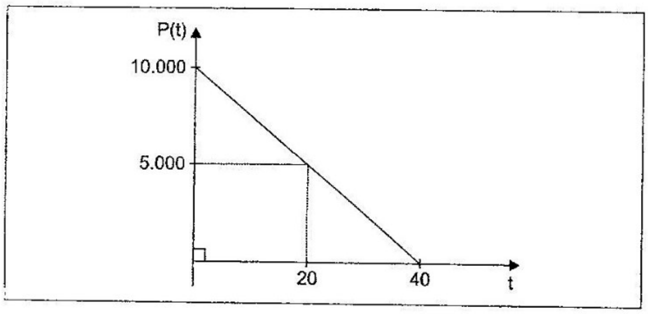


Fig. 5.5.

Sendo triângulos semelhantes, os ângulos correspondentes têm a mesma medida. Isso quer dizer que, em cada ponto, a taxa ou a razão é a mesma (dita constante). No exemplo, isto significa que a taxa de mortalidade é a mesma em cada dia.

Além disso, a razão ou taxa dada pela variação entre uma medida e outra (no exemplo entre população e tempo), geometricamente, é dada pela razão entre o cateto oposto pelo cateto adjacente ao ângulo, denominada tangente, isto é:

$$\text{taxa} \rightarrow \text{razão} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}} = \text{tangente do } \alpha,$$

tangente ao ângulo ou, também, coeficiente angular.

Analisando as demais sentenças:

- A taxa de sobrevivência 1750, geometricamente, é a tangente do ângulo:

$$1750 = \frac{P_{21} - P_{41}}{t_{21} - t_{41}} = \frac{DP}{Dt} = tg\alpha_2$$

- A taxa de natalidade 2.000, geometricamente, é a tangente do ângulo:

$$2.000 = \frac{P_{41} - P_{60}}{t_{41} - t_{60}} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = tg\alpha_3$$

- A taxa de crescimento populacional igual a 0:

$$0 = \frac{P_{60} - P_{80}}{t_{60} - t_{80}} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = tg\alpha_4$$

> O exemplo dado permite mostrar que a seqüência não é um assunto divorciado dos outros tópicos matemáticos. As seqüências são funções cujo domínio são os números naturais. Na sua representação gráfica, fazemos uso de razão, proporção, geometria plana, geometria analítica, trigonometria, dentre outros. Precisamos estar atentos para promover um intercâmbio entre os assuntos, entrelaçando-os sempre que for necessário e conveniente. Um olhar especial para isso é importante!

A função a seguir, com quatro sentenças, pode ser considerada um modelo matemático linear da dinâmica populacional da colmeia.

$$P(t) = \begin{cases} -250t + 10.000, & 0 \leq t < 21 \\ 1750t - 30.000, & 21 \leq t < 41 \\ 2.000t - 40.000, & 41 \leq t \leq 60 \\ 80.000, & \text{para } t \geq 60 \end{cases}$$

Nessas condições, podemos responder à questão inicial da proposta: que uma nova colmeia chega em "plena produção" em 60 dias ou dois meses. A validade desta resposta deixamos ao leitor. Considerando que o processo de nascimento e morte, em geral, não é linear, propomos ao leitor que encontre outro modelo levando em consideração a seguinte hipótese: "*a taxa de crescimento populacional das abelhas é proporcional à quantidade que se tem de abelhas a cada instante*".

Esta segunda hipótese permite apresentar progressão geométrica ou função exponencial e também introduzir a soma de uma progressão infinita. Sugestão: considere a taxa de crescimento ou de sobrevivência 0,975 ou 97,5%, uma vez que a taxa diária de mortalidade 2,5% ou $0{,}025 = \left(\frac{250}{10000}\right)$.

Para maiores detalhes ver Bassanezi (1990).

O "mundo" das abelhas é rico em situações que permitem explorar conceitos matemáticos. Por exemplo, o favo, feito de cera, é uma obra espetacular! A cera é um produto derivado da secreção de uma glândula das abelhas entre 18 e 24 dias de idade. Para a produção dessa cera ela precisa de uma temperatura não inferior a 36°. É com essa cera que faz sua principal "obra arquitetônica", o favo, depósito de mel e berço para a prole.

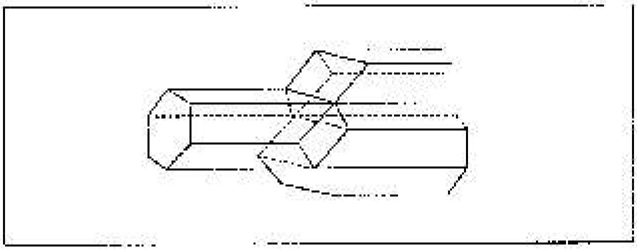


Fig. 5.6.

O favo é composto de alvéolos de base hexagonal. Com apenas 0,3 mm de espessura o alvéolo pode suportar um esforço de até 30 vezes o correspondente ao seu peso. Um alvéolo, que constitui os favos, é formado no total por 3 losangos e 6 hexágonos, possuindo a forma de um prisma hexagonal regular, aberto em uma extremidade e formando um ápice triédrico na outra. Os alvéolos são formados a partir da lei natural do mínimo esforço para obter o máximo rendimento. Isto é, a forma apresenta o máximo volume para um mínimo de cera empregada.

Sugestão: explorar a geometria do favo! Conhecer o seu mosaico, discutir com os alunos sua forma de um prisma hexagonal e as razões de não ter as formas quadrada, triangular ou cilíndrica, entender por que o fundo, no encontro de três favos, forma um ângulo triédrico, saber qual a área, ou seja, a quantidade de cera gasta para o favo e a capacidade de mel. Certamente propiciarão discussões interessantes e meios de apresentar muitos conceitos com um maior significado. Uma visita a um apiário também seria de grande valia! Ao leitor interessado no modelo do favo sobre "máximo volume *versus* superfície mínima" ver Batschelet (1978).

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO NA 6ª SÉRIE

1. Você é um aluno que gosta de matemática?
( ) sim ( ) não

2. Das matérias que você mais gosta, matemática está em que lugar?
( ) 1º ( ) 2º ( ) 3º ( ) outro. Qual? _____

3. Você, como aluno, gostaria de saber mais sobre as aplicações matemáticas?
( ) sim ( ) não
OBS: ____

4. Você acha que aprender sobre as aplicações da matemática no dia-a-dia aumentaria seu gosto pela matéria?
( ) sim ( ) não
OBS: ____

5. Você acha que aprender sobre as aplicações da matemática no dia-a-dia facilitaria seu aprendizado?
( ) sim ( ) não
OBS: ____

6. Sobre a aula aplicada pela professora, o que você achou?
____

7. Com essa aula, você conseguiu perceber a utilidade da matemática em outra área de conhecimento? ( ) sim ( ) não

8. Gostaria de ter mais aulas usando essa metodologia?
( ) sim ( ) não

9. Além da aplicação na Biologia, a aula te ensinou mais alguma coisa que você pode aplicar na sua vida no dia-a-dia como pessoa? Diga aqui, fazendo suas observações.

APÊNDICE B - ATIVIDADE 3: MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O homem moderno reúne dados de diferentes quantidades em gráficos. Como exemplo podemos citar:

- o valor da compra do dólar em função do tempo;
- a pressão de um volume de ar em função da temperatura;
- a renda média de uma pessoa em função dos seus anos de estudos;
- a distância de uma florada em que uma abelha se encontra em função do tempo de sua "dança".

Os pontos observados em tais gráficos tendem a estar distribuídos de forma irregular, devido a complicada natureza dos fenômenos observados e aos erros cometidos nas observações. Grafados os pontos podemos supor que os dados estão relacionados <u>linearmente</u>. Para achar a reta que melhor se ajusta a esses dados aplicamos o <u>método dos mínimos quadrados</u>.

Tal método nos diz que os coeficientes angular e linear da reta $y = ax + b$ procurada são, respectivamente:

$$a = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum {x_i}^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}} \qquad \text{e} \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

onde $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são os valores médios de x e y.

Agora, de posse dessas informações encontrar a reta que melhor se ajusta aos dados da tabela da atividade 2.

EXERCÍCIOS PARA APLICAÇÃO DO MÉTODO

1 – A tabela seguinte fornece a taxa bruta de mortalidade de homens devido a câncer dos pulmões em 1950, e o consumo per capita de cigarros, em 1930, em vários países.

Países	Consumo de cigarros (per capita)	Mortes por câncer do pulmão (por milhão de homens)
Noruega	250	95
Suécia	300	120
Dinamarca	350	165
Austrália	470	170
Total	**1370**	**550**

Fonte: Relatório do Advisory Committee to the Surgeon General of the Public Heath Service, U.S. Dept. of Health, Education and Welfare, Washington. D.C Public Health Service Publication Nº 1103, p.176 (apud Goldstein, L. J., Lay, D.C., Schneider, D.I.)

a) Use o método dos mínimos quadrados para obter a reta que melhor ajusta estes dados;
b) Em 1930, o consumo per capita na Finlândia foi de 1100. Use a reta determinada na parte (a) para calcular a taxa de mortalidade devido ao câncer dos pulmões, na Finlândia, em 1930.

2 – Um ecólogo deseja saber se o nicho ecológico de uma certa espécie de inseto aquático é limitado pela temperatura. Ele coletou os seguintes dados, relacionando a temperatura média diária em diferentes lugares de um córrego com a altitude de cada lugar (acima do nível do mar).

Altitude (km)	Temperatura média (graus centígrados)
2.7	11.2
2.8	10.0
3.0	8.5
3.5	7.5

a) Determine a reta que fornece os mínimos quadrados para estes dados;
b) Use a função linear para calcular a temperatura média diária deste córrego a uma altitude de 3.2km.

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO APLICADO NO ENSINO MÉDIO

1 – Você gosta de estudar Matemática? ( ) sim ( ) não

2 – Você acha que a forma que a Matemática é ensinada na escola faz com que o aluno tenha interesse pela disciplina? ( ) sim ( ) não
Por quê?

3 – No seu ponto de vista como a Matemática deveria ser ensinada, de tal forma a despertar o interesse e facilitar o aprendizado do aluno?

4 – De 0 a 10, o quanto você acha que conseguiu aprender Matemática nestes anos que frequentou a escola?

5 – De 0 a 10, o quanto você acha que aprendeu Matemática nestes dias de projeto?

6 – Em relação ao projeto desenvolvido pela professora Angela, o que você achou?

7 – Você conseguiu perceber alguma diferença entre a forma que a Matemática foi colocada e ensinada no projeto da forma que é ensinada na sala de aula?( ) sim ( )não

8 – Se a resposta acima foi sim, quais diferenças você pode notar?

9 – Você gostaria de ter mais aulas dessa forma? Por quê?

10 – Você conseguiu identificar a Matemática relacionada a outras áreas do conhecimento?

APÊNDICE D – SOLICITAÇÃO À ESCOLA PROFª CINÉLZIA LOURENCI MARONI

PIACATU, 25 DE AGOSTO DE 2017.

Aos senhores gestores e diretor da Escola Estadual Profª Cinélzia Lourenci Maroni

Nos últimos anos, muito tem se falado sobre o quê fazer para que o aluno aprenda, de modo que ele entenda a relação existente entre o saber da escola e sua vida cotidiana. É desejável que o aluno desperte o gosto pela Matemática e a veja como uma ferramenta que pode ajudá-lo em sua vida diária.

Muitas idéias têm surgido na esperança de que uma solução seja encontrada. Na área de Educação Matemática, várias estratégias têm sido estudadas, aplicadas e obtidos bons resultados por parte de quem os executa. Uma delas é a modelagem matemática, que estuda situações-problema usando a Matemática como linguagem para sua compreensão, simplificação e resolução para uma possível previsão ou modificação do objeto estudado.

Com o intuito de desenvolver minha pesquisa para dissertação de mestrado é que venho solicitar a esta instituição de ensino, ao qual fiz parte durante todo meu período de educação básica, a parceria para aplicação do método no 3º ou 2º ano do ensino médio.

Objeto de estudo: De que maneira a Modelagem Matemática facilita o processo ensino-aprendizagem nos cursos de Ensino Fundamental II e Médio?

Objetivos:

- Chamar a atenção dos professores para uma mudança de postura em relação ao ensino de Matemática;
- Viabilizar o ensino de Matemática numa proposta de aprendizagem significativa através da utilização da modelagem matemática;
- Conscientizar os professores de que o uso de técnicas de modelagem para aplicações matemáticas, pode desenvolver, no educando, capacidades e atitudes criativas na resolução de problemas;
- Contribuir para que o aluno utilize a Matemática como uma ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas.

Att.,

Angela Pereira Baraldi

Concordamos com a solicitação.

Nome: Edna Menani
CPF: 152.885.488-89
Cargo: Vice diretora do PEF

Nome: Sérgio Rogério de Souza
CPF: 281.750.708-89
Cargo: Coordenador

Nome: Marcelo Bentagna
CPF: 207 279 118-00
Cargo: Diretor

Nome: Juliana Almeida Santos
CPF: 252850038-65
Cargo: Vice-diretor

APÊNDICE E – CERTIFICADO DE PARTICIPAÇÃO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

CERTIFICADO

CERTIFICAMOS QUE

LAIRA RODRIGUES MARTINI

PARTICIPOU DO PROJETO "O MUNDO FANTÁSTICO DAS ABELHAS" (MODELAGEM MATEMÁTICA)

EM OUTUBRO DE 2017.

Piacatu, 28 de outubro de 2017.

PROFª ANGELA PEREIRA BARALDI
COORDENADORA DO PROJETO

PROFª EDNA MENANI
COORDENADORA DO PROJETO ESCOLA DA FAMÍLIA