

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

JUNIANO VERGNA VIEIRA

**OS QUADRILÁTEROS DE SACCHERI E O
SURGIMENTO DA GEOMETRIA
HIPERBÓLICA**

VITÓRIA
2018

JUNIANO VERGNA VIEIRA

**OS QUADRILÁTEROS DE SACCHERI E O
SURGIMENTO DA GEOMETRIA
HIPERBÓLICA**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Sociedade Brasileira de Matemática (PROFMAT) em parceria com o Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob orientação do Professor Doutor Florêncio Ferreira Guimarães Filho.

VITÓRIA
2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

V658q Vieira, Juniano Vergna, 1987-
Os quadriláteros de Saccheri e o surgimento da geometria
hiperbólica / Juniano Vergna Vieira. – 2018.
85 f. : il.

Orientador: Florêncio Ferreira Guimarães Filho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de
Ciências Exatas.

1. Euclides. 2. Saccheri, Girolamo, 1667-1733. 3. Geometria.
4. Geometria hiperbólica. 5. Quadrilátero de Saccheri. I.
Guimarães Filho, Florêncio Ferreira. II. Universidade Federal do
Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

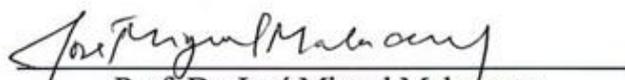
"Os Quadriláteros de Saccheri e o Surgimento da Geometria
Hiperbólica"

Juniano Vergna Vieira

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 22/05/2018 por:


Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho
Orientador - UFES


Prof. Dr. José Miguel Malacarne
Membro Interno - UFES


Prof. Dr. Mehran Sabeti
Membro Externo - UFV

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Therezinha e Justiniano, pela dedicação e amor que tiveram para me educar.

Ao meu irmão Dorian pelo carinho e apoio.

Ao meu grande amor, Nayara, minha companheira e parceira, pelo enorme apoio a realização deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso pela companhia nestes anos de estudo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, pelos conhecimentos transmitidos e pela enorme dedicação ao ensinar.

Resumo

Neste trabalho começa-se por fazer uma abordagem sobre a importância histórica do Quinto Postulado da obra “Os Elementos” de Euclides, que por não ser tão evidente, foi alvo de várias tentativas de demonstração. Posteriormente, apresentamos alguns aspectos da Geometria Neutra, sendo assim chamada porque não é assumido o Postulado das Paralelas, que como veremos, é uma afirmação equivalente ao Quinto Postulado. De todos aqueles que se esforçaram para demonstrar o Quinto Postulado, destacamos no capítulo 4 os resultados obtidos pelo padre jesuíta Gerolamo Saccheri. Em seus resultados, a figura principal utilizada é um quadrilátero $ABCD$, com $AB = CD$ e ângulos retos em A e D (quadrilátero de Saccheri). Em sua tentativa de demonstração Saccheri apresenta várias proposições interessantes, as quais contribuíram de forma significativa para o surgimento da Geometria Hiperbólica. Nos capítulos seguintes são apresentadas algumas afirmações equivalentes ao Quinto Postulado, além de alguns axiomas e teoremas necessários para uma introdução ao estudo da Geometria Hiperbólica.

Palavras chave: Euclides.Quinto Postulado.Saccheri.Quadrilátero.Geometria Hiperbólica.

Abstract

In this work we begin by making an approach on the historical importance of the Euclid's Fifth Postulate, which for not being so obvious, has been the subject of several attempts at demonstration. Subsequently, we present some aspects of Neutral Geometry, so it is called because the Parallel Postulate is not assumed, which, as we shall see, is a statement equivalent to the Fifth Postulate. Of all those who strove to demonstrate the Fifth Postulate, we highlight in chapter 4 the results obtained by the jesuit priest Gerolamo Saccheri. In their results, the main figure used by is a quadrilateral $ABCD$, with $AB = CD$ and right angles at A and D (Saccheri quadrilateral). In his attempt to demonstrate Saccheri presents several interesting propositions, which contributed significantly to the emergence of Hyperbolic Geometry. In the following chapters are presented some affirmations equivalent to the Fifth Postulate, besides some axioms and theorems necessary for an introduction to the study of Hyperbolic Geometry.

Key-words: Euclid.Fifth Postulate.Saccheri.Quadrilateral.Hyperbolic Geometry.

Lista de Figuras

2.1	Quinto Postulado	15
2.2	Axioma de Playfair	16
2.3	Quadrilátero de Saccheri	16
2.4	Quadrilátero de Lambert	17
3.1	Teorema de Pasch	22
3.2	Ângulo $A\hat{O}B$	24
3.3	Interior do ângulo $A\hat{O}B$	25
3.4	Interior do segmento AB e o ângulo $A\hat{O}B$	25
3.5	Ângulo $A\hat{O}B$ e a semirreta S_{OP} intersectando o interior do segmento AB	26
3.6	$A\hat{O}P$ e $A\hat{O}B$ com B e P pertencendo ao mesmo semiplano	27
3.7	Semirretas de mesma origem dividindo um semiplano	28
3.8	Ângulos opostos pelo vértice	30
3.9	Triângulo ABC	31
3.10	Congruência de Triângulos	31
3.11	Caso LAL	32
3.12	Caso ALA	33
3.13	Triângulo isósceles ABC com $AB = AC$	33
3.14	AP é mediana, bissetriz e altura do triângulo isósceles ABC	34
3.15	Caso LLL	35
3.16	Ângulo externo $B\hat{C}D$ do triângulo ABC	36
3.17	Teorema do Ângulo Externo	37
3.18	Reta que passa por P e perpendicular a r	37
3.19	Existência de uma reta s paralela a r e que passa por P ($P \notin r$)	38
3.20	Triângulo ABC com $AC > AB$	39
3.21	Segmento CD no triângulo ABC com D entre A e B	40
3.22	Congruência dos triângulos FDG e CAB e a desigualdade $BC > EF$	41
3.23	ABC possui pelo menos dois ângulos internos agudos	41

3.24	Divisão de um triângulo ABC em dois triângulos retângulos	42
3.25	Desigualdade Triangular	42
4.1	Quadrilátero de Saccheri $ABCD$ com os ângulos do topo \hat{B} e \hat{C}	44
4.2	Quadriláteros $ABCD$ e $EFGH$	46
4.3	Diagonais AC e BD do quadrilátero convexo $ABCD$	47
4.4	Quadrilátero $ABCD$ com ângulos retos em A e D	48
4.5	Quadrilátero de Saccheri $ABCD$	48
4.6	Diagonais AC e BD do quadrilátero de Saccheri $ABCD$	49
4.7	MN é perpendicular a base e ao topo de $ABCD$	49
4.8	Quadriláteros $ABCD$ com ângulos retos em A e D	50
4.9	Quadrilátero de Lambert com ângulos retos em A , B e D	51
4.10	Quadrilátero de Saccheri dividido em dois quadriláteros de Lambert	52
4.11	Congruência dos quadriláteros de Lambert $ABCD$ e $A'B'C'D'$	52
4.12	Caso (I) dos Teoremas 4.11 e 4.12	55
4.13	Caso (II) dos Teoremas 4.11 e 4.12	55
4.14	Caso (III) dos Teoremas 4.11 e 4.12	56
4.15	Quadrilátero de Lambert $NMGH$ com EF perpendicular a HN	56
4.16	Os ângulos do topo de dois quadriláteros de Saccheri $ABDC$ e $A'B'C'D'$	57
4.17	A soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo ABC	59
4.18	A soma dos ângulos internos de um triângulo ABC	60
4.19	Aditividade dos defeitos num triângulo ABC	61
4.20	Aditividade dos defeitos num quadrilátero $ABCD$	61
4.21	O topo de um quadrilátero de Saccheri é maior ou igual a base	62
4.22	ABC retângulo em C com HI perpendicular a AC e $AH = HB$	64
4.23	Axioma de Aristóteles	65
5.1	Duas retas distintas r e s intersectadas por uma transversal t	67
5.2	Ângulos alternos internos congruentes	67
5.3	Triângulo ABC com $D \in int(BC)$ e AD perpendicular a BC	68
5.4	Construção do retângulo $ADCE$ a partir do triângulo ADC	69
5.5	Retângulo $ADCE$ e um triângulo PQR	70
5.6	Diagonal AC de um quadrilátero convexo $ABCD$	70
5.7	Duas retas paralelas r e s intersectadas por uma transversal t	71
5.8	Reta r paralela a AC e que passa pelo vértice B de ABC	72
5.9	A existência de retângulos e o Postulado das Paralelas de Hilbert	73
5.10	O Quinto Postulado decorre do Postulado das Paralelas de Hilbert	74
5.11	O Postulado das Paralelas de Hilbert decorre do Quinto Postulado	75

6.1	Pseudo-esfera	77
7.1	Axioma Hiperbólico	79
7.2	Teorema Universal da Geometria Hiperbólica	80
7.3	Triângulos ABC e $A'B'C'$ congruentes em Geometria Hiperbólica . .	81
8.1	Triângulos em três tipos distintos de superfície	83

Sumário

1	Introdução	13
2	Euclides e o Quinto Postulado	14
3	Geometria Neutra	18
3.1	Axiomas de incidência	18
3.2	Axiomas de ordem	19
3.3	Axiomas sobre medição de segmentos	23
3.4	Axiomas sobre medição de ângulos	24
3.5	Congruência	30
3.6	Teorema do Ângulo Externo e suas consequências	35
4	As três hipóteses de Saccheri	44
4.1	Quadriláteros	45
4.2	Os quadriláteros de Saccheri	47
4.3	O Teorema de Saccheri-Legendre	58
5	Retângulos e o Postulado de Hilbert	66
5.1	Ângulos alternos internos	66
5.2	A existência de retângulos	68
5.3	Postulado das Paralelas de Hilbert	71
6	A descoberta da Geometria Hiperbólica	76
7	Um pouco de Geometria Hiperbólica	79
7.1	Geometria Hiperbólica	79
8	Considerações Finais	83

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho é um texto introdutório de Geometria Hiperbólica, mas com uma abordagem não tão comum, pois foi dada aqui uma atenção especial aos quadriláteros de Saccheri. Gerolamo Saccheri (1667-1733) foi um padre jesuíta, professor de teologia e filosofia, que dedicou a maior parte dos seus trabalhos à tentativa de demonstração do Quinto Postulado. Para tal, Saccheri adotou como premissas as vinte e sete primeiras proposições dos Elementos de Euclides, nas quais são utilizados apenas os quatro primeiros postulados. De uma forma análoga aos trabalhos de Saccheri, mas com uma linguagem mais moderna, adotaremos como premissas os axiomas da Geometria Neutra, ou seja, uma geometria onde não se assume o Axioma das Paralelas, que é equivalente ao Quinto Postulado.

Uma figura muito utilizada por Saccheri é um quadrilátero $ABCD$, denominado quadrilátero de Saccheri, onde \hat{A} e \hat{D} são ângulos retos e $AB = DC$. Os ângulos \hat{B} e \hat{C} serão chamados de ângulos do topo do quadrilátero $ABCD$, sendo trivial a demonstração de que ambos são congruentes.

A partir da hipótese de que os ângulos do topo são ambos retos é possível demonstrar o Quinto Postulado. Saccheri tentou então provar que as hipóteses de ambos serem agudos ou obtusos também levariam a contradições. Assim como Saccheri, veremos que a hipótese de ambos os ângulos serem obtusos leva a uma contradição. O que Saccheri tentou e não conseguiu foi chegar a uma contradição a partir da hipótese de ambos os ângulos do topo serem agudos. De fato, tal hipótese é compatível com os resultados da geometria neutra e sinaliza o surgimento de uma nova geometria.

Capítulo 2

Euclides e o Quinto Postulado

Euclides (325-265 a.C) foi o primeiro a apresentar de forma sistemática, a Matemática como ciência dedutiva. Ele foi responsável pela compilação de praticamente toda a Matemática desenvolvida até sua época em uma obra de treze volumes chamada de “Os Elementos”. A obra de Euclides foi organizada seguindo critérios de rigor lógico dedutivo, mas também de experiência intuitiva. Nesse sistema toda afirmação deve ser deduzida logicamente de outras afirmações mais simples, e assim sucessivamente. Obviamente que, de início devem existir afirmações não demonstradas, que foram chamadas de postulados. Nos elementos, Euclides estabelece um sistema axiomático com cinco noções comuns e cinco postulados:

Noções comuns:

- (I) Coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais.
- (II) Se iguais são adicionados a iguais, então, os totais também são iguais.
- (III) Se iguais são subtraídos a iguais, então, as diferenças também são iguais.
- (IV) Coisas que coincidem umas as outras são iguais.
- (V) O todo é maior que qualquer uma de suas partes.

Postulados:

- (I) Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.
- (II) Pode-se continuar, de uma maneira única, qualquer reta finita continuamente em linha reta.
- (III) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

(IV) Todos os ângulos retos são iguais.

(V) É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, formar ângulos internos, no mesmo lado cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

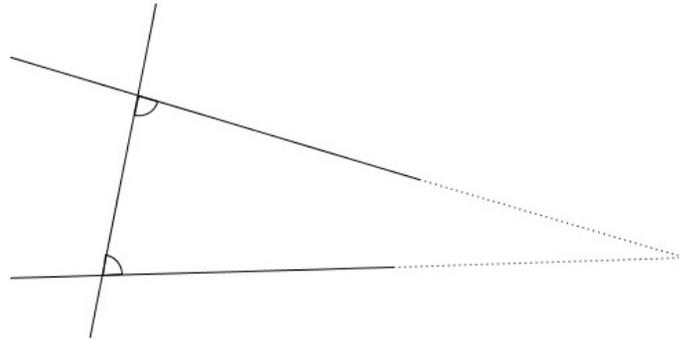


Figura 2.1: Quinto Postulado

Algumas alterações foram feitas nos enunciados dos postulados originais, de maneira a se encaixarem na forma como Euclides realmente os utilizou nos Elementos. Obviamente, quando comparado com os outros, o Quinto Postulado é pouco evidente. O próprio Euclides retardou o quanto possível o uso do mesmo. Tal postulado foi alvo de várias tentativas de demonstração ao longo dos séculos, apesar da Geometria Euclidiana ser considerada inquestionável em sua totalidade. Outra observação importante é que o Quinto Postulado só é utilizado a partir da vigésima nona proposição, sendo as outras válidas em qualquer geometria.

Existe um grande número de afirmações equivalentes ao Quinto Postulado. A mais famosa é atribuída a John Playfair (1748 – 1819) e que é enunciada da seguinte maneira:

(V') Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

Pode ser deduzido dos quatro primeiros postulados que existe uma reta paralela à reta r passando por P . A parte principal da afirmação acima refere-se ao fato de que passa por P uma única paralela a reta r . Devido a esse substituto o Quinto Postulado também é conhecido como Postulado das Paralelas. Veremos mais a frente outras afirmações que também são substitutos do Quinto Postulado.

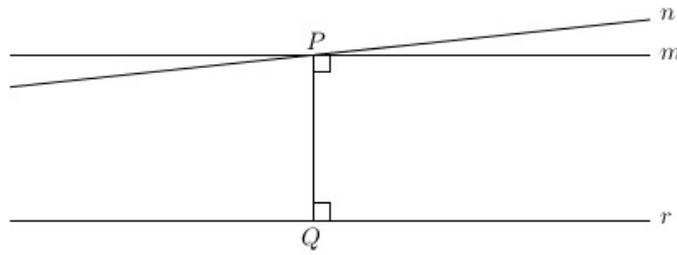


Figura 2.2: Axioma de Playfair

Ao longo de mais de dois mil anos se procurou demonstrar o Quinto Postulado. Obviamente uma demonstração rigorosa do Quinto Postulado deve ser estruturada utilizando-se os quatro postulados anteriores, ou seja, no âmbito da Geometria Neutra. Dentre os matemáticos que se destacaram ao tentar demonstrar o Quinto Postulado, podemos citar: Ptolomeu (Século II), Proclus (Século V), Nasiradim (1201-1274), John Wallis (1616-1703), Gerolamo Saccheri (1667-1733), John H. Lambert (1728-1777), Adrien M. Legendre (1752-1833), Louis Bertrand (1731-1812) e Carl F. Gauss (1777-1855).

De todos os esforços o mais bem orientado é devido ao padre jesuíta Gerolamo Saccheri. Ele utilizou um método simples e particular de raciocínio, tomando como premissas os quatro primeiros postulados e as vinte e sete primeiras proposições apresentadas nos Elementos. Saccheri considerou um quadrilátero $ABCD$, onde os ângulos \hat{A} e \hat{D} são retos e o lado AB é igual ao lado CD . Inicialmente Saccheri provou que os ângulos \hat{B} e \hat{C} são iguais. Se os ângulos \hat{B} e \hat{C} são retos então é possível concluir o Quinto Postulado. Saccheri conseguiu provar que a hipótese de

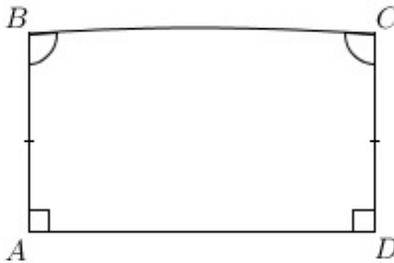


Figura 2.3: Quadrilátero de Saccheri

\hat{B} e \hat{C} serem obtusos levam facilmente a uma contradição, porém não conseguiu provar de forma rigorosa que a hipótese de \hat{B} e \hat{C} serem ambos agudos levaria também a uma contradição. Porém, nas inúmeras tentativas de se chegar a uma contradição, Saccheri obteve várias proposições interessantes que decorrem quando negamos o Quinto Postulado, algumas das quais viriam a se tornar teoremas da Geometria não Euclidiana.

Existe uma grande semelhança entre o trabalho de Saccheri e o de John H. Lambert, que retomou a hipótese do ângulo agudo de Saccheri, tentando de forma mais cautelosa, obter uma contradição. A figura fundamental de Lambert é um quadrilátero $ABCD$ com três ângulos retos, sendo que o mesmo considerou três hipóteses a respeito do quarto ângulo: o quarto ângulo é agudo ou reto ou obtuso. Como a hipótese do quarto ângulo \hat{C} ser reto é equivalente ao quinto postulado, ele

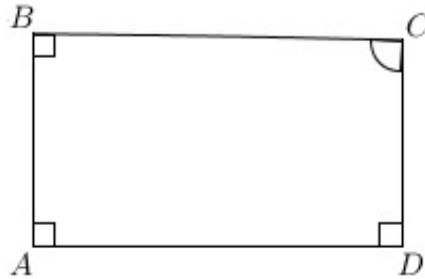


Figura 2.4: Quadrilátero de Lambert

estudou as consequências de se admitir as outras duas, chegando a dedução de novas proposições, assim como Saccheri, porém avançando muito mais.

Capítulo 3

Geometria Neutra

3.1 Axiomas de incidência

Neste capítulo, faremos um estudo axiomático da Geometria Euclidiana Plana. Os Elementos de Euclides apresentam lacunas que não são preenchíveis com o seu próprio conteúdo. O que iremos fazer é axiomatizar a geometria de forma a não deixar lacunas.

É impossível definir todos os termos que iremos usar, pois caso contrário estaríamos envolvidos num processo infinito. Os termos sem definição serão chamados de primitivos ou elementares. Consideraremos o ponto, a reta e o plano como termos primitivos.

Iniciaremos esta seção com os axiomas de incidência que definem a ideia expressa pela noção de “estar em”, além de estabelecer uma conexão entre pontos e retas.

Axioma 3.1 *Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.*

Uma reta está completamente determinada pela especificação de dois pontos distintos. Denotaremos por AB , ou reta AB , a reta que contém os pontos distintos A e B . Diremos também que uma reta passa por um ponto quando o mesmo pertence a reta em questão.

Axioma 3.2 *Em cada reta existem pelo menos dois pontos distintos e existem três pontos distintos que não pertencem a uma mesma reta.*

Pontos que pertencem a uma mesma reta são chamados de colineares. Pontos que não pertencem a uma mesma reta, são chamados não-colineares. Diremos que duas retas se intersectam ou se cortam quando as mesmas têm um ponto em comum. Se duas retas não possuem nenhum ponto em comum, elas são ditas paralelas. Designaremos por letras maiúsculas A, B, C, \dots os pontos e por letras minúsculas a, b, c, \dots as retas.

3.2 Axiomas de ordem

A noção de “está entre” descreve uma ordem de sequência dos pontos sobre uma reta. Esta relação entre pontos de uma mesma reta, satisfaz os axiomas abaixo, que serão referidos como axiomas de ordem.

Axioma 3.3 *Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.*

Axioma 3.4 *Se A , B e C são pontos tais que B está entre A e C então estes três pontos são distintos, colineares e B está entre C e A .*

Definição 3.1 *Dados dois pontos distintos, A e B , o conjunto constituído por A , B e por todos os pontos que estão entre A e B é chamado segmento AB . Os pontos A e B são chamados extremidades do segmento AB .*

Para simplificar a notação escreveremos “ AB ” para representar tanto o segmento AB , quanto a reta que passa pelos pontos A e B , sem perigo de confusão pois estará bem claro no contexto a qual objeto geométrico estaremos nos referindo. Chamaremos de interior do segmento AB o conjunto constituído por todos os pontos que estão entre A e B , o qual será denotado por $int(AB)$. Diremos também que uma reta intersecta o interior do segmento AB quando a mesma possui um único ponto em comum com tal conjunto.

Definição 3.2 *Sejam A e B dois pontos distintos de uma reta. Chama-se semirreta com origem em A contendo o ponto B o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C tais que B está entre A e C , sendo representado por S_{AB} . O ponto A é denominado origem da semirreta S_{AB} .*

Teorema 3.1 *Se A e B são dois pontos distintos de uma reta, então temos:*

(I) $S_{AB} \cup S_{BA}$ é a reta determinada por A e B .

(II) $S_{AB} \cap S_{BA}$ é o segmento AB ;

Demonstração:

(I) Observe que de acordo com a definição dada acima as semirretas S_{AB} e S_{BA} são constituídas de pontos da reta AB . Logo, $S_{AB} \cup S_{BA}$ está contido na reta AB . Reciprocamente, seja P um ponto da reta AB . Provemos que $P \in S_{AB} \cup S_{BA}$. De fato, o Axioma 3.3 garante que apenas uma e apenas uma das seguintes

possibilidades ocorre:

- (1) P está entre A e B ;
- (2) A está entre B e P ;
- (3) B está entre A e P .

No caso (1), o ponto P pertence ao segmento AB . No caso (2), P pertence a S_{BA} . No caso (3), P pertence a S_{AB} . Portanto, em qualquer caso, P pertence a $S_{AB} \cup S_{BA}$.

(II) Provemos inicialmente que $S_{AB} \cap S_{BA} \subset AB$. Seja dado $P \in S_{AB} \cap S_{BA}$. Se P não pertence ao segmento AB , então A está entre P e B ou B está entre A e P . No primeiro caso, segue que $P \in S_{BA}$ e $P \notin S_{AB}$, o que é uma contradição. Analogamente, também temos uma contradição quando consideramos o segundo caso. Logo P pertence ao segmento AB . Reciprocamente, seja P um ponto do segmento AB . Por definição, o ponto P pertence simultaneamente às semirretas S_{AB} e S_{BA} . Portanto, $P \in S_{AB} \cap S_{BA}$, ou seja, $AB \subset S_{AB} \cap S_{BA}$.

Axioma 3.5 *Se A e B são pontos distintos, então existem um ponto C entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D .*

Decorre do axioma acima que dados quaisquer dois pontos existe uma infinidade de pontos entre eles. É também uma consequência de tal axioma, que toda semirreta S_{AB} contém uma infinidade de pontos além daqueles contidos no segmento AB .

Axioma 3.6 *Dados um plano Π e uma reta r contida nesse plano, existem dois subconjuntos $\Pi_1, \Pi_2 \subset \Pi$ tais que Π_1, Π_2 e r são dois a dois disjuntos e satisfazem as seguintes condições:*

(I) *Se $P, Q \in \Pi_1$ (respectivamente Π_2) então o segmento PQ está contido em Π_1 (respectivamente Π_2);*

(II) *Se $P \in \Pi_1$ e $Q \in \Pi_2$ então o interior do segmento PQ possui um ponto em comum com a reta r .*

Os conjuntos Π_1 e Π_2 são chamados de semiplanos determinados por r . Quando os pontos A e B pertencem ao mesmo semiplano determinado por uma reta r , dizemos que A e B estão no mesmo lado de r , e quando os pontos A e B estão, respectivamente, nos semiplanos distintos Π_1 e Π_2 determinados pela reta r , dizemos que A e B estão em lados opostos de r . Dizemos também que o semiplano Π_1 é oposto ao semiplano Π_2 .

Teorema 3.2 *Sejam Π_1 e Π_2 os dois semiplanos determinados por uma reta r do plano Π . Se $A \in r$ e $B \in \Pi_1$ então segmento $AB \subset \Pi_1$, exceto A .*

Demonstração: Seja C um ponto do segmento AB , com $C \neq A$ e $C \notin \Pi_1$. Como $\Pi_1 \cup r \cup \Pi_2 = \Pi$, temos que $C \in r$ ou $C \in \Pi_2$.

Suponha que $C \in r$. Como $C \neq A$ e $A \in r$, temos que o segmento AB tem dois pontos distintos em comum com a reta r . Pelo Axioma 3.1, a reta que passa pelos pontos A e C é a mesma reta que passa pelos pontos A e B . Segue-se então que $B \in r$ o que é uma contradição, pois $B \in \Pi_1$ e $\Pi_1 \cap r = \emptyset$.

Suponha que $C \in \Pi_2$. Como $B \in \Pi_1$ o Axioma 3.6 garante que existe um ponto $D \in BC$ tal que $D \in r$. Como $C \in AB$, pelo Axioma 3.3, $A \notin BC$. Logo $D \neq A$. Portanto a reta AB tem dois pontos distintos em comum com a reta r , ou seja, $AB = r$. Segue-se então que $B \in r$, o que é novamente uma contradição. Logo, $C \in \Pi_1$.

Teorema 3.3 *Sejam Π_1 e Π_2 os dois semiplanos determinados por uma reta r do plano Π . Se $A \in r$, $B \in \Pi_1$ e $C \in S_{AB}$ é tal que $AB \subset AC$, então $C \in \Pi_1$.*

Demonstração: Se $C = B$ não há nada a provar. Suponha que $C \neq B$ e $C \notin \Pi_1$. Portanto, há duas possibilidades: $C \in r$ ou $C \in \Pi_2$. Caso $C \in r$, a reta AB terá dois pontos distintos em comum com a reta r , ou seja, $B \in r$. Se $C \in \Pi_2$, então pelo teorema anterior, temos que $B \in \Pi_2$. Como em ambos os casos obtemos uma contradição, segue-se que $C \in \Pi_1$.

Segue diretamente dos dois teoremas anteriores o seguinte corolário:

Corolário 3.1 *Seja Π_1 um dos semiplanos determinados por uma reta r do plano Π . Se $A \in r$ e $B \in \Pi_1$ então $S_{AB} - \{A\} \subset \Pi_1$*

Teorema 3.4 *Seja r uma reta do plano Π e sejam A e B dois pontos distintos de Π . Se r intersecta o interior do segmento AB então A e B estão em lados opostos de r .*

Demonstração: Suponha que A e B não estejam em lados opostos de r . Observe que tanto o ponto A quanto o ponto B não pertencem a reta r , pois em caso afirmativo de uma ou de ambas as situações, as retas AB e r coincidiriam. Assim, podemos afirmar que os pontos A e B estão no mesmo lado de r . Portanto, pelo Axioma 3.6, os pontos do segmento AB também estão no mesmo lado da reta r . Logo, $AB \cap r = \emptyset$, o que contradiz a hipótese inicial.

Teorema 3.5 (*Teorema de Pasch*) *Seja r uma reta do plano Π e sejam A , B e C três pontos não colineares de Π com $A \notin r$ e $B \notin r$. Se r intersecta o interior do segmento AB então ocorre uma, e apenas uma, das possibilidades:*

(I) $C \in r$;

(II) *A reta r intersecta o interior do segmento BC e todos os pontos do segmento AC estão do mesmo lado de r ;*

(III) *A reta r intersecta o interior do segmento AC e todos os pontos do segmento BC estão do mesmo lado de r .*

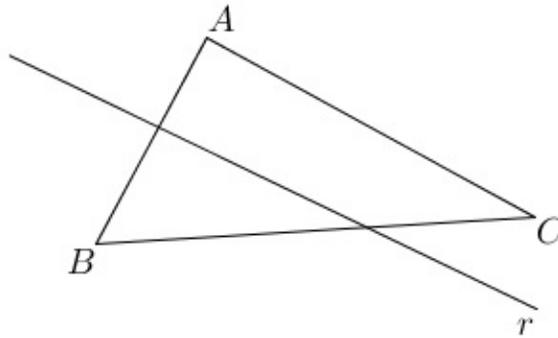


Figura 3.1: Teorema de Pasch

Se $C \in r$ então não há o que provar (observe que neste caso a reta r intersecta ambos os segmentos AC e BC).

Suponha que $C \notin r$. Como r intersecta o interior de AB e os pontos A e B não estão em r , o Teorema 3.4 garante que A e B estão em lados opostos de r . Portanto, C está do mesmo lado de A em relação a r ou do mesmo lado de B em relação a r . Se A e C estão do mesmo lado de r , então B e C estão em lados opostos de r . Logo, a reta r intersecta o interior do segmento BC , e além disso, todos os pontos do segmento AC estão do mesmo lado de r (Axioma 3.6). Analogamente, se B e C estão do mesmo lado da reta r , então r intersecta o interior do segmento AC e todos os pontos do segmento BC estão do mesmo lado de r .

3.3 Axiomas sobre medição de segmentos

A introdução do conceito de medida ocorre mediante a adoção de uma unidade de comprimento que, neste texto, a faremos axiomáticamente. Define-se como a distância entre dois pontos A e B , o comprimento do segmento AB . Em nosso texto o comprimento do segmento AB será indicado por \overline{AB} .

Axioma 3.7 *Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e o conjunto dos números reais de modo que a distância entre dois pontos da reta é igual ao módulo da diferença dos números reais correspondentes.*

O número que corresponde a um ponto da reta, dado pelo Axioma 3.7, é chamado de coordenada desse ponto. Assim, dado um segmento AB , se denotarmos por a e b as coordenadas de suas extremidades A e B , respectivamente, o comprimento do segmento AB é igual a $\overline{AB} = |a - b|$.

Axioma 3.8 *Se o ponto C está entre A e B então $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$*

O axioma acima, garante que bijeção do Axioma 3.7 obedece uma certa ordem. Tal afirmação ficará bem compreendida, após a leitura do teorema abaixo:

Teorema 3.6 *Se um ponto $C \neq A$ pertence a uma semirreta S_{AB} é tal $\overline{AC} < \overline{AB}$, então C está entre A e B .*

Demonstração: Se o ponto B estiver entre A e C , do Axioma 3.8 tem-se $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, logo $\overline{AC} > \overline{AB}$, um absurdo. Portanto, segue da definição de S_{AB} que $C \in AB$. Como $C \neq B$, pois $\overline{AC} < \overline{AB}$, concluímos que C está entre A e B .

Definição 3.3 *O ponto médio de um segmento AB é um ponto C deste segmento tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$*

Teorema 3.7 *Todo segmento AB tem um único ponto médio.*

Demonstração: Sejam a e b , respectivamente, as coordenadas dos pontos A e B . Pelo Axioma 3.7, existe um ponto C da reta AB de coordenada $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Assim temos:

$$\overline{AC} = |c - a| = \left| \frac{1}{2}(a + b) - a \right| = \frac{1}{2} |b - a|$$

$$\overline{CB} = |c - b| = \left| \frac{1}{2}(a + b) - b \right| = \frac{1}{2} |a - b|$$

Portanto, $\overline{AC} = \overline{CB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, com C entre A e B (Teorema 3.6). Logo C é ponto médio de AB .

Provemos agora a unicidade do ponto médio. De fato, seja M um ponto entre A e B tal que $\overline{AM} = \overline{MB}$. Pelo Axioma 3.8 $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB}$. Logo, $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{MB}$. Pelo Axioma 3.7, se a, m, b são, respectivamente, as coordenadas dos pontos A, M e B então $|m - a| = \frac{1}{2}|b - a| = |b - m|$. Logo $m = \frac{a+b}{2}$.

3.4 Axiomas sobre medição de ângulos

Nesta seção, faremos uma introdução ao conceito de ângulo. A definição da medida de um ângulo será dada a partir de um axioma.

Definição 3.4 *Ângulo é a figura geométrica formada por duas semirretas distintas e não opostas que possuem a mesma origem.*

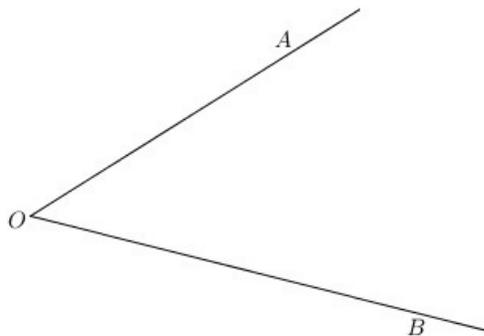


Figura 3.2: Ângulo $A\hat{O}B$

O ângulo da figura acima pode ser denotado por $A\hat{O}B$ ou por $B\hat{O}A$. Usaremos a notação \hat{O} quando não houver dúvida a que ângulo estaremos nos referindo. As semirretas são chamadas de lados do ângulo e a origem comum, de vértice do ângulo.

Definição 3.5 *Se duas semirretas S_{OA} e S_{OB} não coincidem nem são opostas, definimos o interior do ângulo $A\hat{O}B$ ($int(A\hat{O}B)$) como sendo a interseção do semiplano determinado por OA e que contém B com o semiplano determinado por OB e que contém A .*

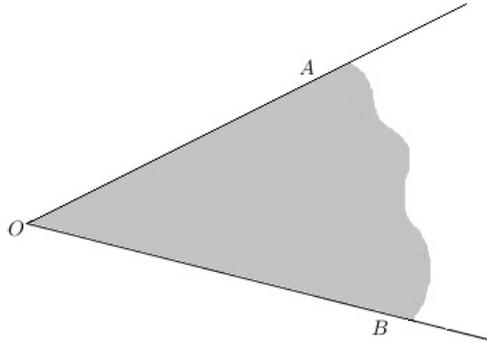


Figura 3.3: Interior do ângulo $A\hat{O}B$

Teorema 3.8 *O ponto P pertence ao interior de $A\hat{O}B$ se, e somente se, os pontos A e P estão no mesmo lado de OB e os pontos B e P estão no mesmo lado de OA .*

Demonstração: Seja Π_1 o semiplano determinado pela reta OA e que contém o ponto B . Denote por Π_2 o semiplano determinado pela reta OB e que contém o ponto A . Suponha que $P \in \text{int}(A\hat{O}B)$. Então pela definição dada acima temos que $P \in \Pi_1 \cap \Pi_2$. Como $B \in \Pi_1$ e $A \in \Pi_2$, os pontos A e P estão no mesmo lado de OB e os pontos B e P estão no mesmo lado de OA . Reciprocamente, suponha que A e P estejam no mesmo lado de OB e que B e P estejam no mesmo lado de OA . Assim, temos que $B, P \in \Pi_1$ e $A, P \in \Pi_2$, ou seja, $P \in \Pi_1 \cap \Pi_2 = \text{int}(A\hat{O}B)$.

Teorema 3.9 *Seja dado um ângulo $A\hat{O}B$. Se $P \in \text{int}(AB)$, então $P \in \text{int}(A\hat{O}B)$.*

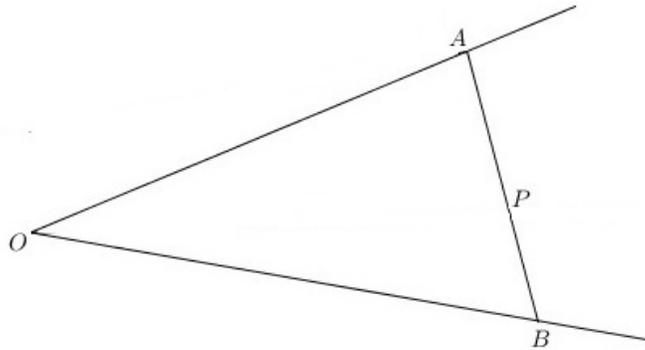


Figura 3.4: Interior do segmento AB e o ângulo $A\hat{O}B$

Demonstração: Como $P \in \text{int}(AB) \subset AB$, o Teorema 3.2 garante que o ponto P pertence ao semiplano determinado pela reta OA e que contém o ponto B e, pela mesma razão, também garante que o ponto P pertence ao semiplano determinado pela reta OB e que contém o ponto A . Portanto, o ponto P pertence à interseção do semiplano determinado por OA e que contém o ponto B com o semiplano determinado por OB e que contém o ponto A , ou seja, $P \in \text{int}(A\hat{O}B)$.

Teorema 3.10 *Se o ponto P pertence ao interior de $A\hat{O}B$, então a semirreta S_{OP} intersecta interior do segmento AB .*

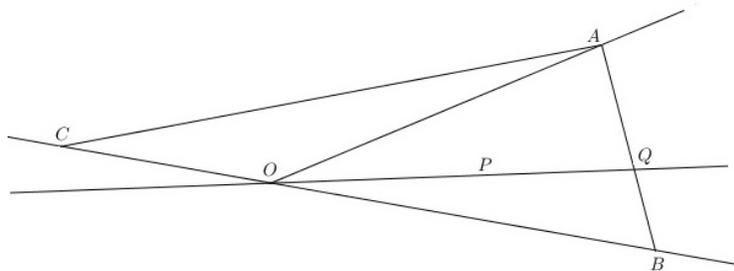


Figura 3.5: Ângulo $A\hat{O}B$ e a semirreta S_{OP} intersectando o interior do segmento AB

Demonstração: Marque um ponto C na reta OB tal que O esteja entre os pontos B e C . Trace o segmento AC . Como P e B estão no mesmo lado de OA e os pontos B e C estão em lados opostos de OA , temos que P e C estão em lados opostos de OA . Portanto, de acordo com a Teorema 3.2 e o Corolário 3.1, os pontos do interior de AC e os pontos de $S_{OP} - \{O\}$ estão em lados opostos da reta OA . Assim, a semirreta S_{OP} não intersecta o segmento AC . Portanto, pelo Teorema de Pasch a reta OP intersecta o interior de AB em algum ponto Q . Como P e Q estão no mesmo lado de OB , temos que $Q \in S_{OP}$. Logo, semirreta S_{OP} intersecta interior do segmento AB .

Teorema 3.11 *Seja dado um ângulo $A\hat{O}B$. Se S_{OP} intersecta o interior do segmento AB , então o ponto P pertence ao interior de $A\hat{O}B$.*

Demonstração: Se S_{OP} intersecta o interior do segmento AB em Q , então $Q \in \text{int}(A\hat{O}B)$ (Teorema 3.9). Seja Π_1 o semiplano determinado por OA e que contém o ponto B e Π_2 o semiplano determinado por OB e que contém o ponto A . Como $Q \in \text{int}(A\hat{O}B)$, temos que Q pertence ao semiplano determinado por OA e que contém o ponto B , ou seja, $Q \in \Pi_1$. Mas $P \in S_{OQ}$, e assim obtemos que $P \in \Pi_1$ (Corolário 3.1). Analogamente, $P \in \Pi_2$, ou seja, $P \in \Pi_1 \cap \Pi_2 = \text{int}(A\hat{O}B)$

Teorema 3.12 *Se B e P estão no mesmo lado de OA , então $P \in \text{int}(\widehat{AOB})$ se, e somente se, os pontos A e B estão em lados opostos de OP .*

Demonstração: Se $P \in \text{int}(\widehat{AOB})$ então S_{OP} intersecta o interior do segmento AB . Assim, A e B estão em lados opostos de OP , já que estando no mesmo lado ou considerando um dos pontos sobre a reta OP teríamos claramente uma contradição com a hipótese inicial. Reciprocamente, suponha que A e B estejam em lados opostos de OP . Então, pelo Axioma 3.6, a reta OP intersecta o interior do segmento AB , digamos em Q . Assim, Q e B estão no mesmo lado de OA e como por hipótese B e P estão no mesmo lado de OA , temos que Q e P estão no mesmo lado de OA . Portanto, segue-se facilmente que $Q \in S_{OP}$. Assim, S_{OP} intersecta o interior de AB , e pelo teorema anterior $P \in \text{int}(\widehat{AOB})$.

Teorema 3.13 *Sejam A , O e C pontos de uma linha reta com O entre A e C . Se B e P são dois pontos distintos de um dos semiplanos determinados pela reta OA , então $P \in \text{int}(\widehat{AOB})$ se, e somente se, $B \in \text{int}(\widehat{COP})$.*

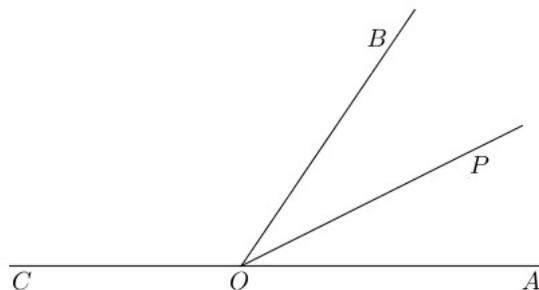


Figura 3.6: \widehat{AOP} e \widehat{AOB} com B e P pertencendo ao mesmo semiplano

Demonstração: Suponha que $P \in \text{int}(\widehat{AOB})$, então os pontos B e P estão no mesmo lado de OA . Mas os pontos A , O e C pertencem a mesma reta, assim B e P estão no mesmo lado de OC . Como a reta OP intersecta o interior de AC , é fácil ver que os pontos A e C estão em lados opostos de OP . Segue-se do Teorema anterior, que os pontos A e B também estão em lados opostos de OP . Portanto, B e C estão no mesmo lado de OP . Como já foi provado anteriormente que os pontos B e P estão no mesmo lado da reta OC , temos que, $B \in \text{int}(\widehat{COP})$. Para provar a recíproca do teorema, basta trocar B por P e A por C e repetir os passos da demonstração acima.

Definição 3.6 *Dizemos que uma semirreta S_{AB} divide um semiplano Π determinado por uma reta r quando $A \in r$ e todos os pontos de S_{AB} , exceto A , pertencem a Π .*

Axioma 3.9 *Existe uma correspondência entre o intervalo $(0, 180)$ dos números reais e o conjunto das semirretas de mesma origem que dividem um dado semiplano, de modo que, se A , B e C são pontos pertencentes ao semiplano com $C \in \text{int}(\widehat{A\hat{O}B})$ e se a , b e c são os números reais correspondentes às semirretas S_{OA} , S_{OB} e S_{OC} , respectivamente, então $|a - b| = |a - c| + |c - b|$.*

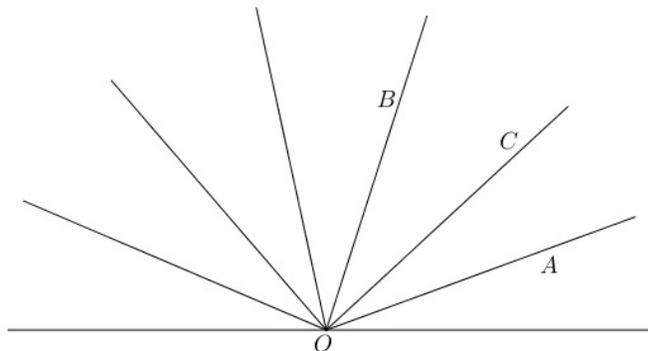


Figura 3.7: Semirretas de mesma origem dividindo um semiplano

Denotaremos a medida de um ângulo pelo próprio ângulo. Assim, $\widehat{A\hat{O}B}$ poderá indicar o ângulo ou a medida deste ângulo, mas deixaremos claro no contexto se estaremos nos referindo ao ângulo ou a sua medida. O número associado a cada semirreta, dado pelo axioma acima, chama-se a coordenada da semirreta. Se x e y forem as coordenadas das semirretas que formam $\widehat{A\hat{O}B}$, então $|x - y|$ é a medida desse ângulo, e escreveremos $\widehat{A\hat{O}B} = |x - y|$. A medida de $\widehat{A\hat{O}B}$ será dada em graus e o número $|x - y|$ será acompanhado do símbolo $^\circ$ ($\widehat{A\hat{O}B} = 30^\circ$, por exemplo).

Axioma 3.10 *Se $D \in \text{int}(\widehat{B\hat{A}C})$ então $\widehat{B\hat{A}C} = \widehat{B\hat{A}D} + \widehat{D\hat{A}C}$.*

Teorema 3.14 *Dados um ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$, uma semirreta $S_{O'C}$ e um semiplano Π determinado pela reta $O'C$, existe uma única semirreta $S_{O'D}$ tal que $D \in \Pi$ e $\widehat{C\hat{O}'D} = \widehat{A\hat{O}B}$*

Demonstração: A existência da semirreta $S_{O'D}$ é garantida pelo Axioma 3.9. Para provar a unicidade basta supor que existe outra semirreta $S_{O'E}$ com $E \in \Pi$ e $\widehat{C\hat{O}'E} = \widehat{A\hat{O}B}$ e usar o axioma anterior chegando num absurdo.

Corolário 3.2 *Se $0 < x < 180^\circ$, $d > 0$ e H é um dos semiplanos determinados pela reta OA , então existe um único ponto B em H tal que $\widehat{A\hat{O}B} = x$ e $\overline{OB} = d$.*

Demonstração: Segue diretamente dos Axiomas 3.9 e 3.7

Teorema 3.15 *Sejam dados os ângulos $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}'B'$. Se C e C' são pontos tais que $C \in \text{int}(A\hat{O}B)$, $C' \in \text{int}(A'\hat{O}'B')$ e $A\hat{O}C = A'\hat{O}'C'$, então $A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'$ se, e somente se, $C\hat{O}B = C'\hat{O}'B'$.*

Demonstração: Basta aplicar o Axioma 3.10.

Teorema 3.16 *Se B e C são dois pontos de um mesmo semiplano determinado por uma reta OA e $A\hat{O}B < A\hat{O}C$, então $B \in \text{int}(A\hat{O}C)$.*

Demonstração: Suponha que B não pertença ao interior de $A\hat{O}C$. Como B está no semiplano determinado por OA e que contém C , temos que B pertence a semirreta S_{OC} ou A e B estão em semiplanos distintos em relação a reta OC . Se B pertence a semirreta S_{OC} , então $S_{OB} = S_{OC}$, ou seja, $A\hat{O}B = A\hat{O}C$. Se A e B estão em semiplanos distintos em relação a reta OC , então o ponto C pertence ao interior de $A\hat{O}B$. Pelo Axioma 3.10, obtemos $A\hat{O}C + C\hat{O}B = A\hat{O}B$. Assim, em ambos os casos temos uma contradição, pois por hipótese $A\hat{O}B < A\hat{O}C$.

Definição 3.7 *Diz-se que dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas é 180° . Se a soma das medidas de dois ângulos é igual a 90° , dizemos que os ângulos são complementares.*

Teorema 3.17 *Se uma semirreta divide um dos semiplanos determinados por uma reta do plano, os ângulos adjacentes formados pela reta e a semirreta são suplementares.*

Demonstração: Sejam A , O e C três pontos distintos de uma reta com O entre A e C . Se uma semirreta S_{OB} divide o semiplano H determinado por AC , provemos que $A\hat{O}B + B\hat{O}C = 180^\circ$. De fato, suponha que $A\hat{O}B + B\hat{O}C < 180^\circ$. Então existe única semirreta S_{OD} com $D \in H$ tal que $A\hat{O}D = A\hat{O}B + B\hat{O}C$ (Corolário 3.2). Pelo Teorema 3.16 temos que $B \in \text{int}(A\hat{O}D)$, já que $A\hat{O}B < A\hat{O}D$. Como B e D pertencem a H e os pontos A , O e C estão numa reta com O entre A e C , temos também que $D \in \text{int}(B\hat{O}C)$. Como $B \in \text{int}(A\hat{O}D)$ e $D \in \text{int}(B\hat{O}C)$ segue pelo Axioma 3.10 que $A\hat{O}B + B\hat{O}D = A\hat{O}D = A\hat{O}B + B\hat{O}C$ e $B\hat{O}D + D\hat{O}C = B\hat{O}C$, ou seja, $B\hat{O}D = B\hat{O}C$ e $B\hat{O}D < B\hat{O}C$, o que é um absurdo.

Suponha agora que $A\hat{O}B + B\hat{O}C > 180^\circ$. Então, pelo Corolário 3.2, existe uma única semirreta S_{OE} , com E e C pertencendo ao mesmo semiplano determinado pela reta OB , tal que $B\hat{O}E = 180^\circ - A\hat{O}B$. Como $A\hat{O}B + B\hat{O}C > 180^\circ$ temos também que $B\hat{O}C > 180^\circ - A\hat{O}B$, ou seja, $B\hat{O}C > B\hat{O}E$. Novamente, pelo Teorema 3.16,

temos que $E \in \text{int}(\widehat{B\hat{O}C})$. Portanto, pelo Teorema 3.13, $B \in \text{int}(\widehat{A\hat{O}E})$, ou seja, $\widehat{A\hat{O}E} = \widehat{A\hat{O}B} + \widehat{B\hat{O}E}$. Logo, $\widehat{A\hat{O}E} = \widehat{A\hat{O}B} + (180^\circ - \widehat{A\hat{O}B}) = 180^\circ$, o que é uma contradição.

Teorema 3.18 *Ângulos opostos pelo vértice têm mesma medida.*

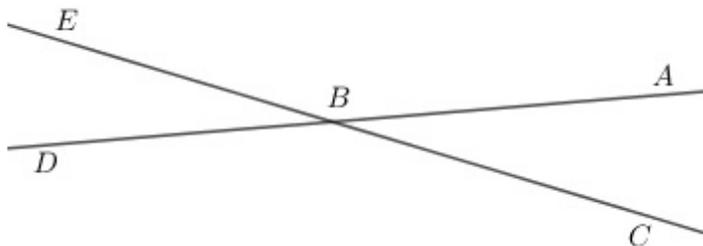


Figura 3.8: Ângulos opostos pelo vértice

Demonstração: Sejam $\widehat{A\hat{B}C}$ e $\widehat{D\hat{B}E}$ dois ângulos opostos pelo vértice, sendo S_{AB} oposta a semirreta S_{BD} e S_{BC} oposta a semirreta S_{BE} . Pelo Teorema 3.17, $\widehat{A\hat{B}C}$ é suplemento de $\widehat{A\hat{B}E}$ e $\widehat{D\hat{B}E}$ é também suplemento de $\widehat{A\hat{B}E}$. Assim, $\widehat{A\hat{B}C} + \widehat{A\hat{B}E} = 180^\circ$ e $\widehat{D\hat{B}E} + \widehat{A\hat{B}E} = 180^\circ$, ou seja, $\widehat{A\hat{B}C} = \widehat{D\hat{B}E}$.

Definição 3.8 *Diz-se que um ângulo é reto quando sua medida é igual a 90° . Duas retas são perpendiculares quando as mesmas se intersectam formando um ângulo reto. Um ângulo é agudo quando sua medida é menor que 90° e obtuso quando sua medida é maior que 90° .*

3.5 Congruência

Dois segmentos AB e CD são chamados congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$ e já vimos anteriormente que dois ângulos \hat{A} e \hat{B} são congruentes quando possuem as mesmas medidas. Para o significado de congruência utilizaremos o símbolo “ = ”. Portanto, escreveremos $AB = CD$ quando o segmento AB for congruente ao segmento CD e escreveremos $\hat{A} = \hat{B}$ quando o ângulo \hat{A} for congruente ao ângulo \hat{B} . O leitor não deve ficar preocupado com uma possível confusão envolvendo igualdade de números ou de conjuntos, pois caso ocorra, reforçaremos com palavras o significado de cada símbolo.

De acordo a definição de congruência dada acima, as propriedades que envolvem igualdade de números reais passam a valer para a congruência de segmentos e ângulos. Portanto, as relações de congruência para segmentos e ângulos gozam das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Definição 3.9 *Sejam dados três pontos A , B e C não colineares. A figura formada por A , B e C e pelos pontos dos conjuntos $\text{int}(AB)$, $\text{int}(AC)$ e $\text{int}(BC)$ é chamada de triângulo. Os segmentos AB , AC e BC são chamados lados do triângulo que é indicado por ABC . Os ângulos de ABC são $B\hat{A}C$, $C\hat{B}A$ e $A\hat{C}B$, que podem ser denotados por \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} . Os pontos A , B e C são os vértices do triângulo.*

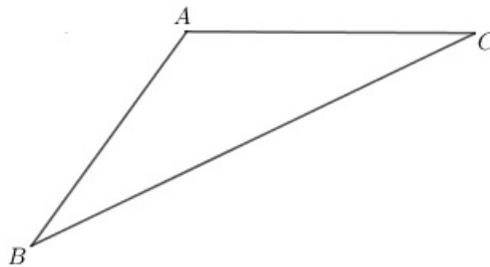


Figura 3.9: Triângulo ABC

Definição 3.10 *Dois triângulos ABC e DEF são congruentes se existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

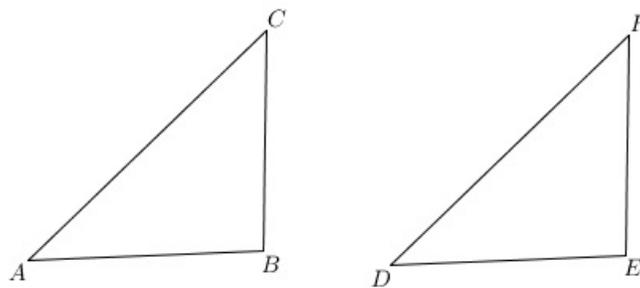


Figura 3.10: Congruência de Triângulos

Isso significa que se ABC e DEF são dois triângulos congruentes e se $\varphi : \{A, B, C\} \rightarrow \{D, E, F\}$ é bijeção que define a congruência, com $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) = E$ e $\varphi(C) = F$ então valem, simultaneamente, as relações: $AB = DE$, $BC = EF$, $CA = FD$, $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$. Se ABC e DEF são triângulos congruentes escreveremos $ABC = DEF$, significando que a congruência leva A em D , B em E e C em F . Os vértices A e D , B e E , C e F são chamados correspondentes. Ângulos correspondentes são aqueles cujos vértices são correspondentes e lados correspondentes são os lados cujas extremidades são vértices correspondentes.

Axioma 3.11 (Caso LAL) Se dois triângulos ABC e DEF são tais que $AB = DE$, $AC = DF$ e $\hat{A} = \hat{D}$ então $ABC = DEF$.

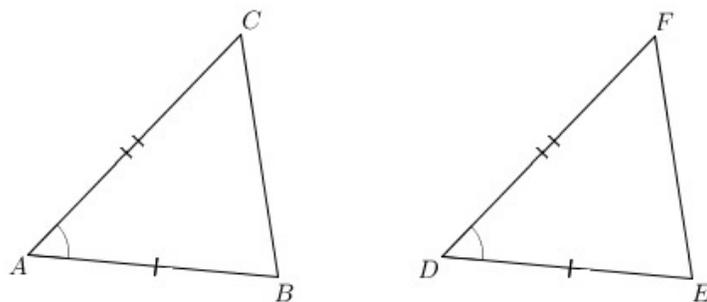


Figura 3.11: Caso LAL

De acordo com o axioma acima, é possível verificar a congruência de dois triângulos com apenas três relações, ao invés das seis exigidas na Definição 3.10. Denotaremos o Axioma 3.11 como “caso LAL” (“Lado Ângulo Lado”).

Teorema 3.19 (Caso ALA) Dados dois triângulos ABC e DEF com $AB = DE$, $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então $ABC = DEF$.

Demonstração: Suponha que BC e EF não sejam congruentes. Então podemos assumir sem perda de generalidade que $\overline{BC} > \overline{EF}$. Então existe um ponto C' que pertence ao interior do segmento BC tal que $\overline{BC'} = \overline{EF}$. Assim, $AB = DE$, $BC' = EF$ e $\hat{A} = \hat{D}$, e pelo Axioma 3.11 (caso LAL) temos que ABC' e DEF são congruentes. Observe que $C' \in \text{int}(\hat{B}\hat{A}\hat{C})$ (Teorema 3.9). Assim, $\hat{B}\hat{A}\hat{C}' + \hat{C}'\hat{A}\hat{C} = \hat{B}\hat{A}\hat{C}$, ou seja, $\hat{B}\hat{A}\hat{C}' < \hat{B}\hat{A}\hat{C} = \hat{E}\hat{D}\hat{F}$, que é uma contradição.

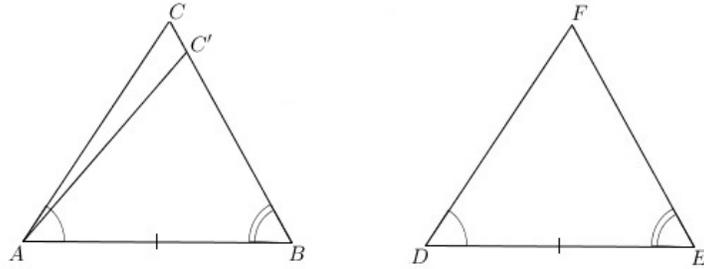


Figura 3.12: Caso *ALA*

Definição 3.11 Um triângulo é dito *isósceles* se possui dois lados congruentes. Os lados congruentes são as laterais o terceiro lado é a base do triângulo. Os ângulos opostos às laterais são chamados *ângulos da base*. Um triângulo que tem os três lados congruentes chama-se *equilátero*.

Teorema 3.20 Em qualquer triângulo *isósceles*, os ângulos da base são congruentes.

Demonstração: Considere o triângulo *isósceles* ABC , com $AB = AC$. Seja $\varphi : \{A, B, C\} \rightarrow \{A, C, B\}$ uma bijeção definida por $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = C$ e $\varphi(C) = B$.

Como $AB = AC$, $AC = AB$ e $\hat{A} = \hat{A}$ o Axioma 3.11 (caso *LAL*) garante a congruência $ABC = ACD$. Logo, temos que $\hat{B} = \hat{C}$.

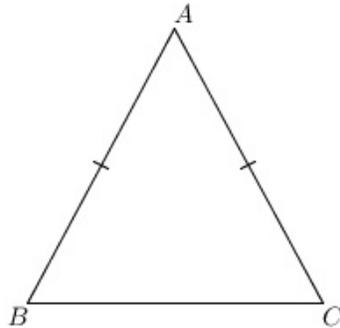


Figura 3.13: Triângulo *isósceles* ABC com $AB = AC$

Teorema 3.21 Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então ele é *isósceles*.

Demonstração: Dado um triângulo ABC , com $\hat{B} = \hat{C}$, provemos que $AB = AC$. De fato, considere a bijeção $\varphi : \{A, B, C\} \rightarrow \{A, C, B\}$ definida $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = C$ e $\varphi(C) = B$. Como por hipótese $\hat{B} = \hat{C}$, $\hat{C} = \hat{B}$ e $BC = CB$, segue do Teorema 3.19 (caso ALA) que $ABC = ACB$. Assim, temos que $AB = AC$, ou seja, ABC é isósceles.

Definição 3.12 Dado um triângulo ABC , seja P um ponto da reta que passa pelos pontos B e C . Diremos que AP é a mediana do triângulo relativamente ao lado BC , se P for o ponto médio de BC . Diremos que AP é a bissetriz do ângulo \hat{A} , quando $C\hat{A}P = B\hat{A}P$. Diremos que AP é a altura do triângulo relativamente ao lado BC , se AP for perpendicular à reta que passa por B e C .

Teorema 3.22 Em um triângulo isósceles a mediana relativamente a base é também bissetriz e altura.

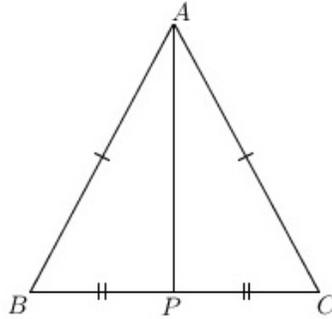


Figura 3.14: AP é mediana, bissetriz e altura do triângulo isósceles ABC

Demonstração: Considere o triângulo isósceles ABC de base BC . Seja P o ponto médio lado BC . Então temos que $BP = PC$. Como por hipótese, $AB = AC$ e $\hat{B} = \hat{C}$ o Axioma 3.11 (caso LAL) garante que $ABP = ACP$. Portanto $B\hat{A}P = C\hat{A}P$, ou seja, o segmento AP é bissetriz do ângulo \hat{A} . Como $A\hat{P}B = A\hat{P}C$ e $A\hat{P}B + A\hat{P}C = 180^\circ$ obtemos $A\hat{P}B = A\hat{P}C = 90^\circ$, ou seja, o segmento AP é a altura do triângulo ABC relativamente ao lado BC .

Teorema 3.23 (Caso LLL) Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes.

Demonstração: Sejam ABC e DEF dois triângulos cujos lados AB , BC e CA de ABC são, respectivamente, congruentes aos lados DE , EF e FD de DEF . Pelo Teorema 3.14 existe uma única semirreta de origem A contida no semiplano oposto

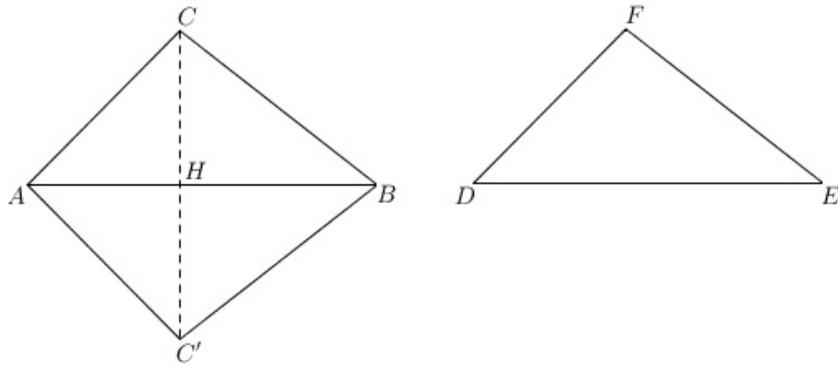


Figura 3.15: Caso *LLL*

ao determinado pela reta AB e pelo ponto C , tal que o ângulo formado pela mesma e pelo lado AB tem medida igual a $\hat{E}DF$. Nesta semirreta, seja C' o ponto tal que $AC' = DF$. Trace BC' e observe que pelo caso LAL ABC' e DEF são congruentes, já que $AC' = DF$, $\hat{B}AC' = \hat{E}DF$ e $AB = DE$.

Note que para provar que ABC e DEF são congruentes basta mostrar que ABC e ABC' são congruentes. Mais especificamente basta provar que $\hat{A}CB = \hat{A}C'B$

Trace o segmento CC' e seja H o ponto de interseção do segmento CC' com a reta AB . Se $H = A$ ou $H = B$ é fácil ver que $\hat{A}CB = \hat{A}C'B$ pois em ambos os casos os triângulos CBC' ou CAC' são isósceles.

Se $H \neq A$ e $H \neq B$ então existem três situações possíveis: A está entre H e B , H está entre A e B ou B está entre A e H .

Se o ponto H está entre A e B então $H \in \text{int}(\hat{A}CB)$ e $H \in \text{int}(\hat{A}C'B)$, ou seja, $\hat{A}CH + \hat{H}CB = \hat{A}CB$ e $\hat{A}C'H + \hat{H}C'B = \hat{A}C'B$ (Axioma 3.10). Como CAC' e CBC' são isósceles, temos que $\hat{A}CH = \hat{A}C'H$ e $\hat{H}CB = \hat{H}C'B$, ou seja, $\hat{A}CB = \hat{A}C'B$ (Teorema 3.15). Nos outros caso a demonstração é análoga já que $B \in \text{int}(\hat{A}CH) \cap \text{int}(\hat{A}C'H)$ quando B está entre A e H , como também $A \in \text{int}(\hat{B}CH) \cap \text{int}(\hat{B}C'H)$ quando A está entre H e B .

3.6 Teorema do Ângulo Externo e suas consequências

Nenhum axioma novo será introduzido aqui. O resultado central é o Teorema do Ângulo Externo, o qual será necessário para provarmos a maioria do teoremas desta

e das próximas seções.

Definição 3.13 *Dado um triângulo ABC , o ângulo $B\hat{A}C$ será chamado de ângulo interno do triângulo ABC . Seja D um ponto da reta AC tal que C esteja entre A e D . O ângulo $B\hat{C}D$ será chamado de ângulo externo do triângulo ABC .*

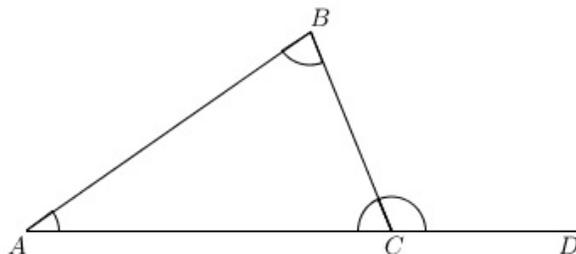


Figura 3.16: Ângulo externo $B\hat{C}D$ do triângulo ABC

Teorema 3.24 (*Teorema do Ângulo Externo*) *A medida de um ângulo externo de qualquer triângulo é maior que a medida de qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração: Dado um triângulo ABC , seja D um ponto da reta AC tal que C esteja entre A e D . Devemos provar que $B\hat{C}D > \hat{A}$ e $B\hat{C}D > \hat{B}$. Provemos inicialmente que $B\hat{C}D > \hat{B}$.

De fato, seja E o ponto médio do segmento BC . Marque sobre a semirreta S_{AE} o ponto F tal que $AE = EF$ e E esteja entre A e F . Portanto $BE = EC$, $AE = EF$ e $A\hat{E}B = F\hat{E}C$, ou seja, os triângulos AEB e FEC são congruentes pelo caso LAL. Logo, $A\hat{B}E = F\hat{C}E$, ou seja, $\hat{B} = B\hat{C}F$. Provemos agora que o ponto F pertence ao interior de $B\hat{C}D$. Como o ponto C está entre A e D , os pontos A e D estão em lados opostos da reta BC . De forma análoga, os pontos A e F estão em lados opostos de BC . Assim, os pontos D e F estão no mesmo lado de BC . Mas $S_{AF} = S_{AE}$ intersecta o interior de BC , daí concluímos pelo Teorema 3.11 que $F \in \text{int}(B\hat{A}C)$, ou seja, B e F estão no mesmo lado da reta CD (Teorema 3.8). Como F e D estão no mesmo lado de BC e os pontos F e B estão no mesmo lado de CD , temos que $F \in \text{int}(B\hat{C}D)$. Portanto, $B\hat{C}D = B\hat{C}F + F\hat{C}D$ (Axioma 3.10), ou seja, $B\hat{C}D > B\hat{C}F$. Como já provamos que $\hat{B} = B\hat{C}F$, concluímos finalmente que vale a desigualdade $B\hat{C}D > \hat{B}$.

Provemos agora que $B\hat{C}D > \hat{A}$. Considere que E' seja o ponto médio de AC e que

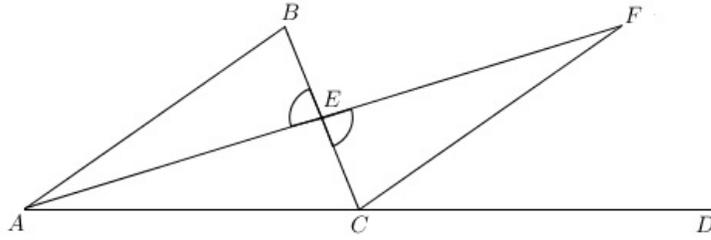


Figura 3.17: Teorema do Ângulo Externo

D' seja um ponto da reta BC tal que C esteja entre B e D' . Denote por F' o ponto da semirreta $S_{BE'}$ tal que $BE' = E'F'$. Repetindo os passos da demonstração acima, trocando B por A , D por D' , E por E' e F por F' , obteremos $\widehat{AC'D'} > \widehat{A}$. Mas, vale a igualdade $\widehat{BC'D} = \widehat{AC'D'}$, daí $\widehat{BC'D} > \widehat{A}$.

Teorema 3.25 *Dados um ponto P e uma reta r , existe uma única reta passando por P e perpendicular a r .*

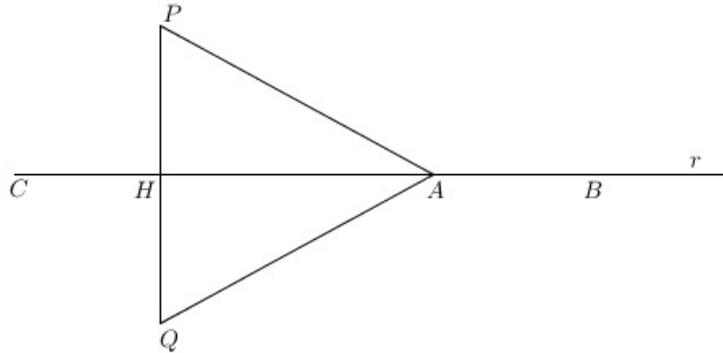


Figura 3.18: Reta que passa por P e perpendicular a r

Demonstração: O resultado é válido quando $P \in r$ (Axioma 3.10 e Teorema 3.17). Suponha que $P \notin r$, e marque em r dois pontos distintos A e B . Pelo Corolário 3.2 existe um único ponto Q , no lado de r oposto ao lado que contém P , tal que $\overline{AP} = \overline{AQ}$ e $\widehat{PAB} = \widehat{QAB}$. Se C é um ponto de r com A entre B e C , então $\widehat{C\hat{A}P} = \widehat{C\hat{A}Q}$, já que $\widehat{C\hat{A}P} + \widehat{P\hat{A}B} = \widehat{C\hat{A}Q} + \widehat{Q\hat{A}B} = 180^\circ$ (Teorema 3.17). Trace o segmento PQ e denote por H o ponto de interseção de PQ com a reta r . Se $H = A$,

então $B\hat{H}P = B\hat{H}Q$ e os pontos P, H e Q pertencem a mesma reta, ou seja, $B\hat{H}P$ e $B\hat{H}Q$ são ambos retos (Teorema 3.17). Logo a reta PQ é perpendicular a uma reta r . Se $H \neq A$, então os triângulos HAP e HAQ são congruentes pelo caso LAL, já que $P\hat{A}H = Q\hat{A}H$, $AP = AQ$ e AH é lado comum. Portanto, $A\hat{H}P = A\hat{H}Q = 90^\circ$ pois $A\hat{H}P$ e $A\hat{H}Q$ são congruentes e H pertence a reta PQ (Teorema 3.17). Logo, em ambos os casos a reta PH é perpendicular a r . Provemos agora a unicidade. De fato, seja H' um ponto de r com $H' \neq H$ com PH' perpendicular a reta r . Assim, no triângulo HPH' os ângulos internos $P\hat{H}H'$ e $P\hat{H}'H$ são ambos retos, o que é uma contradição. Logo, PH é a única reta perpendicular a r .

Teorema 3.26 *Se r e s são duas retas distintas e perpendiculares a uma mesma reta, então r e s são paralelas.*

Demonstração: Se as retas r e s se intersectassem, formar-se-ia um triângulo com pelo menos dois ângulos internos e retos. Assim um dos ângulos externos do triângulo formado é reto, o que é uma contradição pelo Teorema do Ângulo Externo.

Teorema 3.27 *Para todo ponto P fora de uma reta r , existe uma reta s passando por P tal que r e s são paralelas.*

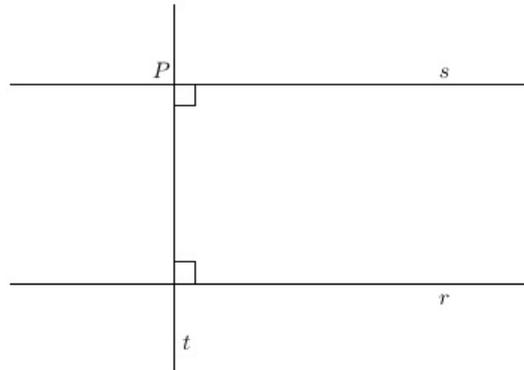


Figura 3.19: Existência de uma reta s paralela a r e que passa por P ($P \notin r$)

Demonstração: Pelo Teorema 3.25 existe uma reta t perpendicular a r e que passa pelo ponto P . Aplicando novamente o Teorema 3.25, segue-se que existe uma reta s passando por P e perpendicular a reta t . Como r e s são perpendiculares a reta t , temos pelo teorema anterior que r e s são paralelas.

Definição 3.14 Dado um triângulo ABC diremos que o lado BC opõe-se ao ângulo \hat{A} , ou, de maneira equivalente, que o ângulo A é oposto ao lado BC . Diremos que AB é maior que CD ($AB > CD$) quando $\overline{AB} > \overline{CD}$ e diremos que AB é menor que CD ($AB < CD$) quando $\overline{AB} < \overline{CD}$.

Teorema 3.28 Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados também não são congruentes e o maior ângulo é aquele que é oposto ao maior lado.

Demonstração: Dado um triângulo ABC com $AC > AB$, devemos provar que

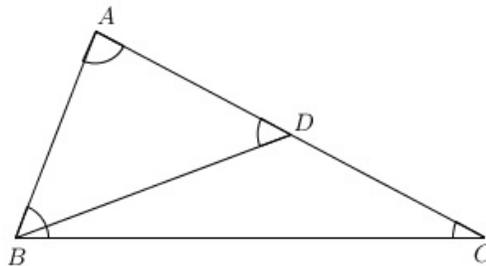


Figura 3.20: Triângulo ABC com $AC > AB$

$\hat{B} > \hat{C}$. De fato, seja D um ponto entre A e C tal que $AD = AB$. Aplique o Teorema do Ângulo Externo ao triângulo BCD e observe que $B\hat{D}A > B\hat{C}D$. Como $AB = AD$, o triângulo ABD é isósceles, ou seja, $D\hat{B}A = B\hat{D}A$. Logo, $D\hat{B}A > B\hat{C}D$. Mas, $D \in \text{int}(AC)$ assim $D \in \text{int}(A\hat{B}C)$, ou seja, $A\hat{B}C = A\hat{B}D + D\hat{B}C > B\hat{C}D = \hat{C}$ (Axioma 3.10).

Teorema 3.29 Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados que se opõem a estes ângulos também não são congruentes e o maior lado é aquele que se opõe ao maior ângulo.

Demonstração: Dado um triângulo ABC com $\hat{B} > \hat{C}$, provemos que $AC > AB$. Se $AB = AC$, então o triângulo ABC é isósceles. Assim, $\hat{B} = \hat{C}$, o que é uma contradição. Se $AC < AB$, então pelo teorema anterior teremos $\hat{B} < \hat{C}$, o que também é uma contradição. Logo, a única possibilidade é que o lado AC seja maior que o lado AB .

Teorema 3.30 Sejam dados um triângulo ABC e um ponto D entre A e B . Se $BC > AC$ ou $BC = AC$, então $CD < BC$.

Demonstração: Se $BC = AC$, então o triângulo ABC é isósceles, ou seja, $C\hat{A}B = C\hat{B}D$. Se $BC > AC$, então pelo Teorema 3.28 teremos $C\hat{A}B > C\hat{B}D$.

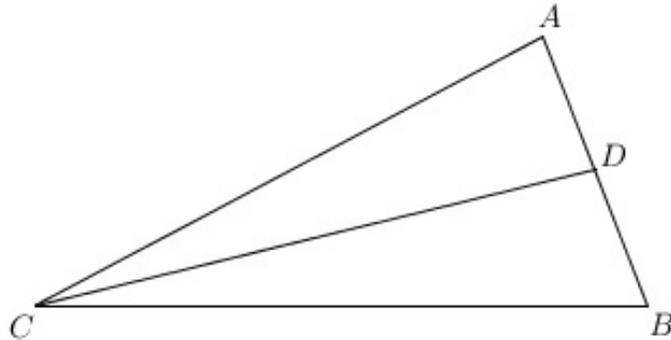


Figura 3.21: Segmento CD no triângulo ABC com D entre A e B

Portanto, se $BC > AC$ ou $BC = AC$, teremos $C\hat{A}B \geq C\hat{B}D$. Aplicando o Teorema do Ângulo Externo ao triângulo ACD , obtemos a desigualdade $C\hat{D}B > C\hat{A}B$. Assim, temos que $C\hat{D}B > C\hat{A}B \geq C\hat{B}D$, ou seja, $C\hat{D}B > C\hat{B}D$. Logo, pelo Teorema 3.29 obtemos $CB > CD$, ou seja, $CD < BC$.

Teorema 3.31 *Se ABC e DEF são dois triângulos tais que $AB = DE$, $AC = DF$ e $\hat{A} > \hat{D}$ então $BC > EF$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor que $DE \geq DF$. Pelo Corolário 3.2 existe um único ponto G no semiplano determinado por DF e que contém E , tal que $F\hat{D}G = C\hat{A}B$ e $DG = AB$. Trace o segmento GF e observe que os triângulos FDG e CAB são congruentes pelo caso LAL. Logo, $GF = BC$. Trace agora o segmento GE e conclua que $D\hat{G}E = D\hat{E}G$, já que $DE = DG$. Como G e E estão no mesmo lado de DF e $F\hat{D}G = C\hat{A}B > F\hat{D}E$, então $E \in \text{int}(F\hat{D}G)$ (Teorema 3.16).

Assim, concluímos que S_{DE} intersecta o interior de FG num ponto H (Teorema 3.10). Como $DG = DE \geq DF$, pelo teorema anterior temos que $DH < DG = DE$. Logo, o ponto H está entre os pontos D e E , ou seja, $H \in \text{int}(D\hat{G}E)$ (Teorema 3.9). Mas, S_{GF} intersecta o interior de DE , ou seja, $F \in \text{int}(D\hat{G}E)$ (Teorema 3.11). Como S_{ED} intersecta o interior de GF , temos também que $H \in \text{int}(G\hat{E}F)$. Assim, $F \in \text{int}(D\hat{G}E)$ e $H \in \text{int}(G\hat{E}F)$, o que implica $F\hat{G}E < D\hat{G}F + F\hat{G}E = D\hat{G}E$ e $D\hat{E}G < F\hat{E}D + D\hat{E}G = F\hat{E}G$ (Axioma 3.10). Da igualdade $D\hat{G}E = D\hat{E}G$, obtemos $F\hat{G}E < F\hat{E}G$, ou seja, $FE < GF$ (Teorema 3.29). Já foi provado que $GF = BC$, daí $FE < BC$, ou seja, $BC > EF$.

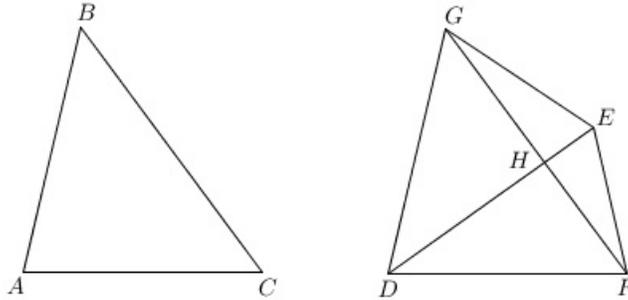


Figura 3.22: Congruência dos triângulos FDG e CAB e a desigualdade $BC > EF$

Teorema 3.32 *Se ABC e DEF são dois triângulos tais que $AB = DE$, $AC = DF$ e $BC > EF$, então $\hat{A} > \hat{D}$.*

Demonstração: Se $A = D$ então os triângulos ABC e DEF são congruentes pelo caso LAL. Se $D > A$, então pelo teorema anterior teríamos $EF > BC$, o que contraria a hipótese inicial de que $BC > EF$. Logo, $\hat{A} > \hat{D}$.

Teorema 3.33 *Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos.*

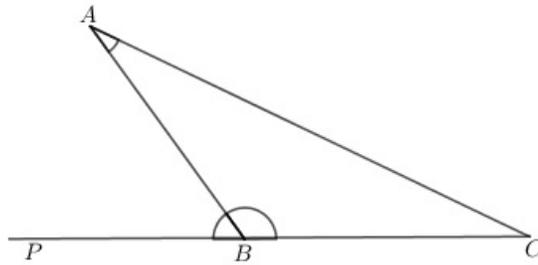


Figura 3.23: ABC possui pelo menos dois ângulos internos agudos

Demonstração: Seja dado um triângulo ABC . Suponha que os ângulos \hat{A} e \hat{B} sejam obtusos. Sobre a reta BC marque um ponto P de maneira que B esteja entre P e C . Pelo Teorema 3.17, temos que $\hat{A\hat{B}P} + \hat{A\hat{B}C} = 180^\circ$. Como $\hat{A\hat{B}C} = \hat{B} > 90^\circ$, concluímos que $\hat{A\hat{B}P} < 90^\circ$, ou seja, $\hat{A\hat{B}P}$ é agudo. Observe que o ângulo interno \hat{A} não é adjacente ao ângulo externo $\hat{A\hat{B}P}$. Portanto, pelo Teorema do Ângulo Externo $\hat{A\hat{B}P} > \hat{A}$, o que é uma contradição já que por hipótese \hat{A} é obtuso.

Definição 3.15 Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado triângulo retângulo.

Teorema 3.34 Seja dado um triângulo ABC . Se \hat{B} e \hat{C} são ângulos agudos, então existe um ponto $D \in \text{int}(BC)$ tal que o segmento AD é perpendicular a BC . Neste caso, dizemos que ABC foi dividido em dois triângulos retângulos.

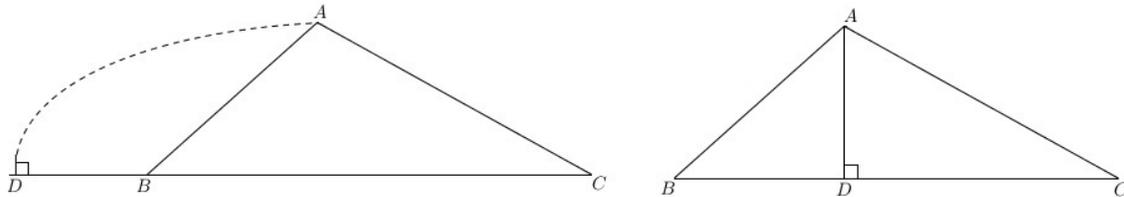


Figura 3.24: Divisão de um triângulo ABC em dois triângulos retângulos

Demonstração: Trace a perpendicular do vértice A à reta BC , sendo D o ponto de intersecção com a reta BC . Pelo Teorema 3.25 existe uma única reta que passa por A que seja perpendicular a reta BC . Portanto, a reta AD é única (o segmento AD chama-se altura de ABC a partir de A). Provemos que D situa-se entre B e C . De fato, se o ponto B estivesse entre D e C , teríamos $\hat{A}BC > \hat{ADB}$ (Teorema do Ângulo Externo). Analogamente, se C estivesse entre B e D , teríamos $\hat{ACB} > \hat{ADC}$, ou seja, novamente uma contradição. Logo, o ponto D está entre B e C , ou seja, $D \in \text{int}(BC)$. Note que, $D \neq B$ e $D \neq C$, pois por hipótese \hat{B} e \hat{C} são agudos.

Teorema 3.35 (*Desigualdade Triangular*) Se A , B e C são três pontos não colineares, então $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$

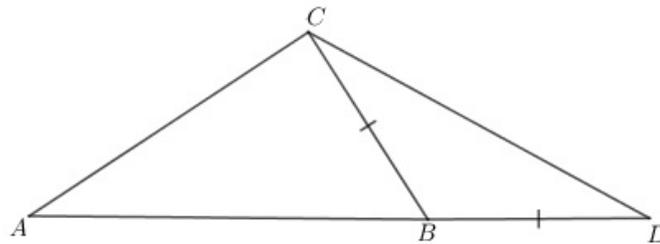


Figura 3.25: Desigualdade Triangular

Demonstração: Seja D um ponto da reta AB , tal que B esteja entre A e D com $BD = BC$. Portanto, $B\hat{C}D = B\hat{D}C$ e como $B \in \text{int}(AD)$, temos que, $B \in \text{int}(A\hat{C}D)$, ou seja, $A\hat{C}D = A\hat{C}B + B\hat{C}D$. Logo, $A\hat{C}D > B\hat{C}D = B\hat{D}C$. Pelo Teorema 3.29, temos que $AC < AD$, já que no triângulo ACD , vale a desigualdade $A\hat{C}D > A\hat{D}C$ ($A\hat{C}D > B\hat{D}C$ e $B\hat{D}C = A\hat{D}C$). Como $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$, obtemos $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$.

Teorema 3.36 (*Desigualdade Poligonal*) *Dados os pontos P_1, P_2, \dots, P_n ($n > 1$) vale a desigualdade $\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n} \geq \overline{P_1P_n}$.*

Demonstração: Faremos a demonstração por indução em n , sendo n o número de pontos.

Vamos começar com $n = 3$. Se P_1, P_2 e P_3 são três pontos não colineares, então a Desigualdade Triangular garante que

$$\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} > \overline{P_1P_3}$$

Se P_1, P_2 e P_3 são três pontos colineares então um, e somente um ponto situa-se entre os outros dois.

(I) Se P_2 está entre P_1 e P_3 então, $\overline{P_1P_3} = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3}$.

(II) Se P_3 está entre P_1 e P_2 então, $\overline{P_1P_3} < \overline{P_1P_2} < \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3}$.

(III) Se P_1 está entre P_2 e P_3 então, $\overline{P_1P_3} < \overline{P_2P_3} < \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3}$.

Portanto, para $n = 3$ vale $\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} \geq \overline{P_1P_3}$.

Agora, suponha que para P_1, P_2, \dots, P_n , tenhamos

$$\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n} \geq \overline{P_1P_n}$$

Precisamos provar que para $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}$ teremos

$$\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \dots + \overline{P_nP_{n+1}} \geq \overline{P_1P_{n+1}}$$

De fato, para os pontos P_1, P_n e P_{n+1} vale a desigualdade

$$\overline{P_1P_n} + \overline{P_nP_{n+1}} \geq \overline{P_1P_{n+1}}.$$

Assim, temos que

$$\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n} + \overline{P_nP_{n+1}} \geq \overline{P_1P_n} + \overline{P_nP_{n+1}} \geq \overline{P_1P_{n+1}}.$$

Logo, o resultado segue pelo Princípio da Indução Finita.

Capítulo 4

As três hipóteses de Saccheri

Nos primeiros capítulos já falamos que o padre jesuíta Gerolamo Saccheri, tentou demonstrar o Quinto Postulado tomando como premissas os quatro primeiros postulados e as vinte e oito proposições apresentadas nos elementos (o quinto postulado só é utilizado a partir da proposição 29 nos Elementos, sendo as vinte e oito primeiras válidas para qualquer outra geometria). Também já foi dito que Saccheri fez uso de uma figura fundamental em seu trabalho que é chamada de quadrilátero de Saccheri.

Usando a propriedade de congruência entre triângulos é fácil provar que os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri são congruentes.

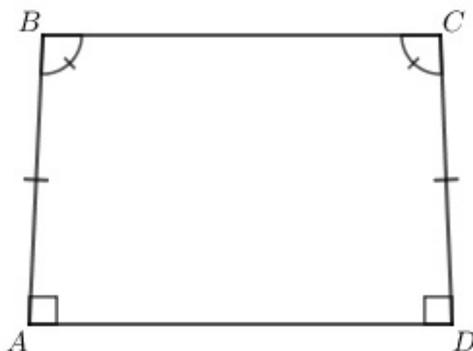


Figura 4.1: Quadrilátero de Saccheri $ABCD$ com os ângulos do topo \hat{B} e \hat{C}

No caso, o quadrilátero acima, é um quadrilátero de Saccheri, sendo \hat{B} e \hat{C} os ângulos do topo.

O objetivo principal de Saccheri era provar o fato de que os ângulos \hat{B} e \hat{C} serem agudos ou obtusos entra em contradição com as vinte e oito primeiras proposições dos Elementos de Euclides.

Assim, Saccheri considerou três hipóteses a respeito dos ângulos do topo de seu quadrilátero, a saber:

(I) Hipótese do Ângulo Agudo: os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri são agudos.

(II) Hipótese do Ângulo Reto: os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri são retos.

(III) Hipótese do Ângulo Obtuso: os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri são obtusos.

Portanto, para os teoremas e demonstrações deste capítulo, supor, por exemplo, que os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos é equivalente a considerar a Hipótese do Ângulo Agudo.

4.1 Quadriláteros

Definição 4.1 *Sejam dados quatro pontos A , B , C e D que estejam no mesmo plano, com três a três não colineares. Se os conjuntos $int(AB)$, $int(BC)$, $int(CD)$ e $int(DA)$ são dois a dois disjuntos, a figura assim formada é chamada de quadrilátero e será denotado por quadrilátero $ABCD$ ou simplesmente $ABCD$. Os pontos A , B , C e D são os vértices de $ABCD$ e os segmentos AB , BC , CD e DA são os lados de $ABCD$. Os ângulos de $ABCD$ são $\hat{A}BC$, $\hat{B}CD$, $\hat{C}DA$ e $\hat{D}AB$, que podem ser denotados por \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} e \hat{A} . Dois lados de $ABCD$ que possuem um ponto em comum são chamados de adjacentes, os outros lados são denominados de opostos. Os segmentos AC e BD são as diagonais.*

De acordo com a definição acima é fácil ver que vale a congruência dos quadriláteros $ABCD$, $DCBA$, $BCDA$, $CDAB$ e $DABC$. Observe também que não falamos de retângulo, nem das condições para sua existência, o que será feito no próximo capítulo.

Definição 4.2 *Um quadrilátero é dito convexo quando cada lado do mesmo está contido num dos semiplanos determinados pela reta que contém o seu lado oposto.*

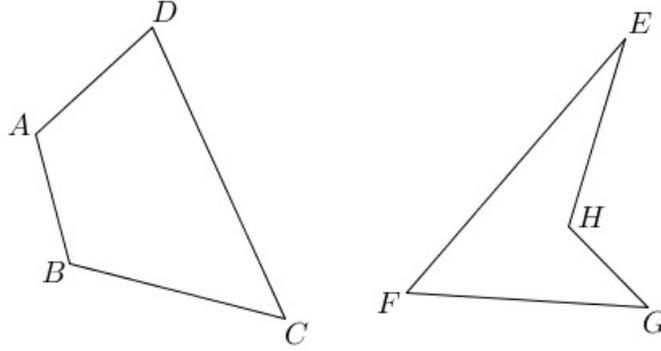


Figura 4.2: Quadriláteros $ABCD$ e $EFGH$

Teorema 4.1 *Um quadrilátero é convexo se, e somente se, o vértice de cada ângulo do quadrilátero pertence ao interior do ângulo do qual é oposto.*

Demonstração: Seja dado um quadrilátero $ABCD$. Se $A \in \text{int}(\widehat{BCD})$, então os pontos A e B estão no mesmo semiplano da reta CD , ou seja, o segmento AB está contido num dos semiplanos da reta CD . Analogamente, se $B \in \text{int}(\widehat{CDA})$, $C \in \text{int}(\widehat{DAB})$ e $D \in \text{int}(\widehat{ABC})$, temos, respectivamente, que o segmento BC está contido num dos semiplanos de AD , o segmento CD está contido num dos semiplanos de AB e o segmento AD está contido num dos semiplanos de BC . Logo, $ABCD$ é convexo. Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Assim, os pontos A e D pertencem ao mesmo semiplano determinado pela reta BC e os pontos A e B pertencem ao mesmo semiplano determinado pela reta CD . Portanto, $A \in \text{int}(\widehat{BCD})$. Como os quadriláteros $ABCD$, $DCBA$, $BCDA$, $CDAB$ e $DABC$ são convexos, é fácil ver que, $B \in \text{int}(\widehat{CDA})$, $C \in \text{int}(\widehat{DAB})$ e $D \in \text{int}(\widehat{ABC})$.

Definição 4.3 *Seja dado um quadrilátero $ABCD$. Os segmentos AC e BD são chamados de diagonais de $ABCD$.*

Teorema 4.2 *As diagonais de um quadrilátero convexo se intersectam.*

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Então $C \in \text{int}(\widehat{BAD})$ e S_{AC} intersecta o interior do segmento BD (Teorema 3.10) num ponto P . De maneira análoga, S_{BD} intersecta o interior de AC num ponto Q . Como AC e BD são retas distintas com P e Q pertencendo a ambas, temos que $P = Q$. Logo, $P \in \text{int}(AC) \cap \text{int}(BD)$, ou seja, as diagonais se intersectam em P .

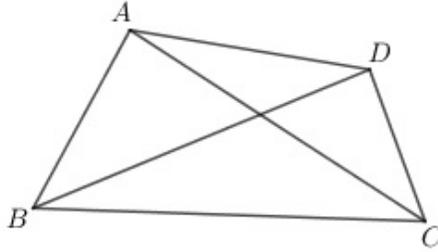


Figura 4.3: Diagonais AC e BD do quadrilátero convexo $ABCD$

4.2 Os quadriláteros de Saccheri

Teorema 4.3 *Todo quadrilátero $ABCD$ com ângulos retos em A e D é convexo.*

Demonstração: Inicialmente, observe que de acordo com a definição de quadrilátero os lados AD e BC não podem se intersectar.

Provemos agora que todos os pontos do segmento BC estão no mesmo lado da reta AD . De fato, suponha que os pontos B e C estejam em lados opostos da reta AD . Seja E o ponto de intersecção do lado BC com a reta AD . Como BC não intersecta o lado AD , o ponto A está entre E e D ou o ponto D está entre A e E . No primeiro caso, observe que, pelo Teorema do Ângulo Externo (Teorema 3.24) o ângulo $\hat{D}\hat{E}B$ é maior que o ângulo reto $\hat{C}\hat{D}E$. Isso é uma contradição, pois $\hat{B}\hat{A}D$ é reto. No segundo caso, o Teorema do Ângulo Externo garante que o ângulo $\hat{C}\hat{E}A$ é maior que o ângulo reto $\hat{B}\hat{A}E$. Novamente temos uma contradição, pois $\hat{C}\hat{D}A$ é reto. Assim, os pontos B e C estão no mesmo lado da reta AD . Logo, pelo Axioma 3.6, todos os pontos do segmento BC estão no mesmo lado a reta AD . Provemos agora que todos os pontos do segmento AD estão no mesmo lado da reta BC . De fato, suponha que os pontos A e D estejam em lados opostos da reta BC . Seja F o ponto de intersecção do lado AD com a reta BC . Então o ponto B está a entre F e C ou C está entre B e F . No primeiro caso, temos, pelo Teorema do Ângulo Externo, que $\hat{B}\hat{F}A > \hat{C}\hat{D}F = 90^\circ$. Contradição, pois o triângulo ABF teria dois ângulos não agudos. No segundo caso, temos, novamente pelo Teorema do Ângulo Externo, que $\hat{C}\hat{F}D > \hat{B}\hat{A}F = 90^\circ$. Contradição, pois o triângulo CDF teria dois ângulos não agudos. Assim, os pontos A e D estão no mesmo lado da reta BC . Logo, pelo Axioma 3.6, todos os pontos do segmento AD estão no mesmo lado da reta BC .

Pelo Teorema 3.26, as retas AB e CD são paralelas. Assim, cada lado do quadrilátero $ABCD$ tem todos os pontos pertencendo ao mesmo semiplano em relação ao lado oposto. Logo, $ABCD$ é convexo.

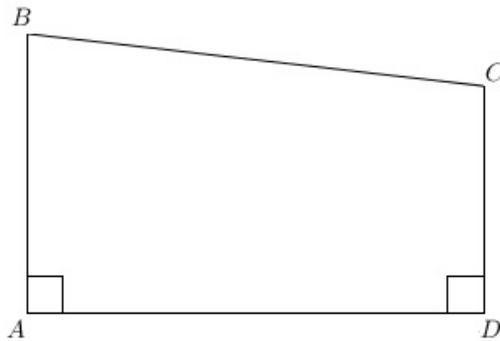


Figura 4.4: Quadrilátero $ABCD$ com ângulos retos em A e D

Definição 4.4 *Seja $ABCD$ um quadrilátero, em que os lados AB e DC são congruentes e perpendiculares ao lado AD . Tal quadrilátero é chamado de **quadrilátero de Saccheri**. Os lados AD e BC são chamados, respectivamente, de **base** e **topo**, os ângulos \hat{A} e \hat{D} são chamados de **ângulos da base** e os ângulos \hat{B} e \hat{C} são chamados **ângulos do topo**.*

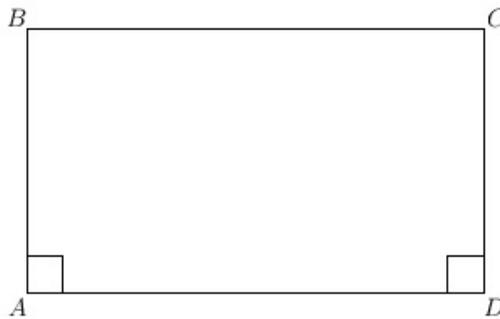


Figura 4.5: Quadrilátero de Saccheri $ABCD$

Corolário 4.1 *Todo quadrilátero de Saccheri é convexo.*

Demonstração: Segue diretamente do teorema anterior.

Teorema 4.4 *Os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são congruentes.*

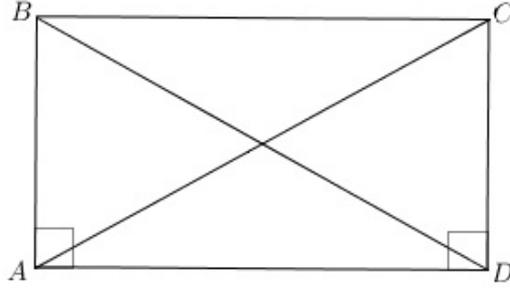


Figura 4.6: Diagonais AC e BD do quadrilátero de Saccheri $ABCD$

Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri com ângulos retos em A e D . Trace as diagonais os AC e DB . Note que o lado AD é comum aos triângulos BAD e CDA . Como $AB = DC$ e os ângulos $\hat{B}AD$ e $\hat{C}DA$ são retos, pelo caso LAL os triângulos BAD e CDA são congruentes, ou seja, $AC = BD$.

Agora, observe que BC é lado comum aos triângulos ACB e DBC . Como $AB = DC$ e $AC = DB$, pelo caso LLL, os triângulos ACB e DBC são congruentes, daí $\hat{A}BC = \hat{D}CB$.

Teorema 4.5 *Se uma reta intersecta os pontos médios da base e do topo de um quadrilátero de Saccheri, então tal reta é perpendicular a base e ao topo do quadrilátero.*

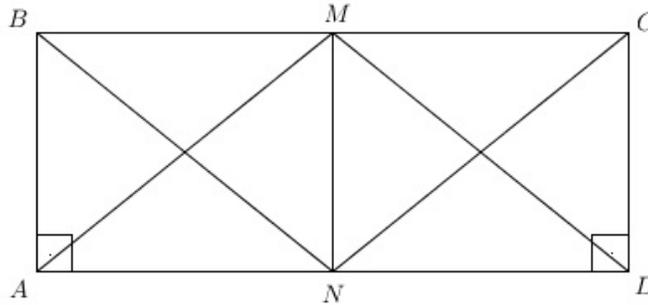


Figura 4.7: MN é perpendicular a base e ao topo de $ABCD$

Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri com ângulos retos em \hat{A} e \hat{D} , em que M é ponto médio de BC e N é ponto médio de AD . Trace a reta MN

e os segmentos AM , DM , CN e BN . Como $AB = DC$, $AN = ND$ e $\hat{B}\hat{A}\hat{N} = \hat{C}\hat{D}\hat{N}$, aplicando o caso de congruência LAL, os triângulos BAN e CDN são congruentes, ou seja, $BN = CN$. Também temos que $\hat{A}\hat{B}\hat{M} = \hat{D}\hat{C}\hat{M}$ pelo Teorema 4.4 e que M é ponto médio de BC . Assim, aplica-se novamente o caso de congruência LAL aos triângulos ABM e DCM , obtendo $AM = DM$. Aplicando o caso de congruência LLL aos triângulos AMN e DMN obtemos $\hat{A}\hat{N}\hat{M} = \hat{D}\hat{N}\hat{M}$. Como $\hat{A}\hat{N}\hat{M} + \hat{D}\hat{N}\hat{M} = 180^\circ$ (Teorema 3.17), temos que $\hat{A}\hat{N}\hat{M} = \hat{D}\hat{N}\hat{M} = 90^\circ$. De forma análoga, aplicando o caso de congruência LLL e o Teorema 3.17 aos triângulos BMN e CMN , obtemos $\hat{B}\hat{M}\hat{N} = \hat{C}\hat{M}\hat{N} = 90^\circ$.

Teorema 4.6 *Seja $ABCD$ um quadrilátero com ângulos retos em A e D . Então, temos:*

- (I) $AB < CD$ se, e somente se, $\hat{B} > \hat{C}$;
- (II) $AB = CD$ se, e somente se, $\hat{B} = \hat{C}$;
- (III) $AB > CD$ se, e somente se, $\hat{B} < \hat{C}$;

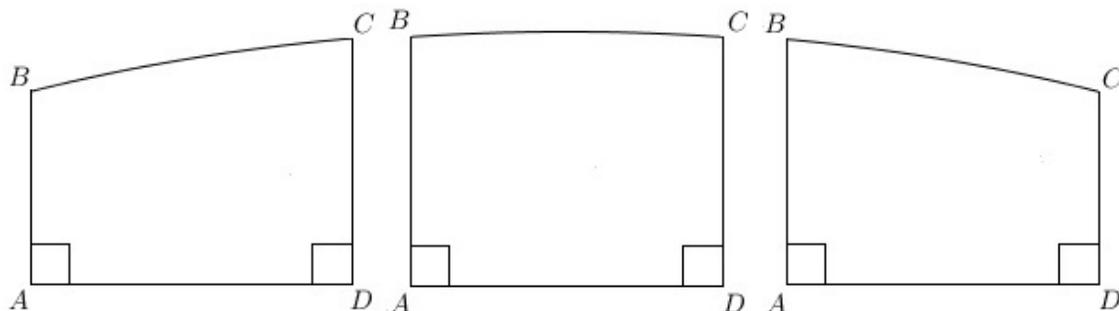


Figura 4.8: Quadriláteros $ABCD$ com ângulos retos em A e D

Demonstração: Suponha que $AB < CD$. Marque no segmento CD o ponto E de forma que $DE = AB$. Trace o segmento BE e observe que $ABED$ é um quadrilátero de Saccheri. Assim, pelo Teorema 4.4, os ângulos $\hat{A}\hat{B}\hat{E}$ e $\hat{D}\hat{E}\hat{B}$ são congruentes. É fácil ver que $E \in \text{int}(\hat{A}\hat{B}\hat{C})$ (veja Definição 3.5). Assim temos $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{A}\hat{B}\hat{E} + \hat{E}\hat{B}\hat{C}$ (Axioma 3.10). Logo, $\hat{A}\hat{B}\hat{C} > \hat{A}\hat{B}\hat{E} = \hat{D}\hat{E}\hat{B}$. Mas, pelo Teorema do Ângulo Externo, também podemos escrever a desigualdade $\hat{D}\hat{E}\hat{B} > \hat{D}\hat{C}\hat{B}$, ou seja, $\hat{A}\hat{B}\hat{E} > \hat{D}\hat{C}\hat{B}$. Portanto, $\hat{A}\hat{B}\hat{C} > \hat{A}\hat{B}\hat{E} > \hat{D}\hat{C}\hat{B}$.

Se $AB = CD$ então $ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri. Portanto, pelo Teorema

4.4, segue que $\hat{A}\hat{B}C = D\hat{C}B$.

Considerando o primeiro caso provado e argumentos de simetria, é fácil ver que $\hat{A}\hat{B}C < D\hat{C}B$ quando $AB > CD$.

As recíprocas dos itens (I), (II) e (III) são facilmente provadas, pois as condições $\hat{B} < \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{C}$ e $\hat{B} > \hat{C}$ se excluem mutuamente e as alternativas $AB < CD$, $AB = CD$ e $AB > CD$ esgotam todas as possibilidades.

Definição 4.5 Um quadrilátero $ABCD$ que tem ângulos retos em A , B e D chama-se um **quadrilátero de Lambert**.

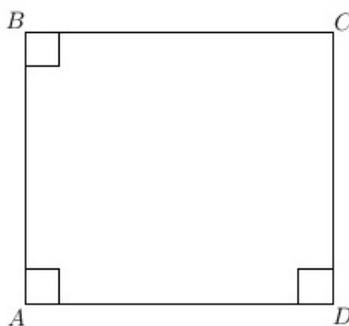


Figura 4.9: Quadrilátero de Lambert com ângulos retos em A , B e D .

Teorema 4.7 Seja $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri com ângulos retos em A e D . Se M e N são os pontos médios de BC e AD , respectivamente, então $NMBA$ e $NMCD$ são quadriláteros de Lambert. Se $NMBA$ é um quadrilátero de Lambert, então existem dois pontos C e D (únicos) tais que $ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri com ângulos retos em \hat{A} e \hat{D} , no qual M e N são os pontos médios de BC e AD , respectivamente.

Demonstração: A demonstração da primeira parte segue diretamente do Teorema 4.5. Provemos então a segunda parte. Sobre o prolongamento do segmento AN , marque o ponto D de forma que N esteja entre A e D , com $ND = AN$. Agora, sobre o prolongamento de BM , marque o ponto C , com M entre B e C , de forma que $BM = MC$. Trace o segmento CD . Como $\hat{B}\hat{M}N$ e $\hat{A}\hat{N}M$ são ângulos retos, MN é perpendicular a ambos os segmentos AD e BC , ou seja, $\hat{C}\hat{M}N$ e $\hat{D}\hat{N}M$ são ângulos retos. Trace os segmentos BN e NC . Pelo caso LAL, $BN = NC$, pois $BM = MC$, $\hat{B}\hat{M}N = \hat{C}\hat{M}N$ e MN é lado comum aos triângulos BMN e CMN .

Como BMN e CMN são triângulos congruentes, é fácil ver que $\hat{A}\hat{N}B = \hat{D}\hat{N}C$. Assim, $AN = ND$, $BN = NC$ e $\hat{A}\hat{N}B = \hat{D}\hat{N}C$, ou seja, $AB = DC$, já que pelo caso LAL os triângulos ABN e DCN são congruentes. Pela congruência de ABN e DCN , temos que $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ e $AB = DC$, ou seja, $ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri. Provemos agora a unicidade dos pontos C e D . De fato, sejam C' e D' dois pontos tais que $ABC'D'$ é um quadrilátero de Saccheri com M e N sendo os pontos médios de BC' e AD' , respectivamente. Como C e C' estão no mesmo lado da reta MN , $\hat{C}\hat{M}N = \hat{C}'\hat{M}N = 90^\circ$ e $\overline{MC} = \overline{MC}'$, o Corolário 3.2 garante que $C = C'$. De forma inteiramente análoga, temos que $D' = D$.

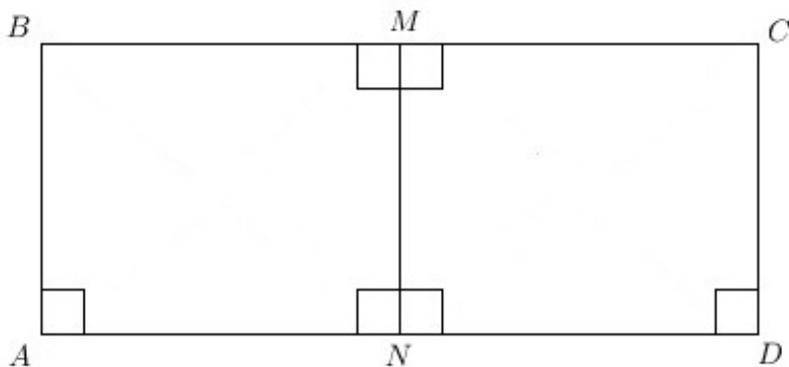


Figura 4.10: Quadrilátero de Saccheri dividido em dois quadriláteros de Lambert

Teorema 4.8 *Sejam $ABCD$ e $A'B'C'D'$ dois quadriláteros de Lambert com $\hat{A} = \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$ e $\hat{A}' = \hat{B}' = \hat{D}' = 90^\circ$. Se $AD = A'D'$ e $DC = D'C'$, então $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são congruentes.*

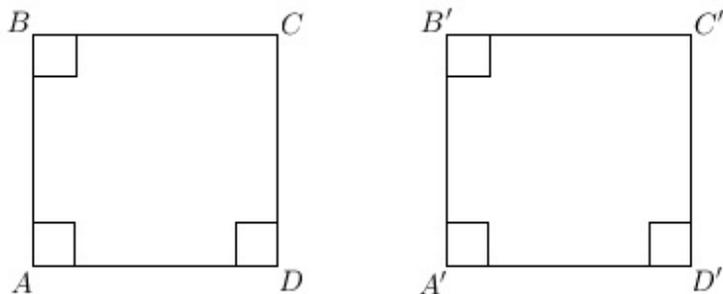


Figura 4.11: Congruência dos quadriláteros de Lambert $ABCD$ e $A'B'C'D'$

Demonstração: Como $AD = A'D'$, $DC = D'C'$ e $\hat{D} = \hat{D}' = 90^\circ$, o caso LAL garante que os triângulos ADC e $A'D'C'$ são congruentes. Logo, $AC = A'C'$. Agora observe que $B\hat{A}C = B'\hat{A}'C'$, pois $A = A' = 90^\circ$ e $C\hat{A}D = C'\hat{A}'D'$. Como $\hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ$, $B\hat{A}C = B'\hat{A}'C'$ e $AC = A'C'$ os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes (caso LAA). Portanto, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $AD = A'D'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$. Como por hipótese $\hat{A} = \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$ e $\hat{A}' = \hat{B}' = \hat{D}' = 90^\circ$, temos que $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são congruentes.

Corolário 4.2 *Sejam $ABCD$ e $A'B'C'D'$ dois quadriláteros de Saccheri com $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ e $\hat{A}' = \hat{D}' = 90^\circ$. Se $AD = A'D'$ e $DC = D'C'$, então $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são congruentes.*

Demonstração: Sejam M, M', N, N' os respectivos pontos médios dos lados $BC, B'C', AD$ e $A'D'$. Então $NMCD$ e $N'M'C'D'$ são quadriláteros de Lambert, e pelo teorema anterior os mesmos são congruentes. Assim, é fácil ver que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$. Como por hipótese $AD = A'D'$, $DC = D'C'$, $A = A' = 90^\circ$ e $\hat{D} = \hat{D}' = 90^\circ$, temos que $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são quadriláteros congruentes.

Teorema 4.9 *Se $ABCD$ é um quadrilátero de Lambert com ângulos retos em A, B e D , então $BC > AD$ se, e somente se, \hat{C} é agudo, $BC = AD$ se, e somente se, \hat{C} é reto e $BC < AD$ se, e somente se, \hat{C} é obtuso.*

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 4.6.

Teorema 4.10 *Num quadrilátero de Saccheri o topo é maior, igual ou menor que a base, conforme os ângulos do topo sejam, respectivamente, agudos, retos ou obtusos.*

Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri com ângulos retos em \hat{A} e \hat{D} , no qual M e N são os pontos médios dos segmentos BC e AD respectivamente. Pelo Teorema 4.7 $NMCD$ é um quadrilátero de Lambert, assim, o teorema anterior garante $MC > ND$ quando \hat{C} é agudo, $MC = ND$ quando \hat{C} é reto e $MC < ND$ quando \hat{C} é obtuso. Como $BC = 2MC$, $AD = 2ND$ e $\hat{B} = \hat{C}$, temos que $BC > AD$ quando \hat{B} e \hat{C} são agudos, $BC = AD$ quando \hat{B} e \hat{C} são retos e $BC < AD$ quando \hat{B} e \hat{C} são obtusos.

Teorema 4.11 *Sejam $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri com ângulos retos em A e D , E um ponto do interior de BC e F um ponto do interior de AD . Se EF é perpendicular a AD , então:*

(I) \hat{B} é agudo se, e somente se, $EF < AB$;

(II) \hat{B} é reto se, e somente se, $EF = AB$;

(III) \hat{B} é obtuso se, e somente se $EF > AB$;

Demonstração: Provaremos, inicialmente, as recíprocas de cada um dos itens (I), (II) e (III). Suponha que $EF < AB$. Então, pelo Teorema 4.6, $\hat{A}\hat{B}\hat{C} < \hat{F}\hat{E}\hat{B}$ e $\hat{D}\hat{C}\hat{B} < \hat{F}\hat{E}\hat{C}$. Como $\hat{F}\hat{E}\hat{B} + \hat{F}\hat{E}\hat{C} = 180^\circ$ e $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{D}\hat{C}\hat{B}$, segue que $2\hat{A}\hat{B}\hat{C} < 180^\circ$, ou seja, $\hat{A}\hat{B}\hat{C} < 90^\circ$.

Se $EF = AB = CD$, então $ABEF$ e $FECD$ são quadriláteros de Saccheri, ou seja, $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{F}\hat{E}\hat{B}$ e $\hat{D}\hat{C}\hat{B} = \hat{F}\hat{E}\hat{C}$ (Teorema 4.4). Portanto, $2\hat{A}\hat{B}\hat{C} = 180^\circ$, ou seja, $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = 90^\circ$.

Suponha agora que $EF > AB$. Então $\hat{A}\hat{B}\hat{C} > \hat{F}\hat{E}\hat{B}$ e $\hat{D}\hat{C}\hat{B} > \hat{F}\hat{E}\hat{C}$ (Teorema 4.6). Logo, $2\hat{A}\hat{B}\hat{C} > 180^\circ$, ou seja, $\hat{A}\hat{B}\hat{C} > 90^\circ$.

A demonstração do teorema se completa observando que as condições $\hat{B} < 90^\circ$, $\hat{B} = 90^\circ$ e $\hat{B} > 90^\circ$ se excluem mutuamente e as alternativas $EF < AB$, $EF = AB$ e $EF > AB$ esgotam todas as possibilidades.

Teorema 4.12 *Seja $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri com ângulos retos em A e D . Tome o ponto E' sobre a reta BC tal que C esteja entre B e E' . Seja F' um ponto sobre a reta AD tal que D esteja entre A e F' . Se $E'F'$ é perpendicular a reta AD , então:*

(I) \hat{B} é agudo se, e somente se, $E'F' > CD$;

(II) \hat{B} é reto se, e somente se, $E'F' = CD$;

(III) \hat{B} é obtuso se, e somente se, $E'F' < CD$.

Demonstração: Provaremos, inicialmente, a recíproca de cada um dos itens acima. De fato, suponha que $E'F' > CD$ e marque sobre o segmento $E'F'$ o ponto Q de forma que $F'Q = DC$. Trace os segmentos CQ e BQ . Assim, $DCQF'$ e $ABQF'$ são quadriláteros de Saccheri. Observe que o ângulo $F'\hat{Q}B$ é menor que o ângulo $F'\hat{Q}C$ ($B \in \text{int}(F'\hat{Q}C)$). Pelo Teorema do Ângulo Externo o ângulo $Q\hat{C}E'$ é maior que o ângulo $Q\hat{B}C$. Como $D\hat{C}Q = F'\hat{Q}C$ e $A\hat{B}Q = F'\hat{Q}B$, temos que $D\hat{C}E' = D\hat{C}Q + Q\hat{C}E' > A\hat{B}Q + Q\hat{B}C = D\hat{C}B$. Portanto, ângulo $D\hat{C}B$ é agudo já que $D\hat{C}E' + D\hat{C}B = 180^\circ$. Logo o ângulo $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ é agudo.

Se $E'F' = CD$ então $ABE'F'$ é um quadrilátero de Saccheri. Pelo teorema anterior é fácil ver que $A\hat{B}E' = \hat{A}\hat{B}\hat{C} = 90^\circ$.

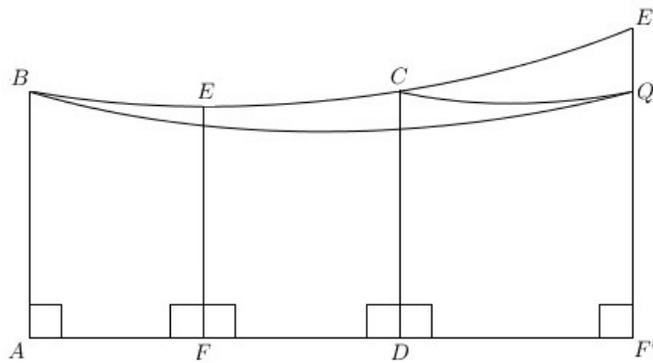


Figura 4.12: Caso (I) dos Teoremas 4.11 e 4.12

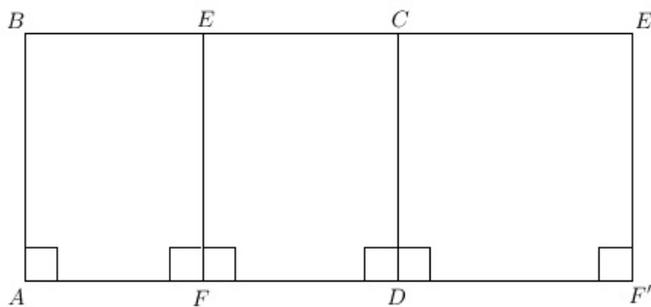


Figura 4.13: Caso (II) dos Teoremas 4.11 e 4.12

Suponha que $E'F' < CD$. Sobre a semirreta $S_{F'E'}$, marque o ponto P de forma que $F'P = DC$. Trace BP e CP e verifique que $DCPF'$ e $ABPF'$ são quadriláteros de Saccheri. Agora, observe que, o ângulo $F'PC$ é menor que o ângulo $F'PB$ ($C \in \text{int}(F'\hat{P}B)$), ou seja, $D\hat{C}P < A\hat{B}P$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, $P\hat{C}E' > P\hat{B}C$. Assim, obtemos $D\hat{C}E' = D\hat{C}P - P\hat{C}E' < A\hat{B}P - P\hat{B}C = A\hat{B}C$. Como $A\hat{B}C = D\hat{C}B$ e $D\hat{C}B + D\hat{C}E' = 180^\circ$, o ângulo $A\hat{B}C$ é obtuso.

Para terminar a demonstração, basta observar que as condições $\hat{B} < 90^\circ$, $\hat{B} = 90^\circ$ e $\hat{B} > 90^\circ$ se excluem mutuamente e as alternativas $E'F' < CD$, $E'F' = CD$ e $E'F' > CD$ esgotam todas as possibilidades.

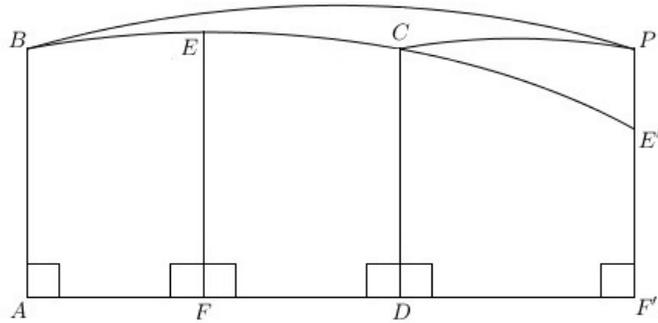


Figura 4.14: Caso (III) dos Teoremas 4.11 e 4.12

Teorema 4.13 *Sejam $NMGH$ um quadrilátero de Lambert ($\hat{H} = \hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$), E é um ponto do interior de GM e F um ponto do interior de HN . Se o segmento EF é perpendicular ao lado HN , então em cada um dos itens (I), (II) e (III) as afirmações (1), (2), (3) e (4) são equivalentes:*

(I) (1) \hat{HGM} é agudo, (2) $EF < GH$, (3) \hat{FEM} é agudo e (4) $MN < EF$;

(II) (1) \hat{HGM} é reto, (2) $EF = GH$, (3) \hat{FEM} é reto e (4) $MN = EF$;

(III) (1) \hat{HGM} é obtuso, (2) $EF > GH$, (3) \hat{FEM} é obtuso e (4) $MN > EF$;

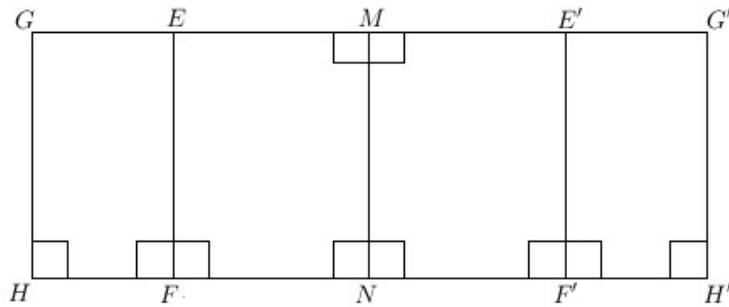


Figura 4.15: Quadrilátero de Lambert $NMGH$ com EF perpendicular a HN

Demonstração: Pelo Teorema 4.7 existem pontos G' e H' (únicos) tais que $HGG'H'$ é um quadrilátero de Saccheri com M e N sendo os pontos médios de GG'

e HH' , respectivamente. De forma análoga, como $NMEF$ é também um quadrilátero de Lambert, existem pontos E' e F' (únicos) tais que $FEE'F'$ é um quadrilátero de Saccheri com M e N sendo os pontos médios de EE' e FF' , respectivamente.

Em cada um dos itens (I), (II) e (III) temos que as afirmações (1) e (2) são equivalentes pelo Teorema 4.11, (2) e (3) são equivalentes pelo Teorema 4.12 e (3) e (4) são equivalentes pelo Teorema 4.11. Logo, em cada um dos itens (I), (II) e (III) as afirmações (1), (2), (3) e (4) são equivalentes.

Teorema 4.14 *Se $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são dois quadriláteros de Saccheri com $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ e $A' = D' = 90^\circ$, então os ângulos do topo de $ABDC$ e $A'B'C'D'$ são ambos agudos ou ambos retos ou ambos obtusos.*

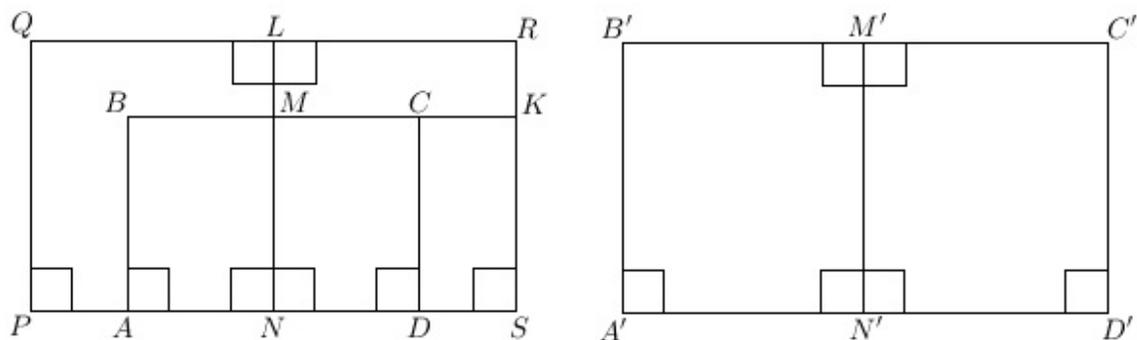


Figura 4.16: Os ângulos do topo de dois quadriláteros de Saccheri $ABDC$ e $A'B'C'D'$

Demonstração: Sejam M e N , respectivamente, os pontos médios dos lados BC e AD do quadrilátero $ABCD$ e que M' e N' sejam, respectivamente, os pontos médios dos lados $B'C'$ e $A'D'$ do quadrilátero $A'B'C'D'$. Sem perda de generalidade podemos supor que $M'N' \geq MN$. Na semirreta S_{NA} , tome o ponto P de forma que $2NP = A'D'$. A partir do ponto P levante a perpendicular PQ com $PQ = A'B'$ e Q pertencendo, em relação a reta AD , ao mesmo lado que o ponto B .

Seja L o pé da perpendicular baixada de Q para a reta NM . Portanto, $NLQP$ é um quadrilátero de Lambert. Pelo Teorema 4.7, existem pontos R e S , determinados de forma única, que tornam $PQRS$ um quadrilátero de Saccheri com L e N sendo os pontos médios dos lados QR e PS , respectivamente. Provemos agora que os ângulos \hat{DCM} e \hat{SRL} dos quadriláteros $ABCD$ e $PQRS$, respectivamente, são ambos agudos ou ambos retos ou ambos obtusos.

Observe que $LN = M'N'$, já que pelo Teorema 4.8, os quadriláteros de Lambert

$NLRS$ e $N'M'C'D'$ são congruentes, daí $LN \geq MN$.

Se $LN = MN$, então o ponto R pertence a reta BC (caso contrário haveria dois segmentos perpendiculares distintos partindo de $L = M$, contrariando o Teorema 3.25). Neste caso, pelo Teorema 4.12, os ângulos $D\hat{C}M$ e $S\hat{R}L$ são ambos agudos ou ambos retos ou ambos obtusos.

Se $LN > MN$, então os pontos L e N estão em lados opostos em relação a reta BC , daí é fácil ver que R e S também estão lados opostos em relação a reta BC . Seja K o ponto de intersecção da reta BC com o segmento RS .

Pelo Teorema 4.13, ângulos $D\hat{C}M$ e $S\hat{K}M$ são ambos agudos ou ambos retos ou ambos obtusos, já que $NMCD$ e $NMKS$ são quadriláteros de Lambert. Como $NSKM$ e $NSRL$ são quadriláteros de Lambert o Teorema 4.13 também garante que $S\hat{K}M$ e $S\hat{R}L$ são ambos agudos ou ambos retos ou ambos obtusos. Logo, está provado que, em qualquer caso, os ângulos $D\hat{C}M$ e $S\hat{R}L$ são ambos agudos ou ambos retos ou ambos obtusos.

Pelo Teorema 4.8, os quadriláteros Saccheri $PQRS$ e $ABCD$ são congruentes. Logo os ângulos $D\hat{C}M$, $S\hat{R}L$ e $D'\hat{C}'M'$ são ambos agudos ou ambos retos ou ambos obtusos.

Segue diretamente do teorema anterior o corolário abaixo:

Corolário 4.3 *Se existe um quadrilátero de Saccheri cujos ângulos do topo são respectivamente, agudos, retos ou obtusos, então os ângulos do topo de qualquer quadrilátero de Saccheri são respectivamente, agudos, retos ou obtusos.*

De acordo com o corolário acima as Hipóteses do Ângulo Agudo, do Ângulo Reto e do Ângulo Obtuso são mutuamente exclusivas, ou seja, todos os quadriláteros de Saccheri são de um mesmo tipo. Veremos, mais adiante, que o Teorema de Saccheri-Legendre destrói uma das hipóteses. Nas próximas seções também provaremos que cada uma delas pode ser substituída por afirmações equivalentes.

4.3 O Teorema de Saccheri-Legendre

Teorema 4.15 *Seja dado um triângulo retângulo ABC . Sob a Hipótese do Ângulo Agudo, do Ângulo Reto ou do Ângulo Obtuso, a soma dos ângulos internos de ABC é, respectivamente, menor, igual ou maior que 180° .*

Demonstração: Considere o triângulo ABC , retângulo em \hat{C} . Trace o segmento AK perpendicular à reta AC , de forma que $AK = CB$ e K pertença, em relação a reta AC , ao mesmo lado que B . Trace o segmento KB e conclua que $AKBC$ é um

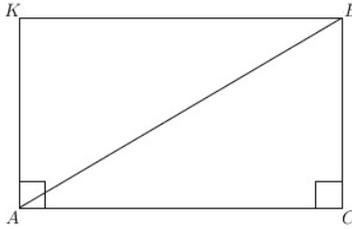


Figura 4.17: A soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo ABC

quadrilátero de Saccheri com ângulos retos em \hat{A} e \hat{C} .

Se $\hat{AKB} = \hat{CBK} < 90^\circ$, então aplicamos o Teorema 4.10 e obtemos $AC < KB$. Como $AK = CB$ e AB é lado comum aos triângulos ABC e ABK , o Teorema 3.32 garante que $\hat{ABC} < \hat{KAB}$. Observe agora que $\hat{KAB} + \hat{CAB} + \hat{ACB} = 180^\circ$, daí $\hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{CAB} < 180^\circ$.

Suponha que $\hat{AKB} = \hat{CBK} = 90^\circ$. Aplicando novamente o Teorema 4.10, temos que $AC = KB$. Assim, os triângulos ABC e ABK são congruentes, já que $AC = KB$, $AK = CB$ e AB é comum aos dois triângulos. Da igualdade $\hat{ABC} = \hat{KAB}$, temos $\hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{CAB} = \hat{KAB} + \hat{CAB} + \hat{BCA} = 180^\circ$.

Suponha que $\hat{AKB} = \hat{CBK} > 90^\circ$. Pelo Teorema 4.10 temos que $AC > KB$. Como $AK = CB$ e AB é lado comum aos triângulos ABK e ABC , o Teorema 3.32 garante que o ângulo \hat{ABC} é maior que o ângulo \hat{KAB} . Assim, considerando a soma $\hat{KAB} + \hat{CAB} + \hat{BCA} = 180^\circ$, obtemos $\hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{CAB} > 180^\circ$.

Teorema 4.16 *Seja dado um triângulo ABC . Sob a Hipótese do Ângulo Agudo, do Ângulo Reto ou do Ângulo Obtuso, a soma dos ângulos internos de ABC é, respectivamente, menor, igual ou maior que dois ângulos retos.*

Demonstração: De acordo com o Teorema 3.33 o triângulo ABC possui pelo menos dois ângulos agudos. Podemos supor, sem perda de generalidade que \hat{B} e \hat{C} sejam ângulos agudos. Pelo Teorema 3.34, existe um ponto $P \in \text{int}(BC)$ tal que AP é perpendicular a BC . Como $P \in \text{int}(BC)$, temos que $P \in \text{int}(\hat{BAC})$, ou seja, $\hat{BAC} = \hat{BAP} + \hat{PAC}$.

Sob a Hipótese do Ângulo Agudo, temos que $\hat{B} + \hat{BAP} < 90^\circ$ e $\hat{C} + \hat{CAP} < 90^\circ$ já que \hat{BAP} e \hat{PAC} são triângulos retângulos (Teorema 4.15). Logo, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{BAP} + \hat{PAC} + \hat{B} + \hat{C} < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

De forma inteiramente análoga, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, sob a Hipótese do Ângulo Reto e $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ$ sob a Hipótese do Ângulo Obtuso.

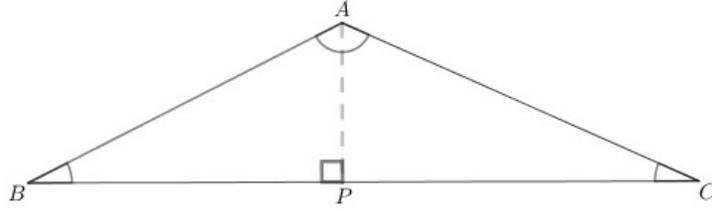


Figura 4.18: A soma dos ângulos internos de um triângulo ABC

Teorema 4.17 *Se a soma das medidas dos ângulos internos de um dado triângulo é, respectivamente, menor que, igual a, ou maior que 180° , então a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é, respectivamente, menor que, igual a, ou maior que 180° .*

Demonstração: Seja s a soma das medidas dos ângulos internos de ABC . Seja t a soma das medidas dos ângulos internos de outro triângulo $A'B'C'$. Suponha que $s < 180^\circ$. Sob a Hipótese do Ângulo Reto teríamos $s = 180^\circ$ e sob a Hipótese do Ângulo Obtuso teríamos $s > 180^\circ$ (Teorema 4.15). Como em ambos os casos obtemos uma contradição, não podemos assumir nenhuma das duas hipóteses. Logo, devemos assumir a Hipótese do Ângulo Agudo, o que implica $t < 180^\circ$ pelo Teorema 4.15.

Para os casos $s = 180^\circ$ e $s > 180^\circ$ a demonstração é inteiramente análoga.

Definição 4.6 *Seja dado um triângulo ABC . O defeito $\delta(ABC)$ de ABC é dado pela diferença $\delta(ABC) = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$ sendo \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} os ângulos internos de ABC .*

Assim, da igualdade $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \delta(ABC) = 180^\circ$, temos que $\delta(ABC)$ é negativo, nulo ou positivo, respectivamente, quando a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° , igual a 180° ou menor que 180° .

De forma análoga o defeito $\delta(ABCD)$ de um quadrilátero convexo $ABCD$ é dado pela diferença $\delta(ABCD) = 360^\circ - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D})$, sendo \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} os ângulos internos de $ABCD$. Portanto, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \delta(ABCD) = 360^\circ$.

Teorema 4.18 *Seja dado um triângulo ABC . Se um ponto D está entre A e C , então $\delta(ABC) = \delta(ABD) + \delta(BDC)$.*

Demonstração: Como $D \in \text{int}(AC)$, temos que $D \in \text{int}(\hat{A}\hat{B}\hat{C})$ e $\hat{A}\hat{B}D + D\hat{B}\hat{C} = \hat{A}\hat{B}\hat{C}$. De acordo com a definição de defeito de um triângulo, podemos escrever as

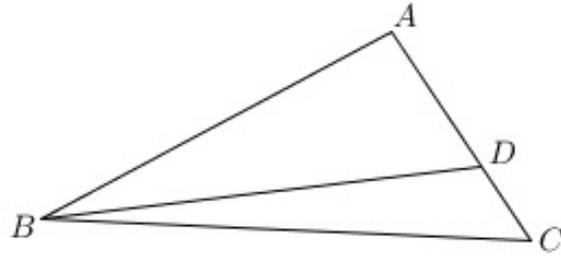


Figura 4.19: Aditividade dos defeitos num triângulo ABC

igualdades $\hat{A} + \hat{ABD} + \hat{ADB} + \delta(ABD) = 180^\circ$ e $\hat{C} + \hat{DBC} + \hat{BDC} + \delta(BDC) = 180^\circ$. Somando as duas últimas igualdades temos que $\hat{A} + (\hat{ABD} + \hat{DBC}) + \hat{C} + (\hat{ADB} + \hat{BDC}) + \delta(ABD) + \delta(BDC) = 360^\circ$. Como $\hat{ABD} + \hat{DBC} = \hat{ABC} = \hat{B}$ e $\hat{ADB} + \hat{BDC} = 180^\circ$, obtemos $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + 180^\circ + \delta(ABD) + \delta(BDC) = 360^\circ$, ou seja, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \delta(ABC) + \delta(BDC) = 180^\circ$. Mas $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \delta(ABC) = 180^\circ$, assim $\delta(ABC) = \delta(ABD) + \delta(BDC)$.

Teorema 4.19 *Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo, então $\delta(ABCD) = \delta(ABD) + \delta(BDC)$ e $\delta(ABCD) = \delta(BCE) + \delta(ABED)$, sendo E um ponto entre C e D .*

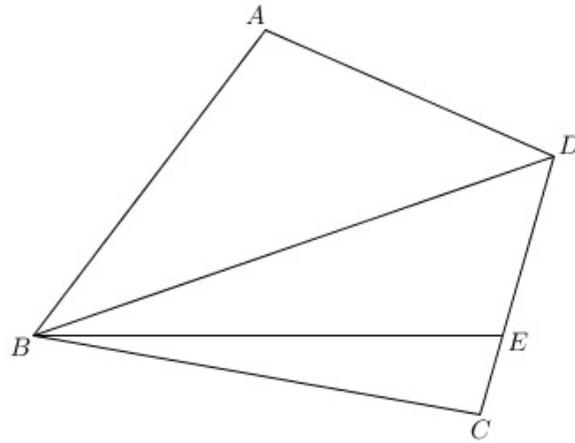


Figura 4.20: Aditividade dos defeitos num quadrilátero $ABCD$

Demonstração: Como $ABCD$ é um quadrilátero convexo, o Teorema 4.1 garante que $D \in \text{int}(\hat{ABC})$ e $B \in \text{int}(\hat{ADC})$. Portanto, $\hat{ABD} + \hat{DBC} = \hat{ABC}$ e

$$\hat{A}\hat{D}B + B\hat{D}C = \hat{A}\hat{D}C.$$

De acordo com a definição de defeito de um triângulo também são válidas as igualdades $\hat{A} + \hat{A}\hat{B}D + \hat{A}\hat{D}B + \delta(ABD) = 180^\circ$ e $\hat{C} + \hat{D}\hat{B}C + B\hat{D}C + \delta(BDC) = 180^\circ$. Somando as duas últimas igualdades e considerando as igualdades obtidas no início da demonstração, encontramos $\hat{A} + \hat{A}\hat{B}C + \hat{C} + \hat{A}\hat{D}C + \delta(ABD) + \delta(BDC) = 360^\circ$. Mas, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \delta(ABCD) = 360^\circ$, assim $\delta(ABCD) = \delta(ABD) + \delta(BDC)$.

Provemos agora que $\delta(ABCD) = \delta(BCE) + \delta(ABED)$, quando $E \in \text{int}(CD)$. De fato, é fácil ver que $ABED$ é também um quadrilátero convexo. Assim, $\delta(ABED) = \delta(ABD) + \delta(BDE)$. Considerando a última igualdade e o teorema anterior, temos que $\delta(ABED) + \delta(BCE) = \delta(ABD) + \delta(BDE) + \delta(BCE) = \delta(ABD) + \delta(BCD) = \delta(ABCD)$.

Teorema 4.20 *A base de um quadrilátero de Saccheri não é maior do que topo.*

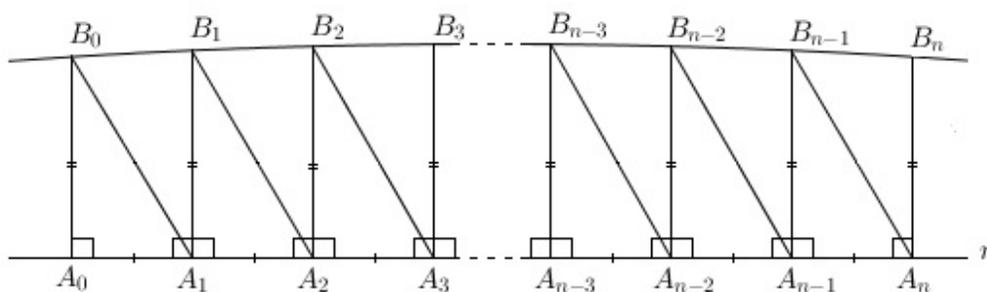


Figura 4.21: O topo de um quadrilátero de Saccheri é maior ou igual a base

Demonstração: Seja $A_0B_0B_1A_1$ um quadrilátero de Saccheri. Denote por r a reta que passa pelos pontos A_0 e A_1 . Dado um número inteiro positivo n , marque sobre a reta r os pontos $A_2, A_3, A_4, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n$, de modo que A_i é o ponto médio do segmento $A_{i-1}A_{i+1}$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n-3, n-2, n-1$. Assim, temos que $A_iA_{i+1} = A_0A_1$, para todo $i = 0, 1, 2, \dots, n-3, n-2, n-1$. Para cada $i = 2, 3, \dots, n-1, n$ levante a perpendicular A_iB_i , de modo que B_i e B_0 fiquem no mesmo lado da reta r e $A_iB_i = A_0B_0$. Pelo caso LAL , os triângulos $B_iA_iA_{i+1}$ e $B_0A_0A_1$ são congruentes. Logo, $B_iA_{i+1} = B_0A_1$ e $B_i\hat{A}_{i+1}A_i = B_0\hat{A}_1A_0$, para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$. Então podemos escrever $B_i\hat{A}_{i+1}B_{i+1} = B_0\hat{A}_1B_1$, para cada $i = 0, 1, \dots, n-1$, que justifica a congruência dos triângulos $B_iA_{i+1}B_{i+1} = B_0A_1B_1$ pelo caso LAL . Portanto, $B_iB_{i+1} = B_0B_1$ para cada $i = 0, 1, \dots, n-1$. Utilizando agora a Desigualdade Poligonal, obtemos

$$n\overline{A_0A_1} = \overline{A_0An} \leq \overline{A_0B_0} + (\overline{B_0B_1} + \overline{B_1B_2} + \dots + \overline{B_{n-1}B_n}) + \overline{A_nB_n} = 2\overline{A_0B_0} + n\overline{B_0B_1}.$$

Logo,

$$n\overline{A_0A_1} - n\overline{B_0B_1} \leq 2\overline{A_0B_0},$$

ou seja, para qualquer inteiro positivo n teremos

$$n(\overline{A_0A_1} - \overline{B_0B_1}) \leq 2\overline{A_0B_0}.$$

A desigualdade acima contradiz o Axioma de Arquimedes quando consideramos $\overline{A_0A_1} - \overline{B_0B_1} > 0$. Logo, $\overline{A_0A_1} \leq \overline{B_0B_1}$, o que prova que a base de um quadrilátero de Saccheri não é maior que o topo.

Portanto, ao considerar a Hipótese do Ângulo Obtuso, todos os quadriláteros de Saccheri teriam, pelo Teorema 4.10, a base maior que o topo, ou seja, ao supor tal hipótese teríamos uma contradição, já que como foi exposto no teorema acima, a base de um quadrilátero de Saccheri não é maior que o topo. Em seus trabalhos, Saccheri escreve tal fato na Proposição XIV: "A Hipótese do Ângulo Obtuso é absolutamente falsa, pois destrói a si mesma."

Assim, como Saccheri destruiu a Hipótese do Ângulo Obtuso, o mesmo também tentou destruir a Hipótese do Ângulo Agudo, porém não teve êxito. Veremos mais adiante que a Hipótese do Ângulo Agudo não produz contradições num sistema de afirmações em conjunto com os axiomas e teoremas da geometria neutra. Na verdade, a suposição de tal hipótese, produz o nascimento de uma geometria não euclidiana.

Como já foi mencionado, o matemático Adrien M. Legendre (1752-1833) também esteve empenhado em demonstrar o Quinto Postulado. Por muito tempo Legendre publicou varias demonstrações, sempre preocupado em reparar erros cometidos nas mesmas. Na verdade o que Saccheri e Legendre tentavam demonstrar era indemonstrável.

Considerando já destruída a Hipótese do Ângulo Obtuso, segue o teorema abaixo, conhecido como Teorema de Saccheri-Legendre, pois ambos chegaram a tal resultado, porém por caminhos distintos.

Teorema 4.21 (*Teorema de Saccheri-Legendre*) *A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo ABC não excede 180°.*

Demonstração: Segue diretamente dos teoremas 4.16, 4.17 e 4.20.

Daqui em diante, em todas as afirmações estará descartada a Hipótese do Ângulo

Obtuso. O teorema abaixo serve de base para a demonstração da uma afirmação foi proposta como axioma pelo filósofo grego Aristóteles e que será importante para a demonstração de alguns resultados do próximo capítulo.

Teorema 4.22 *Dado um triângulo ABC com um ângulo reto em C , sejam H o ponto médio do lado AB e I o pé da perpendicular baixada de H para a reta AC . De acordo com a Hipótese do Ângulo Agudo temos $\overline{AC} > 2\overline{AI}$ e $\overline{BC} > 2\overline{HI}$. Considerando a Hipótese do Ângulo Reto valem as igualdades $\overline{AC} = 2\overline{AI}$ e $\overline{BC} = 2\overline{HI}$*

Demonstração: Desde que A e B estejam em lados opostos de HI e que HI seja paralela a reta BC , teremos I entre A e C , com $\overline{AC} = \overline{AI} + \overline{IC}$.

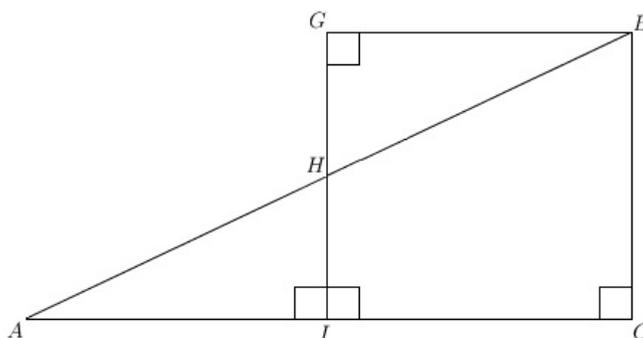


Figura 4.22: ABC retângulo em C com HI perpendicular a AC e $AH = HB$

Seja G um ponto da reta HI tal que o ponto H esteja entre G e I , com $GH = HI$. Então os triângulos BHG e AHI são congruentes pelo caso LAL . Portanto, $BG = AI$ e \widehat{BGH} é um ângulo reto, ou seja, $IGBC$ é um quadrilátero de Lambert.

Assim, se \widehat{B} é um ângulo agudo então $IC < BG$ e $BC > GN$, ou seja, sobre a Hipótese do Agudo teremos as desigualdades $\overline{AC} < 2\overline{AI}$ e $\overline{BC} > 2\overline{HI}$.

Agora, se \widehat{B} é um ângulo reto então $IC = BG$ e $BC = GN$, ou seja, sobre a Hipótese do Reto valem as igualdades $\overline{AC} = 2\overline{AI}$ e $\overline{BC} = 2\overline{HI}$.

Teorema 4.23 (*Axioma de Aristóteles*) *Dados $r > 0$ e um ângulo agudo \widehat{BAC} , existe um ponto P em S_{AB} tal que a distância de P até S_{AC} é maior do que r .*

Demonstração: Sejam Q o pé da perpendicular baixada de B para S_{AC} e m um número inteiro positivo tal que $m\overline{BQ} > r$ (Axioma de Arquimedes). Tomando outro inteiro positivo n tal que $2^n > m$, obtemos a desigualdade $2^n\overline{BQ} > m\overline{BQ} > r$.

Sobre S_{AB} marque o ponto P_1 tal que B seja ponto médio de AP_1 , ou seja, $BP_1 = AB$. Sejam P_2, P_3, \dots, P_n tais que P_{i-1} é ponto médio de AP_i . Portanto, para todo $i = 2, 3, \dots, n$ temos $AP_{i-1} = P_{i-1}P_i$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, seja Q_i o pé da perpendicular baixada de P_i para S_{AC} . Pelo teorema anterior podemos escrever as seguintes desigualdades:

$$\overline{P_n Q_n} \geq 2\overline{P_{n-1} Q_{n-1}}, \overline{P_{n-1} Q_{n-1}} \geq 2\overline{P_{n-2} Q_{n-2}}, \dots, \overline{P_3 Q_3} \geq 2\overline{P_2 Q_2}, \overline{P_2 Q_2} \geq 2\overline{P_1 Q_1}$$

e

$$\overline{P_1 Q_1} \geq 2\overline{BQ}.$$

Portanto, $\overline{P_n Q_n} \geq 2^n \overline{BQ} > r$. Tomando $P = P_n$, a distância de P ate S_{AC} é maior do que r .

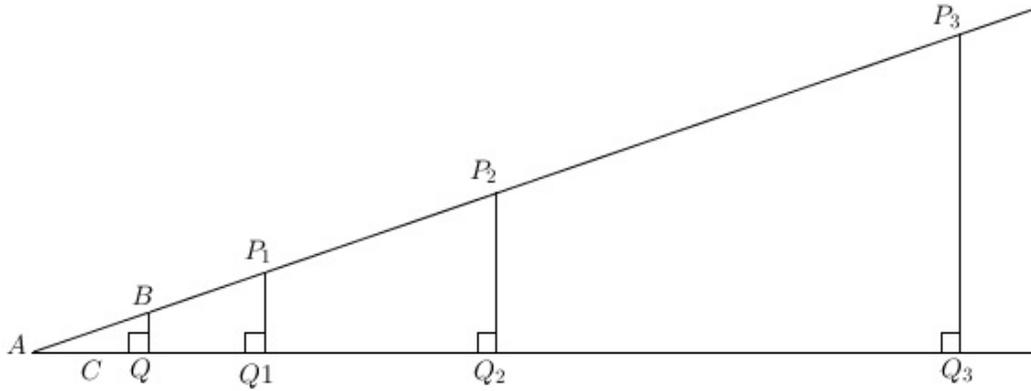


Figura 4.23: Axioma de Aristóteles

Capítulo 5

Retângulos e o Postulado de Hilbert

Neste capítulo estabeleceremos as condições necessárias e suficientes para a existência de retângulos. Chamaremos de retângulo, qualquer quadrilátero que possui quatro ângulos internos medindo 90° . Além disso, provaremos que o Quinto Postulado de Euclides é logicamente equivalente a outros postulados.

Começaremos com uma definição seguida de um teorema muito conhecido na geometria euclidiana.

5.1 Ângulos alternos internos

Definição 5.1 *Sejam r, s duas retas distintas num mesmo plano. Se uma reta t intersecta r e s em dois pontos distintos P e Q , respectivamente, então t é uma reta transversal a r e s .*

Sejam r e s duas retas distintas intersectadas por uma transversal t . Suponha que B e E sejam, respectivamente, os pontos de interseção da reta t com as retas r e s . Sejam A e C dois pontos de r tais que $B \in \text{int}(AC)$. Se D é um ponto da reta s que está no mesmo lado de A em relação a reta t e F é um ponto também de s que está no mesmo lado de C em relação a t , temos as seguintes definições:

(I) os ângulos $\hat{A}BE$, $\hat{D}EB$, $\hat{C}BE$ e $\hat{F}EB$ são chamados internos.

(II) os pares de ângulos $(\hat{A}BE, \hat{F}EB)$ e $(\hat{C}BE, \hat{D}EB)$ são chamados alternos internos.

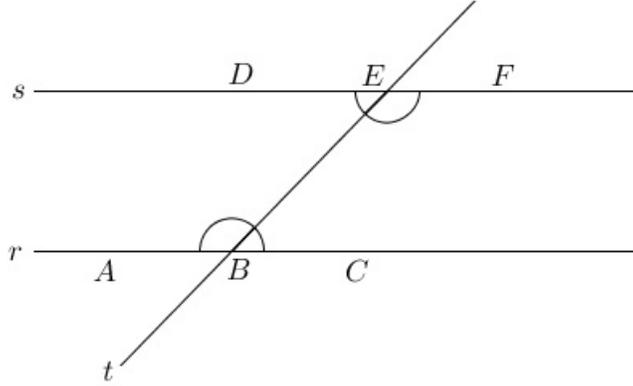


Figura 5.1: Duas retas distintas r e s intersectadas por uma transversal t

Teorema 5.1 *Se duas retas r e s são intersectadas por uma transversal t formando ângulos alternos internos congruentes, então r e s são paralelas.*

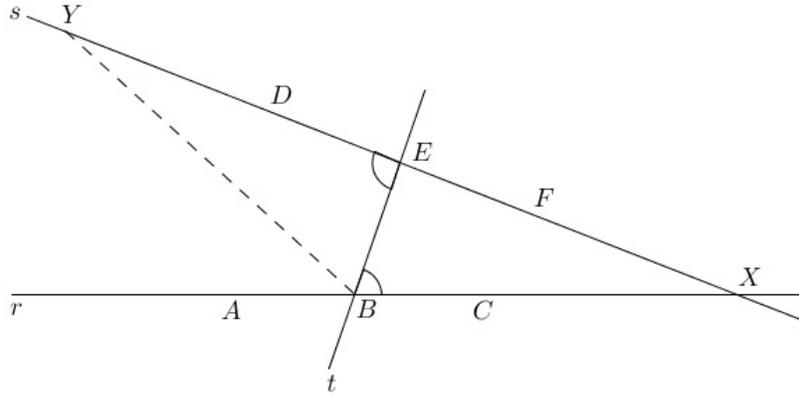


Figura 5.2: Ângulos alternos internos congruentes

Demonstração: Utilize a figura da definição anterior e considere $C\hat{B}E = D\hat{E}B$. Suponha, por contradição, que as retas r e s se intersectam num ponto X . Sem perda de generalidade, podemos admitir que X , C e F estão no mesmo lado da reta t . Seja Y o ponto de S_{ED} tal que $EY = BX$. Traçando o segmento BY , temos que EBX e BEY são congruentes pelo caso LAL, já que $EY = BX$, $X\hat{B}E = Y\hat{E}B$ e BE é lado comum a ambos os triângulos. Portanto, $X\hat{E}B = Y\hat{B}E$. Como $A\hat{B}E + C\hat{B}E = F\hat{E}B + D\hat{E}B = 180^\circ$, temos que $Y\hat{B}E = A\hat{B}E$. Como A e Y estão no mesmo lado de t , o Corolário 3.2 garante que $S_{BA} = S_{BY}$, ou seja, Y

pertence a reta r , contradizendo o Axioma 3.1. Logo, as retas r e s são paralelas.

Observe que a demonstração do Teorema 5.1 segue também, quase de forma direta, do Teorema do Ângulo Externo.

5.2 A existência de retângulos

O postulado abaixo foi proposto por Alexis Claude Clairaut (1713-1765), que provaremos, mais adiante ser logicamente ao Quinto Postulado de Euclides.

Postulado de Clairaut: *Retângulos existem.*

Antes de provaremos a equivalência lógica do postulado acima com o Quinto Postulado de Euclides, vamos apresentar alguns resultados sobre retângulos.

O teorema abaixo, por exemplo, estabelece uma relação entre a existência de retângulos e a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Teorema 5.2 *Se existe um triângulo com soma dos ângulos internos igual 180° (defeito zero), então existe um retângulo. Se um retângulo existe, então todo triângulo tem a soma dos ângulos internos igual a 180° .*

Demonstração: Considere um triângulo ABC com soma dos ângulos internos igual a 180° , ou seja, ABC tem defeito zero, Suponha de início que o triângulo ABC não seja retângulo. Podemos supor, sem perda de generalidade, que os ângulos B e C sejam agudos (Teorema 3.33). Pelo Teorema 3.34, existe um ponto D entre B e C , tal que AD é perpendicular a reta BC . Logo, pelo Teorema 4.17, cada um dos triângulos retângulos ADB e ADC tem defeito zero.

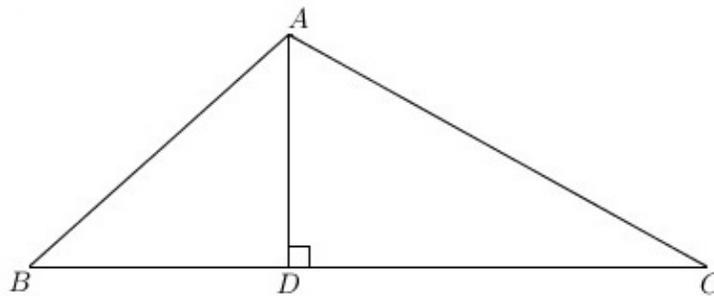


Figura 5.3: Triângulo ABC com $D \in \text{int}(BC)$ e AD perpendicular a BC

Provemos agora, que é possível construir um retângulo, a partir de um dos triângulos retângulos anteriores. Observe que consideramos no início da demonstração que ABC não era retângulo. Para o caso de ABC ser retângulo basta começar a demonstração a partir dos passos abaixo.

Tome o triângulo ADC , retângulo em D . Seja X o ponto do semiplano oposto ao determinado por AC e pelo ponto D , de modo que $C\hat{A}X = D\hat{C}A$. Sobre a semirreta S_{AX} , marque o ponto E de sorte que $AE = DC$ e trace o segmento CE . Assim, temos que os triângulos ADC e CEA são congruentes (caso LAL). Logo, o triângulo CEA é também um triângulo retângulo com defeito zero e com um ângulo reto em E .

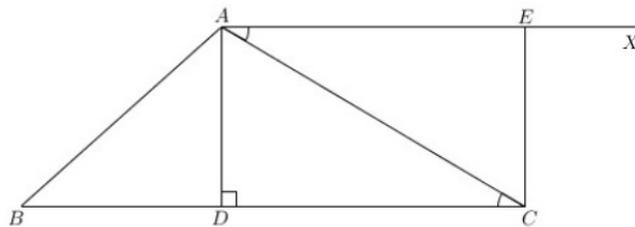


Figura 5.4: Construção do retângulo $ADCE$ a partir do triângulo ADC

Como $D\hat{A}C + D\hat{C}A = 90^\circ$, podemos escrever $D\hat{A}C + C\hat{A}E = 90^\circ = D\hat{C}A + A\hat{C}E$. Observando agora que os ângulos alternos internos $D\hat{A}C$ e $C\hat{A}E$ são congruentes, a reta AE é paralela a reta DC e a reta AD é paralela a reta EC (Teorema 5.1). Portanto, $ADCE$ é um quadrilátero convexo. Assim, $C \in \text{int}(D\hat{A}E)$, $A \in \text{int}(D\hat{C}E)$ e pelo Axioma 3.10 concluímos que $D\hat{A}E = D\hat{A}C + C\hat{A}E = 90^\circ = D\hat{C}A + A\hat{C}E = D\hat{C}E$, ou seja, o quadrilátero $ADCE$ possui quatro ângulos internos medindo 90° . Logo, $ADCE$ é um retângulo.

Provemos agora a segunda parte. Considere o retângulo $ADCE$ já construído e tome um triângulo PQR . Provaremos que PQR tem defeito zero. De fato, pelo Teorema 4.6, os lados opostos de $ADCE$ são congruentes. Trace agora a diagonal AC e observe que o caso LAL garante que os triângulos retângulos ADC e CEA também são congruentes. Como a soma dos ângulos internos de $ADCE$ é igual a 360° (veja a definição de retângulo), temos que ADC (ou CEA) tem a soma dos ângulos internos igual a 180° , ou seja, tem defeito zero. Logo, pelo Teorema 4.17 temos que o triângulo PQR tem defeito zero.

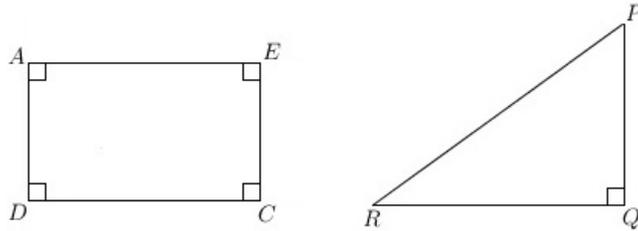


Figura 5.5: Retângulo $ADCE$ e um triângulo PQR

Teorema 5.3 *Os lados opostos de um retângulo são congruentes.*

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 4.6.

Teorema 5.4 *Se existe um triângulo com defeito zero, então a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero convexo é igual a 360°*

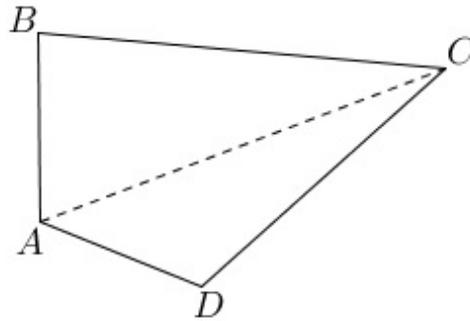


Figura 5.6: Diagonal AC de um quadrilátero convexo $ABCD$

Demonstração: Seja dado um quadrilátero convexo $ABCD$. Trace a diagonal AC . Pelo Teorema 4.1 $C \in \text{int}(\widehat{BAD})$ e $A \in \text{int}(\widehat{BCD})$. Logo, o Axioma 3.10 garante que $\widehat{BAC} + \widehat{CAD} = \widehat{BAD} = \widehat{A}$ e $\widehat{BCA} + \widehat{ACD} = \widehat{BCD} = \widehat{C}$. Como por hipótese existe um triângulo com defeito zero, temos que qualquer triângulo tem a soma dos ângulos internos igual a 180° , ou seja, também tem defeito zero. Portanto $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{B} = 180^\circ$ e $\widehat{CAD} + \widehat{D} + \widehat{DCA} = 180^\circ$. Logo, somando as igualdades acima obtemos $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$.

5.3 Postulado das Paralelas de Hilbert

Enunciaremos agora o Postulado das Paralelas atribuído a David Hilbert(1862-1943), que muito se assemelha ao enunciado por Playfair, o qual já foi citado no Capítulo 2.

Postulado das Paralelas de Hilbert: *Sejam dados uma reta r e um ponto P que não pertence a r . Então existe, no máximo, uma reta que passa por P e não intersecta r . Chama-se essa única reta de paralela a r passando por P .*

Diferente do postulado proposto por Playfair, o enunciado acima não garante a existência da reta paralela, já que decorre de outras afirmações. O Teorema 3.27, por exemplo, garante a existência de uma paralela a r passando por P .

A partir do Postulado das Paralelas de Hilbert, podemos vale a recíproca do Teorema 5.1.

Teorema 5.5 *Se duas retas paralelas r e s são intersectadas por uma terceira reta t , então os ângulos alternos internos são congruentes.*

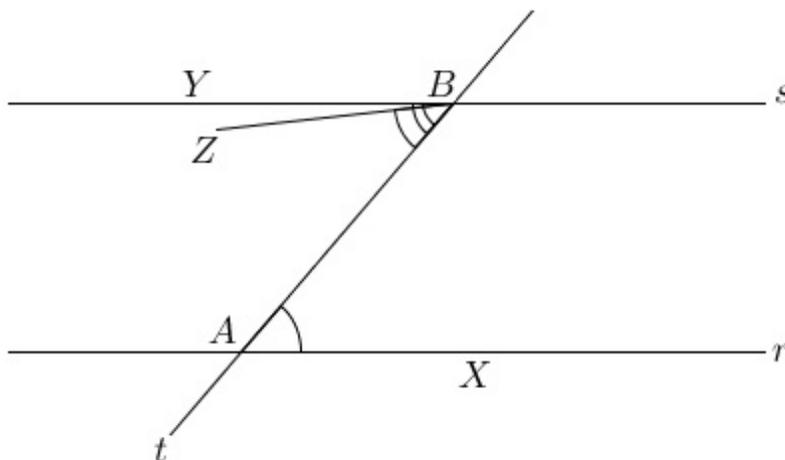


Figura 5.7: Duas retas paralelas r e s intersectadas por uma transversal t

Demonstração: Sejam dadas duas retas paralelas r e s . Suponha que uma reta transversal t intersecte as retas r e s nos pontos A e B , respectivamente. Considere agora os pontos X e Y das retas r e s , respectivamente, de maneira que $X\hat{A}B$ e $Y\hat{B}A$ sejam ângulos alternos internos. Suponha por contradição que $X\hat{A}B \neq Y\hat{B}A$.

Pelo Corolário 3.2 existe um ponto Z no semiplano determinado pela reta t e pelo ponto Y , tal que $Z\hat{B}A = X\hat{A}B$. Como S_{BY} e S_{BZ} são semirretas distintas, temos pelo Teorema 5.1 que a reta BZ é também paralela a reta r . Mas isso contradiz o Postulado das Paralelas de Hilbert. Logo, $X\hat{A}B = Y\hat{B}A$

Teorema 5.6 *Se assumirmos o Postulado das Paralelas de Hilbert, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° .*

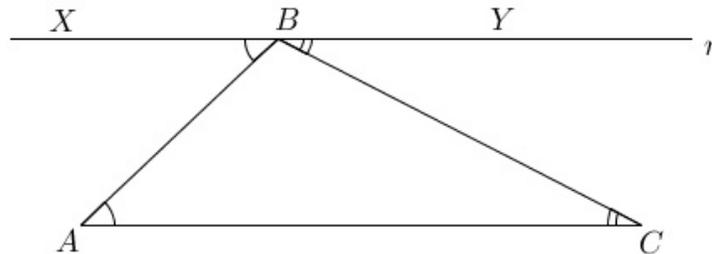


Figura 5.8: Reta r paralela a AC e que passa pelo vértice B de ABC

Demonstração: Dado um triângulo ABC . O Teorema 3.27 e o Postulado das Paralelas de Hilbert garantem a existência e a unicidade da reta r que é paralela a reta AC . Sejam X e Y pontos tais que $B \in \text{int}(XY)$. É fácil ver que as retas AB e BC são ambas transversais as retas AC e r . Podemos supor sem perda de generalidade que $(A\hat{B}X, C\hat{A}B)$ e $(C\hat{B}Y, A\hat{C}B)$ são pares de ângulos alternos internos. Pelo teorema anterior temos que $A\hat{B}X = C\hat{A}B$ e $C\hat{B}Y = A\hat{C}B$. Como S_{BA} e S_{BC} são duas semirretas distintas contidas no mesmo semiplano da reta r , temos que $X\hat{B}A + A\hat{B}C + C\hat{B}Y = 180^\circ$, ou seja, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

Existe uma equivalência lógica entre o Postulado de Clairaut e o Postulado das Paralelas de Hilbert:

Teorema 5.7 *O Postulado de Clairaut é logicamente equivalente ao Postulado das Paralelas de Hilbert.*

Provaremos inicialmente que o Postulado das Paralelas de Hilbert decorre do Axioma de Clairaut. De fato, sejam dados uma reta r e um ponto P fora de r . Trace a reta PQ perpendicular a r com $Q \in r$ e trace a reta s perpendicular a PQ passando por P . Seja t uma reta que intersecta a reta s no ponto P . Provemos que t também intersecta a reta r . Se a reta t coincide com a reta PQ não temos mais o

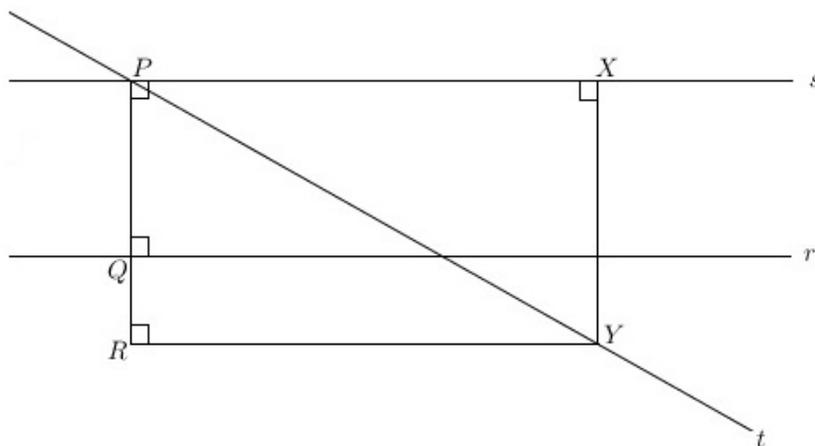


Figura 5.9: A existência de retângulos e o Postulado das Paralelas de Hilbert

que provar. Assim, suponha que as retas PQ e t são distintas e considere um ponto Y de t tal que Y e Q estão no mesmo lado de s e que $XY > PQ$, sendo X o pé da perpendicular baixada de Y para s . Note que a existência do ponto Y que cumpre a desigualdade $XY > PQ$ é garantida pelo Teorema 4.23 (Axioma de Aristóteles). Como por hipótese consideramos o fato de que retângulos existem, temos que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° (Teorema 5.2). Logo, pelo Teorema 5.4, todo quadrilátero convexo tem soma dos ângulos internos igual a 360° . Seja R o pé da perpendicular baixada de Y para a reta PQ . Note que R e Y estão no mesmo lado da reta s (a reta RY é paralela a s) e que o quadrilátero $PXYR$ tem três ângulos retos. Mas, como a soma dos ângulos internos de $PXYR$ igual a 360° , temos que $\hat{R}YX = 90^\circ$, ou seja, $PXYR$ é um retângulo. Pelo Teorema 5.3 podemos escrever $PR = XY$ (os lados opostos de um retângulo são congruentes), daí $PR > PQ$, já que o ponto Y foi escolhido de maneira que $XY > PQ$. Como Q está entre P e R sendo que $Q \in r$, temos que os pontos P e R estão em lados opostos da reta r . Mas a reta RY é paralela a reta r , ou seja, P e Y estão em lados opostos da reta r . Logo, a reta t intersecta r . Provemos agora que o Postulado de Clairaut decorre do Postulado das Paralelas de Hilbert. De fato, o Teorema 5.6 garante que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° . Logo, pelo Teorema 5.2 retângulos existem.

Existe também uma equivalência lógica entre o Quinto Postulado de Euclides e o Postulado das Paralelas de Hilbert. Vejamos novamente o enunciado do **Quinto Postulado de Euclides**:

Se duas retas são intersectadas por uma transversal de maneira que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado da transversal é menor que 180° , então as duas retas se encontram num ponto nesse mesmo lado da transversal.

Teorema 5.8 *O Quinto Postulado de Euclides é logicamente equivalente ao Postulado das Paralelas de Hilbert.*

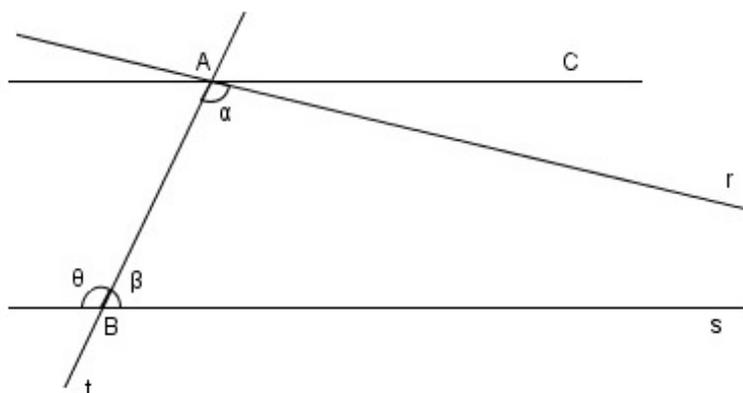


Figura 5.10: O Quinto Postulado decorre do Postulado das Paralelas de Hilbert

Demonstração: Provaremos inicialmente que o Quinto Postulado de Euclides decorre do Postulado das Paralelas de Hilbert. Na figura acima temos duas retas distintas r e s intersectadas por uma transversal t , sendo A o ponto de intersecção da reta r com a reta t e B o ponto de intersecção da reta s com a reta t . Suponha que os ângulos indicados α , β e θ são tais que $\alpha + \beta < 180^\circ$ e $\beta + \theta = 180^\circ$. Portanto, $\alpha < 180^\circ - \beta = \theta$. Pelo Teorema 3.14 existe uma única semirreta S_{AC} tal que os ângulos $B\hat{A}C$ e θ são congruentes e alternos internos. Considerando agora o Teorema 5.1, temos que as retas AC e s são paralelas. Como a reta r e a reta AC são distintas, pelo Postulado das Paralelas de Hilbert temos que r e s se intersectam. Basta provar agora que as retas r e s se intersectam no mesmo lado da reta t que contém o ponto C . Para isso, considere que as retas r e s se encontrem no lado oposto e defina por D o ponto de intersecção. Sendo assim, o ângulo α seria externo ao triângulo ABD , ou seja, $\alpha > \theta$, o que é uma contradição. Assim, está provado que o Quinto Postulado de Euclides decorre do Postulado das Paralelas de Hilbert.

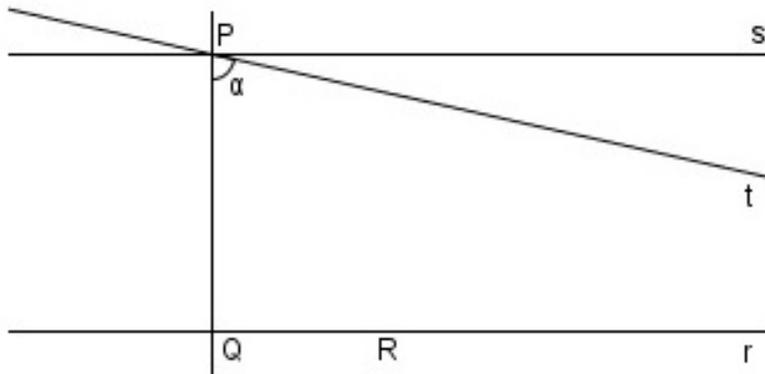


Figura 5.11: O Postulado das Paralelas de Hilbert decorre do Quinto Postulado

Reciprocamente, provemos que o Postulado das Paralelas de Hilbert decorre do Quinto Postulado de Euclides. Sejam dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r . Baixe a perpendicular do ponto P a reta r . Denomine o pé da perpendicular por Q . A partir de P trace a reta s perpendicular a reta PQ . Seja t uma reta distinta de s e que passa pelo ponto P . Pelo Teorema 3.27, sabemos que r e s são paralelas. Assim, basta provar que t intersecta a reta r . De fato, seja α o ângulo agudo que a reta t faz com a reta PQ . Como assumimos como válido o Quinto Postulado, a desigualdade $\alpha + \widehat{PQR} < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ garante que a reta t intersecta r .

Capítulo 6

A descoberta da Geometria Hiperbólica

No começo do século XIX, havia muitos geômetras ainda preocupados em demonstrar o Quinto Postulado de Euclides. Apesar de todas as tentativas serem fracassadas, as buscas por um resultado serviram para outros matemáticos tornarem possível o surgimento de uma nova geometria.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) contribuiu muito para o desenvolvimento da nova geometria. Por volta dos quinze anos de idade, ele tomou conhecimento do "Problema das Paralelas" e, assim como outros matemáticos tentou demonstrar o Quinto Postulado a partir dos quatro primeiros, usando o método da redução ao absurdo, assim como Saccheri e Lambert, porém Gauss convenceu-se rapidamente que a demonstração não era possível.

Em 1824, Gauss escreveu uma carta a Franz Adolph Taurinus (1794-1874), onde declara que "se supusermos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180° (o que é equivalente a negar o Quinto Postulado), é possível desenvolver uma longa série de resultados contraditórios que constituem uma geometria não euclidiana".

Gauss foi o primeiro a designar a nova geometria de não euclidiana, deduzindo uma nova geometria, com a formulação de ideias e teoremas.

Em alguns dos resultados Gauss provou que para superfícies de curvatura negativa constante, a diferença entre dois ângulos retos e a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na superfície é proporcional a área do triângulo.

Na superfície citada as retas (geodésicas) são as curvas que realizam, na própria superfície, a menor distância entre dois pontos. Os resultados citados acima, coincidem com os obtidos por Lambert e dava a indicação da existência de uma

geometria onde não era válido o Postulado das Paralelas.

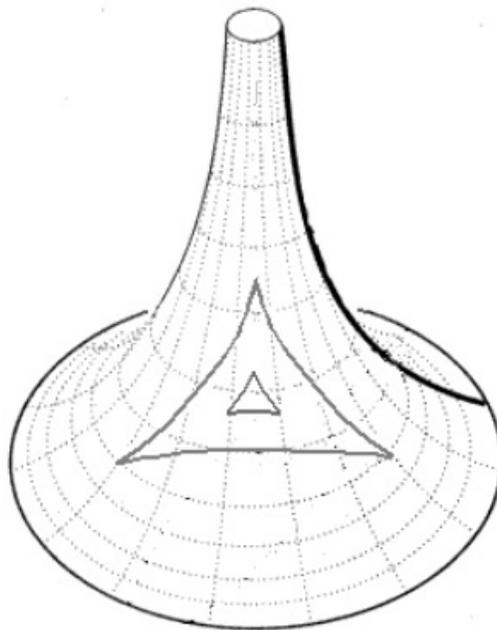


Figura 6.1: Pseudo-esfera

Outro matemático que também tentou demonstrar o Quinto Postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros foi o húngaro János Bolyai (1802-1860), filho de um amigo de Gauss, chamado Farkas Bolyai (1775-1856). Da mesma forma que Gauss, János também concluiu que era impossível demonstrar o Quinto Postulado. János negou o Quinto Postulado, considerando que por um ponto, fora de uma reta dada, era possível traçar mais de uma reta paralela à reta dada. Ele obteve vários resultados que não contradiziam os quatro primeiros postulados.

Em 1832, Farkas Bolyai decide publicar num apêndice de seu livro, os trabalhos de seu filho János Bolyai. Farkas recebeu de Gauss uma carta, onde o mesmo dizia que não poderia elogiar os trabalhos de seu filho pois já haviam sido descobertos por ele mesmo anteriormente. Bolyai permaneceu convicto em suas decisões, porém não aprofundou tanto suas ideias, como fez o russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856). O artigo "Sobre os Fundamentos da Geometria" de Lobachevsky, foi o primeiro publicado que apresenta a Geometria Não Euclidiana (a Geometria Hiperbólica). Foi escrito em russo e obteve pouca repercussão, porém havia ali o desenvolvimento completo da Geometria Hiperbólica, designada por Lobachevsky

de Geometria Imaginaria.

Os trabalhos de Lobachevsky e Bolyai não receberam o devido reconhecimento, na época em que foram publicados. A mudança começou a ocorrer cerca de 1866. Jules Houel (1823-1886) expôs documentos que seguiram as traduções dos trabalhos de Lobachevsky e Bolyai que serviram para chamar a atenção para a nova geometria.

Capítulo 7

Um pouco de Geometria Hiperbólica

7.1 Geometria Hiperbólica

O sistema axiomático que origina a chamada Geometria Hiperbólica, é obtido quando tomamos os quatro primeiros grupos de axiomas da Geometria Neutra (Axiomas de Incidência, Axiomas de Ordem, Axiomas de Congruência e Axiomas de Continuidade) juntamente com a negação do Postulado das Paralelas de Hilbert.

Axioma Hiperbólico: *Existe uma reta r e um ponto P não pertencente a r de modo que podem ser traçadas por P pelo menos duas retas distintas que não encontram r .*

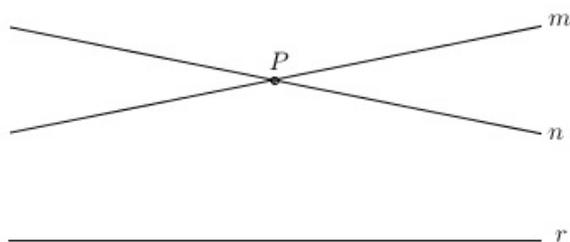


Figura 7.1: Axioma Hiperbólico

Teorema 7.1 *Retângulos não existem em Geometria Hiperbólica.*

Demonstração: Suponha que exista um retângulo em Geometria Hiperbólica. Pelo Teorema 5.7 vale o Postulado das Paralelas de Hilbert, que equivale a negar o Axioma Hiperbólico.

Teorema 7.2 (Teorema Universal da Geometria Hiperbólica) Em Geometria Hiperbólica, para toda reta m e todo ponto P não pertencente a m , existem pelo menos duas retas que passam por P e não intersectam m .

Demonstração: Baixe a perpendicular PQ para m e trace a reta n perpendicular a reta PQ passando por P . Marque em m um ponto R distinto de Q e trace a reta t perpendicular a m passando por R . Baixe a perpendicular do ponto P à reta t e designe por S o pé desta perpendicular. Provemos agora que as retas PS e n são distintas. De fato, se PS e n fossem coincidentes o quadrilátero $PQRS$ seria um retângulo contradizendo o Teorema 7.1. Assim, as retas PS e n passam por P e não intersectam m .

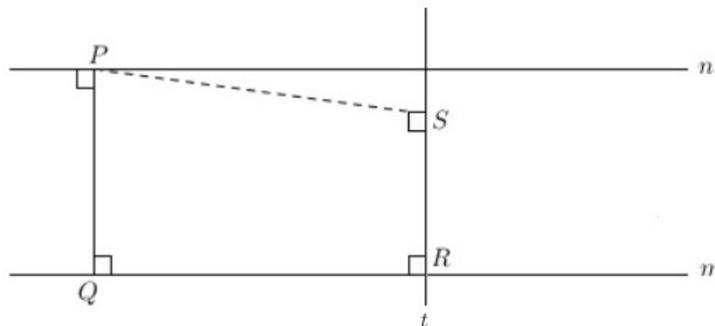


Figura 7.2: Teorema Universal da Geometria Hiperbólica

Corolário 7.1 Sejam m uma reta e P um ponto não pertencente a m . Então, existem infinitas retas que passam por P e não intersectam m .

Demonstração: Considere a demonstração anterior e tome um ponto R' em m distinto de R . Trace a reta t' perpendicular a m passando por R' e baixe a perpendicular do ponto P à reta t' , denotando por S' o pé desta perpendicular. Note que as retas PS e PS' são distintas, pois caso contrário o quadrilátero $SRR'S'$ seria um retângulo contradizendo novamente o Teorema 7.1. Assim para cada ponto na reta m distinto de R encontramos uma nova paralela finalizando assim a demonstração.

Teorema 7.3 *Todo triângulo em Geometria Hiperbólica tem a soma dos ângulos internos menor que 180° .*

Demonstração: Seja dado um triângulo ABC . Se \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} são os ângulos internos de ABC , então $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \leq 180^\circ$ pelo Teorema de Saccheri-Legendre. Se $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, então todo triângulo tem a soma dos ângulos internos igual a 180° (Teorema 4.17). Mas tal afirmação é equivalente ao Postulado de Hilbert, que equivale a negar o Axioma Hiperbólico. Portanto, devemos ter $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 180^\circ$.

Corolário 7.2 *Todo quadrilátero convexo em Geometria Hiperbólica tem a soma dos ângulos internos menor que 360° .*

Demonstração: Pelo Teorema 4.19 temos que $\delta(ABCD) = \delta(ABD) + \delta(BDC)$. Já o Teorema 7.3 garante que os números $\delta(ABD)$ e $\delta(BDC)$ são positivos, pois ambos os triângulos ABD e BDC têm soma dos ângulos internos menor que 360° . Assim, $\delta(ABCD) = \delta(ABD) + \delta(BDC) > 0$. Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \delta(ABCD) = 360^\circ$, temos que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} < 360^\circ$.

Teorema 7.4 *Em Geometria Hiperbólica, se os triângulos ABC e $A'B'C'$ são tais que $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$, então ABC e $A'B'C'$ são congruentes.*

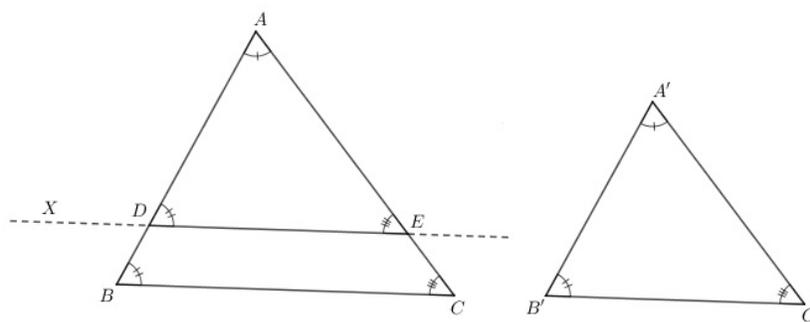


Figura 7.3: Triângulos ABC e $A'B'C'$ congruentes em Geometria Hiperbólica

Demonstração: Suponha que triângulos ABC e $A'B'C'$ tenham $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$, mas que não sejam congruentes. Inicialmente, note que ABC e $A'B'C'$ possuem pelo menos dois pares de lados correspondentes, porém não congruentes. De fato, suponha sem perda de generalidade que $AB > A'B'$, $AC = A'C'$ e $BC = B'C'$. Como $\hat{A} = \hat{A}'$, teríamos, pelo caso LAL , a igualdade $AB = A'B'$, ou seja, uma contradição. Assim, podemos supor que $AB > A'B'$ e $AC > A'C'$. Portanto, existem pontos D e E em AB e AC , respectivamente, tais que $AD = A'B'$

e $AE = A'C'$. Como $B'A'C = DAE$, pelo caso *LAL*, temos que ADE e $A'B'C'$ são congruentes. Seja X um ponto da reta DE tal que D esteja entre X e E . Considerando agora as igualdades $\hat{ADE} = \hat{B}' = \hat{B}$ e $\hat{XDB} = \hat{ADE} = \hat{B}$ (opostos pelo vértice), temos que \hat{XDB} e \hat{B} são ângulos alternos internos. Portanto, pelo Teorema 5.1 as retas BC e DE são paralelas. Assim, é fácil ver que o quadrilátero $DBCE$ é convexo. Note agora que $\hat{ADE} + \hat{BDE} = 180^\circ = \hat{DEA} + \hat{CED}$. Como $\hat{ADE} = \hat{B}$ e $\hat{DEA} = \hat{C}$, é fácil ver também que a soma dos ângulos internos do quadrilátero é 360° , o que é uma contradição pelo Corolário 7.2.

Capítulo 8

Considerações Finais

As três hipóteses de Saccheri representam os três modelos de geometria que receberam os nomes de Hiperbólico, Euclidiano e Elíptico. As imagens abaixo mostram triângulos em três tipos distintos de superfície.

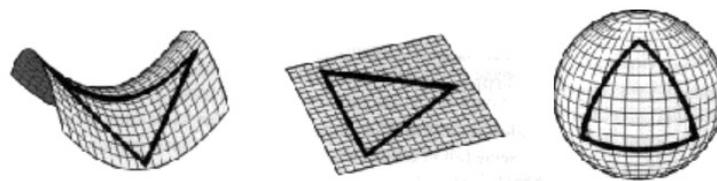


Figura 8.1: Triângulos em três tipos distintos de superfície

Dizemos que uma superfície esférica tem uma curvatura positiva, enquanto um hiperboloide tem curvatura negativa (o plano tem curvatura zero). Observe que numa superfície de curvatura positiva a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° e que numa superfície com curvatura negativa a soma dos ângulos internos é menor que 180° .

Os trabalhos de Saccheri, Legendre e de outros matemáticos envolvidos nas tentativas de demonstração do Quinto Postulado de Euclides estimularam o estudo crítico dos fundamentos da Geometria, até que em 1899 surgiu o "Fundamentos da Geometria", de Hilbert. Um livro com uma excelente organização axiomática da Geometria.

O desenvolvimento das geometrias não euclidianas foi de grande importância para a Física Moderna. A Teoria Geral da Relatividade descreve que o espaço é elipticamente curvado em regiões que estão próximas a uma grande presença de

matéria, sendo que atualmente alguns físicos acreditam que algumas porções do espaço podem ser descritas por um modelo hiperbólico.

Ao longo deste trabalho, tentamos mostrar que as tentativas de demonstração do Quinto Postulado de Euclides, olhando principalmente para os resultados obtidos por Saccheri, produziram o nascimento da Geometria Hiperbólica. Não foi o objetivo aqui fazer um estudo aprofundado de Geometria Hiperbólica, mas sim mostrar que a mesma surge naturalmente dos fundamentos da Geometria Neutra com a negação do Quinto Postulado, que como vimos é um equivalente lógico do Postulado das Paralelas de Hilbert.

Referências

- [1] MARTIN, G.E. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. New York: Springer - Verlag, 1975.
- [2] GREENBERG, M.J. *Euclidean and non-euclidean geometries - Development and history* . S. Francisco: W.H. Freeman and Co., 1974.
- [3] BONOLA, R. *Non-Euclidean Geometry - A critical and Historical study of its development*. New York: Dover Publications, 1955.