

SINARA MARTINS TARTA DA SILVA

**TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA: Uma
Proposta para a Aplicação da Matemática no
Ensino Médio**

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

20 de Abril, 2018

SINARA MARTINS TARTA DA SILVA

TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA: Uma Proposta para a Aplicação da Matemática no Ensino Médio

Dissertação submetida por SINARA MARTINS TARTA DA SILVA como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. Fabiana Travessini de Cezaro

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

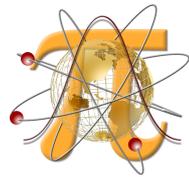
20 de Abril, 2018

Colaboradores



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

<http://www.furg.br>



INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

<http://www.imef.furg.br>



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

<http://www.profmat-sbm.org.br>



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

<http://www.sbm.org.br>



COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR

<http://www.capes.gov.br>

Ficha catalográfica

S586t Silva, Sinara Martins Tarta da.
Tomografia computadorizada: uma proposta para a aplicação da
matemática no ensino médio / Sinara Martins Tarta da Silva. – 2018.
75 p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, Rio Grande/RS, 2018.
Orientadora: Dra. Fabiana Travessini De Cezaro.

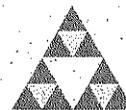
1. Matrizes 2. Sistemas lineares 3. Tomografia computadorizada
4. Problemas inversos I. De Cezaro, Fabiana Travessini II. Título.

CDU 51

Catálogo na fonte: Bibliotecária Claudia Maria Gomes da Cunha CRB10/1942

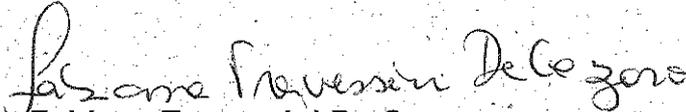


Universidade Federal do Rio Grande - FURG Instituto
de Matemática Estatística e Física - IMEF Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT



ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

No vigésimo dia do mês de abril do ano de 2018, às 15:00 h na sala 2211 do prédio 2 do Campus Carreiros da FURG, realizou-se a Defesa de Trabalho de Conclusão intitulado "**Tomografia Computadorizada: Uma Proposta para a Aplicação da Matemática no Ensino Médio**", de autoria da candidata **Sinara Tarta**, aluna do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da FURG. A Comissão Examinadora esteve constituída pelos professores: **Fabiana Travessini De Cezaro** (Presidente), **Rodrigo Soares**, **Juliana Ziebell** e **Adriano De Cezaro**. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, a candidata foi APROVADA pela Comissão Examinadora. Foi concedido um prazo de 15 dias para a candidata efetuar as correções sugeridas pela Comissão Examinadora e apresentar o trabalho em sua redação definitiva, sob pena de não expedição do Diploma. E, para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão.

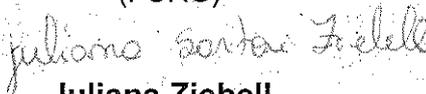

Fabiana Travessini De Cezaro

(Orientadora-Presidente) (FURG)



Rodrigo Soares

(FURG)



Juliana Ziebell

(UFRGS)


Adriano De Cezaro

(FURG)

Dedico este trabalho à minha família, pois é nela que sempre encontro o apoio necessário para seguir em frente.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, que me deram a vida e me ensinaram a ter valores dignos e correr atrás dos meus sonhos. A vocês o meu muito obrigada.

Ao meu marido que esteve sempre ao meu lado, me apoiando, dando força e sendo paciente quando a ansiedade tomava conta, quando o desânimo batia e quando eu precisava estudar e não podia lhe dar a atenção merecida. Quero dizer que sou grata por tudo e que é um prazer dividir mais essa conquista com você.

Aos Mestres do PROFMAT que compartilharam experiências e conhecimentos e contribuíram para meu aprendizado e crescimento pessoal, deixo meu reconhecimento, meu carinho e minha gratidão.

Aos colegas de trabalho pelo apoio e compreensão nas fases mais complicadas. A vocês o meu muito obrigada.

Aos colegas e amigos que o PROFMAT me trouxe, com quem pude compartilhar angústias, expectativas, frustrações e êxitos, com quem aprendi muito. Obrigada por todo o apoio, pela troca de exercícios, pelas conversas no grupo WhatsApp, pela companhia nos almoços no RU, pelos momentos divertidos e pelas trocas de experiências. A vocês minha gratidão, amizade e respeito.

Por fim, a minha orientadora Dra. Fabiana Travessini de Cezaro meu sincero agradecimento, por acreditar em mim, por ter me incentivado e inspirado. Obrigada pela paciência, pela dedicação e disponibilidade.

“Eu não sei o que quero ser, mas sei muito bem o que não quero me tornar”
(Friedrich Nietzsche)

Resumo

Esta dissertação apresenta uma proposta de aplicação dos conceitos da matemática básica do Ensino Médio, como matrizes, sistemas lineares e recorrência por meio do estudo da Tomografia Computadorizada e problemas inversos. O objetivo desse trabalho é contextualizar esses conteúdos com a vida prática, mostrando que a matemática é muito além do lápis e papel, estando presente nas mais diversas áreas de conhecimento.

Palavras-chaves: Matrizes, Sistemas Lineares, Recorrência, Problemas Inversos, Tomografia Computadorizada

Abstract

This dissertation presents a proposal to apply the concepts of basic mathematics such as matrices, linear systems and recurrence through the study of Computed Tomography and inverse problems with the purpose of contextualizing these contents with practical life, showing that mathematics is much beyond pencil and paper, being present in the most diverse areas of knowledge.

Key-words: matrices, linear systems, recurrence, inverse problems, Computed Tomography

Lista de ilustrações

Figura 1 – Forma de Escada da Matriz Escalonada	31
Figura 2 – Representação das partes básica de um tomógrafo	41
Figura 3 – Representação do funcionamento do Tomógrafo Convencional	42
Figura 4 – Sir Godfrey Hounsfield(esquerda) e Allan Cormack(direita)	43
Figura 5 – Tomógrafo de Primeira Geração	44
Figura 6 – Tomógrafo de Segunda Geração	45
Figura 7 – Tomógrafo de Terceira Geração	45
Figura 8 – Tomógrafo de Quarta Geração	46
Figura 9 – Funcionamento do TC Dual Source	46
Figura 10 – Funcionamento do TC Espiral	47
Figura 11 – TC por Canhão de Elétrons	48
Figura 12 – PET Scan do Cérebro Normal X PET Scan do Cérebro com Alzheimer	49
Figura 13 – Tomografia por Impedância Elétrica	49
Figura 14 – Raio-X incidente	53
Figura 15 – Atenuação do Raio-X	53
Figura 16 – Modelo de escaneamento paralelo	56
Figura 17 – Feixe em forma de cone de raios-X	56
Figura 18 – Mudança de variável. Figura disponível em (BUZUG, 2008)	57
Figura 19 – Tomografia discreta e feixe de raios-X	60
Figura 20 – O Jogo da Tomografia - Exibição dos cortes horizontais de um octaedro regular.	72

Sumário

	Introdução	13
1	MATEMÁTICA BÁSICA	17
1.1	Matrizes	17
1.1.1	Representação de uma matriz	17
1.1.2	Matrizes Especiais	18
1.1.3	Igualdade de Matrizes	19
1.1.4	Multiplicação por Escalar	20
1.1.5	Adição e Subtração de Matrizes	20
1.1.6	Multiplicação de Matrizes	21
1.1.7	Matriz Transposta	22
1.1.8	Determinante	22
1.1.9	Desenvolvimento de Laplace	24
1.1.10	Regra de Sarrus	25
1.1.11	Matriz Inversa e Matriz Adjunta	25
1.2	Resolução de Sistemas de Equações Lineares	27
1.2.1	Classificação e Discussão de um Sistema	28
1.2.2	Método da Substituição	29
1.2.3	Regra de Cramer	30
1.2.4	Sistemas Escalonados	31
1.2.5	Resolução de Sistemas Escalonados	31
1.2.6	Operações Elementares	33
1.2.7	Escalonamento de um Sistema	33
1.2.8	Sistemas Homogêneos	35
1.3	Recorrências	35
1.3.1	Sequências	35
1.3.2	Relações de Recorrência	36
1.3.3	Relações de Recorrência Lineares com Coeficientes Constantes	36
1.3.4	Relações de Recorrência Lineares Homogêneas	37
1.3.4.1	Relações de Recorrência Lineares Homogêneas de Primeira Ordem	37
1.3.4.2	Relações de Recorrência Lineares Homogêneas de Segunda Ordem	37
1.3.5	Relações Lineares de Recorrência Não-homogêneas	38
1.3.6	Relações Lineares de Recorrência Genéricas	38
2	TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA	40
2.1	História da Tomografia	42

2.2	Gerações dos Tomógrafos Convencionais	44
2.3	TC Espiral ou TC Helicoidal	46
2.4	TC por Canhão de Elétrons	47
2.5	PET-Scan	48
2.6	Tomografia por Impedância Elétrica (TIE)	49
3	MODELAGEM DO PROBLEMA DE TOMOGRAFIA E SOLUÇÃO	51
3.1	Problemas Inversos	51
3.2	O Problema de Tomografia	52
3.3	Caso Discreto	59
3.4	Resolução Através de Recorrência	61
3.5	Resolução Através de Matrizes	62
4	APLICAÇÃO PARA SALA DE AULA	63
4.1	Planejamento da Atividade	63
4.1.1	Problema 1	63
4.1.2	Problema 2	67
4.1.3	Problema 3	71
4.1.4	Problema 4	72
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
	REFERÊNCIAS	74

Introdução

O presente texto é uma proposta para aplicação em sala de aula do trabalho desenvolvido como dissertação do Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande e tem por objetivo apresentar uma alternativa para a motivação dos alunos, através do estudo da Tomografia Computadorizada, que é uma ferramenta da medicina para diagnósticos através de imagens amplamente utilizada e que não existiria sem a matemática que a embasa.

Num contexto social em que há grande avanço das tecnologias, especialmente na área da informática, muitas atividades passaram e passarão a ser desenvolvidas por máquinas e, por isso, a matemática deixou de ter um significado expressivo para os alunos. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio destacam a necessidade de formarmos cidadãos aptos para esse novo mercado, conforme trecho abaixo:

Nas condições contemporâneas de produção de bens, serviços e conhecimentos, a preparação de recursos humanos para um desenvolvimento sustentável supõe desenvolver a capacidade de assimilar mudanças tecnológicas e adaptar-se a novas formas de organização do trabalho. Esse tipo de preparação faz necessário o prolongamento da escolaridade e a ampliação das oportunidades de continuar aprendendo. Formas equilibradas de gestão dos recursos naturais, por seu lado, exigem políticas de longo prazo, geridas ou induzidas pelo Estado e sustentadas de modo contínuo e regular por toda a população, na forma de hábitos preservacionistas racionais e bem informados. (BRASIL, 2000)

Contudo, a matemática está presente nas nossas vidas nas mais diversas áreas de conhecimento e precisa ganhar visibilidade, a fim de despertar o interesse dos estudantes para a aprendizagem desta ciência. Nesse sentido, a UNESCO afirma:

É reconhecido de forma unânime que a matemática é onipresente no mundo atual, principalmente nos objetos tecnológicos que nos cercam ou nos processos de troca e de comunicação; porém, em geral, ela é invisível. Essa invisibilidade torna problemática a percepção do interesse em se desenvolver uma cultura matemática, além da aprendizagem mais básica que envolve números, medidas e cálculos. É importante que a educação básica contribua para superar essa invisibilidade, especialmente porque as necessidades atuais do chamado letramento matemático vão além das exigências tradicionalmente associadas ao “saber calcular”. (UNESCO, 2016)

Precisamos de uma educação matemática que permita a construção de uma imagem positiva e adequada da matemática, que seja fiel aos seus conteúdos, mas que não se distancie da prática. Assim, a matemática deve ser vista como uma ferramenta para

a resolução de problemas do mundo real. É o que podemos ler em "Os desafios do ensino de matemática na educação básica", da UNESCO:

Uma educação matemática de qualidade deve, portanto, ser conduzida por uma visão da matemática como uma ciência viva, em conexão com o mundo real, aberta a relações com outras disciplinas, de modo que tal abertura não se limite apenas a disciplinas científicas. Assim, em particular, deve permitir que os alunos entendam o poder da matemática como uma ferramenta de modelagem para compreender e agir sobre o mundo.

Dessa forma, verificamos que o grande desafio de ensinar matemática na atualidade é torná-la interessante, útil, aplicável e contextualizada, em meio a tantas tecnologias mais atraentes e a um turbilhão de informações ao qual estamos expostos, e que tiram o nosso foco do estudo da matemática.

A matemática desenvolvida de forma mecânica e tradicional, sem significado prático para o aluno, é desmotivadora. Quando não percebe a aplicabilidade do que estuda, a maioria dos alunos busca apenas a aprovação na disciplina, para concluir o curso ou série em que está inscrito.

Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular destaca a necessidade de associarmos os conteúdos com a realidade:

(...) no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade (...). Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros.

Tais considerações colocam a área de Matemática e suas Tecnologias diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração, que dêem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum.(BRASIL, 2017)

O Ensino Médio possui a característica de terminalidade e a necessidade de seu egresso estar preparado para a vida em sociedade, mercado de trabalho, bem como para prosseguir os seus estudos, conforme destacado abaixo:

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional explicita que o Ensino Médio é a “etapa final da educação básica” (Art.36), o que concorre para a construção de sua identidade. O Ensino Médio passa a ter a característica da terminalidade, o que significa assegurar a todos os cidadãos a oportunidade de consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental; aprimorar o educando como pessoa humana;

possibilitar o prosseguimento de estudos; garantir a preparação básica para o trabalho e a cidadania; dotar o educando dos instrumentos que o permitam “continuar aprendendo”, tendo em vista o desenvolvimento da compreensão dos “fundamentos científicos e tecnológicos dos processos produtivos” (Art.35, incisos I a IV).(BRASIL, 2000)

Segundo o professor Dr. Jonei Cerqueira Barbosa,

A matemática pode servir como “poder para alguém” agindo como um instrumento de controle social, pois afinal, os números governam o mundo, decisões são tomadas a partir de fórmulas, de cálculos, de estatísticas, planejamentos de governo são decididos através da matemática, decisões estas que afetam as vidas de todos aqueles que a elas se submetem. (BARBOSA, 2003)

Apesar disso, não são raros os questionamentos acerca da aplicabilidade na vida prática dos conteúdos estudados em matemática.

A Base Nacional Comum Curricular na área da Matemática ressalta a importância da matemática para a vida dos estudantes e destaca que ela não é apenas um conjunto de regras, mas faz parte da cultura e história humana, e atua como ferramenta para a compreensão da realidade, conforme trecho abaixo:

Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história. Assim, as habilidades previstas para o Ensino Médio são fundamentais para que o letramento matemático dos estudantes se torne ainda mais denso e eficiente, tendo em vista que eles irão aprofundar e ampliar as habilidades propostas para o Ensino Fundamental e terão mais ferramentas para compreender a realidade e propor as ações de intervenção especificadas para essa etapa(BRASIL, 2017)

Nessa realidade, surge a proposta de apresentar aos estudantes do ensino médio como a matemática está inserida na área da saúde, por meio do estudo da tomografia computadorizada. Esta é a proposta principal deste trabalho.

A tomografia computadorizada é um dos métodos de diagnóstico mais importantes da atualidade. Com ela é possível obter imagens internas de um corpo de maneira não invasiva, com a qualidade não alcançada por outros métodos. Esse método consiste em reconstruir a imagem de um objeto através das medidas das intensidades dos raios X que o atravessaram. Nesta reconstrução, utilizamos conceitos da matemática básica tais como Matrizes, Sistemas Lineares e Recorrência.

Este trabalho é dividido em quatro capítulos. No primeiro Capítulo, Matemática básica, são estudados os principais conceitos inerentes às matrizes, aos determinantes, aos sistemas lineares e às recorrências. Esses saberes são importantes para o desenvolvimento

do estudos da tomografia computadorizada. No segundo Capítulo, Tomografia, são desenvolvidos os conceitos sobre tomografia, sua evolução histórica, bem como os principais tipos de tomografia computadorizada existentes. Passamos então para o terceiro Capítulo, Modelagem do Problema de Tomografia e Solução, onde são desenvolvidos os conceitos de problemas inversos, a modelagem matemática da tomografia e sua discretização, bem como sua resolução através de recorrência e por meio de matrizes. E por fim, no quarto Capítulo, Aplicação para Sala de Aula, é apresentada uma proposta de atividade para ser desenvolvida na sala de aula com alunos do segundo ano do ensino médio.

1 Matemática Básica

Neste capítulo apresentaremos os conhecimentos mínimos de matemática necessários à resolução do problema da reconstrução de imagens de tomografia.

1.1 Matrizes

Segundo a definição de Iezzi, "uma matriz $m \times n$ é uma tabela de $m \cdot n$ números dispostos em m linhas (filas horizontais) e n colunas (filas verticais)". (IEZZI et al., 2004)

No mesmo sentido, Boldrini define matriz como "[...] uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas". (BOLDRINI et al., 1980)

1.1.1 Representação de uma matriz

Utilizaremos letras maiúsculas para denotar matrizes e minúsculas para representar seus elementos. Dessa forma, dada uma matriz A do tipo $m \times n$, seus elementos serão representados por a_{ij} . Nessa representação, i refere-se à linha e j à coluna onde está localizado o elemento.

A matriz A será representada por $A_{m \times n} = (a_{ij})$, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Abaixo, seguem alguns exemplos:

1. Matriz 2x3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Matriz 3x2:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Matriz 2x2.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Os elementos de uma matriz podem ser, por exemplo, números, funções, ou outras matrizes.

1.1.2 Matrizes Especiais

Segundo Boldrini,

Ao trabalhar com matrizes, observamos que existem algumas que, seja pela quantidade de linhas ou colunas, ou ainda, pela natureza de seus elementos, têm propriedades que as diferenciam de uma matriz qualquer. Além disso, estes tipos de matrizes aparecem frequentemente na prática e, por isso, recebem nomes especiais. (BOLDRINI et al., 1980)

Seguem algumas dessas matrizes: linha, coluna, nula, quadrada, diagonal, identidade, triangular superior, triangular inferior e simétrica.

- **Matriz Linha:** é a matriz formada por uma única linha.

Exemplo:

$$A = (1 \quad -2 \quad 0)$$

- **Matriz Coluna:** é a matriz formada apenas por uma coluna.

Exemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Nula:** é a matriz que possui todos os seus elementos iguais a zero.

Exemplo:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Quadrada:** é a matriz que possui o número de linhas igual ao número de colunas.

Exemplo:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

é uma matriz 2×2 , chamada de matriz quadrada de ordem 2.

- **Matriz Diagonal:** é uma matriz quadrada, onde $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$, ou seja, os elementos que não estão na diagonal são nulos.

Exemplo:

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Identidade:** é a matriz cujos elementos da diagonal são iguais a 1 e os demais iguais a zero.

Exemplo:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Triangular Superior:** é a matriz quadrada, na qual todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Exemplo:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Triangular Inferior:** é a matriz quadrada, na qual todos os elementos acima da diagonal são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Exemplo:

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Simétrica:** é a matriz quadrada onde $a_{ij} = a_{ji}$, isto é, a parte superior é uma reflexão da parte inferior, em relação à diagonal.

Exemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ 3 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

1.1.3 Igualdade de Matrizes

Dadas duas matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

dizemos que os elementos de mesmo índice são correspondentes, ou seja, $a_{ij} = b_{ij} \forall i, j$.

Duas matrizes do mesmo tipo $m \times n$ são iguais quando todos os seus elementos correspondentes são iguais.

1.1.4 Multiplicação por Escalar

Dados $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e k um número, temos

$$k \cdot A = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

1.1.5 Adição e Subtração de Matrizes

- **Adição:** A soma de duas matrizes de mesma ordem, $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m \times n} = [b_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$, que denotamos por $A + B$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e B , ou seja, $C = A + B$ e $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, com $i = 1 : m$ e $j = 1 : n$.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Oposta:** Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, a matriz oposta de A , é $-A$, tal que $A + (-A) = 0$, onde 0 é matriz nula do tipo $m \times n$. Obtemos $-A$ multiplicando a matriz A pelo escalar $k = -1$.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \text{ então } -A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Subtração:** Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, definimos a matriz $A - B$ como a soma de $A + (-B) = A - B$.
- **Propriedades:** Dadas as matrizes A , B e C de ordem $m \times n$ e O a matriz nula, valem as propriedades da adição a seguir:

1. **Comutativa:** $A + B = B + A$
2. **Associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. **Oposto:** $A + (-A) = O$
4. **Elemento Neutro:** $A + O = A$

1.1.6 Multiplicação de Matrizes

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, chamamos de produto de A por B , e escrevemos $A \cdot B$, a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$, em que um elemento qualquer c_{ij} é obtido da seguinte maneira:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, \text{ para } i = 1 : m, k = 1 : n.$$

• **Observações:**

1. O produto AB existe se, e somente se, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B .
2. A matriz $C = AB$ possui o número de linhas de A e o número de colunas de B .

$$A_{(m \times n)} \cdot B_{(n \times p)} = C_{(m \times p)}$$

3. Se A é de ordem $m \times n$ e B é de ordem $n \times p$, com p diferente de m , então AB existe, mas BA não existe.

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, determinemos AB e BA .

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 0 + 5 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \\ (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Com esse exemplo, podemos perceber que AB e BA existem, mas são diferentes. Assim notamos que, em geral, o produto de matrizes não é comutativo. Quando $AB = BA$, dizemos que A e B comutam.

• **Propriedades da Multiplicação:**

1. **Associativa:** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. **Distributiva à direita em relação à adição/subtração:**

$$(A \pm B) \cdot C = A \cdot C \pm B \cdot C$$

3. Distributiva à esquerda em relação à adição/subtração:

$$C \cdot (A \pm B) = C \cdot A \pm C \cdot B$$

4. A matriz identidade funciona como elemento neutro da multiplicação. Seja A uma matriz quadrada de ordem n , temos:

$$A \cdot I_n = A \text{ e } I_n \cdot A = A$$

1.1.7 Matriz Transposta

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, podemos obter uma outra matriz $A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de A , isto é, $B = A^T$ onde $b_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

Propriedades:

- i) Se $A = A^T$, A é uma matriz simétrica.
- ii) $A^{TT} = A$, ou seja, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.
- iii) $(A + B)^T = A^T + B^T$: a transposta de uma soma é igual à soma das transpostas.
- iv) $(kA)^T = kA^T$, onde k é qualquer escalar.

1.1.8 Determinante

Dada uma matriz A de ordem $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Se suprimirmos a linha de ordem i , $i \in \mathbb{N}$, e a coluna de ordem k , $k \in \mathbb{N}$, de A , obtemos uma matriz de ordem $(n - 1)$, a qual chamamos de menor do elemento a_{ik} e representamos por M_{ik} . (KREYSZIG, 1976)

Chamamos de cofator de a_{ik} , e representamos por C_{ik} , o determinante do menor M_{ik} multiplicado por $(-1)^{i+k}$ (KREYSZIG, 1976), como segue:

$$C_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Podemos agora definir um determinante de ordem n :

Definição 1.1.1 (Determinante). *Seja A uma matriz quadrada de ordem n , o determinante é definido pela soma dos produtos dos elementos de qualquer linha ou qualquer coluna, por seus respectivos cofatores. Como segue:*

$$(a) \quad \det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ou

$$(b) \quad \det A = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \dots + a_{nk}C_{nk} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Dessa forma, $\det A$ é definido em função de n determinantes de ordem $n - 1$, dos quais cada um é definido por $n - 1$ determinantes de ordem $n - 2$ e, assim, sucessivamente até chegarmos a uma matriz de segunda ordem, da qual é facilmente calculado o determinante, conforme segue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Propriedades:

i) Se uma linha ou coluna for nula, o $\det A = 0$.

Demonstração: Isso ocorre por que em cada termo do cálculo do determinante aparece um dos elementos da linha(coluna) nula e, dessa forma, todos se anulam, e o determinante é zero.

ii) $\det A = \det(A^T)$

iii) Ao multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por essa constante.

Demonstração: Seja A a matriz original e B a matriz obtida multiplicando uma linha de A por uma constante k . Ao calcularmos o determinante de B , em cada termo aparece um elemento daquela linha que foi multiplicada por k . Podemos, então, colocar k em evidência e o que permanece é o cálculo do determinante de A . Assim, $\det B = k \cdot \det A$.

iv) Se trocarmos duas linhas da matriz de posição, o sinal do determinante troca.

Demonstração: Isso ocorre, pois ao trocarmos duas linhas de uma matriz alteramos a paridade do número de inversões dos índices, logo trocamos o sinal dos termos.

v) O determinante de uma matriz que tem duas linhas iguais é zero.

Demonstração: Se trocarmos as duas linhas iguais, a matriz e o determinante permanecerão iguais. Entretanto, conforme a propriedade anterior, o determinante deveria trocar de sinal. Assim, a única possibilidade é que o determinante seja nulo.

vi) Não se altera o determinante, se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante.

Demonstração: Podemos demonstrar essa propriedade usando os resultados das propriedades (iii) e (v).

vii) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Demonstração: Essa propriedade é facilmente verificada para matrizes de ordem 2 e 3. Entretanto, a demonstração desse resultado para matrizes de ordem n é bem mais complicado, podendo ser mostrado utilizando matrizes elementares.

Observação: $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$, conforme exemplo:

$$\text{Sejam } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculamos os determinantes, obtemos $\det A = 32$, $\det B = -3$ e $\det A + B = 54$.

1.1.9 Desenvolvimento de Laplace

Chamamos o número Δ_{ij} de cofator ou complemento algébrico do elemento a_{ij} . O cofator é o determinante afetado pelo sinal $(-1)^{i+j}$ da submatriz A_{ij} , a qual obtemos retirando a i -ésima linha e a j -ésima coluna de A .

Pelo método de Laplace, podemos calcular o determinante de uma matriz $A_{n \times n}$, conforme mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \det A_{n \times n} &= a_{i1} \Delta_{i1} + \cdots + a_{in} \Delta_{in} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij} \end{aligned}$$

De acordo com Boldrini,

O desenvolvimento de Laplace é uma fórmula de recorrência que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem n , a partir dos determinantes das submatrizes quadradas de ordem $n - 1$. Em grande parte dos casos ele simplifica muito o cálculo de determinantes, principalmente se for utilizado em conjunto com outras propriedades dos determinantes. (BOLDRINI et al., 1980)

1.1.10 Regra de Sarrus

A regra de Sarrus é um método prático para o cálculo de determinantes de matrizes de terceira ordem.

Dada uma matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, devemos seguir os passos abaixo para calcular os determinante:

1º Passo: Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

2º Passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da diagonal principal com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal

$$\det A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

3º Passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da diagonal secundária com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal e subtraímos do valor obtido no 2º passo

$$\det A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ \det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

1.1.11 Matriz Inversa e Matriz Adjunta

Definição 1.1.1 (Matriz Adjunta). *Dada uma matriz quadrada A , chamaremos de matriz adjunta de A à transposta da matriz dos cofatores de A . Notação: $\widehat{adj}A$.*

Definição 1.1.2 (Matriz Inversível). *Seja A uma matriz quadrada de ordem n . A é dita inversível (ou invertível) se existir uma matriz B tal que:*

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Nesse caso, B é a inversa de A e indicada por A^{-1} .

Propriedades:

i) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis, então $A \cdot B$ é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Para isso, basta observar que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$ e que, analogamente $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

ii) Se A é uma matriz quadrada e existe uma matriz B tal que $BA = I$, então A é invertível, ou seja A^{-1} existe e, além disso, $B = A^{-1}$.

Ou seja, se A^{-1} existe, temos: $B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$.

iii) Nem toda matriz possui inversa.

Por exemplo, mostraremos que a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ não tem inversa. Para isso, basta mostrar que a equação matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

não tem solução. De fato isso ocorre, pois:

$$\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

implica que $2c = 1$ e $c = 0$, o que não pode ocorrer simultaneamente.

Teorema 1.1.1. *Uma matriz quadrada A admite uma inversa se, e somente se $\det A \neq 0$.*

Neste caso:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\widehat{\text{adj}}A)$$

Demonstração: Seja $A_{n \times n}$ uma matriz quadrada que tenha inversa, isto é, existe A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I_n$. Usando o determinante temos

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \text{ e } \det I_n = 1$$

Então:

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1.$$

Desse resultado, concluímos que se A tem inversa, então $\det A \neq 0$ e $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. Assim, $\det A \neq 0$ é uma condição necessária para que A tenha inversa. Como $A \cdot \widehat{\text{adj}}A = (\det A)I$. Se $\det A \neq 0$, $A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \widehat{\text{adj}}(A) = I$ e a inversa é única, concluímos que é também uma condição suficiente. Portanto $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\widehat{\text{adj}}A)$.

1.2 Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Uma equação linear é uma expressão do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde as variáveis x_1, x_2, \dots, x_n são as incógnitas da equação que podem assumir quaisquer valores reais ou complexos; a_1, a_2, \dots, a_n são números reais ou complexos que recebem o nome de coeficientes das incógnitas; o número b chamamos de termo independente.

Um sistema de equações lineares é um conjunto de m equações e n incógnitas (x_1, \dots, x_n) , como mostrado abaixo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (1.2)$$

onde a_{ij} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, são números reais ou complexos fixos, (x_1, x_2, \dots, x_n) são as incógnitas do sistema e (b_1, b_2, \dots, b_m) são também números reais ou complexos fixos. Se todos os termos independentes (b_1, b_2, \dots, b_m) forem nulos, o sistema é chamado de homogêneo.

A solução de um sistema linear de n variáveis é a sequência ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ quando é solução simultânea de cada uma das equações do sistema. Representamos essa sequência ordenada pelo conjunto $S = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\}$.

Dizemos que dois sistemas lineares de equações são equivalentes se, e somente se, toda solução de um é solução do outro.

Todo sistema linear da forma (1.2) pode ser representado na forma matricial, como segue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ou $A \cdot x = b$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Além disso, podemos representar um sistema na forma de sua matriz ampliada, na qual cada linha é a representação abreviada da equação correspondente, como segue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

1.2.1 Classificação e Discussão de um Sistema

A discussão dos sistemas lineares consiste em analisar os parâmetros dos coeficientes em relação ao determinante da matriz dos coeficientes das equações e, então, classificar os sistemas quanto ao número de soluções.

O sistema linear pode ser classificado conforme o número de soluções:

a) Sistema Possível ou Compatível: Têm ao menos uma solução.

$$\begin{cases} \textit{Determinado} : \text{a solução é única} \\ \textit{Indeterminado} : \text{tem infinitas soluções} \end{cases}$$

b) Sistema Impossível ou Incompatível: não apresenta solução.

Entretanto, algumas equações podem conter coeficientes que sejam parâmetros desconhecidos ou indeterminados. Quando isso ocorre, é a discussão do sistema que nos permite analisar esses parâmetros e determinar para quais valores teremos Sistemas Possíveis Determinados, ou Possíveis Indeterminados ou Sistemas Impossíveis.

Analisaremos o sistema linear de acordo com o determinante da matriz dos coeficientes das equações ($\det A$). Dizemos que:

- $\det A \neq 0$: o sistema é possível e determinado (SPD), tem solução única.
- $\det A = 0$: o sistema pode ser possível e indeterminado (SPI), ter infinitas soluções, ou impossível (SI), não possuir solução. Para saber se o sistema possui infinitas ou nenhuma solução, devemos calcular todos os $\det A_i$. Se todos os $\det A_i$ forem iguais a 0, teremos um SPI. Se pelo menos um $\det A_i$ for diferente de 0, teremos um SI.

1.2.2 Método da Substituição

O método da substituição é uma técnica utilizada para resolver sistemas lineares. Esse método consiste em encontramos o valor algébrico de uma das incógnitas para, em seguida, substituímos esse valor nas outras equações, até descobrir os valores de todas as variáveis.

Descrição do método:

1. Escolher uma incógnita e calcular seu valor algébrico. Dizemos que o valor algébrico foi encontrado, quando a variável estiver isolada.
2. Substituir o valor algébrico da incógnita em outra equação.
3. Calcular o valor numérico de uma das outras incógnitas.
4. Repetir os passos 2 e 3 até que todas as variáveis tenham seus valores algébricos encontrados.

Exemplo: Resolver o sistema
$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 5y = -2 \end{cases} .$$

1. Escolhemos isolar a variável x na segunda equação, obtendo $x = -2 - 5y$
2. Substituímos o valor encontrado para x na primeira equação e encontramos o valor algébrico de y :

$$2(-2 - 5y) - y = 7$$

$$-4 - 10y - y = 7$$

$$-11y = 11$$

$$y = -1$$

3. Substituímos o valor algébrico encontrado para y em $x = -2 - 5y$:

$$x = -2 - 5(-1)$$

$$x = -2 + 5$$

$$x = 3$$

Portanto, o conjunto solução é denotado por $S = \{(3, -1)\}$.

1.2.3 Regra de Cramer

A regra de Cramer nos permite resolver um sistema de equações lineares em termos de determinantes. Portanto, só poderá ser utilizada na resolução de sistemas em que o número de equações e o número de incógnitas forem iguais. Além disso, para a aplicação desse método, o sistema deve ser possível e determinável, o que implica ter o determinante diferente de zero.

Quando resolvermos um sistema linear utilizando esta regra, devemos calcular o determinante ($\det A$) da matriz incompleta do sistema e, então, substituir os termos independentes em cada coluna e calcular os seus respectivos determinantes. Dessa forma encontramos os determinantes $\det A_x$, $\det A_y$... Após encontrados os determinantes podemos aplicar a regra de Cramer, que consiste em dividir os determinantes $\det A_x$, $\det A_y$... pelo determinante $\det A$ e obter as variáveis x , y ...

Segue um exemplo da aplicação da Regra de Cramer:

Dado o sistema linear,

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 5y = -2 \end{cases}$$

Temos que:

1. A matriz A dos coeficientes das incógnitas é $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$;
2. A matriz A_x , obtida a partir da substituição da primeira coluna de A , que contém os coeficientes de x , pelos termos independentes é: $A_x = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;
3. A matriz A_y , obtida a partir da substituição da segunda coluna de A , que contém os coeficientes de y , pelos termos independentes é: $A_y = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;
4. Aplicando a Regra de Cramer, obtemos os valores de x e y : $x = \frac{\det A_x}{\det A}$ e $y = \frac{\det A_y}{\det A}$.

Como:

$$\det A = 2 \cdot 5 - (-1) \cdot (1) = 10 + 1 = 11$$

$$\det A_x = 7 \cdot 5 - (-1) \cdot (-2) = 35 - 2 = 33$$

$$\det A_y = 2 \cdot (-2) - (7) \cdot (1) = -4 - 7 = -11$$

Temos:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{33}{11} = 3 \text{ e } y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{-11}{11} = -1$$

Logo, $x = 3$ e $y = -1$. $S = \{3, -1\}$.

1.2.4 Sistemas Escalonados

Quando o sistema resolvido possuir mais do que três variáveis e três equações, é muito trabalhoso usar a Regra de Cramer, por isso, para facilitar a sua resolução, trabalhamos com ele na sua forma escalonada.

Uma matriz $m \times n$ é dita na forma escalonada se:

- (i) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
- (ii) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.
- (iii) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.
- (iv) Se as linhas $1, \dots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i , então $k_1 < k_2 < \dots < k_r$

A condição iv) impõe a forma de escada da matriz:

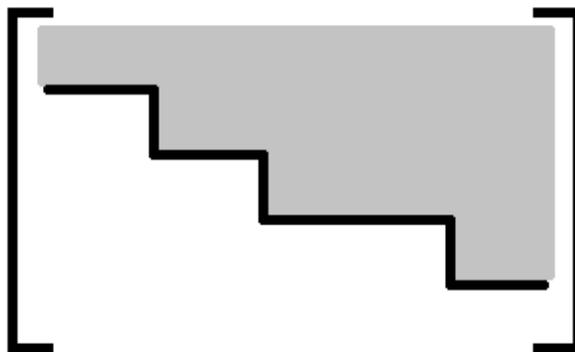


Figura 1 – Forma de Escada da Matriz Escalonada

Isto é, um sistema está na forma escalonada se o número de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo aumenta de equação para equação.

1.2.5 Resolução de Sistemas Escalonados

Para a resolução, consideraremos dois tipos de sistemas:

1º Número de equações igual ao número de variáveis

Consideremos o sistema escalonado
$$\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ y + 2z = -3 \\ 3z = -6 \end{cases}$$

É um sistema possível e determinado, que tem solução única.

Para resolver esse tipo de sistema escalonado, partimos da última equação, onde é possível descobrir o valor de z . Utilizamos esse valor na segunda equação para obtermos y e então substituímos y e z na primeira para obtermos o valor de x .

Resolvendo o exemplo, temos:

(I) $3z = -6 \Rightarrow z = -2$

(II) $y + 2(-2) = -3 \Rightarrow y - 4 = -3 \Rightarrow y = 1$

(III) $x - 2.1 + (-2) = -5 \Rightarrow x - 4 = -5 \Rightarrow x = -1$

Com isso, temos a solução do sistema: $(-1, 1, -2)$.

2º Número de equações menor do que o número de variáveis

Consideremos o sistema escalonado
$$\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Devemos executar os passos abaixo para resolver um sistema desse tipo.

- a) Precisamos identificar qual variável não aparece no início de nenhuma das equações, a variável livre. No sistema em questão a variável livre é z .
- b) Devemos transpor a variável z para o segundo membro das equações:

$$\begin{cases} x - y = 5 - 3z \\ y = 1 + z \end{cases}$$

- c) Ao atribuímos um valor para z , obteremos um sistema do primeiro tipo, portanto determinado. Como z pode assumir qualquer valor real, esse sistema possui infinitas soluções. Supondo $z = \alpha$, com α real, temos:

$$\begin{cases} x - y = 5 - 3.\alpha \\ y = 1 + \alpha \end{cases}$$

- d) Substituindo a segunda equação na primeira, temos: $x - (1 + \alpha) = 5 - 3.\alpha \Rightarrow x = 5 - 3.\alpha + 1 + \alpha \Rightarrow x = -2.\alpha + 6$.
- e) Com isso, temos as soluções representadas pelas triplas ordenadas $(-2\alpha + 6, 1 + \alpha, \alpha)$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esse sistema apresenta infinitas soluções é, portanto um sistema possível e indeterminado.

1.2.6 Operações Elementares

As Operações Elementares, também são conhecidas como método da eliminação de Gauss. Segundo esse método, são três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

i) Permuta da i -ésima e j -ésima linhas. ($L_i \leftrightarrow L_j$)

Exemplo: $L_2 \rightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Multiplicação da i -ésima linha por um escalar não nulo k . ($L_i \rightarrow kL_i$)

Exemplo: $L_2 \rightarrow -3L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

iii) Substituição da i -ésima linha pela i -ésima linha mais k vezes a j -ésima linha. ($L_i \rightarrow L_i + kL_j$)

Exemplo: $L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Observações acerca das alterações sofridas pelo determinante:

- a) muda de sinal a cada troca de linha de lugar;
- b) quando multiplicamos as linhas por um escalar, o determinante fica multiplicado por esse número.

1.2.7 Escalonamento de um Sistema

Para escalonar um sistema, devemos seguir o roteiro abaixo:

- 1º: Escolhemos para primeira equação aquela em que o coeficiente da primeira incógnita seja diferente de zero, preferencialmente igual a 1 ou -1;

2º: Devemos anular o coeficiente da primeira incógnita das demais equações;

3º: Desprezando a primeira equação, aplicamos os passos 1 e 2 até o sistema ficar escalonado.

Exemplo: Escalonar o sistema
$$\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ 2x + y + z = 6 \\ -2x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Devemos anular o coeficiente de x na segunda e terceira equações. Para isso, substituiremos a segunda equação pela soma dela com a primeira multiplicada por 2, conforme segue:

$$-2x + 2y - 4z = -18$$

$$\underline{(+)\ 2x + y + z = 6}$$

$$3y - 3z = -12$$

é conveniente dividir por 3, logo temos $y - z = -4$;

E substituir a terceira equação pela soma dela com a primeira multiplicada por (-2) , conforme segue:

$$2x - 2y + 4z = 18$$

$$\underline{(+)\ -2x - 2y + z = 1}$$

$$-4y + 5z = 19$$

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ y - z = -4 \\ -4y + 5z = 19 \end{cases}$$

Substituindo a terceira equação pela soma dela com a segunda multiplicada por quatro:

$$4y - 4z = -16$$

$$\underline{(+)\ -4y + 5z = 19}$$

$$z = 3$$

Com isso, obtemos o sistema escalonado:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ y - z = -4 \\ z = 3 \end{cases}$$

1.2.8 Sistemas Homogêneos

Um sistema linear é homogêneo quando o termo independente de cada uma de suas equações é igual a zero, isto é, quando todas as suas equações são homogêneas. Ou, escrito na forma matricial, temos $Ax = 0$.

Todo sistema homogêneo de n incógnitas admite a solução $(0, 0, \dots, 0)$, pois essa sequência ordenada satisfaz todas as equações do sistema. Essa é a solução dita solução *nula trivial* ou *imprópria*.

Observações:

Um sistema homogêneo é sempre possível, pois possui ao menos a solução nula.

Possuindo apenas a solução nula, o sistema será determinado.

Se além da solução nula, houver outras soluções, o sistema será possível e indeterminado.

Essas soluções são chamadas de próprias e não triviais.

1.3 Recorrências

1.3.1 Sequências

Definição 1.3.1 (Sequência). *Uma sequência (a_n) de números reais é uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, em que $f(n) = a_n$, ou seja, cada $n \in \mathbb{N}$ associa um número a_n pertencente aos reais, onde a_n é chamado n -ésimo termo da sequência.*

Uma sequência é denominada finita quando possui um número limitado de termos, caso contrário é chamada de infinita. Representamos essas sequências como (a_1, a_2, \dots, a_n) e $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, respectivamente.

Nem toda sequência apresenta uma lei de formação definida ou conhecida. Nos casos em que tal regra é definida, ela pode ser representada das seguintes formas:

- Por meio de uma propriedade exclusiva. Exemplo: a sequência dos números primos, $(a_n) = (2, 3, 5, 7, \dots)$.
- Por meio de uma expressão matemática que associa a cada n um determinado valor de a_n . Exemplo: $a_n = 2n - 1$, $(a_n) = (1, 3, 5, \dots)$.
- Por meio de uma relação de recorrência (ver definição 1.3.2) que, a partir de um certo termo, determina cada termo seguinte em função dos anteriores. Exemplo: a sequência em que o primeiro termo é $a_1 = 3$ e cada termo a partir do segundo é dado por $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $(a_n) = (3, 7, 15, \dots)$.

1.3.2 Relações de Recorrência

Definição 1.3.2 (Relação de Recorrência). *Uma relação de recorrência ou, como também é chamada, uma equação de recorrência, é uma relação que determina cada termo de uma sequência, a partir de certo termo, em função dos termos anteriores.*

Uma equação de recorrência na qual cada termo depende exclusivamente dos anteriores é dita homogênea. Se, além dos termos anteriores, cada elemento da sequência está também em função de um termo independente da sequência, a recorrência é dita não-homogênea.

Observamos ainda que, para que uma sequência seja completamente definida por uma relação de recorrência, é necessário que sejam informados também os primeiros termos a partir dos quais os demais serão obtidos. Notemos que, na recorrência $a_n = 2a_{n-1} + 1$, citada na Seção 1.1, se escolhermos o primeiro termo $a_1 = 2$, a sequência torna-se $(a_n) = (2, 5, 11, \dots)$.

Definição 1.3.3 (Relação de Recorrência Linear). *Uma relação de recorrência é dita linear quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é linear. Além disso, é dita de primeira ordem quando cada termo da sequência é obtido a partir do termo imediatamente anterior a ele, ou seja, quando a_n está em função de a_{n-1} .*

Resolver uma relação de recorrência, significa encontrar uma fórmula fechada para a recorrência, ou seja, uma expressão que forneça cada termo a_n da sequência em função apenas de n e não dos termos anteriores. Tal expressão é chamada solução da recorrência.

1.3.3 Relações de Recorrência Lineares com Coeficientes Constantes

Nos ensinamentos de Lipschutz,

Uma relação de recorrência de ordem k é uma função da forma $a_n = \Phi(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}, n)$ isto é, onde o n -ésimo termo a_n da sequência é uma função dos k termos precedentes (e, possivelmente, de n). Em particular, uma relação de recorrência de ordem k com coeficientes constantes é uma relação de recorrência da forma $a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k} + f(n)$ onde C_1, C_2, \dots, C_k são constantes com $C_k \neq 0$, e $f(n)$ é uma função de n . (LIPSCHUTZ; LIPSON, 2004)

A recorrência é dita linear pois não há potências ou produtos de termos a_n e os coeficientes são constantes dado que não dependem de n .

A relação de recorrência é homogênea quando $f(n) = 0$.

1.3.4 Relações de Recorrência Lineares Homogêneas

1.3.4.1 Relações de Recorrência Lineares Homogêneas de Primeira Ordem

Uma recorrência linear homogênea de primeira ordem é do tipo:

$$a_{n+1} = g(n)a_n$$

Onde $g(n)$ e a_n são não-nulos.

Substituindo cada termo na expressão seguinte, obtemos:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot g(1) \cdot g(2) \cdot g(3) \dots g(n),$$

ou seja,

$$a_{n+1} = a_1 \prod_{j=1}^n g(j)$$

Exemplo: Denominamos progressão geométrica, toda sequência (a_n) de termos não nulos, tal que o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante, $\forall n \in \mathbb{N}$. O quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é chamado de razão e usualmente representada por q de modo que uma vez definido o primeiro termo, todos os outros a partir do segundo são obtidos multiplicando-se a razão ao termo anterior. Com isso temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é a fórmula do termo geral da Progressão Geométrica.

1.3.4.2 Relações de Recorrência Lineares Homogêneas de Segunda Ordem

Uma relação de recorrência homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes é da forma

$$a_n = sa_{n-1} + ta_{n-2}$$

onde s e t são constantes com $t \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, a_1 e a_2 são dados.

A essa relação de recorrência associamos o polinômio característico

$$\Delta(x) = x^2 - sx - t$$

cujas raízes são chamadas raízes características.

Teorema 1.3.1. *Suponhamos que o polinômio característico $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ da relação de recorrência $a_n = sa_{n-1} + ta_{n-2}$ tem raízes reais distintas r_1 e r_2 . Então, a solução geral da relação de recorrência é $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.*

Teorema 1.3.2. *Suponhamos que o polinômio característico $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ da relação de recorrência $a_n = sa_{n-1} + ta_{n-2}$ tem apenas uma raiz r_0 . Então, a solução geral da relação de recorrência é $a_n = c_1 r_0^n + c_2 n r_0^n$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.*

Observação: Nos teoremas 1.3.1 e 1.3.2 as constantes c_1 e c_2 são unicamente determinadas pelas condições iniciais.

1.3.5 Relações Lineares de Recorrência Não-homogêneas

Uma recorrência linear não-homogênea de primeira ordem é do tipo:

$$a_{n+1} = g(n)a_n + f(n)$$

, onde $g(n)$ e $f(n)$ são funções não-nulas.

Exemplo: Analisando o caso particular: $g(n)=1$, a equação assume a forma $a_{n+1} = a_n + f(n)$. Podemos então escrever:

$$a_2 = a_1 + f(1)$$

$$a_3 = a_2 + f(2)$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1} = a_n + f(n)$$

Somando os dois lados das igualdades, obtemos:

$$a_{n+1} = a_1 + f(1) + f(2) + \dots + f(n), \text{ ou seja, } a_{n+1} = a_1 + \sum_{j=1}^n f(j).$$

Desenvolvendo o caso particular em que $f(n) = c$, temos:

$$a_{n+1} = a_1 + \sum_{j=1}^n c$$

$$a_{n+1} = a_1 + n \cdot c$$

Portanto,

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot c$$

Esta relação de recorrência é chamada de progressão aritmética, pois (a_n) possui termos tais que a diferença $a_{n+1} - a_n$ é constante, $\forall n \in \mathbb{N}$. Essa diferença é chamada de razão e usualmente representada por r . Com isso, definido o primeiro termo, todos os outros a partir do segundo são obtidos acrescentando-se a razão ao termo anterior, isto é:

A relação $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ representa o termo geral da progressão aritmética.

1.3.6 Relações Lineares de Recorrência Genéricas

Dada a relação de linear de recorrência de ordem k genérica da forma

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k} = \sum_{i=1}^k C_i a_{n-i}$$

onde C_1, C_2, \dots, C_k são constantes com $C_k \neq 0$. O seu polinômio característico é dado por

$$\delta(x) = x^k - C_1 x^{k-1} - C_2 x^{k-2} - \dots - C_k = x^k - \sum_{i=1}^k C_i x^{k-i}$$

De acordo com Seymour e Marc(LIPSCHUTZ; LIPSON, 2004), se $p(n)$ e $q(n)$ são soluções da recorrência, qualquer combinação linear $c_1p(n) + c_2q(n)$ também é solução da recorrência. Além disso, se r é uma raiz de multiplicidade m do polinômio característico $\delta(x)$ então $r^n, nr^n, \dots, n^{m-1}r^n$ são soluções da recorrência e as seguintes combinações lineares também são: $c_1r^n + c_2nr^n + \dots + c_mn^{m-1}r^n = (c_1 + c_2n + \dots + c_mn^{m-1})r^n$.

2 Tomografia Computadorizada

Nos últimos quarenta anos, a Tomografia Computadorizada é um dos métodos mais importantes de diagnóstico. Ela possibilita aquisição de imagens paralelas e espacialmente consecutivas, cortes axiais com melhor contraste entre os tecidos do que a radiografia convencional, possibilitando a análise de regiões que com outras técnicas, não poderiam ser observadas satisfatoriamente.

A partir da palavra “tomografia”, que tem origem grega nos termos: “tomos” que significa “corte” e “grafia” que significa “imagem”, podemos intuir que tomografia é a técnica de obtenção de imagens de cortes ou fatias do objeto estudado.

Para Rolci

Se entendermos a palavra tomografia como sinônimo para aqueles processos ditos não invasivos, isto é, os processos que permitem descrever o interior de um corpo sem que seja necessário abri-lo, sua abrangência transcende a área médica. Entretanto, é como técnica de diagnóstico médico que esta palavra se popularizou.(CIPOLATTI,)

Sousa descreve a Tomografia Computadorizada como o processo de

Reconstruir a forma de um objeto através de medidas das intensidades dos raios-X que o atravessam, conhecendo-se a intensidade do raio-X imposto no processo e obtendo medições de sua intensidade de chegada a um detector. Dependendo do caminho que os raios-X percorrem, estes são atenuados e a absorção local é medida por um conjunto de detectores(SOUSA; VERÍSSIMO; MACEDO, 2012).

Em outras palavras, a Tomografia Computadorizada (TC) é um meio não invasivo de obter imagens do interior de um corpo. Essas imagens são obtidas a partir do exterior do objeto pela medição das intensidades dos feixes de raios-X que atravessam esse corpo. As intensidades obtidas são processadas por um algoritmo computacional que as transforma em uma imagem bi ou tridimensional(DECEZARO; OLIVEIRA; DECEZARO, 2012).

A TC é baseada nos princípios da radiologia convencional, na qual os tecidos com diferentes composições absorvem de maneira diferente a radiação emitida pelo raio-X. Dessa forma, é possível obter uma imagem em escala de cinza, que retrata essas variações de absorção da radiação, onde cada pixel corresponde à média da absorção dos tecidos examinados.

Assim, para determinar a forma do objeto, é preciso irradiá-lo por todas as direções, o que torna a solução deste problema complexa, visto que envolve matemática, física e computação científica.

Um sistema básico de um tomógrafo é composto pela unidade de escaneamento (gantry) e pela estação de trabalho (workstation). Na unidade de escaneamento, temos a mesa, onde o paciente será posicionado, a fonte de raios X e os detectores, conforme ilustrado na Figura 2¹.

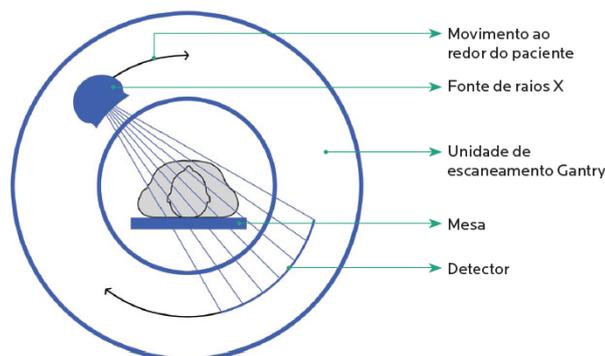


Figura 2 – Representação das partes básica de um tomógrafo

Cáceres nos ensina que:

A imagem de TC é uma imagem digital. Toda imagem digital baseia-se em três conceitos básicos: detector, conversor analógico-digital e computador. Um detector é um sistema que se destina a detectar variações ambientais de alguma natureza. Em TC, o tipo de detector utilizado é o detector de radiação. Assim, o detector de radiação é um dispositivo que, colocado em um meio onde haja campo de radiação, é capaz de indicar sua presença.(CÁCERES, 2005)

Tanto a fonte de raios X quanto os detectores são acoplados de maneira que desenvolvam rotação em volta do paciente, que está imóvel. Os feixes de raios X passam por uma secção axial do paciente e chegam aos detectores, os quais reconhecem a quantidade de radiação que foi atenuada pelo corpo, e armazena esta informação em um computador. Este sistema é chamado de conversor analógico-digital, pois transforma a radiação em um valor digital.

A aplicação de equações matemáticas sobre esses valores torna possível a determinação de relações espaciais entre as estruturas internas de uma região selecionada do corpo. Isso é feito com o uso de um software adequado, que reconstrói matematicamente a imagem, a qual será convertida em diferentes tons de cinza de acordo com a atenuação da radiação em cada ponto.

Cáceres define o processo de aquisição de imagens TC conforme segue:

A aquisição dos dados é feita a partir de múltiplas exposições da área de interesse por raios X. Conforme os aspectos físicos-químicos da estrutura atravessada, a área de interesse é responsável por diferentes graus de

¹ Figura disponível em (FREITAS, 2013)

atenuação do feixe de raios X, identificados pelos detectores de radiação. Os dados obtidos são calculados matematicamente pelo computador e representados em tons de cinza na tela do monitor, conforme a natureza dos tecidos atravessados no corte.(CÁCERES, 2005)

Os movimentos do paciente, objetos metálicos ou desbalanceamento dos detectores podem gerar artefatos. Os artefatos, de acordo com Freitas(FREITAS, 2013) são "Imagens de estruturas ou padrão sem relação com o objeto em estudo" e podem ser identificados por sua aparência.

Um tomógrafo convencional é aquele em que a cada exposição, a mesa movimentase e pára e logo dá início a uma nova rotação de fonte e detectores, conforme demonstrado na Figura 3².

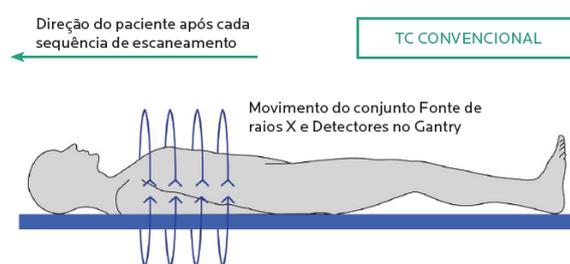


Figura 3 – Representação do funcionamento do Tomógrafo Convencional

Este sistema apresenta o inconveniente de ser muito demorado e causar grande desconforto ao paciente que deve permanecer imóvel por muito tempo.

2.1 História da Tomografia

Segundo Freitas,

O advento da tomografia computadorizada (TC) é considerado uma das grandes inovações no campo da radiologia desde o anúncio dos raios X, por Wilhelm Conrad Röntgen, em 1895. Essa técnica de imagens por secção permite o diagnóstico com melhor percepção da área a ser avaliada, aumentando as chances de assertivas quanto ao planejamento de tratamento e ao controle. (FREITAS, 2013)

No final dos anos 50, já estavam disponíveis para médicos e engenheiros os componentes para a construção de um Tomógrafo Computadorizado. Entretanto, somente em 1967, o processo tomográfico como um todo foi apresentado pelo engenheiro britânico Godfrey Hounsfield³, cuja foto segue na Figura 4.

² Figura disponível em (FREITAS, 2013)

³ Godfrey Hounsfield trabalhava na empresa britânica EMI Ltda. quando foram montados os primeiros TC para teste.(IFA-TÉCNICO, 2017)

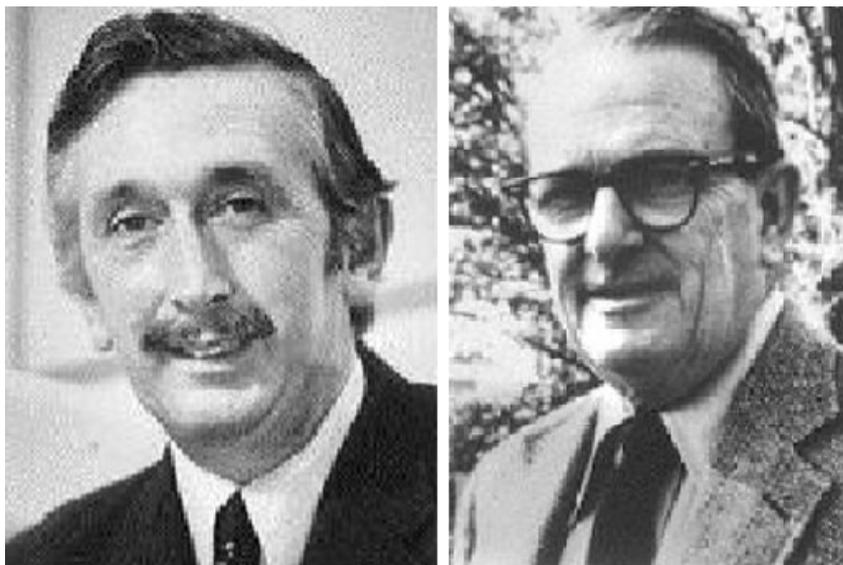


Figura 4 – Sir Godfrey Hounsfield(esquerda) e Allan Cormack(direita)

Outro personagem importante no desenvolvimento da tomografia computadorizada foi o sul-africano Allan M. Cormack, Figura 4 à direita, responsável pela criação da matemática necessária para a reconstrução das imagens tomográficas.

De acordo com Freitas (FREITAS, 2013), a expressão “tomografia” foi utilizada inicialmente em 1962 pela Comissão Internacional em Unidades e Medidas Radiológicas (ICRU–International Commission on Radiologic Units and Measurements) para descrever as formas de tomografia seccional de um corpo.

Em 1979, Cormack e Hounsfield receberam o prêmio Nobel de Medicina por suas contribuições para a Tomografia.

Tabela 1 – Tomografia Através do Tempo

1895	Descoberta dos raios X por Röntgen
1917	J. Radon publicou estudo sobre reconstrução matemática
1924	A. Cormack idealizou a reconstrução de imagem
1971	G. Hounsfield desenvolveu o primeiro tomógrafo, conhecido como TC convencional.
1974	Terceira geração de tomógrafos
1977	Quarta geração de tomógrafos
1979	Prêmio Nobel para Hounsfield e Cormack
1987	Introdução da tomografia espiral
1991	Tomógrafo Dual Slice
1998	Tomógrafo Multislice - 4 secções simultâneas em menos de 1 segundo
2002	Tomógrafo Multislice - 8 e 16 secções simultâneas
2004	Tomógrafo Multislice - 32 e 64 secções simultâneas

2.2 Gerações dos Tomógrafos Convencionais

De acordo com a classificação de Freitas (FREITAS, 2013), são reconhecidas quatro gerações de tomógrafos convencionais:

- **Primeira geração:** fonte e detector são deslocados linearmente cerca de 1 grau para cada nova aquisição. A intensidade do feixe é medida por um único detector. Ao final, há uma varredura de 180 graus ao redor do paciente. Assim, o tempo de varredura é longo e a imagem apresenta um único plano de corte. Ver Figura 5⁴.

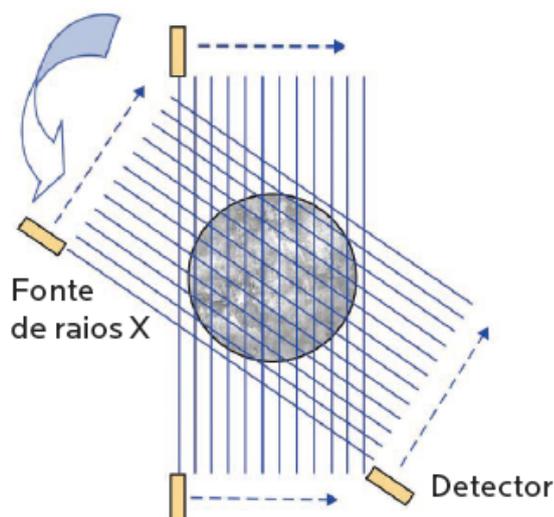


Figura 5 – Tomógrafo de Primeira Geração

- **Segunda geração:** obedecia ao mesmo regime de trabalho da geração anterior, com aumento no número de detectores. Um feixe ou leque de raio reduz o número de incrementos angulares necessários para a varredura. Isso possibilitou redução considerável do número de posicionamentos, passando de 180 graus para 6. Houve redução no tempo de varredura e, conseqüentemente, no tempo de exame. Ver Figura 6⁵.

⁴ Figura disponível em (FREITAS, 2013)

⁵ Figura disponível em (FREITAS, 2013)

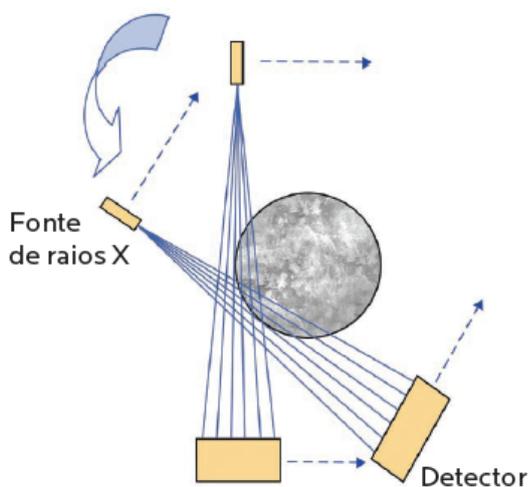


Figura 6 – Tomógrafo de Segunda Geração

- **Terceira geração:** apresentou como diferencial a conformação em arco móvel do conjunto de detectores que, juntamente com a fonte de raios X, descreviam um giro de 360 graus em torno do paciente. Ver Figura 7⁶.

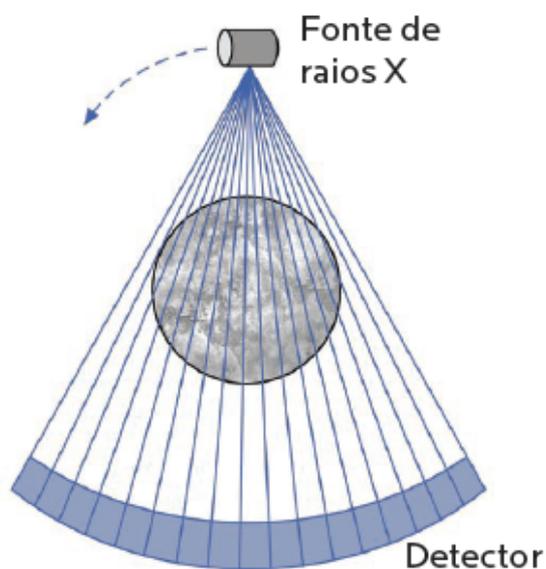


Figura 7 – Tomógrafo de Terceira Geração

- **Quarta geração:** foi implementado o anel de detectores fixo. Houve uma melhora significativa na imagem, diminuindo a geração de artefatos devido a problemas mecânicos. Ver Figura 8⁷.

⁶ Figura disponível em (FREITAS, 2013)

⁷ Figura disponível em (FREITAS, 2013)

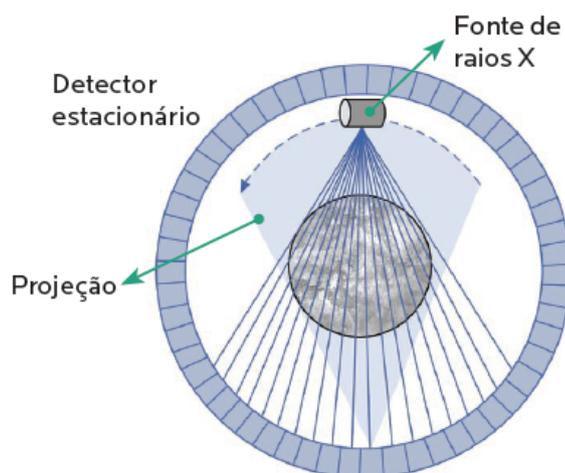


Figura 8 – Tomógrafo de Quarta Geração

- **TC Dual Source:** Surgiu uma nova geração de tomógrafos, segundo Freitas(FREITAS, 2013), denominada TC Dual Source, que emprega dois arranjos de fonte e detectores na mesma unidade de escaneamento. Ver Figura 9⁸.

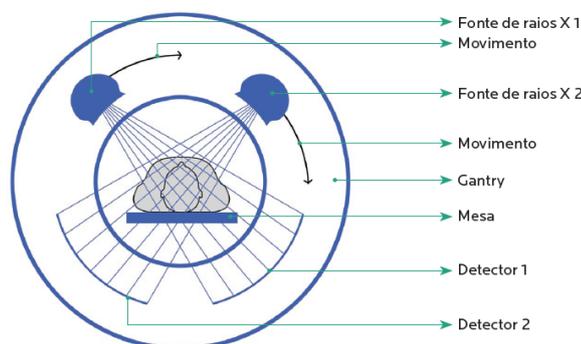


Figura 9 – Funcionamento do TC Dual Source

2.3 TC Espiral ou TC Helicoidal

Considerada de quinta geração, foi criada em 1989, com o objetivo de melhorar os tomógrafos, a tecnologia de TC espiral ou TC helicoidal. A principal diferença está no movimento simultâneo da mesa, dos detectores e da fonte de raios X. Com isso, o tempo de exame diminuiu e a qualidade das imagens melhorou através da interpolação dos cortes. Nesse processo, a aquisição da imagem é feita de forma ininterrupta. Os cortes

⁸ Figura disponível em (FREITAS, 2013)

só aparecem após o tratamento pelo computador, que monta as imagens. Ver Figura 10⁹.

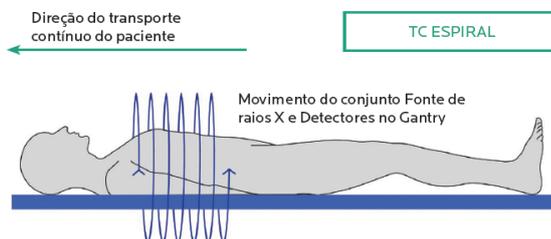


Figura 10 – Funcionamento do TC Espiral

Nessa categoria tem destaque os três tipos de tomógrafos abaixo:

- **Single slice (“uma fatia”)**: Esse tomógrafo apresenta ideia semelhante a do TC convencional, contando apenas um detector e uma fonte para escaneamento do paciente, mas com o movimento simultâneo da mesa gerando um intervalo de reconstrução de imagens.
- **Dual slice (“duas fatias”)**: conta com dois detectores paralelos entre si e opostos à fonte de raios X, o que torna possível a aquisição de duas seções de imagem por rotação.
- **Multislice (“múltiplas fatias”)**: contavam inicialmente com quatro seções simultâneas, que completavam uma rotação em menos de um segundo e a cada volta geravam quatro imagens distintas. Atualmente, existem aparelhos com capacidade para 256 e 320 seções por rotação.

2.4 TC por Canhão de Elétrons

O EBCT (Eletronic Beam Computed Tomography - Tomografia Computadorizada por Canhão de Elétrons) é um dos modelos mais modernos de tomógrafo. Esse aparelho não possui um tubo de raio X ou ampola. O feixe de fótons é gerado ao ar livre, sem confinamento, a partir de um canhão de elétrons, que faz as vezes do cátodo, vejamos a Figura 11.

⁹ Figura disponível em (FREITAS, 2013)

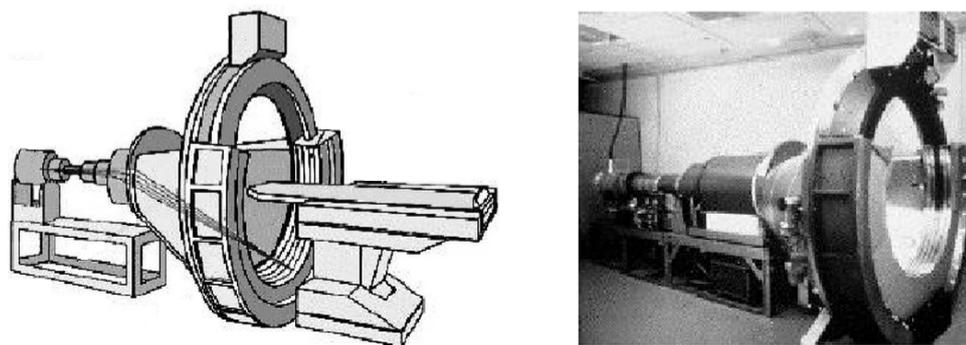


Figura 11 – TC por Canhão de Elétrons

Nesse modelo, o canhão acelera os elétrons, que são desviados por um conjunto de bobinas no caminho até o alvo. O alvo a ser atingido é um dos anéis de tungstênio que circulam o paciente na parte inferior da mesa. Ao atingirem o alvo com energia suficiente ocorre a geração dos raios X.

A vantagem dessa tecnologia é não possuir partes móveis, que limitam a velocidade de geração de imagens em tomógrafos giratórios.

2.5 PET-Scan

PET Scan significa tomografia por emissão de pósitrons (Positron Emission Tomography) e consiste em um método de diagnóstico por imagem que permite o mapeamento de diferentes substâncias químicas radioativas no organismo.

A PET Scan une os recursos da medicina nuclear e da radiologia, uma vez que sobrepõe imagens metabólicas às imagens anatômicas, produzindo assim um terceiro tipo de imagem.

A principal vantagem da PET Scan sobre os demais exames é que ela permite medir a atividade metabólica de lesões, podendo mostrar a presença de alterações funcionais antes mesmo das morfológicas, permitindo um diagnóstico ainda mais precoce de doenças neoplásicas.

No preparo para o exame, o paciente recebe uma injeção de glicose ativada por um elemento radioativo (quase sempre flúor radioativo) e, cerca de uma hora depois, é submetido a uma tomografia computadorizada, na qual serão tomadas imagens do corpo inteiro, durante meia hora aproximadamente.

Os sinais de radiação emitidos pelo elemento radioativo são captados, determinando os locais onde há presença deste açúcar, o que indica que neste local há um metabolismo acentuado. Em regra, esses locais são regiões do cérebro em intensa atividade e o coração, mas também podem ser tumores. As regiões onde há maior presença do açúcar

são marcadas em tons de vermelho.

Além do diagnóstico precoce de tumores, a PET Scan pode auxiliar no diagnóstico do mal de Alzheimer, conforme Figura 12¹⁰:

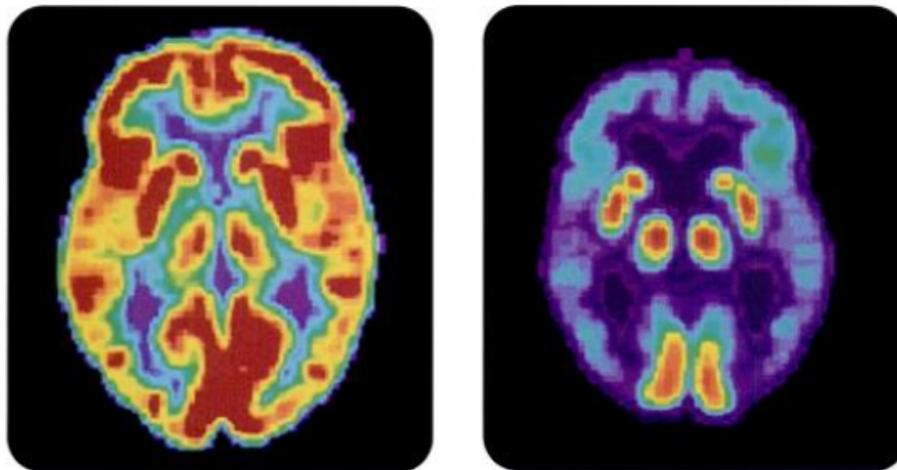


Figura 12 – PET Scan do Cérebro Normal X PET Scan do Cérebro com Alzheimer

2.6 Tomografia por Impedância Elétrica (TIE)

A técnica de tomografia por impedância elétrica (TIE) é um método de imageamento não invasivo, que não usa radiação, no qual são utilizadas informações elétricas para formar imagens de uma seção transversal do interior de um corpo. Para a obtenção das imagens através da TIE, é necessário alocar eletrodos no contorno de uma determinada região do objeto, em conjunto com uma fonte de corrente, conforme Figura 13¹¹:

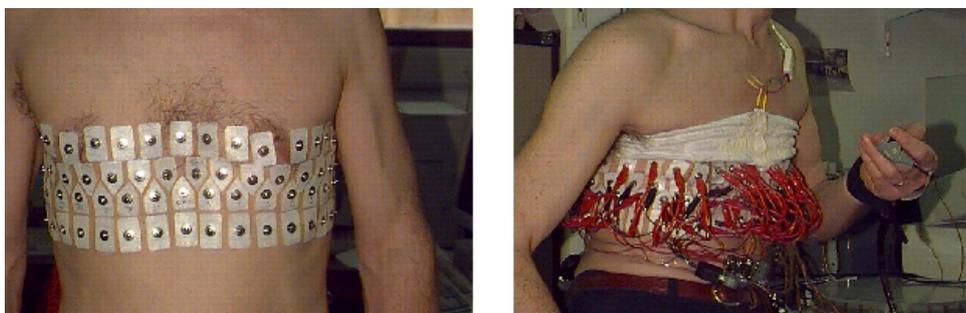


Figura 13 – Tomografia por Impedância Elétrica

A fonte de corrente utiliza dois dos eletrodos alocados no contorno para energizar o interior do domínio e obter imagens de um plano transversal do corpo através das medidas

¹⁰ Fonte da Imagem: Wikimedia Commons. (WIKIMEDIA, 2013)

¹¹ Fonte: Tomografia de Impedância Elétrica.

Disponível em: <http://www.medicinaintensiva.com.br/impedancia-toracica.htm>

dos potenciais elétricos dos demais eletrodos. Os pixels da imagem representam o valor da impedância ou condutividade desse corpo em determinada posição do plano analisado.

Segundo Jefferson Santana Martins(MARTINS, 2017), uma das vantagens apresentadas pela TIE, é um possível ganho de contraste da imagem em relação a outras técnicas de imageamento não invasivo, como a tomografia computadorizada, que utiliza raios X para obtenção de imagens. Além disso, mais vantagens são sua portabilidade, facilidade de manutenção e preço do equipamento para obtenção das imagens. Como não utiliza radiação ionizante, o equipamento de TIE pode ser mantido conectado ao paciente por longos períodos de tempo sem apresentar danos a ele ou terceiros. Apesar dessas vantagens, a TIE necessita melhorar a resolução espacial das imagens produzidas e diminuir o tempo computacional necessário para a reconstrução das imagens devido à complexidade dos algoritmos utilizados.

A TIE pode ser aplicada em diversas áreas, tais como Medicina, Geofísica, Ciências Ambientais, Química, Engenharia e em testes não destrutivos em materiais.

No corpo humano ela pode monitorar a apnéia, a função esofágica e gastrointestinal, o fluxo sanguíneo do coração e a detectar o câncer.

3 Modelagem do Problema de Tomografia e Solução

3.1 Problemas Inversos

Caracterizar um problema como direto ou inverso é uma questão arbitrária. A maior parte do desenvolvimento matemático é feita por meio de problemas diretos, ou seja, aqueles que contêm informações suficientes para encontrar uma solução única, estável e bem definida. Podemos utilizar como exemplo de problema direto uma função $f(x) = Ax$, na qual para cada valor de x obtemos um único valor para $f(x)$, dada uma constante A .

Por outro lado, a definição de problemas inversos não é tão simples. A partir de um problema direto, podemos visualizar dois problemas inversos. O primeiro deles é a relação causa-efeito, cuja solução pode ser obtida através do cálculo da inversa, quando o modelo puder ser invertido, e o segundo problema inverso é a identificação do modelo, a partir de valores de entrada e saída.

O operador A pode ser definido como uma matriz ou como um operador linear ou não-linear. Geralmente, os problemas inversos possuem soluções instáveis e de difícil solução numérica. (SOUSA, 2009)

Representamos um problema por equações do tipo

$$A(p)x = y,$$

onde y é chamado de output (ou efeito), x é dito input (ou causa) e $A(p)$ é o sistema de parâmetros.

Em outras palavras, de acordo com (DECEZARO, 2010), um problema inverso pode aparecer das seguintes formas:

1. O problema de reconstrução: Dado o sistema de parâmetros e observado o output (efeito), encontrar que input (causa) corresponde ao output.
2. O problema de identificação: Dados input (causa) e output (efeito), determinar o sistema de parâmetros que relacionam o input ao output.

É importante destacar que um problema inverso pode ter solução única, várias soluções ou nenhuma solução. Um sistema matemático capaz de produzir solução única para um problema inverso a partir de dados insuficientes necessita incorporar informações adicionais. Essa é a razão pela qual um conjunto de informações iniciais pode gerar

resultados diferentes se submetido a algoritmos diferentes. Portanto, essa inserção de informações é arriscada e devemos respeitar os seus limites de aplicabilidade e as suposições relativas ao caso.

Problemas inversos, que envolvem a determinação de uma causa desconhecida, a partir de um efeito dado, medido ou observado, possuem vasta aplicabilidade em várias áreas da ciência. Como exemplos podemos citar a tomografias, eletrocardiologias e ultrassom em imagens médicas; explorações sísmicas, detecção de petróleo, sedimentos e outras riquezas em geofísica e ciências ambientais. Nessa lista podemos incluir aplicações na engenharia, na física, química, biologia, finanças quantitativa, etc.(DECEZARO, 2010)

Para resolvermos um problema inverso, precisamos:

- a) Ter domínio experimental e teórico dos processos envolvidos;
- b) Poder modelar matematicamente o problema;
- c) Ter domínio experimental e teórico do problema direto;
- d) Entender as informações relacionadas ao problema inverso;
- e) Desenvolver algoritmos para solução numérica do problema inverso.

Um problema é chamado bem colocado, segundo o matemático francês Jacques Salomon Hadamard (1865-1963), quando satisfaz às seguintes condições:

- a) Existência: A solução deve existir;
- b) Unicidade: A solução deve ser unicamente determinada pelos dados;
- c) Estabilidade: A solução deve depender continuamente dos dados.

Se qualquer uma dessas condições não for satisfeita, temos um problema mal colocado.

Do ponto de vista acadêmico, a importância de estudarmos problemas inversos é o fato de desenvolvermos o hábito de pensar inversamente, o que possibilita analisarmos os problemas por diversos lados, diferente do que ocorre quando lidamos apenas com problemas diretos.

3.2 O Problema de Tomografia

Sendo o objetivo da Tomografia Computadorizada a determinação da estrutura interna de um corpo a partir das medidas de radiação que o atravessa, precisamos entender o comportamento da radiação ao atravessar esse objeto.

Analisando fisicamente, um raio ao passar por um obstáculo tem sua intensidade atenuada. Essa atenuação é medida pelo detector que está do lado oposto à fonte de emissão do raio. Se considerarmos um obstáculo homogêneo, podemos então modelar a absorção através de um único coeficiente μ .(CHIELLE, 2012)

Se, para melhor entendimento, tomarmos o caso simplificado, em que temos apenas um feixe de raio X em forma de reta, L , atravessando uma região Ω , com intensidade aplicada I_0 e com I intensidade final, após passar por Ω , teremos a estrutura ilustrada pela Figura 14:

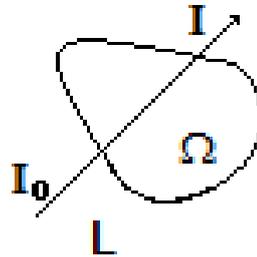


Figura 14 – Raio-X incidente

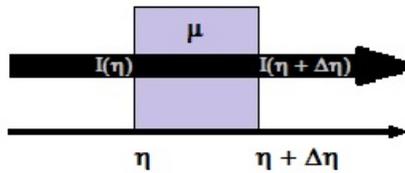


Figura 15 – Atenuação do Raio-X

Por meio deste esquema, podemos intuir que a atenuação total da intensidade I do raio-X, após percorrer a distância $\Delta\eta$ através de um corpo, é dada por:

$$I(\eta + \Delta\eta) = I(\eta) - \mu(\eta)I(\eta)\Delta\eta$$

Podemos então, dizer que a intensidade da radiação remanescente no ponto $\eta + \Delta\eta$ é igual a intensidade da radiação I em η menos a quantidade de radiação absorvida por μ vezes a intensidade I em η vezes a distância percorrida $\Delta\eta$.

Reescrevendo essa equação, obtemos:

$$\frac{I(\eta + \Delta\eta) - I(\eta)}{\Delta\eta} = -\mu(\eta)I(\eta)$$

Suponhamos $\Delta\eta$ infinitesimal e calculando limite, obtemos:

$$\lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{I(\eta + \Delta\eta) - I(\eta)}{\Delta\eta} = \frac{dI}{d\eta}$$

Daí chegamos à seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dI}{d\eta} = -\mu(\eta)I(\eta) \quad (3.1)$$

Precisamos identificar em que condições essa EDO possui solução e se é única. Para isso, vamos analisar o Teorema da Existência e Unicidade de soluções para EDOs ou, como também é conhecido, Teorema de Picard-Lindelof.

Teorema 3.2.1 (Teorema da Existência e Unicidade de soluções para EDOs). *Seja*

$$g : [I_0 - a, I_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(I(x), x) \rightarrow g(I(x), x)$$

tal que $g(I(x), x)$ é uma função contínua com relação a x e Lipschitz com relação a $I(x)$, isto é, $|g(I(x), x) - g(I(y), y)| \leq L|I(x) - I(y)|, \forall I(x), I(y) \in \mathbb{R}$ para algum L positivo. Então o problema do valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dI}{dx}(x) = g(I(x), x) \\ I(x_0) = I_0 \end{cases}$$

possui uma única solução no intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Demonstração: ver (BOYCE; DIPRIMA, 2008).

Observando a EDO (3.1), percebemos que $g(I(\eta), \eta) = -\mu(\eta)I(\eta)$. Agora precisamos mostrar que a solução é única. E para isso utilizaremos o resultado abaixo:

Teorema 3.2.2. *Suponha que μ seja limitada em Ω . Então, a EDO (3.1) possui uma única solução.*

Demonstração: Mostrar que $g(I(\eta), \eta) = -\mu(\eta)I(\eta)$ satisfaz a condição de Lipschitz. De fato,

$$\begin{aligned} |g(I(\eta), \eta) - g(I(y), \eta)| &= |-\mu(\eta)I(\eta) + \mu(\eta)I(y)| \\ &= |\mu(\eta)||I(\eta) - I(y)| \\ &\leq L|I(\eta) - I(y)| \end{aligned}$$

onde L é tal que $|\mu(\eta)| \leq L, \forall \eta \in \Omega$. ■

Já que sabemos as condições para EDO (3.1) ter uma única solução, podemos continuar a resolução da equação. Para isso, aplicaremos o método da separação das variáveis e integraremos ao longo da reta L , assim, temos:

$$\ln I = - \int_L \mu(\eta) d\eta + c \quad (3.2)$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados de (3.2), temos

$$I = c_1 \exp \left(- \int_L \mu(\eta) d\eta \right)$$

e, com a condição inicial $I(0) = I_0$, obtemos

$$I = I_0 \exp \left(- \int_L \mu(\eta) d\eta \right) \quad (3.3)$$

onde L é o comprimento do feixe, I_0 é a intensidade inicial do Raio X e μ é o coeficiente de absorção.

A equação (3.3) é conhecida como lei de Beer ou lei de Beer-Lambert ou lei de Beer-Lambert-Bouguer. Segundo Marcus Mendes, "A intensidade da luz emitida decresce exponencialmente à medida que a espessura do meio absorvente aumenta aritmeticamente (MENDES, 2017)". No caso em estudo, essa lei diz que o raio X é atenuado exponencialmente ao longo de L . Aqui os efeitos dos espalhamentos são desprezíveis.

Com isso, a atenuação do raio-X durante o processo é dada por:

$$P(L) = -\ln \left(\frac{I}{I_0} \right) = \int_L \mu(\eta) d\eta \quad (3.4)$$

As projeções $P(L)$ podem ser medidas sobre uma quantidade finita de retas L . Dessa forma, podemos obter duas formas de geometria, de acordo com o modo com que tais medidas são feitas, conforme segue:

- a) Modelo de escaneamento paralelo: um conjunto de integrais de linhas é obtido em um conjunto de retas L_j paralelas e igualmente espaçadas. Nesse modelo, uma única fonte de emissão e um único detector se movem em um ângulo pré-determinado durante o processo, como pode ser visto na Figura 16.

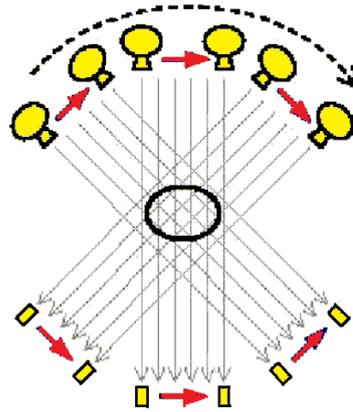


Figura 16 – Modelo de escaneamento paralelo

- b) Feixe em forma de cone de raios-X: A fonte circula o objeto e as intensidades são medidas por uma linha de detectores, simultaneamente, a cada posição da fonte, conforme figura 17.

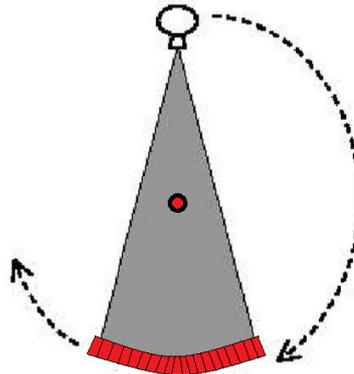


Figura 17 – Feixe em forma de cone de raios-X

Nesses dois modelos, para reconstruir a imagem bi-dimensional, os feixes de raio-X e os detectores são rotacionados paralelamente por um ângulo $\theta \in [0, \pi)$, de modo que todo o corpo seja escaneado. Podemos, então, reescrever $P(L)$ em função da posição da fonte ou da localização do detector ξ e do ângulo de projeção θ .

$$P_{\theta}(\xi) = \int_L \mu(\xi, \eta) d\eta \quad (3.5)$$

A equação (3.4) é uma integral de linha ao longo do segmento de reta L , que descreve a posição ξ da fonte de raio-X e do respectivo detector com um ângulo de projeção θ em relação ao plano de coordenadas (x, y) , conforme Figura 18.

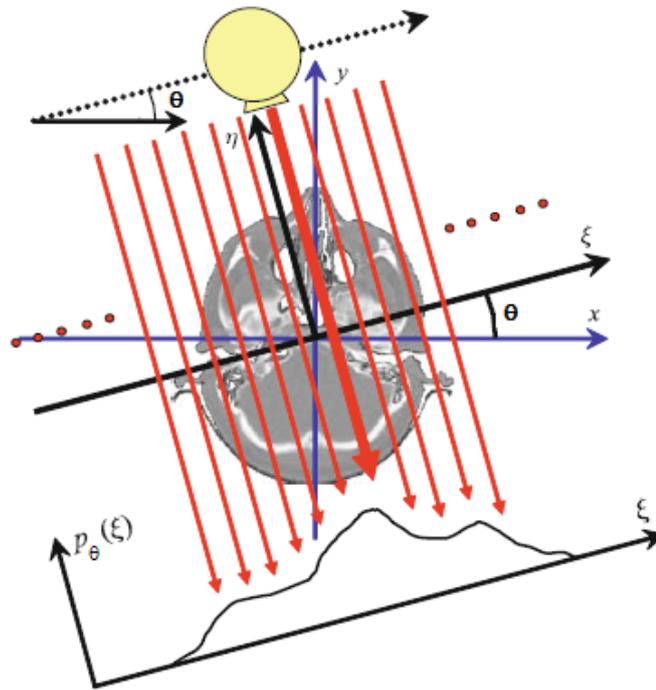


Figura 18 – Mudança de variável. Figura disponível em (BUZUG, 2008)

Os valores do coeficiente de atenuação devem ser uma função de coordenadas fixas $X = (x, y)$. Para isso precisamos estabelecer uma relação entre os sistemas de coordenadas (ξ, θ) e (x, y) . Definimos então o vetor $\theta = (\cos\theta, \sin\theta) \in S^1$, onde S^1 é uma circunferência de raio unitário, e θ^\perp o vetor unitário ortogonal a θ . Daí temos:

$$\begin{cases} \xi = x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ \eta = -x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases} \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em $\mu(\xi, \eta)$, obtemos o coeficiente de atenuação nas variáveis $X = (x, y)$ definido por

$$f(X) = \mu(x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta).$$

Considerando $I_0 = 1$ e parametrizando a reta L como $X.\theta^\perp = s$ onde $\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $\theta \in [0, 2\pi)$, Obtemos:

$$P_\theta(\xi) = \Re f(\theta, s) = \int_{X.\theta^\perp=s} f dl = \int_{\mathbb{R}} f(s\theta^\perp + t\theta) dt,$$

onde o operador \Re é chamado Transformada de Radon¹ bi-dimensional de f .

O problema inverso associado à Tomografia Computadorizada tem por objetivo encontrar uma aproximação para a distribuição de densidade f , a partir dos valores

¹ É uma aplicação que leva funções de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em funções de $(\theta, s) \in S^1 \times \mathbb{R}$.

obtidos por meio de seções transversais em diferentes ângulos da região Ω . Em outras palavras, o problema inverso consiste em inverter o operador \mathfrak{R} .

A existência de uma fórmula inversa para o problema de Tomografia Computadorizada em casos especiais é garantido pelas propriedades da Transformada de Radon, que seguem.

A primeira propriedade importante é a linearidade, garantida no próximo Lema:

Lema 3.2.1. *A Transformada de Radon \mathfrak{R} é uma aplicação linear.*

Outro resultado importante e utilizado nos métodos de reconstrução é o Teorema das Fatias de Fourier que diz que para cada direção θ dada, a Transformada de Radon fornece a integral de f sobre todas as retas paralelas a θ . Caso as oscilações de f na direção θ forem perdidas, o mesmo não ocorrerá com suas ortogonais θ^\perp (DECEZARO; OLIVEIRA; DECEZARO, 2012).

Segundo Maurício Fernando Lima Pereira, o Teorema das Secções de Fourier é a base das técnicas de reconstrução para a maioria dos algoritmos. Segue deste teorema, que a partir dos dados das projeções, é possível estimar a imagem executando a transformada inversa bidimensional de Fourier (PEREIRA, 2007).

Teorema 3.2.1 (Teorema das Fatias de Fourier). *Seja f uma função suave. Então, para todo $\theta \in S^1$ temos que*

$$(\widehat{\mathfrak{R}f}(\theta, s))(k) = \hat{f}(k\theta^\perp), \quad k \in \mathbb{R}.$$

A injetividade da Transformada de Radon é garantida pelo Corolário a seguir:

Corolário 3.2.1. *Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então, $\mathfrak{R}f(\theta, s) = 0$ se, e só se $f(\theta, s) = 0$.*

Por fim, o teorema que define a Transformada de Radon como sobrejetora:

Teorema 3.2.2. *A Transformada de Radon é uma aplicação bijetora. $\mathfrak{R} : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow M := S(S^{n-1} \times \mathbb{R}) : F$ satisfaz $F(\theta, s) = F(-\theta, -s)$ e $\int_{\mathbb{R}} s^m F(\theta, s) ds = P_m(\theta)$.*

Para a obtenção da fórmula de inversão para Tomografia Computadorizada, utilizaremos a relação entre a Transformada de Radon e a Transformada de Fourier, provada no Teorema das Fatias de Fourier. Assim, para encontrarmos uma expressão para \mathfrak{R}^{-1} temos que considerar o caso n par e n ímpar.(DECEZARO; OLIVEIRA; DECEZARO, 2012)

Teorema 3.2.3. *Seja $n > 1$ ímpar. Então, para $f \in S(\mathbb{R}^n)$*

$$f(x) = 2^{-n} (i\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial S^{n-1}} \mathfrak{R}f(\theta, x \cdot \theta) dS, \quad (3.7)$$

onde $\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in S^1$ e $\theta \in [0, 2\pi)$.

Sobre essa fórmula, é importante destacar o fato de que para obtermos $f(x_0)$, é necessário conhecer os valores de $\Re f(\theta, s)$ para $s = \theta \cdot x_0$. Isso significa que não precisamos conhecer as integrais de f ao longo de todas as retas $L(\theta, s)$, mas apenas as que distam $\theta \cdot x_0$ da origem.

Quando n for par, não poderemos utilizar o Teorema das Fatias de Fourier, pois só é válido quando n for ímpar. Nesse caso utilizaremos a Transformada de Hilbert:

Definição 3.2.1 (Transformada de Hilbert). *Sejam $f \in S(\mathbb{R})$. Então*

$$H(f(s)) = (\pi)^{(-1)} v \cdot p \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{s-t} dt,$$

onde $v \cdot p$ significa o valor principal de Cauchy, que neste contexto é dado por

$$v \cdot p \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{s-t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{s-\epsilon} \frac{f(t)}{s-t} dt + \int_{s+\epsilon}^{\infty} \frac{f(t)}{s-t} dt.$$

Teorema 3.2.4. *Seja $n > 1$ par. Então,*

$$f(x) = 2^{-n} (i\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} H \Re f \right) (\theta, x \cdot \theta) dS. \quad (3.8)$$

Observando as equações (3.7) e (3.8), percebemos que ambas envolvem derivadas de $\Re f$. Isto é uma indicação de problema mal-posto. Portanto, devemos considerar métodos mais adequados que a invertibilidade direta da Transformada de Radon para a reconstrução da imagens (DECEZARO; OLIVEIRA; DECEZARO, 2012).

O próximo resultado é útil para deduzirmos uma fórmula explícita para \Re^{-1} para o caso especial $n = 2$.

Teorema 3.2.5. *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(x) \rightarrow 0$ mais rapidamente que qualquer polinômio. Se $\Re f(\theta, s) = 0$ para $|s| > \rho$ então $f(x) = 0$ para $\|x\| > \rho$.*

Contudo, a qualidade da imagem tomográfica está diretamente relacionada ao processo de aquisição, às características do equipamento e seus ajustes. Um conjunto de parâmetros, com o qual se obtém o máximo de detalhes para uma certa amostra pode reduzir a visibilidade de diferenças em outros corpos (PEREIRA, 2007).

3.3 Caso Discreto

Na prática, é impossível obter a integral de linha de f em todas as direções. E o conjunto de informações obtidas num processo de tomografia são valores da transformada de Radon medidos por N detectores.

Segundo De Cezaro,

As limitações físicas do processo de medição implicam em uma discretização da imagem tomográfica. O tamanho e o número N de pixels, dentro do campo de visão que devem ser reconstruídos, consistem de um vetor de variáveis desconhecidas f_j para $j = 1, \dots, N$. Os f_j são os coeficientes de atenuação. [...] Fisicamente, cada raio-X possui uma espessura. Quando o feixe de raio-X passa pela região Ω , temos que levar em conta quanto o pixel a ser reconstruído é afetado pelo feixe. Para este propósito, são introduzidos pesos que refletem a relação entre a área iluminada pelo feixe de raio-x com relação a área total do pixel (DECEZARO; OLIVEIRA; DECEZARO, 2012)

A figura 19 representa esquematicamente uma imagem ser reconstruída²:

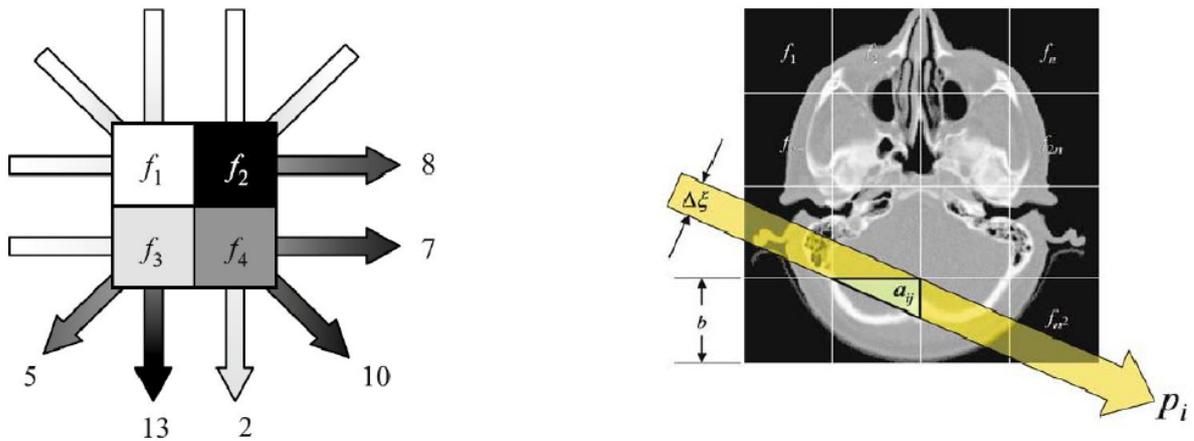


Figura 19 – Tomografia discreta e feixe de raios-X

O peso de a_{ij} , para um feixe de espessura $\Delta\xi$ é determinado pela relação

$$a_{ij} = \frac{\text{área iluminada do pixel } j \text{ pelo raio } i}{\text{área total do pixel } j} \quad (3.9)$$

Dessa forma, em um conjunto de $f_j, j = \{1, \dots, N\}$, densidades a serem determinadas e dado um conjunto de $i = \{1, \dots, M\}$ raios-X medidos, com intensidade p_i , chegamos em um sistema de M equações lineares com N coeficientes

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j = p_i \quad i = \{1, \dots, M\}$$

Na forma matricial, representamos o sistema por:

$$Af = p,$$

na qual a matriz $A = (a_{ij})_{M \times N}$ pode ser considerada como a caixa preta da máquina de tomografia.

² Figura disponível em (DECEZARO; OLIVEIRA; DECEZARO, 2012)

Comparando as equações $P_\theta(\xi) = \Re f(\theta, s) = \int_{X, \theta^\perp=s} f dl = \int_{\Re} f(s\theta^\perp + t\theta) dt$ e $Af = p$, concluímos que

$$\begin{array}{rcccl} A & f & = & p \\ \updownarrow & \updownarrow & = & \updownarrow \\ \Re & f(\theta, s) & = & \int f dl \end{array}$$

As principais dificuldades de reconstrução no modelo discreto são:

- a) A necessidade de condições ideais para que o sistema $p_\theta(\xi) = \Re f(\theta, s) = \int_{X, \theta^\perp=s} f dl = \int_{\Re} f(s\theta^\perp + t\theta) dt$ possua solução exata. Isso não ocorre com dados reais, dada a presença de ruídos e, portanto, conseguimos apenas uma solução aproximada desse sistema;
- b) Em geral, a matriz A é não-quadrada, e por isso o sistema é mal-posto;
- c) Como A não possui uma estrutura simples é difícil determinar uma maneira de resolver o sistema de forma eficaz e com baixo custo computacional;
- d) Na prática A é muito grande, o que inviabiliza a aplicação de métodos diretos de inversão que são computacionalmente muito custosos.

3.4 Resolução Através de Recorrência

Seja a equação da atenuação total da intensidade I do raio X , após percorrer a distância $\Delta\eta$ de um corpo:

$$I(\eta + \Delta\eta) = I(\eta) - \Delta\eta\mu(\eta).I(\eta)$$

Podemos aproximar a solução desse esquema para o caso discreto através de uma relação de recorrência. Para isso, devemos reescrever essa equação de modo conveniente:

$$I(\eta + 1) = I(\eta)(1 - \Delta\eta\mu(\eta))$$

Ao observarmos atentamente, notamos que a relação acima é muito parecida com a relação de recorrência linear homogênea de primeira ordem do tipo:

$$a_{n+1} = g(n)a_n,$$

cujas solução é

$$a_{n+1} = a_1 \prod_{j=1}^n g(j).$$

Assim, a solução por recorrência da equação da atenuação total da intensidade I do raio X em uma distância n é dada por:

$$I_{n+1} = I_1 \cdot \prod_{j=1}^n (1 - \Delta_j \mu(j)).$$

3.5 Resolução Através de Matrizes

Seja $Af = p$, um sistema na forma matricial, onde A é uma matriz de ordem n , chamada matriz do sistema, f é uma matriz de dimensão $n \times 1$, formada pelas incógnitas dos sistema e finalmente, a matriz p , de dimensão $n \times 1$, é formada pelas intensidades dos raios X medidas. O sistema é, então, representado da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}; p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Se o determinante da matriz A é diferente de zero, a matriz A possui inversa A^{-1} . Assim podemos calcular f da seguinte forma:

$$A.f = p \Leftrightarrow A^{-1}.A.f = A^{-1}.p \Leftrightarrow f = A^{-1}.p$$

Desse modo, para calcularmos a matriz das incógnitas f , multiplicamos a inversa da matriz A , A^{-1} , pela matriz coluna dos termos independentes, obtendo outra matriz coluna de mesma dimensão de f .

Em casos práticos, onde a matriz A possui dimensão muito grande, pode se tornar muito complexo o cálculo da inversão de A . Nesse caso, podemos resolver esse sistema por meio da Regra de Cramer.

4 Aplicação para Sala de Aula

4.1 Planejamento da Atividade

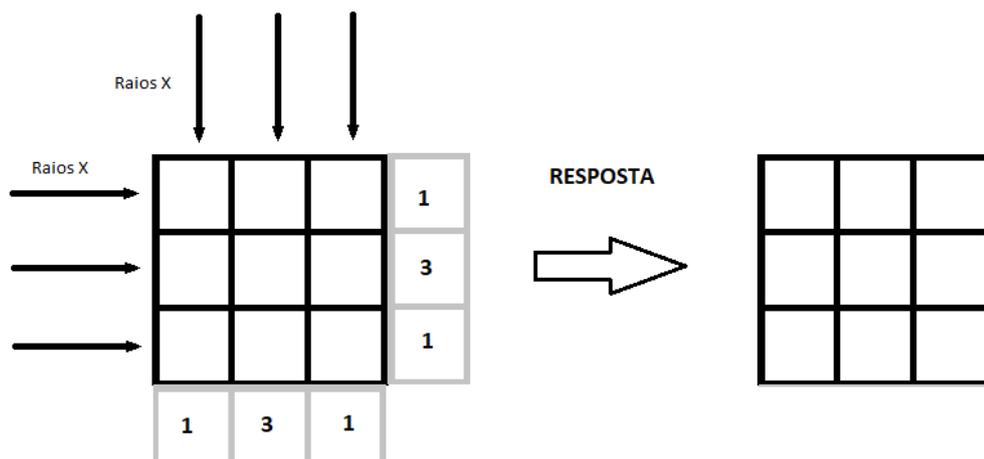
Num primeiro momento devem ser relembrados conceitos básicos da matemática, como matrizes, sistemas e recorrência. Feito isso, deve ser apresentada uma breve explicação acerca da Tomografia Computadorizada, enfatizando seu conceito e onde a matemática se encaixa nessa temática. Posteriormente, devem ser propostos exercícios para a resolução de problemas inversos, simulando o processo da tomografia.

Essa atividade deve ser desenvolvida, preferencialmente, em uma turma de segundo ano do Ensino Médio, a qual já tenha estudado sistemas lineares e matrizes.

4.1.1 Problema 1

Consideremos que os objetos submetidos ao nosso tomógrafo simplificado sejam matrizes compostas por 0 e 1 (branco ou preenchido), que cada raio X é atenuado pelo valor total de cada célula, e que são informados os totais de atenuação de raio X. Assim, desejamos reconstruir essas matriz por meio das informações fornecidas abaixo:

a)



Solução: Montando os sistemas lineares a partir dos raios X, obtemos:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 1 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 3 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = 1 \\ a_{11} + a_{21} + a_{31} = 1 \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} = 3 \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} = 1 \end{cases}$$

Possuímos 6 equações e 9 incógnitas. Em uma análise superficial, poderíamos acreditar que trata-se de sistema incompleto. Entretanto, estamos trabalhando com um problema inverso do qual sabemos que seus elementos são 0 e 1. A partir dessa informação, considerando as equações

$$a_{21} + a_{22} + a_{23} = 3$$

$$a_{12} + a_{22} + a_{32} = 3,$$

temos:

$$a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{12} = a_{32} = 1.$$

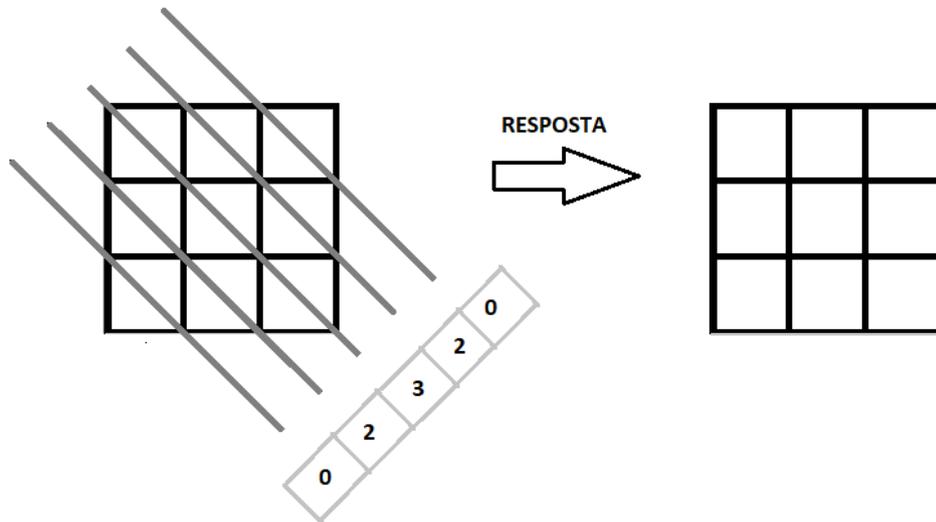
Substituindo esses valores no sistema, chegamos:

$$\begin{cases} a_{11} + 1 + a_{13} = 1 \Rightarrow a_{11} = -a_{13} \\ a_{31} + 1 + a_{33} = 1 \Rightarrow a_{31} = -a_{33} \\ a_{11} + 1 + a_{31} = 1 \Rightarrow a_{11} = -a_{31} \\ a_{13} + 1 + a_{33} = 1 \Rightarrow a_{13} = -a_{33} \end{cases}.$$

Sabendo que a matriz é preenchida apenas por zeros e uns, as igualdades acima só são válidas quando seus termos forem zeros. Portanto, a matriz procurada é:

0	1	0
1	1	1
0	1	0

b)

**Solução:**

Montando os sistemas lineares a partir dos raios X, obtemos:

$$\begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{12} + a_{23} = 2 \\ a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3 \\ a_{21} + a_{32} = 2 \\ a_{31} = 0 \end{cases}$$

Possuímos 5 equações e 9 incógnitas. Em uma análise superficial, poderíamos acreditar que trata-se de sistema incompleto. Entretanto, estamos trabalhando com um problema inverso do qual sabemos que seus elementos são 0 e 1. A partir dessa informação, considerando as equações

$$a_{12} + a_{23} = 2$$

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3$$

$$a_{21} + a_{32} = 2$$

temos:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{12} = a_{23} = a_{21} = a_{32} = 1.$$

e

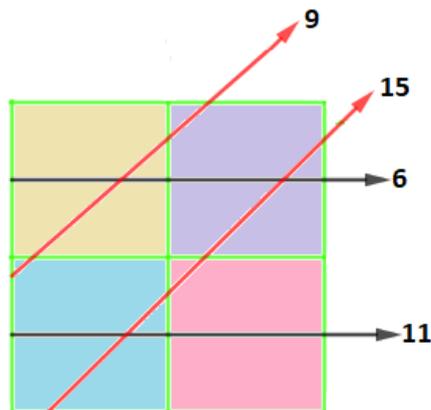
$$a_{13} = a_{31} = 0$$

Portanto, a matriz procurada é:

1	1	0
1	1	1
0	1	1

4.1.2 Problema 2

Consideremos que o objeto submetido ao nosso tomógrafo simplificado seja uma matriz 2×2 , cujos elementos são números reais. Cada raio x , ao passar por uma célula tem sua intensidade atenuada pelo valor desse termo da matriz, conforme representado na figura abaixo:



Com base nessas informações, desejamos obter o sistema linear que soluciona esse problema bem como suas possíveis soluções.

Solução 1: Montando o sistema linear a partir dos raios X , obtemos:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{21} = 9 \\ a_{12} + a_{21} + a_{22} = 15 \\ a_{11} + a_{12} = 6 \\ a_{21} + a_{22} = 11 \end{cases}$$

Representando na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Como a matriz do sistema é quadrada de ordem 4, podemos aplicar a Regra de Cramer para resolver o sistema. Para isso, devemos calcular o determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcularemos o $\det A$ usando o desenvolvimento de Laplace

$$\det A_{4 \times 4} = \sum_{j=1}^4 a_{ij} (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

Escolhemos a linha $i = 4$, assim temos:

$$\det A = a_{41} (-1)^{4+1} \cdot \det A_{41} + a_{42} (-1)^{4+2} \cdot \det A_{42} + a_{43} (-1)^{4+3} \cdot \det A_{43} + a_{44} (-1)^{4+4} \cdot \det A_{44}$$

Como $a_{41} = 0$ e $a_{42} = 0$, não calcularemos os cofatores A_{41} e A_{42} , portanto

$$\det A = a_{43} (-1)^7 \cdot \det A_{43} + a_{44} (-1)^8 \cdot \det A_{44}$$

$$\det A = \det A_{44} - \det A_{43} \quad (4.1)$$

Obtemos as matrizes A_{43} e A_{44} a partir de A , excluindo a linha 4 e as colunas 3 e 4, respectivamente, assim:

$$A_{43} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_{44} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como A_{44} e $\det A_{43}$ são matrizes 3×3 podemos aplicar a regra de Sarrus:

$$\det A_{43} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0) - (0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1) = 0$$

$$\det A_{44} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0) - (1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1) = -1$$

Substituindo A_{44} e $\det A_{43}$ em (4.1):

$$\det A = \det A_{44} - \det A_{43} = -1 - 0 = -1$$

Como $\det A \neq 0$, o sistema é possível e determinado (SPD) e a solução é

$$S = \left\{ \frac{\det A_1}{\det A}, \frac{\det A_2}{\det A}, \frac{\det A_3}{\det A}, \frac{\det A_4}{\det A} \right\},$$

$$\text{onde } A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

De modo análogo ao cálculo de $\det A$, obtemos

$$\det A_1 = -2, \det A_2 = -4, \det A_3 = -3 \text{ e } \det A_4 = -8.$$

Portanto, a solução do sistema é $S = \{2, 4, 3, 8\}$.

Solução 2: Montando o sistema linear a partir dos raios X, obtemos:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{21} = 9 \\ a_{12} + a_{21} + a_{22} = 15 \\ a_{11} + a_{12} = 6 \\ a_{21} + a_{22} = 11 \end{cases}$$

Representando na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Outra forma de resolver esse sistema é através do escalonamento. De posse da matriz estendida do sistema, executaremos operações elementares;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 17 \end{array} \right)$$

$$L_4 \rightarrow L_4 + L_1 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

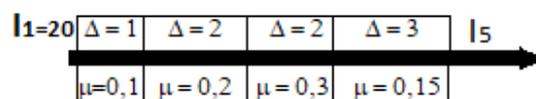
Com a matriz escalonada, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{21} = 9 \Leftrightarrow a_{11} = 9 - a_{12} - a_{21} = 2 \\ a_{12} + a_{21} + a_{22} = 15 \Leftrightarrow a_{12} = 15 - a_{21} - a_{22} = 4 \\ a_{21} + a_{22} = 11 \Leftrightarrow a_{21} = 11 - a_{22} = 3 \\ a_{22} = 8 \end{cases}$$

Portanto, a solução do sistema é $S = \{2, 4, 3, 8\}$.

4.1.3 Problema 3

Consideremos que o objeto submetido ao nosso tomógrafo simplificado é o retângulo desenhado abaixo. Calcule a intensidade I_5 utilizando a relação de recorrência.



Solução: Utilizando a relação:

$$I_{n+1} = I_1 \cdot \prod_{j=1}^n (1 - \Delta_j \mu(j)),$$

calculamos I_5 :

$$I_5 = 20(1 - 1 \cdot 0,1)(1 - 2 \cdot 0,2)(1 - 2 \cdot 0,3)(1 - 3 \cdot 0,15)$$

$$I_5 = 2,38$$

4.1.4 Problema 4

Se houver disponibilidade na escola de equipamentos de informática, pode ser desenvolvido o estudo proposto pelo “Jogo da Tomografia”, disponibilizado pela Universidade Federal Fluminense(UFF, 2009) em seu site. A proposta desse jogo é que os estudantes identifiquem objetos tridimensionais através de suas seções planas. Para isso ele mostra diferentes cortes horizontais do objeto, como mostrado na Figura 20.

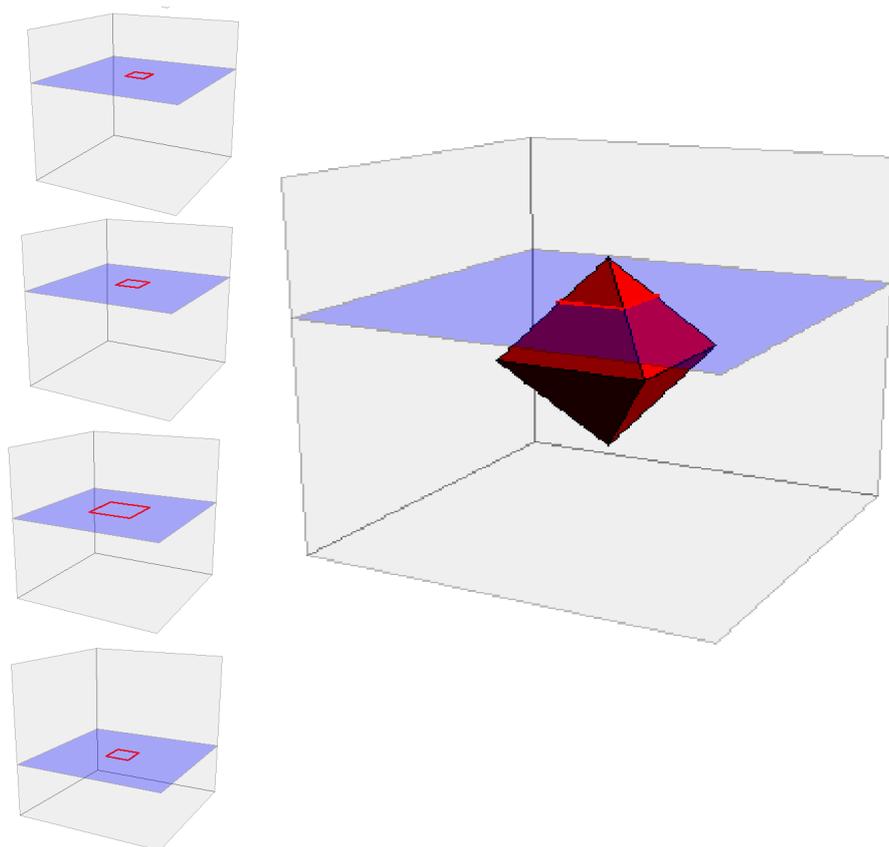


Figura 20 – O Jogo da Tomografia - Exibição dos cortes horizontais de um octaedro regular.

Embora o enfoque do jogo seja estudar geometria, sua utilização no nosso contexto ilustra de forma simples o processo da Tomografia Computadorizada.

5 Considerações finais

Este trabalho apresentou uma proposta para o estudo e a aplicação dos conteúdos de matrizes, sistemas lineares e recorrência através da Tomografia Computadorizada. Essa proposta permite que os estudantes percebam a importância de certos conhecimentos que, comumente estudados de forma descontextualizada, são mal vistos ou até mesmo considerados desnecessários.

Num contexto em que temos a nossa disposição uma variada gama de informações ao alcance de um clique, o grande desafio de ensinar matemática é mostrar que ela é útil e faz parte do cotidiano humano. Ao alertarmos os estudantes para o fato de que só temos muito do que usamos graças às aplicações da matemática, podemos despertar neles o interesse por aprender e desenvolver suas potencialidades, com a consciência de que a matemática está muito além do lápis e do papel.

E foi esse o propósito desse texto: chamar a atenção para o fato de que aqueles equipamentos altamente tecnológicos que nos permitem obter as imagens internas de um corpo sem abri-lo só existem graças a matemática. Mostrar que a matemática está presente na medicina, engenharia, geografia e em tantas outras áreas de conhecimento consideradas mais atrativas.

Num primeiro contato com as equações que modelam a Tomografia Computadorizada de forma contínua, as equações parecem um tanto complexas e de difícil compreensão. Entretanto, quando as transformamos em discretas e as contextualizamos com os conteúdos do ensino médio, as ideias ficam muito mais simples.

Contudo, como trabalhamos com problemas inversos, os sistemas ficam grandes e de solução trabalhosa, como é o caso de calcular o determinante de matrizes de ordem superiores a 3×3 , o que pode não agradar a grande maioria dos estudantes. Uma alternativa para essa questão seria associar a solução desses problemas ao uso de algum software que permita o desenvolvimento dessas soluções de forma menos mecânicas.

Com isso, esse trabalho não esgota as possibilidades de atividades envolvendo esse assunto, podendo ser ampliado e associado a outras tecnologias.

Referências

- BARBOSA, J. C. *Modelagem matemática e a perspectiva sócio-crítica*. In: *Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. São Paulo: SBEM, 2003. Citado na página 15.
- BOLDRINI, J. L. et al. *Algebra Linear - 3ª edição*. São Paulo: editora HARBRA ltda, 1980. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 24.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Elementary differential equations and boundary value problems*. Wiley: [s.n.], 2008. Citado na página 54.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2000. 109 p. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular(Ensino Médio)*. Brasília, 2017. 154 p. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- CÁCERES, K. P. S. *Efeitos da Variação da Espessura do Corte Tomográfico e da Largura do Campo de Visão (FOV) na Reprodução de Estruturas Ósseas Finas, com a finalidade de Prototipagem Rápida - Estudo In Vitro*. Florianópolis: UFSC, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- CHIELLE, D. *A Transformada de Radon e a Tomografia Computadorizada*. Rio Grande: FURG, 2012. Citado na página 53.
- CIPOLATTI, R. A transformada raio-x e aplicações em tomografia computadorizada. p. 10. Disponível em: <<https://www.scribd.com/document/64670959/Tomografia>>. Acesso em: 22.8.2017. Citado na página 40.
- DECEZARO, A. Problemas inversos: Uma introdução. p. 165, 2010. Disponível em: <repositorio.furg.br/handle/1/3661>. Acesso em: 28.8.2017. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 52.
- DECEZARO, A.; OLIVEIRA, A. M.; DECEZARO, F. T. *Identificação de parâmetros em equações diferenciais: teoria e aplicações*. Teresina: EDUFPI, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 40, 58, 59 e 60.
- FREITAS, C. F. de. *Imaginologia*. São Paulo: Editora Artes Médicas, 2013. 11-25 p. Citado 7 vezes nas páginas 41, 42, 43, 44, 45, 46 e 47.
- IEZZI, G. et al. *Matemática - Ciência e Aplicações*. São Paulo: Editora Atual, 2004. v. 2. Citado na página 17.
- IFA-TÉCNICO. *Tomografia Computadorizada*. IFA TÉCNICO, 2017. Disponível em: <<http://www.youblisher.com/p/827050-Radiologia-Tomografia-Computadorizada/>>. Acesso em: 16.12.2017. Citado na página 42.
- KREYSZIG, E. *Matemática Superior*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científico Editora S.A., 1976. v. 2. Citado na página 22.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L. *Teoria e Problemas de Matemática Discreta*. São Paulo: Bookman, 2004. v. 2. 497-506 p. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 39.

MARTINS, J. S. *Desenvolvimento de um Algoritmo para Reconstrução de Imagens Utilizando a Técnica de Tomografia por Impedância Elétrica*. PUCRS, 2017. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10923/3306>>. Acesso em: 16.12.2017. Citado na página 50.

MENDES, M. F. de A. *Espectrofotometria*. UFRGS, 2017. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/leo/site_espec/conceito.html>. Acesso em: 16.12.2017. Citado na página 55.

PEREIRA, M. F. L. *Um Modelo de Reconstrução Tomográfica 3D para Amostras com Filtragem de Wiener em Processamento Paralelo*. São Carlos: USP, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 59.

SOUSA, L. D. A. de; VERÍSSIMO, P. H. A.; MACEDO, V. G. Reconstrução de imagens médicas de tomografia computadorizada utilizando a transformada de radon. Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional – CMAC Nordeste 2012, p. 226–228, 2012. Citado na página 40.

SOUSA, R. V. de. *Problemas Diretos e Inversos em Química e Física Médica*. Belo Horizonte: UFMG, 2009. Citado na página 51.

UFF. *O Jogo da Tomografia*. Universidade Federal Fluminense, 2009. Disponível em: <<http://www.uff.br/cdme/tomografia/tomografia-html/tomografia-br.html>>. Acesso em: 16.12.2017. Citado na página 72.

UNESCO. *Os desafios do ensino de matemática na educação básica – Brasília : UNESCO*. São Carlos: EdUFSCar, 2016. Citado na página 13.

WIKIMEDIA. *PET-scan-normal brain-alzheimers disease brain.PNG*. WIKIMEDIA COMMONS, 2013. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PET_scan-normal_brain-alzheimers_disease_brain.PNG>. Acesso em: 16.12.2017. Citado na página 49.