UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

SAULO CARVALHO DE SOUZA TIMÓTEO

FUNDAMENTOS DE LÓGICA MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO:
um estudo aplicado em Geometria Plana

PALMAS - TO
2018

SAULO CARVALHO DE SOUZA TIMÓTEO

FUNDAMENTOS DE LÓGICA MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO:
um estudo aplicado em Geometria Plana

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes.

PALMAS - TO
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

T585f Timóteo, Saulo Carvalho de Souza .
Fundamentos de Lógica Matemática para o Ensino Médio : um estudo aplicado em Geometria Plana . / Saulo Carvalho de Souza Timóteo. – Palmas, TO, 2018.
105 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2018.

Orientador: Gilmar Pires Novaes

1. Ensino de Lógica. 2. Ensino e aprendizagem.. 3. Métodos de demonstração. 4. Lógica no Ensino Médio. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

SAULO CARVALHO DE SOUZA TIMÓTEO

LÓGICA MATEMÁTICA: Um estudo aplicado em Geometria Plana

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Msc. Gilmar Pires Novaes.

Aprovada em 05/04/2018

BANCA EXAMINADORA

Andrés Barraza

Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz (Presidente-UFT)

Rogério Azevedo Rocha

Profa. Dr. Rogério Azevedo Rocha (UFT)

[illegible]

Prof. Dr. Paulo Cleber Mendonça Teixeira - UFT (avaliador externo)

Dedico este trabalho a Simonik Timóteo, mulher sábia, bondosa, amiga e conselheira. Minha amada, sem o seu amor e compreensão, não conseguiria alcançar este sucesso.

AGRADECIMENTOS

A Deus, primeiramente, por seu imenso amor e bondade.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela coordenação deste importante programa de mestrado.

À Universidade Federal do Tocantins (UFT) pela a estrutura e apoio.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Ao professor Gilmar Pires Novaes pela orientação, pela sua paciência e pelo seu auxílio, pelo incentivo dado e pelo seu exemplo de profissionalismo e competência demonstrados em todos os momentos.

Ao professor e coordenador do programa Dr. Andrés Lazaro Barraza de La Cruz pelo seu apoio e convívio.

Aos demais professores do programa, que foram importantes durante toda esta caminhada.

Aos meus pais, irmãos, minha esposa Simonik Timóteo, meus filhos: Felipe Gabriel, Camila e Raissa, e a toda a minha família e amigos pelo incentivo e apoio constantes.

Aos meus alunos do Instituto Federal do Tocantins, *Campus* Porto Nacional, pelo amor e auxílio, em especial ao discente Willamy Marques, pelos textos traduzidos.

Aos meus colegas de mestrado que, durante todo esse tempo, ajudaram-me a obter esse grande sucesso.

Aos membros da banca de avaliação pelas críticas e sugestões dadas.

O estudo da lógica proporcionará ao estudante certas técnicas e certos métodos de fácil aplicação para determinar a correção ou incorreção de todos os raciocínios, incluindo os próprios.

(Irving M. Copi)

RESUMO

Frequentemente, os professores de Matemática são questionados sobre o processo de ensino e aprendizagem. Isso porque, apesar de o ensino da Matemática no Brasil ter passado por uma série de mudanças nos últimos anos, vários mecanismos de avaliação apontam que o baixo rendimento escolar dos estudantes brasileiros está relacionado com a ausência da capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática com base em diversos contextos. Diante dessa problemática, as questões que surgiram e que nortearam este trabalho foram as seguintes: qual a importância da Lógica para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática? Como associar a Lógica e a Matemática no Ensino Médio? O nosso objetivo foi mostrar, por meio de diversas aplicações da Lógica Matemática em Geometria Plana, a importância dos elementos lógicos dedutivos no Ensino Médio como instrumento facilitador do processo de ensino e aprendizagem em Matemática, especialmente em Geometria. A metodologia escolhida foi a pesquisa bibliográfica, e os materiais encontrados e analisados foram livros nas áreas de Lógica, Lógica Matemática e Geometria Plana, documentos oficiais da educação brasileira, bem como publicações científicas com o tema "Importância da Lógica para o processo de ensino e aprendizagem". Analisando esses documentos, concluímos que a Lógica Matemática servirá como um instrumento facilitador do ensino e aprendizagem em Geometria Plana, devendo ser abordada de forma paralela ao currículo tradicional. Dessa forma, os professores poderão, de maneira análoga, utilizar os métodos e técnicas mostrados neste trabalho aplicando-os aos conteúdos de Aritmética e Álgebra, por exemplo.

Palavras-chave: Ensino de Lógica. Ensino e aprendizagem. Métodos de demonstração. Lógica no Ensino Médio.

ABSTRACT

Often, math teachers are asked about the teaching and learning process. This is because, despite the fact that mathematics teaching in Brazil has undergone a series of changes in recent years, several evaluation mechanisms point out that the low academic performance of Brazilian students is related to the lack of ability to formulate, use and interpret Mathematics based on different contexts. Faced with this problem, the questions that emerged and which guided this work were the following: what is the importance of Logic for the process of teaching and learning in Mathematics? How to associate Logic and Mathematics in High School? Our objective was to show, through various applications of Mathematical Logic in Flat Geometry, the importance of the deductive logic elements in High School as a facilitator of the process of teaching and learning in Mathematics, especially in Geometry. The methodology chosen was the bibliographical research, and the materials found and analyzed were books in the areas of Logic, Mathematical Logic and Flat Geometry, official documents of Brazilian education, as well as scientific publications with the theme "Importance of Logic for the teaching process and learning". Analyzing these documents, we conclude that the Mathematical Logic will serve as a facilitator of teaching and learning in Flat Geometry, and should be approached in parallel with the traditional curriculum. This way, teachers can, in an analogous way, use the methods and techniques shown in this paper by applying them to Arithmetic and Algebra contents, for example.

Keywords: Logic Teaching. Teaching and learning. Demonstration methods. Logic in High School.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Geometria está relacionada, desde os tempos mais remotos da história da humanidade, com medidas de comprimento, áreas e volumes de figuras planas e espaciais, e sua grande motivação têm sido as necessidades práticas dos seres humanos. No entanto, de acordo com Morgado, Wagner e Jorge (1974) ela, até o quarto século a. C., não passava de conhecimentos adquiridos de forma empírica sem preocupação científica alguma, ou seja, as descobertas geométricas eram adquiridas pelas simples observações do cotidiano e pela capacidade de reconhecer figuras, comparar formas e medidas.

Após esse período, a Geometria obteve um grande salto, graças ao desenvolvimento da Lógica. A obra "Os Elementos" de Euclides (300 a. C.) foi a grande responsável por esse avanço, pois nela a Geometria é apresenta de maneira lógica e organizada, partindo de algumas proposições primitivas e se desenvolvendo por meio de elementos lógicos dedutivos (MORGADO; WAGNER; JORGE, 1974).

No Brasil, segundo Manoel (2014), o ensino da Geometria, até a década de 1960, priorizava os elementos lógicos-dedutivos no processo de demonstrações geométricas. No entanto, com o advento do Movimento da Matemática Moderna (MMM), o uso das deduções lógicas em Geometria foi substituído pelo ensino algébrico. Apesar de esse movimento não se estabilizar no território brasileiro, ele provocou uma lacuna no ensino da Geometria, fazendo com que mesmo após o seu fracasso, os estudos geométricos continuassem sendo influenciados por esse movimento.

Em virtude disso, a Geometria passou a ser simplesmente um conteúdo com definições e fórmulas prontas. Isto é, os alunos, em sua grande maioria, raramente são estimulados a redigirem demonstrações e muito menos a justificar as suas respostas.

Essa constatação é confirmada por vários mecanismos de pesquisas a respeito da educação matemática no Brasil, dentre eles, destaca-se o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA)[1], que aponta que os estudantes brasileiros não possuem a capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática com base em diversos contextos (BRASIL, 2016a).

Diante desse cenário, a pergunta central que norteou esse trabalho foi: qual a importância da Lógica para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática? Além disso, outra preocupação surgiu: como associar a Lógica e a Matemática no Ensino Médio? Isso porque, embora teoricamente, com base nos levantamentos bibliográficos, seja mostrada a importância da Lógica no processo de ensino e aprendizagem em Matemá-

[1] O PISA avalia os conhecimentos e habilidades somente de estudantes de 15 anos de idade, em leitura, Matemática e ciências (BRASIL, 2016a).

tica, como, na prática, poderíamos relacionar os conteúdos da Lógica e da Matemática no Ensino Médio?

Essa preocupação é fruto da experiência do autor em sala de aula, desde o ano de 2015. Dessa forma, tivemos a preocupação de tratar a Lógica Matemática não como mais um conteúdo teórico, mas como um suporte instrumental para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática. A partir dessa percepção, surgiu a necessidade de apresentar, em particular, o entrelaçamento entre os conteúdos da Lógica Matemática com os da Geometria Plana.

O objetivo principal deste trabalho é mostrar, por meio de diversas aplicações da Lógica à Geometria Plana, a importância dos elementos lógicos dedutivos no Ensino Médio como instrumento facilitador do processo de ensino e aprendizagem em Matemática, buscando com isso fornecer um material de Lógica aplicada ao ensino da Geometria Plana que possa auxiliar a tarefa do professor.

O presente trabalho justifica-se pelo fato de que o ensino da Geometria no Ensino Médio, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias,

> Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. (BRASIL, 2007, p. 124).

Para o desenvolvimento do presente trabalho, a metodologia escolhida foi a bibliográfica. A pesquisa baseou-se em publicações científicas a respeito do tema: a importância da Lógica no processo de ensino e aprendizagem.

Dentre as teses e dissertações analisadas sobre essa temática, cinco delas assemelham-se a este trabalho: Martins (2014), Gomes (2015), Vaz (2014), Nascimento (2016) e Martins Neto (2008).

Martins (2014) apresenta uma sequência de atividades, voltadas ao ensino de Lógica para o 1º Ano do Ensino Médio, com o objetivo de suprir as deficiências relativas à construção do pensamento matemático. A proposta dessa autora é fazer com que o aluno, após o desenvolvimento dessas atividades, mude de posição em relação ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática, isto é, deixe de ser um agente passivo para se transformar em um agente ativo no processo de construção do conhecimento. Por fim, ela conclui apresentando as habilidades e competências que estão envolvidas nessa sequência didática e como elas poderão auxiliar no processo de ensino e aprendizagem em Matemática.

Gomes (2015) relata que, diante de uma sociedade globalizada e tecnológica, faz-se necessário repensar o currículo de Matemática do Ensino Médio. Nesse sentido, esse autor propõe a inclusão do desenvolvimento do Raciocínio Lógico nessa etapa de ensino. Por fim, ele conclui que a aplicação do Raciocínio Lógico na disciplina de Matemática do Ensino Médio irá propiciar um ambiente que favoreça o desenvolvimento do pensamento matemático.

Vaz (2014) expõe que, em virtude da implantação da disciplina Raciocínio Lógico em todas as séries da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul e devido a um grande número de docente não terem acesso suficiente a essa temática durante a sua formação, essa disciplina não estava produzindo o efeito desejado na prática.

Nascimento (2016) seguindo a mesma linha de Martins (2014) e Gomes (2015), apresenta uma proposta para o desenvolvimento da Lógica Matemática no Ensino Médio. Esse autor, por meio de um levantamento bibliográfico, apresenta um rol de motivos que o levam a propor a inclusão dessa disciplina na Educação Básica, especialmente no Ensino Médio. Além disso, ele apresenta algumas aplicações envolvendo Álgebra Booleana e algumas questões de concursos públicos.

Martins Neto (2008) mostra uma pesquisa desenvolvida com alunos do 2º Ano do Ensino Médio. O teor dessa pesquisa era desenvolver uma sequência de atividades que tinha como objetivo averiguar o nível de conhecimento desses alunos sobre conectivos lógicos e como eles utilizava-os no contexto comum e no contexto da Lógica Clássica.

Em suma, o nosso diferencial em relação aos trabalhos citados foram as aplicações da Lógica em Geometria Plana[2], já que, por meio de tal procedimento, mostramos não somente a importância da Lógica no processo de ensino e aprendizagem em Matemática, mas apresentamos, na prática, a aplicabilidade dos elementos lógicos dedutivos em um conteúdo específico do currículo de Matemática do Ensino Médio.

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, sendo este primeiro o da Introdução, e o último, o das Considerações Finais.

O Capítulo 2 é subdividido em três seções, cujo objetivo é abordar a história e definições acerca da Lógica baseadas em vários autores, além de evidenciar a importância da Lógica para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática.

O Capítulo 3 é subdividido em sete seções, algumas das quais são subdividas em subseções. O objeto desse capítulo é apresentar os elementos fundamentais da Lógica Matemática, especialmente aqueles relacionados ao Cálculo Proposicional, que servirão de base para o processo de veracidade ou falsidade de argumentos geométricos.

O Capítulo 4 é subdivido em 4 seções, algumas das quais são também subdividas

[2] O nosso objetivo não é discorrer sobre todo o conteúdo da Geometria Plana, mas tratá-la simplesmente como um corpo de raciocínio, sob condições que desejamos analisar.

em subseções. O objetivo desse capítulo é, além de fornecer os principais conceitos da Lógica Matemática relacionados com a Geometria Plana, apresentar algumas aplicações dessa Lógica nos estudos geométricos, buscando com isso mostrar o entrelaçamento entre os conteúdos da Lógica Matemática com os da Geometria Plana, relacionamento esse que denominamos Lógica Geométrica.

O último capítulo refere-se às Considerações Finais deste trabalho, mostrando as conclusões obtidas por meio dos objetivos e da problemática da pesquisa, bem como mostrando alguns encaminhamentos para pesquisas futuras.

2 LÓGICA

Que é Lógica? Qual a sua origem? Qual o objeto de estudo da Lógica? Qual a importância da Lógica para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática? Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos fundamentais em Lógica, com o objetivo de responder a essas e a outras indagações pertinentes.

2.1 Breve histórico sobre a Lógica

A exposição de fatos históricos é uma importante ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática (BRASIL, 1998). Nesse sentido, essa seção tem como objetivo apresentar um breve histórico sobre a Lógica.

2.1.1 Período aristotélico (390 a.C. - 1840 d.C.)

A história da Lógica inicia-se, como ciência autônoma, propriamente com o filósofo grego Aristóteles, no século IV a. C. (384-322 a. C.), cujo objeto de pesquisa, segundo Sá e Rocha (2012, p. 415), é, em sua essência "o estudo das leis do pensamento, a análise e classificação das formas de raciocínio e sua validade".

Figura 1 – Aristóteles: Criador da Lógica Formal

Fonte: Commons (2017a)

Os escritos de Aristóteles sobre Lógica, em sua maior parte, foram reunidos na obra intitulada *Organon*, mais especificamente no capítulo denominado *Analytica Priora* (CASTRUCCI, 1986).

Segundo Castrucci (1986), a Lógica, para Aristóteles, resume-se, essencialmente, em um tipo de raciocínio dedutivo denominado Silogismo, o qual, segundo o filósofo americano Irving Marmer Copi (1978, p.167), “[...] é um argumento em que uma conclusão é inferida de duas premissas”. Em outras palavras,

> O silogismo é um raciocínio mediato, que implica um *terceiro termo.* Três termos e, portanto, três proposições: a maior, a menor e a conclusão. “Todo homem é mortal; ora, Sócrates é homem; logo, Sócrates é mortal.” As duas primeiras são denominadas premissas. A segunda, a premissa menor, é a proposição mediadora (que não existe na inferência imediata); ela contém a razão de ser da conclusão. (LEFEBVRE, 1991, p. 153-154).

A lógica aristotélica, mais conhecida como lógica formal, permaneceu praticamente estagnada por cerca de dois mil anos, até ser retomada e desenvolvida pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) (SÁ; ROCHA, 2012; MACHADO, 2009).

Figura 2 – Gottfried Wilhem Leibniz: Idealizador da Linguagem Simbólica

Fonte: Commons (2017b)

Segundo Machado (2009), Leibniz desenvolveu uma teoria na qual existem apenas duas classes de verdades: a da razão e a dos fatos, tal que,

> As verdades dos fatos são proposições empíricas cuja negação não encontra óbices do ponto de vista lógico. É uma verdade da razão que minha caneta é uma caneta ou que $3^2 + 4^2 = 5^2$. É uma verdade de fato que minha caneta é preta ou que um copo, abandonado do alto da Torre de Pisa, cairá até o solo. (MACHADO, 2009, p. 23).

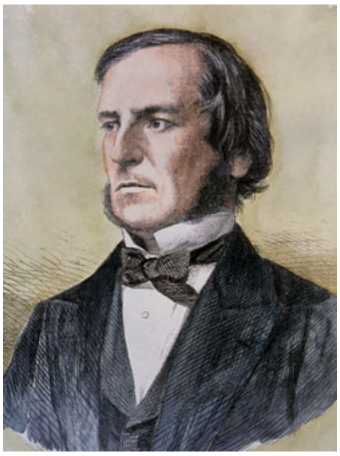
A grande contribuição desse importante matemático foi a introdução do método matemático na Lógica. Segundo Sá e Rocha (2012, p. 420), Leibniz “idealizou uma linguagem simbólica universal que podia exprimir todo o raciocínio”. No entanto, de acordo com Hegenberg (2012), as ideias inovadoras de Leibniz só vieram a ser estudadas com mais dedicação no fim do século XIX.

Em suma, segundo Hegenberg (2012), os séculos XVII, XVIII e metade do século XIX foram fracos em contribuição para o desenvolvimento da Lógica. Após esse período, os estudos sobre Lógica voltaram com muita força por meio do desenvolvimento da Lógica Matemática pelo britânico George Boole, dando origem ao período booleano, que descreveremos a seguir.

2.1.2 Período booleano: (1840 - 1910)

Em meados do século XIX, inicia-se o período chamado de booleano, em homenagem a George Boole (1815-1864). De acordo com Moraes (2007), esse importante matemático nasceu em Lincoln, Inglaterra. O seu primeiro professor de Matemática foi seu próprio pai, um amante da Matemática, e, aos 16 anos, mesmo não tendo formação acadêmica, iniciou-se na carreira de professor assistente.

Figura 3 – George Boole: Fundador da Lógica Matemática



Fonte: Commons (2015)

Em 1947, Boole publicou sua primeira obra intitulada: *Mathematical Analysis of Logic*. Segundo Moraes (2007), ele demonstrou, nessa obra, que era possível desenvolver uma álgebra sob a forma de um cálculo abstrato, passível de várias interpretações. Essa álgebra tornou-se, décadas depois, nas palavras de Moreira (2007), a base para a criação de circuitos de computadores. Dois anos mais tarde, ele ingressou no *Queens College*, em Cork, onde assumiu a cadeira de Matemática (MORAES, 2007).

Naquele mesmo ano, Boole começou a escrever sua principal obra, *An investigation into the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic* *and Probabilities*, que viria a ser publicada em 1854. O objetivo principal da obra era "investigar as leis fundamentais das operações da mente, por meio das quais o raciocínio é formado; dar-lhes expressão na linguagem simbólica de um Calculus, e nesses fundamentos estabelecer a ciência da Lógica e construir o seu método" (SÁ; ROCHA, 2012, p. 422).

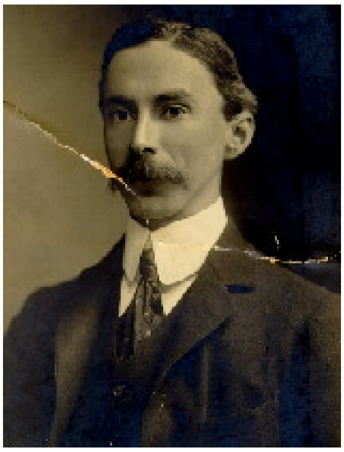
De outro modo, Boole teve muitos outros trabalhos publicados nas áreas de Equações Diferenciais, Cálculo de Diferenças Finitas, além de mais de 50 documentos sobre as propriedades básicas dos números. As suas principais contribuições na área da Lógica foram: *Pure Logic* (1863), *The Substitution of Similars* (1869) e *Principles of Science* (1874) (MORAES, 2007).

Outros personagens importantes dessa época foram Gottlob Frege (1848-1925), responsável pelo desenvolvimento do Cálculo Sentencial (CASTRUCCI, 1986), e Giuseppe Peano (1958-1932).

2.1.3 Período atual: (1910 - até hoje)

O último período da história da Lógica teve início com a publicação da obra *Principia Mathematica*, de Bertrand Russel (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947). De acordo com Sá e Rocha (2012, p. 425), essa obra "constituiu a base da Lógica Matemática moderna".

Figura 4 – Bertrand Russel: Defensor do Logicismo



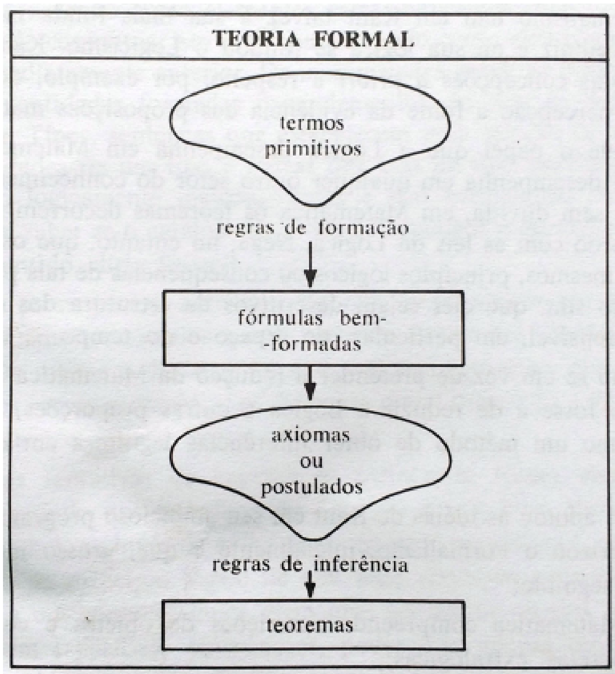
Fonte: Commons (2016)

O início desse período, segundo Machado (2009), foi marcado pelo aparecimento de duas grandes correntes do pensamento matemático: o Logicismo, baseado nas teorias leibnizianas, e o Formalismo, baseado nas teorias kantianas.

A Teoria Logicista, que teve como grandes apoiadores Russell e Whitehead, defende que a Aritmética, a Geometria, assim como todo o resto da Matemática, podem ser expressas por meio de estruturas lógicas, ou seja, toda a Matemática é redutível à Lógica (MACHADO, 2009).

Em 1910, segundo Moreira (2007), os estudos sobre Lógica alcançou um alto grau de formalização, que resultou no aparecimento do pensamento matemático chamado Formalismo. A Teoria Formalista, que teve em David Hilbert (1862-1943) o seu maior defensor, concebia a Matemática em duas partes distintas em relação à Lógica: parte específica e autônoma (termos primitivos e axiomas ou postulados) e parte dependente (fórmulas bem-formadas e teoremas).

Figura 5 – Teoria Formal



Fonte: Machado (2009, p. 30)

Note que os formalistas se diferenciam dos logicistas, apenas em relação ao papel da Lógica na Matemática. No entanto, ambas as teorias mostram a dependência da Matemática em relação à Lógica.

Outras teorias sobre o desenvolvimento do pensamento matemático foram debatidas ao longo do século XX. A teoria intuicionista, por exemplo, que teve Kurt Gödel (1906-1978) e Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) como dois dos seus principais representantes, procurou combater os logicistas e os formalistas, em relação à importância da Lógica para a Matemática. Para eles, apesar de a Lógica ter um importante papel no desenvolvimento dessa ciência, a Matemática é uma ciência autônoma e autossuficiente, ou seja, nem tudo na Matemática pode ser resumido à Lógica ou a outro qualquer sistema formal rigoroso (MACHADO, 2009).

Em suma, o período de 1890 a 1940, segundo Machado (2009), foi a era dourada da Matemática. Isso se deve muito aos trabalhos de Boole, Frege, Russel, dentre outros. É importante salientar que a Lógica estava presente no desenvolvimento das teorias desses grandes matemáticos, de modo que ela foi essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático moderno.

2.1.4 História da Lógica no Brasil

A história da Lógica no Brasil tem seu início ainda no período colonial, mais precisamente no século XVI, por meio dos cursos de filosofia ministrados nas escolas administradas pelos jesuítas (MORAES, 2007).

Segundo Ribeiro (1993), a educação, no período colonial brasileiro, era conduzida unicamente pelos jesuítas, sendo a principal missão dessa companhia recrutar fiéis e transmitir uma cultura de uma minoria europeia. Nesse sentido, por influência da filosofia medieval perdurada na Europa desde o século XII, a Lógica ensinada se caracterizava pelo estilo escolástico, isto é, seus estudos eram centralizados exclusivamente em escolas (CHAUÍ, 1988; MORAES, 2007).

De acordo com Raymundo (1998, p. 43),

> A Ordem dos Jesuítas é produto de um interesse mútuo entre a Coroa de Portugal e o Papado. Ela é útil à Igreja e ao Estado emergente. Os dois pretendem expandir o mundo, defender as novas fronteiras, somar forças, integrar interesses leigos e cristãos, organizar o trabalho no Novo Mundo pela força da unidade lei-rei-fé.

Esse modelo de educação jesuíta perdurou até meados do século XVII, quando, em 1759, após os jesuítas serem expulsos, o Marquês de Pombal fez uma série de reformas em Portugal, que repercutiram em todas as colônias. Ele, por meio dessas reformas, “[...] Tirou o poder educacional da Igreja e colocou-o nas mãos do Estado, criando, assim, um ensino pelo e para o Estado. [...]” (RIBEIRO, 1993, p. 16).

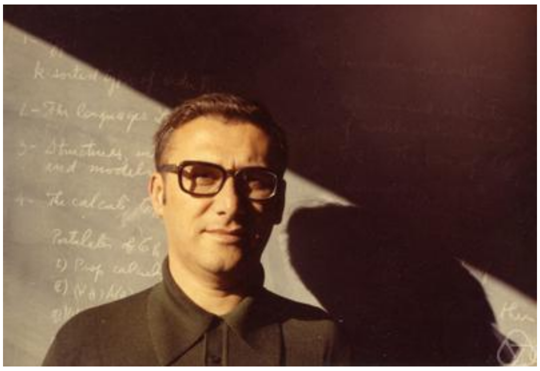
A partir dessas reformas, de acordo com Moraes (2007, p. 42), “[...] a lógica escolástica foi substituída oficialmente pela lógica eclética de caráter moderno.”, ou seja, a Lógica passsou a ser ensinada com base em várias teorias e não somente em uma visão eclesiológica. No entanto, segundo Ribeiro (1993, p. 16), os estudos sobre a Lógica no território brasileiro não alcançaram resultados satisfatórios, “[...] pois o ensino continuou enciclopédico, com objetivos literários e com métodos pedagógicos autoritários e disciplinares, abafando a criatividade individual e desenvolvendo a submissão às autoridades e aos modelos antigos. [...]”.

Em 1808, com a vinda da família real para o território brasileiro, a educação brasileira passa novamente por um período de mudanças. Os principais legados dessa época foram: a abertura de centros de ensino superiores não-teológicos e a criação da Impressão Régia (RIBEIRO, 1993; MORAES, 2007). Com o advento do ramo editorial foi publicado, em 1817, o primeiro livro de Lógica no Brasil, *Concluzões Philosophicas de Logica, e Metaphysica*, escrito por Carlos Teixeira da Silva e por Simão Bernardino da Costa e Passos (MORAES, 2007).

Em suma, de acordo com Moraes (2007, p. 47) "A Lógica no Brasil, até o início do século XX, foi o resultado dos esforços de intelectuais e de professores isolados, e teve como característica a instabilidade que marcou o cenário da educação escolar no Brasil".

A partir de 1900, os estudos sobre Lógica alcançam um patamar mais elevado, devido ao aparelhamento das investigações lógicas com o método acadêmico e científico, no Brasil. Esse crescimento na área dos estudos lógicos é mais profundo a partir da década de 50, com o surgimento de diversos pesquisadores ligados ao Departamento de Matemática da Universidade de São Paulo. Dentre esses pesquisadores, destacam-se: Edison Farah, Benedito Castrucci, Newton Carneiro Affonso da Costa, Mario Tourasse Teixeira e Leônidas Hegenberg (MORAES, 2007).

Figura 6 – Newton da Costa: Matemático brasileiro



Fonte: Commons (2014)

Dentre esses cinco pesquisadores, tem destaque o professor Newton Carneiro Affonso da Costa, devido à sua contribuição pioneira no campo da Lógica Paraconsistente em nível internacional.

Os fatos históricos que descrevemos nesta seção mostraram como a Lógica, no decorrer dos séculos, foi fundamental para o descobrimento de novos conhecimentos. Um exemplo claro dessa importância foi o surgimento de uma linguagem matemática, que, anos depois, seria imprescindível para o nascimento da tecnologia computacional.

2.2 Conceito de Lógica

Apresentar uma definição simples de Lógica é uma tarefa extremamente difícil, já que o termo "lógica", segundo Copi (1978), está presente entre nós em diversas situações, por exemplo, quando falamos de um comportamento lógico em comparação com um comportamento ilógico. Dessa forma, esta seção busca conceituar o que é Lógica e qual o seu objetivo enquanto ciência, a partir das definições de proposição, argumento e inferência.

Uma **proposição** é toda frase declarativa (constituída por palavras, símbolos ou ambos), que pode ser classificada em verdadeira ou falsa. Mais precisamente, uma frase é uma proposição se satisfaz as seguintes condições:

i) apresenta um pensamento de sentido completo;

ii) emite uma declaração (verdadeira ou falsa);

iii) obedece aos princípios lógicos fundamentais:

- Princípio da identidade - toda proposição é igual a si mesma, isto é, o valor lógico de uma proposição é dita verdadeira quando a proposição é verdadeira, e falso, caso contrário.

- Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

- Princípio do terceiro excluído: toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, não existe uma terceira opção.

Como exemplos de proposição, considere as seguintes frases:

Exemplo 1. $cos(\alpha+\beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta$.

Exemplo 2. $\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3. *Em Geometria Plana, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.*

Exemplo 4. $(3+5)^2 = 3^2 + 5^2$.

A Lógica não está preocupada com o conteúdo de uma dada proposição, isto é, se a proposição sob análise é verdadeira ou falsa, mas se ela pode ser classificada em verdadeira ou falsa. Dessa forma, podemos verificar, nos exemplos acima, que todas as frases são proposições, já que satisfazem as condições *i*), *ii*) e *iii*) da definição de proposição.

Vejamos, agora, alguns exemplos de frases que não são proposições.

Exemplo 5. $2-4$.

Essa frase não é uma proposição, pois não satisfaz a condição *i*). Observa-se que não há afirmação alguma, mas apenas um número subtraído de outro. Para torná-la uma proposição, podemos completá-la, por exemplo, das seguintes formas:

(a) $2-4=-2$.

Neste caso, temos uma proposição verdadeira.

(b) $2-4=10$.

Agora, temos uma proposição falsa.

Exemplo 6. $3^4 > 4^3$*?*

Essa frase, por ser interrogativa, não satisfaz a condição *ii*), de modo que não é uma proposição.

Exemplo 7. *Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos!*

Neste caso, temos uma frase exclamativa, de modo que não é uma proposição, pois não satisfaz a condição *ii*).

Exemplo 8. $2x+3=0$.

Essa frase é conhecida como uma sentença aberta, já que, para $x=-\dfrac{3}{2}$, ela é verdadeira, mas, para qualquer outro valor de $x \neq -\dfrac{3}{2}$, ela é falsa. Portanto, não há como determinar se ela é verdadeira ou falsa, pois nada foi dito sobre a variável x. Assim, pelo princípio do terceiro excluído, a frase dada não é uma proposição.

Uma forma de transformar uma sentença aberta em uma proposição é quantificar a variável x de um dos seguintes modos:

(a) *Existe* $x \in \mathbb{R}$*, tal que* $2x+3=0$.

Neste caso, temos uma proposição cujo valor lógico é verdade (V).

(b) *Para todo* $x \in \mathbb{R}$*, temos* $2x+3=0$.

Temos também uma proposição, mas agora o valor lógico é falso (F).

Um **argumento** é qualquer conjunto não vazio de proposições em que uma delas, a conclusão, é consequência exclusiva das outras, as premissas. Ele é válido (ou legítimo) quando a conclusão é consequência imediata das premissas; não válido (ou ilegítimo), caso contrário.

Vejamos alguns exemplos de argumentos.

Exemplo 9.

Premissa: Todos os números primos são ímpares.

Premissa: 4 *é um número primo.*

Conclusão: Logo, 4 *é um número ímpar.*

Exemplo 10.

Premissa: Todo homem é mortal.

Premissa: Sócrates é mortal.

Conclusão: Portanto, Sócrates é homem.

Naturalmente, vê-se que a conclusão no Exemplo 9 é consequência imediata das premissas, de modo que esse exemplo é um argumento válido. Já no Exemplo 10, embora as premissas e a conclusão sejam verdadeiras, o argumento é inválido, pois, se Sócrates for um homem, a conclusão será verdadeira. No entanto, se Sócrates for um cão, a conclusão será falsa. Portanto, pelo princípio da não contradição, esse argumento é inválido.

A partir disso, Almeida *et al.* (2008) e Copi (1978) explicam que:

(a) existem argumentos válidos e inválidos em que as premissas e a conclusão são verdadeiras.

(b) existem argumentos válidos e inválidos em que uma, ou mais premissas, são falsas e a conclusão é verdadeira.

(c) existem argumentos válidos e inválidos em que uma, ou mais premissas, são falsas e a conclusão é falsa.

(d) não existem argumentos válidos em que as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Em outras palavras, é impossível que um argumento seja válido quando suas premissas são verdadeiras e sua conclusão é falsa.

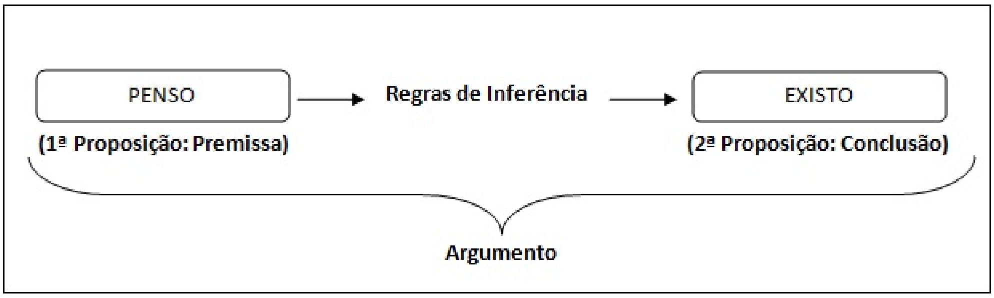
Nesse sentido, o problema da validade dos argumentos pode ser resumido por meio do seguinte questionamento: é possível que o argumento tenha premissas verdadeiras e a conclusão falsa? Se sim, o argumento é inválido; se não, o argumento é válido.

A **inferência**, segundo Copi (1978, p. 21), "é um processo pelo qual se chega a uma proposição, afirmada na base de uma ou outras mais proposições aceitas como ponto de partida do processo". Nesse sentido, para o professor Cezar Augusto Mortari (2001, p. 4), "fazer inferência consiste em "manipular" a informação disponível — aquilo que sabemos, ou supomos ser verdadeiro; aquilo em que acreditamos — e extrair consequência disso, obtendo informação nova." .

Exemplo 11. *"Penso, logo existo" (DESCARTES, 2001, p. 38).*

Essa frase, escrita pelo filósofo e matemático francês Renê Descartes (1596-1650), exemplifica os conceitos proposição, argumento e inferência.

Figura 7 – Esquema de Proposição, Inferência e Argumento



Fonte: Elaborada pelo autor

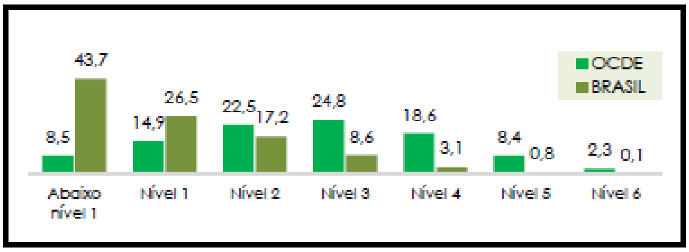
Em suma, as proposições são as frases declarativas, o argumento é conjunto dessas proposições usadas no processo de raciocínio, e a inferência é o procedimento realizado pela mente, na qual se relacionam as proposições.

Diante disso, surge a seguinte indagação: o que a Lógica tem a ver com tudo isso? Tudo, pois ela é a ciência que estuda os princípios e métodos que regem o processo de inferência, objetivando diferenciar um raciocínio correto do incorreto (MORTARI, 2001; COPI, 1978).

2.3 A Lógica no processo de ensino e aprendizagem em Matemática

Frequentemente, os professores de Matemática são questionados sobre o processo de ensino e aprendizagem. Isso porque, apesar de o ensino da Matemática no Brasil ter passado por uma série de mudanças nos últimos anos (AGUIAR; ORTIGÃO, 2012), vários mecanismos de avaliação, tais como: o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o próprio Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), apontam que o rendimento dos alunos do Ensino Médio em Matemática mantém-se no mesmo patamar (ou até pioraram) em relação aos anos anteriores (FALVO; AMARAL, 2017a; BRASIL, 2016b; BRASIL, 2017).

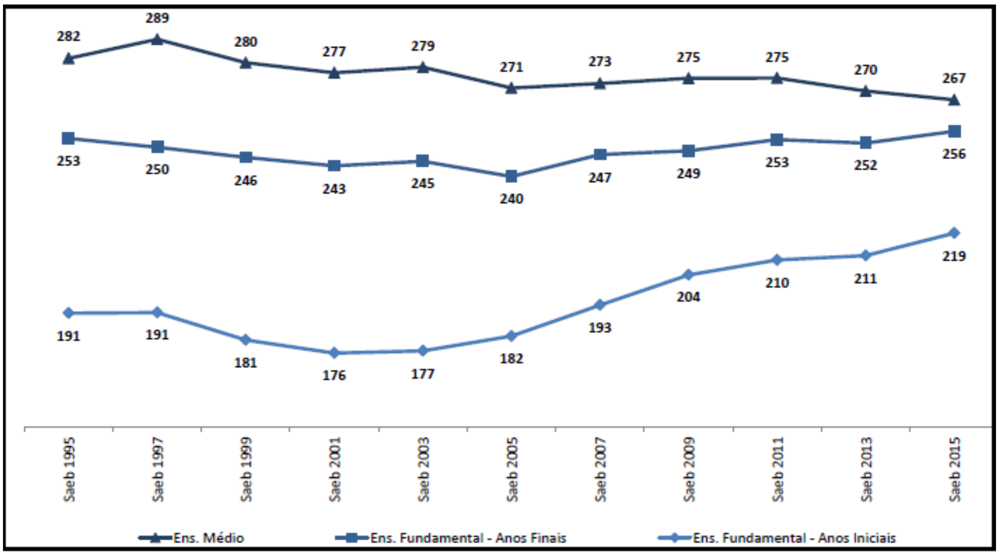
Figura 8 – Percentual de alunos por nível de desempenho em MATEMÁTICA- PISA 2015 (Brasil e OCDE)



Fonte: Falvo e Amaral (2017b)

Ao analisar esse gráfico (Figura 5), podemos observar que "no Brasil, 70,3% dos estudantes estão abaixo do nível 2 em Matemática, patamar que a (OCDE) [3] estabelece como necessário para que os jovens possam exercer plenamente sua cidadania" (BRASIL, 2016a, p. 171).

Figura 9 – Evolução dos resultados do Brasil no SAEB (1995 a 2015) - Proficiências médias em Matemática



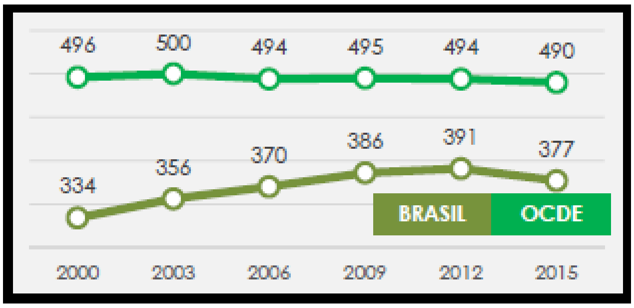
Fonte: Brasil (2016b)

Na série histórica, como podemos observar nesse gráfico (Figuara 9), os estudantes brasileiros do Ensino Fundamental: Anos Finais e do Ensino Médio, mantiveram uma média em Matemática praticamente no mesmo patamar; já no Ensino Fundamental: Anos iniciais, a partir do ano de 2001, as médias, ano após ano, vêm alcançando resultados

[3] Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico.

melhores. Na avaliação do PISA, essa realidade também é confirmada, conforme gráfico (Figura 10) a seguir.

Figura 10 – Evolução dos resultados do Brasil no Pisa (2000 a 2015) - Médias em Matemática



Fonte: Falvo e Amaral (2017b)

O baixo rendimento escolar dos estudantes brasileiros, conforme notamos nos gráficos acima, está relacionado, segundo a OCDE (BRASIL, 2016a), com a ausência da capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática com base em diversos contextos. Em outras palavras, os nossos estudantes "[..] são capazes apenas de responder a questões definidas com clareza, que envolvam contextos conhecidos, nas quais todas as informações relevantes estão presentes." (FALVO; AMARAL, 2017b, p. 2).

Esses resultados podem estar relacionados diretamente ao trabalho docente, pois

> Sabe-se que a típica aula de Matemática ao nível de primeiro, segundo ou terceiro graus, ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julgar importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e, em seguida, procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender Matemática por meio de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor. (D'AMBRÓSIO, 1989, p. 15),

Essa realidade, constatada aproximadamente 30 anos atrás por D'Ambrósio, continua descrevendo os perfis de grande parte dos docentes brasileiros atualmente, pois, mesmo com o acesso a diversas metodologia de ensino, vários professores ainda estão presos ao ensino tradicional, no qual ele é o detentor de todo o conhecimento e o aluno apenas executa o que lhe foi transmitido.

Dessa maneira,

> Os alunos raramente veem demonstrações, e tampouco se pede que eles justifiquem suas respostas, ou a verdade de uma afirmativa. Isso acontece tanto no ensino de Geometria quanto no de Álgebra e de Aritmética. Em Geometria,

> apresentam-se aos alunos definições prontas, que devem ser repetidas, e fórmulas para serem simplesmente aplicadas em problemas estereotipados. Nas aulas de Álgebra e de Aritmética, o ensino se dá com ênfase nos procedimentos: manipulação de expressões, resolução de equações, aplicação de regras, aos quais os alunos não atribuem significado algum. (TINOCO; SILVA, 2004, p. 1).

O estudo da Lógica Matemática no Ensino Médio vem ao encontro dessa problemática no processo de ensino e aprendizagem em Matemática, pois, de acordo com Oliveira e Moretto (2009), essa Lógica é fundamental para o processo de resolução de problemas, ou seja, "O aprendizado da Lógica auxilia os estudantes no raciocínio, na compreensão de conceitos básicos, na verificação formal de programas e na preparação para o entendimento do conteúdo de tópicos mais avançados." (OLIVEIRA; MORETTO, 2009, p. 5).

O ensino dessa Lógica dentro do currículo da Matemática é assegurado pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, decerto que, de acordo com essas orientações,

> A ampliação e o aprofundamento da explicitação da estruturação lógica da Matemática são necessários ao aluno do Ensino Médio, devendo-se valorizar os vários recursos do pensamento matemático, tais como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e o raciocínio lógico-dedutivo, a distinção entre validação matemática e validação empírica, e favorecer a construção progressiva do método dedutivo em Matemática. (BRASIL, 2006, p. 95).

A ampliação e o aprofundamento da explicitação da Lógica na Matemática, conforme ditados pelas orientações curriculares, fazem-se necessárias por vários motivos, dentre eles o processo de validade e falsidade em Matemática. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias,

> Afirmar que algo é "verdade" em Matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma consequência lógica de outras proposições provadas previamente.(BRASIL, 2007, p. 124).

Diante do exposto, podemos afirmar que a referida Lógica é uma importante ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática, sem a qual o ensino de grande parte dessa área de conhecimento, especialmente a Geometria, não passa de mera exposição de conceitos prontos e acabados.

3 LÓGICA MATEMÁTICA

Que é Lógica Matemática? Que são conectivos lógicos? Que são tabelas-verdade? Que é um argumento válido? Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos fundamentais em Lógica Matemática, com o objetivo de responder a essas e a outras indagações pertinentes.

3.1 Noções introdutórias

A Lógica Matemática é a parte da Matemática que examina as aplicações lógicas envolvidas nas operações e demonstrações matemáticas. Ela estuda basicamente o Cálculo Proposicional[4], que, segundo o professor João Nunes de Souza (2008), é a parte da Lógica Formal que trabalha com os estudos da linguagem simbólica. Em outras palavras, ele é a linguagem formal da Lógica.

Além disso, é importante salientar que o Cálculo Proposicional, de acordo com Feitosa e Paulovich (2005), é regido pelos princípios aristotélicos da identidade, da não contradição e do terceiro excluído, e é formado basicamente por **fórmulas**, **símbolos** e **conectivos**.

3.2 Proposição e conectivos

Como definimos no capítulo anterior, uma **proposição** é toda frase declarativa (constituída por palavras, símbolos ou ambos) que pode ser classificada em verdadeira ou em falsa. As proposições podem ser:

i) **simples**: são aquelas que estão estruturadas como uma única oração (sujeito + verdo + predicado). Dessa forma, essas proposições expressam um pensamento de sentido completo, de modo que é possível classificá-las ou como verdadeira (V) ou como falsa (F).

ii) **compostas**: são aquelas formadas pela combinação de proposições simples usando conectivos lógicos. (Essas proposições também são chamadas **fórmulas proposicionais**.)

As **proposições simples** são representadas por letras minúsculas, *p, q, r, s, ...,*, e as **proposições compostas**, por letras maiúsculas*, P, Q, R, S,...* do alfabeto da língua latina. Em qualquer caso, essas letras são chamadas **símbolos proposicionais**.

[4] A outra parte da qual se ocupa a Lógica é o Cálculo de Predicado, a qual não é objeto de estudo deste trabalho.

Vejamos alguns exemplos de proposições simples e compostas.

Exemplo 12.

p: $\left(\frac{1}{2}\right)^7 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

q: $\sqrt{2} \cong 1,41$.

r: Todo número ímpar é múltiplo de 3.

Exemplo 13.

P: $\left(\frac{1}{2}\right)^7 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$ *e* $\sqrt{2} \cong 1,41$.

Q: $\sqrt{2} \cong 1,41$ *ou todo número ímpar é múltiplo de 3.*

R: Se todo número ímpar é múltiplo de 3, então $\sqrt{2} \cong 1,41$.

Observe que, no Exemplo 12, as proposições p, q, e r não contêm nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma, isto é, todas elas representam uma única oração. Já no Exemplo 13, as proposições P, Q e R representam proposições compostas, pois:

- $P = p$ e q.
- $Q = q$ ou r.
- $R =$ Se r, então q.

Note que uma proposição composta é formada por, no mínimo, duas proposições simples e por, no mínimo, um conectivo lógico. Mas o que são conectivos lógicos? **Conectivos lógicos** são palavras ou expressões usadas na combinação entre proposições simples para gerar novas proposições (Compostas). Basicamente, existem cinco conectivos lógicos[5]:

Quadro 1 – Conectivos Lógicos

Conectivo	Função	Símbolo
não	negação	$\sim$
e	conjunção	$\wedge$
ou	disjunção	$\vee$
se..., então	condicional	$\rightarrow$
se e somente se	bicondicional	$\leftrightarrow$

Fonte: Feitosa e Paulovich (2005, p. 20)

5 Além desses cinco conectivos listados, temos ainda o conectivo (ou...ou), chamado de disjunção excludente e simbolizado por ($\veebar$).

Para uma melhor fixação desses conceitos, voltemos ao Exemplo 13, e vejamos uma comparação entre a **linguagem corrente** e a **linguagem simbólica** nas representações lógicas.

Quadro 2 – Linguagem Corrente x Linguagem Simbólica

Linguagem Corrente	Linguagem Simbólica
$P: \left(\frac{1}{2}\right)^7 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$ e $\sqrt{2} \cong 1,41$.	$P: p \wedge q$
$Q: \sqrt{2} \cong 1,41$ ou todo número ímpar é múltiplo de 3.	$Q: q \vee r$
R: Se todo número ímpar é múltiplo de 3, então $\sqrt{2} \cong 1,41$.	$R: r \rightarrow q$

Fonte: Elaborada pelo autor

3.3 Operações lógicas

Em Matemática, quando efetuamos operações envolvendo números, estamos realizando operações aritméticas. Quando necessitamos realizar operações envolvendo proposições, efetuamos **operações lógicas**. Nesta subseção, estudaremos as operações lógicas fundamentais.

3.3.1 Negação

Definição. Negação de uma proposição p é a proposição representada por *não p*, cujo valor lógico é a verdade (V), se p é falsa, e a falsidade (F), se p é verdadeira.

Símbolo: $\sim$ [6].

Notação: $\sim p$.

Em resumo: o valor lógico de $(\sim p)$ é o oposto de p.

Definimos os valores lógicos da **negação** de uma proposição p por meio da seguinte tabela-verdade:

Quadro 3 – Tabela-verdade da Negação

p	**~p**
V	F
F	V

Fonte: Elaborada pelo autor

6 O conectivo ($\sim$) também pode ser simbolizado por: ($\neg$).

Exemplo 14.

(a) Dada $p : 3 \neq 5$*, temos* $\sim p : 3 = 5$*.*

(b) Dada r: A raiz quadrada de 2 é um número racional, temos $\sim r$*: A raiz quadrada de 2 é um número irracional;* $\sim(\sim r)$*: A raiz quadrada de 2 é um número racional.*

No Exemplo (14a), note que a negação da diferença é a igualdade, isto é, dizer que 3 não é diferente de cinco é o mesmo que dizer que 3 é igual a 5.

No Exemplo (14b), note que acrescentamos uma informação fundamental para o esquema lógico por trás do conectivo ($\sim$), ou seja, quando negamos uma negação de uma proposição obtemos a proposição. De forma mais clara, ao dizer que "a raiz quadrada de 2 é um número racional", temos que a sua negação é "A raiz quadrada de 2 não é um número racional", ou que "a raiz quadrada de 2 é um número irracional", e, ao dizer que "a raiz quadrada de 2 é um número irracional", temos que a sua negação é "a raiz quadrada de 2 é não um número irracional", ou que "a raiz quadrada de 2 é um número racional". Assim, a negação da negação de uma proposição é a própria proposição. Simbolicamente, temos:

$$\text{Se } \mathbb{V}(p) = F, \text{ então } \mathbb{V}(\sim p) = V;\ \mathbb{V}(\sim(\sim p)) = F,$$

em que ($\mathbb{V}$) denota o valor lógico de uma proposição.

3.3.2 Conjunção

Definição. Conjunção de duas proposições p e q é a proposição representada por "*p e q*", cujo valor lógico é a verdade (V), se as proposições p e q são ambas verdadeiras, e a falsidade (F) nos demais casos.

Símbolo: $\wedge$.

Notação: p $\wedge$ q.

Definimos os valores lógicos da **conjunção** de duas proposição p e q por meio da seguinte tabela-verdade:

Quadro 4 – Tabela-verdade da Conjunção

p	**q**	**p ∧ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: Elaborada pelo autor

Vejamos alguns exemplos de proposições compostas que contêm o conectivo $(\wedge)$ em sua estrutura.

Exemplo 15. *Dadas* $p: 2 < 5$ *e* $q: 3 \neq 5$, *temos* $p \wedge q: 2 < 5$ *e* $3 \neq 5$.

Exemplo 16. *Dadas* $p: -2 > -5$ *e* $q: (-3)^2 = -3^2$, *temos* $p \wedge q: -2 > -5$ *e* $(-3)^2 = -3^2$.

Exemplo 17. *Dadas* $p: 3+2 = 6$ *e* $q: 5+6 = 11$, *temos* $p \wedge q: 3+2 = 6$ *e* $5+6 = 11$.

Exemplo 18. *Dadas* $p: \sqrt{2} < 1$ *e* $q: \sqrt{5}$ *é racional, temos* $p \wedge q: \sqrt{2} < 1$ *e* $\sqrt{5}$ *é racional.*

Note que nos Exemplos 15 a 18, apresentamos todas as possíveis combinações lógicas para o conectivo $(\wedge)$ utilizando duas proposições simples, de acordo com a tabela-verdade da conjunção. No Exemplo 15, temos que $\mathbb{V}(p) = V$ e $\mathbb{V}(q) = V$, de modo que, por definição de conjunção, segue que $\mathbb{V}(p \wedge q) = V$. Já nos Exemplos 16 a 18, como pelo menos uma de suas proposições simples é falsa, temos que $\mathbb{V}(p \wedge q) = F$.

3.3.3 Disjunção

Definição. Disjunção de duas proposições p e q é a proposição representada por "*p ou q*", cujo valor lógico é a verdade (V), se pelo menos uma das proposições p e q é verdadeira, e a falsidade (F), se as proposições p e q são ambas falsas.

Símbolo: $\vee$.

Notação: $p \vee q$.

Definimos os valores lógicos da **disjunção** de duas proposição p e q por meio da seguinte tabela-verdade:

Quadro 5 – Tabela-verdade da Disjunção

p	**q**	**p $\vee$ q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Elaborada pelo autor

Nota. Alguns autores, como Alencar Filho (2011), consideram esse conectivo como **disjunção inclusiva**, já que o valor lógico é verdade (V) se pelos menos uma das proposição p e q é verdadeira.

Vejamos alguns exemplos que ilustram todas as possíveis combinações lógicas para o conectivo $(\vee)$ utilizando duas proposições simples.

Exemplo 19. *Dadas* $p: 2 > 0$ *e* $q: 2 > 1$*, temos* $p \vee q: 2 > 0$ *ou* $2 > 1$*.*

Exemplo 20. *Dadas* $p: 4 = 4$ *e* $q: 3 < 3$*, temos* $p \vee q: 4 = 4$ *ou* $3 < 3$*.*

Exemplo 21. *Dadas* $p: 8$ *é um número primo e* $q: 8$ *é um número composto, temos* $p \vee q: 8$ *é um número primo ou* 8 *é um número composto.*

Exemplo 22. *Dadas* $p: 3^4 < 4^3$ *e* $q: 3^4 \neq (-3)^4$*, temos* $p \vee q: 3^4 < 4^3$ *ou* $3^4 \neq (-3)^4$*.*

Note que nos Exemplos 19 a 21, temos que pelos menos uma das suas proposições simples é verdadeira, de modo que, em todos eles, temos que $\mathbb{V}(p \vee q) = V$. Já no Exemplo 22, ambas as proposições simples têm valores lógicos falsos, de modo que, pela definição de conjunção, temos que $\mathbb{V}(p \vee q) = F$.

3.3.4 Disjunção excludente

Definição. Disjunção excludente de duas proposições p e q é a proposição representada por "*ou p ou q*", cujo valor lógico é a verdade (V) somente se p é verdadeira ou q é verdadeira, mas não se p e q são ambas verdadeiras (mútua exclusão das proposições), e a falsidade (F), se p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Símbolo: $\veebar$.

Notação: $p \veebar q$.

Definimos os valores lógicos da **disjunção exclusiva** de duas proposição p e q por meio da seguinte tabela-verdade:

Quadro 6 – Tabela-verdade da Disjunção Excludente

p	**q**	**p $\veebar$ q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Elaborada pelo autor

Considerando os exemplos anteriores (19 a 22), vejamos como eles se comportam com o conectivo "ou... ou" ($\veebar$).

Exemplo 23. *Dadas* $p: 2 > 0$ *e* $q: 2 > 1$*, temos* $p \vee q:$ *ou* $2 > 0$ *ou* $2 > 1$*.*

Exemplo 24. *Dadas* $p: 4 = 4$ *e* $q: 3 < 3$*, temos* $p \vee q:$ *ou* $4 = 4$ *ou* $3 < 3$*.*

Exemplo 25. *Dadas* $p: 8$ *é um número primo e* $q: 8$ *é um número composto, temos* $p \vee q:$ *ou* 8 *é um número primo ou* 8 *é um número composto.*

Exemplo 26. *Dadas* $p: 3^4 < 4^3$ *e* $q: 3^4 \neq (-3)^4$, *temos* $p \veebar q$: *ou* $3^4 < 4^3$ *ou* $3^4 \neq (-3)^4$.

Note que nos Exemplos 23 e 26, as proposições simples têm valores lógicos ambos verdadeiros e ambos falsos, respectivamente, de modo que, pela definição de disjunção excludente, temos que $\mathbb{V}(p \veebar q) = F$. Por outro lado, nos Exemplos 24 e 25, as proposições simples têm valores lógicos distintos, de modo que $\mathbb{V}(p \veebar q) = V$.

3.3.5 Condicional

Definição. Condicional de duas proposições p e q é a proposição representada por "*se p, então q*", cujo valor lógico é a falsidade (F), se p é verdadeira e q é falsa, e a verdade (V) nos demais casos.

Símbolo: $\rightarrow$.

Notação: $p \rightarrow q$.

Na condicional de duas proposições "$p \rightarrow q$", denominamos *antecedente* a proposição p, que está depois do "se", e denominamos *consequente* a proposição q, que está depois do "então". Além disso, temos, na proposição "$p \rightarrow q$":

i) p é condição suficiente para q.

ii) q é condição necessária para p.

Definimos o valor lógico da **condicional** de duas proposições p e q por meio da seguinte tabela-verdade:

Quadro 7 – Tabela-verdade da Condicional

p	**q**	**p → q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor

Vejamos alguns exemplos que ilustram todas as possíveis combinações lógicas para o conectivo ($\rightarrow$) utilizando duas proposições simples.

Exemplo 27. *Dadas* $p: 3 \mid 12$ [7] *e* $q: 12 \mid 36$, *temos* $p \rightarrow q$: *Se* $3 \mid 12$, *então* $12 \mid 36$.

Exemplo 28. *Dadas* $p: \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6}$ *e* $q: 4 \cdot 3 \neq 3 \cdot 4$, *temos* $p \rightarrow q$: *Se* $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6}$, *então* $4 \cdot 3 \neq 3 \cdot 4$.

[7] Leia-se: 3 divide 12 ou 3 é divisor de 12. Simbolicamente, temos: $a \mid b$ denota "a divide b ou a é divisor b".

Exemplo 29. *Dadas* $p: 3 = 18 \div 3$ *e* $q: 9 \cdot 2 = 18$, *temos* $p \rightarrow q$: *Se* $3 = 18 \div 3$, *então* $9 \cdot 2 = 18$.

Exemplo 30. *Dadas* $p: 12 \leq \frac{196}{14}$ *e* $q: 12 \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{196}{14} \cdot \frac{1}{2}$, *temos* $p \rightarrow q$: *Se* $12 \leq \frac{196}{14}$, *então* $12 \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{196}{14} \cdot \frac{1}{2}$.

Note que, de todas as combinações lógicas que apresentamos, apenas o Exemplo 28 apresenta uma proposição composta cujo valor lógico é falso, pois $\mathbb{V}(p) = V$ e $\mathbb{V}(q) = F$. Nos demais exemplos, pela definição de condicional, temos que $\mathbb{V}(p \rightarrow q) = V$.

3.3.6 Bicondicional

Definição. Bicondicional de duas proposições p e q é a proposição representada por "*p se e somente se q*", cujo valor lógico é a verdade (V), se p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a falsidade (F) nos demais casos.

Símbolo: $\leftrightarrow$.

Notação: $p \leftrightarrow q$.

Na bicondicional de duas proposição $p \leftrightarrow q$, temos:

i) p é condição necessária e suficiente para q.

ii) q é condição necessária e suficiente para p.

Definimos o valor lógico da **bicondicional** de duas proposição p e q por meio da seguinte tabela-verdade:

Quadro 8 – Tabela-verdade da Bicondicional

p	**q**	**p ↔ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor

Nos exemplos a seguir, apresentamos todas as possíveis combinações lógicas para o conectivo ($\leftrightarrow$) utilizando duas proposições simples.

Exemplo 31. *Dadas* $p: sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ *e* $q: cos\left(\frac{\pi}{4}\right) < 1$, *temos* $p \leftrightarrow q: sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ *se e somente se* $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) < 1$.

Exemplo 32. *Dadas* $p: 4^3 = 64$ *e* $q: 3 + 3 = 7$, *temos* $p \leftrightarrow q: 4^3 = 64$ *se e somente se* $3 + 3 = 7$.

Exemplo 33. *Dadas* $p : tg\pi = 1$ *e* $q : sen\pi = 0$*, temos* $p \leftrightarrow q : tg\pi = 1$ *se e somente se* $sen\pi = 0$ *(F).*

Exemplo 34. *Dadas* $p : sen20^o > 1$ *e* $q : cos20^o > 2$*, temos* $p \leftrightarrow q : sen20^o > 1$ *se e somente se* $cos20^o > 2$*.*

Dentre os exemplos que apresentamos, segue que, pela definição de bicondicional, as proposições compostas descritas nos Exemplos 31 e 34 têm valores lógicos verdadeiros, pois as suas proposições simples têm valores lógicos ambos verdadeiros e ambos falsos, respectivamente. Por outro lado, nos Exemplos 32 e 33, como os valores os lógicos das proposições simples são distintos, temos que $\mathbb{V}(p \leftrightarrow q) = F$.

3.4 Construção de tabelas-verdade

Conforme estudado na Seção 3.3, uma proposição composta é formada pela combinação de proposições simples por meio de conectivos lógicos. Nesta seção, temos como objetivo mostrar que, por meio da construção de tabelas-verdade, é possível determinar em que casos uma proposição composta será ou verdadeira (V) ou falsa (F).

3.4.1 Valor lógico de uma proposição composta

O valor lógico de toda proposição composta depende exclusivamente dos valores lógicos das proposições simples que as compõem, ficando, dessa forma, por eles determinado.

No próximo exemplo, apresentamos o procedimento necessário para determinar os valores lógicos de uma proposição composta.

Exemplo 35. *Determine os valores lógicos da proposição:*

$$P(p,q) = ((p \wedge (\sim q)) \rightarrow (p \veebar q)).$$

Solução:

Quadro 9 – Tabela-verdade da proposição $P(p,q) = ((p \wedge (\sim q)) \rightarrow (p \veebar q))$

p	q	$\sim$ q	$((p \wedge (\sim q))$	$(p \veebar q)$	$((p \wedge (\sim q)) \rightarrow (p \veebar q))$
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor

3.4.2 Número de linhas de uma tabela-verdade

O número de linhas da tabela-verdade de uma proposição composta depende unicamente do número de proposições simples que a compõem, pois, pelo princípio da não contradição:

$i)$ para uma proposição simples, temos dois valores lógicos unicamente: V ou F;

$ii)$ para duas proposições simples, temos quatro valores lógicos unicamente: (V,V) ou (V,F) ou (F,V) ou (F,F);

$iii)$ para três proposições simples, temos oito valores lógicos unicamente: (V,V,V) ou (V,V,F) ou (V,F,V) ou (V,F,F) ou (F,V,V) ou (F,V,F) ou (F,F,V) ou (F,F,F).

Nesse sentido, para k proposições simples distintas, há tantas possibilidades quantos são os arranjos com repetição de 2 (V e F) elementos k a k. Logo, o número de linhas da tabela-verdade de uma proposição composta formada por k proposições simples é 2^k.

Exemplo 36. *Construa a tabela-verdade da proposição* $P(p,q,r) = (p \vee q) \leftrightarrow r$.

Solução:

Note, inicialmente, que a proposição composta P dada é formada por três proposições simples p, q e r. Assim, a sua tabela-verdade terá $2^3 = 8$ linhas. Logo, a proposição $P(p,q,r) = (p \vee q) \leftrightarrow r$ dada tem a seguinte tabela-verdade:

Quadro 10 – Tabela-verdade da proposição $P(p,q,r) = (p \vee q) \leftrightarrow r$ - 1º Método

p	q	r	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \leftrightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor

Para a construção da tabela-verdade desse exemplo, primeiramente formamos as colunas das proposições simples p, q e r. Em seguida, formamos a coluna para a proposição $(p \vee q)$. Finalmente, para formar a coluna da proposição $P(p,q,r) = (p \vee q) \leftrightarrow r$, necessitamos dos valores lógicos das proposições r e $(p \vee q)$.

Outro modo de construir uma tabela-verdade é traçar, inicialmente, uma coluna para cada proposição simples e para cada conectivo presente na proposição composta dada.

Quadro 11 – Tabela-verdade da proposição $P(p,q,r) = (p \vee q) \leftrightarrow r$ - 2º Método

$(p$	$\vee$	$q)$	$\leftrightarrow$	r
V	V	V	V	V
V	V	V	F	F
V	V	F	V	V
V	V	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V
F	F	F	V	F
1	2	1	3	1

Fonte: Elaborada pelo autor

Note que, para esse tipo de tabela-verdade, devemos, necessariamente, após traçar as colunas, atribuir valores numéricos, numa certa ordem, que indiquem os valores lógicos das proposições simples e das operações lógicas, ou seja, o resultado de uma coluna subsequente é consequência das colunas anteriores. Nesse exemplo, temos que a coluna (2) é consequência das colunas (1) e (3). A coluna (5) é, por sua vez, consequência das colunas (2) e (6).

Em suma, esse segundo modelo de construção de tabela-verdade é usualmente utilizado quando temos um grande número de proposições simples e de operadores lógicos envolvidos em uma proposição composta.

3.5 Classificação das proposições compostas

Nesta seção, abordaremos a classificação das proposições compostas. Vários autores, tais como: Castrucci (1986), Feitosa e Paulovich (2005) e Alencar Filho (2011), classificam essas proposições em tautológicas, contraválidas e contingentes.

Uma proposição composta é uma **tautologia** quando a última coluna da sua tabela-verdade apresenta apenas valores lógicos verdadeiros (Vs). É uma **contradição** (ou **contraválida**) quando a última coluna apresenta apenas valores lógicos falsos (Fs). É uma **contingência** (ou **indeterminada**) quando a última coluna apresenta valores lógicos verdadeiros (Vs) e falsos (Fs).

Nota. As tautologias, as contradições e as contingências são também denominadas proposições logicamente verdadeiras, proposições logicamente falsas e proposições logicamente indeterminadas, respectivamente.

Nos exemplos a seguir, construa as tabelas-verdade das proposições compostas dadas e classifique-as como tautológicas, contraválidas ou indeterminadas.

Exemplo 37. $P(p, \sim p) = p \vee \sim p$.

Solução:

Quadro 12 – Tabela-verdade da proposição $P(p, \sim p) = p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor

Observe que a proposição $P(p, \sim p) = p \vee \sim p$ é tautológica, já que a última coluna da sua tabela-verdade é formada apenas por valores lógicos verdadeiros (Vs).

Exemplo 38. $Q(p, \sim p) = \sim (p \vee \sim p)$.

Solução:

Quadro 13 – Tabela-verdade da proposição $Q(p, \sim p) = \sim (p \vee \sim p)$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$\sim (p \vee \sim p)$
V	F	V	F
F	V	V	F

Fonte: Elaborada pelo autor

Observe que a proposição $Q(p, \sim p) = \sim (p \vee \sim p)$ é contraválida, já que a última coluna da sua tabela-verdade é formada apenas por valores lógicos falsos (Fs). Outrossim, note que a negação de uma proposição tautológica é uma proposição contraválida, isto é:

$$P(p, \sim p) = \sim Q(p, \sim p).$$

Exemplo 39. $R(p,q) = p \wedge (\sim p \vee p)$.

Solução:

Quadro 14 – Tabela-verdade da proposição $Q(p, \sim p) = \sim (p \vee \sim p)$

p	q	$\sim p$	$(\sim p \vee q)$	$p \wedge (\sim p \vee p)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	F	V	V	F

Fonte: Elaborada pelo autor

Observe que a proposição $R(p,q) = p \wedge (\sim p \vee p)$ é indeterminada, já que a última coluna da sua tabela-verdade é formada por valores lógicos verdadeiros (Vs) e falsos (Fs).

A noção de tautologia é essencial para a compreensão dos conceitos de implicação e equivalência lógicas, e para a validação de argumentos, assuntos esses dos quais trataremos a seguir.

3.6 Uso de parênteses

Um dos usos de parênteses na Lógica Matemática tem como objetivo evitar ambiguidade nas interpretações de proposições compostas. Por exemplo, a expressão $p \wedge q \vee r$ é ambígua, pois as proposições $(p \wedge q) \vee r$ e $p \wedge (q \vee r)$ não são equivalentes.

Quadro 15 – Tabela-verdade da proposição $(p \wedge q) \vee r$ e $p \wedge (q \vee r)$.

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	F	F	F

Fonte: Elaborada pelo autor

A Matemática tem convenções mais bem estabelecidas para a ordem das operações em declarações ambíguas. Por exemplo, no caso de $1+2\times 3$, a convenção é interpretar a declaração como $1+(2\times 3)$, resultando em 7, em vez de $(1+2)\times 3$, resultando em 9. A convenção em Matemática, nesse contexto, é que a multiplicação precede a adição.

A Lógica Matemática não tem uma convenção tão bem estabelecida como a Matemática, nesse contexto. No entanto, a maioria dos autores pesquisados, tais como Castrucci (1986), Alencar Filho (2011) e Hegenberg (2012), apresentam algumas regras, um conjunto de convenções acordadas, sobre o agrupamento de conectivos.

Adotam-se as seguintes convenções:

1. Utilizar chaves "{ }" e colchetes "[ ]", em vez de repetir várias vezes os parênteses em uma dada fórmula proposicional.

Por exemplo, para a expressão $p \wedge q \vee r \rightarrow s$, escrevemos

$$\{[(p \wedge q) \vee r] \rightarrow s\} \text{ ou } \{[p \wedge (q \vee r)] \rightarrow s\},$$

dentre outras maneiras.

2. Omitir os parênteses externos (desde que tal omissão não acarrete ambiguidade).

No exemplo anterior, podemos escrever a expressão sem as chaves:

$$[(p \wedge q) \vee r] \to s \text{ ou } [p \wedge (q \vee r)] \to s.$$

3. Os parênteses devem ser inseridos nas fórmulas proposicionais de acordo com a seguinte "ordem preferencial":

i) em primeiro lugar: $\sim$.

ii) em segundo lugar: $\wedge$.

iii) em terceiro lugar: $\vee$.

iv) em quarto lugar: $\to$.

v) em quinto lugar: $\leftrightarrow$.

O conectivo ($\sim$) "abrange"[8] a proposição imediatamente à sua direita. Os demais conectivos "abrangem", respectivamente, as proposições de cada um dos seus lados.

Voltando ao exemplo anterior, devemos escrever a expressão $p \wedge q \vee r \to s$ da seguinte maneira:

$$[(p \wedge q) \vee r] \to s.$$

Dessa forma, a expressão é dita bem-formada, já que foi construída segundo as orientações das regras. Por outro lado, a expressão $[p \wedge (q \vee r)] \to s$ é dita mal-formada.

4. Omitir parênteses quando o mesmo conectivo é aplicado sucessivamente em uma mesma fórmula proposicional, interpretando que o agrupamento, em tal caso, ocorre da esquerda para a direita.

Por exemplo, a fórmula bem-formada da proposição $p \vee q \vee r$ é $(p \vee q) \vee r$.

Esse agrupamento, considerado da esquerda para direita, é necessário prioritariamente nos casos em que o conectivo considerado é o condicional "$\to$", já que, conforme a tabela-verdade a seguir, as proposições $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$ não são equivalentes.

[8] "A parte abrangida será o *escopo* do conectivo considerado" (HEGENBERG, 2012, p. 48), isto é, o *escopo* é o intervalo de abrangência do conectivo em análise.

Quadro 16 – Tabela-verdade da proposição $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$

p	q	r	$(p \to q)$	$(q \to r)$	$(p \to q) \to r$	$p \to (q \to r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor

Observe que, nas linhas 8 e 10 da tabela-verdade acima, os valores lógicos das proposições $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$ são divergentes e, portanto, tais proposições são ambíguas.

Exemplo 40. *De acordo com as regras discriminadas acima, insira os parênteses na proposição:* $S \leftrightarrow P \wedge Q \wedge \sim R \vee S \to T \vee Q \leftrightarrow R$.

Solução:

$S \leftrightarrow P \wedge Q \wedge \sim R \vee S \to T \vee Q \leftrightarrow R$	Proposição dada.
$S \leftrightarrow P \wedge Q \wedge (\sim R) \vee S \to T \vee Q \leftrightarrow R$	Aplicação em $(\sim)$
$S \leftrightarrow [(P \wedge Q) \wedge (\sim R)] \vee S \to T \vee Q \leftrightarrow R$	Aplicação em $(\wedge)$, 2 vezes.
$S \leftrightarrow \{[(P \wedge Q) \wedge (\sim R)] \vee S\} \to (T \vee Q) \leftrightarrow R$	Aplicação em $(\vee)$.
$S \leftrightarrow [\{[(P \wedge Q) \wedge (\sim R)] \vee S\} \to (T \vee Q)] \leftrightarrow R$	Aplicação em $(\to)$.
$\{S \leftrightarrow [\{[(P \wedge Q) \wedge (\sim R)] \vee S\} \to (T \vee Q)]\} \leftrightarrow R$	Aplicação em $(\leftrightarrow)$.

As regras discriminadas acima são essenciais em Ciência da Computação, já que a linguagem computacional é desenvolvida por meio de estruturas lógicas. No entanto, na linguagem natural (em nosso caso, a Língua Portuguesa), outros fatores influenciam o uso de parênteses na Lógica Matemática. Vejamos quais são esses fatores.

1. Sinais de Pontuação da linguagem natural: os sinais gráficos da Língua Portuguesa, utilizados em proposições escritas em linguagem natural, são representados por parênteses na linguagem simbólica.

Exemplo 41. *Traduzir para a linguagem simbólica a seguinte proposição: "se o polígono ABC tem três lados, então ABC é convexo, e se ABC não é convexo, então ABC não tem três lados".*

Solução:

1º Passo: identificar as proposições simples e os conectivos lógicos.

Inicialmente, vamos sublinhar os conectivos proposicionais, para fazer com que as proposições simples apareçam por contraste, às quais, então, atribuiremos símbolos.

Se o polígono ABC tem três lados, então ABC é convexo, e se ABC não é convexo, então ABC não tem três lados.

Os conectivos envolvidos são:

i) "Se ..., então ..." ($\rightarrow$), duas vezes.

ii) "...e..." ($\wedge$), uma vez.

As proposições simples são as seguintes:

p: O polígono ABC é convexo;

q: O polígono ABC tem três lados.

2º Passo: reescrever a proposição dada substituindo as proposições simples e os conectivos lógicos pelos seus respectivos símbolos.

$$q \rightarrow p \wedge \sim p \rightarrow \sim q.$$

3º Passo: pontue a proposição composta colocando parênteses em torno das fórmulas bem formadas[9]

Aqui colocaremos os parênteses na proposição composta, considerando os sinais de pontuação (nesse caso, as vírgulas) da Língua Portuguesa. Nesse sentido, a tradução final é:

$$(q \rightarrow p) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q).$$

Portanto, temos que a proposição dada é a conjunção de duas proposições condicionais (se ..., então). A colocação dos parênteses desambigua a simbolização final de interpretações alternativas, tais como $[q \rightarrow (p \wedge \sim p)] \rightarrow \sim q$ (colocação dos parênteses de acordo com as regras gerais).

2. Negação de proposições simples e compostas: Como visto na Seção 3.3, quando é incluído o conectivo ($\sim$) em uma proposição, significa que na linguagem natural será incluída a palavra "não" antes do verbo da proposição; daí, obtemos uma proposição que é a negação da primeira. Outra forma para obter a negação é pôr, antes das proposições originais, as expressões: "não é verdade que", "é falso que" ou "é mentira que".

Vejamos as diferenças dessas expressões em proposições simples e compostas:

i) **simples**: consideremos a proposição p: O número 19 é primo. Assim, podemos representar a proposição "$\sim p$" pelas seguintes expressões: "O número 19 não é primo",

[9] Uma expressão está bem-formada quando é construída segundo os ditames das regras. (HEGENBERG, 2012, p. 46).

onde a palavra "não" aparece antes da forma verbal "é", ou "Não é verdade que o número 19 é primo" ou "É falso que o número 19 é primo" ou "É mentira que o número 19 é primo", onde as expressões "não é verdade que", "é falso que" e "é mentira que" antecedem a proposição original.

ii) **composta**: consideremos as proposições p: O número 19 é primo, e a proposição q: Os lados de um triângulo equilátero são congruentes. Assim,

a) $\sim p \wedge q$: "O número 19 não é primo e os lados de um triângulo equilátero são congruentes". Note que, ao incluir a palavra "não" antes do verbo da proposição, a negação é aplicada somente à proposição mais próxima.

b) $\sim (p \wedge q)$: "Não é verdade que o número 19 é primo e os lados de um triângulo equilátero são congruentes". Note que, ao incluir a palavra "não é verdade" antes da proposição original, a negação é aplicada a toda a proposição.

Em resumo, no caso da palavra "não" antes do verbo da proposição original, o seu *escopo* abrange apenas a proposição imediatamente à sua direita, e, no caso das expressões "não é verdade que", "é falso que" e "é mentira que", o *escopo* abrange todas as proposições posteriores.

Exemplo 42. *Traduzir para a linguagem simbólica a seguinte proposição: "O polígono ABC é convexo ou não é convexo e tem três lados, e não é verdade que ABC tem três lados e não é convexo".*

Solução:

<u>1º Passo</u>: identificar as proposições simples e os conectivos lógicos.

Inicialmente, vamos sublinhar os conectivos proposicionais, para fazer com que as proposições simples apareçam por contraste, às quais, então, atribuiremos símbolos.

O polígono ABC é convexo <u>ou</u> <u>não</u> é convexo <u>e</u> tem três lados, <u>e</u> <u>não é verdade que</u> ABC tem três lados <u>e</u> <u>não</u> é convexo.

Os conectivos envolvidos são:

i) "não" ($\sim$), duas vezes e "não é verdade que", uma vez.

ii) "...ou..." ($\vee$), uma vez.

ii) "...e..." ($\wedge$), três vezes.

As proposições simples são as seguintes:

p: O polígono ABC é convexo;

q: O polígono ABC tem três lados.

<u>2º Passo</u>: reescrever a proposição dada substituindo as proposições simples e os

conectivos lógicos, pelos seus respectivos símbolos.

$$p \vee \sim p \wedge q \wedge \sim p \rightarrow \sim q.$$

3º Passo: pontue a proposição composta colocando parênteses em torno das fórmulas bem-formadas.

Aqui colocaremos os parênteses na proposição composta, considerando os sinais de pontuação (nesse caso, vírgulas) da Língua Portuguesa. Nesse sentido a tradução final é:

$$[p \vee (\sim p \wedge q)] \wedge \sim (p \rightarrow \sim q).$$

Portanto, temos que a proposição dada conjuga (e) uma proposição disjuntiva (ou) com uma condicional (se ..., então), sendo que a proposição disjuntiva, por sua vez, conjuga uma proposição simples com uma conjuntiva (e). A colocação dos parênteses desambigua a simbolização final de interpretações alternativas.

3. Enunciado dos problemas e/ou teoremas: Em alguns casos específicos, a regra preestabelecida deve ser ignorada, para que se obtenha o que o problema solicita. Por exemplo, a proposição $P \rightarrow Q \leftrightarrow R$, de acordo com as regras convencionais, deve ser lida como uma proposição bicondicional: $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$. No entanto, se o problema solicita que a proposição dada seja uma condicional, então a forma correta de representá-la é: $P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$.

Exemplo 43. *Simbolize a proposição P do exemplo anterior, de modo que se torne uma proposição contraválida (proposição logicamente falsa).*

Solução:

Proposição: o polígono ABC é convexo ou não é convexo e tem três lados e não é verdade que ABC tem três lados e não é convexo.

Conforme vimos anteriormente, podemos reescrever essa proposição da seguinte forma:

$$p \vee \sim p \wedge q \wedge \sim q \wedge \sim p,$$

sendo que

$$[p \vee (\sim p \wedge q)] \wedge (\sim q \wedge \sim p)$$

é uma proposição contraválida, conforme tabela-verdade a seguir.

Quadro 17 – Tabela-verdade da proposição $[p \vee (\sim p \wedge q)] \wedge (\sim q \wedge \sim p)$.

$[p$	$\vee$	$(\sim p$	$\wedge$	$q)]$	$\wedge$	$(\sim q$	$\wedge$	$\sim p)$
V	V	F	F	V	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	V	V
1	4	2	3	1	5	2	3	2

Fonte: Elaborada pelo autor

Em suma, os parênteses devem ser inseridos nas fórmulas proposicionais de acordo com a seguinte ordem:

1. insira os parênteses de tal forma que se obtenha o tipo de proposição solicitada pelo enunciado do problema e/ou teorema.
2. caso o enunciado não discrimine o tipo de proposição desejada, deve-se:
   i) em primeiro lugar, pontuar a proposição conforme os sinais gráficos da linguagem natural utilizada;
   ii) em segundo lugar, pontuar a proposição de acordo com as regras preestabelecidas.

3.7 Implicação lógica

Definição. Uma proposição P *implica logicamente* uma proposição Q se $P \to Q$ é uma tautologia.

Símbolo: $\Rightarrow$.

Notação: Indicamos que "P implica Q" do seguinte modo: $P \Rightarrow Q$.

Veja, no exemplo a seguir[10], os procedimentos necessários para determinar se uma proposição implica ou não outra proposição.

Exemplo 44. *Verifique se a proposição dada no Exemplo 41 implica logicamente a proposição dada no Exemplo 42.*

Solução:

1º Passo: reescrever as proposições na linguagem simbólica.

conforme vimos anteriormente, as proposições

[10] Exercício 2 de (CASTRUCCI, 1986, p. 36).

i) o polígono ABC é convexo ou não é convexo e tem três lados, e não é verdade que ABC tem três lados e não é convexo.

ii) se o polígono ABC tem três lados, então ABC é convexo, e se ABC não é convexo, então ABC não tem três lados.

podem de reescritas de acordo com as regras de boa formação, do seguinte modo:

i) $[p \vee (\sim p \wedge q)] \wedge \sim (q \wedge \sim p)$.

ii) $(q \rightarrow p) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$.

Dessa forma, queremos demonstrar o seguinte:

$$[p \vee (\sim p \wedge q)] \wedge \sim (q \wedge \sim p) \Rightarrow (q \rightarrow p) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q).$$

2º Passo: construir a tabela-verdade de (i).

Quadro 18 – Tabela-verdade da proposição $[p \vee (\sim p \wedge q)] \wedge \sim (q \wedge \sim p)$.

$[p$	$\vee$	$(\sim p$	$\wedge$	$q)]$	$\wedge$	$\sim$	$(q$	$\wedge$	$\sim p)$
V	V	F	F	V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V	F	F	V
1	4	2	3	1	5	4	1	3	2

Fonte: Elaborada pelo autor

4º Passo: construir a tabela-verdade de (ii) usando os mesmos valores de variáveis para as afirmações que formam a proposição (i).

Quadro 19 – Tabela-verdade da proposição $(q \rightarrow p) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$.

$(q$	$\rightarrow$	$p)$	$\wedge$	$(\sim p$	$\rightarrow$	$\sim q)$
V	V	V	V	F	V	F
F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	V	V
1	2	1	4	2	3	2

Fonte: Elaborada pelo autor

5º Passo: construir a tabela-verdade de $(i) \rightarrow (ii)$.

Quadro 20 – Tabela-verdade da proposição $P(p,q) \to Q(p,q)$

(i)	$\to$	(ii)
V	V	V
V	V	V
F	V	F
F	V	F
1	V	1

Fonte: Elaborada pelo autor

Portanto, como a proposição $(i) \to (ii)$ é tautológica, segue-se, pela definição de implicação lógica, que a sentença $[p \vee (\sim p \wedge q)] \wedge \sim (q \wedge \sim p) \Rightarrow (q \to p) \wedge (\sim p \to \sim q)$ é verdadeira.

3.8 Equivalência lógica

Definição. Uma proposição P é *logicamente equivalente* a uma proposição Q se os valores lógicos obtidos em cada linha da última coluna das respectivas tabelas-verdade são idênticos.

Símbolo: $\Leftrightarrow$.

Notação: Indicamos que "P é equivalente a Q" do seguinte modo: $P \Leftrightarrow Q$.

Veja, no exemplo a seguir[11], os procedimentos necessários para determinar se duas ou mais proposições são equivalentes.

Exemplo 45. *Consideremos as seguintes proposições:*

p: o quadrado é retângulo e

q: o quadrado é paralelogramo.

Tomemos:

A: se o quadrado não é retângulo, então ele não é paralelogramo, e se ele é retângulo, então é paralelogramo.

B: não é verdade que: o quadrado é retângulo e não é paralelogramo ou o quadrado não é retângulo e é paralelogramo.

Demonstre que $A \Leftrightarrow B$, usando as propriedades.

Solução:

1º Passo: reescrever as proposições na linguagem simbólica.

[11] Exercício 2 de (CASTRUCCI, 1986, p. 42).

de acordo com as regras de boa formação, as proposições A e B podem ser reescritas da seguinte forma:

$A(p,q) = (\sim p \rightarrow \sim q) \wedge (p \rightarrow q)$.

$B(p,q) = \sim [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)]$.

Dessa forma, queremos demonstrar o seguinte:

$$A(p,q) \Leftrightarrow B(p,q).$$

2º Passo: construir a tabela-verdade de $A(p,q)$.

Quadro 21 – Tabela-verdade da proposição $A(p,q) = (\sim p \rightarrow \sim q) \wedge (p \rightarrow q)$.

$(\sim p$	$\rightarrow$	$\sim q)$	$\wedge$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$
F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V
V	V	V	V	F	V	F
2	3	2	4	1	2	1

Fonte: Elaborada pelo autor

3º Passo: construir a tabela-verdade de $B(p,q)$ usando os mesmos valores de variáveis para as afirmações que formam a proposição $A(p,q)$.

Quadro 22 – Tabela-verdade da proposição $B(p,q) = \sim [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)]$.

$\sim$	$[(p$	$\wedge$	$\sim q)$	$\vee$	$(\sim p$	$\wedge$	$q)]$
V	V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F	F
F	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
5	1	3	2	4	2	3	1

Fonte: Elaborada pelo autor

4º Passo: comparar os valores lógicos em cada linha da coluna resultante de $A(p,q)$ e $B(p,q)$.

Note que os valores lógicos em cada linha da coluna resultante das tabelas-verdade das proposições $A(p,q)$ e $B(p,q)$ são idênticos. Portanto, pela definição de equivalência lógica, temos que $A \Leftrightarrow B$.

Nota. Os símbolos $\Rightarrow$ e $\rightarrow$, apesar de semelhantes, não têm a mesma funcionalidade, assim como os símbolos $\Leftrightarrow$ e $\leftrightarrow$. Enquanto os símbolos $\leftrightarrow$ e $\rightarrow$ são operadores lógicos usados para a formação de proposições compostas, os símbolos $\Leftrightarrow$ e $\Rightarrow$ são sinais que expressam relação entre proposições.

3.9 Validade de um argumento

Um argumento, como mencionamos na Seção 2.2, é um conjunto (não vazio) finito de proposições, no qual as primeiras proposições $P_i s (1 \leq i \leq n-1)$ são classificadas como premissas, e a última proposição P_n, como conclusão.

Um argumento é denominado válido se as primeiras proposições (premissas) $P_i s (1 \leq i \leq n-1)$ implicam a última proposição P_n (conclusão), ou seja:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_{n-1} \Rightarrow P_n.$$

Segundo Alencar Filho (2011, p. 88):

> A validade de um argumento depende exclusivamente da relação existente entre as premissas e a conclusão. Portanto, afirmar que um dado argumento é **válido** significa afirmar que as premissas estão de tal modo relacionadas com a conclusão que não é possível ter a conclusão falsa se as premissas são verdadeiras.

Nesse sentido, podemos concluir que não existem argumentos válidos cujas premissas são verdadeiras e cuja conclusão é falsa. De outro modo, um argumento é não válido quando não ocorre a implicação, ou seja:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_{n-1} \nRightarrow P_n.$$

Simbolicamente, um argumento que contêm premissas $P_i s (1 \leq i \leq n)$ e conclusão Q é representado por

$$P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$$

o qual é válido se e somente se a condicional:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$$

é tautológica.

Podemos verificar a validade de um argumento por vários métodos, dentre os quais o método das tabelas-verdade e o uso das regras de inferência, que, junto com as implicações e equivalências, constituem a base do assim denominado método dedutivo.

3.9.1 Validade mediante tabelas-verdade

O método das tabelas-verdade é o mais simples dos métodos de verificação da validade de um argumento. No entanto, pode ser um trabalho cansativo, no caso em que o número de proposições seja maior que 3.

Em geral, para a verificação da validade de uma argumento por meio desse método, temos que

i) construir a tabela-verdade do argumento $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$; e

ii) depois verificar se $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_{n-1} \Rightarrow P_n$, isto é, se a proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ é tautológica.

Veja, no exemplo a seguir, os procedimentos necessários para determinar a validade de um argumento por meio do método das tabelas-verdade.

Exemplo 46. *Dado o argumento:* ***"Se, em um triângulo, o quadrado do maior lado é a soma dos quadrados dos outros dois, então esse triângulo é um triângulo retângulo"****. Verifique, por meio do método das tabelas-verdade, se esse argumento é válido.*

Solução:

1º Passo: escrever, na linguagem simbólica, as proposições que constituem o argumento dado.

Consideremos

p: O quadrado do maior lado do triângulo dado é a soma dos quadrados dos outros dois;

q: O triângulo dado é um triângulo retângulo.

Assim, esse argumento tem a seguinte estrutura:

$$p \rightarrow q.$$

2º Passo: montar o argumento.

Queremos mostrar que, se p é verdade, então q deve ser verdade, ou seja, o argumento:

$$p \rightarrow q,\ p \vdash q$$

é válido.

De outro modo: se o argumento: "Se, em um triângulo, o quadrado do maior lado é a soma dos utros dois, então esse triângulo é um triângulo retângulo" é válido.

3º Passo: construir a tabela-verdade do argumento $((p \to q) \wedge p) \to q$ e depois verificar se $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$.

Quadro 23 – Tabela-verdade da proposição $((p \to q) \wedge p) \to q$

$((p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$p)$	$\to$	q
V	V	V	V	V	$\boldsymbol{V}$	V
V	F	F	F	V	$\boldsymbol{V}$	F
F	V	V	F	F	$\boldsymbol{V}$	V
F	V	F	F	F	$\boldsymbol{V}$	F
1	2	1	3	1	***4***	1

Fonte: Elaborada pelo autor

Portanto, como a proposição $((p \to q) \wedge p) \to q$ é tautológica, temos que $p \to q \wedge p \Rightarrow q$. Desse modo, temos que o argumento $p \to q,\ p \vdash q$ é válido. Aliás, a forma desse argumento define a regra de inferência denominada "*Modus Ponens*", da qual trataremos, juntamente com outras formas de inferência, na próxima seção.

3.9.2 Validade mediante regras de inferências

As regras de inferência constituem um rol de argumentos válidos fundamentais de uso corrente na Lógica Proposicional, cuja utilidade é tornar possível o processo de dedução lógica.

Na tabela a seguir, apresentamos os argumentos válidos fundamentais.

Quadro 24 – Argumentos válidos fundamentais

Adição (i) $p \vdash p \vee q$ ou (ii) $q \vdash q \vee p$	***Modus Tollens*** $p \to q,\ \sim q \vdash \sim p$
Simplificação (i) $p \wedge q \vdash p$ ou (ii) $p \wedge q \vdash q$	**Silogismo disjuntivo** (i) $p \vee q,\ \sim p \vdash q$ ou (ii) $p \vee q,\ \sim q \vdash p$
Conjunção (i) $p,\ q \vdash p \wedge q$ ou (ii) $p,\ q \vdash q \wedge p$	**Silogismo hipotético** $p \to q,\ q \to r \vdash p \to r$
Absorção $p \to q \vdash p \to (p \wedge q)$	**Dilema construtivo** $p \to q,\ r \to s,\ p \vee r \vdash q \vee s$
Dilema destrutivo $p \to q,\ r \to s,\ \sim q \vee \sim s \vdash \sim p \vee \sim r$	***Modus ponens*** $p \to q,\ p \vdash q$

Fonte: Alencar Filho (2011)

Além desses, Castrucci (1986) apresenta outros quatro tipos de regras de inferência:

$i)$ Regra da contraposição:

$$p \to q \vdash \sim q \to \sim p.$$

ii) Regra de exportação:

$$p \wedge q \to r \vdash p \to (q \to r).$$

e

$$p \to (q \to r) \vdash p \wedge q \to r.$$

iii) Regra de inferência por eliminação:

$$p \to q_1 \vee q_2 \vee ... \vee q_{n-1} \ \vee q_n, \sim q_1, ..., \sim q_{n-1} \vdash p \to q_n.$$

iv) Regra de inferência por casos:

$$p_1 \to q,\ p_2 \to q,\ ...,\ p_n \to q \vdash p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \to q.$$

Veja, a seguir, as demonstrações desses argumentos fundamentais por meio do "método da dedução" ou "método de atribuição de valores lógicos", isto é, partindo da verdade das premissas, concluímos a verdade da conclusão.

3.9.2.1 Regra da Adição (RAd).

$$p \vdash p \vee q \text{ ou } q \vdash q \vee p.$$

Demonstração. Temos que (p) é a premissa do argumento $p \vdash p \vee q$, de modo que $\mathbb{V}(p) = V$.

Ao atribuir o valor lógico de $\mathbb{V}(p) = V$ à proposição $(p \vee q)$, deduzimos que $\mathbb{V}(p \vee q) = V$, já que, pela definição da disjunção (inclusiva), quando uma das proposições simples, que formam a proposição composta dada, é verdadeira, a conclusão também é verdadeira.

Resumidamente, temos

$$\begin{array}{lll} V & p & \text{premissa} \\ \hline V & \therefore p \vee q & \text{conclusão} \end{array}$$

De modo análogo, pode-se demonstrar que o argumento $q \vdash q \vee p$ é válido. $\square$

3.9.2.2 Regra da Simplificação (RS).

$$p \wedge q \vdash p, \text{ ou } p \wedge q \vdash q.$$

Demonstração.

Temos que $(p \wedge q)$ é a premissa do argumento $p \wedge q \vdash p$, de modo que $\mathbb{V}(p \wedge q) = V$.

Neste caso, temos o resultado imediato, pois, de acordo com a definição de conjunção, se a proposição composta dada é verdadeira, ambas as proposições simples também são verdadeiras. Portanto, em particular, $\mathbb{V}(p) = V$.

Resumidamente, temos:

$$\begin{array}{lll} V & p \wedge q & \text{premissa} \\ \hline V & \therefore p & \text{conclusão} \end{array}$$

De modo análogo, pode-se demonstrar que o argumento $p \wedge q \vdash q$ é válido. $\square$

3.9.2.3 Regra da Conjunção (RC).

$$p,\ q \vdash p \wedge q \text{ ou } p,\ q \vdash q \wedge p.$$

Demonstração.

Temos que (p) e (q) são as premissas do argumento $p,\ q \vdash p \wedge q$, de modo que $(*)$ $\mathbb{V}(p) = V$ e $\mathbb{V}(q) = V$.

Neste caso, temos o resultado novamente imediato, pois, de acordo com a definição de conjunção, se ambas as proposições simples são verdadeiras, então o valor lógico da proposição composta dada também é verdadeiro. Portanto, como $\mathbb{V}(p) = V$ e $\mathbb{V}(q) = V$, segue que $\mathbb{V}(p \wedge q) = V$.

Resumidamente, temos:

$$\begin{array}{lll} V & p & \text{premissa} \\ V & q & \text{premissa} \\ \hline V & \therefore p \wedge q & \text{conclusão} \end{array}$$

De modo análogo, pode-se demonstrar que o argumento $p,\ q \vdash q \wedge p$ é válido. $\square$

3.9.2.4 Regra da Absorção (RAb).

$$p \to q \vdash p \to (p \wedge q)$$

Demonstração.

Temos que $(p \to q)$ é a premissa do argumento $p \to q \vdash p \to (p \wedge q)$, de modo que $\mathbb{V}(p \to q) = V$.

Supondo que $\mathbb{V}(p \to (p \wedge q)) = F$, então, pela definição de condicional, temos que $\mathbb{V}(p) = V$ e $\mathbb{V}(p \wedge q) = F$. Ao atribuir $\mathbb{V}(p) = V$ à $\mathbb{V}(p \wedge q) = F$, concluímos, pela definição de conjunção, que $\mathbb{V}(q) = F$. Logo, atribuindo $\mathbb{V}(p) = V$ e $\mathbb{V}(q) = F$ à $(p \to q)$, temos, novamente pela definição de condicional, que $\mathbb{V}(p \to q) = F$, o que é um absurdo. Portanto, $\mathbb{V}(p \to (p \wedge q)) = V$.

Resumidamente, temos:

$$\begin{array}{lll} V & p \to q & \text{premissa} \\ \hline V & \therefore p \to (p \wedge q) & \text{conclusão} \end{array}$$

□

3.9.2.5 Regra do Dilema Destrutivo (RDD).

$$p \to q,\ r \to s,\ \sim q \vee \sim s \vdash \sim p \wedge \sim r.$$

Demonstração.

Temos que $(p \to q)$, $(r \to s)$ e $(\sim q \vee \sim s)$ são as premissas do argumento $p \to q$, $r \to s$, $\sim q \vee \sim s \vdash \sim p \vee \sim r$, de modo que:

i) $\mathbb{V}(p \to q) = V$;

ii) $\mathbb{V}(r \to s) = V$;

iii) $\mathbb{V}(\sim q \vee \sim s) = V$.

Supondo que $\mathbb{V}(\sim p \vee \sim r) = F$, então, pela definição da disjunção (inclusiva), temos que $\mathbb{V}(\sim p) = F$ e $\mathbb{V}(\sim r) = F$. Logo, $\mathbb{V}(p) = V$ e $\mathbb{V}(r) = V$. Atribuindo $\mathbb{V}(p) = V$ em *i)*, deduzimos que $\mathbb{V}(q) = V$. Semelhantemente, ao atribuir $\mathbb{V}(r) = V$ em *ii)*, obtemos $\mathbb{V}(s) = V$. Assim, $\mathbb{V}(\sim q) = F$ e $\mathbb{V}(\sim s) = F$, o que é um absurdo, pois, por *iii)*, $\mathbb{V}(\sim q \vee \sim s) = V$. Portanto, $\mathbb{V}(\sim p \vee \sim r) = V$.

Resumidamente, temos:

$$\begin{array}{lll} V & p \to q & \text{premissa} \\ V & r \to s & \text{premissa} \\ V & \sim q \vee \sim s & \text{premissa} \\ \hline V & \therefore \sim p \vee \sim r & \text{conclusão} \end{array}$$

3.9.2.6 Regra *Modus ponens* (RMP).

$$p \to q,\, p \vdash q.$$

Demonstração.

Temos que $(p \to q)$ e (p) são as premissas do argumento $p \to q,\, p \vdash q$, de modo que:

i) $\mathbb{V}(p \to q) = V$;

ii) $\mathbb{V}(p) = V$.

De *ii)* temos que $\mathbb{V}(p) = V$. Logo, ao substituir *ii)* em *i)*, deduzimos que $\mathbb{V}(q) = V$, já que, pela definição da condicional, quando a primeira proposição simples é verdadeira e a conclusão da proposição composta dada também é verdadeira, temos que a segunda proposição simples é também verdadeira.

Resumidamente, temos:

V	$p \to q$	premissa
V	p	premissa
V	$\therefore q$	conclusão

□

3.9.2.7 Regra do Silogismo Disjuntivo (RSD).

$$p \vee q,\, \sim p \vdash q \text{ ou } p \vee q,\, \sim q \vdash p.$$

Demonstração.

Temos que $(p \vee q)$ e $(\sim p)$ são as premissas do argumento $\vee q,\, \sim p \vdash q$, de modo que:

i) $\mathbb{V}(p \vee q) = V$;

ii) $\mathbb{V}(\sim p) = V$.

De *ii)* temos que $\mathbb{V}(\sim p) = V$. Logo, $\mathbb{V}(p) = F$. Substituindo $\mathbb{V}(p) = F$ em *i)*, concluímos, pela definição de disjunção (inclusiva), que $\mathbb{V}(q) = V$.

Resumidamente, temos:

V	$p \vee q$	premissa
V	$\sim p$	premissa
V	$\therefore q$	conclusão

De modo análogo, pode-se demonstrar que o argumento $p \vee q$, $\sim q \vdash p$ é válido. □

3.9.2.8 Regra do Silogismo Hipotético (RSH).

$$p \to q,\, q \to r \vdash p \to r.$$

Demonstração.

Temos que $(p \to q)$ e $(q \to r)$ são as premissas do argumento $p \to q$, $q \to r \vdash p \to r$, de modo que:

i) $\mathbb{V}(p \to q) = V$;

ii) $\mathbb{V}(q \to r) = V$.

Supondo que $\mathbb{V}(p \to r) = F$, então, pela definição da condicional, temos que $\mathbb{V}(p) = V$ e $\mathbb{V}(r) = F$. Substituindo $\mathbb{V}(p) = V$ em *i*), deduzimos que $\mathbb{V}(q) = V$ e, ao substituir $\mathbb{V}(r) = F$ em $\mathbb{V}(q \to r) = V$, deduzimos que $\mathbb{V}(q) = F$, o que é uma contradição, já que, pelo princípio da não contradição, uma proposição não pode ser, ao mesmo tempo, verdadeira e falsa. Portanto, $\mathbb{V}(p \to r) = V$.

Resumidamente, temos:

V	$q \to r$	premissa
V	$p \to q$	premissa
V	$\therefore p \to r$	conclusão

□

3.9.2.9 Regra do Dilema Construtivo (RDC).

$$p \to q,\, r \to s,\, p \vee r \vdash q \vee s.$$

Demonstração.

Temos que $(p \to q)$, $(r \to s)$ e $(p \vee r)$ são as premissas do argumento $p \to q$, $r \to s$, $p \vee r \vdash q \vee s$, de modo que:

i) $\mathbb{V}(p \rightarrow q) = V$;

ii) $\mathbb{V}(r \rightarrow s) = V$;

iii) $\mathbb{V}(p \vee r) = V$.

Supondo que $\mathbb{V}(q \vee s) = F$, então, pela definição da disjunção (inclusiva), temos que $\mathbb{V}(q) = F$ e $\mathbb{V}(s) = F$. Atribuindo $\mathbb{V}(q) = V$ em *i*), deduzimos que $\mathbb{V}(p) = F$. Semelhantemente, ao atribuir $\mathbb{V}(s) = F$ em *ii*), obtemos $\mathbb{V}(r) = F$, o que é um absurdo, pois $\mathbb{V}(p \vee r) = V$. Portanto, $\mathbb{V}(q \vee s) = V$.

Resumidamente, temos:

V	$p \rightarrow q$	premissa
V	$r \rightarrow s$	premissa
V	$p \vee r$	premissa
V	$\therefore q \vee s$	conclusão

$\square$

3.9.2.10 Regra *Modus tollens (RMT).*

$$p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p.$$

Demonstração.

Temos que $(p \rightarrow q)$ e $(\sim q)$ são as premissas do argumento $p \rightarrow q$, $p \vdash q$, de modo que:

i) $\mathbb{V}(p \rightarrow q) = V$;

ii) $\mathbb{V}(\sim q) = V$.

De *ii*) temos que $\mathbb{V}(\sim q) = V$. Logo, $\mathbb{V}(q) = F$. Atribuindo $\mathbb{V}(q) = F$ em *i*), deduzimos que $\mathbb{V}(p) = F$, já que, pela definição da condicional, quando a segunda proposição simples é falsa e a conclusão da proposição composta dada é verdadeira, a primeira proposição simples também e falsa. Portanto, como $\mathbb{V}(p) = F$, segue que $\mathbb{V}(\sim p) = V$.

Resumidamente, temos:

V	$p \rightarrow q$	premissa
V	$\sim q$	premissa
V	$\therefore \sim p$	conclusão

$\square$

3.9.2.11 Regra da Contraposição (RCo).

$$p \to q \vdash \sim q \to \sim p.$$

Demonstração.

Temos que $(p \to q)$ é a premissa do argumento $p \to q \vdash \sim q \to \sim p$, de modo que

i) $\mathbb{V}(p \to q) = V$.

Supondo que $\mathbb{V}(\sim q \to \sim p) = F$, então, pela definição da condicional, temos que $\mathbb{V}(\sim q) = V$ e $\mathbb{V}(\sim p) = F$. Logo, $\mathbb{V}(p) = V$ e $\mathbb{V}(q) = F$, o que é um absurdo, já que $\mathbb{V}(p \to q) = V$, por *i*). Portanto, $\mathbb{V}(\sim q \to \sim p) = V$.

Resumidamente, temos:

$$\begin{array}{lll} V & p \to q & \text{premissa} \\ \hline V & \therefore \sim q \to \sim p & \text{conclusão} \end{array}$$

$\square$

3.9.2.12 Regra de Exportação (RE).

$$p \wedge q \to r \vdash p \to (q \to r) \text{ e } p \to (q \to r) \vdash p \wedge q \to r.$$

Demonstração.

<u>Caso 1</u>: $p \wedge q \to r \vdash p \to (q \to r)$.

Temos que $(p \wedge q \to r)$ é a premissa do argumento $p \wedge q \to r \vdash p \to (q \to r)$, de modo que:

i) $\mathbb{V}(p \wedge q \to r) = V$.

Supondo que $\mathbb{V}(p \to (q \to r)) = F$, então, pela definição da condicional, temos que $\mathbb{V}(p) = V$ e $\mathbb{V}(q \to r) = F$. Aplicando novamente a definição da condicional em $\mathbb{V}(q \to r) = F$, obtemos $\mathbb{V}(q) = V$ e $\mathbb{V}(r) = F$. Portanto, em síntese, temos que $\mathbb{V}(p) = V$, $\mathbb{V}(q) = V$ e $\mathbb{V}(r) = F$, o que é um absurdo, já que $\mathbb{V}(p \wedge q \to r) = V$, por *i*).

Resumidamente, temos:

$$\begin{array}{lll} V & p \wedge q \to r & \text{premissa} \\ \hline V & \therefore p \to (q \to r) & \text{conclusão} \end{array}$$

<u>Caso 2</u>: $p \to (q \to r) \vdash p \wedge q \to r$.

Temos que $(p \to (q \to r))$ é a premissa do argumento $p \to (q \to r) \vdash p \wedge q \to r$, de modo que:

i) $\mathbb{V}(p \to (q \to r)) = V$.

Supondo que $\mathbb{V}(p \wedge q \to r) = F$, então, pelas definições da condicional e da conjunção, temos que $\mathbb{V}(p) = V$, $\mathbb{V}(q) = V$ e $\mathbb{V}(r) = F$, o que é um absurdo, já que $\mathbb{V}(p \to (q \to r)) = V$, por *i)*.

V	$p \to (q \to r)$	premissa
V	$\therefore p \wedge q \to r$	conclusão

$\square$

<u>Observação.</u> Note que, como os argumentos $p \wedge q \to r \vdash p \to (q \to r)$ e $p \to (q \to r) \vdash p \wedge q \to r$ são válidos, temos, pela definição de validade de um argumento, que

$$p \wedge q \to r \Rightarrow p \to (q \to r)$$

e

$$p \to (q \to r) \Rightarrow p \wedge q \to r.$$

Portanto, pela definição de equivalência lógica, segue que

$$p \wedge q \to r \Leftrightarrow p \to (q \to r).$$

3.9.2.13 Regra de Inferência por Eliminação (RIE).

$$p \to q_1 \vee q_2 \vee ... \vee q_{n-1} \vee q_n, \sim q_1, ..., \sim q_{n-1} \vdash p \to q_n$$

Demonstração.

Temos que $(p \to q_1 \vee q_2 \vee ... \vee q_{n-1} \vee q_n)$, $(\sim q_1)$, $(...)$, e $(\sim q_{n-1})$ são as premissas do argumento $p \to q_1 \vee q_2 \vee ... \vee q_{n-1} \vee q_n, \sim q_1, ..., \sim q_{n-1} \vdash p \to q_n$, de modo que

1) $\mathbb{V}(p \to q_1 \vee q_2 \vee ... \vee q_{n-1} \vee q_n) = V$;

2) $\mathbb{V}(\sim q_1) = V$;

3) $\mathbb{V}(\sim q_2) = V$;

$\vdots$

$n)$ $\mathbb{V}(\sim q_{n-1}) = V$.

Supondo que $\mathbb{V}(p \to q_n) = F$, então, pela definição da condicional, $\mathbb{V}(p) = V$ e $\mathbb{V}(q_n) = F$. Pelas premissas 2) a n), concluimos que $\mathbb{V}(q_1) = F$, ..., $\mathbb{V}(q_{n-1}) = F$. Assim, pela definição da disjunção (inclusiva), temos que $\mathbb{V}(q_1 \vee q_2 \vee ..., \vee q_{n-1} \vee q_n) = F$. Substituindo esse valor em 1), concluímos que $\mathbb{V}(p) = F$, o que é uma contradição, já que, pelo princípio da não contradição, uma proposição não pode ser, ao mesmo tempo, verdadeira e falsa. Portanto, $\mathbb{V}(p \to q_n) = V$.

Resumidamente, temos

$$
\begin{array}{lll}
V & p \to q_1 \vee q_2 \vee ... \vee q_{n-1} \vee q_n & \text{premissa} \\
V & \sim q_1 & \text{premissa} \\
V & \sim q_2 & \text{premissa} \\
\vdots & \quad \vdots & \quad \vdots \\
V & \sim q_{n-1} & \text{premissa} \\
\hline
V & \therefore p \to q_n & \text{conclusão}
\end{array}
$$

□

3.9.2.14 Regra de Inferência por Casos (RIC).

$$p_1 \to q,\ p_2 \to q,\ ...,\ p_n \to q \vdash p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \to q.$$

Demonstração.

Temos que $(p_1 \to q)$, $(p_2 \to q)$, $(...)$ e $(p_n \to q)$ são as premissas do argumento $p_1 \to q,\ p_2 \to q,\ ...,\ p_n \to q \vdash p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \to q$, de modo que

$i)$ $\mathbb{V}(p_1 \to q) = V$;

$ii)$ $\mathbb{V}(p_2 \to q) = V$;

$\vdots$

$n)$ $\mathbb{V}(p_n \to q) = V$.

Supondo que $\mathbb{V}(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \to q) = F$, temos, pela definição da condicional, $\mathbb{V}(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) = V$ e $\mathbb{V}(q) = F$. De $\mathbb{V}(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) = V$ concluímos, pela definição da conjunção, que $\mathbb{V}(p_1) = V$, $\mathbb{V}(p_2) = V$, ..., $\mathbb{V}(p_n) = V$, o que é um absurdo, já que $\mathbb{V}(q) = F$, $\mathbb{V}(p_1 \to q) = V$, ..., e $\mathbb{V}(p_n \to q) = V$. Portanto, $\mathbb{V}(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \to q) = V$.

Resumidamente, temos

V	$p_1 \rightarrow q$	premissa
V	$p_2 \rightarrow q$	premissa
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
V	$p_n \rightarrow q$	premissa
V	$\therefore p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \rightarrow q$	conclusão

$\square$

Nos exemplos a seguir, verifique a validade dos argumentos dados, por meio das regras de inferência.

Exemplo 47. $x = \frac{5\pi}{6} \rightarrow sen(x) = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$, $sen(x) = \frac{1}{2} \rightarrow cosec(x) = 2$; $x = \frac{\pi}{6} \rightarrow sen(x) = \frac{1}{2} \vdash sen(x) = \frac{1}{2} \vee cosec(x) = 2$.

Solução:

1º Passo: escrever, na linguagem simbólica, o argumento dado.

Consideremos
p: $x = \frac{5\pi}{6}$;
q: $sen(x) = \frac{1}{2}$;
r: $x = \frac{\pi}{6}$;
s: $cosec(x) = 2$.

Assim, desejamos demonstrar que o argumento

$$p \rightarrow q,\ r \vee p,\ q \rightarrow s,\ r \rightarrow q \vdash q \vee s,$$

é válido.

2º Passo: conferir a validade do argumento, pelo método da dedução, usando as regras de inferência.

1	$p \rightarrow q$	P
2	$r \vee p$	P
3	$q \rightarrow s$	P
4	$r \rightarrow q$	P
5	$p \rightarrow s$	1, 3 - RSH
6	$\therefore q \vee s$	2, 4, 5 - RDC

Portanto, o argumento $p \rightarrow q,\ r \vee p,\ q \rightarrow s,\ r \rightarrow q \vdash q \vee s$ é válido. $\square$

Exemplo 48. $sen(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \rightarrow cosec(\frac{\pi}{6}) = 2,\ sen(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2},\ cosec(\frac{\pi}{6}) = 2 \rightarrow tg(\frac{\pi}{6}) = \frac{29}{50} \vdash tg(\frac{\pi}{6}) = \frac{29}{50} \vee cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

Solução:

<u>1º Passo</u>: escrever, na linguagem simbólica, o argumento dado.

Consideremos

[12] p: $sen(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ ou $cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$;

q: $cosec(\frac{\pi}{6}) = 2$;

r: $tg(\frac{\pi}{6}) = \frac{29}{50}$.

Assim, desejamos demonstrar que o argumento

$$p \rightarrow q,\ p,\ q \rightarrow r \vdash r \vee p,$$

é válido.

<u>2º Passo</u>: conferir a validade do argumento, pelo método da dedução, usando as regras de inferência.

1	$p \rightarrow q$	P
2	p	P
3	$q \rightarrow r$	P
4	q	1, 2 - RMP
5	r	3, 4 - RMP
6	$\therefore r \vee p$	5 - RAd

Portanto, o argumento $p \rightarrow q,\ p,\ q \rightarrow r \vdash r \vee p$ é válido. $\square$

Em suma: a Lógica Matemática apresentada é essencial, em particular, para o processo de demonstração de teoremas, como foi mostrados nesses exemplos. No próximo capítulo, descreveremos esse entrelaçamento entre a Lógica e a Matemática, com mais detalhes, com foco nas aplicações geométricas.

[12] Em Trigonometria, se dois ângulos são complementares, então o seno de um é igual ao cosseno do outro. Desse modo, $sen(\frac{\pi}{6}) = cos(\frac{\pi}{3})$ e, portanto, eles representam a mesma proposição.

4 LÓGICA GEOMÉTRICA

Que é Lógica Geométrica? Que diferencia um raciocínio indutivo de um dedutivo? Como são estruturados os teoremas geométricos? Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos fundamentais sobre Lógica Matemática aplicados à Geometria Plana, com o objetivo de responder a essas e a outras indagações pertinentes.

4.1 Noções introdutórias

Segundo Boyer (1974), etimologicamente a palavra Geometria origina-se do Grego: "geos = terra" e "metria = medida". Ela deriva de uma das aplicações que motivou seu nascimento: a agrimensura dos campos do Egito, para que cada camponês pudesse colher suas plantações, depois das inundações do rio Nilo.

Para Moise e Downs (1979), se pararmos para pensar, nos daremos conta de que possuímos muitos conhecimentos geométricos. Por exemplo, sabemos como determinar as áreas de várias figuras simples e conhecemos a relação pitagórica para os triângulos retângulos. Algumas dessas noções são tão evidentes que nunca paramos para analisá-las se realmente são verdadeiras, por exemplo, a definição de retas concorrentes: "Duas retas são concorrentes se elas têm um único ponto em comum" (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 4). Já outras, como as relações pitagóricas, não são tão evidentes.

Desse modo, neste capítulo, trataremos das principais contribuições da Lógica Matemática no campo da Geometria Plana, sob as condições que desejamos analisar.

4.2 Processos de raciocínios em Geometria Plana

O conhecimento é adquirido de duas maneiras: "de modo direto (por meio dos órgãos dos sentidos) ou de modo indireto (relacionando-se alguns resultados a outros, por força de uma atividade mental)" (HEGENBERG, 2012, p. 3). O modo direito é conhecido na Lógica como *processo de raciocínio indutivo*, e o modo indireto como *processo de raciocínio dedutivo*. Temos como objetivo, nesta seção, apresentar esses dois processos em Geometria Plana.

4.2.1 Processo de raciocínio indutivo

A Geometria, como mencionamos anteriormente, começa com a experiência, e sua primeira motivação têm sido as necessidades práticas. Dessa forma, temos que grande parte do conhecimento geométrico foi construído de forma empírica, até mesmo grosseira, até sua formalização.

Os conceitos e definições resultantes do processo indutivo em Geometria são conhecidos como *noções primitivas* e *postulados* (ou *axiomas*), respectivamente . Eles não necessitam de demonstrações, sendo a sua origem a experiência e a observação.

O processo de raciocínio indutivo é dividido em dois passos:

Quadro 25 – Processo de raciocínio indutivo

Passos	**Descrições**
1	Observa-se que uma propriedade é verdadeira para cada caso verificado.
2	Como a propriedade é verdadeira em todos os casos verificados, conclui-se que é verdadeira para todos os outros casos. Dessa forma, estabelece-se uma generalização.

Fonte: Clemens, O'daffer e Cooney (1998)

Assim, o processo indutivo é o raciocínio segundo o qual, após observar que uma propriedade é verdadeira em diversos casos particulares, conclui-se que ela é verdadeira para todos os outros casos. Em suma: o raciocínio indutivo parte de casos particulares para o geral.

O exemplo a seguir mostra um aplicação do processo de raciocínio indutivo em Geometria.

Exemplo 49. *A pizzaria Novo Horizonte vende quatro tipos de pizza:*

- pizza pequena: duas fatias;

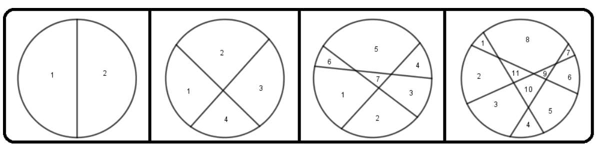
- pizza média: quatro fatias;

- pizza grande: sete fatias;

- pizza big: onze fatias;

As fatias são cortadas de forma que cada corte subsequente intersecta todos os cortes anteriores, conforme mostra Figura 12 a seguir.

Figura 11 – Pizza de Steiner



Fonte: Morgado e Carvalho (2015)

Dessa forma, qual é o maior número de fatias em que se pode dividir uma pizza com n cortes retos [13]*?*

Solução:

Os tipos de pizza que apresentamos na Figura 12 ilustram as situações em que o número de cortes varia de 1 a 4, e o quadro a seguir apresenta o número de fatias geradas a partir dos números de cortes.

Quadro 26 – Problema de Steiner

Número de cortes (n)	**Número de Fatias (F_n)**
1	2
2	4
3	7
4	11

Fonte: Elaborada pelo autor

Observe que o número fatias, de acordo com essa tabela, aumenta em n unidades em relação à quantidade anterior, isto é,

$$\begin{aligned} n = 1 &\quad\Rightarrow\quad F_1 = 2 \Rightarrow F_1 = 1+1, \\ n = 2 &\quad\Rightarrow\quad F_2 = 2+2 = 4 \Rightarrow F_2 = 1+1+2, \\ n = 3 &\quad\Rightarrow\quad F_3 = 4+3 = 7 \Rightarrow F_3 = 1+1+2+3, \\ n = 4 &\quad\Rightarrow\quad F_4 = 7+4 = 11 \Rightarrow F_4 = 1+1+2+3+4. \end{aligned}$$

Portanto, aplicando a definição do processo de raciocínio indutivo, temos que o número total de fatias obtidas com n cortes retilíneos é:

$$F_n = 1+1+2+3+4+\ldots+n = 1+\frac{n\cdot(n+1)}{2} \Longleftrightarrow F_n = \frac{n^2+n+2}{2},$$

para todo $n \geq 1$. □

Com base nesse problema, temos a seguinte generalização: “o número máximo de regiões em que um plano pode ser dividido por n retas é

$$R_n = \frac{n^2+n+2}{2}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Segundo Morgado e Carvalho (2015), essa solução está correta. No entanto, o argumento utilizado está errado, pois, para eles, o resultado final precisa de uma justificativa (mais forte), em vez de apenas afirmar, com base em poucas observações, que a fórmula obtida é correta. Em outras palavras, mesmo que a verificação vá até $n = 1.000.000.000$,

[13] Esse problema é conhecido como Pizza de Steiner, em homenagem ao seu idealizador, o geômetra Jacob Steiner (1796-1863) (MORGADO; CARVALHO, 2015).

não estará demonstrado que a fórmula vale para todo $n \geq 1$ natural, pois poderá existir um $n > 1.000.000.000$ para o qual essa fórmula falha.

Os professores Iezzi e Murakami (2005) relatam que o processo indutivo pode levar a inúmeros erros em Matemática, por exemplo, a fórmula: $y = 2^{2^2} + 1$ definida para $n \in \mathbb{N}$. De acordo com esses autores, Fermat acreditou, após verificar os valores para $n = 1, 2, 3, 4$, que, por meio dessa fórmula, era possível obter qualquer número primo. No entanto, aproximadamente um século mais tarde, Euler mostrou que a fórmula era inválida para n=5. Dessa forma, para verificar que uma generalização é falsa, basta tomar um contraexemplo, assim como Euler fez.

Voltando ao Exemplo 45, há alguma maneira de demonstrar a validade da fórmula obtida utilizando o raciocínio indutivo? A resposta é sim: por meio do processo conhecido como Princípio da Indução Finita (ou Princípio da Indução Matemática). Esse princípio afirma que uma propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq k_o$, onde k_o é dado explicitamente ou é evidente pelo contexto do enunciado, se e somente se:

i) $P(k_o)$ é verdadeira, ou seja, vale a propriedade para k_o;

ii) se, para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $P(k)$, é verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira, isto é, $P(k)$ implica a validade de $P(k+1)$.

Portanto, a partir dessas verificações, podemos afirmar que a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq k_o$.

Dessa forma, consideremos $P(n)$: o número máximo de regiões em que um plano pode ser dividido por n retas é $R_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$, para todo $n \geq 1$. Demonstre que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

Aplicando o Princípio da Indução Finita em $P(n)$, temos

i) $P(1)$ é verdadeira, pois:

$$n = 1 \Rightarrow P(1) = \frac{1^2+1+2}{2} = \frac{4}{4} = 2,$$

o que é verdade porque uma reta divide um plano em duas regiões.

ii) Supondo válida a propriedade para um número k de verificações ($k \geq 1$):

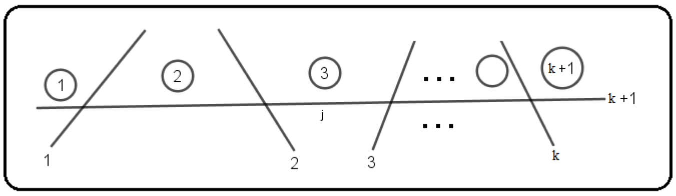
$P(k)$: $R_k = \dfrac{k^2+k+2}{2}$ (hipótese de indução),

demonstremos que ela vale para um número $k+1$ de verificações:

$P(k+1)$: $R_{k+1} = \dfrac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}$ (Tese).

De fato, observe que

Figura 12 – Problema de Steiner



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao acrescentar o corte $k+1$, passamos a ter

$R_{k+1} = 1+1+2+3+4+...+k+(k+1)$ regiões.

Dessa forma, segue da hipótese de indução que

$$\begin{aligned} R_{k+1} = 1+1+2+3+4+...+k+(k+1) &= \frac{k^2+k+2}{2}+(k+1) \\ &= \frac{k^2+k+2+2k+2}{2} \\ &= \frac{(k^2+2k+1)+(k+1)+2}{2} \\ &= \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}. \end{aligned}$$

Logo, P_k implica P_{k+1}. Portanto, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

No exemplo a seguir, apresentamos mais uma aplicação do Princípio de Indução Finita em Geometria Plana.

Exemplo 50. *Demonstre que "a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $S_n = (n-2)\cdot 180^o$".*

Demonstração.

Consideremos $P(n)$: a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $S_n = (n-2)\cdot 180^o$, para $\forall n \in N$, $n \geq 3$.

Aplicando o Princípio da Indução Finita, temos

$i)$ $P(3)$ é verdadeira, pois:

$$n = 3 \Rightarrow S_3 = (3-2)\cdot 180^o = (1)\cdot 180^o = 180^o,$$

o que é verdade porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o.

ii) Supondo válida a propriedade para um polígono de k lados ($k \geq 3$):

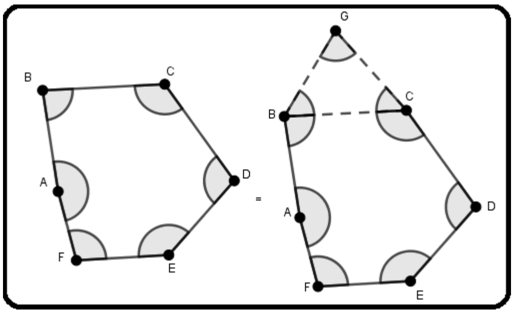
$P(k)$: $S_k = (k-2) \cdot 180^o$ (hipótese de indução),

demonstremos que ela vale para um polígono de $k+1$ lados:

$P(k+1)$: $S_{k+1} = (k-1) \cdot 180^o$ (Tese).

Observe que

Figura 13 – Soma dos ângulos internos de um polígono.



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao acrescentar um vértice (G) ao polígono ($ABCDEF$), obtemos um novo polígono ($ABCDEFG$) tal que $(ABCDEFG) = (ABCDEF) + (BCG)$. Como ($BCG$) é um triângulo, segue que

$$\begin{aligned} S_{k+1} = S_k + 180^o &\iff S_{k+1} = (k-2) \cdot 180^o + 180^o \\ &\iff S_{k+1} = [(k-2) \cdot 180^o] + [(1) \cdot 180^o] \\ &\iff S_{k+1} = (k-2+1) \cdot 180^o \\ &\iff S_{k+1} = (k-1) \cdot 180^o. \end{aligned}$$

Logo, P_k implica P_{k+1}. Portanto, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in N$. □

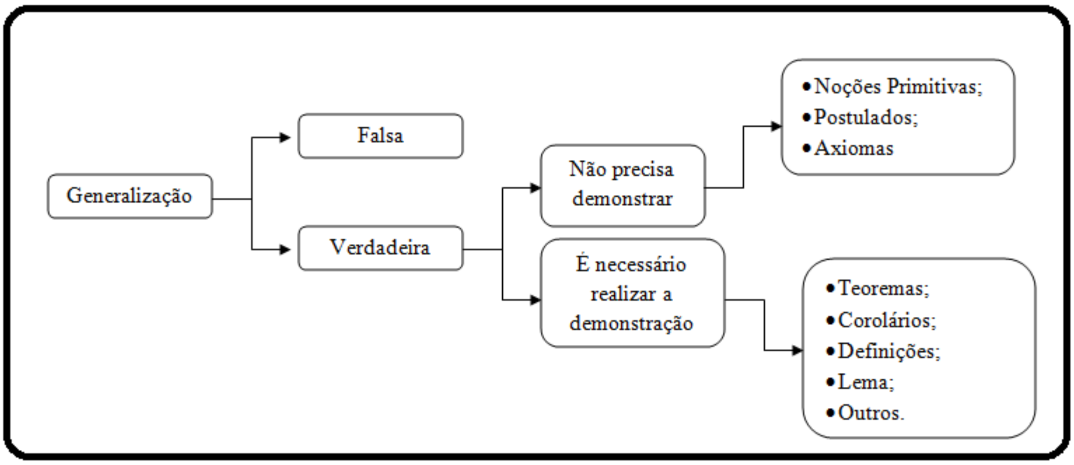
Esse exemplo mostra que para resolver certos problemas geométricos, ainda é muito útil encontrar, em uma figura, uma solução empírica, que guia a solução verdade. Logo a primeira vista, pode parecer que o processo indutivo é extremamente limitado, mas ele é fundamental no desenvolvimento das generalizações sobre figuras geométricas.

4.2.2 Processo de raciocínio dedutivo

Uma das grandes contribuições de Euclides no campo da Geometria foi, segundo Morgado, Wagner e Jorge (1974), a introdução do método axiomático. Esse método separa as aquisições de uma ciência em duas partes claramente definidas: a parte empírica-indutiva, por um lado, e a parte dedutiva, por outra.

A parte indutiva, como mencionamos na seção anterior, é o processo de raciocínio baseado na experiência e na observação, cuja maior finalidade é estabelecer generalizações. A parte dedutiva é o processo de raciocínio que utiliza as generalizações obtidas pelo processo indutivo para obter novas generalizações, por meio das regras de inferência. Basicamente, o sistema dedutivo é composto por três partes: Hipóteses + Regras de Inferências + Tese, em que as hipóteses são as generalizações já obtidas (proposições primitivas, postulados ou axiomas e teoremas já demonstrados), e a tese é a nova generalização obtida (teoremas, lemas, corolários).

Figura 14 – Tipos de generalizações



Fonte: Elaborada pelo autor

Segundo Morais Filho (2013), um *lema* é um teorema auxiliar, ou seja, quando um teorema é demonstrado apenas para auxiliar na demonstração de outro teorema ele é chamado de lema. Um *corolário* é um termo matemático obtido a partir das combinações lógicas de teoremas já demonstrados, isto é, ele é um teorema que advém de uma consequência imediata de outro teorema mais complexo. Por fim, um *teorema*, de modo geral, é um conceito matemático obtido a partir das combinações lógicas de postulados ou axiomas e/ou outros teoremas.

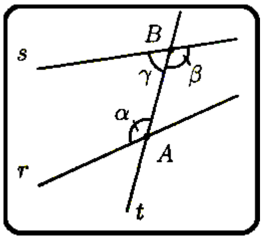
Vejamos alguns exemplos[14]:

Exemplo 51. *Demonstre que, nas notações da Figura 15 a seguir, temos*

$$r \parallel s \Longleftrightarrow \alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma = 180^o.$$

[14] O modelo de demonstração adotado nestes exemplos será mais detalhado na Seção 4.4 deste trabalho.

Figura 15 – Ângulos alternos internos e colaterais internos



Fonte: Muniz Neto (2013, p. 39)

Demonstração.

Consideremos

<u>Hipótese</u>: H: $r \parallel s$.

<u>Tese</u>: T_1: $\alpha = \beta$ e T_2: $\alpha + \gamma = 180^o$.

Desejamos demonstrar que $H \rightarrow T_1 \wedge T_2$. Para isso, de acordo com a Seção 3.7, basta demonstrar que o argumento $H \vdash T_1 \wedge T_2$ é válido.

Observemos, inicialmente, pelas regras de equivalência, o seguinte:

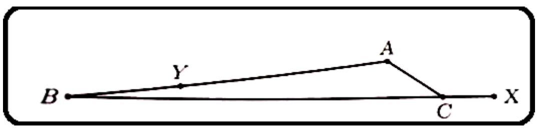
$$\begin{aligned} H \rightarrow T_1 \wedge T_2 &\iff \sim H \vee (T_1 \wedge T_2) \\ &\iff (\sim H \vee T_1) \wedge (\sim H \vee T_2) \\ &\iff (H \rightarrow T_1) \wedge (H \rightarrow T_2), \end{aligned}$$

isto é, mostrar a validade de $H \vdash T_1 \wedge T_2$ equivale a mostrar a validade dos argumentos $H \vdash T_1$ e $H \vdash T_2$.

$i)$ Demonstração de que $H \vdash T_1$.

Consideremos, inicialmente, a seguinte construção:

Figura 16 – Construção da paralela a uma reta por um ponto dado, não pertencente a essa reta



Fonte: Muniz Neto (2013, p. 37)

em que $C\hat{A}Y = A\hat{C}X$, e $s = \overleftrightarrow{AY}$ é paralela à reta r.

Resumidamente, temos

	Afirmações	Justificativas
1.	H	Hipótese
2.	$H \to s$ é a única reta paralela r passando por B	Postulado de Geometria: "Dados, no plano, uma reta r e um ponto $B \notin r$, existe uma única reta s, paralela à s, que passa por B.
3.	s é a única reta paralela à r, que passa por B	1, 2 - RMP.
4.	s é a única reta paralela à r, que passa por $B \to T_1$	Construção.
5.	$\therefore T_1$	3, 4 - RMP.

Desse modo, temos que o argumento $H \vdash T_1$ é válido.

ii) Demonstração de que $H \vdash T_2$.

Resumidamente, temos

	Afirmações	Justificativas
1.	H	Hipótese.
2.	$H \to T_1$	Caso (i).
3.	T_1	1, 2 - RMP.
4.	$\beta + \gamma = 180^o$	Soma de ângulos sobre uma mesma reta.
5.	$T_1 \wedge \beta + \gamma = 180^o$	3, 4 - RC.
6.	$T_1 \wedge \beta + \gamma = 180^o \to T_2$	Processo de substituição algébrica.
7.	$\therefore T_2$	5, 6 - RMP

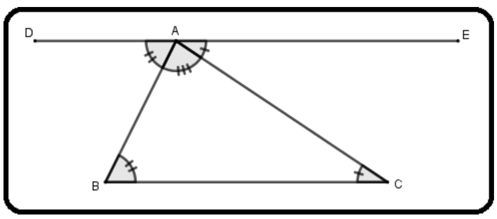
Desse modo, temos que o argumento $H \vdash T_2$ é válido. Logo, como os argumentos $H \vdash T_1$ e $H \vdash T_2$ são válidos, segue-se que o argumento $H \to T_1 \wedge T_2$ também é válido. □

Exemplo 52. *Demonstre que a soma dos ângulos internos de um triângulo, em Geometria Plana, é* 180^o.

Demonstração.

Consideremos, inicialmente, a seguinte construção:

Figura 17 – Soma dos ângulos internos de um triângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor

em que ABC é um triângulo qualquer, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são segmentos transversais aos segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$.

Consideremos

Hipóteses: H_1: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ e H_2: $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são segmentos transversais aos segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$.

Tese: $A\hat{B}C + B\hat{A}C + A\hat{C}B = 180^o$.

Desejamos demonstrar que $H_1 \wedge H_2 \to T$. Para isso, de acordo com a Seção 3.7, basta demonstrar que o argumento $H_1 \wedge H_2 \vdash T$ é válido.

Resumidamente, temos

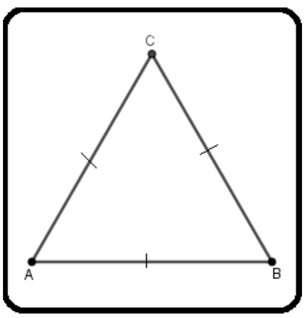
	Afirmações	Justificativas
1.	H_1	Hipótese.
2.	H_2	Hipótese.
3.	$H_1 \wedge H_2$	1, 2 - RC.
4.	$H_1 \wedge H_2 \to (B\hat{A}D = A\hat{B}C) \wedge (C\hat{A}E = A\hat{C}B)$	Exemplo 47.
5.	$(B\hat{A}D = A\hat{B}C) \wedge (C\hat{A}E = A\hat{C}B)$	3, 4 - RMP.
6.	$B\hat{A}D + B\hat{A}C + B\hat{A}E = 180^o$	Soma de ângulos sobre uma mesma reta.
7.	$(B\hat{A}D = A\hat{B}C) \wedge (C\hat{A}E = A\hat{C}B \wedge B\hat{A}D + B\hat{A}C + C\hat{A}E = 180^o)$	5, 6 - RC
8.	$(B\hat{A}D = A\hat{B}C) \wedge (C\hat{A}E = A\hat{C}B \wedge B\hat{A}D + B\hat{A}C + C\hat{A}E = 180^o) \to T$	Propriedade matemática.
9.	$\therefore T$	7, 8 - RMP

□

Exemplo 53. *Demonstre que todos os ângulos de um triângulo equilátero medem* 60^o*.*

Demonstração. Consideremos, inicialmente, a seguinte construção:

Figura 18 – Triângulo equilátero.



Fonte: Elaborada pelo autor

em que ABC é um triângulo equilátero.

Consideremos

Hipótese: H: ABC é um triângulo equilátero.

Tese: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^o$.

Desejamos demonstrar que $H \to T$. Para isso, de acordo com a Seção 3.7, basta demonstrar que o argumento $H \vdash T$ é válido.

Resumidamente, temos

	Afirmações	Justificativas
1.	H	Hipótese.
2.	$H \to \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$	Definição de triângulo equilátero.
3.	$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$	1, 2 - RMP.
4.	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$	Exemplo 48.
5.	$(\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}) \wedge (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o)$	3, 4 - RC.
6.	$(\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}) \wedge (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o) \to (\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^o)$	Propriedade matemática.
7.	$\therefore \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^o$	5, 6 - RMP.

$\square$

Esses exemplos apresentam os conceitos de Lema (Exemplo 47), Teorema (Exemplo 48) e Corolário (Exemplo 49), isto é, para demonstrar a validade do Exemplo 48, é necessário, inicialmente, demonstrar a validade do Exemplo 47 e, por consequência disso, temos que o Exemplo 49 só será válido se for verificada a validade do Exemplo 48. Simbolicamente, temos

$$\text{Lema (exemplo 47)} \Rightarrow \text{Teorema (exemplo 48)} \Rightarrow \text{Corolário (exemplo 49)}.$$

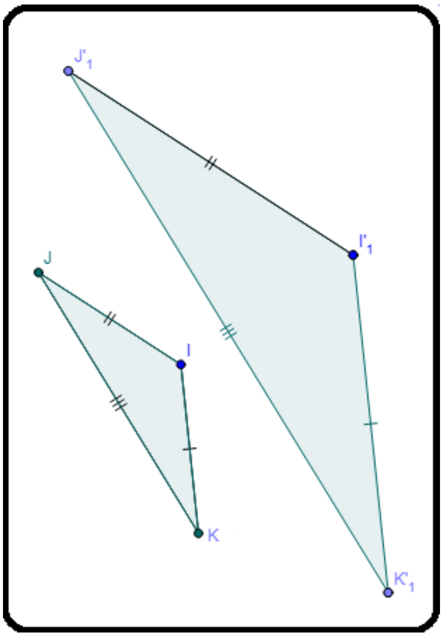
Em suma, temos que o processo dedutivo (lema, teorema, corolário) é o passo adiante do processo indutivo (noções primitivas, postulados ou axiomas). Isto é, os conceitos obtidos por meio do modo indutivo constituem parte essencial do processo dedutivo, sem os quais, pois, é impossível efetuar o processo dedutivo.

4.3 Estrutura lógica de teoremas

O enunciado de um teorema tem a forma de proposição condicional (ou forma equivalente, que pode ser facilmente transformada em condicionais, sem mudança de significado). Em uma proposição condicional, o antecedente é denominado *"hipótese"*, e o consequente, *"tese"*. Em outras palavras: a hipótese é a condição, e a tese é o condicionado.

Exemplo 54. *Se três lados de um triângulo são, ordenadamente, congruentes a três lados de outro triângulo, então esses dois triângulos são congruentes.*

Figura 19 – Congruência de Triângulo - Caso (LLL)



Fonte: Elaborada pelo autor

Nesse exemplo, temos

Hipótese: Três lados de um triângulo são, ordenadamente, congruentes a três lados de outro triângulo.

Tese: Os dois triângulos são congruentes.

Dessa forma, denotando hipótese por H e tese por T, a forma esquemática desse teorema é a seguinte:

Se ocorre H, então ocorre T.

Simbolicamente, temos: $H \to T$, em que H é uma condição suficiente para T e T é uma condição necessária para H.

4.3.1 Classificação dos teoremas

Dois teoremas podem ser classificados em recíprocos, contrários ou contrapositivos. Essa classificação é baseada nos tipos das proposições associadas a uma proposição condicional.

Um teorema (denominado direto) é considerado recíproco de outro quando a tese de um é a hipótese do outro, e vice-versa, conforme apresentamos a seguir.

(i) Direto: Se ocorre H, então ocorre T. Notação: $H \to T$;

(ii) Recíproco: Se ocorre T, então ocorre H. Notação: $T \to H$.

É importante salientar que a verdade de um teorema não implica a verdade do seu recíproco. O exemplo a seguir ilustra essa afirmação.

Exemplo 55. *Verifique a validade do recíproco do seguinte teorema: "Se dois triângulos são congruentes, então seus ângulos, respectivamente, são iguais".*

Demonstração.

Consideremos

H: dois triângulos são congruentes;

T: os ângulos de dois triângulos são, respectivamente, iguais.

Logo, o teorema dado tem a seguinte estrutura:

i) Direto: $H \to T$;

ii) Recíproco: $T \to H$.

Desse modo, partindo da premissa que, em i), H é verdadeira, concluímos, pela definição de congruência de triângulos, que T é verdadeira e, portanto, o teorema $H \to T$ é válido. Por outro lado, o recíproco desse teorema, descrito em ii), é falso, já que não existe o caso "ângulo, ângulo, ângulo (AAA)" de congruência de triângulos e, portanto, o recíproco $T \to H$ do teorema dado não é válido. □

No entanto, quando, tanto um teorema quanto o seu recíproco são verdadeiros, isto é, a condição H e o condicional T são atendidos simultaneamente, então H é uma condição necessária e suficiente para T, e vice-versa.

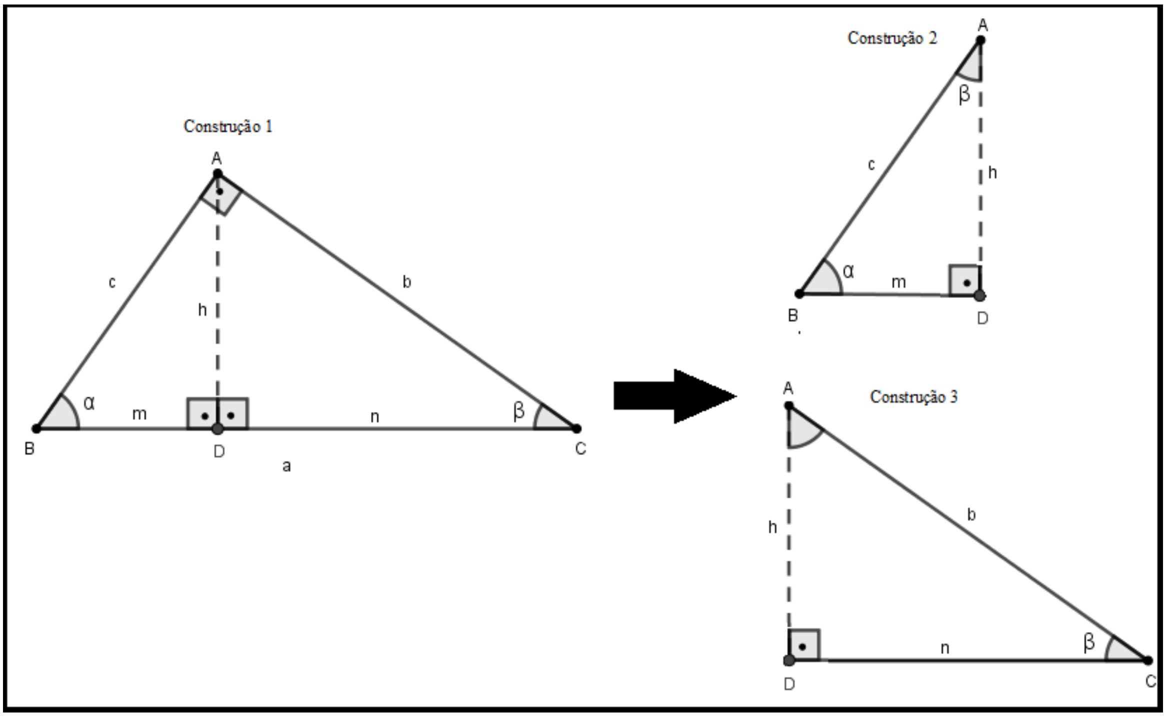
Vejamos o exemplo do Teorema de Pitágoras:

Exemplo 56. *Se ABC é um triângulo retângulo, então o quadrado do maior lado (hipotenusa) é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados (catetos).*

Demonstração.

Consideremos, inicialmente, a seguinte construção:

Figura 20 – Triângulo retângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor

Consideremos

H: ABC é um triângulo retângulo;

T: o quadrado do lado maior (hipotenusa) é igual a soma dos quadrados dos outros dois lados (catetos) do triângulo ABC.

Logo, o teorema dado tem a seguinte estrutura:

i) Direto: Se ABC é um triângulo retângulo, então o quadrado do lado maior (hipotenusa) é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados (catetos), isto é, $H \to T$.

O seu recíproco tem, pois, a seguinte estrutura:

ii) Recíproco: Se em um triângulo ABC o quadrado do lado maior (hipotenusa) é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados (catetos), então ele é um triângulo retângulo, isto é, $T \to H$.

Demonstração:

i) Direto: $H \to T$.

Resumidamente, temos

	Afirmações	Justificativas
1.	H	Hipótese.
2.	ADB é um triângulo retângulo	Construção 2.
3.	ADC é um triângulo retângulo	Construção 3.
4.	(ABC é um triângulo retângulo) $\wedge$ ADB é um triângulo retângulo	1, 2 - RC.
5.	(ABC é um triângulo retângulo) $\wedge$ ADB é um triângulo retângulo $\rightarrow \dfrac{c}{m} = \dfrac{a}{c} \Longleftrightarrow c^2 = a \cdot m$	Semelhança de triângulos.
6.	$\dfrac{c}{m} = \dfrac{a}{c} \Longleftrightarrow c^2 = a \cdot m$	4, 5 - RMP.
7.	(ABC é um triângulo retângulo) $\wedge$ (ADC é um triângulo retângulo)	1, 3 - RC.
8.	(ABC é um triângulo retângulo) $\wedge$ ADC é um triângulo retângulo $\rightarrow \dfrac{b}{n} = \dfrac{a}{b} \Longleftrightarrow b^2 = a \cdot n$	Semelhança de triângulos.
9.	$\dfrac{b}{n} = \dfrac{a}{b} \Longleftrightarrow b^2 = a \cdot n$	7, 8 - RMP.
10.	$(c^2 = a \cdot m) \wedge (b^2 = a \cdot n)$	6, 9 - RC.
11.	$(c^2 = a \cdot m) \wedge (b^2 = a \cdot n) \rightarrow T$	Propriedade matemática.
12.	$\therefore T$	10, 11 - RMP.

ii) Recíproco: $T \rightarrow H$.

Resumidamente, temos

	Afirmações	Justificativas
1	T	Hipótese.
2	$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot ab \cdot cos\hat{A}$	Lei dos cossenos.
3	$(a^2 = b^2 + c^2) \wedge (a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot ab \cdot cos\hat{A})$	1, 2 - RC.
4	$(a^2 = b^2 + c^2) \wedge (a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot ab \cdot cos\hat{A}) \rightarrow (-2 \cdot ab \cdot cos\hat{A} = 0)$	Operação algébrica.
5	$-2 \cdot ab \cdot cos\hat{A} = 0$	3, 4 - RMP.
6	$(-2 \cdot ab \cdot cos\hat{A} = 0) \rightarrow (cos\hat{A} = 0)$	Operação algébrica.
7	$cos\hat{A} = 0$	5, 6 - RMP.
8	$cos\hat{A} = 0 \rightarrow H$	Propriedade trigonométrica.
9	$\therefore H$	7, 8 - RMP

$\square$

Nesse exemplo, temos que tanto o teorema como o seu recíproco são verdadeiros. Logo, podemos reescrever o modo direito e o recíproco em uma única proposição: "ABC é um triângulo retângulo se e somente se o quadrado do lado maior (hipotenusa) é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados (catetos). Simbolicamente temos: $H \longleftrightarrow T$.

Um teorema (denominado direto) é considerado contrário de outro quando a hipótese e a tese de um são as negações, respectivas, da hipótese e da tese do outro:

$i)$ Direto: Se ocorre H, então ocorre T. Notação: $H \to T$;

$ii)$ Contrário: Se não ocorre H, então não ocorre T. Notação: $\sim H \to \sim T$.

De modo análogo ao que acontece com recíprocos, a verdade de um teorema não implica a verdade do seu contrário. Por exemplo, o teorema: "Se dois triângulos são congruentes, então seus ângulos, respectivamente, são iguais" tem uma sentença condicional contrária falsa: "Se dois triângulos não são congruentes, então seus ângulos, respectivamente, não são iguais"[15].

Um teorema (denominado direto) é considerado contrapositivo de outro quando cada um deles é o contrário do recíproco do outro.

(i) Direto: Se ocorre H, então ocorre T. Notação: $H \to T$;

(ii) Contra-positivos: Se não ocorre T, então não ocorre H. Notação: $\sim T \to \sim H$.

Observemos o seguinte:

$$\begin{aligned} H \to T \quad &\Longleftrightarrow \quad \sim H \vee T \\ &\Longleftrightarrow \quad T \vee \sim H \\ &\Longleftrightarrow \quad \sim T \to \sim H, \end{aligned}$$

isto é, os contrapositivos de um teorema são equivalentes, de modo que ou ambos são verdadeiros ou ambos são falsos.

A tabela-verdade a seguir apresenta os valores lógicos das proposições associadas a uma condicional.

Quadro 27 – Proposições associadas a uma condicional

Proposições				*Direito*	*Recíproco*	*Contrário*	*Contrapositivo*
H	T	$\sim H$	$\sim T$	$H \to T$	$T \to H$	$\sim H \to \sim T$	$\sim T \to \sim H$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor

[15] Demonstração análoga àquela do Exemplo 51.

Resumidamente, essa tabela-verdade mostra o seguinte:

i) a condicional $H \to T$ e sua contrapositiva $\sim T \to \sim H$ apresentam, em cada linha, os mesmos valores lógicos, respectivamente, de modo que, por definição, elas são equivalentes, isto é,

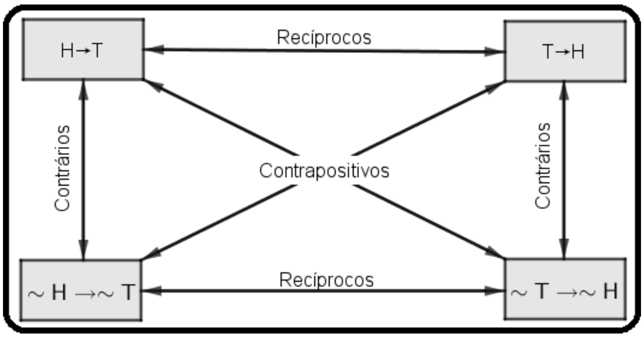
$$H \to T \Longleftrightarrow \sim T \to \sim H.$$

ii) de modo análogo, a recíproca $T \to H$ e a contrária $\sim H \to \sim T$ apresentam, em cada linha, os mesmos valores lógicos, respectivamente, de modo que, por definição, elas são equivalentes, isto é,

$$T \to H \Longleftrightarrow \sim H \to \sim T.$$

O seguinte esquema lógico mostra as relações entre um teorema, seu recíproco, seu contrário e o seu contrapositivo.

Figura 21 – Esquema Lógico das proposições associadas a uma condicional.



Fonte: Elaborada pelo autor

Note que o recíproco $(T \to H)$ e o contrário $(\sim H \to \sim T)$ são contrapositivos entre si, isto é, $(T \to H \Longleftrightarrow \sim H \to \sim T)$. Portanto, se o direto $(H \to T)$ e o recíproco $(T \to H)$ são verdadeiros, o contrário $(\sim H \to \sim T)$ também o é. De modo análogo, temos que, se o direto $(H \to T)$ e o contrário $(\sim H \to \sim T)$ são verdadeiros, então o recíproco $(T \to H)$ também o é.

De modo geral, a maioria dos teoremas em Geometria Plana envolve uma implicação lógica do tipo

$$\text{HIPÓTESE} \Rightarrow \text{TESE}$$

em que a Hipótese é aquilo que temos como verdade, a Implicação $(\Rightarrow)$ é o argumento lógico (propriedades básicas da Geometria Plana e regras de inferência), e a Tese é a conclusão, isto é, aquilo que desejamos (temos que) demonstrar. Em alguns outros casos, quando as recíprocas dos teoremas são verdadeiras, temos que a estrutura lógicas deles é:

$$\text{HIPÓTESE} \Longleftrightarrow \text{TESE}$$

Portanto, diante do exposto nesse capítulo, podemos definir Lógica Geométrica como a parte da Matemática que explora as aplicações lógicas envolvidas no processo de demonstração em Geometria.

4.4 Aplicações

Nesta seção, apresentaremos as demonstrações de alguns teoremas de Geometria Plana por meio do método dedutivo com o objetivo de mostrar os processos lógicos envolvidos nas demonstrações geométricas.

Segundo Clemens, O'daffer e Cooney (1998), para desenvolver a demonstração de um teorema em Geometria por meio do método dedutivo, os seguintes passos devem ser observados:

Passo 1: se o teorema não está na forma "Se ..., então", então, sempre que possível[16], deve ser colocado em tal forma.

Passo 2: construa um diagrama das condições do teorema.

Passo 3: escrevas a(s) hipótese(s) do teorema, isto é, a parte entre o "Se" e o "então".

Passo 4: Escreva a tese do teorema, isto é, a parte que segue o "então".

Passo 5: formule a estratégia para desenvolver a demonstração do teorema.

Passo 6: formule a demonstração fornecendo como justificativa as proposições primitivas, os postulados ou os teoremas já demonstrados.

Nos exemplos a seguir, apresentaremos alguns teoremas sobre segmentos de reta, ângulos, triângulos, paralelismo e perpendicularidade, quadriláteros, círculo e áreas de superfícies planas. Para tanto, apresentaremos duas formas de demonstrações: a primeira refere-se à demonstração por meio do método dedutivo; a segunda refere-se à demonstração por meio do método informal.

Exemplo 57. *(Segmentos de reta) Sejam P, A, Q e B pontos dispostos sobre uma reta r, nessa ordem. Se PA e OB são segmentos congruentes, mostre que PQ e AB são também congruentes.*[17]

[16] De acordo com Morais Filho (2013), nem sempre é possível estruturar um teorema na forma "Se ..., então...".

[17] Exercício 18 de (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 16).

Demonstração.

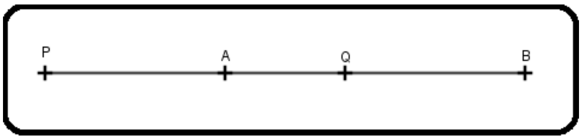
1ª Demonstração: Método Formal - MF

1º Passo: representar o teorema dado na forma "Se..., então...".

Podemos reescrever esse teorema na seguinte forma: "Se P, A, Q e B são pontos dispostos sobre uma reta r, tais que $\overline{PA} \equiv \overline{QB}$, então $\overline{PQ} \equiv \overline{AB}$[18].

2º Passo: Diagrama do teorema.

Figura 22 – Segmento de reta.



Fonte: Elaborada pelo autor

3º Passo: hipótese do teorema.

H: $\overline{PA} \equiv \overline{QB}$.

4º Passo: tese do teorema.

T: $\overline{PQ} \equiv \overline{AB}$.

5º Passo: estratégias para desenvolver a demonstração do teorema.

Note que o teorema tem a seguinte estrutura: $H \to T$, de modo que, usando o método dedutivo, demonstraremos, por meio das propriedades básicas e regras de inferência, que H é condição suficiente para T.

6º Passo: demonstração do teorema.

Para demonstrar o teorema $H \to T$, basta demonstrar a validade do argumento $H \vdash T$.

Resumidamente, temos

	Afirmações	Justificativas
1.	H	Hipótese.
2.	$H \to \overline{PA} = \overline{QB}$	Definição de congruência de segmentos.
3.	$\overline{PA} = \overline{QB}$	1, 2 - RMP.
4.	$\overline{PA} = \overline{QB} \to \overline{PA} + \overline{AQ} = \overline{AQ} + \overline{QB}$	O segmento $\overline{AQ}$ é acrescentado em ambos os lados da igualdade.

[18] $\overline{PA}$ representa a medida (ou comprimento) do segmento PA.

5.	$\overline{PA}+\overline{AQ}=\overline{AQ}+\overline{QB}$	3, 4 - RMP.
6.	$\overline{PA}+\overline{AQ}=\overline{AQ}+\overline{QB}) \to \overline{PQ}=\overline{AB})$	Adição de Segmentos.
7.	$\overline{PQ})=\overline{AB}$	5, 6 - RMP
8.	$\overline{PQ})=\overline{AB}) \to T$	Definição de congruência de segmentos.
9.	$\therefore T$	7, 8 - RMP.

2ª Demonstração: Método Informal - MI

Temos

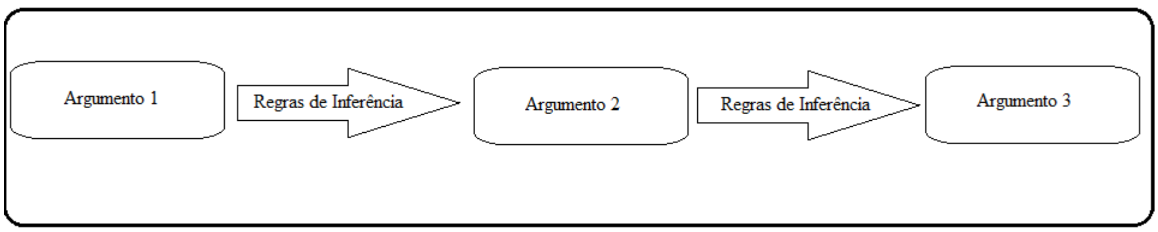
Hipótese: PA e QB são segmentos congruentes.

Tese: PQ e AB são também congruentes.

Por hipótese, temos que os segmentos PA e QB são congruentes. Assim, por definição de congruência de segmentos, temos que $\overline{PA}=\overline{QB}$. Além disso, observe que o segmento AQ (Figura 22) é comum aos segmentos PQ e AB. Logo, adicionando $\overline{AQ}$ a ambos os lados da igualdade $\overline{PA}=\overline{QB}$, obtemos $\overline{PA}+\overline{AQ}=\overline{AQ}+\overline{QB}$ que, por definição de adição de segmentos, resulta em $\overline{PQ}=\overline{AB}$. Portanto, pela definição de congruência de segmentos, temos que PQ e AB são também congruentes. □

Note que a função das regras de inferência, relacionadas no Método Formal (MF) é assegurar que um determinado argumento (afirmação/justificativa) é válido. Assim, ao afirmar, por meio dessas regras, que o argumento analisado inicialmente é válido, os outros passos da demonstração podem ser desenvolvidos até obter a comprovação da tese do teorema, ou seja, as regras de inferência constituem o elo entre os argumentos utilizados em uma demonstração (Figura 23).

Figura 23 – Método formal de demonstração de teoremas.



Fonte: Elaborada pelo autor

Por outro lado, ao observar a demonstração do teorema por meio do Método Informal (MI), nota-se que todos os argumentos utilizados no método formal são contemplados por esse método, excluindo apenas as regras de inferência. Nesse sentido, ambas as demonstrações apresentam as mesmas afirmações e justificativas.

No entanto, por sua característica mecânica (separar as afirmações e as justificativas em colunas), o Método Formal passa a ser o mais recomendado para o ensino secundário, haja vista que, com esse método, o estudante é capaz de identificar com mais facilidade as justificativas envolvidas no processo de demonstração de teoremas (ou solução de determinados problemas).

A seguir, apresentamos outros exemplos de demonstrações formais e informais que tratam de Geometria Plana.

Exemplo 58. *(Ângulos) Consideremos $A\hat{O}B$ um ângulo dado. Se P é um ponto desse ângulo, então $d(P,\overrightarrow{AO}) = d(P,\overrightarrow{BO}) \iff P \in$ (bissetriz de $A\hat{O}B$).*[19]

Demonstração.

1ª Demonstração: Método Formal - MF

1º Passo: representar o teorema dado na forma "Se..., então...".

Note que esse exemplo já está representado na forma de um teorema bicondicional, isto é, a recíproca do teorema dado é também verdadeira. Dessa forma, temos

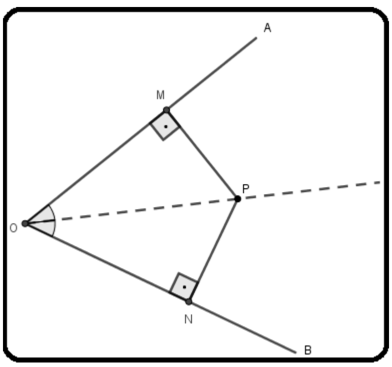
i) Direto: "Se $d(P,\overrightarrow{AO}) = d(P,\overrightarrow{BO})$, então $P \in$ (bissetriz de $A\hat{O}B$);

ii) Recíproco: "Se $P \in$ (bissetriz de $A\hat{O}B$), então $d(P,\overrightarrow{AO}) = d(P,\overrightarrow{BO})$.

2º Passo: diagrama do teorema.

Se M e N são os pés das perpendiculares baixadas de P aos segmentos $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{BO}$, respectivamente, então $d(P,\overrightarrow{AO})) = \overline{PM}$ e $d(P,\overrightarrow{BO}) = \overline{PN}$.

Figura 24 – Bissetriz de um ângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor

[19] Proposição 3.6 de (MUNIZ NETO, 2013, p. 74).

3º Passo: hipótese do teorema.

i) Direto: H: $\overline{PM} \equiv \overline{PN}$;

ii) Recíproco: T: $P \in$ (bissetriz de $A\hat{O}B$).

4º Passo: tese do teorema.

i) Direto: T: $P \in$ (bissetriz de $A\hat{O}B$);

ii) Recíproco: H: $\overline{PM} = \overline{PN}$.

5º Passo: estratégias para desenvolver a demonstração do teorema.

Note que o teorema tem a seguinte estrutura: $H \longleftrightarrow T$. Por equivalência lógica, temos

$$H \longleftrightarrow T \iff (H \to T) \wedge (T \to H).$$

Logo, usando o método dedutivo, demonstraremos, por meio das propriedades básicas e regras de inferência, que H é condição suficiente e necessária para T.

6º Passo: demonstração do teorema.

i) Direto: $H \to T$.

Para demonstrar o teorema $H \to T$, basta demonstrar a validade do argumento $H \vdash T$.

Resumidamente, temos

	Afirmações	Justificativas
1.	H	Hipótese.
2.	$\overline{OP} = \overline{OP}$	Identidade.
3.	$(\overline{PM} = \overline{PN}) \wedge (\overline{OP} = \overline{OP})$	1,2 - RC.
4.	$(\overline{PM} = \overline{PN}) \wedge (\overline{OP} = \overline{OP}) \to (\triangle MOP \equiv \triangle NOP)$	Caso de congruência de triângulos retângulos.
5.	$\triangle MOP \equiv \triangle NOP$	3, 4 - RMP.
6.	$(\triangle MOP \equiv \triangle NOP) \to M\hat{O}P = N\hat{O}P$	Definição de congruência de triângulos.
7.	$M\hat{O}P = N\hat{O}P$	5, 6 - RMP.
8.	$A\hat{O}B = M\hat{O}P + N\hat{O}P$	Construção.
9.	$(M\hat{O}P = N\hat{O}P) \wedge (A\hat{O}B = M\hat{O}P + N\hat{O}P)$	7, 8 - RC.
10.	$(M\hat{O}P = N\hat{O}P) \wedge (A\hat{O}B = M\hat{O}P + N\hat{O}P) \to T$	Definição de bissetriz.
11.	$\therefore T$	9, 10 - RMP.

ii) Recíproco: $T \to H$.

Para demonstrar o teorema $H \to T$, basta demonstrar a validade do argumento $H \vdash T$.

Resumidamente, temos

	Afirmações	Justificativas
1.	T	Hipótese.
2.	$(P \in \text{ bissetriz de } A\hat{O}B) \to (M\hat{O}P = N\hat{O}P)$	Definição de bissetriz.
3.	$M\hat{O}P = N\hat{O}P$	1,2 - RMP.
4.	$\overline{OP} = \overline{OP}$	Identidade.
5.	$O\hat{M}P = O\hat{N}P = 90^o$	Construção.
6.	$(M\hat{O}P = N\hat{O}P) \wedge (\overline{OP} = \overline{OP}) \wedge (O\hat{M}P = O\hat{N}P = 90^o)$	3, 4, 5 - RC.
7.	$(M\hat{O}P = N\hat{O}P) \wedge (\overline{OP} = \overline{OP}) \wedge (O\hat{M}P = O\hat{N}P = 90^o) \to (\triangle MOP \equiv \triangle NOP)$	Caso de Congruência (LAA_o).
8.	$\triangle MOP \equiv \triangle NOP$	6, 7 - RMP.
9.	$(\triangle MOP \equiv \triangle NOP) \to H$	Definição de congruência de triângulos.
10.	$\therefore H$	8, 9 - RMP.

Logo, como $H \to T$ e $T \to H$ são válidos, segue que $H \longleftrightarrow T$ é também válido e, portanto, o teorema bicondicional $d(P, \overrightarrow{AO}) = d(P, \overrightarrow{BO}) \Longleftrightarrow P \in$ (bissetriz de $A\hat{O}B$) é também válido.

2ª Demonstração: Método Informal - MI

($\Leftarrow$) Suponhamos, primeiro, que P pertence à bissetriz de $A\hat{O}B$ (figura 23), e consideremos M e N, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de P aos segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$. Os triângulos $\triangle MOP$ e $\triangle NOP$ são congruentes, por LAA_o, uma vez que $\overline{OP}$ é lado comum a eles, $M\hat{O}P \equiv N\hat{O}P$ e $O\hat{M}P \equiv O\hat{N}P = 90^o$. Daí, $\overline{PM} \equiv \overline{PN}$, ou seja, $d(P, \overrightarrow{AO}) = d(P, \overrightarrow{BO})$.

($\Rightarrow$) Reciprocamente, consideremos P um ponto no interior do ângulo $A\hat{O}B$ tal que $\overline{PM} = \overline{PN}$, em que M e N são os pés das perpendiculares baixadas de P, respectivamente, aos segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$. Assim, os triângulos $\triangle MOP$ e $\triangle NOP$ são novamente congruentes, agora pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos, já que $\overline{OP}$ é lado comum a eles e $\overline{PM} = \overline{PN}$. Segue, então, que $M\hat{O}P \equiv N\hat{O}P$, e portanto, P pertence à bissetriz de $A\hat{O}B$. $\square$

Exemplo 59. *(Triângulos) Suponha que tenha sido demonstrado o teorema a seguir.*

<u>Teorema</u>: Se dois lados de um triângulo são desiguais, então o ângulo oposto ao lado mais longo é maior do que o ângulo oposto ao lado mais curto.

Estabeleça o recíproco desse teorema e demonstre-o por meio das regras de inferências.

Demonstração.

1ª Demonstração: Método Formal - MF

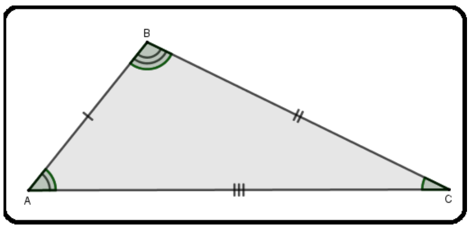
1º Passo: representar o teorema dado na forma "Se..., então...".

O recíproco do teorema dado é: "Se, em um triângulo, dois ângulos não são congruentes, então o lado oposto ao maior ângulo é maior do que o lado oposto ao menor ângulo".

Sem perda de generalidade, podemos considerar: "$A\hat{B}C > A\hat{C}B \to \overline{AC} > \overline{AB}$".

2º Passo: diagrama do teorema.

Figura 25 – Triângulo qualquer.



Fonte: Elaborada pelo autor

3º Passo: hipótese do teorema.

H: $A\hat{B}C > A\hat{C}B$.

4º Passo: tese do teorema.

T: $\overline{AC} > \overline{AB}$.

5º Passo: estratégias para desenvolver a demonstração do teorema.

O recíproco do teorema dado tem a forma $H \to T$. Consideremos a proposição condicional

$$H \to T \vee P \vee Q,$$

tal que

T_1: $\overline{AC} > \overline{AB}$;

T_2: $\overline{AC} = \overline{AB}$;

T_3: $\overline{AC} < \overline{AB}$.

Como desejamos demonstrar que $H \to T_1$, basta, então, demonstrar as validades de $H \to \sim T_2$ e $H \to \sim T_3$.

6º Passo: demonstração do teorema.

Caso 1: $H \to \sim T_2$.

Para demonstrar a validade de $H \to \sim T_2 P$, basta demonstrar a validade do argumento $H,\ P \vdash f$, em que f é uma proposição contraválida qualquer (a ser obtida).

Resumidamente, temos

	Afirmações	Justificativas
1.	H	Hipótese.
2.	T_2	Hipótese.
3.	$T_2 \to \sim H$	Propriedade de um triângulo isósceles.
4.	$\sim H$	2, 3 - RMP.
5.	$\therefore H \wedge \sim H$	1, 4 - RC.

Com base nesse resultado, $H, T_2 \vdash H \wedge \sim H$ concluímos que a proposição $H \to \sim T_2$ é verdadeira, já que $((H \wedge T_2) \to (H \wedge \sim H)) \Longleftrightarrow (H \to \sim T_2)$.

Caso 2: $H \to \sim T_3$.

Para demonstrar a validade de $H \to \sim T_3$, basta demonstrar a validade do argumento $H,\ T_3 \vdash f$, em que f é uma proposição contraválida (a ser obtida).

Resumidamente, temos

	Afirmações	Justificativas
1.	H	Hipótese.
2.	T_3	Hipótese.
3.	$T_3 \to \sim H$	Teorema Direto: $\overline{AC} > \overline{AB} \to A\hat{B}C > A\hat{C}B$.
4.	$\sim H$	2, 3 - RMP.
5.	$\therefore H \wedge \sim H$	1, 4 - RC.

Com base nesse resultado, $H, T_3 \vdash H \wedge \sim H$ concluímos que a proposição $H \to \sim T_3$ é verdadeira, já que $((H \wedge T_3) \to (H \wedge \sim H)) \Longleftrightarrow (H \to \sim T_3)$.

Agora, pela regra da inferência por eliminação, temos

$$\begin{array}{l} H \to T_1 \vee T_2 \vee T_3 \\ H \to \sim T_2 \\ H \to \sim T_3 \\ \hline \therefore H \to T_1 \end{array}$$

2ª Demonstração: Método Informal - MI

Queremos provar o seguinte teorema recíproco: "Se, em um triângulo, dois ângulos não são congruentes, então o lado oposto ao maior ângulo é maior que o lado oposto ao menor ângulo".

Logo, sem perda de generalidade, podemos supor o seguinte:

Hipótese: o ângulo $A\hat{B}C$ seja maior que o ângulo $A\hat{C}B$.

Tese: Então o segmento $\overline{AC}$ é maior que o segmento $\overline{AB}$.

Observe que existem apenas três situações para analisar em relação aos lados de um triângulo, isto é, o lado AC pode ser menor, igual ou maior que o lado AB. Nesse sentido, se o lado AC é menor que o lado AB, temos, pelo teorema direto, que $A\hat{B}C$ é menor que $A\hat{C}B$, o que contradiz a hipótese. Agora, se consideramos os lados AC e AB iguais, temos, pelo teorema do triângulo isósceles, que $A\hat{B}C$ é igual a $A\hat{C}B$, o que também contradiz a hipótese. Portanto, o lado AC é maior que o lado AB. □

Exemplo 60. *(Quadriláteros) Os lados opostos de um paralelogramo são iguais.*

Demonstração.

1ª Demonstração: Método Formal - MF

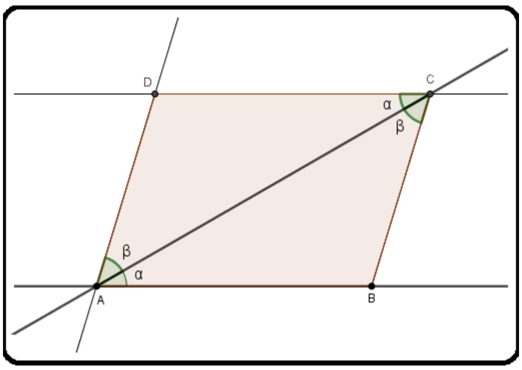
<u>1º Passo</u>: representar o teorema dado na forma "Se ..., então...".

Podemos reescrever esse teorema na seguinte forma: "Se o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, então $\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$".

Assim, esse teorema tem teses conjuntivas.

<u>2º Passo</u>: diagrama do teorema.

Figura 26 – Quadriláteros - paralelogramo.



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>3º Passo</u>: hipótese do teorema.

H: O quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

4º Passo: teses do teorema.

T_1: $\overline{AB} = \overline{DC}$ e

T_2: $\overline{AD} = \overline{BC}$.

5º Passo: estratégias para desenvolver a demonstração do teorema.

A estrutura desse teorema é a seguinte: $H \to T_1 \wedge T_2$. Usando as regras de inferências e as propriedades geométricas, demonstraremos esse teorema.

6º Passo: demonstração por meio de regras de inferência.

Para demonstrar o teorema $H \to T_1 \wedge T_2$, basta demonstrar a validade do argumento $H \vdash T_1 \wedge T_2$.

Resumidamente, temos

	Afirmações	Justificativa
1.	H	Hipótese.
2.	$H \to (\overline{AB} \parallel \overline{DC}) \wedge (\overline{AD} \parallel \overline{BC})$	Definição de paralelogramo.
3.	$(\overline{AB} \parallel \overline{DC}) \wedge (\overline{AD} \parallel \overline{BC})$	1, 2 - RMP.
4.	$(\overline{AB} \parallel \overline{DC}) \wedge (\overline{AD} \parallel \overline{BC}) \to (B\hat{C}A = D\hat{A}C) \wedge (B\hat{A}C = D\hat{C}A)$	Os ângulos $B\hat{C}A$ e $D\hat{A}C$ são alternos internos, assim como os ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$.
5.	$(B\hat{C}A = D\hat{A}C) \wedge (B\hat{A}C = D\hat{C}A)$	3, 4 - RMP.
6.	$\overline{AC} = \overline{AC}$	Identidade.
7.	$(B\hat{C}A = D\hat{A}C) \wedge (B\hat{A}C = D\hat{C}A) \wedge (\overline{AC} = \overline{AC})$	5, 6 - RC.
8.	$((B\hat{C}A = D\hat{A}C) \wedge (B\hat{A}C = D\hat{C}A) \wedge (\overline{AC} = \overline{AC})) \to \triangle ABC \equiv \triangle ADC$	Congruência de triângulo do tipo "ângulo, lado, ângulo - ALA"
9.	$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$	7, 8 - RMP.
10.	$\triangle ABC \equiv \triangle ADC \to T_1 \wedge T_2$	Definição de congruência.
11.	$\therefore T_1 \wedge T_2$	9, 10 - RMP.

Portanto, como o argumento $H \vdash T_1 \wedge T_2$ é válido, segue que o teorema $H \to T_1 \wedge T_2$ está demonstrado.

2ª Demonstração: Método Informal - MI

Hipótese: O quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

Tese: $\overline{AB} = \overline{DC}$ e T_2: $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Consideremos $ABCD$ um paralelogramo (lados opostos paralelos).Traçando a diagonal AC, temos que $B\hat{C}A = D\hat{A}C = \beta$, por serem ângulos alternos internos formados por $\overline{AC}$, com lados paralelas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ (Figura 27). Também temos que $B\hat{A}C = D\hat{C}B = \alpha$, por serem ângulos alternos internos formados por $\overline{AC}$, com lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Então $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ são congruentes, por ALA, pois têm $\overline{AC}$ em comum. Consequentemente, $\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$. $\square$

Exemplo 61. *(Círculo) Se duas cordas em um círculo são desiguais, então seus arcos são desiguais.*

Demonstração.

1ª Demonstração: Método Formal - MF

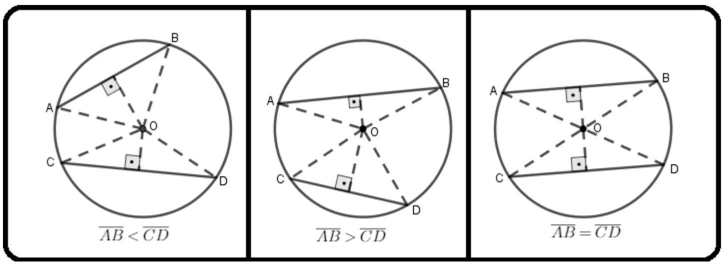
1º Passo: representar o teorema dado na forma "Se ..., então...".

Sem perda de generalidade, podemos reescrever esse teorema na seguinte forma:

"Se $\overline{AB} \neq \overline{CD}$, então $A\hat{O}B \neq C\hat{O}D$".

2º Passo: diagrama do teorema.

Figura 27 – Círculo.



Fonte: Elaborada pelo autor

3º Passo: hipótese do teorema.

H: $\overline{AB} \neq \overline{CD}$.

4º Passo: tese do teorema.

T: $A\hat{O}B \neq C\hat{O}D$.

5º Passo: estratégias para desenvolver a demonstração do teorema.

Podemos verificar, por meio de conhecimentos geométricos, que a tese desse teorema pode ser subdividida em:

T_1: $A\hat{O}B = C\hat{O}D$ ou

T_2: $A\hat{O}B \neq C\hat{O}D$.

Desse modo, podemos estruturar o teorema dado na seguinte forma: $H \to T_1 \vee T_2$. Como desejamos demonstrar que $H \to T_2$, basta demonstrar que o argumento $H \to \sim T_1$ é válido, já que T_1 e T_2 são mutuamente excludentes.

6º Passo: demonstração do teorema.

Para demonstrar que o argumento $H \to \sim T_1$ é válido, basta demonstrar a validade do argumento H, $T_1 \vdash f$, em que f é uma proposição contraválida (a ser obtida).

Resumidamente, temos

	Afirmações	Justificativas
1.	H	Hipótese.
2.	T_1	Hipótese.
3.	$T_1 \to \sim H$	Congruência de triângulo (LAL), já que $(\overline{OB} \equiv \overline{OC})$, $(\overline{OA} \equiv \overline{OD})$ e, como, por hipótese, temos $A\hat{O}B = C\hat{O}D$, segue que $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ e, portanto, $\overline{AB} = \overline{CD}$.
4.	$\sim H$	2, 3 - RMP.
5.	$\therefore H \wedge \sim H$	1, 4 - RC.

Desse modo, como a proposição $(H \wedge T_1) \to (H \wedge \sim H)$ é contraválida, segue que o argumento $H \vdash \sim T_1$ é válido.

Portanto, temos, pela regra de inferência por eliminação, que

$$\begin{array}{l} H \to T_1 \vee T_2 \\ H \to \sim T_1 \\ \hline \therefore H \to T_2 \end{array}$$

Portanto, o teorema "Se $\overline{AB} \neq \overline{CD}$, então $A\hat{O}B \neq C\hat{O}D$" está demonstrado.

2ª Demonstração: Método Informal -MI

Desejamos demonstrar que, se duas cordas em um círculo são desiguais, então seus arcos são desiguais. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor o seguinte:

Hipótese: $\overline{AB}$ é diferente de $\overline{CD}$

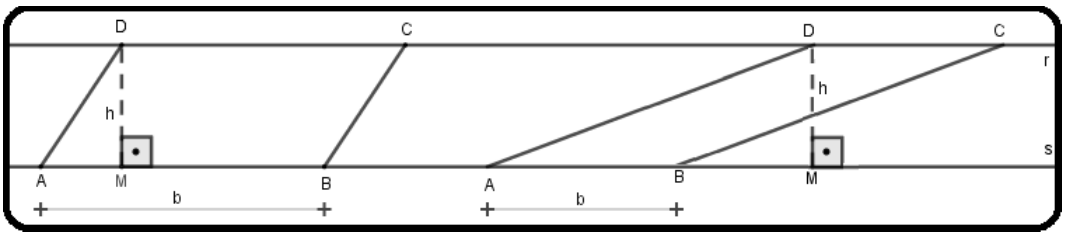
Tese: as medidas dos arcos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são diferentes.

Supondo que os arcos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ tenham mesma medida, então os triângulos AOB e COD são congruentes, pelo caso LAL, já que os lados $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} =$ *raio* (Figura 28). Assim, pela definição de congruência de triângulos, temos que as cordas AB e CD têm a mesma medida, o que contradiz a hipótese. Portanto, as medidas dos arcos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são diferentes. $\square$

Exemplo 62. *(Área de superfície plana) Demonstre, por meio da regra de inferência por casos, que a área de um paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.*

(Veja a figura dada a seguir).

Figura 28 – Área de superfície plana: paralelogramo 1.



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração.

1ª Demonstração: Método Formal - MF

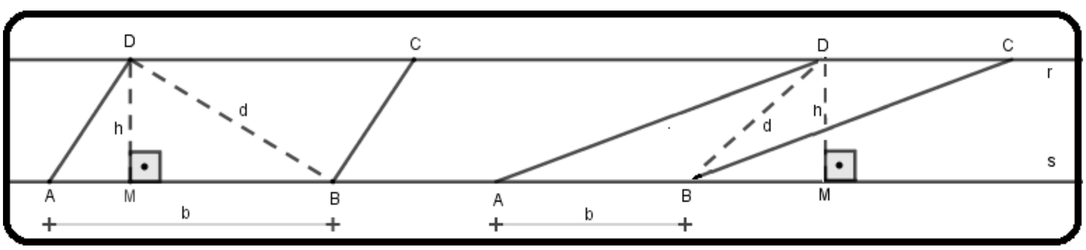
1º Passo: representar o teorema dado na forma "Se ..., então...".

Podemos reescrever esse teorema na seguinte forma: "Se $ABCD$ é um paralelogramo, então a sua área é igual ao produto da medida da base b pela medida da altura h.

2º Passo: diagrama do teorema.

Com base no diagrama apresentado no enunciado, tracemos a diagonal $\overline{BD}$ em ambos os casos.

Figura 29 – Área de superfície plana: paralelogramo 2.



Fonte: Elaborada pelo autor

3º Passo: hipóteses do teorema.

H: $ABCD$ é um paralelogramo de base b e de altura h.

H_1:$ABCD$ é um paralelogramo de base b e de altura h, interna ao $\triangle ABD$.

H_2:$ABCD$ é um paralelogramo de base b e de altura h, externa ao $\triangle ABD$.

4º Passo: tese do teorema.

T: a área do paralelogramo $ABCD$ é igual ao produto da medida da base b pela medida da altura h, isto é, $[ABCD] = b \times h$.

5º Passo: estratégias para desenvolver a demonstração do teorema.

Desejamos demonstrar, por meio da regra de inferência por casos, o teorema $H \to T$. Para isso, é necessário demonstrar, inicialmente, que as seguintes proposições condicionais são verdadeiras:

Caso 1: $H_1 \to T$.

Caso 2: $H_2 \to T$.

6º Passo: demonstração do teorema.

Demonstraremos o Caso 1, pois a demonstração do Caso 2 é análoga.

Caso 1: $H_1 \to T$.

Para demonstrar o teorema $H_1 \to T$, basta demonstrar a validade do argumento $H_1 \vdash T$.

Resumidamente, temos

	Afirmações	Justificativas
1.	H_1	Hipótese.
2.	$H_1 \to ((\overline{AB} \parallel \overline{DC}) \wedge (\overline{AD} \parallel \overline{BC}))$	Definição de paralelogramo.
3.	$(\overline{AB} \parallel \overline{DC}) \wedge (\overline{AD} \parallel \overline{BC})$	1, 2 - RMP.
4.	$((\overline{AB} \parallel \overline{DC}) \wedge (\overline{AD} \parallel \overline{BC})) \to ((\overline{AB} \equiv \overline{DC}) \wedge (\overline{AD} \equiv \overline{BC}))$	Propriedade de paralelismo.
5.	$(\overline{AB} \equiv \overline{DC}) \wedge (\overline{AD} \equiv \overline{BC})$	3, 4 - RMP.
6.	$\overline{BD} \equiv \overline{BD}$	Identidade.
7.	$((\overline{AB} \equiv \overline{DC}) \wedge (\overline{AD} \equiv \overline{BC})) \wedge (\overline{BD} \equiv \overline{BD})$	5, 6 - RC.
8.	$(((\overline{AB} \equiv \overline{DC}) \wedge (\overline{AD} \equiv \overline{BC})) \wedge (\overline{BD} \equiv \overline{BD})) \to (\triangle ABD \equiv \triangle CDB)$	Congruência de triângulo (LLL).
10.	$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$	8, 9 - RMP.
11.	$[ABD] = \dfrac{b \times h}{2}$	Propriedade geométrica.
12.	$[ABCD] = [ABD] + [CDB]$	Propriedade geométrica.

13. $(\triangle ABD \equiv \triangle CDB) \wedge ([ABD] = \frac{b \times h}{2}) \wedge ([ABCD] = [ABD] + [CDB]) \rightarrow ([ABCD] = \frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2})$ — Propriedade matemática.
14. $[ABCD] = \frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2}$ — 12, 13 - RMP.
15. $[ABCD] = \frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} \rightarrow T$ — Propriedade matemática.
16. $\therefore T$ — 14, 15 - RMP.

Caso 2: $H_2 \rightarrow T$.

Demonstração análoga àquela do Caso 1.

Desse modo, pela regra de inferência por casos, temos

$$\begin{array}{l} H_1 \rightarrow T \\ H_2 \rightarrow T \\ \hline \therefore H_1 \wedge H_2 \rightarrow T \end{array}$$

Portanto, como $H \rightarrow H_1 \vee H_2$ e $H_1 \wedge H_2 \rightarrow T$, segue que $H \rightarrow T$. □

2ª Demonstração: Método Informal - MI

Hipótese: O quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

Tese: A área do paralelogramo $ABCD$ é igual ao produto da medida da base b pela medida da altura h, isto é, $[ABCD] = b \times h$.

Consideremos $ABCD$ um paralelogramo. Assim, pela definição de paralelogramo, temos que $(\overline{AB} \parallel \overline{DC})$ e $(\overline{AD} \parallel \overline{BC})$. Traçando a diagonal $\overline{AC}$, temos que $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$, pelo caso de congruência LLL (Figura 30). Dessa forma, temos que $[ABCD] = [ABD] + [CDB]$. Como $[ABD] = [CDB]$, já que $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$, segue que $[ABCD] = 2 \times [ABD]$. Portanto, como a área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base b pela medida da altura h, temos $[ABCD] = 2 \times [ABD] = 2 \times \frac{b \times h}{2} = b \times h$. □

Em suma, ao comparar os dois modelos de demonstrações apresentados, podemos observar algumas vantagens, bem como desvantagens, de cada qual deles, as quais registramos no Quadro 28 a seguir.

Quadro 28 – Vantagens e desvantagens dos métodos dedutivo e informal

	Método Dedutivo	**Método Informal**
Vantagens	- Permite inferir novas informações verdadeiras a partir de verdadeiras informações. - Facilidade para verificação de cada etapa de uma demonstração. - Consistência do argumento. - Forma mecânica.* - Prova por computador.*	- Uso da linguagem natural (em nosso caso, a Língua Portuguesa). - Forma da escrita.
Desvantagens	- Alto grau de formalidade. - Pouca literatura para pesquisa	- Dificuldades na verificação de cada passo de uma demonstração. - Falta de solidez do argumento. - Pouco uso da linguagem matemática.

Fonte: Keedy (1969) (* Grifo nosso)

Em geral, segundo Keedy (1969), o método formal, por causa da sua facilidade na verificação de cada etapa de uma demonstração, bem como a continuidade, é recomendado para o uso de iniciantes, ou seja, para alunos do Ensino Médio. No entanto, à medida que se ganha experiência e maturidade, o professor pode optar por apresentar uma demonstração mais resumida e com menos formalidade, aproximanda daquela do método informal.

Essa transição – do método dedutivo para o informal – deve ser um dos objetivos dos professores ao trabalharem com demonstrações matemáticas, especialmente geométricas, já que grande parte dos artigos matemáticos e livros avançados, com os quais os alunos do Ensino Médio terão contato ao ingressarem no Ensino Superior, quase sempre usam um estilo informal de provas escritas.

Por fim, como visto anteriormente, os estudantes brasileiros possuem grandes dificuldades em formular, empregar e interpretar a Matemática, o que está intimamente relacionado às dificuldades em leitura e interpretação de texto na linguagem natural (no nosso caso, a Língua Portuguesa). Nesse sentido, ao invés do uso da linguagem natural ser vantajosa, passa a ser desvantajosa. Portanto, como relatado anteriormente, por sua característica mecânica, o método formal tem mais possibilidades de aprendizado do que o método informal.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Geometria, assim como toda a Matemática do Ensino Médio, deve ser organizada de forma que proporcione aos alunos o desenvolvimento do pensamento matemático. Para isso, é necessário valorizar o raciocínio matemático em todas as suas etapas (formulação, interpretação, solução e generalização). Nesse sentido, esse trabalho mostrou que o processo de ensino deve valorizar o uso de elementos lógico-dedutivos, de fórmulas e proposições matemáticas, durante todo o processo de demonstrações de teoremas da Geometria Plana (ou soluções de problemas).

A questão central que norteou todo o nosso trabalho foi a importância da Lógica para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática. O nosso objetivo foi mostrar, por meio de diversas aplicações da Lógica Matemática em Geometria Plana, a importância dos elementos lógicos dedutivos no Ensino Médio como instrumento facilitador do processo de ensino e aprendizagem em Matemática, especialmente em Geometria Plana. Dessa questão central surgiram outras: qual o papel da Lógica no processo de ensino e aprendizagem em Matemática? Como associar a Lógica e a Matemática no Ensino Médio?

Analisando o primeiro questionamento sobre o papel da Lógica no processo de ensino e aprendizagem em Matemática, este trabalho mostrou, por meio, principalmente, da Seção 2.3, que a Lógica deverá ser trabalhada de forma paralela ao currículo tradicional, isto é, ela tem como objetivo servir de suporte para a aprendizagem, não somente em Geometria Plana, mas em toda Matemática.

De modo geral, este trabalho mostrou, principalmente por meio das diversas aplicações, que a Lógica é essencial para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática, especialmente em Geometria Plana, já que, por meio dessa, o aluno é capaz de utilizar resultados já demonstrados anteriormente para demonstrar outros.

O segundo questionamento surgiu a partir da necessidade de apresentar o entrelaçamento dos conteúdos da Lógica com a Matemática do Ensino Médio. Teoricamente, como mencionados nos parágrafos acima, a Lógica Matemática é mostrada como um instrumento facilitador da aprendizagem em Matemática. No entanto, como vincular a Lógica no Ensino Médio de forma produtiva? Nesse sentido, apresentamos diversas aplicações da Lógica Matemática em Geometria Plana voltadas para os conteúdos do Ensino Médio.

Essas aplicações foram desenvolvidas por meio dos métodos formal e informal, de modo que permitissem ao professor optar, à medida que os conteúdos da Geometria Plana progridam, por apresentar demonstrações matemáticas mais resumidas, isto é, com menos formalidade, que se aproximem cada vez mais do modelo informal.

Por fim , é importante salientar que o trabalho desenvolvido nesta pesquisa corresponde a uma parte muito pequena perante o universo das aplicações da Lógica em Matemática. Em outras palavras, por meio dos métodos utilizados no decorrer deste trabalho, os professores poderão trabalhar, de maneira análoga, os conteúdos de Aritmética e Álgebra, por exemplo.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, G. da S.; ORTIGÃO, M. I. R. Letramento em matemática: um estudo a partir dos dados do pisa 2003. **Boletim de Educação Matemática**, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 26, n. 42 A, 2012.

ALENCAR FILHO, E. de. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: NBL Editora, 2011.

ALMEIDA, A.; TEIXEIRA, C.; MURCHO, D.; MATEUS, P.; GALVãO, P. A arte de pensar - 11º ano. **Lisboa: Didáctica Editora**, 2008.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, Ltda, 1974.

BRASIL. **PCN+ Matemática**. Ministério da Educação e Cultura, Brasília, DF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 05 dez. 2017.

______. **PCN+ Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Ministério da Educação e Cultura, Brasília, DF, 2007. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 05 dez. 2017.

BRASIL, I. N. de Estudos e P. E. A. T. I. **Pisa 2015: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes na avaliação**. São Paulo: Fundação Santillana, 2016.

______. Sistema de avaliação da educação básica - edição 2015: Resultados. Diretoria de Avaliação da Educação Básica – DAEB/INEP, 2016.

______. Enem 2016: Resultados indivíduais. Ministério da Educação - MEC, 2017.

BRASIL, S. de E. B. **Orientações curriculares para o ensino médio - volume 2**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

CASTRUCCI, B. **Introdução à Lógica Matemática**. 6. ed. São Paulo: Nobel, 1986.

CHAUÍ, M. **Convite à filosofia**. São Paulo: Ática, 1988.

CLEMENS, S. R.; O'DAFFER, P. G.; COONEY, T. J. **Geometría con aplicaciones y solución de problemas**. México: Addison Wesley Longman, 1998.

COMMONS, W. **Newton da Costa.jpg — Wikimedia Commons , o repositório de mídia gratuito**. 2014. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Newton_da_Costa.jpg&oldid=116179950>. Acesso em: 1 de Fev. 2018.

______. **George Boole color.jpg — Wikimedia Commons , o repositório de mídia gratuito**. 2015. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:George_Boole_color.jpg&oldid=158630735>. Acesso em: 06 Dez. 2017.

______. **Bertrand Russell, 1907.jpg — Wikimedia Commons , o repositório de mídia gratuito**. 2016. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Bertrand_Russell,_1907.jpg&oldid=225326198>. Acesso em: 31 de Jan. 2018.

_____. **Aristotle Altemps Inv8575.jpg — Wikimedia Commons , o repositório de mídia gratuito**. 2017. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Aristotle_Altemps_Inv8575.jpg&oldid=267303847>. Acesso em: 06 Dez. 2017.

_____. **Gottfried Wilhelm Leibniz — Wikimedia Commons , o repositório de mídia gratuito**. 2017. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=Gottfried_Wilhelm_Leibniz&oldid=237990144>. Acesso em: 06 Dez. 2017.

COPI, I. M. **Introdução à lógica**. Tradução: Álvaro Cabral. 2. ed. São Paulo: Bookman, 1978.

DESCARTES, R. **Discurso do Método**. Tradução: Maria Ermantina Galvão. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

D'AMBRÓSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje. **Temas e Debates. SBEM. Ano II**, v. 2, p. 15–19, 1989.

FALVO, J. F.; AMARAL, A. L. S. N. d. Brasil no pisa 2015: análise pedagógica e indicadores sociais, educacionais e econômicos. Diretoria de Tecnologia e Educação (DIRET). Unidade de Estudos e Prospectiva (UNIEPRO), 2017.

_____. Brasil no pisa 2015: comparação dos resultados no contexto nacional e internacional. Diretoria de Tecnologia e Educação (DIRET). Unidade de Estudos e Prospectiva (UNIEPRO), 2017.

FEITOSA, H. de A.; PAULOVICH, L. **Um prelúdio à lógica**. São Paulo: Editora UNESP, 2005.

GOMES, E. B. **Prosposta de Abordagem do ensino do Raciocínio lógico no ensino médio**: 2015. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal do Tocantins, Palmas - TO, 2015.

HEGENBERG, L. **Lógica**. 3. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

KEEDY, M. L. **A modern introduction to basic mathematics**. [S.l.]: Addison-Wesley, 1969.

LEFEBVRE, H. **Lógica formal, lógica dialéctica**. Tradução: Carlos Nelson Coutinho. 5. ed. Rio de Janeiro: Civilização brasileira, 1991.

MACHADO, N. J. **Matemática e realidade**: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. 7. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

MANOEL, W. A. **A importância do ensino de geometria nos anos iniciais do ensino fundamental**: razões apresentadas em pesquisas brasileiras. 2014. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas - SP, 2014.

MARTINS NETO, R. d. S. **Lógica Matemática no Ensino Médio**: Uma proposta para mobilizar raciocínios. 2016. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifíca Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, São Paulo - RN, 2008.

MARTINS, P. R. G. d. M. V. **Matemática sem números**: uma proposta de atividade para o ensino da lógica. 2014. 82 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Estadual de Maringá, Maringá - PR, 2014.

MOISE, E.; DOWNS, F. L. **Geometria Moderna**. Tradução Renate G. Watanabe e Dorival A. Mello. São Paulo: Editôra Edgard Blucher ltda, 1979. v. 1.

MORAES, C. R. de. **Uma História da Lógica no Brasil**: 2007. 135 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, São Paulo, 2007.

MORAIS FILHO, D. C. de. **Um convite à Matemàtica**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MOREIRA, A. G. S. da C. **Elementos de História da Lógica**. Dissertação (Mestrado em Matemática/Educação) — Universidade Portucalense, Porto - Portugal, 2007.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria I**. Rio de Janeiro: Editora Francisco Alves, 1974.

MORGADO, A. C. d. O.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**: coleção profmat. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MORTARI, C. A. **Introdução à Lógica**. São Paulo: UNESP, 2001.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**: coleção profmat. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NASCIMENTO, J. A. do. **Explorando a Lógica Matemática no Ensino Básico**: 2016. 182 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal -RN, 2016.

OLIVEIRA, E. N. d.; MORETTO, A. **A importância da Lógica na aprendizagem**. 2009. Https://pt.scribd.com/document/150049122/A-IMPORTANCIA-DA-LOGICA-NA-APRENDIZAGEM. Acesso em: 17 out. 2017.

RAYMUNDO, G. M. C. **Os princípios da modernidade nas práticas educativas dos jesuítas**: 1998. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Maringá - PR, 1998.

RIBEIRO, P. R. M. História da educação escolar no Brasil: notas para uma reflexão. **Paidéia (Ribeirão Preto)**, scielo, p. 15 – 30, 07 1993. ISSN 0103-863X. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-863X1993000100003&nrm=iso>.

SÁ, C. C. de; ROCHA, J. **Treze viagens pelo mundo da matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SOUZA, J. N. de. **Lógica para Ciência da Computação**: uma introdução concisa. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

TINOCO, L.; SILVA, M. M. d. Argumentação no ensino de matemática. **VIII Encontro nacional de educação matemática**, v. 8, n. 1, p. 1–11, 2004.

VAZ, R. M. **Formalização do raciocínio lógico baseada na lógica matemática**: 2014. 109 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas - MS, 2014.