UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Suelma do Nascimento Brito Lôbo

Funções Logarítmicas e Aplicações

São Luís
2018

Suelma do Nascimento Brito Lôbo

Funções Logarítmicas e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Maxwell Mariano de Barros

Doutor em Matemática

São Luís

2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Lôbo, Suelma do Nascimento Brito.
Funções Logarítmicas e Aplicações / Suelma do Nascimento Brito Lôbo. - 2018.
62 f.

Orientador(a): Maxwell Mariano de Barros.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2018.

1. Aplicações. 2. Funções Logarítmicas. 3. Funções Reais. 4. Número e. I. Barros, Maxwell Mariano de. II. Título.

Suelma do Nascimento Brito Lôbo

Funções Logarítmicas e Aplicações

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em

BANCA EXAMINADORA

Prof. Maxwell Mariano de Barros

Doutor em Matemática

Prof.João Coelho Silva Filho

Doutor em Matemática

Prof.Valeska Martins de Souza

Doutor em Matemática

A minha família...

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus simplesmente por estar comigo.

A minha família pelo apoio, carinho e atenção.

Ao meu orientador e querido professor *Maxwell Mariano de Barros* pela disponibilidade e sincera orientação.

A professora *Valdiane Sales* por toda ajuda no repercurso ao PROFMAT.

Por fim, ao PROFMAT pela oportunidade de adquirir mais conhecimento pessoais e profissionais.

"Caiam mil ao seu lado e dez mil à sua direita, a você nada atingirá".

Salmo 91,7

RESUMO

Neste trabalho é apresentado o desenvolvimento das Funções Logarítmicas com aplicações. Para a fundamentação do desenvolvimento do tema são enunciadas as definições de números reais, funções e sequências. É caracterizada a Função Logarítmica e suas propriedades, seguida da definição geométrica dos logaritmos e a apresentação da base e, formalizando a definição do logaritmo natural. Justificando a pesquisa, são desenvolvidas aplicações em diversas áreas, ressaltando a necessidade e a importância das funções logarítmicas.

Palavras- chave: Funções reais, Funções Logarítmicas, Número e, Aplicações

ABSTRACT

In this work the development of Logarithmic Functions with applications is presented. Definitions of real numbers, functions and sequences are given for the development of the theme. It is characterized the Logarithmic Function and its properties, followed by the geometric definition of logarithms and the presentation of base e, formalizing the definition of the natural logarithm. Justifying the research, applications are developed in several areas, emphasizing the necessity and importance of the logarithmic functions.

Keywords: Real Functions, Logarithmic Functions, Number e, Applications

SUMÁRIO

1 Introdução

De acordo com o regimento do PROFMAT (ver [11]), tem se a orientação para trabalhar com assuntos do currículo de Matemática da Educação Básica e este é um dos motivos do tema escolhido- Logaritmos. Já afirmava Lima (1996, [n.p.]) a importância dos estudos dos logaritmos, estes "continuam, por motivos bem diversos, a merecer uma posição de destaque no ensino da Matemática, devido à posição central que ocupam nesta ciência e em suas aplicações [...] a função logarítmica e a sua inversa, constituem a única maneira de se descrever matematicamente a evolução de uma grandeza cuja taxa de crescimento (ou decrescimento) é proporcional à quantidade daquela grandeza existente num dado momento".

A partir deste ponto de vista, ou seja, da importância do tema, e sabendo através de relatos e experiências que a maneira como este conteúdo é apresentado geralmente causa nos alunos uma aversão e uma indiferença faz se a seguinte indagação: Existe outras possibilidades de desenvolvimento deste conteúdo?

Sabe-se que os livros didáticos adotados no ensino médio definem logaritmos a partir da exposição sobre potências e a definição das funções exponenciais. Esta apresentação didática do conteúdo causa alguns inconvenientes, entre eles o surgimento artificial do número e, uma base importante que surge naturalmente quando a definição do logaritmo natural é feita através de uma maneira geométrica, além da complicada evolução do conteúdo embasado nos exponenciais.

Assim, o principal objetivo neste texto é definir a função logaritmo natural através da área de uma faixa de hipérbole, isto é, uma definição mais simples pois depende apenas do conhecimento de área de uma figura plana e a caracterização dos logaritmos. Por isso para atingir este objetivo, inicia-se caracterizando as funções logarítmicas, suas propriedades e posteriormente, fazendo um estudo de áreas limitadas sobre os gráficos das funções.

Pensando ainda no impacto na prática didática em sala de aula, tem se como objetivo explanar alguns exemplos de aplicações, pois é de conhecimento que quando o aluno consegue associar o assunto trabalhado com questões práticas o aprendizado é mais profícuo. Assim abordam-se aplicações de Funções Logarítmicas em diversas áreas como a Física, Química, Biologia, Geografia e Economia.

O trabalho está dividido em cinco capítulos. No Capítulo 2 é explanado os conteúdos matemáticos que constituem predefinições para uma melhor compreensão da apresentação do tema central da dissertação, estas predefinições são: números reais, funções e sequências. No Capítulo 3, será caracterizado as funções logarítmicas, em seguida, é apresentado o cálculo da área de uma faixa de hipérbole, a fundamentação teórica que diferencia a maneira como os logaritmos serão definidos neste trabalho, ou seja, a definição geométrica dos logaritmos e por fim se dará a caracterização natural do número e e a definição de outras bases. No Capítulo 4 apresentam-se aplicações das funções logarítmicas em diversas áreas. Finaliza-se este trabalho com algumas considerações.

2 Números e Funções Reais

Este capítulo é preliminar para o desenvolvimento do tema **Funções Logarítmicas e Aplicações**. As definições neste servirão de base para os capítulos seguintes. Inicialmente será caracterizado o conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, como um corpo ordenado completo. Também definimos Funções Reais e por fim o limite de uma sequência e suas propriedades. Para uma leitura mais detalhada ver [1], [2], [4], [7], [8], [12].

2.1 Corpos

Definição 2.1. Um conjunto K será considerado um corpo, se nele estão definidas duas operações chamadas *adição* e *multiplicação*, que satisfazem algumas propriedades, denominadas de axiomas.

A adição associa cada par $x, y \in K$ a soma $x + y$, com os seguintes axiomas:
- Associatividade: Dados $x, y, z \in K$ tem-se

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

- Comutatividade: Dados $x, y, z \in K$ tem-se

$$x + y = y + x;$$

- Elemento neutro: Existe o elemento $0 \in K$ tal que

$$x + 0 = x, \text{ para todo } x \in K;$$

- Simétrico: Existe um elemento $-x \in K$ tal que,

$$x + (-x) = 0, \text{ para todo } x \in K.$$

A multiplicação associa cada par $x, y \in K$ o produto $x \cdot y$, com os seguintes axiomas:
- Associatividade: Dados $x, y, z \in K$ tem-se

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);$$

- Comutatividade: Dados $x, y, z \in K$ tem-se

$$x \cdot y = y \cdot x;$$

- Elemento neutro: Existe o elemento $1 \in K$ tal que

$$x \cdot 1 = x, \text{ para todo } x \in K;$$

- Inverso: Existe o elemento $x^{-1} \in K$ tal que,

$$x \cdot x^{-1} = 1, \text{ para todo } x \in K, \text{ com } x \neq 0.$$

E da junção das duas operações (adição e multiplicação), tem-se o último axioma

- Distributiva: Dados $x, y, z \in K$ tem-se

$$x \cdot (y + z) + z = x \cdot y + x \cdot z.$$

2.2 Corpos ordenados

Definição 2.2. Um corpo K é dito ordenado se contém um subconjunto S de K, chamado de conjunto de elementos positivos, obedecendo as seguintes condições:

(I)- A soma e o produto dos elementos positivos são positivos, ou seja, $x, y \in S$ tem-se

$$x + y \in S \text{ e } x \cdot y \in S.$$

(II)- Dado $x \in K$, apenas uma das verdades ocorre

$$x = 0 \text{ ou } x \in S \text{ ou } -x \in S.$$

Se $x \in S$, então os elementos $-x$ serão chamados de elementos negativos e o conjunto desses elementos será denotado por $-S$. Observe que $K = S \cup (-S) \cup 0$, com cada conjunto dois a dois disjunto. Em K a notação $x < y$ (lê-se: x é menor do que y) significa que $y - x \in S$. Se $x < y$ é equivalente a $y > x$, neste caso dizemos que y é maior do que x.

A relação de ordem no corpo ordenado K, obedece as seguintes propriedades:

1-Transitividade: Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

Demonstração. Sendo $x < y$ e $y < z$, temos que $y - x \in S$ e $z - y \in S$, logo pela condição (I) temos que,$(z - y) + (y - x) \in S \Rightarrow z - x \in S \Rightarrow x < z$. $\square$

2-Tricotomia: Dados $x, y \in K$, uma das seguintes alternaticas irá ocorrer

$$x = y \text{ ou } x < y \text{ ou } x > y.$$

Demonstração. Sendo $x, y \in K$, temos que $y - x = 0$ ou $y - x \in S$ ou $y - x \in -S$ consequentemente temos que $x = y$, $x < y$ e $x > y$ respectivamente. $\square$

3-Monotocidade da adição: Se $x < y$, então para todo $z \in K$, tem-se $x + z < y + z$.

Demonstração. Se $x < y$ então $y - x \in S$, mas $y - x = (y + z) - (x + z)$, logo $x + z < y + z$. $\square$

4-Monotocidade da multiplicação: Se $x < y$, então para todo $z > 0$, tem-se $xz < yz$ e para todo $z < 0$, tem-se $xz > yz$.

Demonstração. Se $x < y$ e $z > 0$, então $y - x \in S$ e $z \in S$, assim $(y - x)z \in S$, como $(y - x)z = yz - xz$, temos que $xz < yz$. Caso $z < 0$, tem-se $-z \in S$, logo $(y - x)(-z) \in S$, como $(y - x)(-z) = xz - yz$, temos que $xz > yz$. $\square$

2.2.1 Intervalos

Seja k um corpo ordenado. Dados $a, b \in K$, com $a < b$, denotaremos por:
(i) $[a, b]$ e chamaremos de intervalo fechado de extremos a, b o conjunto

$$\{x \in K; a \leq x \leq b\}.$$

(ii) $[a, b)$ e chamaremos de intervalo fechado à esquerda de extremos a, b o conjunto

$$\{x \in K; a \leq x < b\}.$$

(iii) $(a, b]$ e chamaremos de intervalo fechado à direita de extremos a, b o conjunto

$$\{x \in K; a < x \leq b\}.$$

(iv) (a, b) e chamaremos de intervalo aberto de extremos a, b o conjunto

$$\{x \in K; a < x < b\}.$$

(v) O conjunto $\{x \in K; x \leq b\}$ será denotado por $(-\infty, b]$ e chamado de intervalo ilimitado de extremo b fechado.

(vi) O conjunto $\{x \in K; x < b\}$ será denotado por $(-\infty, b)$ e chamado de intervalo ilimitado de extremo b aberto.

(vii) O conjunto $\{x \in K; x \geq a\}$ será denotado por $[a, +\infty)$ e chamado de intervalo ilimitado de extremo a fechado.

(viii) O conjunto $\{x \in K; x > a\}$ será denotado por $(a, +\infty)$ e chamado de intervalo ilimitado de extremo a aberto.

(ix) O conjunto $(-\infty, +\infty) = K$ será denotado por intervalo ilimitado.

Quando $a = b$ o intervalo fechado $[a, b]$ se reduz a um único ponto e será chamado de intervalo degenerado.

2.2.2 Valor absoluto

Definição 2.3. Dado $x \in K$, o valor absoluto de x, indicado por $|x|$ é:

$$|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0. \end{cases}$$

Observe que $|x| = max\{x, -x\}$, em que $max\{x, -x\}$ significa o máximo entre x e $-x$.

Teorema 2.2.1. *Sejam $x, a \in K$. As seguintes sentenças são equivalentes:*

(i) $-a \leq x \leq a$;

(ii) $x \leq a$ *e* $-x \leq a$;

(iii) $|x| \leq a$.

Demonstração. (i)$\Rightarrow$(ii) $-a \leq x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x$ e $x \leq a \Leftrightarrow a \geq -x$ e $x \leq a \Leftrightarrow x \leq a$ e $-x \leq a$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) $x \leq a$ e $-x \leq a \Leftrightarrow a \geq -x$ e $a \geq x \Leftrightarrow |x| \leq a$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) $|x| \leq a$ e sendo $|x| = max\{x, -x\}$, temos que $-a \leq x \leq a$. □

Corolário 2.1. *Dados $a, x, \delta \in K$. Tem- se $|x - a| < \delta$ se, e somente se, $a - \delta < x < a + \delta$.*

Demonstração. Com efeito, pelo Teorema 2.2.1, temos que $|x-a| < \delta \Longleftrightarrow -\delta \leq x-a \leq \delta$. Somando a a última sentença temos $a - \delta \leq x \leq a + \delta$. □

Teorema 2.2.2. *Seja x, y elementos de um corpo K. Então:*

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$;

2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Demonstração.

1. Sabendo que $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, somando membro a membro as desigualdades temos, $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$, logo $|x+y| \leq |x|+|y|$.

2. Sabendo que $|x \cdot y|^2 = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2$. Como $|x \cdot y|$ e $|x| \cdot |y|$ são ambos positivos, temos que $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

□

2.3 Corpo ordenado completo

Definição 2.4. Um conjunto $X \subset K$ é dito **limitado superiormente** quando existe algum $b \in K$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Se isso acontece, dizemos que b é uma cota superior de X. De maneira análoga, um conjunto $X \subset K$ é dito **limitado inferiormente** quando existe algum $a \in K$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$ e neste caso a é chamado de cota inferior de X.

Quando X é limitado superior e inferiormente ele será dito apenas **limitado**.

Sejam K um corpo ordenado e X um subconjunto de K limitado superiormente. Um elemento $b \in K$ é dito **supremo** de X, representado por $b = supX$, quando b for a menor das cotas superiores de X, ou seja:
1- para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;
2- se $c \in K$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$.

De maneira análoga, seja X limitado inferiormente. Um elemento $a \in K$ é dito **ínfimo** de X, representado por $a = infX$, quando a for a maior das cotas inferiores de X, ou seja:
1- para todo $x \in X$, tem-se $a \leq x$;
2- se $c \in K$ é tal que $c \leq x$ para todo $x \in X$ então $c \leq a$.

Definição 2.5. Um corpo ordenado K é dito completo quando todo subconjunto de K, não vazio, limitado superiormente, possui um supremo em K.

Assumiremos que $\mathbb{R}$, com as operações usuais de adição e multiplicação, é um corpo ordenado completo, chamado o corpo dos números reais.

Em termos de intervalo o corolário 2.1 diz que $|x - a| < \delta$ se, e somente se, x pertence ao intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$. Sabendo que $|x - a|$ é geometricamente a distância do ponto x ao ponto a, podemos dizer que o intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ de centro a e raio δ é formado por pontos cuja a distância a é menor que δ.

Seja $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais positivos. Observe que em $\mathbb{R}_+$ vale as seguintes propriedades:

- A soma e o produto dos elementos positivos são positivos, ou seja, $x, y \in \mathbb{R}_+$ tem-se:

$$x + y \in \mathbb{R}_+ \text{ e } x \cdot y \in \mathbb{R}_+.$$

- Dado $x \in \mathbb{R}$, apenas uma das alternativas ocorre

$$x = 0 \text{ ou } x \in \mathbb{R}_+ \text{ ou } -x \in \mathbb{R}_+.$$

Além disso $x > y$ implica dizer que $x - y \in \mathbb{R}_+$.

Dado $x \in \mathbb{R}_+$, temos que $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R}_+$ pela propriedade acima. Se $x \notin \mathbb{R}_+$, implica que $-x \in \mathbb{R}_+$, tendo $x^2 = (-x) \cdot (-x) \in \mathbb{R}_+$, podemos concluir que todo número real $x \neq 0$ tem quadrado positivo. Em particular, 1 é um número positivo pois $1^2 = 1$. Note ainda que $x \in \mathbb{R}_+$, se e somente se $x > 0$. De fato, se $x \in \mathbb{R}_+$, então $x = x - 0 \in \mathbb{R}_+$ que implica que $x > 0$. Por outro lado, se $x > 0$, então $x - 0 \in \mathbb{R}_+$ o que implica que $x \in \mathbb{R}_+$.

Sendo $1 > 0$, tem-se $1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < ...$, assim $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+$. Convencionaremos o conjunto dos naturais por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

2.4 Funções Reais

Definição 2.6. Sejam A e B dois conjuntos não vazios de números reais, uma correspodência que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$ é dita função.

O conjunto A é chamado de domínio da função, representado por D_f, o conjunto B chamado contradomínio da função e os elementos de B que estão associados pela correspodência aos elementos de A é chamado imagem da função, representado por Im_f.

$$\text{Notação: } f : A \to B \text{ (lê-se: } f \text{ de } A \text{ em } B)$$
$$x \mapsto y = f(x).$$

Exemplo 2.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é uma função que a cada $x \in \mathbb{R}$, transforma em outro número que é o quadrado de x, sendo o $D_f = \mathbb{R}$ e a $Im_f = \mathbb{R}_+$.

O gráfico de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados $(x, f(x))$ do produto cartesiano A x B, isto é,

$$G_f = \{(x, y) \in \mathrm{A}\, x\, \mathrm{B};\ y = f(x)\}.$$

Definição 2.7. Seja a função f definida no intervalo I. Diremos que f será crescente em I se,

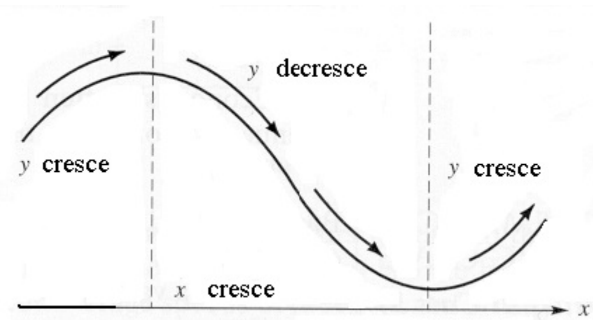
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \text{ para todo } x_1, x_2 \in I.$$

Por outro lado, f será decrescente em I se,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \text{ para todo } x_1, x_2 \in I.$$

Podemos observar na Figura 2.1 o crescimento e decrescimento de uma função de acordo com o intervalo analisado.

Figura 2.1: Gráfico de crescimento e decrescimento da função



Fonte: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap61s1.html

Sejam as funções $f : A \to B$ e $g : A' \to B'$, dizemos que $f = g$, se $A = A'$, $B = B'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Exemplo 2.2. As funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = |x|$, são iguais, pois $\sqrt{x^2} = |x|$,para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definição 2.8. Uma função $f : A \to B$ é dita limitada superiormente quando existir um $L \in B$ tal que $f(x) \leq L$ para todo $x \in A$. De maneira análoga, uma função $f : A \to B$ é dita limitada inferiormente quando existir um $l \in B$ tal que $l \leq f(x)$ para todo $x \in A$.

Uma função $f(x)$ é dita limitada no domínio de definição, quando for limitada superiormente e inferiormente, isto é, quando existir l e L pertencentes a imagem de f tal que $l \leq f(x) \leq L$. Analogamente, uma função é dita ilimitada quando for ilimitada superior e inferiormente. Como se pode observar graficamente nas Figuras 2.2 e 2.3 respectivamente

Figura 2.2: Função Limitada

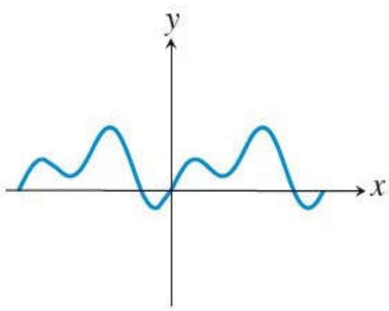
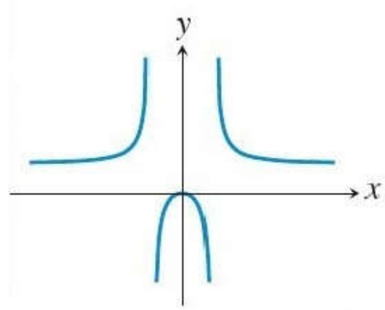


Figura 2.3: Função Ilimitada



Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/1717062/

2.4.1 Operações com funções

Dadas duas funções f e g, definimos:

-Soma de f e g por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, em que o domínio de $f + g$ é $D_f \cap D_g \neq \emptyset$.

-Produto de f e g por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, em que o domínio de $f \cdot g$ é $D_f \cap D_g \neq \emptyset$.

-Quociente de f e g por $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, em que o domínio de $\frac{f}{g}$ é $x \in D_f \cap D_g \neq \emptyset$, sendo $g(x) \neq 0$.

-Produto de f por uma constante k por $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$, em que o domínio de $D_{kf} = D_f$.

Definição 2.9. Uma função $f : A \to B$ é dita injetiva quando

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \text{ para quaisquer } x, y \in A$$

outra maneira é se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Exemplo 2.3. A função $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ é injetiva pois para todo $x_1, x_2 \in D_f$ sendo $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2}$.

Exemplo 2.4. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$ não é injetiva pois dado $x_1 \in \mathbb{R}$, temos que $x_1^2 = (-x_1)^2$.

Definição 2.10. Uma função $f : A \to B$ é dita sobrejetiva quando para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo 2.5. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = x^2$ é sobrejetiva, pois para todo $y \in \mathbb{R}_+$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^2$, bastando tomar $x = \pm\sqrt{y}$.

Definição 2.11. Uma função $f : A \to B$ é dita bijetiva quando for injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

Definição 2.12. Sejam as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, sendo o D_g igual ao contradomínio de f. A função dada por

$$g(f(x)) = y \text{ para todo } x \in A$$

é chamada de função composta de g e f e denotada por gof.

Exemplo 2.6. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$, a função composta gof é

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|, x \in \mathbb{R}$$

e a função composta fog é definida por

$$(\text{fog})(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, x \in \mathbb{R}_+.$$

Definição 2.13. Seja $f : A \to B$ uma função bijetiva. A função $g : B \to A$ definida por $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ é chamada de função inversa de f, denotada por f^{-1}, onde o $D_g = Im_f$ e $Im_g = D_f$.

Uma função que admite inversa é dita uma função inversível.

Os gráficos de f e da sua inversa g são simétricos em relação à reta $y = x$ que representa a bissetriz dos quadrantes impares. Temos assim que,

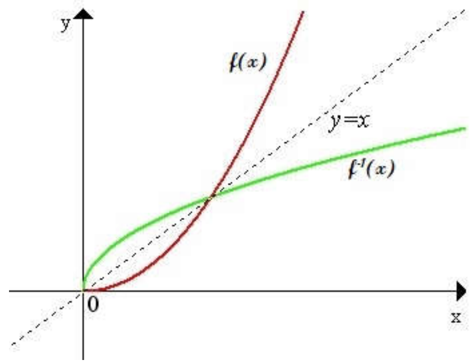
$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y) \Leftrightarrow (y, x) \in G_g$$

Exemplo 2.7. A função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = x^2$ é bijetiva, logo admite inversa, $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$, isto é,

$$f(y) = x \Leftrightarrow y^2 = x \Leftrightarrow y = \sqrt{x},$$

ou seja, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, conforme Figura 2.4

Figura 2.4: Gráfico da função $f(x)$ e da sua inversa.



Fonte: https://www.infopedia.pt/funcao-inversa

2.5 Sequências

Definição 2.14. Uma sequência de números reais é uma função $n \mapsto a_n$, definida no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ a valores no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, sendo a_n a imagem do número natural n denominado o n-ésimo termo da sequência.

Os termos da sequência são representados por $a_1, a_2, ..., a_n, ...$.

Exemplo 2.8. A sequência $a_n = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, define os seguintes termos $1, 1/2, 1/3, ..., 1/n, ...$.

Exemplo 2.9. A sequência $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ define os seguintes termos $1, 1, 1..., 1...$.

Definição 2.15. Uma sequência a_n é dita limitada superiormente quando existe um $b \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De maneira análoga, uma sequência a_n é dita limitada inferiormente quando existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência a_n é dita limitada quando for limitada superiormente e inferiormente, isto é, quando existe um $c > 0$ tal que $|a_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.16. Uma sequência a_n é dita não decrescente quando $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ...$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se $a_1 < a_2 < ... < a_n < ...$ então será dita crescente, quando $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq ...$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência será não crescente, se $a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$ então será dita decrescente.

As sequências não-decrescentes, crescentes, não-crescentes e decrescentes são chamadas de monótonas.

Obs: toda sequência não decrescente é limitada inferiormente pelo seu primeiro termo, assim como toda sequência não crescente é limitada superiormente pelo seu primeiro termo.

Exemplo 2.10. No exemplo 2.8, temos que a sequência é monótona decrescente, limitada.

Exemplo 2.11. No exemplo 2.9, temos uma sequência simultâneamente monótona não-decrescente e não-crescente, limitada.

Exemplo 2.12. A sequência $a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ é crescente e limitada pois,

$$a_n < 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + ... + \tfrac{1}{2^{n-1}} < 3, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 2.13. Considere a sequência $b_n = (1 + 1/n)^n = [(n+1)/n]^n$. Pela fórmula do binômio de Newton

$$b_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} =$$
$$1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + ... + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})...(1 - \frac{n-1}{n}).$$

A sequência b_n é crescente, pois é uma soma de parcelas positivas e cada parcela cresce com n, assim como o número de parcelas.Temos também que $b_n < a_n$ (sendo a_n a sequência do exemplo 2.12) tendo assim $b_n < 3$ para $n \in \mathbb{N}$, logo b_n é uma sequência limitada.

2.5.1 Limite de uma sequência

Definição 2.17. O número real a é limite da sequência a_n de números reais quando dado um número real $\varepsilon > 0$, obtém-se um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos os termos a_n, com $n > n_0$ temos que $|a_n - a| < \varepsilon$.

Notação: $\lim a_n = a$ ou $\lim a_n = a$.

Assim $\lim a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_o \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

Uma sequência que possui limite é chamada de convergente, caso ela não possua será chamada de divergente. Quando $\lim a_n = a$ diremos que a sequência a_n converge (ou tende) para a escrevendo $a_n \to a$

Exemplo 2.14. A sequência $a_n = 1/n$ é convergente e seu limite é zero, pois dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/\varepsilon$. Assim $n > n_0 \Rightarrow 1/n < 1/n_o < \varepsilon$, ou seja, $n > n_o \Rightarrow |1/n - 0| < \varepsilon$. Portanto $\lim 1/n = 0$.

Exemplo 2.15. A sequência $a_n = 1$ é convergente e tem limite igual a 1, isto é, $\lim 1 = 1$.

Teorema 2.5.1. *(Unicidade do limite) Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes.*

Demonstração. Seja $\lim a_n = a$. Considere $b \neq a$ e tomando $\varepsilon > 0$ e os intervalos $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ disjuntos. Como $\lim a_n = a$, então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ temos que $|a_n - a| < \varepsilon$, ou seja, $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e portanto $a_n \notin (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ para todo $n > n_0$, com $\lim a_n = a$ único. □

Teorema 2.5.2. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $\lim a_n = a$. Tomando $\varepsilon = 1$, então existe um $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ temos que $|a_n - a| < \varepsilon$, ou seja, $a_n \in (a - 1, a + 1)$. Considerando o conjunto finito $\{a_1, a_2, ..., a_{n_0}, a - 1, a + 1\}$, com c e d sendo o menor e o maior (respectivamente) elementos deste conjunto, logo todos os termos da sequência a_n estão contidos no intervalo $[c, d]$, assim a sequência é limitada. □

Teorema 2.5.3. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Considere a sequência a_n monótona não-decrescente, ou seja, $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ...$ e limitada. Tome a como o supremo da sequência. Mostraremos que a_n é convergente e que $\lim a_n = a$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, como $a - \varepsilon < a$,então $a - \varepsilon$ não é cota superior de a_n. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < a_n$. Como a sequência é monótona, $n > n_0 \Rightarrow a_{n_0} \leq a_n$ e portanto $a - \varepsilon < a_n$. Como $a_n \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, logo $\lim a_n = a$. □

Exemplo 2.16. As sequências $a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ e $b_n = (1 + 1/n)^n$ como foi visto nos exemplos 2.12 e 2.13 são mónotonas limitadas, logo são convergentes. Escrevemos

$\lim a_n = e$ (**o número** $e = 2,7182$, chamado de número de Euler, com aproximação de quatro algarismos decimais exatos). Afirmamos ainda que $\lim b_n = \lim a_n$. De fato, sendo $b_n < a_n$ para todo n, temos que $\lim b_n \leq \lim a_n$. Por outro lado, para todo $n > p$, temos

$$b_n \geq 1 + 1 + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n}) + \tfrac{1}{3!}(1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n}) + ... + \tfrac{1}{p!}(1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n})...(1 - \tfrac{p-1}{n}).$$

Fixando arbitrariamente $p \in \mathbb{N}$ e fazendo n tender para infinito, temos

$$\lim_{n\to\infty} b_n \geq 1 + 1 + 1/2! + ... + 1/p! = a_p,$$

assim $\lim_{n\to\infty} b_n \geq \lim_{p\to\infty} a_p = e$, para todo $p \in \mathbb{N}$. Concluímos que $\lim b_n = \lim a_n = e$.

Teorema 2.5.4. *Se* $\lim a_n = a > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \Rightarrow a_n > 0$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = a/2$, temos que

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = (a/2, 3a/2),$$

isto é, $a_n > a/2$, logo $n > n_0 \Rightarrow a_n > 0$. □

Corolário 2.2. *Sejam* a_n *e* b_n *sequências convergentes. Se* $a_n \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então* $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Demonstração. Se $\lim a_n > \lim b_n$, então $\lim a_n - \lim b_n = \lim(a_n - b_n) > 0$, tendo $a_n - b_n > 0$. □

2.5.2 Propriedades Operatórias

Teorema 2.5.5. *Se* $\lim a_n = 0$ *e* b_n *é uma sequência limitada (convergente ou não), então* $\lim a_n \cdot b_n = 0$.

Demonstração. Existe $c > 0$ tal que $|y_n| < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim a_n = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{c}$. Assim,

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon,$$

logo $\lim a_n \cdot b_n = 0$. □

Teorema 2.5.6. *- Se* $\lim a_n = a$ *e* $\lim b_n = b$*, então:*

1. $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$*;*

2. $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$*;*

3. $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$*, se* $b \neq 0$*.*

Demonstração. 1. Dado $\varepsilon > 0$, existem n_1 e n_2 pertencentes aos naturais tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ e } n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Considere $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, então $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$, assim

$$n > n_0 \Rightarrow |(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| < \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo $\lim(a_n+b_n) = a+b$ como se queria mostrar. De maneira análoga $\lim(a_n-b_n) = a-b$.

2. Temos que,

$$a_nb_n - ab = a_nb_n - a_nb + a_nb - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b.$$

Pelo Teorema 2.5.2, podemos concluir que a_n é limitada, além disso $\lim(b_n - b) = \lim(a_n - a) = 0$. Pelo Teorema 2.5.5, temos que $\lim[a_n(b_n-b)] = 0$ e $\lim[(a_n-a)b] = 0$ e por (1) temos que

$$\lim(a_nb_n - ab) = \lim[a_n(b_n - b) + (a_n - a)b] = 0,$$

assim $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

3. Como $\lim b_nb = b^2$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow b_nb > \frac{b^2}{2},$$

assim$\frac{1}{b_nb} < \frac{2}{b^2}$, sendo a sequência $\frac{1}{b_nb}$ limitada. Temos que

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{ba_n - ab_n}{b_nb} = (ba_n - ab_n)\frac{1}{b_nb} \text{ e como } \lim(ba_n - ab_n) = ab - ab = 0,$$

pelo Teorema 2.5.5, podemos concluir que

$$\lim(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}) = 0 \Rightarrow \lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}.$$

□

3 Funções Logarítmicas

Iniciamos o Capítulo caracterizando os logaritmos e estabelecendo suas propriedades. Expomos a área de uma faixa de hipérbole através dos métodos de aproximação por retângulos e aproximação por trapézios, introduzindo assim a concepção geométrica dos logaritmos naturais. Apresentamos o número e e o Teorema que mostra o número e como limite. Os conteúdos abordados neste Capítulo podem ser vistos em [5], [6], [9], [10], [13]

Definição 3.1. Uma função $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é denominada função logarítmica, se obedece os seguintes axiomas:

1- L é uma função crescente;

2- $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}_+$.

A imagem de $x \in \mathbb{R}_+$ por L, ou seja, $L(x)$ é chamada de logaritmo de x.

Segue do axioma 2, que se $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, então

$$L(x \cdot y \cdot z) = L((x \cdot y) \cdot z) = L(x \cdot y) + L(z) = L(x) + L(y) + L(z),$$

consequentemente para o produto de n fatores, teremos,

$$L(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n) = L(x_1) + L(x_2) + ... + L(x_n) \text{ com } x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}_+.$$

3.1 Propriedades

Como consequência dos axiomas que caracterizam as funções logarítmicas, temos as seguintes propriedades:

P1- Uma função logarítmica é sempre injetiva.

Demonstração. Se $x \neq y$, com $x, y \in \mathbb{R}_+$, então $x < y$ (ou $y < x$), por (1) podemos concluir que $L(x) < L(y)$ (ou $L(y) < L(x)$). Sendo assim, $x \neq y \Rightarrow L(x) \neq L(y)$. □

P2- O logaritmo de 1 é zero.

Demonstração. Temos que $L(1) = L(1 \cdot 1)$ por (2) temos que $L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1)$, consequentemente $L(1) = 0$. □

P3- Os números maiores que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores que 1 têm logarítmos negativos.

Demonstração. Por 1, temos que se $0 < x < 1 < y$, então $L(x) < L(1) < L(y)$ e ainda por P2, podemos concluir que $L(x) < 0 < L(y)$. □

P4- Para todo $x > 0$, temos que $L(1/x) = -L(x)$.

Demonstração. Note que $x \cdot (1/x) = 1$. Então por 1 e P2, temos

$$L(x \cdot 1/x) = L(1) \Rightarrow L(x) + L(1/x) = 0 \Rightarrow L(1/x) = -L(x).$$

□

P5-Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$, temos que $L(x/y) = L(x) - L(y)$.

Demonstração. Por 2 e P4 temos que

$$L(x/y) = L(x \cdot 1/y) = L(x) + L(1/y) = L(x) - L(y).$$

□

P6- Para todo $x \in \mathbb{R}_+$ e todo número racional r, temos que $L(x^r) = rL(x)$.

Demonstração. Considere inicialmente $r = n$, sendo $n \in \mathbb{N}$, temos então $L(x^n) = L(x \cdot x \cdot ... \cdot x) = L(x) + L(x) + ... + L(x) = nL(x)$. Para $r = 0$, temos que $x^0 = 1$, assim $L(x^0) = L(1) = 0 = 0 \cdot L(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}_+$. Para $r = -n$, com $n \in \mathbb{N}$, temos $x^n \cdot x^{-n} = 1$, assim

$$L(x^n \cdot x^{-n}) = L(1) \Rightarrow L(x^n) + L(x^{-n}) = 0 \Rightarrow L(x^{-n}) = -L(x^n).$$

Finalmente $r = p/q$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, temos $(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p$, assim $L((x^r)^q) = q \cdot L(x^r)$ e ainda $L((x^r)^q) = L(x^p) = p \cdot L(x)$, logo

$$q \cdot L(x^r) = p \cdot L(x) \Rightarrow L(x^r) = p/q \cdot L(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}_+.$$

□

P7-Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é ilimitada, superior e inferiormente.

Demonstração. Suponha $\beta \in \mathbb{R}$. Tome um número natural n tal que $n > \beta/L(2) \Rightarrow n \cdot L(2) > \beta$, (pois $L(2)$ por P3 é positivo) e como $n \cdot L(2) = L(2^n)$, logo $L(2^n) > \beta$. Considerando $x = 2^n$, temos que, $L(x) > \beta$ e concluímos assim que L é ilimitada superiormente.Por outro lado, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, como demonstrado na primeira parte, temos que existe $x \in \mathbb{R}_+$ tal que $L(x) > -\alpha$. Pondo $y = 1/x$, temos $L(y) = L(1/x) = -L(x)$. Assim $-L(x) < \alpha$, logo $L(y) < \alpha$, concluindo portanto que L ilimitada inferiormente. □

Teorema 3.1.1. *Dadas as funções logarítmicas $L, M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c \cdot L(x)$, para todo $x > 0$.*

Demonstração. Supondo inicialmente que exista um número $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Temos que, $L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r)$, isto é, $L(a^r) = M(a^r)$ para todo r racional.

Supondo agora que exista $b > 0$ tal que $L(b) < M(b)$. Escolhendo um $n \in \mathbb{N}$ de modo que $n \cdot [M(b) - L(b)] > L(a)$, tem-se

$$L(a^{\frac{1}{n}}) = \tfrac{1}{n} \cdot L(a) < M(b) - L(b).$$

Denotando $L(a^{\frac{1}{n}}) = c$, temos que $c, 2c, 3c...$ dividem $\mathbb{R}_+$ em intervalos justapostos, de mesmo comprimento c. Sendo $c < M(b) - L(b)$, então pelo menos um desses números, digamos mc, pertence ao intervalo $(L(b), M(b))$. Como $mc = mL(a^{\frac{1}{n}}) = L(a^{\frac{m}{n}})$, podemos concluir que $L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}})$

Assim temos que

$$L(b) < mc < M(b) \Rightarrow L(b) < L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}}) < M(b).$$

Sendo L e M funções crescentes, podemos concluir da primeira desigualdade que $b < a^{\frac{m}{n}}$ e da segunda desigualdade que $a^{\frac{m}{n}} < b$. Por essa contradição temos que b não existe, logo $L(x) = M(x)$, para todo $x > 0$

Agora considere as funções logarítmicas L e M. Como $2 > 1$, temos que $L(2) > 0$ e $M(2) > 0$ e seja $N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a função logarítmica definida por $N(x) = cL(x)$, onde $c = M(2)/L(2)$. Temos que

$$N(2) = cL(2) = [M(2)/L(2)]L(2) = M(2).$$

Podemos generalizar que $N(x) = M(x)$ para todo $x > 0$, isto é, $cL(x) = M(x)$ para todo $x > 0$. □

Lema 3.1.1. *Seja a função logarítmica $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Dados dois números quaiquer $u, v \in \mathbb{R}$, existe $x > 0$, tal que $u < L(x) < v$.*

Este Lema significa que todo intervalo (u, v) contém ao menos um valor $L(x)$ da função L.

Teorema 3.1.2. *Toda função logarítmica L é sobrejetiva.*

Demonstração. Devemos mostrar que dado qualquer número real b, existe um número real positivo α, tal que $L(\alpha) = b$. Iremos achar α, através da determinação de cada inteiro que compõem a sua representação decimal, isto é,

$$\alpha = a_0, a_1a_2...a_n... = a_o + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...,$$

onde a parte inteira a_0 é um número inteiro qualquer e os algarismos decimais $a_n, n \geq 1$, podem assumir os valores $0, 1, 2, ..., 9$.

Inicialmente determinaremos o a_0. Sabendo que a função logarítmica é crescente ilimitada, é sempre possível achar números inteiros k tais que $L(k) > b$. Seja $a_0 + 1$ o menor inteiro tal que $L(a_0 + 1) > b$. Então $L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1)$.

Em seguida, considere os números

$$a_0, a_0 + \frac{1}{10}, a_0 + \frac{2}{10}, ..., a_0 + \frac{9}{10}, a_0 + \frac{10}{10}.$$

Como $L(a_0) \leq b < L(a_0+1)$, devem existir dois elementos consecutivos α_1 e $\alpha_1 + \frac{1}{10}$ nessa sequência, tais que $L(\alpha_1) \leq b < L(\alpha_1 + 1/10)$, isto é, deve existir a_1 inteiro, $0 \leq a_1 \leq 9$, tal que, tendo

$$\alpha_1 = a_0, a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10},$$

temos que, $L(\alpha_1) \leq b < L(\alpha_1 + 1/10)$.

Analogamente, sejam os números

$$\alpha_1, \alpha_1 + \frac{1}{10^2}, \alpha_1 + \frac{2}{10^2}, ..., \alpha_1 + \frac{9}{10^2}, \alpha_1 + \frac{10}{10^2}$$

existe a_2, $0 \leq a_2 \leq 9$, tal que,

$$\alpha_1 = a_0, a_1a_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2},$$

temos que $L(\alpha_2) \leq b < L(\alpha_2 + 1/10^2)$.

Continuando este processo, obteremos a representação decimal de um número real

$$\alpha = a_0, a_1a_2...a_n... = a_o + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

de maneira que

$$\alpha_n = a_0, a_1a_2...a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} ... + \frac{a_n}{10^n},$$

temos que $L(\alpha_n) \leq b < L(\alpha_n + 1/10^n)$ para todo $n \geq 0$.

Supondo $L(\alpha) < b$, pelo Lema anterior temos que existe um $x > 0$ tal que $L(\alpha) < L(x) < b$. Sendo L crescente $L(\alpha) < L(x) < b \Rightarrow \alpha < x$. Tomando n tão grande de maneira que

$$x - \alpha > 1/10^n \Rightarrow \alpha + 1/10^n < x,$$

logo

$$\alpha_n + 1/10^n \leq \alpha + 1/10^n < x, \text{ tendo } b < L(a_n + \tfrac{1}{10^n}) < L(x)$$

o que é um absurdo.

De maneira análoga, para $L(x) > b$, chega-se ao absurdo. Logo podemos concluir que $L(\alpha) = b$ □

Corolário 3.1. *Toda função logarítmica $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é bijetiva.*

Sendo a função logarítmica $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bijetiva, temos então que existe um único número $a > 0$, chamado de base do sistema de logaritmos L tal que $L(a) = 1$.

$$L_a(x) \text{ logaritmo de base } a.$$

Seja $L_a(a) = L_b(b) = 1$. Pelo Teorema 3.1.1, temos que existe uma constante $c > 0$ tal que,

$$L_b(x) = c \cdot L_a(x), \tag{3.1}$$

para todo $x > 0$.

Considerando $x = a$, em 3.1, então $L_b(a) = c \cdot L_a(a) \Rightarrow L_b(a) = c$. Assim

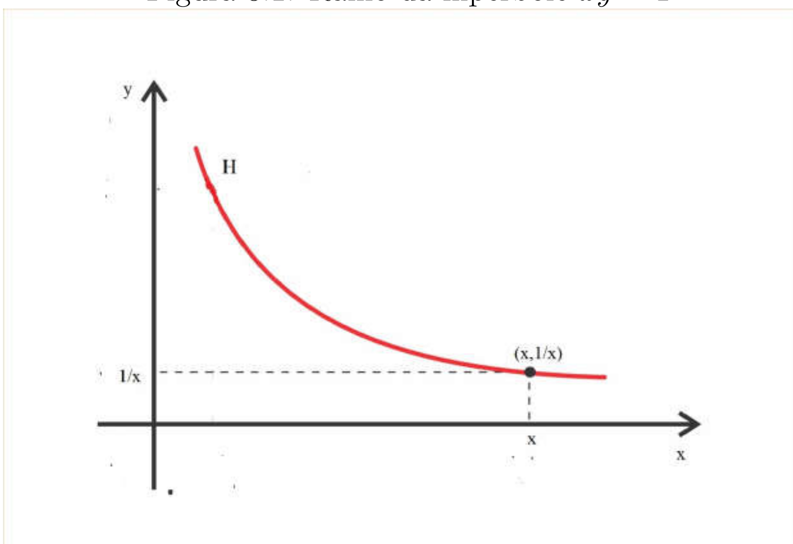
$$L_b(x) = L_b(a) \cdot L_a(x) \text{ para todo } x > 0.$$

Esta sentença é chamada de mudança de base de logaritmos.

3.2 Área de uma faixa de hipérbole

Seja H o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, com $x > 0$. Geometricamente H é o ramo da hipérbole contido no primeiro quadrante, conforme Figura 3.1.

Figura 3.1: Ramo da hipérbole $xy = 1$



Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

A região limitada pelo ramo da hipérbole H e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo a, b reais positivos com $a < b$, será chamada de faixa de hipérbole (ver Figura 3.2) e denotada por H_a^b, isto é,

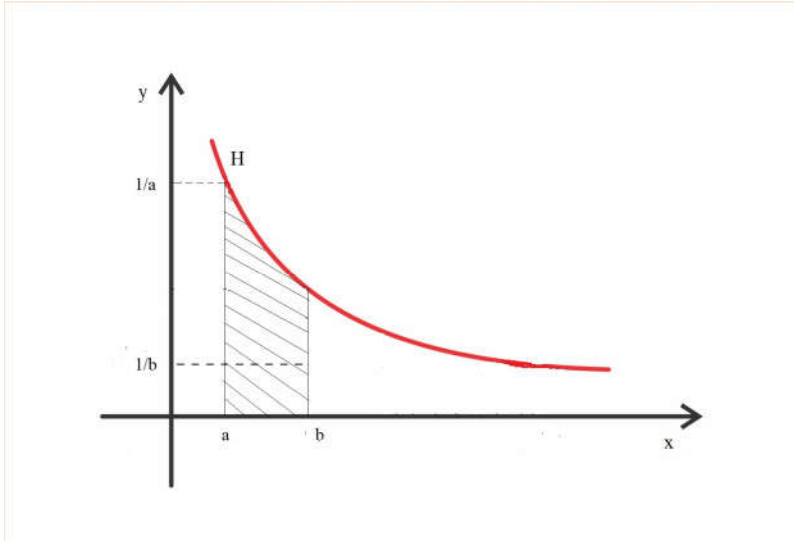
$$H_a^b = \{(x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \tfrac{1}{x}\}$$

Para calcular a área da faixa de hipérbole, denotada por $A(H_a^b)$, iremos definir três métodos através da decomposição do intervalo $[a, b]$ em intervalos justapostos.

3.2.1 Aproximação por retângulos

Considere inicialmente a decomposição do intervalo $[a, b]$, tome como referência um destes intervalos $[c, d]$, com $c < d$ e o retângulo formado de base $d - c$ e altura igual a $1/d$, com seu vértice superior direito o ponto que toca o ramo da hipérbole H. Este retângulo construído

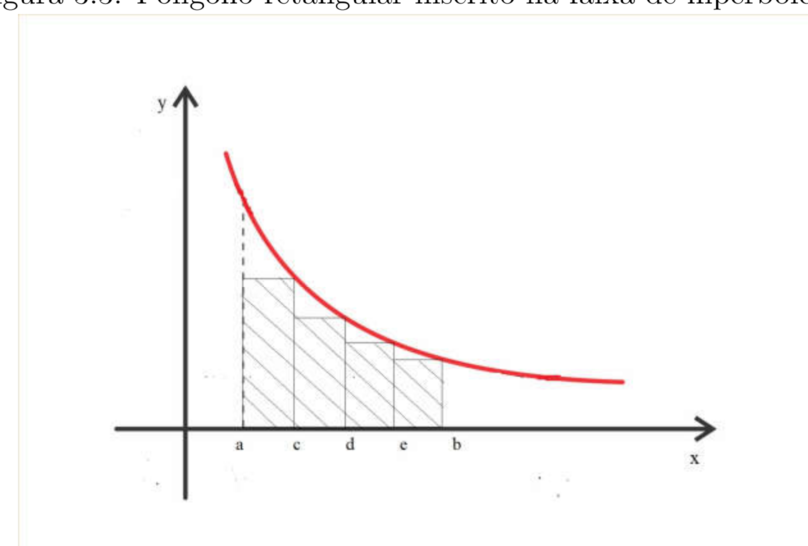
Figura 3.2: Faixa de hipérbole H_a^b - região hachurada



Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

está inscrito na faixa H_a^b e a reunião de todos os retângulos inscritos representado na Figura 3.3, será denominado polígono retangular inscrito na faixa H_a^b.

Figura 3.3: Polígono retangular inscrito na faixa de hipérbole H_a^b

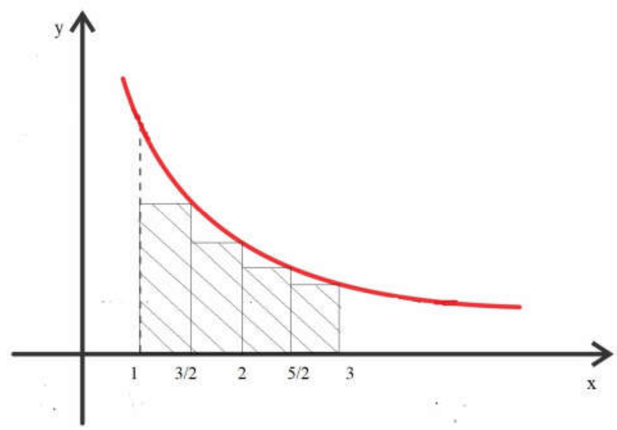


Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

A área do polígono retangular inscrito na faixa H_a^b será a soma das áreas dos retângulos inscritos. Sendo a área do polígono retangular um valor aproximado (por falta) da área H_a^b.

Exemplo 3.1. Seja a faixa H_1^3. Decompondo o intervalo $[1, 3]$ nos pontos $1, 3/2, 2, 5/2, 3$, obtemos um polígono retangular inscrito conforme Figura 3.4.

Figura 3.4: Aproximação para a área H_1^3 formado por 4 retângulos



Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

Sendo a área igual à soma da área dos 4 retângulos justapostos formados, isto é,

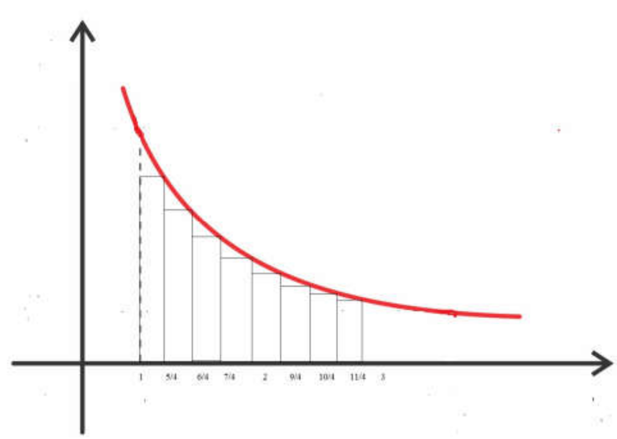
$$\left[\left(\tfrac{3}{2}-1\right)\cdot\tfrac{1}{\frac{3}{2}}\right]+\left[\left(2-\tfrac{3}{2}\right)\cdot\tfrac{1}{2}\right]+\left[\left(\tfrac{5}{2}-2\right)\cdot\tfrac{1}{\frac{5}{2}}\right]+\left[\left(3-\tfrac{5}{2}\right)\cdot\tfrac{1}{3}\right]=$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{5}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\right)=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}=\tfrac{57}{60}=0,95.$$

Exemplo 3.2. Seja a faixa H_1^3, decompondo o intervalo $[1,3]$ nos pontos,

$$1, 5/4, 6/4, 7/4, 2, 9/4, 10/4, 11/4, 3$$

como feito na Figura 3.5, obtemos um polígono retangular inscrito,

Figura 3.5: Aproximação para a área H_1^3 formado por 8 retângulos



Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

Sendo a área igual à soma da área dos 8 retângulos justapostos formados, isto é,

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}=\frac{84813}{83160}\cong 1,019.$$

Pelos exemplos acima podemos notar que quanto maior for a divisão do intervalo dado, melhor será a aproximação por falta da área H_a^b. Além disso, podemos obter polígonos regulares cujas áreas sejam tão próximas da área de H_a^b quanto se deseje, ou seja, dado $\alpha < H_a^b$, existe um polígono retangular inscrito em H_a^b que chamaremos de P tal que $\alpha <$área$P < H_a^b$.

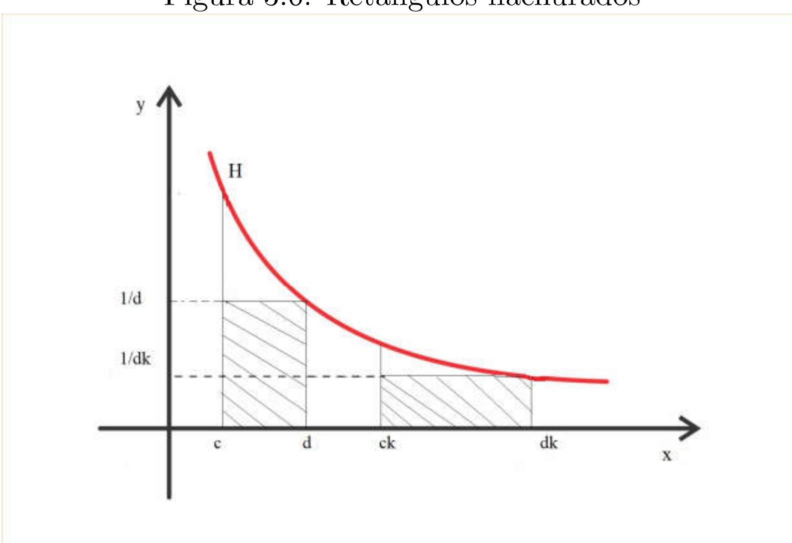
A área de H_a^b é o extremo superior do conjunto de áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b.

3.2.2 Propriedade fundamental

Teorema 3.2.1. *As faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} possuem a mesma área para qualquer real $k > 0$.*

Demonstração. Considere os retângulos inscritos em H, cuja as bases são os segmentos $[c, d]$ e $[ck, dk]$ pertecentes ao eixo das abcissas, conforme Figura 3.6 abaixo:

Figura 3.6: Retângulos hachurados



Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

A área do primeiro retângulo hachurado será:

$$(d-c)\cdot\tfrac{1}{d}=1-\frac{c}{d}$$

e a área do segundo retângulo hachurado será:

$$(dk-ck)\cdot\tfrac{1}{dk}=1-\frac{c}{d}$$

isto é, a área dos dois retângulos são iguais.

Agora considere um polígono retangular P inscrito em H_a^b, multiplicando por $k>0$ cada uma das abscissas obtidas da decomposição do intervalo $[a,b]$, obtemos uma nova decomposição agora para o intervalo $[ak,bk]$ formando um polígono retangular P' inscrito na faixa H_{ak}^{bk}. Podemos afirmar que cada um dos retângulos que compõem o polígono P', tem a mesma área dos respectivos correspondentes polígonos de P. Assim podemos concluir que P' e P possuem a mesma área, isto é, para cada polígono retangular inscrito em H_a^b, existe um polígono retangular inscrito em H_{ak}^{bk} de mesma área. □

Corolário 3.2. *As faixas H_a^b e H_1^c, tem a mesma área.*

Demonstração. Temos que,

$$\mathrm{A}(H_a^b)=\mathrm{A}(H_{a\cdot\frac{1}{a}}^{b\cdot\frac{1}{a}})=\mathrm{A}(H_1^{\frac{b}{a}})=\mathrm{A}(H_1^c),\text{ com } c=\tfrac{b}{a}.$$

□

Por convenção temos que,

A$(H_a^a)=0$

A$(H_a^b)=$ -A(H_b^a), isto é, considerar áreas negativas.

Temos ainda que,

$$A(H_a^b)+A(H_b^c)=A(H_a^c), com\ a<b<c. \tag{3.2}$$

Tendo $a=c, a=b, b=c$, ou $a=b=c$, a afirmação acima continua válido, isto é, em 3.2 considere $a=c$, teremos

$$\mathrm{A}(H_a^b)+\mathrm{A}(H_b^a)=\mathrm{A}(H_c^c)=0.$$

3.2.3 Aproximação por trapézios secantes

Considere inicialmente a decomposição do intervalo $[a, b]$. Tome como referência um destes intervalos $[c, d]$, com $c < d$ e o trapézio secante formado de base $d - c$, dois lados verticais de medida $1/c$ e $1/d$ e com dois de seus vértices superiores pertecentes ao ramo da hipérbole H. Este trapézio secante construído está circunscrito à faixa H_c^d e a reunião de todos os trapézios secantes circunscritos construídos desta maneira será denominado polígono trapezoidal secante circunscrito à faixa H_a^b.

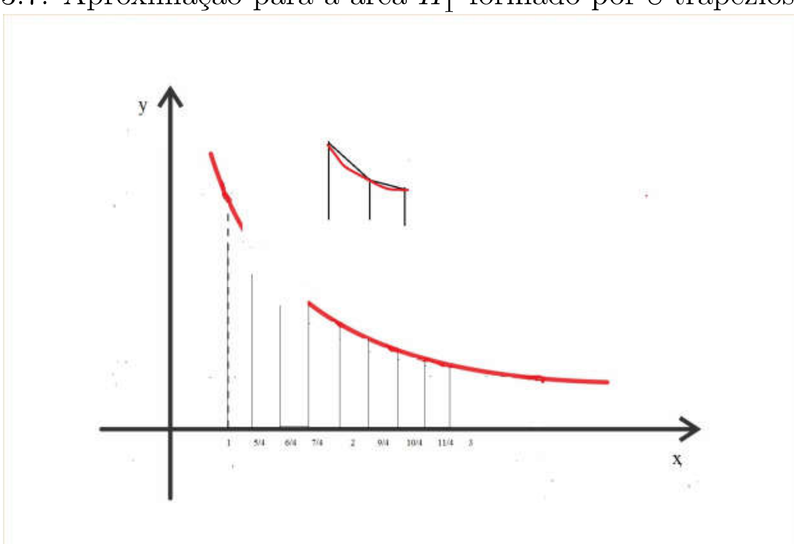
A área do polígono trapezoidal secante circunscrito à faixa H_a^b será a soma das áreas dos trapézios. Sendo a área do polígono trapezoidal secante um valor aproximado (por excesso) da área H_a^b.

Exemplo 3.3. Seja a faixa H_1^3, decompondo o intervalo $[1, 3]$ nos pontos,

$$1, 5/4, 6/4, 7/4, 2, 9/4, 10/4, 11/4, 3$$

obtemos um polígono trapezoidal secante,conforme Figura 3.7, cujo a área será igual à soma da área dos 8 trapézios justapostos formados, isto é,

Figura 3.7: Aproximação para a área H_1^3 formado por 8 trapézios secantes



Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

$$[(1 + \tfrac{4}{5}) \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{4}{5} + \tfrac{4}{6}) \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2}] + [(\tfrac{4}{6} + \tfrac{4}{7}) \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2}] + [(\tfrac{4}{7} + \tfrac{1}{2}) \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2}] + [(\tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{9}) \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2}] + [(\tfrac{4}{9} + \tfrac{2}{5}) \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2}] + [(\tfrac{2}{5} + \tfrac{4}{11}) \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2}] + [(\tfrac{4}{11} + \tfrac{1}{3}) \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2}] =$$

$$\tfrac{1}{8}[1,8 + 1,4666 + 1,2380 + 1,0714 + 0,9444 + 0,8444 + 0,7636 + 0,6969] = \tfrac{8,8253}{8} = 1,1031.$$

Comparando os resultados obtidos nos exemplos 3.2 e 3.3, podemos concluir que as aproximações obtidas através do método da área do trapézio são melhores do que método da área do retângulo, geometricamente podemos observar isto pois, lados inclinados dos trapézios (lados secantes) se aproximam mais da hipérbole H do que as bases superiores dos retângulos inscritos.

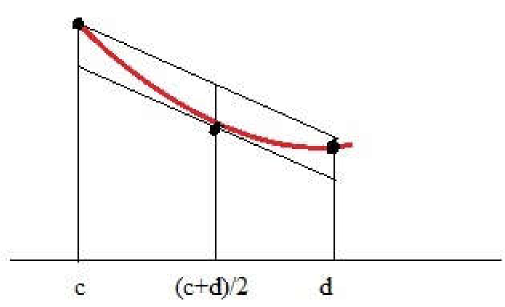
aproximação de H_1^3 por retângulos$<$ área $H_1^3 <$ aproximação de H_1^3 por trapézios secantes.

$$1,019 < H_1^3 < 1,1031.$$

3.2.4 Aproximação por trapézios tangentes

Considere inicialmente a decomposição do intervalo $[a, b]$. Tome como referência um destes intervalos $[c, d]$, com $c < d$ e o trapézio tangente formado de base $d - c$, dois lados verticais, neste caso irrelevantes, e o mais importante neste caso o lado inclinado tangente a hipérbole H no ponto de abscissa $\frac{c+d}{2}$, verificando esta construção através da Figura 3.8.

Figura 3.8: Trapézio tangente e trapézio secante sobre à faixa H_a^b



Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

Sendo $\frac{2}{d+c}$ e $d - c$ respectivamente a base média e a altura do trapézio tangente, assim sua área será:

$$\frac{2(d-c)}{d+c}$$

A reunião de todos os trapézios tangentes construídos desta maneira será denominado polígono trapezoidal tangente à faixa H_a^b.

A área do polígono trapezoidal tangente à faixa H_a^b será a soma das áreas dos trapézios. Sendo a área do polígono trapezoidal tangente um valor aproximado (por falta) da área H_a^b.

Exemplo 3.4. Seja a faixa H_1^3, decompondo o intervalo $[1,3]$ nos pontos,

$$1, 5/4, 6/4, 7/4, 2, 9/4, 10/4, 11/4, 3$$

obtemos um polígono trapezoidal tangente, cujo a área será igual à soma da área dos 8 trapézios justapostos formados, isto é,

$$2[\tfrac{5/4-1}{5/4+1} + \tfrac{6/4-5/4}{6/4+5/4} + \tfrac{7/4-6/4}{7/4+6/4} + \tfrac{8/4-7/4}{8/4+7/4} + \tfrac{9/4-8/4}{9/4+8/4} + \tfrac{10/4-9/4}{/10+9/4} + \tfrac{11/4-10/4}{11/4+10/4} + \tfrac{12/4-11/4}{12/4+11/4}] =$$
$$2[\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{19} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{23}] = 1,0963.$$

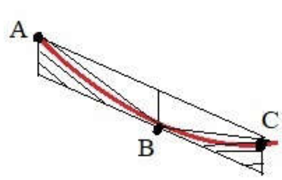
Comparando os resultados obtidos nos exemplos 3.3 e 3.4, podemos concluir que as aproximações obtidas através do método da área do trapézio tangente são melhores do que método da área do trapézio secante.

aproximação de H_1^3 por trapézio tangente$<$ área $H_1^3 <$ aproximação de H_1^3 por trapézios secantes.

$$1,0963 < H_1^3 < 1,1031.$$

Geometricamente podemos observar isto, basta tomar a região compreendida entre a reta tangente e a reta secante, traçar duas secantes AB e BC,conforme Figura 3.9.

Figura 3.9: Área compreendida entre a reta tangente e a secante



Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

Temos que a soma das áreas dos triângulos hachurados é igual à soma das áreas dos triângulos não hachurados que é dado pelo segmento vertical médio multiplicado por $\frac{d-c}{2}$, concluindo assim que a região do trapézio secante que excede tem área maior que a região do trapézio tangente.

3.3 Logaritmos Naturais

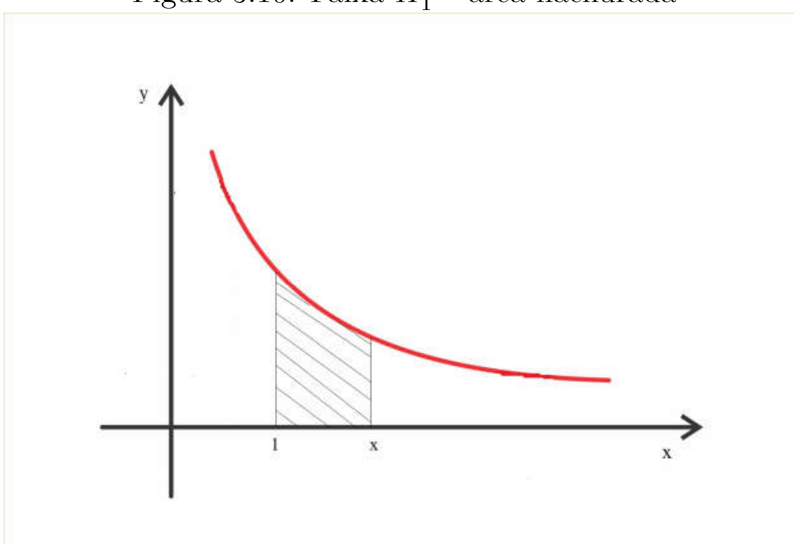
O logaritmo natural de x, com $x > 0$ é a área da faixa H_1^x. Geometricamente representada pela Figura 3.10

Notação: $\ln x$.

Assim temos,

$$\ln x = \mathrm{A}(H_1^x).$$

Figura 3.10: Faixa H_1^x - área hachurada

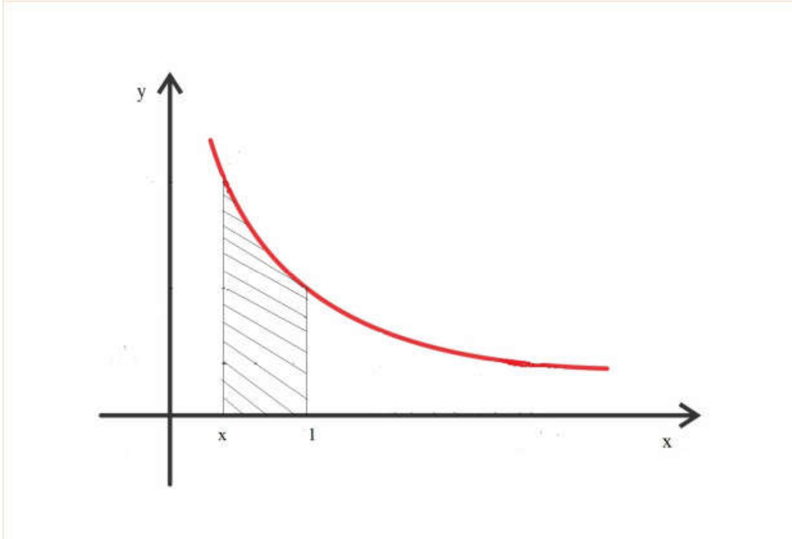


Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

Quando a $\mathrm{A}(H_1^x) < 0$, teremos $0 < x < 1$, como na Figura 3.11

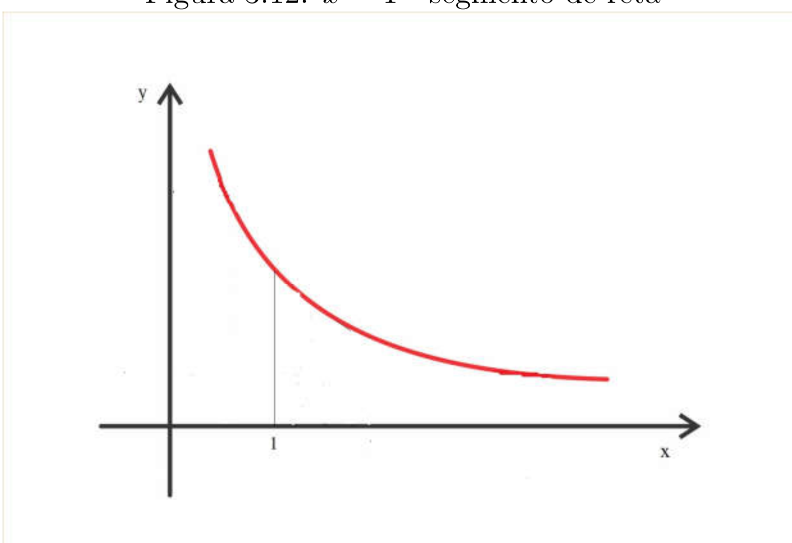
Quando $x = 1$, temos que a Área(H_1^1), será igual zero, pois a faixa se reduz a um segmento de reta, observe na Figura 3.12.

Figura 3.11: Faixa H_x^1 - área hachurada



Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

Figura 3.12: $x = 1$ - segmento de reta



Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

Assim,

$\ln 1 = 0$;

$\ln x > 0$ se $x > 1$;

$\ln x < 0$ se $0 < x < 1$.

Exemplo 3.5. Calculando o valor aproximado para $\ln 2$.

Decompondo o intervalo $[1, 2]$ em 10 intervalos de mesmo comprimento $0, 1$, obtemos os seguintes pontos para x

$$1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2$$

Os valores de $1/x$ são

$$1; 0,909; 0,833; 0,769; 0,714; 0,666; 0,625; 0,588; 0,555; 0,526; 0,500.$$

Pelo método da aproximação dos retângulos, teremos um polígono retangular inscrito na faixa (H_1^2) cuja a área será igual a soma das áreas dos 10 retângulos de base $0,1$ e alturas $1/x$ (a partir da segunda) determinadas acima, então a área será,

$$0,1[0,909+0,833+0,769+0,714+0,666+0,625+0,588+0,555+0,526+0,500] = 0,6685.$$

Assim um valor aproximado (por falta) de $\ln 2$ é $0,6685$.

Pelo método da aproximação dos trapézios secantes, teremos um polígono trapezoidal secante circunscrito na faixa (H_1^2), cuja a área será igual a soma das áreas dos 10 trapézios de altura $0,1$ e os lados verticais $1/x$ determinados acima, isto é, a área será,

$$0,1/2[(1+0,909)+(0,909+0,833)+(0,833+0,769)+(0,769+0,714)+(0,714+0,666)+ (0,666+0,625)+(0,625+0,588)+(0,588+0,555)+(0,555+0,526)+(0,526+0,500)] = 0,6935.$$

Temos então um valor aproximado (por excesso) de $\ln 2$ é $0,6935$.

Pelo método da aproximação dos trapézios tangentes, teremos um polígono trapezoidal tangente à faixa (H_1^2), cuja a área será igual a soma das áreas dos 10 trapézios de altura $0,1$, sendo a área calculada pelo ponto médio de cada subintervalo, isto é,

$$0,1 \cdot 2(\frac{1}{2,1} + \frac{1}{2,3} + \frac{1}{2,5} + \frac{1}{2,7} + \frac{1}{2,9} + \frac{1}{3,1} + \frac{1}{3,3} + \frac{1}{3,5} + \frac{1}{3,7} + \frac{1}{3,9}) = 0,6928.$$

Assim um valor aproximado (por falta) de $\ln 2$ é $0,6928$.

3.3.1 Função logaritmo natural

Teorema 3.3.1. *A função* $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$*, que associa cada* $x \in \mathbb{R}_+$ *ao logaritmo natural* $\ln x$ *é uma função logarítmica*

Demonstração. Devemos mostrar que $\ln x$ é uma função crescente e que $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Pelo Teorema 3.2.1 e por 3.2, temos que

$$\text{A}(H_1^x)+\ \text{A}(H_x^{xy}) = \text{A}(H_1^{xy}) \Rightarrow \text{A}(H_1^x)+\ \text{A}(H_1^y) = \text{A}(H_1^{xy}),$$

concluimos então que $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Ainda dados $x, y \in \mathbb{R}_+$, supomos que $x < y$, isto significa que existe um número $a > 1$ tal que $y = ax$, aplicando ln nesta última sentença temos,

$$\ln y = \ln(ax) = \ln a + \ln x.$$

Como $a > 1$, temos que $\ln a > 0$. Assim $\ln y > \ln x$, logo a função ln é crescente. $\square$

Sendo $\ln x$ uma função logarítmica como foi demonstrado no Teorema 3.3.1, ela cumpre as seguintes propriedades para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}$:

$\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$;

$\ln(\frac{1}{y}) = -\ln y$;

$\ln(x^n) = n \ln x$;

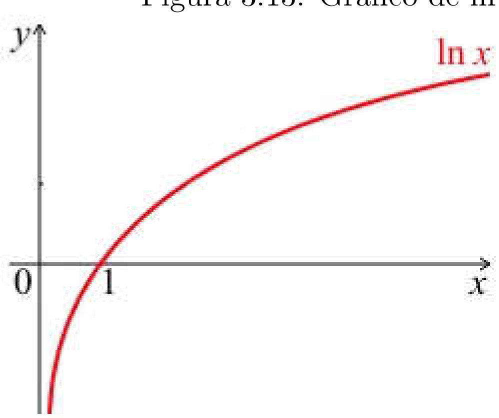
$\ln \sqrt[n]{x} = \dfrac{\ln x}{n}$.

Como foi definido no Capítulo 2, o gráfico de uma função é o subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados $(x, f(x))$ do produto cartesiano formado pelos conjuntos domínio e contradomínio da função, isto é,

$$G = \{(x, \ln x); x > 0\}.$$

Sendo ln uma função logarítmica, então podemos afirmar que ela é crescente, ilimitada superior e inferiormente e ainda sobrejetiva. Assim obtemos uma curva, conforme Figura 3.13, pertencente ao primeiro e quarto quadrantes, inteceptando o eixo das abscissas no ponto $x = 1$ (coordenada $(1, 0)$) e que quando x varia entre 0 e $+\infty$, o valor de y cresce de $-\infty$ a $+\infty$.

Figura 3.13: Gráfico de $\ln x$



3.3.2 O número e

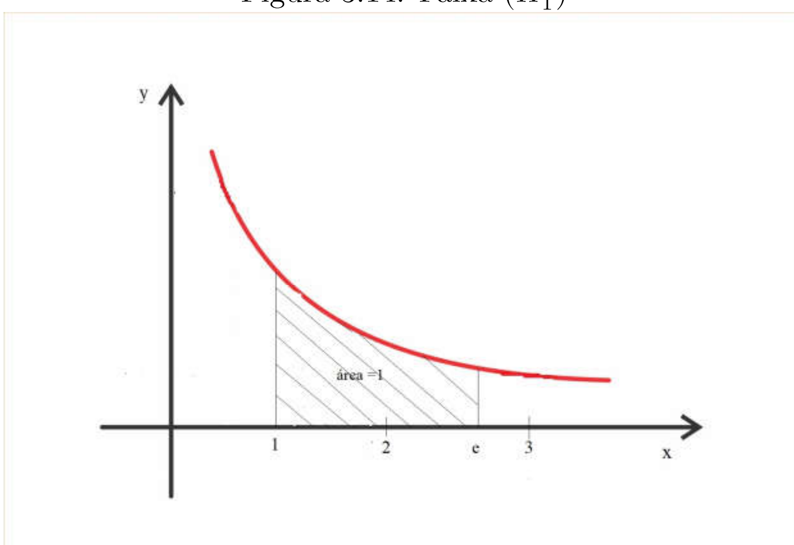
Como defenido anteriormente o logaritmo natural é uma função logaritmica, logo pelo Corolário 3.1, podemos afirmar que é bijetiva, isto é, existe um único número real positivo tal que o logaritmo natural é igual a 1, esse número será representado pela letra e o mesmo mencionado no exemplo 2.16, temos então que,

$$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Geometricamente, ver figura 3.14, isto quer dizer que a $\mathrm{A}(H_1^e) = 1$.

Como $\ln x > 0$ temos que $x > 1$, como $x = e$, concluimos que $e > 1$. Como visto nos exemplos das Seções 3.2 e 3.3, temos que a faixa de H_1^2 tem aréa menor que 1 e H_1^3, tem área maior que 1, ou seja, $\ln 2 < 1 < \ln 3 \Rightarrow \ln 2 < \ln e < \ln 3$, logo $2 < e < 3$.

Figura 3.14: Faixa (H_1^e)



Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

Teorema 3.3.2. *Seja $r = p/q$ um número racional. Tem-se $y = e^r$ se, e somente se, $\ln y = r$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $y = e^r$ então $\ln y = \ln e^r = r \cdot \ln e = r$.

($\Leftarrow$) Seja $\ln y = r$, com $y > 0$. Sendo ln uma função bijetiva , temos que $\ln e^r = r \Rightarrow y = e^r$. $\square$

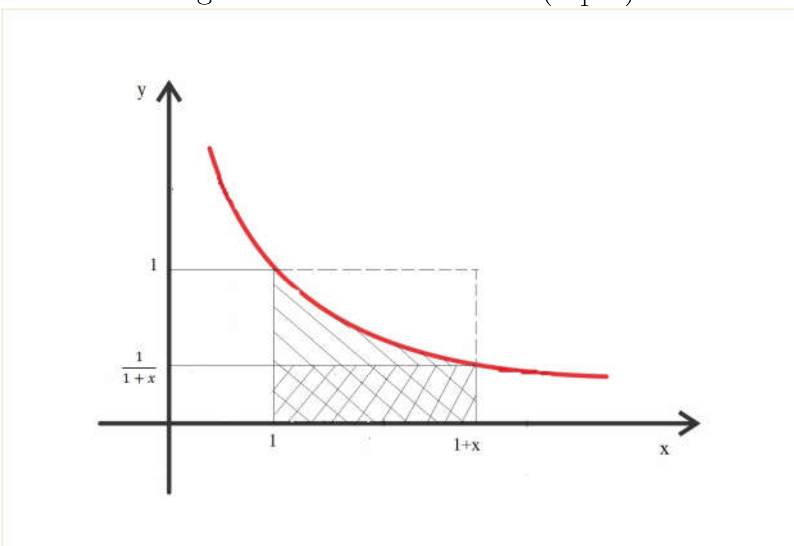
Vimos na Seção 2.5 sobre sequências que $\lim b_n = \lim a_n = e$, sendo $a_n = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ e $b_n = (1 + 1/n)^n$. Mostraremos no teorema a seguir que este limite é uma consequência do que foi dito acima sobre o número e.

Considere $x = 1/n$ com $n \in \mathbb{N}$, temos que $n = 1/x$ e $x \to 0$ pois $n \to +\infty$.

Teorema 3.3.3. *Para $x \neq 0$, tem-se $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e$.*

Demonstração. Suponha $x > 0$

Figura 3.15: Área da faixa (H_1^{1+x})



Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

$\ln(1 + x)$ é igual $A(H_1^{1+x})$.

Na Figura 3.15, considere o retângulo de base x e altura 1, então a sua área é x. Como a faixa H_1^{1+x} está contida neste retângulo, podemos afirmar que,

$$\ln(1 + x) < x \Rightarrow \frac{\ln(1 + x)}{x} < 1 \Rightarrow \ln(1 + x)^{1/x} < 1 \Rightarrow (1 + x)^{1/x} < e. \tag{3.3}$$

Considere agora o retângulo de base x e altura $\frac{1}{1+x}$, sua área é $\frac{x}{1+x}$. Como a faixa (H_1^{1+x}) contém este retângulo, temos então que,

$$\frac{x}{1 + x} < \ln(1+x) \Rightarrow \frac{1}{1 + x} < \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) \Rightarrow \frac{1}{1 + x} < \ln(1+x)^{1/x} \Rightarrow e^{1/(1+x)} < (1+x)^{1/x}. \tag{3.4}$$

Comparando 3.3 e 3.4, temos

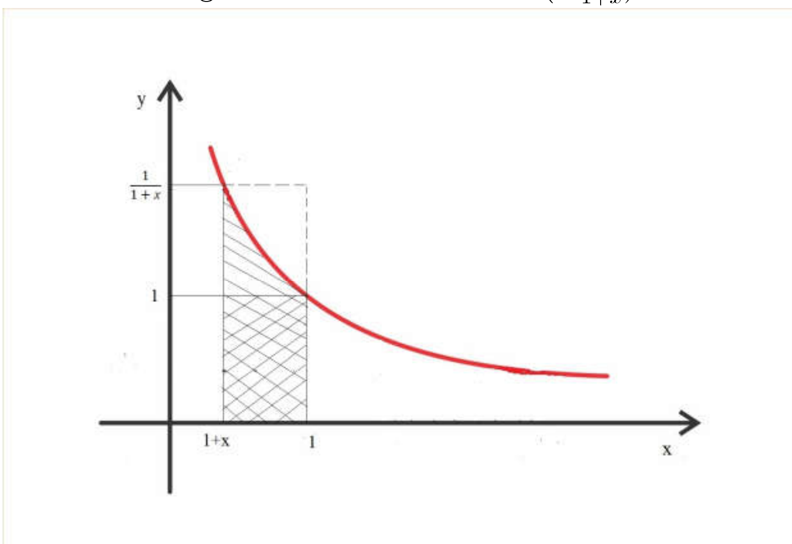
$$e^{1/(1+x)} < (1 + x)^{1/x} < e \text{ para todo } x > 0.$$

Fazendo agora $x \to 0$, temos que $e^{1/(1+x)} \to e$. Assim,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e, \text{ para } x > 0.$$

Suponha agora $x < 0$.

Figura 3.16: Área da faixa (H_{1+x}^{1})



Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

Como $x \to 0$, podemos supor que $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$, assim podemos definir $\ln(1+x)$. Sendo $-1 < x < 0$, então$-\ln(1+x)$ é igual A(H_{1+x}^{1}).

Na figura 3.16, considere o retângulo de base positiva $-x$ e altura 1, então a sua área é $-x$. Como a faixa (H_{1+x}^{1}) contém este retângulo, podemos afirmar que,

$$-x < -\ln(1+x) \Rightarrow 1 < \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow 1 < \ln(1+x)^1/x \Rightarrow e < (1+x)^{1/x}. \tag{3.5}$$

Considere agora o retângulo de base positiva $-x$ e altura $\frac{1}{1+x}$, que tem área igual a $\frac{-x}{1+x}$. Como a faixa (H_{1+x}^{1}) está contida neste retângulo, podemos afirmar que,

$$-\ln(1+x) < \frac{-x}{1+x} \Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x} \Rightarrow \ln(1+x)^{1/x} < \frac{1}{1+x} \Rightarrow (1+x)^{1/x} < e^1/1+x. \tag{3.6}$$

Comparando 3.5 e 3.6, temos

$$e < (1+x)^{1/x} < e^{1/(1+x)} \text{ para todo } x < 0.$$

Pelo mesmo fato concluido anteriormente temos que,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e, \text{ para } x < 0.$$

Concluimos então que $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$, para todo x, com $x \neq 0$. $\square$

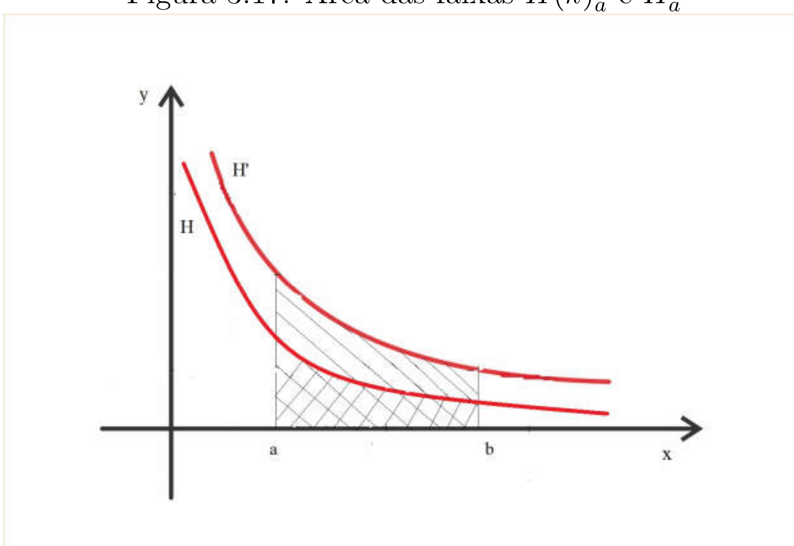
3.4 Outras Bases

Na Seção 3.2, foi definido a área de uma faixa de hipérbole de ramo da hipérbole H definida por $y = \dfrac{1}{x}$. Considere agora a hipérbole H' definida por $y = \dfrac{k}{x}$, com $k > 0$ para definirmos um novo sistema de logaritmos.

Seja a região limitada pelo ramo da hipérbole H' e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo a, b reais positivos com $a < b$, conforme Figura 3.17. Esta região será chamada de faixa de hipérbole e denotada por $H(k)_a^b$.

$$H(k)_a^b = \{(x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \tfrac{k}{x}\}.$$

Figura 3.17: Área das faixas $H(k)_a^b$ e H_a^b



Fonte: elaborada pela autora usando o programa paint.

Teorema 3.4.1. *A área de $H(k)_a^b$ é igual a k vezes a área de H_a^b.*

Demonstração. Tome como referência para demonstração do Teorema a Figura 3.17. Então seja $[c, d]$ um intervalo contido em $[a, b]$. Tome os retângulos, um inscrito na hipérbole H, cuja a base é $d - c$ e altura $1/d$, de aréa $\dfrac{d-c}{d}$ e outro inscrito na hipérbole H' de mesma $d - c$ e altura k/d, sendo a área igual $\dfrac{k(d-c)}{d}$. Temos assim que a área do segundo retângulo é k vezes a área do primeiro retângulo. Considere os subintervalos de $[a, b]$, eles determinam dois polígonos retangulares, um inscrito na faixa H_a^b e outro na faixa $H(k)_a^b$, logo podemos concluir que a área do segundo é k vezes a área do primeiro.

$$\mathrm{A}(H(k)_a^b) = k \cdot \ \mathrm{A}(H_a^b).$$

□

O novo sistema de logaritmos é definido por:

$$\log x = \mathrm{A}H(k)_1^x = k \cdot \ \mathrm{A}H_1^x$$
$$\Rightarrow \log x = k \cdot \ln x, \text{ com } k > 0 \text{ e } x > 0.$$

A base do novo sistema de logaritmos é o número $a > 0$, tal que $\log a = 1$.

Notação: $\log_a x$.

Temos que

$$\log_a a = k \cdot \ln a \Rightarrow 1 = k \cdot \ln a \Rightarrow k = \frac{1}{\ln a}.$$

Podemos então reescrever a definição do novo sistema de logaritmos, substituindo o valor de k,

$$\log_a x = k \cdot \ln x \Rightarrow \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \Rightarrow \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Teorema 3.4.2. *A função* $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, *que associa cada* $x \in \mathbb{R}_+$ *ao logaritmo* $\log_a x$, *para todo* $a > 1$ *é uma função logarítmica.*

Demonstração. Com efeito,

$$\log_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y.$$

□

Como visto no final da Seção 3.1 , temos aqui a validade da fórmula de mudança de base, ou seja,

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x \text{ para todo } a > 1, b > 1 \text{ e } x > 0.$$

Dados $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, a potência a^x é o único número real positivo cujo o logaritmo natural é igual a $x \ln a$. Temos assim para $b > 0$,

$$\log_b(a^x) = \frac{\ln(a^x)}{\ln b} = x \cdot \frac{\ln a}{\ln b} = x \cdot \log_b a.$$

Concluímos assim que a definição de a^x por logaritmo natural é verdadeira para qualquer sistema de logarimo.

4 Aplicações da Função Logarítmica

Neste Capítulo vamos trabalhar com a aplicação das Funções Logaritmicas em diversas áreas como: Matemática Financeira, Física, Geografia, Biologia, Química e Medicina. Entendendo assim o crescimento e o decrescimento de uma grandeza em determinada situação nas áreas acima mencionadas como sendo proporcionais á quantidade daquela grandeza em dado momento. Para uma leitura complementar ver [3], [6], [13].

4.1 Desintegração radioativa

Algumas substâncias, chamadas de radiotivas, se transformam espontaneamente em outras substâncias por meio de emissão de partículas subatômicas. O nome dado a este fenômeno de transformação de um átomo em outro através da emissão de radiação é desintegração (ou decaimento) radiotiva.

Considere M_0 a massa no instante $t = 0$ de um corpo formado por uma substância radioativa, temos que a medida que o tempo passa a quantidade de massa da substância inicial diminui, consequentemente aumentando a massa da nova substância transformada.

A quantidade de matéria que se desindegra é proporcional à massa da substância original presente no corpo naquele instante. Assim no instante $t = 1$, teria uma perda de αM_0, sendo α a constante de proporcionalidade de desintegração, ou seja,

$$M_1 = M_0 - \alpha M_0 = M_0(1 - \alpha),$$

sendo M_1 a massa restante após o tempo $t = 1$
Para $t = 2$, a massa restante seria,

$$M_2 = M_1 - \alpha M_1 = M_1(1 - \alpha) = M_0(1 - \alpha)^2.$$

Generalizando, para $t = n$, a massa restante seria,

$$M_n = M_0(1 - \alpha)^n.$$

Para uma melhor aproximação, considere agora o tempo $[0, 1]$ fracionado, ou seja, cada $t = 1/x$, com $x > 0$. Assim após a primeiro tempo $1/x$, a massa restante seria,

$$M_1 = M_0 - \tfrac{\alpha}{x} M_0 = M_0(1 - \tfrac{\alpha}{x}).$$

Após x desintegrações, a massa restante seria,

$$M_x = M_0(1 - \tfrac{\alpha}{x})^x.$$

Dividindo o intervalo em um número cada vez maior de partes iguais, a massa do corpo seria reduzida a,

$$\lim_{x\to\infty} M_0(1 - \frac{\alpha}{x})^x = M_0 \cdot e^{-\alpha}.$$

Generalizando para o intervalo de $[0, t]$, a massa do corpo seria,

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}.$$

A meia vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que a massa seja reduzida a metade. Assim se uma substância radioativa tem meia vida em t', então a massa dessa substância se reduz à metade no tempo t'. Por esta informação podemos determinar a constante de desintegração α,

$$\tfrac{1}{2} M_0 = M_0 \cdot e^{-\alpha t'} \Rightarrow \tfrac{1}{2} = e^{-\alpha t'} \Rightarrow \ln(\tfrac{1}{2}) = -\alpha t' \Rightarrow -\ln 2 = -\alpha t' \Rightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{t'}.$$

Exemplo 4.1. Num castelo inglês existe uma velha mesa redonda de madeira que muitos afirmavam ser a famosa "Távola Redonda do Rei Artur", soberano que viveu no século V. Uma ferramenta desenvolvida pelo químico Willard Libby (ganhador do Prêmio Nobel de Química em 1960) de grande utilidade para a arqueologia é a datação por carbono radioativo. Sabe-se que os seres vivos absorvem e perdem carbono 14 - C^{14} e quando morre, a absorção cessa, mas a perda continua. Assim é possível determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo feito de madeira, pela quantidade de C^{14} existente. Esta prática é chamada de método do carbono 14.

Através de um aparelho chamado de contador Geiger descobriu-se que a massa de C^{14} hoje existente na mesa é $0,894$ vezes a massa M_0 de C^{14} que existe em um pedaço de madeira viva com o mesmo peso da mesa.

Para determinar a taxa de desintegração do C^{14}, basta saber que a meia vida do elemento é de 5570 anos, assim

$$\alpha = \frac{\ln 2}{5570} = 0,0001244.$$

Sabendo que

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t} \Rightarrow \tfrac{M}{M_0} = e^{-\alpha t}.$$

Assim, $0,894 = e^{-0,0001244t} \Rightarrow \ln 0,894 = -0,0001244t \Rightarrow t = -\dfrac{ln 0,894}{0,0001244} = 901$ anos.

Logo conclui-se que a mesa não seria a mesma da Távola Redonda, pois esta deveria ter mais de 1500 anos.

4.2 Resfriamento de um corpo

A lei do resfriamento de Newton afirma que quando um objeto aquecido é colocado em um meio mais frio sem que sua temperatura seja alterada, a diferença da temperatura (T) entre o objeto e o meio que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença. Similar ao caso da desintegração radiotiva, temos que a fórmula da lei do resfriamento de Newton é dada por:

$$T(t) = T_0 \cdot e^{-\alpha t}.$$

Sendo:

T_0 - a diferença de temperatura no instante $t = 0$;

$T(t)$- a diferença de temperatura no instante t;

α - a constante de resfriamento do objeto.

Exemplo 4.2. Num certo dia, a temperatura ambiente é de 30°. A água que fervia numa panela, cinco minutos depois de apagado o fogo tem temperatura de 65°. Quanto tempo depois de apagado o fogo a água atingirá a temperatura de 38°?

A água que fervia na panela estava a uma temperatura de 100°, assim a diferença da temperatura no instante $t = 0$, momento em que o fogo foi apagado é dada por $T_0 = 100 - 30 = 70$.

A lei de resfriamento é dada por,

$$T(t) = 70 \cdot e^{-\alpha t}.$$

Após 5 minutos temos $T(5)= 65$ - $30 = 35$, assim

$$T(5) = 70 \cdot e^{-5\alpha} = 35 \Rightarrow e^{-5\alpha} = \tfrac{35}{70} = \tfrac{1}{2}.$$

Aplicando o logaritmo para determinar a constante de resfriamento α,

$$\ln e^{-5\alpha} = \ln(\tfrac{1}{2}) \Rightarrow\Rightarrow -5\alpha = -\ln 2 \Rightarrow \alpha = \tfrac{\ln 2}{5} = 0,1386.$$

Para determinar o instante t, devemos considerar que $T(t) = 38 - 30 = 8$. Assim

$$70 \cdot e^{-01386t} = 8 \Rightarrow e^{-01386t} = \tfrac{8}{70} \Rightarrow \ln e^{-01386t} = \ln(\tfrac{8}{70}) \Rightarrow -0,1386t = -\ln\tfrac{70}{8} \Rightarrow t = \frac{\ln(\frac{70}{8})}{0,1386} \Rightarrow t = 15,65 \text{ minutos}.$$

4.3 Juros contínuos

Um capital c, aplicado a uma taxa anual de $i\%$ rende ao final de um ano, juros no valor de $\frac{ic}{100}$. Assim o montante M ao final do ano será de

$$M = c + ic = c(1+i)$$

ao final do segundo ano o montante será

$$M = [c(1+i)] \cdot (1+i) = c \cdot (1+i)^2$$

ao final do terceiro ano o montante será

$$M = [c(1+i)^2] \cdot (1+i) = c \cdot (1+i)^3.$$

Assim transcorrido t anos, podemos dizer que o montante será dado por $M = c \cdot (1+i)^t$.

Porém na maioria das vezes nas transações os juros são calculados mais de uma vez ao ano, fracionando assim o ano, ou seja, se os juros são calculados n vezes ao ano, o montante para o primeiro período será,

$$M = c + \tfrac{i}{n} \cdot c = c(1 + \tfrac{i}{n})$$

ao final do segundo período teremos o seguinte montante,

$$M = c(1 + \tfrac{i}{n})(1 + \tfrac{i}{n}) = c(1 + \tfrac{i}{n})^2$$

ao final do terceiro período

$$M = c(1+\tfrac{i}{n})^2(1+\tfrac{i}{n}) = c(1+\tfrac{i}{n})^3.$$

Continuando assim até o n-ésimo período, que equivalerá a um ano se terá o montante $M = c(1+\frac{i}{n})^n$.

Para determinar os juros capitalizados n vezes ao ano durante t anos, teremos que considerar o montante ao final do primeiro ano que é

$$M = c(1+\tfrac{i}{n})^n$$

assim ao final do segundo ano teremos o montante

$$M = c(1+\tfrac{i}{n})^n(1+\tfrac{i}{n})^n = c(1+\tfrac{i}{n})^{2n}$$

ao final do terceiro ano o montante será

$$M = c(1+\tfrac{i}{n})^{2n}(1+\tfrac{i}{n})^n = c(1+\tfrac{i}{n})^{3n}.$$

Após t anos o montante será $M = c(1+\frac{i}{n})^{tn}$.

Caso os juros sejam capitalizados continuamente, ou seja, juros contínuos, ao final do ano o montante será,

$$\lim_{n\to\infty} c(1+\frac{i}{n})^n = \lim_{n\to\infty} c(1+\frac{1}{\frac{n}{i}})^n = \lim_{n\to\infty} [c(1+\frac{1}{\frac{n}{i}})^{\frac{n}{i}}]^i = c\cdot e^i.$$

E após t anos teremos o montante,

$$\lim_{n\to\infty} c(1+\frac{i}{n})^{tn} = c\cdot e^{it}.$$

Exemplo 4.3. Em quanto tempo um capital c aplicado a juros contínuos de 20% ao ano dobrará? Temos que,

$$M = c\cdot e^{it},\text{ logo } 2c = c\cdot e^{0,2t} \Rightarrow 2 = e^{0,2t}.$$

Aplicando o logaritmo a última igualdade,

$$\ln 2 = \ln e^{0,2t} \Rightarrow \ln 2 = 0,2t \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0,2} = 3,46.$$

Logo o capital dobrará após aproximadamente 3 anos e meio.

4.4 Crescimento populacional

Considere P_0 uma determinada população inicial, ou seja, no instante $t = 0$. Quando afirmamos que esta população cresce a uma taxa de $i\%$ ao ano, significa que a cada ano, o número de indíviduos aumenta em $\frac{i}{100}$ com relação ao seu valor inicial. Então ao final de t anos teremos que a população será dada por,

$$P(t) = P_0(1+i)^t. \tag{4.1}$$

Como a população se refere a um número grande de indíviduos, sejam eles de uma país ou de uma colônia de bactérias, então podemos considerar que a função $P(t)$ varia continuamente com o tempo e que a população é proporcional a própria população. Assim baseado na seção anterior podemos reescrever a equação 4.1, ou seja,

$$P(t) = P_0 e^{it}.$$

Exemplo 4.4. Suponha que uma cultura de 100 bactérias se reproduz em condições favoráveis. Após 12 horas identificou-se 500 bactérias nesta cultura. Determine a taxa de crescimento dessa cultura.

Temos que $P_0 = 100$ e que $P(12) = 500$, logo

$$P(12) = 100e^{12i} \Rightarrow 500 = 100e^{12i} \Rightarrow 5 = e^{12i}.$$

Aplicando o logaritmo na última igualdade, teremos

$$\ln 5 = \ln e^{12i} \Rightarrow 12i = \ln 5 \Rightarrow i = \frac{\ln 5}{12} = 0,134.$$

Assim a taxa de crescimento desta cultura de bactérias será de $13,4\%$.

4.5 Terremotos- escala Richter

Terremotos ou abalos sísmicos são ondas que se propagam através da terra desencadeadas pelo encontro de placas tectônicas, atividades vulcânicas ou falhas geológicas. A quantidade de energia liberada no foco do terremoto é denominada magnitude e pode ser medida através da Escala Richter, nome dado em homenagem ao norte americano Charles Richter. É uma escala desenvolvida utilizando logaritmos de base dez, mais conhecidos como logaritmos decimais ($\log_{10}$ ou apenas log) e se inicia no grau zero e teoricamente vai até o infinito.

$$M = \log(\tfrac{A}{A_0}).$$

Sendo:

M- a magnitude do terremoto;

A - a amplitude do terremoto;

A_0- a amplitude de parâmetro (referência).

Assim, comparamos o terremoto em questão com o terremoto referência, calculando o logaritmo da razão entre suas amplitudes.

Temos que um aumento na escala Richter equivale a um aumento de dez vezes na magnitude do terremoto, ou seja, considere um terremoto T_1 de amplitude x e um terremoto T_2 de amplitude $10x$, temos então que a magnitude do terremoto T_2 que denotaremos por M_2 é dada por,

$$M_2 = \log(\tfrac{10x}{A_0}) = \log 10 + \log(\tfrac{x}{A_0}) = 1 + M_1,$$

sendo M_1 a magnitude do terremoto T_1.

Exemplo 4.5. Um dos piores terremotos da história, ocorrido em Tóquio, em 1923, atingiu 8,3 na escala Richeter.Um outro terremoto ocorrido na Califórnia em 1989, atingiu 7,2 na mesma escala. Qual a razão entre as intensidades dos dois terremotos, medidas através de amplitudes das ondas sísmicas correspondentes?

Magnitude em Tóquio

$$M_T = \log(\tfrac{A_T}{A_0}) \Rightarrow 8,3 = \log(\tfrac{A_T}{A_0}) \Rightarrow 10^{8,3} = (\tfrac{A_T}{A_0}).$$

Magnitude na Califórnia

$$M_C = \log(\tfrac{A_C}{A_0}) \Rightarrow 7,2 = \log(\tfrac{A_C}{A_0}) \Rightarrow 10^{7,2} = (\tfrac{A_C}{A_0}).$$

Assim a razão será dada por,

$$\frac{A_T}{A_C} = \frac{10^{8,3}}{10^{7,2}} = 10^{1,1} \cong 12,59.$$

Logo o terremoto de Tóquio foi aproximadamente 12,59 vezes mais intenso que o terremoto da Califórnia.

4.6 Intensidade sonora

Intenside sonora é o fluxo de energia por unidade de área, medida em watt por metro quadrado (W/m^2). O nível de intensidade sonora N é definido em escala logaritmica e dado em decibéis (dB) em homenagem a Alexander Graham Bell. Assim como na escala Richter, toma-se uma onda sonora como referência, que adotaremos por I_0. Geralmente se utiliza $I_0 = 10^{-12}W/m^2$ que é a intensidade sonora mais baixa da faixa audível para um ser humano.

O nivel de intensidade sonora é dado por:

$$N = 10\log(\tfrac{I}{I_0}).$$

Exemplo 4.6. Um estudante, após assistir a uma aula de Física sobre intensidade sonora, resolveu descobrir qual era o nível sonoro marcado na sala de sua casa quando o horário de tráfego de veículos na região onde mora era intenso. Um aplicativo de celular que simula um decibelímetro revelou que o nível sonoro era de $90dB$. Sabendo que a intensidade mínima que corresponde ao limiar da audição humana corresponde a $10^{-12}W/m^2$, qual a intensidade sonora referente à medida feita pelo garoto?

Sabendo que $N = 90dB$ e $I_0 = 10^{-12}W/m^2$, temos que,

$$90 = 10\log(\tfrac{I}{10^{-12}}) \Rightarrow 9 = \log(\tfrac{I}{10^{-12}}) \Rightarrow 9 = \log I - \log 10^{-12} \Rightarrow 9 = \log I + 12 \Rightarrow \log I = -3 \Rightarrow I = 10^{-3}.$$

Logo a intensidade sonora referente a medida é de $10^{-3}W/m^2$.

4.7 Escala pH

O pH - potencial hidrogeniônico- é uma escala utilizada para medir a acidez ou alcalinidade (basicidade) de uma determinada solução. Este valor depende da concentração de íons de hidrogênio por litro da solução, representada por $[H^+]$. Assim quanto menor o pH de uma substância, maior a concentração de íons $[H^+]$ consequentemente mais ácido a solução será. A escala pH varia de 0 a 14, sendo que as soluções de pH menores de 7, são consideradas ácidas, assim quanto mais próximo de zero mais ácida é a solução. As soluções de pH maiores que 7 são consideradas básicas, ou seja, quanto mais distante de

7 mais básica é a solução. A água pura apresenta pH neutro, possuindo um valor de pH igual a 7 em 25°C.

Uma das áreas de aplicação do pH é sua utilização na medicina, sendo o mesmo um indicador de vários alterações biológicas, por exemplo, o pH do sangue humano, este deve permanecer entre $7,38$ a $7,42$ para que a pessoa esteja saudável, assim qualquer mudança, menor que seja, fora deste intervalo, indica um distúrbio no metabolismo resultado do surgimento de diferentes doenças.

A expressão usada para calcular o pH é

$$pH = -\log[H^+].$$

Exemplo 4.7. Qual é a razão entre a concentração de íons de hidrogênio no suco de limão, que tem pH de $2,2$, e a concentração de íons de hidrogênio na água pura?

Como o pH da água pura é 7, temos que

$$7 = -\log[H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-7}.$$

E como o pH do suco de limão é $2,2$, temos que

$$2,2 = -\log[H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-2,2}.$$

Assim a razão entre as concentrações é $\dfrac{10^{-2,2}}{10^{-7}} = 10^{4,8} \cong 63096$, ou seja, os íons de hidrogênio estão (aproximadamente) 63096 mais concentrados no suco de laranja que na água pura.

5 Considerações Finais

Neste trabalho foi realizado um estudo das Funções logarítmicas, com uma abordagem diferente, apesar do apelo tradicional a definição que é adotada nos livros didáticos em geral, foi escolhida a definição geométrica dos logaritmos. Somando-se a este diferencial temos as aplicações em diferentes contextos que vão além da disciplina Matemática.

Acreditamos que a caracterização do logaritmo natural através de uma abordagem geométrica venha ajudar no entendimento do mesmo. Temos convicção que essa não é uma abordagem única sobre o assunto e que a decisão de usá-la em sala de aula será do professor.

Embora tratando-se de uma Dissertação de Mestrado, tentamos dar um caráter didático ao nosso texto para facilitar o entendimento do leitor. Procuramos na medida do possível, provar de maneira mais compreensível a maioria das proposições e teoremas, usando conceitos matemáticos básicos.

Este trabalho vem contribir e auxiliar aos professores e alunos da Educação Básica pela aplicabilidade das Funções Logarítmicas, um diferencial no ensino da Matemática, pois o aluno vai entender como aplicar o conteúdo que está sendo ensinado, tornando assim a disciplina mais interessante e motivadora no processo de aprendizagem.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo. Cálculo 1 - Funções de uma variável, Rio de Janeiro: LTC, 1991.

[2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998. v.1.

[3] HIMONAS, Alex; HOWARD, Alan. Cálculo: Conceito e Aplicações. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

[4] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos da Matemática Elementar: conjuntos, funções. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

[5] LIMA, Elon L. Meu Professor de Matemática. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991.

[6] LIMA, Elon L. Logaritmos. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1996.

[7] LIMA, Elon L. Curso de análise. 10. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002. v. 1.

[8] LIMA, Elon L. Análise Real. *Funções de Uma Variável.* 8. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2006. v. 1.

[9] LIMA, Elon L. et. al. Temas e Problemas. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2003.

[10] LIMA, Elon L. et. al. A Matemática do Ensino Médio. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006. v. 1.

[11] PROFMAT. Regimento. Disponível em:http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/regimento/. Acesso em: mar.2018.

[12] RIBENBOIM, Paulo. Funções, Limites e Continuidade. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2012.

[13] ROBALLO, Murilo Sergio. Aplicações de Funções Exponenciais e Logarítmicas. 67f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Matemática)- Universidade de Brasília, Brasília: 2014.