UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Bárbara Medeiros Vieira

EQUAÇÕES DIOFANTINAS:
Uma Proposta Didática para o 9º ano do Ensino Fundamental

PALMAS - TO
2018

Bárbara Medeiros Vieira

EQUAÇÕES DIOFANTINAS:
Uma Proposta Didática para o 9º ano do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.
Orientadora: Profª. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário.

PALMAS - TO
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

V658e Vieira, Bárbara Medeiros.

Equações Diofantinas: Uma proposta Didática para o 9º ano do Ensino Fundamental. / Bárbara Medeiros Vieira. – Palmas, TO, 2018.

56 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2018.

Orientadora : Hellena Christina Fernandes Apolinário

1. Equações Diofantinas Lineares. 2. Teoria dos Números. 3. Proposta Didática. 4. Ensino Fundamental. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

BÁRBARA MEDEIROS VIEIRA

EQUAÇÕES DIOFANTINAS: Uma Proposta Didática para o 9º ano do Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática. Orientadora: Prof.ª. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário.

Aprovada em 07 / 05 / 2018

BANCA EXAMINADORA

Hellena Apolinário

Prof.ª. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (UFT)

Rogério Azevedo Rocha

Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (UFT)

Elisângela Aparecida P. de Melo

Profª. Dra. Elisângela Aparecida Pereira de Melo (UFT)

A Carlos Eduardo, Arthur e Heitor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por Sua graça e misericórdia presentes constantemente em minha vida.

Aos familiares e amigos pelo apoio incondicional.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela coordenação deste importante Programa de Mestrado.

À Universidade Federal do Tocantins (UFT) e a todos os professores do Mestrado, que colaboraram para que eu concluísse esta jornada.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

A minha orientadora pelo incentivo, dedicação e paciência com que me guiou nesta jornada.

Ao meu esposo Carlos Eduardo e ao meu filho Arthur por compreenderem minha ausência e incentivaram a conclusão desse trabalho.

Aos colegas de turma que vivenciaram comigo o prazer de um crescimento pessoal e profissional. Em especial a Osvaldo Ribeiro e João Paulo Moura pelas importantes horas de estudos em grupo.

Felizes aqueles que se divertem com problemas que educam a alma e elevam o espírito.
(François Fénelon)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar uma proposta pedagógica para o ensino das Equações Diofantinas no Ensino Fundamental e assim melhorar os raciocínios algébrico e aritmético dos alunos; além de fomentar o trabalho do professor em sala de aula. Para isso, a aplicação da proposta didática se deu em três etapas: emprego de um pré teste para aferir conhecimentos já adquiridos anteriormente pelos alunos; oficina sobre Equações Diofantinas Lineares; e, por último, a aplicação de um segundo teste para verificação de possíveis resultados da oficina. É apresentada uma breve contextualização histórica das Equações Diofantinas, bem como conceitos básicos sobre Teoria dos Números. Cada definição apresenta um exemplo, com aplicações práticas sempre que possível, para uma melhor compreensão. Utilizou-se também uma situação cotidiana vivenciada pelos alunos como modelo de aplicação prática de Equações Diofantinas Lineares. Diante dos resultados obtidos, observou-se que o ensino de Equações Diofantinas Lineares pode ser uma importante ferramenta para auxiliar os alunos no processo de desenvolvimento dos raciocínios algébrico e aritmético.

Palavras-chave: Ensino Fundamental, Teoria dos Números, Equações Diofantinas Lineares.

ABSTRACT

The present work has as main objective to present a pedagogical proposal for the teaching of the Diophantine Equations in Elementary School and thus to improve the students' algebraic and arithmetic reasoning; besides fomenting the teacher's work in the classroom. For this, the didactic proposal was applied in three stages: the use of a pre-test to measure the knowledge previously acquired by the students; Diophantine Linear Equations workshop; and, finally, the application of a second test to verify possible results of the workshop. A brief historical context of the Diophantine Equations, and the basic concepts of Number Theory is presented. Every definition presents an example, with practical applications, for a better understanding. Was also used a daily situation experienced by the students as a model of practical application of the Diophantine Linear Equations. Considering the obtained results, it was observed that the Linear Diophantine Equations teaching can be an important instrument to assist students in the process of developing algebraic and arithmetic reasoning.

Keywords: Elementary School, Number Theory, Linear Diophantine Equations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Obter pares de números que são soluções de determinada equação é uma ação corriqueira para a maioria dos estudantes do Ensino Fundamental. Geralmente essas soluções são obtidas pelo método da tentativa e erro, que apesar de importante, pois induz à imaginação, aos contraexemplos, aos erros e acertos como afirmam os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), pode se tornar difícil de ser aplicado quando o problema envolve valores muito altos.

Nesse sentido, o currículo de Matemática do Ensino Fundamental apresenta tópicos de Teoria do Números como: decomposição em fatores primos, múltiplos, divisores, divisão euclidiana, máximo divisor comum, entre outros. Entretanto, depois que o aluno estuda esses tópicos, a não ser com alguma pequena aplicação em operações, ele não volta a estudá-los de forma mais profunda e muito menos aplica esses conhecimentos para resolver problemas. O ensino de Equações Diofantinas Lineares pode ajudar o aluno a se expressar e argumentar em diferentes linguagens (VANSAN, 2015).

As equações lineares com duas variáveis frequentemente são atreladas apenas a exercícios algébricos repetitivos. Acreditamos que ao propor uma nova abordagem acerca deste tema, podemos contribuir para o desenvolvimento dos pensamentos algébrico e aritmético dos alunos, visto que a dificuldade apresentada por eles está justamente na interpretação de situações-problema e no discernimento de que ferramenta matemática usar para obter a solução. É importante ressaltar que esta dificuldade não é um fato peculiar a um grupo específico de alunos, ou seja, não se restringe a fatores como idade, nível social ou localização geográfica da escola (POMMER, 2015).

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996) define como alguns dos objetivos do Ensino Fundamental o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem e o domínio do cálculo. Porém entendemos que esses objetivos podem ser melhor alcançados quando o aluno é confrontado e incentivado a resolver, de maneira própria, certa situação. Não enfatizando o processo mecânico, mas sim incentivando os processos pessoais. E neste caso, indicando caminhos que facilitem o processo.

O objetivo central deste trabalho é apresentar uma sequência didática para o ensino de Equações Diofantinas Lineares no 9º ano do Ensino Fundamental. Para alcançar este propósito foi investigada a relevância do processo de ensino dessas equações; verificar e mensurar o impacto causado pelo ensino de Equações Diofantinas Lineares na interpretação de problemas e no raciocínio matemático geral de alunos do 9º ano; e apresentar uma proposta de oficina didática, tendo como suporte contextual a resolução de problemas, pois segundo Freitas (2015), o enfrentamento de situações-problema que extrapolem o ambiente de estudo a que o aluno está acostumado auxilia no processo de ensino-aprendizagem da matemática e possibilita a expressão e a argumentação do aluno em diferentes linguagens.

Assim, o trabalho foi organizado em cinco capítulos, a saber: no primeiro foi realizado um breve levantamento histórico das Equações Diofantinas; na sequência abordaremos conceitos preliminares de Teoria do Números; no terceiro capítulo apresentaremos a sequência didática e a metodologia utilizada; no quarto capítulo, realizaremos a análise dos dados e, baseado nestes, também a discussão dos resultados. E, finalmente, no último capítulo apresentamos o fechamento da pesquisa. Por fim, os anexos apresentam os dois testes que foram aplicados visando mensurar o desenvolvimento dos alunos antes e depois da oficina de conhecimento.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Dentre todas as personalidades históricas que influenciaram o desenvolvimento da Álgebra desde seus primórdios até a versão moderna a que temos acesso atualmente, dois nomes se destacam: Diofanto e Euclides, ambos de Alexandria. Na primeira seção trataremos das contribuições de Euclides, já na segunda, abordaremos um pouco da vida e obra de Diofanto.

2.1 Euclides de Alexandria

Euclides viveu aproximadamente entre 360 e 295 a.C. Foi professor, matemático e escritor. Teria sido educado em Atenas e frequentado a Academia de Platão. Foi convidado por Ptolomeu I para compor o quadro de professores da recém fundada Academia, que tornaria Alexandria o principal centro de erudição por gerações. Foi autor de várias obras. Entre elas: *Os Elementos*; *Os Dados* (uma espécie de manual de tabelas de uso interno da Academia e que complementava os seis primeiros livros de Os Elementos); *Divisão de Figuras*; *Os Fenômenos* (sobre astronomia); e *Óptica* (sobre a visão). Essas obras sobreviveram parcialmente, e hoje são alguns dos mais antigos tratados científicos gregos existentes. Pela sua maneira de expor nos escritos deduz-se que Euclides era um habilíssimo professor.

Sem dúvida nenhuma, sua obra mais importante foi *Os Elementos* um tratado composto de treze livros que cobria toda a Matemática Elementar: o livro I apresenta boa parte da geometria que é ensinada no Ensino Médio; o livro II trata de uma álgebra geométrica, diferente da álgebra simbólica moderna, mas como os mesmos fins; os livros III e IV tratam da geometria no círculo; os livros V e VI tratam sobre a teoria das proporções; os livros VII, VIII e IX são dedicados à Teoria dos Números; o livro X trata sobre incomensurabilidade; o livro XI trata sobre geometria no espaço; o livro XII traz proposições referentes à medida de figuras, usando o método da exaustão; o ultimo livro é inteiramente dedicado às propriedades dos cinco sólidos regulares.

Não é certo que *Os Elementos* tenha sido de completa autoria de Euclides. Acredita-se que a obra foi fruto de uma equipe de colaboradores coordenada por ele. Mas na Grécia antiga era comum que todo o crédito fosse dado ao mestre. Sobre a autoria e originalidade de *Os Elementos*, Boyer (2012) afirma:

> O próprio Euclides não manifesta qualquer pretensão de originalidade, e é claro que ele utilizou grandemente obras de seus predecessores. Acredita-se que a ordenação seja dele, e presumivelmente, algumas demonstrações foram feitas

> por ele; mas afora isso, é difícil avaliar o grau de originalidade dessa obra, a mais renomada da história da matemática (p.89).

Para os gregos "números" sempre se referia aos inteiros e positivos (os naturais). Em todos os livros cada número é representado por um segmento que ele chama AB. Por isso, Euclides não usa frases como "é múltiplo de" ou "é fator de", ele as substitui por frases como "é medido por" e "mede" respectivamente. Isto é, um número n é medido por outro número m se existe um terceiro número k tal que $n = km$.

O livro VII começa com duas proposições que constituem a celebre e tão útil regra na Teoria dos Números, hoje conhecida como "algoritmo de Euclides" para calcular o máximo divisor (medida) comum de dois números. É um esquema que sugere a aplicação inversa do axioma de Eudoxo. Dados dois números diferentes subtrai-se o menor a do maior b repetidamente até que se obtenha um resultado r_1 menor que o menor número; então subtrai-se repetidamente esse resto r_1 de a até resultar em um resto r_2 menor que r_1; então subtrai-se repetidamente r_2 de r_1 até que o método leva a um resto r_n que mede r_{n-1}; portanto, todos os restos precedentes bem como a e b; este número r_n será o máximo divisor comum de a e b.

Esse resultado é de suma importância para o objeto de estudo deste trabalho: Equações Diofantinas Lineares.

2.2 Diofanto

A vida de Diofanto é uma das grandes incertezas da História da Matemática. Não se pode afirmar categoricamente nem ao menos o século em que ele viveu. Em geral, acredita-se que viveu cerca de 250 d.C. Alguns historiadores questionam, inclusive, se ele realmente era grego, devido a sua escrita fora dos padrões da Matemática grega à época. Sabe-se que estudou e trabalhou na Escola de Alexandria, no período denominado "Idade de Prata" (250 - 350 d.C). Por um verso relatado em uma coleção de problemas chamada "Antologia Grega" e escrito no túmulo de Diofanto deduz-se quanto tempo ele viveu:

> Aqui jaz Diofanto. Maravilhosa habilidade. Pela arte da álgebra a lápide nos diz sua idade: Deus deu um sexto da vida como infante, um duodécimo mais como jovem, de barba abundante; e ainda uma sétima parte antes do casamento; em cinco anos nasce-lhe o rebento. Lastima! O filho do mestre e sábio do mundo se vai. Morreu quando da metade da idade final do pai. Quatro anos a mais de estudos consolam-no do pesar; Para então, deixando a terra, também ele alívio encontrar. (COHEN; DRABKIN, 1958 apud BOYER; PÉREZ, 1974, p.128)

Representando o problema como uma equação algébrica, onde x representa sua idade:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

Se o enigma é historicamente exato, Diofanto viveu 84 anos.

Diofanto escreveu três tratados: *Aritmética* composto por treze livros, dos quais sobreviveram seis; *Números Poligonais* do qual restarem apenas fragmentos; e *Porismas* que foi completamente perdido. Porém, sem dúvida, sua principal obra é *Aritmética*. Devido a esta obra Diofanto ficou conhecido como o “pai da álgebra”. Talvez essa designação seja um tanto quanto exagerada pois, "[...]apesar de ser caracterizada por um alto grau de habilidade matemática, *Aritmética* não forma a base da álgebra elementar moderna."Roque (2012, p.233)

Aritmética é a primeira obra que continha algum tipo de notação simbólica, totalmente desvinculada dos métodos geométricos tão utilizados na época.

> [...]O desenvolvimento da álgebra passou por três estágios: o primeiro, conhecido como retórico, onde tudo é completamente escrito em palavras; o segundo, chamado sincopado, são adotadas algumas abreviações; e um terceiro, intitulado simbólico ou final. Essa divisão é naturalmente uma simplificação excessiva, mas se aproxima do que realmente aconteceu. A *Aritmética* de Diofanto deve ser colocada na segunda fase. (BOYER, 2012, p.134)

Segundo Freitas (2015) *Aritmética* foi encontrada em Veneza por Johann Muller em 1464 e traduzida pela primeira vez em 1575 por Wilhelm Holzmann. Esta obra se assemelha em muitos aspectos à álgebra babilônica, mas enquanto os babilônicos se ocupavam com soluções aproximadas de equações determinadas, a obra de Diofanto é quase totalmente dedicada a soluções exatas de equações tanto determinadas quanto indeterminadas. Por isso, o assunto chamado análise indeterminada ficou conhecido como análise diofantina.

Nesta obra, Diofanto representa um valor desconhecido designando-o como *arithmos*, daí o nome “aritmética”. Já no primeiro livro, ele introduz símbolos, os quais chama de “designações abreviadas”, para representar os diversos tipo de quantidade que aparecem nos problemas. O quadro abaixo mostra o método de abreviação utilizado. Diofanto representava a palavra usada para designar essas quantidades por sua primeira ou última letra de acordo com o alfabeto grego.

LETRA	SIGNIFICADO
ς	última letra da palavra *arithmos*, a quantidade desconhecida
Δ^Y	primeira letra de *dynamis*, o quadrado da quantidade desconhecida
K^Y	primeira letra de *kybos*, o cubo da quantidade desconhecida
$\Delta^Y\Delta$	a quarta potência
ΔK^Y	a quinta potência
$K^Y K$	a sexta potência

Fonte: Roque (2012) - Adaptado

A diferença principal entre a linguagem de Diofanto e a linguagem moderna está na ausência de símbolos especiais para operações e relações, bem como de notação exponencial. Segundo estudiosos Diofanto só se interessava por soluções racionais positivas, não aceitando as negativas ou as irracionais. Além disso, Diofanto opera com quantidades desconhecidas do mesmo modo como lida com quantidades conhecidas. A natureza das quantidades, conhecidas ou não, e as operações realizadas se baseiam nas propriedades do números. Sobre isso, Roque (2012) afirma que na resolução de um problema, as quantidades conhecidas ou desconhecidas têm o mesmo estatuto.

Apesar de não ser uma álgebra propriamente simbólica, não se pode negar que a linguagem utilizada por Diofanto em *Aritmética* foi um passo importante à abstração tão valorizada em álgebra.

Aritmética não é uma exposição sistemática sobre as operações algébricas, ou um texto sobre demonstrações formais. Ao invés disso é uma coleção com 150 problemas, todos resolvidos com termos numéricos específicos. Roque (2012, p.232) afirma que: "Fica claro que a técnica continuaria a funcionar, casos os números fossem substituídos por outros, mas isso não chega a ser feito". Diofanto não faz distinção entre problemas determinados e indeterminados, e mesmo para os últimos, quando as soluções em geral são infinitas, uma só resposta é dada.

Deixando de lado o mérito de ser ou não “pai da álgebra” o fato é que Diofanto e sua *Aritmética* tiveram uma influência maior no que hoje chamamos de Teoria dos Números que qualquer outro matemático grego não geômetra.

3 CONCEITOS DE TEORIA DOS NÚMEROS

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos de Teoria Elementar dos Números. Esses conceitos são indispensáveis para a dedução da fórmula geral que fornece o número total de soluções inteiras de uma equação diofantina. Os enunciados e demonstrações presentes neste capítulo foram baseados em Martinez *et al.* (2010); Santos (2010) e Hefez (2006).

3.1 Divisibilidade em $\mathbb{N}$

Dizemos que a divide b, escrevendo $a \mid b$, quando existir $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = ac$. Neste caso dizemos que a é divisor de b, ou ainda, que b é múltiplo de a. A negação desta sentença é representada por $a \nmid b$ e significa que não existe um natural c tal que $b = ac$. Abaixo temos alguns exemplos que explicitam essa definição.

Exemplo 3.1.0.1. *a)* $2 \mid 6$, *pois* $6 = 2 \times 3$;
b) $3 \mid 15$, *pois* $15 = 3 \times 5$;
c) $3 \nmid 4$, *pois não existe um número natural que multiplicado por 3 resulte em 4;*
d) $2 \nmid 13$, *pois não existe um número natural que multiplicado por 2 resulte em 13 .*

É importante ressaltar que que a simbologia $a \mid b$ não significa uma operação em $\mathbb{N}$. Tratase apenas de garantir a existência (ou não) do número natural c tal que $b = ac$.

Apresentaremos a seguir algumas propriedades da divisibilidade.

Proposição 3.1.0.1. *Sejam* $a, b \in \mathbb{N}^*$ *e* $c \in \mathbb{N}$. *Tem-se que*

i) $1 \mid c$, $a \mid a$ *e* $a \mid 0$

ii) se $a \mid b$ *e* $b \mid c$, *então* $a \mid c$.

Prova. i) Decorre imediatamente das igualdades $c = 1.c$, $a = 1.a$ e $a.0 = 0$. ii) como $a \mid b$ e $b \mid c$ podemos afirmar que existem f e $g \in \mathbb{N}$, tais que $b = a.f$ e $c = b.g$. Substituindo o valor de b da primeira equação na segunda, obtemos

$$c = b.g = (a.f).g = a.(f.g)$$

o que nos mostra que $a \mid c$. ∎

Proposição 3.1.0.2. *Se* a,b,c *e* $d \in \mathbb{N}$*, com* $a \neq 0$ *e* $c \neq 0$*, então*

$$a \mid b \text{ e } c \mid d \Rightarrow a\ .\ c \mid b.d.$$

Prova. Se $a \mid b$ e $c \mid d$, então existem f e $g \in \mathbb{N}$, tais que $b = a.f$ e $d = c.g$. Portanto, $b.d = (a.c)(f.g)$, logo, $a.c \mid b.d$. ∎

Proposição 3.1.0.3. *Sejam* a,b *e* $c \in \mathbb{N}$*, com* $a \neq 0$*, tais que* $a \mid (b+c)$*. Então*

$$a \mid b \Leftrightarrow a \mid c.$$

Prova. Como $a \mid (b+c)$, existe $f \in \mathbb{N}$ tal que $b+c = f.a$. Agora, se $a \mid b$, temos que existe $g \in \mathbb{N}$ tal que $b = a.g$. Associando as duas igualdades acima, temos

$$a.g + c = f.a = a.f,$$

donde segue-se que $a.f > a.g$ e, consequentemente, $f > g$. Portanto

$$c = a.f - a.g = a.(f-g),$$

o que implica que $a \mid c$, já que $f - g \in \mathbb{N}$. ∎

A prova da implicação $a \mid c \Rightarrow$a $\mid b$ é análoga.

Proposição 3.1.0.4. *Se* a,b *e* $c \in \mathbb{N}$*, com* $a \neq 0$ *e* $x,y \in \mathbb{N}$ *são tais que* $a \mid b$ *e* $a \mid c$*, então* $a \mid (xb+yc)$*; e se* $xb \geq yc$ *então* $a \mid (xb-yc)$*.*

Prova. $a \mid b$ e $a \mid c$ implicam que existem f e $g \in \mathbb{N}$ tais que $b = af$ e $c = ag$. Logo,

$$xb \pm yc = x(af) \pm y(ag) = a(xf \pm yg),$$

o que prova o resultado, pois, nas condições dadas, $(xf \pm yg) \in \mathbb{N}$. ∎

A seguir temos um exemplo desta proposição.

Exemplo 3.1.0.2. *Como* $3 \mid 15$ *e* $3 \mid 42$*, então 3 dividirá qualquer combinação linear entre 15 e 42:* $3 \mid (8 \times 15 - 7 \times 42)$*,* $3 \mid (42 \times 5 + 15 \times 2)$*, etc.*

A relação de divisibilidade em $\mathbb{N}^*$ é uma relação de ordem, pois satisfaz as seguintes propriedades:

i) Reflexiva: $\forall a \in \mathbb{N}^*, a \mid a$;

ii) Transitiva: se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$,

iii) Anti-simétrica: se $a \mid b$ e $b \mid a$, então $a = b$.

Prova. i) e ii) já foram demonstradas anteriormente. Resta provar iii). Se $a \mid b$, existe $c \in \mathbb{N}^*$ tal que $b = ac$ (I). Temos também que se $b \mid a$, então existe $d \in \mathbb{N}^*$ tal que $a = bd$ (II). substituindo (I) em (II) obtemos

$$a = a.c.d \Rightarrow c.d = 1 \Rightarrow c = d = 1.$$

E portanto $a = b$. ∎

3.2 Divisão Euclidiana

Como já foi visto anteriormente, quando a divisão $\frac{b}{a}$ entre dois números naturais a e b é exata, definimos que $a \mid b$ e diz-se que a é um divisor de b, ou ainda, que b é um múltiplo de a . Porém, nem sempre é possível a divisibilidade entre dois números naturais. Contudo, sempre é possível efetuar a divisão de b por a, com resto. Este teorema, cuja demonstração apresentamos abaixo, não é só um importante instrumento da obra de Euclides, como também é um resultado fundamental na teoria que envolve Equações Diofantinas Lineares.

Teorema 3.2.0.1. *(Divisão Euclidiana) Sejam a e b dois números naturais com $0 < a < b$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que*

$$b = a.q + r, \ com \ r < a$$

Prova. Suponha que $b > a$ e considere, enquanto as diferenças forem positivas, os números

$$b, b - a, b - 2a, ..., b - n.a, ...$$

Pelo Princípio da Boa Ordenação, o conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento $r = b - q.a$. Vamos provar que $r < a$.

Se $a \mid b$, então $r = 0$ e a prova está concluída. Por outro lado, se $a \nmid b$, então $r \neq a$, e basta mostrar que não pode ocorrer $r > a$. De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$. Consequentemente, sendo $r = c + a = b - q.a$, teríamos

$$c = b - (q+1).a \in S, \text{ com } c < r,$$

contradição, pois r é o menor elemento de S.

Portanto, temos que $b = a.q + r$ com $r < a$, o que prova a existência de q e de r. Agora, provaremos a unicidade. Note que, dados dois elementos distintos de S, a diferença entre o maior e o menor, sendo um múltiplo de a, é pelo menos a. Logo, se $r = b - q.a$ e $r^{'} = b - q^{'}.a$, com $r < r^{'} < a$, teríamos $r^{'} - r \geqslant a$, o que implicaria $r^{'} \geqslant r + a \geqslant a$, absurdo. Portanto $r = r^{'}$.

Daí segue- se que

$$b - a.q = b - a.q^{'} \Rightarrow a.q = a.q^{'} \Rightarrow q = q^{'}$$

■

Nas condições do teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de *quociente* e de *resto* da divisão de b por a.

Assim, tem -se que o resto da divisão de b por a é zero, se, e somente se, a divide b.

O exemplo a seguir nos apresenta uma aplicação deste teorema.

Exemplo 3.2.0.1. *"Quantos são os múltiplos de 5 que se encontram entre 1 e 253?"(HEFEZ, 2016a, p.49)*

Solução. Pelo algoritmo da divisão temos que

$$253 = 5 \ . \ 50 + 3$$

ou seja, o maior múltiplo de 5 menor que 253 é 5.50. Portanto, os múltiplos procurados são

$$1.5, \ 2.5, \ 3.5, \ ..., \ 50.5,$$

e, consequentemente, são em número de 50.

3.3 Algoritmo de Euclides

Trata-se de um método simples e eficiente para encontrar o máximo divisor comum entre dois números inteiros diferentes de zero. Mas, antes de apresentar e demonstrar este método iremos definir o que é o divisor comum e também o máximo divisor comum de dois números.

3.3.1 Máximo Divisor Comum

Definição 3.3.1.1. *Definimos como divisor comum de a e b um número inteiro c que é divisor tanto de a quanto de b.*

Definição 3.3.1.2. *O máximo divisor comum de dois inteiros a e b, com a ou $b \neq 0$, denotado por (a,b), é o maior inteiro que divide a e b.*

Para provar a existência do máximo divisor comum de dois números, Euclides usou o o resultado a seguir.

Lema 3.3.1.1. *(Lema de Euclides) Sejam a, b, $n \in \mathbb{Z}$. Se existe $(a,b-na)$, então (a,b) existe e*

$$(a,b) = (a,b-na).$$

Prova. Seja $d = (a,b-na)$. Como $d \mid a$ e $d \mid (b-na)$, segue que $d \mid b = b-na+na$. Logo, d é um divisor comum de a e b. Suponha agora que c seja um divisor comum de a e b. Logo, c é um divisor comum de a e $b-na$ e, portanto, $c \mid d$. Isso prova que $d = (a,b)$. ∎

Na prática este lema afirma que é possível somar ou subtrair quantas parcelas forem necessárias de um dos fatores que o m.d.c. não será alterado. Abaixo, apresentamos um exemplo.

Exemplo 3.3.1.1. *O piso de uma sala retangular, medindo 3,52 m de largura e 4,16 m de comprimento, será revestido com ladrilhos quadrados, de mesma dimensão, inteiros, de forma que não fique espaço vazio entre ladrilhos vizinhos. Os ladrilhos serão escolhidos de modo que tenham a maior dimensão possível. Na situação apresentada, quanto deve medir o lado do ladrilho?*

Solução. Para resolvermos essa questão devemos primeiro converter as medidas 3,52 m x 4,16 m para centímetros (cm). Daí teremos um piso de 352 cm x 416 cm. Para escolher a dimensão adequada do ladrilho que irá revestir o piso retangular devemos calcular $(352,416)$. Pelo Lema de Euclides, sabemos que:

$$(352,416) = (352,416-1.352) = (352,64) = (64,352) = (64,352-5.64) = (64,32) = 32$$

Portanto, o ladrilho quadrado que irá revestir a sala retangular terá 32 cm x 32 cm de dimensão.

A seguir apresentamos a demostração construtiva do Algoritmo de Euclides, objeto essencial para determinar a existência, ou não, da solução de uma Equação Diofantina.

Teorema 3.3.1.1. *(Algoritmo de Euclides) Dados a e $b \in \mathbb{N}$, podemos supor, sem perda de generalidade, $b \leq a$. Se $b = 1$, $b = a$, ou $b \mid a$, $(a,b) = a$. Suponhamos então, que $1 < b < a$ e que $b \nmid a$. Logo, pela divisão euclidiana, podemos escrever*

$$a = bq_1 + r_1, \text{ com } 0 < r_1 < b.$$

Prova. Temos duas possibilidades:

a) $r_1 \mid b$. Nesse caso, $r_1 = (b, r_1)$ e, pelo Lema de Euclides, temos que

$$r_1 = (b, r_1) = (b, a - q_1 b) = (b, a) = (a, b),$$

e o algoritmo termina.

b) $r_1 \nmid b$. Nesse caso, efetuando a divisão de b por r_1, obtemos

$$b = r_1 q_2 + r_2, \text{ com } 0 < r_2 < r_1.$$

Novamente, temos duas possibilidades:

$a^{'}$)r$_2 \mid r_1$. Em tal caso, $r_2 = (r_1, r_2)$ e, novamente, pelo Lema de Euclides,

$$r_2 = (r_1, r_2) = (r_1, b - q_2 r_1) = (r_1, b) = (a - q_1 b, b) = (a, b),$$

e o algoritmo termina.

$b^{'}$)r$_2 \nmid r_1$. Em tal caso, podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2, obtendo

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \text{ com } 0 < r_3 < r_2.$$

■

Este processo é finito, pois caso contrário, criaríamos uma sequência de números naturais $b > r_1 > r_2 > ...$ que não possui menor elemento, o que não é possível pelo Princípio da Boa Ordenação. Logo, para algum n remos que $r_n \mid r_{n-1}$ o que implica que $(a,b) = r_n$.

O algoritmo citado acima, pode ser realizado na prática da forma como mostrada a seguir. Inicialmente, efetua-se a divisão de a por b obtendo $a = bq_1 + r_1$ colocando os números envolvidos na tabela:

	q_1	
a	b	
r_1		

A seguir, continuamos efetuando a divisão $b = r_1q_2 + r_2$ e colocando os números envolvidos na tabela.

	q_1	q_2	
a	b	r_1	
r_1	r_2		

Prosseguindo, enquanto for possível, teremos

	q_1	q_2	q_3	...	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r2	...	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = (a,b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	...	r_n		

Exemplo 3.3.1.2. *Determinar (1001,109).*

Solução. Utlizando o algoritmo de Euclides, temos

	9	5	2	4	2	
1001	109	20	9	2	1	
20	9	2	1	0		

Observe que, no exemplo acima, o Algoritmo de Euclides nos fornece:

$1001 = 109.9 + 20$

$109 = 20.5 + 9$

$20 = 9.2 + 2$

$9 = 2.4 + 1$

$2 = 1.2 + 0$

Como o (a,b) é sempre o último resto não nulo, temos que (1001, 109) = 1.

3.3.2 Teorema de Bézout

O máximo divisor comum de dois números sempre pode ser expresso como uma combinação linear desses números. Este resultado está descrito no teorema a seguir.

Teorema 3.3.2.1. *Dados a e $b \in \mathbb{Z}$, sempre é possível escrever o $(a,b) = d$ como uma combinação linear de a e b, isto é, existem x e $y \in \mathbb{Z}$ tais que:*

$$d = ax + by$$

Prova. Seja $d = (a,b)$, podemos afirmar que $d \mid a$ e $d \mid b$. Tomando um $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c \mid a$ e $c \mid b$. Assim, $c \mid ax + by$ com x e $y \in \mathbb{Z}$. Por consequência, $ax + by = cq$ com $q \in \mathbb{Z}$. Mas, como $d = (a,b)$ e $c \mid d$ então $d = qc$. Logo, $ax + by = qc = d$. ∎

No exemplo 3.3.1.2 podemos escrever (1001,109) = 1 como:

$$1001.(-49) + 109.(450) = 1$$

3.4 Equaçoes Diofantinas

Nesta seção abordaremos com um pouco mais de atenção o tema Equações Diofantinas. Os exemplos apresentados são, em sua maioria, contextualizados buscando uma melhor aplicação ao grupo alvo da pesquisa.

Equações Diofantinas são equações polinomiais com duas ou mais variáveis que admitem apenas soluções inteiras. Segundo SAMPAIO e CAETANO (2008):

Definição 3.4.0.1. *Equações Diofantinas são equações polinomiais, em várias incógnitas, com coeficientes inteiros (ou racionais) para as quais se buscam soluções restritas ao conjunto dos números inteiros.*

Exemplo 3.4.0.1. *Podemos citar como exemplos de Equações Diofantinas:*
a) $26x + 18y = 10$*;*
b) $x^2 - y^2 = 13$*;*
c) $x^3 + y^3 + z^3 = 7$

Neste trabalho trataremos apenas das equações da forma $ax + by = c$ denominadas equações diofantinas lineares, com duas variáveis, onde a, b e c são números inteiros dados, e x e y, também inteiros, são as soluções procuradas.

Muitos problemas cotidianos dependem da resolução de equações do tipo $ax + by = c$. O seguinte exemplo, quando modelado, resulta numa equação semelhante a citada anteriormente.

Exemplo 3.4.0.2. *De quantas formas é possível sacar R$ 110,00 em um caixa eletrônico que dispõe apenas de cédulas de R$ 10,00 e de R$ 20,00?*

Solução. Sendo x a quantidade de notas de R$ 10,00 e y a quantidade de notas de R$ 20,00, a situação descrita resume-se a resolver a seguinte equação $10x + 20y = 110$

Um método intuitivo de solucionar este problema é atribuir valores a uma das variáveis e verificar o valor correspondente a outra. Por exemplo:

a) Uma cédula de dez e cinco cédulas de vinte reais;
$10.(1)+20.(5)=110$

b) Três cédulas de dez e quatro cédulas de vinte reais;
$10.(3)+20.(4)=110$

c) Cinco cédulas de dez reais e três cédulas de vinte reais;
$10.(5)+20.(3)=110$

d) Sete cédulas de dez reais e duas cédulas de vinte reais;
$10.(7)+20.(2)=110$

e) Nove cédulas de dez reais e uma cédulas de vinte reais;
$10.(9)+20.(1)=110$

f) Onze cédulas de dez reais.
$10.(11)+20.(0)=110$

Assim os pares $(1,5)$, $(3,4)$, $(5,3)$, $(7,2)$, $(9,1)$ e $(11,0)$ são soluções para essa equação. Uma observação importante a ser feita é que a mesma quantia de R$ 110,00 não poderia ser obtida apenas com cédulas de R$ 20,00, pois $20 \nmid 110$. Os caixas eletrônicos se baseiam em Equações Diofantinas Lineares para a dispensa das notas e, apesar de oferecerem na maioria dos casos, apenas duas alternativas de escolha de cédulas, observa-se que qualquer uma das formas citadas anteriormente seria possível.

Este método de tentativa e erro é útil, porém trabalhoso; e nos casos em que a equação não tem solução, é uma perda de tempo. Por exemplo, seria possível sacar 115 reais nesse mesmo caixa eletrônico? Por este método percebe-se que não, pois a equação $10x+20y$ sempre resultará em números pares, enquanto 115 é ímpar.

Mas quando esse tipo de equação admite solução? Este questionamento pode ser respondido utilizando o teorema a seguir.

Teorema 3.4.0.1. *A equação diofantina $ax+by=c$ admite solução se, e somente se, (a,b) divide c.*

Prova. Suponha a existência de solução na equação,ou seja, que existam x_o e $y_o \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_o+by_o=c$. Temos que $(a,b) \mid a$ e $(a,b) \mid b$ portanto, (a,b) divide qualquer combinação linear formada por a e b. Assim, $(a,b) \mid (ax_o+by_o)$, logo $(a,b) \mid c$.

Reciprocamente, por hipótese, temos que $d=(a,b) \mid c$. Então, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $c=qd$. Pelo Teorema 3.3.2.1, existem x_o e $y_o \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_o+by_o=d$. Multiplicando por q ambos os lados da igualdade, obtemos $(ax_o)q+(by_o)q=dq$. Portanto, $(ax_o)q+(by_o)q=c$ e assim, podemos afirmar que q equação diofantina $ax+by=c$ adimte pelo menos uma solução: $x=x_oq$ e $y=y_oq$ ■

Uma consequência deste teorema é o fato de que quando $(a,b) = 1$ a equação apresentará infinitas soluções, já que 1 é divisor de qualquer número real. Importante notar que quando $(a,b) \neq 1$ podemos dividir ambos os membros da igualdade por um valor conveniente de modo que $(a,b) = 1$.

Exemplo 3.4.0.3. *Quais das equações a seguir admitem solução?*

a) $3x + 12y = 312$.

b) $5x + 15y = 233$.

Solução. a) Devemos verificar se $(3,12) \mid 312$. $(3,12) = 3$ e $3 \mid 312$. Logo, a equação possui solução.

b) $(5,15) = 5$ e $5 \nmid 233$. Portanto, a equação não possui solução.

Nos casos acima, o (a,b) pode ser calculado facilmente. Quando isso não for possível, como mostrado no exemplo a seguir, aplica-se o algoritmo de Euclides.

Exemplo 3.4.0.4. *Qual o maior número, menor que 300, que pode ser escrito como uma combinação linear entre 105 e 28?*

Solução. A representação do problema é dada por $105x + 28y = c$, em que c é o número procurado. Utilizando o Algoritmo de Euclides para calcular $(105,28)$

	3	1	3	
105	28	21	7	
21	7	0		

Daí, temos que $(105,28) = 7$. Assim, para que a equação tenha solução é necessário que $7 \mid c$. Portanto, o número procurado é um múltiplo de 7. Como $300 = 7 \times 42 + 6$, a resposta para nosso problema é $42 \times 7 = 294$. De fato:

$$105.(2) + 28.(3) = 294.$$

Confirmada a existência das soluções, é plausível o seguinte questionamento: essas soluções seguem um padrão? Esta pergunta é respondida com o teorema enunciado a seguir.

Teorema 3.4.0.2. *Seja o par de inteiros x_o e y_o uma solução particular da equação diofantina $ax + by = c$, então todas as outras soluções são da forma*

$$x = x_o + \frac{b}{d}t \ ;$$
$$y = y_o - \frac{a}{d}t;$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

Prova. Sejam x_o e y_o soluções particulares e x e y soluçoes quaisquer da equação $ax+by = c$; podemos escrever:

$$ax_o + by_o = c = ax + by.$$

Dessa igualdade encontramos:

$$a(x - x_o) = b(y_o - y).$$

Sendo $d = (a,b)$, então existem inteiros f e g tais que $a = fd$ e $b = gd$ com $(f,g) = 1$. Substituindo a e b na equação acima, temos:

$$fd(x - x_o) = gd(y_o - y).$$

Eliminando o fator d, podemos concluir que $g \mid f(x - x_o)$. Como $(f,g) = 1$, g não divide f. Portanto $g \mid (x - x_o)$. Sendo assim, existe um inteiro t tal que:

$$x - x_o = gt.$$

Assim, substituindo na equação anterior, resulta que:

$$fgt = g(y_o - y).$$

Concluindo que:

$$y_o - y = ft.$$

Assim, chegamos às fórmulas:

$$x - x_o = gt,$$
$$y_o - y = ft.$$

Mas, sabemos que $g = \frac{b}{d}$ e $f = \frac{a}{d}$. E, finalmente, substituindo nas fórmulas acima encontramos:

$$x = x_o + \frac{b}{d}t \ ;$$
$$y = y_o - \frac{a}{d}t.$$

■

O inteiro t é também chamado de parâmetro, sendo que para cada valor de t, tem-se uma solução distinta para a equação diofantina.

Exemplo 3.4.0.5. *No Campeonato Brasileiro, cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto e cada derrota vale 0 ponto. Certo time terminou o primeiro turno invicto(nenhuma derrota) e com 43 pontos. De quantas formas é possível que isso ocorra?*

Solução. A situação acima pode ser descrita pela equação diofantina $3x+y=43$, onde x é a quantidade de vitórias e y é a quantidade de empates, não sendo necessário representar a quantidade de derrotas, pois estas não valem pontos. Esta equação tem solução, pois $(3,1)=1$ e $1 \mid 43$. Uma solução particular dela é $x_o=0$ e $y_o=43$. Assim, a solução geral desta equação é da forma: $x=0+t$ e $y=43-3t$. Como são pontos em um campeonato, não faz sentido pensar em soluções negativas. Portanto: $0+t \geq 0$ e $43-3t \geq 0$ e $0 \leq t \leq 14$, visto que $t \in \mathbb{Z}$. Substituindo então os possíveis valores de t encontramos todas as soluções possíveis.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y	43	40	37	34	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1

O exemplo acima sintetiza o que deve ser feito para resolver uma equação diofantina. Primeiro verifica-se se a equação tem solução; depois descobre-se a solução particular x_o e y_o. Quando esta solução não puder ser percebida facilmente, usa-se o Algoritmo de Euclides de trás para frente para determinar inteiros m e n, tais que:

$$am+bn=1$$

os quais sempre existem pelo Teorema 3.3.2.1. Daí, basta multiplicar ambos os membros da equação por c, encontrando assim:

$$a(mc)+b(nc)=c.$$

E a solução particular seria $x_o=mc$ e $y_o=nc$.

Exemplo 3.4.0.6. *Quantos são os pares* (x,y) *positivos que satisfazem a equação* $2x+3y=101$? *(LUZ, 2014, p.50)*

Solução. Primeiramente, verificamos que a equação possui solução pois $(2,3)=1$ e $1 \mid 101$. Uma solução particular da equação é $x_o=1$ e $y_o=33$. Assim, as solução geral é da forma $x=1+3t$ e $y=33-2t$. Os valores devem ser positivos, assim

$$\text{I) } 1+3t>0 \Rightarrow \text{t} > \frac{-1}{3}$$
$$\text{II) } 33-2t>0 \Rightarrow \text{t} < \frac{33}{2}$$

Como $t \in \mathbb{Z}$, devemos ter $0 \leq t \leq 16$. Portanto, são 17 os pares positivos que satisfazem a equação $2x+3y=101$.

Exemplo 3.4.0.7. *Se um trabalhador recebe 510 reais em tíquetes de alimentação, com valores de 20 reais ou 50 reais cada tíquete, de quantas formas pode ser formado o carnê de tíquetes desse trabalhador? (BORGES, 2013, p.42)*

Solução. Se x denota a quantidade de tíquetes de 20 reais e y denota a quantidade de tíquetes de 50 reais, a equação que representa o problema é:

$$20x+50y=510.$$

A equação possui solução, pois $(20,50)=10$ e $10 \mid 510$. Dividindo ambos os membros da equação da equação por 10 obtemos:

$$2x+5y=51$$

Sabemos que $(2,5)=1$ logo, pelo Teorema 3.3.2.1 podemos escrever 1 como uma combinação linear entre 2 e 5.

$$2.(-2)+5.(1)=1$$

Multiplicando a equação por 51, obtemos:

$$2.(-102)+5.(51)=51.$$

Portanto, $x_o=-102$ e $y_o=51$ é uma solução particular. Assim, as demais soluções são dadas por $x=-102+5t$ e $y=51-2t$. Nossas soluções devem ser positivas. Logo:

$$\text{I) } -102+5t>0 \Rightarrow \text{t} > \frac{102}{5}$$
$$\text{II)} 51-2t>0 \Rightarrow \text{t} < \frac{51}{2}$$

Como $t \in \mathbb{Z}$ temos que $21 \leq t \leq 25$ e são ao todo cinco possibilidades para os carnês, a saber:

Para $t=21$, temos um carnê com 3 tíquetes de 20 reais e 9 tíquetes de 50 reais;

Para $t = 22$, temos um carnê com 8 tíquetes de 20 reais e 7 tíquetes de 50 reais;

Para $t = 23$, temos um carnê com 13 tíquetes de 20 reais e 5 tíquetes de 50 reais;

Para $t = 24$, temos um carnê com 18 tíquetes de 20 reais e 3 tíquetes de 50 reais;

Para $t = 25$, temos um carnê com 23 tíquetes de 20 reais e 1 tíquete de 50 reais.

Apesar de ser um tópico abordado apenas no Ensino Superior, percebe-se por meio dos exemplos apresentados, que Equações Diofantinas Lineares pode ser um conteúdo apresentado às séries finais do Ensino Fundamental e também a todo Ensino Médio, pois os conceitos envolvidos são plenamente acessíveis a alunos dessas duas etapas da Educação Básica.

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA E METODOLOGIA

Neste capítulo apresentamos o método utilizado nesta pesquisa e também a proposta didática para o ensino de Equações Diofantinas Lineares para o 9º ano do Ensino Fundamental. Ressaltamos que o objetivo deste trabalho não é a inclusão das Equações Diofantinas Lineares no currículo de Matemática do Ensino Fundamental, mas apresentar uma forma de abordar estes conceitos de modo a incentivar o desenvolvimento dos pensamentos algébrico e aritmético do público alvo da pesquisa.

4.1 Engenharia Didática

A metodologia usada nesta pesquisa é de abordagem qualitativa, pautada nos pressupostos teóricos e práticos da Engenharia Didática.

A noção de Engenharia Didática emergiu na Didática da Matemática (enfoque na didática francesa) no início dos anos 80. Segundo Almouloud, Queiroz e Coutinho (2008) caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula.

Basicamente, a pesquisa se subdivide nas vertentes qualitativa e quantitativa. Sobre isso Pommer (2013) afirma que:

> A Engenhria Didática possui dupla função: pode ser utilizada como metodologia qualitativa de pesquisa na área da matemática, mas também é extremamente útil para a elaboração de situações didáticas que configurem um quadro de aprendizagem significativa em sala de aula (p. 21)

A metodologia da Engenharia Didática foi desenvolvida e amplamente descrita por Artigue (1996) que a nomeou desta forma por se assemelhar ao trabalho do engenheiro que se apoia e aceita o controle científico, mas também está ciente da maior complexidade dos problemas didáticos.

Ainda segundo Artigue (1996) esta metodologia está dividida em quatro fases.

a) Estudos Prévios: levam em consideração o quadro teórico didático geral, envolvendo o campo de domínio a ser estudado.

b) Análises a Priori: o investigador identifica as variáveis didáticas para subsidiar a tomada de decisões.

c) Experimentação: consiste basicamente no desenvolvimento e aplicação da sequência didática pretendida.

d) Análises a Posteriori: se caracteriza pelo tratamento dos dados obtidos anteriormente, permitindo a interpretação dos resultados.

É importante ressaltar que essas fases não ocorrem, obrigatoriamente, de forma sequencial e isolada. Ao contrário, é comum a antecipação, junção e até sobreposição dos elementos caracterizadores destas quatro fases.

Nas próximas subseções apresentaremos de que modo a pesquisa foi realizada, de acordo com as fases da Engenharia Didática.

4.1.1 Análises a priori

O primeiro passo da pesquisa foi realizar o levantamento de informações relevantes referentes tanto ao objeto de pesquisa e aplicação didática quanto aos estudantes envolvidos. Nesta pesquisa as análises a priori aparecem em junção aos estudos prévios. Listamos a seguir as etapas que foram seguidas nesta primeira fase:

i) estudo didático e matemático do objeto de saber “números e operações”, mais especificamente os conceitos e abordagens de “equações do 1º grau com duas variáveis”;

ii) pesquisa e análise de publicações que tratam sobre as dificuldades em absorver e aplicar conceitos algébricos e aritméticos apresentadas por diferentes grupos de estudantes;

iii) consulta aos Parâmetros Nacionais do Ensino Fundamental e ao Referencial Curricular do Ensino Fundamental do estado do Tocantins;

iv) coleta e elaboração de questões para verificar as concepções prévias apresentadas pelos estudantes acerca do tema proposto;

v) previsões do método de resolução e possíveis dificuldades que poderiam ser apresentadas pelos estudantes.

Associada a Engenharia Didática utilizamos também a metodologia de resolução de problemas, em sua maioria contextualizados, pois segundo Sales (2014, p.59): “[...]quando o alunos faz o papel de pesquisador tem a seu favor que todos os procedimentos por ele testeados são frutos de uma experimentação e este é mais facilmente lembrado em outras ocasiões[...]”.

4.1.2 Experimentação e aplicação da Sequência Didática

Baseou–se em uma sequência de 5 encontros semanais que aconteceram no período de 07 de novembro de 2017 a 05 de dezembro de 2017. Cada encontro teve duração de 90 minutos, sempre as terças feiras no turno vespertino.

No primeiro encontro ocorreu aplicação de um pré teste composto por 5 situações problema. Este teste teve como propósito verificar conceitos já adquiridos pelos alunos acerca do tema proposto.

Estavam presentes 28 dos 39 alunos matriculados no 9º ano do turno vespertino, que foram organizados em duplas, com o intuito de promover a troca de conhecimento entre os alunos. Não houve interferência da pesquisadora na formação das duplas.

Como atividade inicial foi feita a leitura em voz alta das questões e os alunos foram orientados a resolver os problemas da maneira que achassem melhor.

Os estudantes de posse das informações propostas nos problemas, visto que durante a assimilação destes apresentaram muitas dúvidas a respeito da interpretação das questões. Elas não foram respondidas.

Neste primeiro momento não foi notado grande entusiasmo entre os alunos, talvez pelo fato desta atividade não "valer nota".

No segundo encontro foi dado início à oficina de Equações Diofantinas. Estavam presentes 31 alunos. Foram abordados conceitos iniciais tais como: múltiplos, divisores, m.d.c.,m.m.c., divisão euclidiana.

Foram resolvidos exercícios para exemplificar os conceitos abordados. A maioria dos estudantes apresentou certa dificuldade com esses conceitos, mostrando apenas o domínio da aplicação mecanizada de algoritmos.

Questionados sobre o verdadeiro significado dessas definições, nenhum deles soube explicar o real sentido dos cálculos efetuados. Foi percebido por exemplo, que nenhum deles conseguia identificar, na divisão euclidiana, a relação entre dividendo, divisor, quociente e resto. Apesar de todos eles saberem o nome de cada fator envolvido.

No final do encontro foi deixado um **"desafio"** que recaía em uma Equação Diofantina, a saber: **"Determine um número positivo que dividido por 13 deixa resto 5 e dividido por 7 deixa resto 2".**

O terceiro encontro iniciou-se a discussão aberta da resolução do desafio deixado no encontro anterior. Nesta ocasião estavam presentes 35 alunos. Apenas 19 alunos resolveram o problema, e todos o fizeram pelo método da tentativa e erro. Desses, 18 encontraram como solução o número 44. Apenas um encontrou mais de uma solução: os números 44 e 135. Eles relataram terem gastado muito tempo para acharem uma solução.

Houve participação dos estudantes expondo as soluções que haviam encontrado. Somente depois das discussões e exposições das soluções encontradas é que eles perceberam que havia mais de uma solução possível. A partir daí foram abordados conceitos de Equações Diofantinas Lineares (definição, condição de existência de solução, solução particular e solução geral). Desde então percebemos uma mudança de postura dos alunos, que se mostraram muito mais interessados neste novo conteúdo e participaram ativamente inclusive fazendo perguntas e tirando dúvidas. Segue a solução do desafio.

Solução do Desafio. Seja n o número inteiro procurado. Ele deve satisfazer às igualdades:

$$n = 13x + 5 \text{ e } n = 7y + 2.$$

Associando essas duas igualdades concluímos que devemos procurar as soluções da equação $13x - 7y = -3$. Esta equação tem solução, pois $(13,7) = 1$ e $1 \mid -3$. Escrevendo 1 como uma combinação linear entre 13 e 7 obtemos:

$$13.(-1) - 7.(-2) = 1.$$

Multiplicando a equação por -3 teremos:

$$13.(3) - 7.(6) = -3.$$

Portanto, $x_0 = 3$ e $y_0 = 6$ é uma solução particular da equação. Logo, as demais soluções são da forma:

$$x = 3 - 7t \text{ e } y = 6 - 13t$$

Como o número procurado é positivo, é necessário que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. O que implica que $t \leq \frac{3}{7}$. Como $t \in \mathbb{Z}$, basta que tenhamos $t \leq 0$, sendo assim, temos infinitos números que são soluções da equação proposta. A seguir expomos os cinco primeiros valores encontrados.

Para $t = 0$, temos $x = 3$, $y = 6$ e $n = 44$;

Para $t = -1$, temos $x = 10$, $y = 19$ e $n = 135$;

Para $t = -2$, temos $x = 17$, $y = 32$ e $n = 226$;

Para $t = -3$, temos $x = 24$, $y = 45$ e $n = 317$;

Para $t = -4$, temos $x = 31$, $y = 58$ e $n = 408$.

É possível verificar que os estudantes encontraram apenas as duas primeiras soluções pelo fato de que, nesta ocasião, eles ainda não tinham o conhecimento necessário para entender o padrão presente nos resultados e resolveram a questão testando valores. Esse episódio foi capaz de mostrar a eles que a aplicação de conceitos formais pode não ser a única maneira de se resolver um problema, mas, na maioria das vezes, é a maneira mais rápida e efetiva.

O quarto encontro foi dedicado à resolução das questões do Teste I (ver Apêndice) buscando exemplificar e retomar os conceitos vistos em toda a oficina de conhecimento, bem como tirar as dúvidas dos alunos. Estavam presentes 33 alunos que participaram intensamente fazendo perguntas e expondo estratégias próprias de resolução. Ao final desse encontro foi deixado como tarefa aos alunos um problema que foi modelado com informações sobre um bazar realizado por eles. Este problema será tratado mais detalhadamente na próxima seção. Os alunos foram orientados a trazer este problema resolvido por escrito no próximo encontro.

Na semana entre o quarto e o quinto encontro houve movimentação dos estudantes no contra turno, as duplas estavam empenhadas em resolver o problema do bazar. Muitos trouxeram outros problemas que recaíam em Equações Diofantinas a fim de tirar dúvidas. A maioria dessas dúvidas consistia na resolução das inequações que delimitam o intervalo do parâmetro t. Foi percebido que, apesar de não "valer nota" os alunos se mostraram dedicados ao tema proposto.

O quinto encontro foi dedicado à finalização da sequência didática com a realização de duas atividades: a resolução do problema do bazar e a realização de um pós teste pelos alunos. Para o problema do bazar foi dedicado 30 minutos e sua análise será feita mais detalhadamente na próxima seção.

Para o pós teste foram dedicados 60 minutos. O pós teste continha cinco questões diferentes daquelas presentes no pré teste. Estavam presentes 38 estudantes. Todos fizeram o pós teste, entretanto, para termos um parâmetro de comparação, vamos analisar apenas os dados referentes aos 28 alunos participantes do primeiro teste.

As informações referentes aos demais alunos serão expostos apenas para fins de ilustração. Os estudantes se organizaram em duplas, com o mesmo colega do primeiro teste. Acreditamos que assim o resultado seria mais fidedigno.

As análises a posteriori foram baseadas nos dados coletados através de observações e de comparações entre os resultados dos testes. Estas análises serão abordadas de forma mais específica no próximo capítulo.

4.2 Aplicabilidade das Equações Diofantinas

Esta aplicação foi realizada utilizando dados reais de um bazar realizado pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Mul. Mestre Pacífico Siqueira Campos, localizada na quadra 409 norte, em Palmas- TO. Visando a festa de formatura, esses alunos vinham fazendo vários eventos para arrecadar dinheiro, dentre eles: rifas, festival de sorvete e o bazar empregado no estudo de caso.

O bazar foi realizado no dia 21 de outubro de 2017, das 9 às 16 horas e havia peças de R$ 2,00 e de R$ 5,00 somente.

A professora de ciências estava encarregada de ajudar os alunos neste bazar. Somente ela detinha informações precisas como: quantidade de peças de cada valor, total arrecadado e quantidade de peças vendidas. Assim sendo, ficou acordado que ela não divulgaria para os alunos a quantidade de peças vendidas, apenas o valor arrecadado e que a quantidade de peças vendidas de cada tipo foi praticamente a mesma.

A partir desse evento os estudantes deveriam descobrir, por meio da resolução da Equação Diofantina, quantas peças de cada valor foram vendidas.

O problema: "No dia 21 de outubro de 2017, os estudantes do 9º ano da Escola Mestre Pacífico realizou um bazar para arrecadar dinheiro para a formatura. Havia peças de R$ 2,00 e de R$ 5,00, totalizando R$ 297,00 arrecadados. Sabendo que a diferença entre a quantidade de peças de R$ 2,00 vendidas e a quantidade de peças de R$ 5,00 foi a menor possível, quantas peças no total foram vendidas?"

Todas as duplas apresentaram a solução do problema por escrito. A grande maioria delas, cerca de 89,3%, resolveu o problema encontrando todas as soluções possíveis, pelo método da tentativa e erro, e destacando aquela que atendia à restrição do problema. Apenas três duplas aplicaram os conceitos de Equações Diofantinas lineares. Foi dada oportunidade para que, voluntariamente, as duplas expusessem se tinham conseguido resolver o problema e de que forma.

Essa exposição deveria ser feita apresentando a solução no quadro para os colegas. Duas duplas se manifestaram.

A primeira dupla resolveu o problema pelo método da tentativa e erro. Porém, já haviam percebido a dinâmica das soluções das Equações Diofantinas e assim, encontraram a solução desejada rapidamente.

A segunda dupla aplicou os conceitos de Equações Diofantinas em sua totalidade, percebendo inclusive para qual valor do parâmetro t tinha-se a solução desejada. Esta segunda dupla apresentou apenas uma dúvida: a ordem das variáveis x e y na subtração interferia no resultado. Na sequência foi explicado a eles e a toda turma que na verdade isso não acontecia, devido à presença do módulo na operação de diferença. Então, foi exposto superficialmente a ideia de módulo, e colocado que eles irão ter um contato maior com este conceito no Ensino Médio.

4.2.1 Resolução do Problema do Bazar

A situação pode ser descrita pela equação $2x + 5y = 297$, onde x e y são as quantidades de peças de R$2,00 e de R$ 5,00 respectivamente. Uma solução particular desta equação é

$$x_o = 1 \text{ e } y_o = 59$$

Assim as soluções são da forma

$$x = 1 + 5t \text{ e } y = 59 - 2t$$

A diferença entre as quantidades de peças é dada por

$$\mid x - y \mid = \mid 7t - 58 \mid$$

Para que esta diferença seja mínima devemos ter

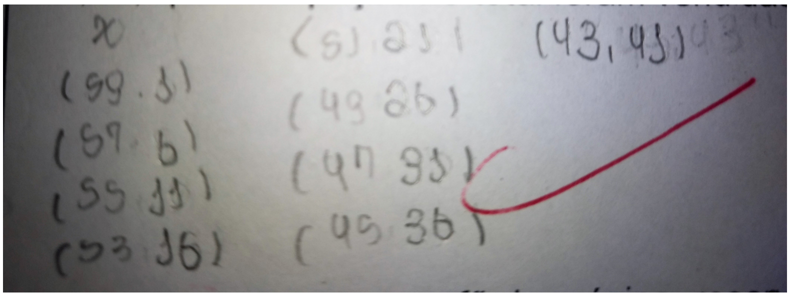
$$\mid 7t - 58 \mid = 0 \Rightarrow \text{t} = \frac{58}{7}.$$

Como $t \in \mathbb{Z}$, temos que $t = 8$

Portando, $x = 41$ e $y = 43$. Então, no total foram vendidas 84 peças: 41 no valor de dois reais cada e 43 no valor de cinco reais cada.

A seguir apresentamos as formas como duas duplas resolveram o problema.

Figura 1 – Forma de solução da dupla A

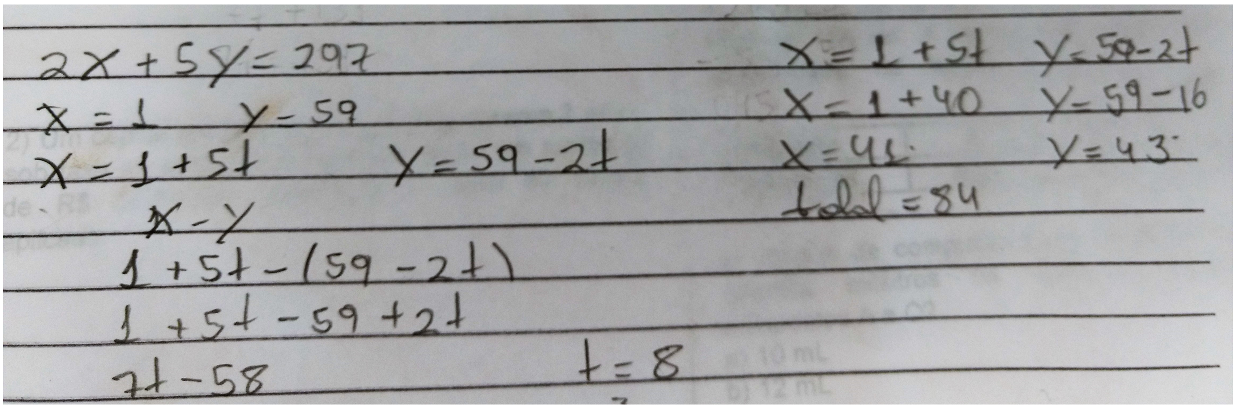


Fonte: Acervo da pesquisadora (2017)

Diante do desenvolvimento da sequência didática, os alunos perceberam que a diferença entre as quantidades de peças de R$ 2 e de R$ 5 iam diminuindo até um determinado ponto e então passariam a aumentar novamente. Então quando encontraram o ponto onde os valores eram “os mais próximos”(palavras dos próprios alunos) notaram ser essa a solução desejada e não deram continuidade ao processo.

A figura 2 a seguir mostra a forma como a segunda dupla solucionou o problema aplicando os conceitos de Equações Diofantinas.

Figura 2 – Forma de solução da dupla B



Fonte: Acervo da pesquisadora (2017)

A atuação dos estudantes na solução deste problema nos mostra como a junção entre matemática e realidade é importante para que eles se interessem pelo conteúdo proposto e, consequentemente, melhore o aprendizado.

5 ANÁLISE DE DADOS E DISCUSSÕES DE RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos e comparamos os dados coletados nos dois testes aplicados.

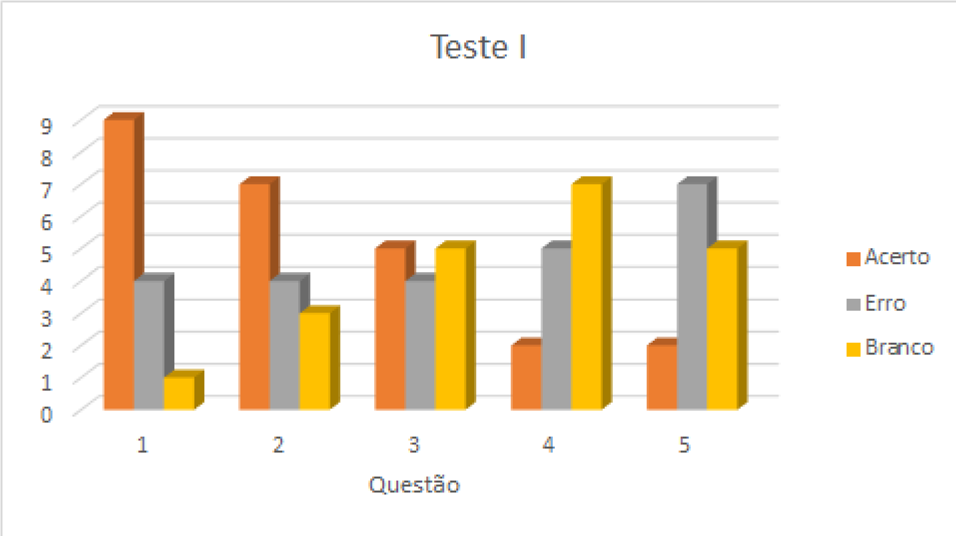
5.1 Pré Teste

Como já exposto anteriormente, foram aplicados dois testes para quantificar o impacto do ensino de Equações Diofantinas na interpretação e resolução de problemas. O primeiro teste teve o propósito de verificar o conhecimento prévio dos alunos acerca do tema e se encontra no apêndice A. Duas questões foram elaboradas pela própria pesquisadora e três foram retiradas de fontes diversas.

O teste foi aplicado da seguinte forma: dividimos a turma em 14 duplas e propomos que cada uma resolvesse 5 questões. Ressaltamos que todas as duplas resolveram as mesmas 5 questões para que assim pudéssemos comparar a relação entre erros e acertos, e o modo como buscavam solucionar os problemas. Tomaremos como acerto o fato da dupla ter encontrado pelo menos uma solução para o problema proposto.

O gráfico a seguir discrimina o resultado quantitativo (acerto, erro e branco) por questão no primeiro teste. Participaram quatorze duplas. Os testes eram compostos por cinco questões. O eixo vertical representa a quantidade de duplas, já o eixo horizontal representa o número da questão. Na questão 1 tivemos um total de nove acertos, quatro erros e uma dupla deixou a questão em branco; na questão 2 tivemos sete acertos, cinco erros e três duplas deixaram a questão em branco; na questão 3 cinco duplas acertaram, 4 erraram e 5 deixaram o item em branco; na quarta questão duas duplas acertaram, cinco duplas erraram e sete duplas deixaram o item em branco; e na ultima questão tivemos dois acertos, sete erros e cinco duplas deixaram a questão em branco.

Figura 3 – Desempenho dos alunos no Pré Teste



Fonte: Autora

Neste primeiro teste todos os acertos foram dados por tentativa e erro. Apenas duas das quatorze duplas encontraram todas as soluções possíveis: uma delas encontrou todas as soluções em todas as questões; a outra, todas as soluções nas questões 1 e 2.

Observa-se que quando a questão trata de temas cotidianos, como as questões 1 e 2, os alunos absorvem melhor as informações do problema e assim tem maiores chances de acertar o item.

5.2 Pós Teste

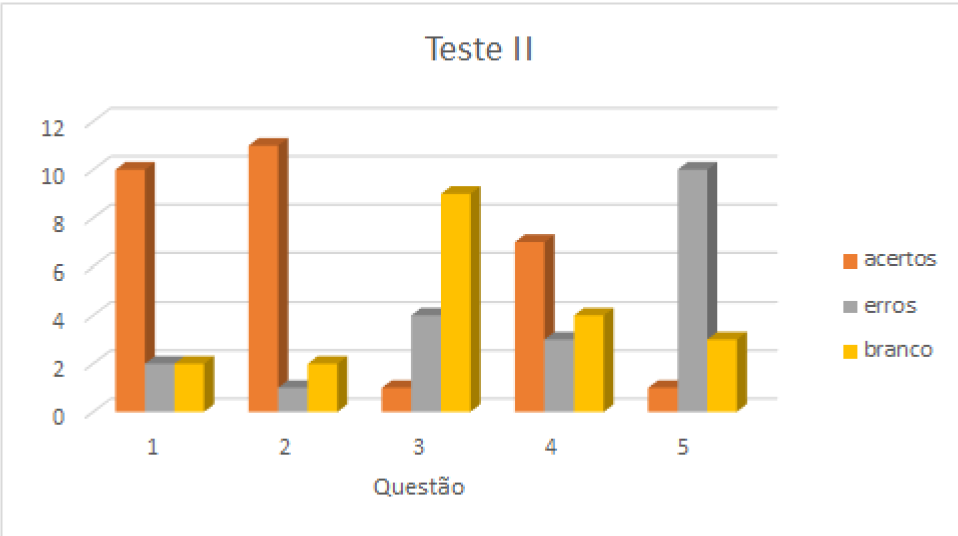
Após três encontros onde efetivamente foi trabalhado os conceitos referentes às Equações Diofantinas Lineares, foi aplicado um segundo teste com o objetivo de verificar o aprendizado dos alunos e o impacto causado na interpretação de situações problema. Nesta ocasião estavam presentes ao total 38 alunos, que também foram divididos em duplas.

Destes, 10 não estavam presentes no encontro em que foi aplicado o primeiro teste. Todos eles fizeram o pós teste, porém optamos por expor os dados separadamente. Acreditamos que assim a comparação dos resultados será mais proveitosa. As duplas que relacionamos na figura 4 são as mesmas duplas que foram citadas no figura 3.

O gráfico a seguir mostra o desempenho quantitativo(acerto, erro e branco) por questão das duplas no segundo teste. A maioria dos alunos resolveu as questões aplicando os conceitos e definições de Equações Diofantinas, e não tentativa e erro. Assim como no primeiro gráfico, o eixo vertical representa a quantidade de duplas e o eixo horizontal o número da questão. Neste teste o aproveitamento se distribuiu da seguinte forma: dez duplas acertaram a primeira questão, duas duplas erraram e duas deixaram o item em branco; onze duplas acertaram a segunda questão, uma dupla errou e duas duplas deixaram o item em branco; uma dupla acertou a terceira questão, quatro duplas erraram e nove deixaram o item em branco; sete duplas acertaram a quarta questão, três duplas erraram e quatro duplas deixaram o item em branco; uma dupla acertou a última questão, dez duplas erraram e três deixaram o item em branco.

É importante destacar que estão presentes apenas informações referentes às mesmas duplas que participaram do primeiro teste.

Figura 4 – Desempenho dos alunos no Pós Teste

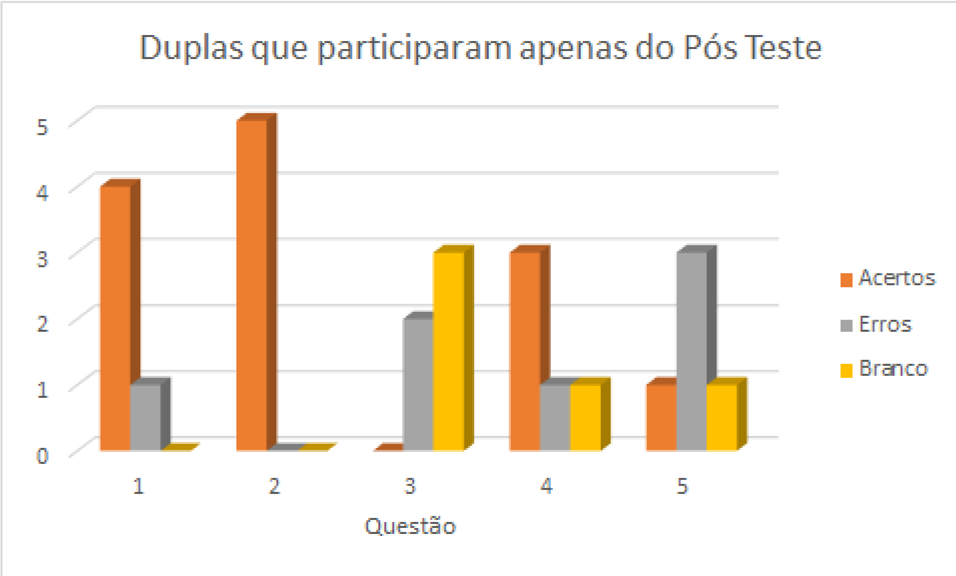


Fonte: Autora

Apresentamos ainda um terceiro gráfico que mostra o desenvolvimento das cinco duplas que participaram apenas do segundo teste, pois não estavam presentes no dia em que foi aplicado o primeiro teste.

Vale ressaltar que esses dados estão isolados pelo fato de não haver critério de comparação. O resultado dessas duplas se deu do seguinte modo: na questão 1 tivemos quatro acertos e apenas um erro; todas as duplas acertaram a questão 2; na questão três tivemos 3 erros e 2 duplas deixaram em branco; na questão 4 tivemos três acertos, um erro e uma dupla deixou em branco; e na última questão tivemos um acerto, três erros e uma dupla deixou branco.

Figura 5 – Desempenho dos alunos que participaram apenas do Pós Teste



Fonte: Autora

Analisando os resultados das questões um e dois podemos observar que a maioria dos alunos absorveram informações essenciais como: definição de uma equação Diofantina, condição necessária para haver solução e o comportamento das soluções. Percebe-se, porém, através do baixo desempenho dos estudantes na questão três, que eles não desenvolveram o entendimento sobre o algoritmo de Euclides aplicado na ordem inversa; pois esta era a única questão em que esse algoritmo era realmente indispensável.

A questão quatro nos mostra que a maioria dos alunos dividiram os membros da equação por um valor conveniente a fim de deixá-la mais simples e assim facilitar a resolução.

A quantidade de erros da questão de número cinco mostra que eles não interpretaram as informações da maneira adequada, já que a maioria dos alunos escreveram a seguinte equação para representar o problema:

$$5x + 6y = 390.$$

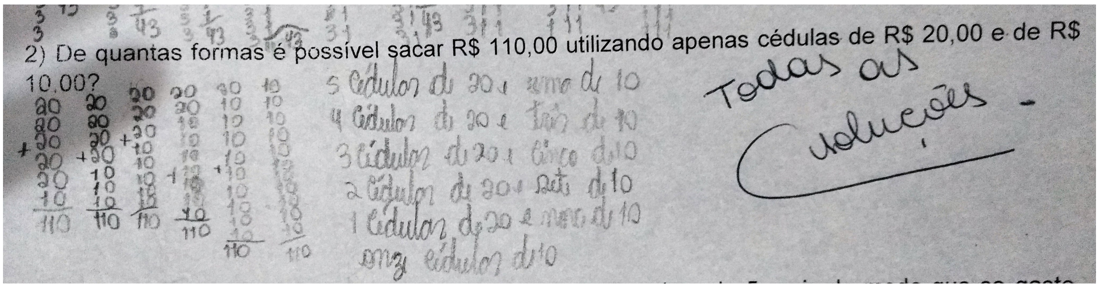
Os alunos não consideraram que para uma partida de vôlei são necessários dois times de seis pessoas; e para uma partida de basquete é preciso dois times de cinco pessoas. Portanto, a equação correta seria:

$$10x + 12y = 390.$$

Mesmo aqueles que resolveram a questão cinco por tentativa e erro não consideram o fato de ser preciso duas equipes para cada partida.

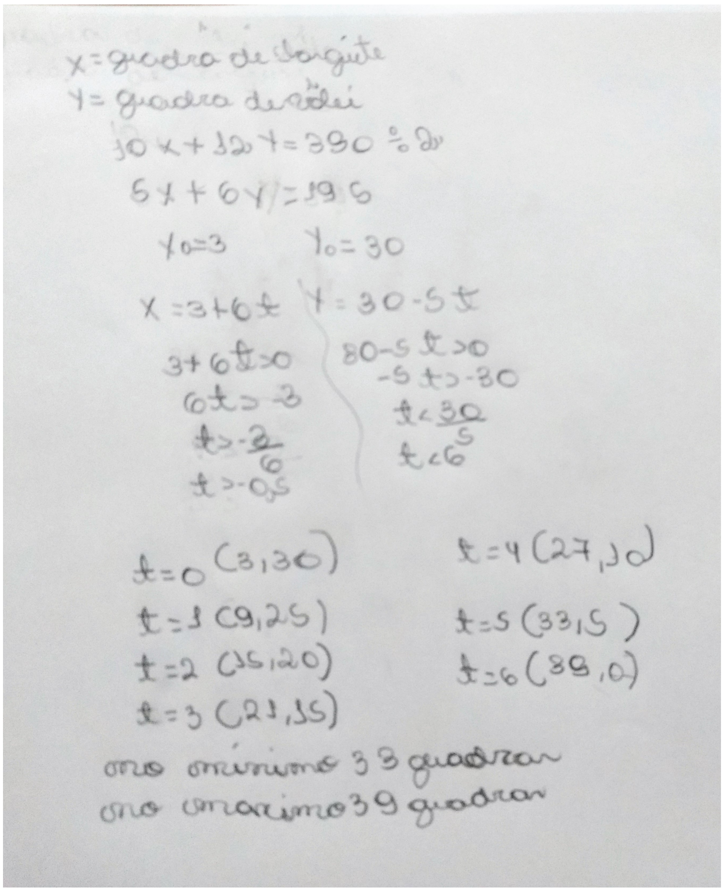
As imagens a seguir são de uma mesma dupla e nos mostram a evolução na maneira de resolução dos problemas propostos. Somente a referida dupla acertou a questão de número 5 do Pós teste.

Figura 6 – Solução da questão 2 do Pré Teste



Fonte: Acervo da Pesquisadora

Figura 7 – Solução da questão 5 do Pós Teste



Fonte: Acervo da Pesquisadora

Observamos que alguns fatores influenciaram nos resultados obtidos, tais como: poucos encontros disponíveis, o fato do tema ter sido ministrado concomitantemente a outros conteúdos programáticos e por fim, o fato do pós teste ter sido aplicado na semana de provas bimestrais.

Apesar de todos as adversidades, os resultados obtidos a partir dos testes I e II mostram que tivemos um aumento de 20% nos acertos, uma diminuição de 16,66% e de 4,76% nos erros e nas questões deixadas em branco, respectivamente.

A interferência da oficina de conhecimento fica ainda mais evidente quando analisamos os dados referentes às duplas que participaram somente do teste II, pois o índice de acertos dessas duplas foi superior a 50%.

Então, é possível concluir que o ensino, ainda que superficial, de conceitos relacionados a Equações Diofantinas Lineares influenciam positivamente na forma como os alunos interpretam e solucionam problemas algébricos.

Destacamos que a metodologia de Resolução de Problemas aliada a aplicação do conteúdo a uma situação real vivenciada pelos alunos foi capaz de retirá-los de uma zona de conforto, onde eram apenas agentes passivos e receptores de conhecimento, para colocá-los como construtores do próprio saber.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma análise da interferência do ensino de Equações Diofantinas Lineares na interpretação e resolução de problemas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do estado do Tocantins.

Além disso, também permitiu desenvolver uma aplicação prática do referido conteúdo e avaliação de como este recurso afeta na aprendizagem dos alunos.

A matemática é uma ciência presente em tudo o que nos cerca, mesmo assim seu ensino tem sido cada vez mais questionado devido ao baixo rendimento da maioria dos alunos. Então, dada a importância do assunto, este trabalho objetivou apresentar as Equações Diofantinas Lineares como mais uma ferramenta para motivar o aluno, auxiliar no desenvolvimento do raciocínio matemático em geral e consequentemente contribuir na melhora do aproveitamento escolar. Como todo trabalho que envolve a pesquisa de campo, foram observados pontos positivos e pontos negativos.

6.1 Pontos Positivos

- A proposta de aplicação voltada para uma situação cotidiana vivenciada pelos alunos foi importante no que diz respeito ao interesse pelo conteúdo apresentado, conteúdo este que não faz parte do currículo formal do Ensino Fundamental.
- A aquisição por parte dos estudantes dos resultados a partir de uma atividade realizada;
- O maior grau de rigor matemático com que o conteúdo foi tratado mostrou aos estudantes que conceitos matemáticos são construídos e tem uma finalidade.
- Os estudantes investigaram e construíram conceitos matemáticos ao invés de apenas receberem definições prontas.

Diante das análises realizadas através do decorrer dos encontros e dos resultados obtidos com os testes I e II foi possível observar que os alunos:

- Compreenderam quando existe ou não solução para uma Equação Diofantina;
- Relacionaram os conceitos de Equações Diofantinas com conteúdos estudados anteriormente: como múltiplos, divisores e Sistemas de Equações;

- Perceberam a possibilidade de existência de mais de uma solução na maioria dos problemas;
- Utilizaram tentativa e erro como estratégia principal de resolução no primeiro teste, que evoluiu a partir de atividades apresentadas nos encontros surgindo utilização do uso do múltiplo ou divisor de um número como ferramenta facilitadora;
- Escreveram corretamente equações que representavam a maioria os problemas propostos e nos casos possíveis, escreveram também a forma mais simples dessas equações, afim de auxiliar na resolução dos problemas.

6.2 Pontos Negativos

O emprego de preceitos baseados na Engenharia Didática também foi fundamental para que os resultados fossem alcançados, pois possibilitou relacionar os mecanismos dos estudos teóricos e o cenário experimental do momento. Porém, alguns pontos de nossa prática de pesquisa devem ser considerados e repensados para futuros trabalhos.

- A formação das duplas: o trabalho em duplas objetiva a troca de conhecimento. Entretanto, os alunos tendem a se associar levando em consideração apenas a afinidade, não se importando se o colega vai ou não ajudar na desenvolvimento do conhecimento. Sendo assim, pensamos que se a pesquisadora tivesse interferido na formação das duplas, os resultados teriam sido ainda melhores.
- O espaço de tempo entre os encontros: os encontros aconteciam uma vez por semana. Isso associado ao fato de que Equações Diofantinas Lineares foi ministrado concomitantemente a outros conteúdos, atuou de modo negativo no rendimento do público alvo. A solução seria que a oficina de conhecimento acontecesse em dias consecutivos e isolada de outros conteúdos.
- A data de aplicação do Pós Teste: essa aplicação se deu na semana de provas bimestrais. Os maioria dos alunos não estava totalmente focada no estudo de um conceito que não "não valia nota" e nem faz parte do currículo formal da disciplina.

A aplicação dos dois testes conseguiu mostrar o crescimento dos alunos em relação ao assunto, pois obtivemos um aumento na quantidade de acertos e uma diminuição na quantidade de erros e questões deixadas em branco (como detalhado no capítulo anterior). Analisando os resultados, é possível concluir que os objetivos foram alcançados, já que obtivemos melhora no rendimento do público alvo da pesquisa, a maioria dos alunos escreveu corretamente as equações que representavam os problemas e aplicaram os conceitos de equações diofantinas para resolver esses problemas.

Ademais, percebemos ainda, que a contextualização dos problemas interfere diretamente nos resultados, pois a quantidade de acertos foi maior nas questões que envolviam situações presentes no seu dia a dia.

Outro ponto importante é notar que o método de tentativa e erro, que foi a única ferramenta utilizada no primeiro teste, deixou de ser o mecanismo principal de resolução das questões, havendo uma maior compreensão por parte dos alunos no enunciado das questões e também na assimilação das propriedades e das ferramentas que oficina pode oferecê-los.

Nesse sentido, a abordagem do tema por meio da resolução de problemas se mostrou viável pelo fato de colocar o aluno como sujeito ativo do processo aprendizagem, pois o estimula a pensar, criar, relacionar e testar ideias e estratégias próprias.

O que se espera deste trabalho é que ele auxilie o professor na prática docente no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes. Esta habilidade tem início no Ensino Fundamental e geralmente é tida como um conteúdo difícil pelos alunos.

Neste cenário, o ensino de Equações Diofantinas Lineares surge como um instrumento auxiliar visando o aprimoramento do raciocínio matemático em geral, pois pode ser abordado de várias formas: geométrica, aritmética e algébrica.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; QUEIROZ, C. de; COUTINHO, S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no gt-19/anped. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62–77, 2008.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. **Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget**, p. 193–217, 1996.

BORGES, F. V. de A. **Equações Diofantinas Lineares em Duas Incógnitas e Suas Aplicações**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade FEderal de Goiás, Goiânia-GO, 2013.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3. ed. Rio de Janeiro: Edgard Blücher, 2012.

BOYER, C. B.; PÉREZ, M. M. **Historia de la matemática**. [S.l.]: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Lei de diretrizes e bases da educação nacional, lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília, DF, 20 dez. 1996. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf>. Acesso em: 24 set. 2013.

BRASIL, P. C. matemática. **Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF**, 1998.

CASTRO, F. Z. de. **Uma Proposta de Sequência Didática para Treinamento Olímpico em Matemática**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, 2013.

FREITAS, C. W. A. **Equações Diofantinas**: 2015. 201 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - CE, 2015.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

_____. **Aritmética- Coleção PROFMAT**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

_____. **Exercícios Resolvidos de Aritmética – Coleção PROFMAT**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LUZ, F. P. **O uso de Equações Diofantinas Lineares na resolução de problemas de preparação Olímpica**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Piaui, Teresina - PI, 2014.

MARTINEZ, F. B.; MOREIRA, C. G.; SALDANHA, N.; TENGAN, E. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

POMMER, W. M. **Equações Diofantinas Lineares: Um Desafio Motivador para alunos de Ensino Médio**: 2008. 155f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo-SP, 2008.

POMMER, W. M. **Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. São Paulo: Unifesp, 2013.

______. Os usos flexíveis do conceito de variável na educação básica: Um estudo envolvendo as equações diofantinas lineares. **Ciência e Natura**, Santa Maria - RS, v. 37, p. 356–364, 2015.

ROQUE, G. L.; PITOMBEIRA, J. Uma equação diofantina e suas resoluções. **Revista do Professor de Matemática**, v. 19, p. 39–47, 1991.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

SALES, M. M. de. **Resolução de Problemas de Equações Diofantinas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, 2014.

SAMPAIO, J.; CAETANO, P. Introdução à teoria dos números: um curso breve. **São Carlos: EdUFSCar**, 2008.

SANTOS, J. P. de O. **Introdução à Teoria dos Números- Coleção Matemática Universitária**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

SANTOS, P. S. de A. **Congruência e Equações Diofantinas: Uma Proposta para o Ensino Básico**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, 2013.

SOUZA, R. S. de. **Equações Diofantinas Lineares, Quadráticas e Aplicações**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro - SP, 2017.

VANSAN, A. H. Equações diofantinas: um projeto para sala de aula e o uso do geogebra. **Ciência e Natura**, Santa Maria - RS, v. 37, p. 532–554, 2015.

ANEXOS

ANEXO A – TESTE I

Apresentamos aqui as questões que foram usadas nos dois testes que aplicados para quantificar o impacto do ensino de Equações Diofantinas Lineares.

1) No Campeonato Brasileiro, cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto e cada derrota vale 0 ponto. Certo time terminou o primeiro turno invicto(nenhuma derrota) e com 43 pontos. Quais as quantidades possíveis de vitórias e empates deste time?

2) De quantas formas é possível sacar R$ 110,00 utilizando apenas cédulas de R$ 20,00 e de R$ 10,00?

3) De quantas maneiras podemos comprar selos de 3 reais e de 5 reais de modo que se gaste exatamente 50 reais? (HEFEZ, 2006, p.74)

4) Uma loja de conveniência trabalha com diversas marcas de café. Num determinado mês, um comprador desta loja comprou 2 tipos de café – tipo A (normal) e tipo B (descafeinado). Sabendo-se que ele gastou exatamente R$ 58,00, quais são as diversas maneiras que ele pode adquirir os pacotes do tipo A e do tipo B? O preço do pacote da marca A é R$ 2,00 e do pacote da marca B, R$ 3,00. (POMMER, 2008, p.61)

5) Uma camiseta custa, R$ 21,00 , mas comprador só tem notas de R$ 2,00, e o caixa, só de R$ 5,00. Nessas condições, será possível pagar a importância da compra? De que modo? (SANTOS, 2013, p.75)

ANEXO B – TESTE II

1) Em um evento beneficente em prol de crianças com câncer que ocorreu no Centro Cultural Roberto Palmari em 2017 no Município de Rio Claro - SP, foram vendidos R$ 720,00 em ingressos. Sabendo que o valor do ingresso para homens custavaR$ 15; 00 e para mulheres R$ 8; 00, quantos homens e quantas mulheres participaram do evento? (SOUZA, 2017, p.41)

2) Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês uma certa quantia para a compra de CDs ou DVDs. Se um CD custa R$ 12,00 e um DVD R$ 16,00, quais são as várias possibilidades de aquisição de um deles ou de ambos, gastando-se exatamente R$ 70,00? E qual a equação que representa este problema? (POMMER, 2013, p.40)

3) Determine o menor número natural que tem restos 11 e 35 quando dividido, respectivamente, por 37 e 48. (HEFEZ, 2016b, p.93)

4) Um laboratório dispõe de 2 máquinas para examinar amostras de sangue, uma delas examina 15 amostras de cada vez enquanto a outra examina 25. Quantas vezes essas máquinas devem ser acionadas para examinar exatamente 2 mil amostras? (ROQUE; PITOMBEIRA, 1991, p.39)

5) Um time de basquete é formado por 5 pessoas, um time de vôlei é formado por 6 pessoas. Quantas quadras de basquete e quantas quadras de vôlei são necessárias para que 390 pessoas joguem ao mesmo tempo? (CASTRO, 2013, p.54)

ANEXO C – SOLUÇÕES TESTE I

1) A situação pode ser descrita pela equação diofantina $3x+y=43$, onde x é a quantidade de vitórias e y é a quantidade de empates, não sendo necessário representar a quantidade de derrotas, pois estas não valem pontos. Esta equação tem solução, pois $(3,1)=1$ e $1 \mid 43$. Uma solução particular dela é $x_o=0$ e $y_o=43$. Assim, a solução geral desta equação é da forma: $x=0+t$ e $y=43-3t$. Como são pontos em um campeonato, não faz sentido pensar em soluções negativas. Portanto: $0+t \geq 0$ e $43-3t \geq 0$ e $0 \leq t \leq 14$, visto que $t \in \mathbb{Z}$. Substituindo então os possíveis valores de t encontramos todas as soluções possíveis.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y	43	40	37	34	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1

2) Sendo x a quantidade de notas de R$ 10,00 e y a quantidade de notas de R$ 20,00, a situação descrita resume-se a resolver a seguinte equação $10x+20y=110$. Dividindo ambos os membros desta equação por 10, temos $x+2y=11$. A equação tem solução pois $(1,2)=1$ e $1 \mid 11$. Uma solução particular da equação é $x_o=1$ e $y_o=5$. Então, as soluções são da forma $x=1+2t$ e $y=5-t$. Daí, temos que $0 \leq t \leq 5$. Portanto, 6 formas possíveis.

3) Sendo x a quantidade de selos de R$ 3,00 e y a quantidade de selos de R$ 5,00 a referida situação pode ser presentada pela equação $3x+5y=50$. Equação esta que apresenta solução, pois $(3,5)=1$ e $1 \mid 50$. Uma solução particular é $x_o=0$ e $y_o=10$. Logo, as soluções são da forma $x=5t$ e $y=10-3t$. Daí, concluímos que $0 \leq t \leq 3$. Portanto, 4 formas possíveis. Sendo elas:

- Dez selos de R$ 5,00 e nenhum selo de R$ 3,00;
- Sete selos de R$ 5,00 e cinco selos de R$ 3,00;
- Quatro selos de R$ 5,00 e dez selos de R$ 3,00;
- Um selo de R$ 5,00 e quinze selos de R$ 3,00.

4) O problema pode ser representado pela equação $2x+3y=58$, onde x é a quantidade de pacotes de café normal e y é a quantidade de pacotes de café descafeinado. A equação tem solução, pois $(2,3)=1$ e $1 \mid 58$. Uma solução particular é $x_o=29$ e $y_o=0$.

Assim, as soluções são da forma $x = 29 + 3t$ e $y = -2t$. Daí, $-9 \leq t \leq 0$. Portanto, dez formas possíveis. São elas:

- Vinte e nove pacotes de café normal e nenhum de café descafeinado;
- Vinte e seis pacotes de café normal e dois de café descafeinado;
- Vinte de três pacotes de café normal e quatro de café descafeinado;
- Vinte pacotes de café normal e seis de café descafeinado;
- Dezessete pacotes de café normal de oito de café descafeinado;
- Quatorze pacotes de café normal e dez de café descafeinado;
- Onze pacotes de café normal e doze de café descafeinado;
- Oito pacotes de café normal e quatorze de café descafeinado;
- cinco pacotes de café normal e dezesseis de café descafeinado;
- dois pacotes de café normal e dezoitoito de café descafeinado.

5) Na compra de um produto vale a seguinte regra *Valor pago - Troco = Valor do produto*. Então, a situação é representada pela equação $2x - 5y = 21$, em que x representa a quantidade de notas utilizadas pelo comprador e y a quantidade de notas utilizadas pelo caixa. Esta equação possui solução, pois $(2,5) = 1$ e $1 \mid 21$. Uma solução particular é $x_o = 13$ e $y_o = 1$. Assim, as soluções são da forma $x = 13 + 5t$ e $y = 1 + 2t$. Como $t \in \mathbb{N}$, basta que $t \geq 0$. Portanto, o problema apresenta infinitas soluções. Apresentamos algumas:

t	0	1	2	3
Valor pago	26	36	46	56
Troco	5	15	25	35

ANEXO D – SOLUÇÕES TESTE II

1) Seja x a quantidade de mulheres e y a quantidade de homens presentes no evento, a equação que representa a situação é dada por $8x + 15y = 720$. Esta equação possui solução, pois $(8, 15) = 1$ e $1 \mid 720$. Pelo Teorema de Bézout temos que $8.(2) + 15.(-1) = 1$. Multiplicando ambos os membros da equação por 720 obtemos $8.(1440) + 15.(-720) = 720$. Então as soluções são da forma $x = 1440 + 15t$ e $y = -720 - 8t$. Daí, $-96 \leq t \leq -90$. Portanto, sete soluções possíveis. Substituindo o valor de t encontramos todas elas. A saber:

- Quarenta e oito homens e nenhuma mulher;
- Noventa mulheres e nenhum homem;
- Quinze mulheres e quarenta homens;
- Trinta mulheres e trinta e dois homens;
- Quarenta e cinco mulheres e vinte e quatro homens;
- Sessenta mulheres e dezesseis homens;
- Setenta e cinco mulheres e oito homens.

2) A equação que representa o problema é dada por $12x + 16y = 70$, onde x é a quantidade de CDs comprados, e y a quantidade de DVDs. A equação não possui solução, pois $(12, 16) = 4$ e $4 \nmid 70$. Portanto não é possível ela adquirir CDs e/ou DVDs gastanto exatamente R$ 70,00.

3) Seja N o número procurado. Então N possui as seguintes formas $N = 37x + 11$ e $N = 48y + 35$. Relacionando essas duas igualdades obtemos $37x - 48y = 24$ A equação possui solução, pois $(37, 48) = 1$ e $1 \mid 24$. Aplicando o Algoritmo de Euclides invertido obtemos $37.(13) - 48.(10) = 1$. Multiplicando ambos os lados desta igualdade por 24 temos $37.(312) - 48.(240) = 24$. Assim, as soluções são da forma $x = 312 - 48t$ e $y = 240 - 37t$. Como o número procurado deve ser positivo, $t \leq 6$. N deve ser mínimo, então $t = 6$. Daí, $x = 312 - 48.6 = 24$ $\Rightarrow$N=37.24+11=899.

4) Seja x a quantidade de vezes que a máquina de 15 amostras é acionada e y a quantidade de vezes que a máquina de 25 amostras é acionada, a equação que representa a situação dada é $15x + 25y = 2000$. Para facilitar, podemos dividir ambos os membros da equação por 5, obtendo $3x + 5y = 400$. Esta equação possui solução, pois $(3, 5) = 1$ e

$1 \mid 400$. Uma solução particular é $x_o = 0$ e $y_o = 80$. Então, as soluções são das formas $x = 5t$ e $y = 80 - 3t$. A solução deve ser positiva, logo $0 \leq t \leq 26$. Portanto, temos 27 soluções possíveis. Listaremos algumas:

- Se $t = 1$, temos $x = 5$ e $y = 77$;
- Se $t = 2$, temos $x = 10$ e $y = 74$;
- Se $t = 3$, temos $x = 15$ e $y = 71$.

5) Para que cada partida aconteça são necessários dois times de cada esporte. Portanto a equação que representa o problema é dada por $10x + 12y = 390$, onde x representa os times de basquete e y representa os times de vôlei. Dividindo ambos os membros da equação por 2 obtemos $5x + 6y = 195$. Esta equação tem solução, pois $(5, 6) = 1$ e $1 \mid 195$. Uma solução particular desta é $x_o = 39$ e $y_o = 0$, então as soluções são da forma $x = 39 + 6t$ e $y = -5t$. Daí, $-6 \leq t \leq 0$. Logo, temos sete maneiras possíveis. A menor quantidade possível de quadras é 33 e a maior é 39 quadras.