Jessé Carvalho da Silva

A Álgebra Linear no Ensino Básico

Mossoró - RN, Brasil

15/04/2013

Jessé Carvalho da Silva

A Álgebra Linear no Ensino Básico

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido-UFERSA, Campus Mossoró, para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador:
Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia

Mossoró - RN, Brasil

15/04/2013

Dissertação de Projeto Final de Mestrado sob o título *"A Álgebra Linear no Ensino Básico"*, defendida por Jessé Carvalho da Silva e aprovada em 15/04/2013, em Mossoró, Estado do Rio Grande do Norte, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia
(UFERSA)
Orientador

Prof. Dr. Odacir Almeida Neves (UFERSA)
Membro Interno

Prof. Dr. David Armando Zavaleta
Villanueva (UFRN)
Membro Externo

Resumo

Os conceitos e aplicações algébricas de funções, produto cartesiano, matrizes, números complexos, polinômios são basilares para o ensino básico, e iremos uní-los em uma só estrutura, chamada de Espaços Vetoriais, estudados em cursos de Álgebra Linear com o intuito de melhorar e fortalecer os conhecimentos dos professores do ensino básico, proporcionando-lhes mais segurança e clareza ao ministrar suas aulas, como também procura incentivar os professores a se atualizarem e fazer com que os seus alunos se motivem para o ensino superior, em áreas que a Matemática, em particular, a Álgebra Linear está presente. Conhecendo a definição de espaços vetoriais, acreditamos que o professor poderá compreender melhor as técnicas e operações algébricas dos conteúdos por ele ensinados, uma vez que munidos da operação de soma e produto por escalar, os objetos por ele ensinados no ensino médio constituem exemplos clássicos de Espaços Vetoriais da Álgebra Linear. Acreditamos que o não conhecimento desta estrutura de álgebra, faz com que o professor exponha de forma limitada e sem motivação futura, em termos de outros estudos por parte dos seus alunos no ensino médio, e é claro, que está visão ou esta abordagem não é interessante; é preciso melhorar esta visão em sala de aula, é preciso que o professor tenha uma visão panorâmica daquilo que ensina. Assim, pretendemos com este trabalho apresentar os conceitos de funções, pares ordenados, matrizes, números complexos, polinômios (tipo especial de função) em seguida dotá-los de duas operações binárias, a saber, soma e multiplicação por escalar, usuais, e mostrar que estes são exemplos de Espaços Vetoriais ou Espaços Lineares, observando sempre as difenças que existem entre os objetos estudados, é bom enfatizar que nossa preoculpação maior não é com o conteúdo de Espaço Vetorial e sim sua exposição didática, mostrando que de algum modo esta associado aos conceitos estudados no ensino básico.

Palavras-chave: Funções, Matrizes, Polinômios, Álgebra Linear.

Abstract

The concepts and applications of algebraic functions, Cartesian product, matrices, complex numbers, polynomials are cornerstones for basic education, and we will unite them in a single structure, called Vector Spaces, studied in Linear Algebra courses in order to improve and strengthen teachers' knowledge of basic education by providing them with more certainty and clarity to teach their classes, but also seeks to encourage teachers to upgrade and make their students motivate themselves for higher education in areas that mathematics In particular, Linear Algebra is present. Knowing the space vector definition, we believe that the teacher can better understand the technical content and the algebraic operations taught by it, once armed with the addition operation and scalar product, the objects that he taught in school are classic examples of Vector Spaces Linear Algebra. We believe that no knowledge of this algebra structure, makes the teacher expose a limited future and no motivation in terms of other studies by its students in high school, and of course, it is this vision or approach is not interesting, it is necessary to improve the vision in the classroom, it is necessary that the teacher has a panoramic view of what he teaches. So, with this work we intend to present the concepts of functions, ordered pairs, matrices, complex numbers, polynomials (special type of function) then equip them with two binary operations, namely addition and scalar multiplication, usual, and show these are examples of Vector Spaces and Linear Spaces, always taking difenças that exist between the objects studied, it is good to emphasize that our preoculpação bigger is not with the content of Vector Space but its didactic, showing that this somehow associated to the concepts studied in primary education.

Keywords: Functions, matrices, polynomials, linear algebra.

Dedicatória

Ao meu pai, a minha mãe e a minha filha, pela força e incentivo de sempre. A minha namorada Klesia Ferreira, que sempre esteve presente e que, com compreensão, apoio e carinho, tornou possível minhas realizações.

Agradecimentos

Agradeço a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, em especial ao Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia, pela paciência, pela perssitência, pelo incentivo, pela confiança que sempre demonstrou durante o período de elaboração deste texto. Não poderia deixar de citar todos os colegas de turma que com suas opniões, expostas no decorrer do curso, evidenciou a importância da pluralidade de visões sobre cada assunto abordado, abrindo de modo definitivo uma visão mais abrangente das ideias discutidas. aos mestres que tiveram paciência de nos guiar, apesar de nossas resistências, dedicamos um agradecimento especial pelas luzes que acenderam em nossas mentes e que procuraremos conservar e, se possível, alimentar para sempre. Um agradecimento especial a minha família que me incentivou a participar do PROFMAT e a concluir este trabalho com muito apoio em todos os momentos.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

É muito comum o comentário sobre as dificuldades em aprender Matemática. O fato de alguém ter facilidade no aprendizado e uso desta matéria significa para muitas pessoas inteligência superior, e esse fato é assim julgado desde a antiguidade onde a Matemática era reservada nas escolas para aqueles que seguiam os estudos até níveis elevados, pois:

> No início do Livro VII da República, logo após a alegoria da Caverna, Platão, procurando explicitar os preceitos para uma educação adequada ao filósofo, estabelece que antes de o candidato a filósofo ser introduzido nos cânones da dialética é necessário que a ele seja ensinado o cultivo das Matemáticas [18].

Em dissertação de mestrado, sob o título - "'A Matemática é para poucos"': um sentido marcado na história - cita:

> Problemas ligados às estações podem ter criado a necessidade dos primeiros cálculos. Surgiram assimos especialistas na feitura de calendários e, inicialmente, esta profissão foi reservada aos sacerdotes. Foram eles os primeiros "matemáticos", os primeiros calculistas.Os sacerdotes egípcios executavam laboriosas medições afim de adquirirem um razoável conhecimento acerca das enchentes e vazantesdo Rio Nilo. Em seus templos, bem dissimulados, existiam nilômetros, aparelhos que os ajudavam nesse mister.
>
> O povo não participava desse trabalho nem conheciam esses instrumentos. Assim, quando os sacerdotes previam determinada enchente ou vazante, tal previsão era recebida pelo povo aureolada de profecia; por via da consequência, os sacerdotes recebiam não apenas reverências reservadas aos profetas e deuses, como possivelmente mais importante que isso, outra homenagens mais materiais como presentes, dinheiro, etc. Desta forma, desde o início, a produção e organização do conhecimento matemático estavam em mãos da classe dominante, já que os sacerdotes constituíam-se em aliados importantes do poder [17].

Se quisermos uma educação inovadora, precisamos conceber a matemática em sala de aula como um processo de construção, em que o educando percorre um caminho por meios próprios, com tentativas e erros e com uma orientação sem dogmatismos. Um ensino em que esta disciplina seja vista relacionada ao mundo real, com aplicações em situações do cotidiano, não como algo abstrato e sem utilidade, isto sempre que possível. Se o mediador do ensino da Matemática, o professor, for capaz de oferecer um ensino da Matemática de forma dinâmica, atrativa e criativa, inclusive voltado para estudos futuros de seus aprendentes, tem em mãos uma arma valiosa para desenvolver no educando o pensamento crítico, a confiança em seu potencial mental via raciocínios lógicos e o hábito de utilizar as suas competências adquiridas com autonomia, senso investigativo e sobretudo criativo.

Quando discutimos o papel da Matemática no processo de ensino-aprendizagem, é pertinente analisar a forma como ele se apresenta em nossas escolas. É fundamental ter sempre presente que o educando aprende mais quando lhe é permitido fazer relações, experiências e ter contato com material concreto, isto nem sempre é possível fazer quando ensinamos matemática, uma vez que está é por natureza uma disciplina abstrata em muitos dos seus aspectos, mas é necessário inovar, fazer relações com o que vive o aprendente sempre que isto tiver ao nosso alcançe como professores. Porém, infelizmente, muitas vezes a escola bloqueia ou dificulta o processo de aprendizagem justamente por impor a transmissão de conhecimentos em Matemática de forma estanque, isolada, repetitiva e sem aplicações, não permitindo uma construção e um desenvolvimento lógico no educando. Isto se dar por várias razões, uma delas é a falta de tempo que os professores tem para pesquisar uma aula desta natureza, uma vez que as escolas não têm as estruturas necessárias e o professor não é dedicação exclusiva aquela escola, ou mesmo para a educação, pois os salários muitas vezes os obriga a manter a educação apenas como um bico, um salário a mais em seu orçamento já cansado. Promover a ampliação na capacidade de raciocínio, memória, rigor, ritmo, análise crítica, etc., é tão significativo através do estudo da Matemática quanto o é através das artes.

Desmistificar a Matemática como sendo o "‘bicho papão"’ das salas de aula é tarefa a qual todo o mediador do ensino da Matemática deve ser conciente E, acima de tudo, precisamos mostrar esta ciência como tendo uma função relevante no desenvolvimento do educando como um ser social. Como nos mostra os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN's (ver BRASIL [3]):

> (...) a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios [3].

No momento educacional em que vivemos, é fundamental que o mediador do ensino da Matemática faça uma reflexão crítica sobre sua prática, pois assim como qualquer conteúdo curricular, a Matemática não pode ser concebida como um saber pronto e acabado mas, ao contrário, como um saber vivo, dinâmico e que, historicamente, vem sendo construído, atendendo às necessidades sociais e culturais. É obra de várias culturas e de milhares de homens que, movidos pelas necessidades concretas, construíram coletivamente a Matemática que conhecemos atualmente. Este é um dos saberes necessários para o bom andamento de seu trabalho educativo. É essencial, também, que o educador saiba que "‘ensinar não é transferir conhecimentos"’, ou seja, o educando não é um depositário de informações, que deverão ser memorizadas e repassadas tal qual aprendeu. Ensinar é sim possibilitar situações de aprendizagens que viabilizem a construção de conhecimentos significativos pelos educandos, de forma crítica, consciente, estimulando a autonomia, a reflexão, a discussão, o raciocínio. É importante ressaltar o valor da palavra: mediador. Este é o papel do educador hoje. A relação de troca, debate entre o educando e o mediador do ensino da Matemática(como diz Paulo Freire "‘não há docência sem discência"’) é fundamental para o bom andamento da prática educativa. Não podemos esquecer estas sábias palavras: "‘Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender"’ (ver [6]).

Outro aspecto importante, é que ensinar exige pesquisa, mas que tempo temos para isto?. Nós educadores, precisamos ter bem claro isto, e temos, só que não é nos dado a oportunidade e as estruturas necessárias por parte dos nossos governates em geral. Ensinar não é mais transmitir conhecimentos, alias nunca foi, ensinar é ajudar a construir sentidos e significados.

A teoria dos mediadores de ensino reflexivos propõe uma concepção de docência como prática que, aliada à reflexão constante, conduz à criação de um conhecimento específico, ligado à ação. A reflexão do mediador do ensino da Matemática sobre sua própria prática, seguida pela constante atualização e inovação da problematização e não aceitação da realidade cotidiana da escola, é considerada o início do processo de compreensão e de melhoria do seu ensino. O mediador do ensino da Matemática reflexivo é um profissional inovador e criativo, que descobre problemas e saídas, inventa e experimenta novas soluções, liberando-se de formas convencionais, e em constante (re)construção. Entende-se "‘Professor pesquisador"’ como aquele que explicita as inquietudes que emergem da sua prática e toma-as como problema de pesquisa, procurando soluções bem fundamentadas, com o objetivo de propor e implementar mudanças concretas na sala de aula e/ou na sua instituição.

A reflexão é vista como um processo em que o mediador de ensino analisa sua prática, compila dados, descreve situações, elabora teorias, implementa e avalia projetos e partilha suas idéias com colegas e educandos, estimulando discussões em grupo. Para Fiorentini e Castro (ver [5]), sem reflexão o mediador de ensino mecaniza sua prática, cai na rotina, passando o trabalho de forma repetitiva, reproduzindo o que já está pronto e o que é mais acessível, fácil ou simples. Refletir significa, segundo Saviani, produzir, de modo meticuloso, significados sobre o que somos e fazemos: “Refletir é o ato de retomar, reconsiderar os dados disponíveis, revisar, vasculhar numa busca constante de significados. É examinar detidamente, prestar atenção, nalisar com cuidado” (ver [16]). Refletir, então, acerca do contexto no qual estamos inseridos, com suas limitações e possibilidades, permite-nos um novo olhar sobre o mundo escolar em sua dinâmica e complexidade, Para Gómez , a reflexão implica:

> a imersão consciente do homem no mundo da sua experiência, um mundo carregado de conotações, valores, intercâmbios simbólicos, correspondências afectivas, interesses sociais e cenários políticos. O conhecimento acadêmico, teórico, científico ou técnico só pode ser considerado instrumento dos processos de reflexão se for integrado significativamente, não em parcelas isoladas da memória semântica, mas em esquemas de pensamento mais genérico activados pelo indivíduo quando interpreta a realidade concreta em que vive e quando organiza sua própria experiência. A reflexão não é um conhecimento "'puro"', mas sim um conhecimento contaminado pelas contingências que rodeiam e impregnam a própria experiência vital. (ver [7])

É nesse sentido que compreendemos a reflexão: como um caminho possível de rupturas, que busca índices para compreender melhor o cotidiano escolar e desenvolver ações pedagógicas que integram mais o educando e o mediador de ensino no processo de ensino-aprendizagem. A reflexão, portanto, aparece como parte do processo de formação profissional, no qual os saberes docentes são mobilizados, problematizados e ressignificados pelos mediadores de ensino. Entendemos que o conceito de ressignificação, que aqui adotamos, é uma das conseqüências da reflexão. A ressignificação diz respeito ao processo criativo de atribuir novos significados a partir do já conhecido, validando um novo olhar sobre o contexto em que o sujeito está imerso. Segundo Fiorentini e Castro,

> quando estamos imersos numa prática social, em especial na sala de aula, nossas reflexões e significações sobre o que já sabemos, fazemos e dizemos podem constituir-se em algo formativo para cada um de nós.(ver [5])

Gómez (ver [7]) pontua que a reflexão não é apenas um processo psicológico-individual, uma vez que implica a imersão do homem no mundo da sua existência. Nesse sentido, torna-se necessário estabelecer os limites políticos, institucionais e teórico-metodológicos relacionados à prática, para que não se incorra em uma individualização do mediador de ensino, advinda da desconsideração do contexto em que está inserido. Na vida profissional, o mediador de ensino defronta-se com múltiplas situações para as quais não encontra respostas pré-estabelecidas e que não são suscetíveis de serem analisadas pelo processo clássico de investigação científica. Na prática, o processo de diálogo com a situação deixa transparecer aspectos ocultos da realidade divergente e cria novos marcos de referência, novas formas e perspectivas de perceber e reagir. A criação e construção de uma nova realidade obrigam o mediador de ensino a ir além das regras, fatos, teorias e procedimentos conhecidos e disponíveis. Na base dessa perspectiva, que confirma o processo de reflexão na ação do profissional, encontra-se uma concepção construtivista da realidade com que ele se defronta. Não há realidades objetivas passíveis de serem conhecidas; as realidades criam-se e constroem-se no intercâmbio psicossocial da sala de aula. As percepções, apreciações, juízos e credos do mediador de ensino são um fator decisivo na orientação desse processo de construção da realidade educativa.

Desde que entrou em vigor uma importante lei de 1996 (ver [2]), o Ensino Médio brasileiro vem sendo modificado para atingir um padrão de excelência que se adapte às contínuas e velozes transformações da sociedade. Por esta razão, o ensino de Matemática passou a transitar entre a ciência e suas aplicações práticas, procurando capacitar o educando a participar da vida social e produtiva com autonomia intelectual e senso crítico. Junte-se a este fato, a lei 11892/08 (ver [1]), que institui a Rede Federal de Educação Proficional, Científica e Tecnicológica e cria os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, fazem parte do plano do nacional na busca de uma educação de qualidade no Brasil, como também a OBMEP(Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas). No que tange à Educação Matemática, em relação à pesquisa no Brasil, o Governo lançou em 2010 um Programa de Pós-Graduação em Matemática em rede nacional(PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática), além do apoio aos programas de pós-graduação nas universidades federais. Todas essas ações por parte do Governo brasileiro, contribuem para a melhoria da Educação brasileira. Nossa ideia central é ajudar na formação continuada dos Educadores que atuam na Educação Básica, colaborando com uma melhor atuação na sala de aula e enriquecendo de modo contínuo os seus conhecimentos para um trablho de forma mais intensa, consistente e mais efetiva, na preparação de nossos educandos, tanto para uma continuação de seus estudos, quanto para competições nacionais como a OBMEP.

Por fim, ao se estabelecer parâmetros para o ensino da Matemática na Educação Básica, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudanças e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. A Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Essa potencialidade do conhecimento matemático deve ser explorada da forma mais ampla possível, no Educação Básica. Para tanto, é importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Todas essas ideias constituem a maior parte do trabalho didático do mediador de ensino, tornando-se talvez, o grande desafio em sua atuação como Educador e mediador do conhecimento matemático.

De tudo que foi colocado acima, chegamos a conclusão de que na literatura deveria existir um trabalho que reunisse os conteúdos do ensino básico e introduzisse sobre eles a ideia de álgebra linear, em específico, o conhecimento de espaços vetoriais, tema inicial de quem estuda álgebra linear. Nas escolas da educação básica, os nossos alunos se deparam com os conteúdos de Funções, Matrizes, Geometria Analítica (idéia de pares ordenados), Números Complexos (que de certo modo, também remete a ideia de pares ordenados), Funções Polinomiais (que é um tipo especial de Função), estes objetos são munidos de duas estruturas algébricas, a saber, soma e multiplicação por escalar que serão definidos no decorrer deste trabalho, e nos livros didáticos não é se quer mencionado, que estas estruturas, para aqueles alunos que seguirão estudos acadêmicos em áreas de exata, estarão presentes na disciplina de álgebra linear quando estudando os espaços vetorias. Este trabalho, tem por tanto a meta de mostrar aos professores que é possível estigar seus alunos quando apresentados estes conteúdos. Além da própria ideia de conjuntos, onde estão definidos por exemplo, o domínio, o contra domínio e imagem das funções. Neste sentido, pensamos neste trabalho, em usar estes elementos da Matemática do ensino básico para apresentar uma noção de espaço vetorial para os professores deste nível de ensino com o objetivo que eles em suas aulas apresentem estes conteúdos de forma a remeter seus alunos para o futuro, para a continuação dos seus estudos em um curso superior de Matemática ou Engenharias, onde essa estrutura de Álgebra é estudada na disciplina de Álgebra Linear, um dos primeiros cursos de Matemática que o aluno vai se submeter se estudando na universidade e na área indicada. Além disso, acreditamos que um professor deve ter um conhecimento daquilo que se ensina de forma panorâmica e neste sentido este material deve fornecer, também, a este professor, a condição de saber mais do que aquilo que se está ensinando e deve, portanto, conhecer que o conjunto de todas as funções reais a valores em $\mathbb{R}$, munido das operações de soma e multiplicação por escalar ususais, constitui um exemplo de espaço vetorial, o conjunto de todas as matrizes de mesma ordem, munido das operações de soma e multiplicação por escalar usuais, é um exemplo de espaço vetorial e assim por diante. A palavra usuais aqui são as operações naturais de soma e produto por escalar de funções ou Matrizes ensinadas nas escolas do ensino básico. No decorrer do nosso trabalho vamos apresentar e provar que são, de fato, os entes matemáticos apresentados com as operações usuais de soma e produto por escalar, exemplos de espaços vetoriais e inclusiove vamos definir o que é um espaço vetorial para que possamos fazer as provas seguindo todos os axiomas de um espaço vetorial.

Com objetivo de facilitar a leirura deste material, daremos uma visão geral do que será feito em cada capítulo e secção. No Capítulo 1.5, vamos apresentar os preliminares para o entendimento do nosso trabalho. Na Secção 1.1, iremos apresentar a definição de função, começando por definir par ordenado e produto cartesiano, posteriormente definiremos uma relação binária e por fim, apresentaremos a definição de função como também de suas operações usuais, de soma e multiplicação por escalar, e daremos alguns exemplos para fixar a teoria. Na Secção 1.2, iremos expor a definição de função polinomial (um caso particular de função) e suas operações usuais, e daremos alguns exemplos esboçando os gráficos de alguns polinômios para fixar nossas ideias. Mais adiante na Secção 1.3, definiremos matriz e sua representação através do seu elemento genérico, suas operações de soma e multiplicação por escalar, bem como daremos alguns exemplos de soma de matrizes e de produto entre matriz e um escalar. Na Secção 1.4 apresentaremos a definição de par ordenado e de suas operações de soma e multiplicação por escalar e mostraremos os gráficos da soma de pares ordenados e o gráfico de um par ordenado multiplicado por uma constante escalar, através de exercícios. Finalizando com a Secção 1.5, onde daremos a definição de número complexo e apresentaremos as operações usuais de soma e produto por escalar e daremos alguns exemplos de soma entre complexos e de multiplicação por escalar e número complexo para fixar a teoria.

No Capítulo 2.6, na Secção 2.1.1, vamos apresentar a definição formal de espaço Vetorial. Na Secção 2.2 provaremos que o conjuntos das funções, munido das operações de soma e multiplicação por escalar é um exemplo clássico de Espaço Vetorial. Na Secção 2.3, mostraremos que o espaço das funções polinomiais munido das operações de soma e multiplicação por escalar também é um exemplo de espaço vetorial. Na Secção 2.4, apresentaremos uma prova de que o conjunto das matrizes de mesma ordem, munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar, definidas anteriormente, constitui um exemplo de espaço Vetorial. Na Secção 2.5, mostraremos que o conjunto dos pares ordenados, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar, é também um exemplo de Espaço Vetorial e finalmente, na Secção 2.6, mostraremos que o conjunto dos números complexos, munidos das operações usuais de soma e multiplicação por escalar, é um Espaço Vetorial. Por fim, Capítulo 3 faremos as nossas considerações finais e mostraremos algumas perspectivas para outros trabalhos.

1 Preliminares

Para iniciar a abordagem sobre espaços vetoriais no ensino médio tomaremos por base algumas defições e aplicações nas diversas ciências e que são estudadas na Educação Básica. Como a discussão dessas questões é extensa e complexa, iremos nos deter, aqui, no início do ensino médio que é, para todos os alunos, um momento de crescimento e de desafios. O aluno que começa o Ensino Médio faz parte de um grande e heterogênio grupo, que, de forma mais intensa ou não, é pressionado por questões que não são recentes, mas, nos dias de hoje, tem características específicas, como o trabalho e/ou o prosseguimento dos estudos num mundo globalizado. Começarenos nossa reflexão falando sobre algumas estruturas da ágebra, alguns conjuntos munidos das operações de soma algébrica e produto por escalar, e que são estudados no ensino médio.

Estruturas essas como o conjunto $\mathcal{F}$ das funções transcendentes, o conjunto das matrizes $\mathcal{M}_{\mathrm{m,n(\mathbb{R})}}$, de ordem $m \times n$, o conjunto $\mathcal{P}_n$ dos polinômios, como um caso particular das funções, o conjunto $\mathbb{R}^2$ dos pontos do plano cartesiano e o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. Todos essas estruturas de espaços vetoriais são estudados no ensino superior na disciplina de álgebra linear.

1.1 Função

Recordemos, de forma resumida, o conceito de relação entre dois conjuntos e vamos nos basear por [14].

Definição 1.1.1. *Dados dois números reais a e b, podemos formar com eles um par ordenado, indicado por $(a;b)$. A noção de par ordenado é um conceito primitivo. Com isso temos que*

$$(a;b) = (c;d) \Leftrightarrow a = b \ e \ c = d.$$

Definição 1.1.2. *Consideremos dois subconjuntos A e B, não vazios, de números reais. O conjunto de todos os pares ordenados $(x;y)$, com $x \in A$ e $y \in B$, chama-se produto* *cartesiano de A em B e se indica por $A \times B$ e*

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Observação 1.1.3. *Se $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, completa-se a definição com $A \times B = \varnothing$.*

Exemplo 1.1.4. *Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 5\}$, temos*

$$A \times B = \{(2; 1), (2; 5), (4; 1), (4; 5), (6; 1), (6; 5)\}.$$

Definição 1.1.5. *Sejam os subconjuntos de números reais A e B. Uma relação $\Re$, de A em B, é qualquer subconjunto de $A \times B$.*

Exemplo 1.1.6. *Consideremos os conjuntos do exemplo anterior. Os subconjuntos de $A \times B$. Veja a Figura 1 e a Figura 2*

$$\begin{aligned} \Re_1 &= \{(2; 1), (2; 5), (6; 1)\}; \\ \Re_2 &= \{(2; 5), (6; 5)\}. \end{aligned}$$

São exemplos de relação binária.

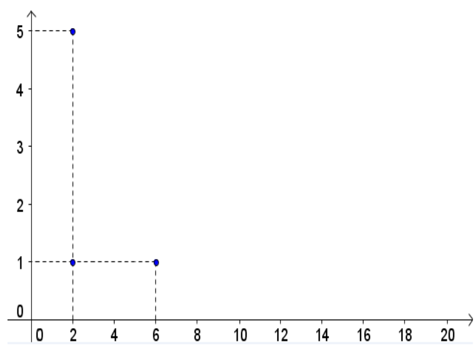

Figura 1: Relação $\Re_1$.

vamos definir função nos baseando em [9].

Definição 1.1.7. *Sejam A e B dois subconjuntos, diferentes do vazio, de números reais. Uma função f, de A em B, é uma correspondência que associa a cada elemento de A um único elemento em B. De forma mais precisa, uma função é um tipo especial de relação tal que, devemos coniderar uma relação binária $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde I é um intervalo de números reais. Diz-se que f é uma função de A em B se, e somente se, para todo x em A, existir em correspodência um e só um y em B, tal que $y = f(x)$.*

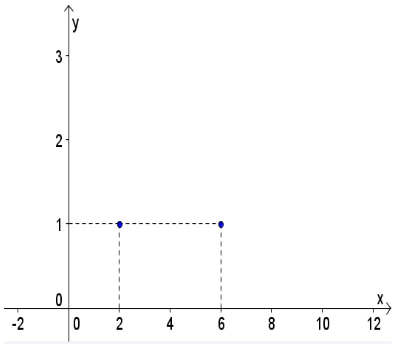

Figura 2: Relação $\Re_2$.

Exemplo 1.1.8. *Suponha que uma indústria têxtil utilize, na fabricação de seu produto, fibras de poliéster obtidas por meio da reciclagem de garrafas PET. O custo de produção para esse produto é composto de várias parcelas a molde, matéria-prima, salário dos operários, transporte, energia elétrica, aluguéis, impostos etc. Algumas dessas parcelas são fixas, independentemente do número de unidades produzidas. Assim, o custo de produção por unidades diminui conforme aumenta a quantidade produzida.*

Admitindo que, sob determinadas restrições, para cada x unidades fabricadas, o custo de produção por unidade seja $50-\frac{x}{1000}$ reais, o custo total dessa produção, em real, é dado por:

$$f(x) = x\left(50 - \frac{x}{100}\right) \Rightarrow \; f(x) = \frac{-x^2}{1000} + 50x.$$

Observe que o custo de produção f é uma função da quantidade fabricada x, com x em milhares de unidades.

Exemplo 1.1.9. *Dada a função $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x+4$, com $x \in [-1,1]$. Observe o gráfico dessa função na Figura 3.*

Definição 1.1.10. *Sejam $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções e $c \in \mathbb{R}$ (constante). Então*

(i) $(f+g) : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii) $(cf) : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$(cf)(x) = cf(x)$$

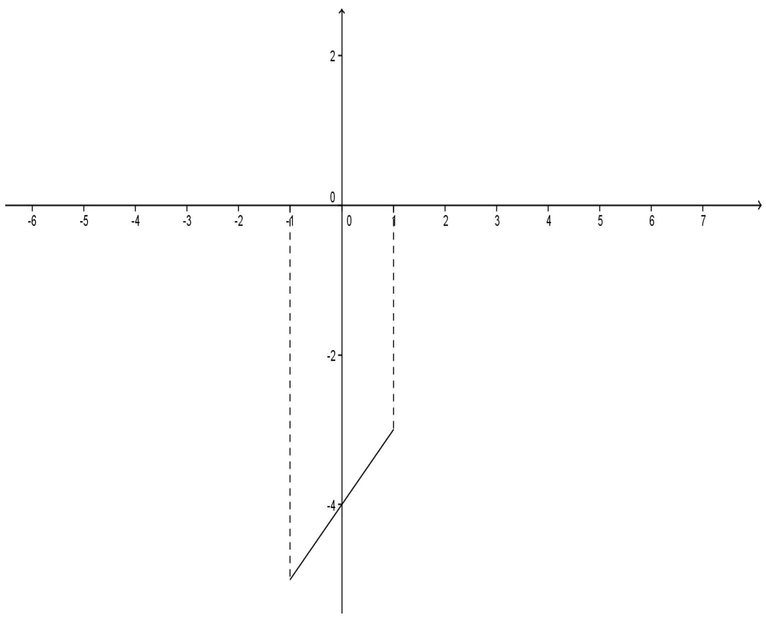

Figura 3: Exemplo de função.

Exemplo 1.1.11. *Sejam* $f, g : [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ *duas funções definidas por*

$$f(x) = -x + 2 \ e \ g(x) = 2.$$

Então por 1.1.10 item (i), temos $(f + g) : [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\begin{aligned} [f+g](x) &= f(x) + (g)(x) \\ &= (-x+2) + 2 \\ &= -x + 4 \end{aligned}$$

Veja o gráfico na figura Figura 4.

Exemplo 1.1.12. *Sejam a constante* $c = 3$ *e* $f : [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função definida por*

$$f(x) = -x + 2.$$

Então por 1.1.10 item (ii), temos

$$\begin{aligned} (cf)(x) &= cf(x) \\ &= 3(-x+2) \\ &= -3x + 6. \end{aligned}$$

Veja o gráfico na Figura 5.

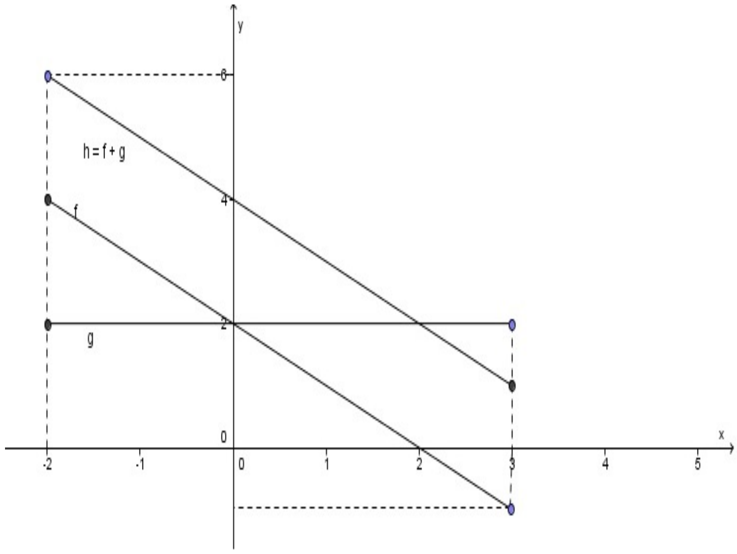

Figura 4: Exemplo de soma entre funções.

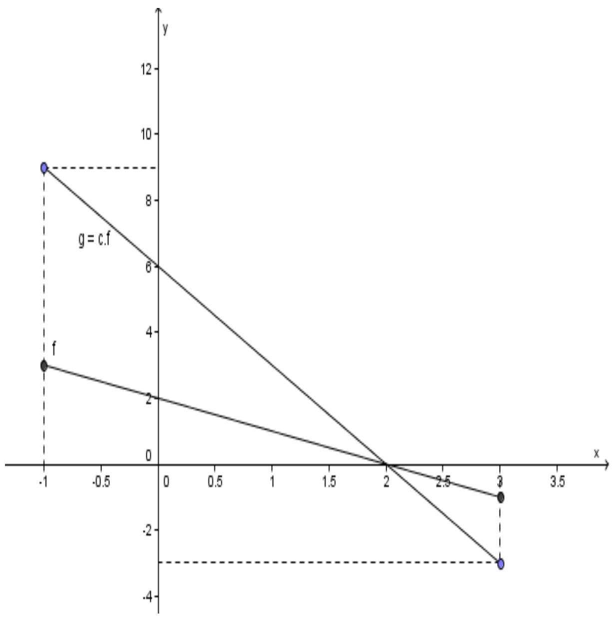

Figura 5: Exemplo de produto entre função e um escalar.

1.2 Polinômio

Um construtor destinou determinada verta para a construção de casas de alto padrão ou de apartamentos populares. O dinheiro pode ser empregado apenas na construção de casas, ou apenas na construção de apartamentos, ou ainda, uma parte na construção de casas e a outra parte na construção de apartamentos.

Após o estudo das possibilidades de construção com os recursos disponíveis, o construtor obteve o gráfico na Figura 6:

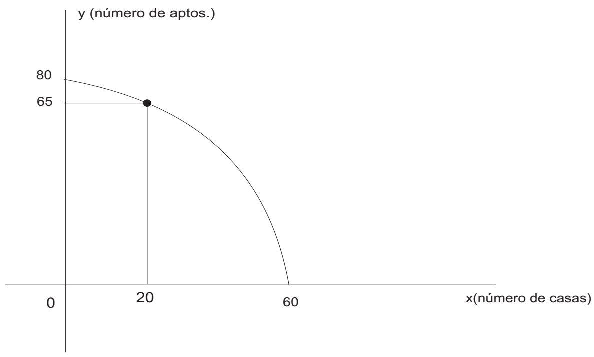

Figura 6: Exemplo de polinômio.

Em economia, esse gráfico é chamado de **curva de possibilidade de produção** e pode ser aproximado pelo gráfico de uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$. Para determinar os valores a, b e c, basta substituir x e y pelas coordenadas dos três pontos $(0, 80), (20, 65)$ e $(60, 0)$, obtendo o sistema:

$$\begin{cases} a.0^2 + b.0 + c = 80 \\ a.20^2 + b.20 + c = 65 \\ a.60^2 + b.60 + c = 0 \end{cases}$$

do qual obtemos: $a = -\frac{7}{480}, b = -\frac{11}{24}$ e $c = 80$ e, portanto, $y = -\frac{7x^2}{480} - \frac{11x}{24} + 80$.

A expressão $-\frac{7x^2}{480} - \frac{11x}{24} + 80$ é chamada de **polinômio na variável x** .

As funções polinomiais são muito utilizadas quando se pretende obter resultados numéricos, isso porque os cálculos efetuados com esse tipo de função exigem apenas adições e multiplicações. Muitos matemáticos, como Brook Taylor, dedicaram boa parte de suas vidas em busca de funções polinomiais que se aproximem o máximo possível de funções não polinomiais como a exponencial e^x, o seno e o cosseno etc.

A importância teórica e prática dos polinômios nos motiva a dedicar parte deste capítulo ao seu estudo.

Definição 1.2.1. *Dada a sequência de números reais $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)$, consideremos a função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. A função f dada é chamada de polinômio associado à sequência dada. Os números reais $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ são denominados coeficientes e as parcelas $a_0, a_1x, a_2x^2, \cdots, a_nx^n$ são chamadas de termos do polinômio p.*

Exemplo 1.2.2. *As seguintes aplicações $p, q, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são polinômios definidos por:*

$$\begin{aligned}
p(x) &= 5x^3 - 2x^2 + 4x, \ \textit{onde } a_0 = 0, a_1 = 4, a_2 = -2 \textit{ e } a_3 = 5. \\
q(x) &= 7x^4 + 1, \ \textit{onde } a_0 = 1, a_1 = a_2 = a_3 = 0 \textit{ e } a_4 = 7. \\
h(x) &= -x^2 + 3x, \ \textit{onde } a_0 = 0, a_1 = 3 \textit{ e } a_2 = -1.
\end{aligned}$$

Observação 1.2.3. *Observamos que um polinômio de variável real e com coeficientes reais, por definição, é um caso particular de função. Assim, se forem dados um número real c e o polinômio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, chama-se valor numérico de p em c a imagem de c pela função p, isto é:*

$$p(c) = a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + a_{n-2}c^{n-2} + \cdots + a_2c^2 + a_1c + a_0$$

.

Assim, por exemplo, se $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por $p(x) = 3x^2 + 2x - 1$, temos:

$p(2) = 3.2^2 + 2.2 - 1 = 15$, onde $c = 2$;

$p(-1) = 3.(-1)^2 + 2.(-1) - 1 = 0$, onde $c = -1$;

$p(0) = 3.0^2 + 2.0 - 1 = -1$, onde $c = 0$.

Definição 1.2.4. *Sejam os polinômios $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidos por*

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ q(x) &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i. \end{aligned}$$

Chama-se soma de p com q, o polinômio $p + q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dado por

$$(p+q)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

Isto é:

$$(p+q)(x) = \textstyle\sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i.$$

Daí, podemos verificar que sendo $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dois polinômios quaisquer, então $p + q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dado por $(p+q)(x) = p(x) + q(x)$, vejamos:

$$\begin{aligned} (p+q)(x) &= \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i \\ (p+q)(x) &= \sum_{i=0}^{n}\{(a_i)x^i + (b_i)x^i\} \\ (p+q)(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \\ (p+q)(x) &= p(x) + q(x). \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.5. *Esboçar o gráfico da soma entre os polinômios p e q, dados por $p(x) = x^3 + 2x$ e $q(x) = x^2 + 2$. Veja a Figura 7:*

Definição 1.2.6. *Sejam c um número real qualquer e o polinômio genérico p, dado por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, a multiplicação entre o número c e p é a multiplicação de um escalar por um polinômio e definimos assim:*

$$(cp)(x) = ca_n x^n + ca_{n-1}x^{n-1} + \cdots + ca_2x^2 + ca_1x + ca_0.$$

Daí, podemos também perceber que sendo c, um número real e p um polinômio dado por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ um polinômio qualquer, então

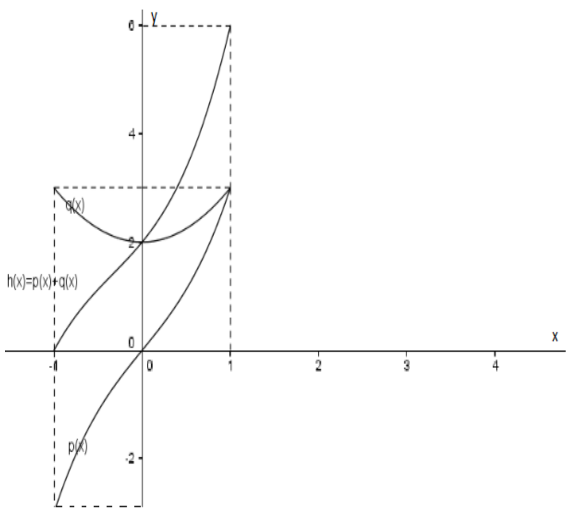

Figura 7: Exemplo de soma de polinômios.

$(cp)(x) = c.p(x)$:

$$\begin{aligned}(cp)(x) &= \sum_{i=0}^{n} ca_i x^i \\ (cp)(x) &= c\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \\ (cp)(x) &= c.p(x).\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.7. *Seja o polinômio p definido por $p(x) = x^3 + 2x$ e a constante $c = 2$, observe que o gráfico na Figura 8 representa o produto $c.p(x)$:*

1.3 Matriz

As matrizes e seus elementos estão relacionados com os coeficientes de sistemas de equações lineares. Aqui estudaremos certas operações algébricas sobre elas. O material utilizado é essencialmente de cálculo. Todavia, tal como nas equações lineares, o tratamento abstrato dado mais adiante nos proporcioná novas luzes sobre a estrutura das matrizes. Os elementos das matrizes provirão de algum corpo $\mathbb{K}$ arbitrário, porém fixo. Os elementos de $\mathbb{K}$ são chamados de escalares. Nada de essencial se perderá se admitirmos que $\mathbb{K}$ seja o corpo dos reais $\mathbb{R}$. Finalmente, observaremos que os elementos de $\mathbb{R}^n$ são representados convenientemente por "‘vetores linha"’ ou "‘vetores coluna"’, que são casos especiais de matrizes (ver [10]).

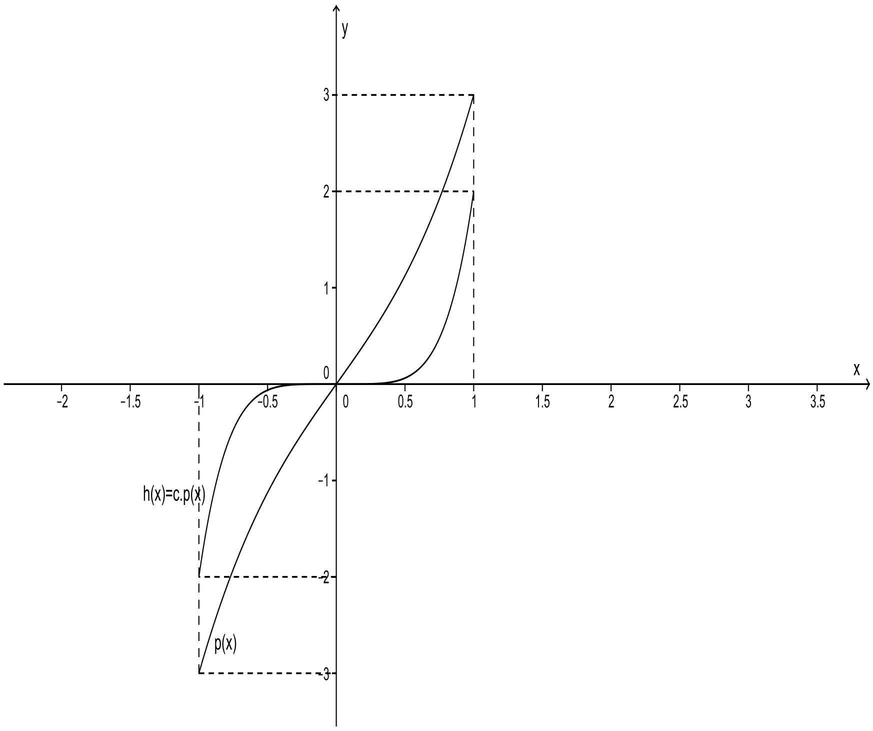

Figura 8: Exemplo de produto entre polinômio e um escalar.

Definição 1.3.1. *Uma matriz sobre o corpo dos números reais* $\mathbb{R}$*, ou simplesmente matriz, é um quadro retangular de escalares* a_{ij} *da forma*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}. \end{bmatrix}$$

A matriz supra é também denotada por $(a_{ij}),\ i = 1, 2, 3, \cdots,\ m$ e $j = 1, 2, 3, \cdots, n$, ou simplesmente (a_{ij}). As m ênuplas horizontais

$$(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}), \cdots, (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}).$$

são as linhas da matriz e as n ênuplas verticais

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

são as colunas. Note-se que o elemento a_{ij} chamado ij ou componente ij, aparece na i-ésima linha e na j-ésima coluna. Uma matriz com m linhas e n colunas é chamada de matriz $m \times n$.

Denotaremos usualmente as matrizes pelas letras maiúsculas $A, B, C, \cdots$, e os elementos do corpo dos números reais por letras minúsculas $a, b, c, \cdots$. Duas matrizes são iguais $A = B$ se tem a mesma forma e se os elementos correspondentes são iguais. Assim, a igualdade de duas matrizes é equivalente a um sistema de $m \times n$ igualdades, uma para cada par de elementos (ver, [12]).

Exemplo 1.3.2. *a) Veja uma matriz* 2×3 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Suas linhas são $(1, 2, 3)$ *e* $(4, 5, 6)$*; suas colunas são* $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$.

b) A igualdade $\begin{bmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

é equivalente ao sistema: $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2z+w=5 \\ z-w=4 \end{cases}$

A solução do sistema é $x = 2, y = 1, z = 3$ *e* $w = -1$.

Observação 1.3.3. *Uma matriz linha é também chamada de vetor linha, e com uma coluna, vetor coluna. Em particular, um número real pode ser encarado como uma matriz* 1×1*(ver, [12]).*

Definição 1.3.4. *Sejam A e B duas matrizes de mesmo tamanho, digamos, $m \times n$:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

A soma algébrica de A e B, que se escreve $A + B$, é a matriz obtida somando-se os *termos correspondentes:*

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21+b_{21}} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Definição 1.3.5. *Sejam um número real c e uma matriiz* $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, *definimos o produto de c pela matriz A, $c\cdot A$ ou simplesmente cA, como sendo a matriz cA, cujos elementos são os elementos de A multiplicados por c, isto é:*

$$cA=\begin{bmatrix} c.a_{11} & c.a_{12} & \cdots & c.a_{1n} \\ c.a_{21} & c.a_{22} & \cdots & c.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c.a_{m1} & c.a_{m2} & \cdots & c.a_{mn} \end{bmatrix}$$

Observação 1.3.6. *Note-se que a matriz $A-B$ é definida por $A+(-1)\cdot B$ e a matriz $-A$ é definida por $(-1)\cdot A$. Não se define soma algébrica de matrizes de tamanhos diferentes.*

Exemplo 1.3.7. *Sejam*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad e \quad A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Então

$$A+B=\begin{bmatrix} 1+0 & 2-2 & 3+1 \\ 4-4 & 5+2 & 6-6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3A=\begin{bmatrix} 3.1 & 3.2 & 3.3 \\ 3.4 & 3.5 & 3.6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

1.4 O plano euclidiano

O plano $\mathbb{R}^2$ é um conjunto formado pelos pontos do plano cartesiano e são muitas as aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento humano. Antes de definirmos tal conjunto, vamos descrever uma situação do cotidiano que envolve tal conhecimento e suas aplicações. Em uma viajem de férias, um automóvel sofre um pequeno acidente em uma rodovia.

O motorista, imediatamente, liga para a companhia de seguros.

O atendente, depois de obter as informações necessárias, pergunta: Em que ponto da rodovia ocorreu o acidente?

O motorista, olhando para uma marca quilométrica ao lado da rodovia, responde:

Exatamente no quilômetro 9.

Essa informação do motorista fornece a **coordenada** do ponto em que ele se encontra na rodovia. Em muitas outras situações do cotidiano, necessitamos de um sistema de coordenadas. Por exemplo:

- Ao enviar uma carta, devemos escrever no envelope um conjunto de informações apropriadas para a localização do destinatário. Essas informações são as coordenadas do local do destino da carta.
- Um ponto da superfície da terra é determinado por duas coordenadas: a latitude e a longitude.
- Um ponto do espaço aéreo é determinado por três coordenadas: A latitude, a longitude e a altitude.

Do mesmo modo, para localizarmos um ponto em um plano, podemos adotar um sistema de coordenadas. O mais usual é o **sistema cartesiano ortogonal de coordenadas**, que apresentaremos a seguir, nos basearemos por [13].

Definição 1.4.1. *Para localizar um ponto no plano, podemos fixar nesse plano um sistema cartesino ortogonal de coordenadas, que é formado por dois eixos, Ox e Oy, perpendiculares entre si no ponto O. Observe a Figura 9:*

Exemplo 1.4.2. *Para determinar as **coordenadas** do ponto P da Figura 10 a seguir, traçamos por P as retas perpendiculares a Ox e Oy, obtendo, nesses eixos, dois números chamados **abscissa** e **ordenada** do ponto P, respectivamente.*

No exemplo, as coordenadas do ponto P são 4 e 3. A abscissa é 4, e a ordenada é 3. Indicamos este fato por $P(4, 3)$.

A representação $(4; 3)$ é chamada de "‘**par ordenado** de abscissa 4 e ordenada 3"’.

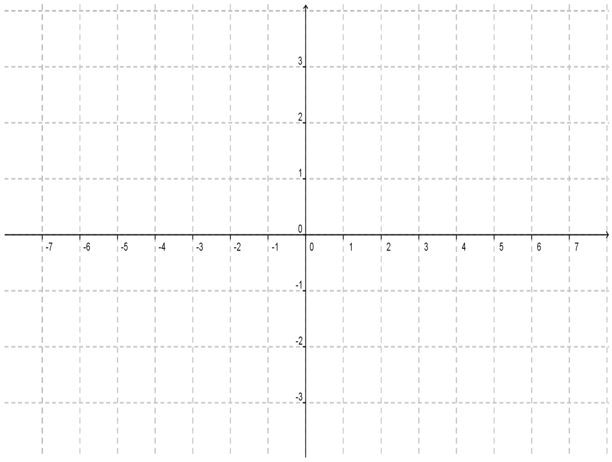

Figura 9: O sistema cartesiano ortogonal.

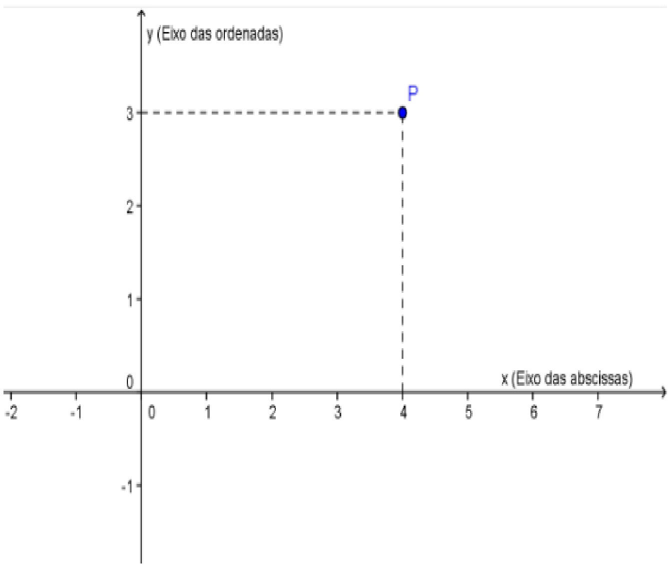

Figura 10: Exemplo de par ordenado.

Definição 1.4.3. *Sejam os pares ordenados* $A = (a; b)$ *e* $B = (c; d)$, *a soma* $A + B$ *como sendo o par ordenado*

$$A + B = (a; b) + (c; d) = (a + c; b + d).(ver, [13])$$

Exemplo 1.4.4. *Sejam os pares ordenados* $A = (-2, 3)$ *e* $B = (3, -1)$, *vamos construir o gráfico da soma* $A + B$ *na Figura 11.*

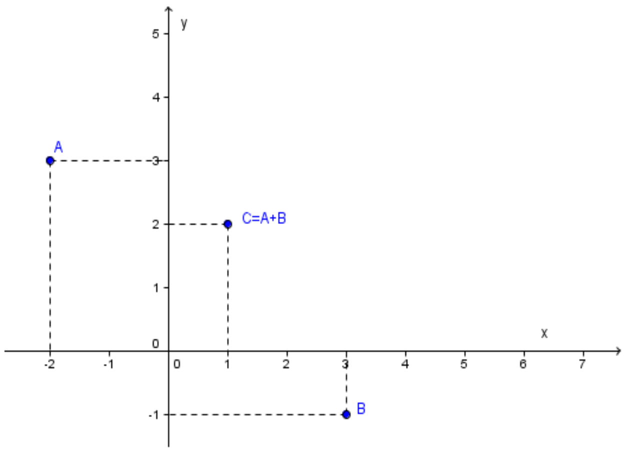

Figura 11: Exemplo de soma entre pares ordenados.

Definição 1.4.5. *Considere um número real qualquer* k *e um par ordenado* $A = (a; b)$, *define-se o par ordenado* $k.A$ *como sendo*

$$k.A = k.(a, b) = (k.a, k.b)$$

.

Exemplo 1.4.6. *Sejam os pontos* $A = (2, 3)$ *e o escalar* $k = 2$. *A Figura 12 abaixo representa o par ordenado* $kA = 2.(2, 3)$.

Observação 1.4.7.

1. *Dois pares ordenados de números reais são iguais se, e somente se, suas abscissas são iguais e suas ordenadas são iguais, isto é:* $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ *e* $b = d$.

   Por exemplo:

   $(a, 8) = (7, y) \Leftrightarrow a = 7$ *e* $y = 8$.

2. *Os eixos ordenados* Ox *e* Oy, *chamados de* ***eixos coordenados***, *separam o plano em quatro partes chamadas* ***quadrantes***.

3. *Todo ponto de abscissa nula pertence ao eixo* Oy, *e todo ponto de ordenada nula pertence ao eixo* Ox.

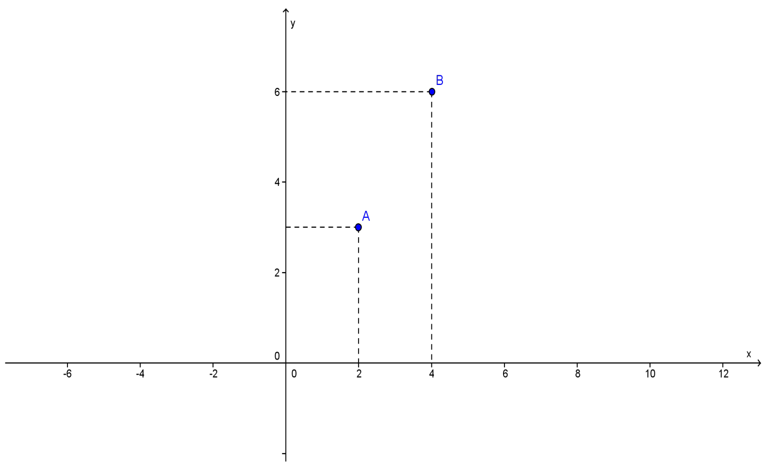

Figura 12: Exemplo de produto entre par ordenado e escalar.

1.5 Os números complexos

É razoável admitir que os números, de todos os tipos, sempre estiveram postados no universo: uns evidentes, como os naturais, outros ocultos, como os irracionais. Coube aos seres humanos descobri-los, de acordo com as necssidades de cada época. A descoberta do número como abstração de quantidades observadas no cotidiano foi o primeiro, e talvez o mais importante, feito matemático da humanidade. Houve uma longa e árdua caminhada desde os números naturais até os números reais. Mas, seriam os números reais o último estágio na escalada do conceito de número? Veremos que não, que esse conceito se amplia para além dos números reais, definindo os **números complexos**.

O problema a seguir mostrará a insuficiência dos números reais diante de certas situações concretas ou abstratas.

Um engenheiro projetou duas caixas-d'água de mesma altura: uma em forma de cubo e outra em forma de um paralelepípedo reto-retângulo com $6m^2$ de área da base. O volume da caixa cúbica de ter $4m^3$ a mais que o volume da outra caixa. Qual deve ser a medida, em metro, da aresta da caixa cúbica? Indicando por x a medida da aresta da caixa cúbica e sendo v_c o volume da caixa cúbica e por v_p o volume da caixa em forma de paralelepípedo, temos:

$$V_c = x^3 \text{ e } v_p = 6x \Rightarrow x^3 = 6x - 4 \Leftrightarrow x^3 - 6x + 4 = 0.$$

Essa equação pode ser resolvida pelo método proposto por volta de 1535 pelo matemático italiano Niccolo Fontana, conhecido como Tataglia. Tal método implica em substituir x por $u - v$, de modo o produto $u.v$ seja igual à teça parte do coeficiente de x, isto é:

$$\begin{cases} (u-v)^3 - 6(u-v) + 4 = 0 \\ uv = -2 \end{cases},$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 - 6u + 6v + 4 = 0 \\ uv = -2. \end{cases}$$

Fazendo $uv = -2$ na primeira equação, obtemos:

$$\begin{cases} u^3 - v^3 + 4 = 0 & (I) \\ v = \frac{-2}{u} & (II) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), chegamos à equação $u^6 + 4u^3 + 8 = 0$, cuja resolução pode ser feita através da mudança de variável $u^3 = t$, com a qual obtemos a equação do 2°:

$$t^2 + 4t + 8 = 0$$

em que $\Delta = 4^2 - 4.1.8 = -16$, e portanto,

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

da qual concluímos que:

$$u^3 = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Nesse momento poderíamos ser levados a concluir que a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ não possui raiz real, pois não existe no conjunto $\mathbb{R}$ o número $\sqrt{-16}$. Porém, essa conclusão é equivocada, pois o número real 2 é raiz da equação, como se constata pela substituição de x por 2:

$$2^3 - 6.2 + 4 = 0$$

Essa espantosa constatação nos leva a admitir a exitência do número não real $\sqrt{-16}$. Historicamente, Gerônimo Cardano, médico e matemático italiano, após ter aprendido com Tartaglia o método descrito anteriormente, foi o primeiro a admitir a existência de números não reais, durante a resolução de uma equação cúbica, como essa que discutimos. Após tal descoberta, um matemático contenporâneo de Cardano, Rafael Bombelli, teve o que considerou uma "‘ideia louca"’: começou aoperar com números não reais estudados por Cardano. Bombelli admitiu, por exemplo, a identidade:

$$2 + \sqrt{-1} + 3 - \sqrt{-1} = 5$$

dando, assim, subsídios para o início da construção de um novo conjunto de números: o conjunto dos números complexos.

A insufiência dos números reais se revela na radiciação: não existem, em $\mathbb{R}$, raízes quadradas, quartas, sextas,$\cdots$, de números negativos. Para que a radiciação seja sempre possível, os matemáticos ampliaram o conceito de número, definindo o número i, não real, que chamaram de unidade imaginária e que satisfaz a seguinte condição:

$$i^2 = i.i = -1$$

.

A partir da unidade imaginária vamos usar as definições em [15]:

Definição 1.5.1. *Número complexo é todo número da forma $a + b.i$, em que a e b são números reais e i é a unidade imaginária.*

Exemplo 1.5.2. *a)* $5 + 2i$

b) $3i$

c) $0i$ *(que é igual a zero)*

O conjunto dos números complexos é indicado por $\mathbb{C}$, isto é:

$$\mathbb{C} = \{a + bi, \text{ com } a \text{ e } b \text{ reais}\}.$$

Com esses "‘novos"’ números é possível definir raiz de índice par e radicando negativo, pois potências de números complexos com expoente par podem ser negativas; por exemplo:

$$(3i^2) = 3^2.i^2 = 9.(-1) = -9.$$

Assim, $3i$ é uma raiz quadrada de -9. A expressão $a + bi$, com a e $b \in \mathbb{R}$, é chamada forma algébrica do número complexo, em que a é a parte real e b é a bfparte imaginária.

Exemplo 1.5.3.

a) No número complexo $5 + 4i$, a parte real é 5 e a parte imaginária é 4. Todo número complexo cuja parte imaginária é diferente de zero é chamado de número imaginário.

b) No número complexo $7i$, que pode ser representado por $0 + 7i$ a parte real é 0(zero) e a parte imaginária é 7. Todo número complexo cuja parte real é zero e a imaginária é diferente de zero é chamado de número imaginário puro.

c) No número complexo 9, que pode ser representado por $9 + 0i$ a parte real é 9 e a parte imaginária é zero.

d) Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$, com a, b, c e d $\in \mathbb{R}$, são iguais se, e somente se, suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais.

Ou seja:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Todo número complexo com parte imaginária zero é um número real. Note, portanto, que todo número real a, é também, um número complexo, pois pode ser representado por $a + 0i$. Assim, temos que $R \subset C$.

A cada número complexo $z = x + yi$, em que x e y são números reais, vamos associar o ponto do plano cartesiano determinado pelo par ordenado de números reais (x, y), vamos denotar esse ponto por $A = (x, y)$. Essa associação é biunívoca, isto é, cada número complexo está associado a um único ponto do plano cartesiano, e cada ponto do plano está associado a um único número complexo. Com isso, podemos definir o Plano Complexo na Figura 13:

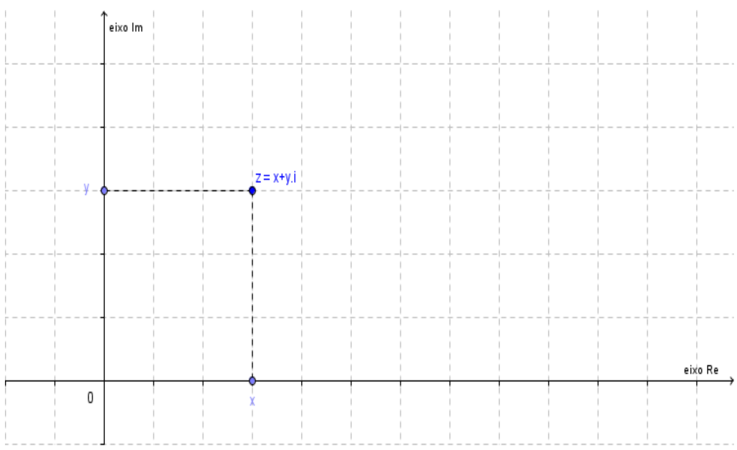

Figura 13: O plano complexo.

Definição 1.5.4. *Para quaisquer números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, em que*

a, b, c e d são números reais, temos:

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (a + c) + (b + d) \cdot\ i.$$

Exemplo 1.5.5. *Sendo os números complexos $z_1 = 2 - i$ e $z_2 = 3 + 2i$, vamos representar a soma $z_1 + z_2$ no plano complexo apresentado na Figura 14.*

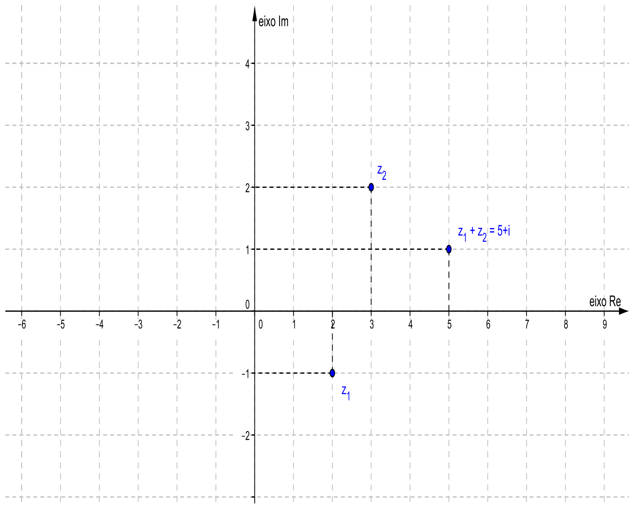

Figura 14: Exemplo de soma de complexos.

Definição 1.5.6. *Sejam o número real k e o número complexo $z = a + bi$. Definimos o número complexo $k.z$ como sendo:*

$$k \cdot\ z = k \cdot\ (a + bi) = k \cdot\ a + k \cdot\ bi = ka + kbi.$$

Exemplo 1.5.7. *Sendo o número complexo $z = 3 - 4i$ e constante $k = -2$, vamos representar o produto $k \cdot\ z = -2z$ no plano complexo descrito pela Figura 15.*

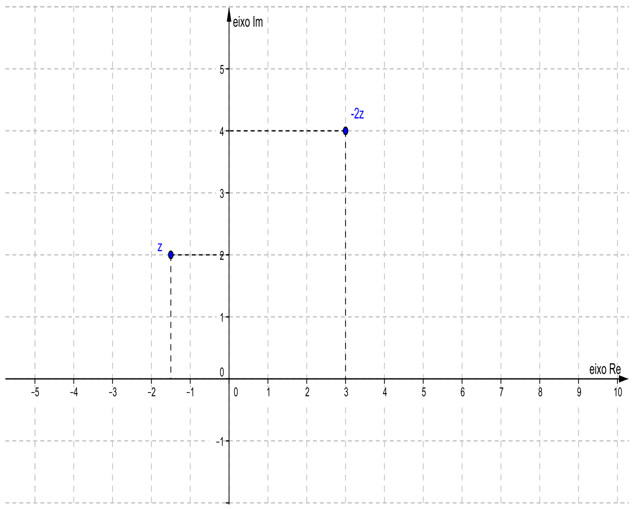

Figura 15: Exemplo de multiplicação entre número complexo e escalar.

2 Espaços Vetoriais

Neste capítulo iremos anlisar detalhadamente algumas das estruturas de álgebra linear ensinadas pelos professores da educação básica. Inicialmente, começaremos definindo o que é um espaco vetorial, qual estrutura algébrica se comporta como um espaço vetorial. Demostraremos que os conjuntos de que tratamos no capítulo anterior, são espaços vetoriais. Vamos considerar um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ que usualmente denota o conjunto dos números reais. Iniciamos pela seguinte Secção.

2.1 Espaço vetorial definições e propriedades

Trataremos o conjunto $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ como o conjunto dos pares ordenados, o conjunto $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ como sendo o conjunto de todas as funções reais a valores reais, o conunto $(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é o conjunto de todos os polinômios reais com coeficiente reais de grau menor ou igual a n, este pode ser considerado um caso particular de função, o conjunto $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}, +, \cdot)$ das matrizes $m \times n$ e o conjunto $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ dos números complexos com coeficientes reais. Vamos apresentar uma prova que mostra que estes conjuntos são exemplos de espaços vetoriais segundo a Definição2.1.1.

Em várias partes da Matemática, defrontamo-nos com um conjunto, tal que é, ao mesmo tempo, significativo e interessante lidar com "‘combinações lineares"’ dos objetos daquele conjunto. Por exemplo, no estudo de equações lineares(geralmente estudado inicialmente na educação básica), é bastante natural considerar combinações lineares das linhas de uma matriz. É provável que o leitor tenha estudado cálculo e tenha já lidado com combinações lineares de funções (o que ocorre também no ensino médio). Talvez o leitor tenha tido alguma experiência com vetores no espaço euclidiano tridimensional e, em particular com combinações lineares de tais vetores. A grosso modo, a álgebra linear é o ramo da matemática que trata das propriedades comuns a sistemas algébricos constituídos por um conjunto mais uma noção razoável de uma "‘combinação linear"’ de elementos do conjunto. Aqui definiremos o objeto matemático que, como a experiência mostrou, é a abstração mais útil deste tipo de sistema algébrico

Escolhemos para este trabalho a definição dada por Hoffman-Kunze ([8]) em seu livro de Álgebra Linear traduzido para o português por Adalberto P. Bergamasco.

Definição 2.1.1. *Um **Espaço Vetorial** (ou espaço linear) consiste do seguinte:*

(1) *Um corpo $\mathbb{F}$ de escalares;*

(2) *Um conjunto V de objetos, denominados vetores;*

(3) *Uma regra (ou operação), dita adição de vetores, que associa a cada par de vetores α e β em V um vetor $\alpha + \beta$ em V, denominado a soma de α e β, de maneira tal que se forem dados α, β, e γ, pertencentes a V, então*

$\boldsymbol{A_1}$ - *a adição é comutativa, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;*

$\boldsymbol{A_2}$ - *a adição é associativa, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;*

$\boldsymbol{A_3}$ - *existe um único vetor 0 em V, denominado o vetor nulo, tal que $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, $\forall\ \alpha$ em V;*

$\boldsymbol{A_4}$ - *para cada vetor α em V existe um único vetor $-\alpha$ em V tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$;*

(4) *Uma regra (ou operação), dita multiplicação escalar, que associa a cada escalar c em $\mathbb{F}$ e cada vetor α em V um vetor $c\ \alpha$ em V, denominado o produto de c por α de maneira tal que se forem dados α e β, pertencentes a V e c_1 e c_2, pertencentes a $\mathbb{F}$ então*

$\boldsymbol{M_1}$ - $1 \cdot \alpha = \alpha$, $\forall\ \alpha$ *em* V;

$\boldsymbol{M_2}$ - $(c_1 c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$;

$\boldsymbol{M_3}$ - $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$;

$\boldsymbol{M_4}$ - $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$.

É importantíssimo observar, como afirma a definição, que um espaço vetorial é um objeto composto de um corpo (conjunto de números), um conjunto de "‘vetores"’ (ou objetos) e duas operações com certas propriedades especiais, a saber, a soma e a multiplicação por escalar. O mesmo conjunto de vetores pode ser parte de diversos espaços vetoriais. Quando não há possibilidade de confusão, podemos simplesmente nos referir ao espaço vetorial por V ou, quando for desejável especificar o corpo, dizer que V é um

espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ que para o nosso propósito será sempre $\mathbb{R}$. O nome "'vetor"' é aplicado aos elementos do conjunto V mais por conveniência. Não devemos emprestar muita importância ao nome uma vez que a variedade de objetos que aparecem como sendo os vetores em V podem não apresentar muita semelhança com qualquer conceito de vetor adquirido a priori pelo leitor. Nas secções seguintes passaremos agora demonstrar que os cinco conjuntos mencionados no Capítulo 1 são espaços vetoriais.

2.2 O espaço vetorial das funções sobre o corpo dos números reais

Sejam, $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e I um conjunto arbitrário e não-vazio de números reais. Seja $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ o conjunto das funções do conjunto I em $\mathbb{R}$. Considerando o que está em [?], temos:

Definição 2.2.1. *A operação $(+)$ é chamada de adição algébrica de dois vetores $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ em $\mathcal{F}$, onde*

$$(f+g) : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ (f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall\ x \in I.$$

Definição 2.2.2. *O produto $(\cdot)$ do escalar $k \in \mathbb{R}$ pela função f é definida por kf, onde*

$$(kf) : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ (kf)(x) = kf(x),\ \forall\ x \in I.$$

Exemplo 2.2.3. *Afirmamos que a terna $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.* ***Prova:*** *Com efeito, sejam f, g e h pertencentes ao conjunto $\mathcal{F}$, onde f, g e $h : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, daí teremos que*

A_1 - $(f+g) = (g+f)$:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \text{ (Definição de adição em } \mathcal{F}\text{).}\\ &= g(x) + f(x) \text{ (Prop. comutativa dos números reais).}\\ &= (g+f)(x) \text{ (Definição de adição em } \mathcal{F}\text{).}\end{aligned}$$

Como f e g são funções definidas num mesmo domínio I, temos

$$(f+g)(x) = (g+f)(x),\ \forall\ x \in I$$

e, portanto,

$$(f+g) = (g+f).$$

A_2 - $[f + (g + h)] = [(f + g) + h]$:

$$\begin{aligned}
[f + (g + h)](x) &= f(x) + (g + h)(x) \textit{ (Definição de adição em } \mathcal{F}\textit{).} \\
&= f(x) + [g(x) + h(x)] \textit{ (Definição de adição em } \mathcal{F}\textit{).} \\
&= [f(x) + g(x)] + h(x) \textit{ (Prop. associativa em } \mathbb{R}\textit{).} \\
&= [(f + g)(x)] + h(x) \textit{ (Definição de adição em } \mathbb{F}\textit{).} \\
&= [(f + g) + h](x) \textit{ (Definição de adição em } \mathcal{F}\textit{).}
\end{aligned}$$

Como f, g e h são funções definidas num mesmo domínio I, temos

$$[f + (g + h)](x) = [(f + g) + h](x), \ \forall \ x \ \in \ I$$

e, portanto,

$$[f + (g + h)] = [(f + g) + h].$$

A_3 - *existe um único vetor e em V, denominado função nula, tal que $f + e = f + e = e$ para todo f em $\mathcal{F}$;*

Suponha que existe $\boldsymbol{e} \ \in \ \mathbb{F}$ tal que

$$(f + e) = (e + f) = f.$$

Então, $\forall \ x \ \in \ I$

$$\begin{aligned}
(f + e)(x) = f(x) \ &\Rightarrow \ f(x) + e(x) = f(x) \textit{ (Definição de adição em } \mathcal{F}\textit{).} \\
&\Rightarrow \ e(x) = 0, \ \forall \ x \textit{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{R}\textit{).}
\end{aligned}$$

$\therefore \ e \ \equiv \ 0$ *(função identicamente nula.)*
Da unicidade: se existir $\overline{e}$ tal que

$$(f + \overline{e}) = f.$$

Então,

$$\begin{aligned}
(f + \overline{e})(x) = f(x) \ &\Rightarrow \ f(x) + \overline{e}(x) = f(x) \textit{ (definição de adição em } \mathcal{F}\textit{).} \\
&\Rightarrow \ \overline{e}(x) = 0, \ \forall \ x \textit{ (lei do cancelamento em } \mathbb{R}\textit{).}
\end{aligned}$$

$\therefore \ \overline{e} = e = 0$ *e vale a unicidade.*

A_4 - $\forall \ \boldsymbol{f} \ \in \ \mathcal{F}$ *existe um único vetor $\widehat{e}$ em $\mathcal{F}$, denominado o vetor simétrico, tal que*

$f + \widehat{e} = \widehat{e} + f = 0$;
Suponha que existe $\widehat{e} \in \mathcal{F}$, *onde* $\widehat{e}$ *é tal que*

$$(f + \widehat{e}) = (\widehat{e} + f) = 0.$$

Então, $\forall\ x \in I$

$$\begin{aligned}(f + \widehat{e})(x) = 0 \ &\Rightarrow\ f(x) + \widehat{e}(x) = 0 \text{ (Definição de adição em } \mathcal{F}).\\ &\Rightarrow\ f(x) + \widehat{e}(x) = f(x) - f(x),\ \forall x \text{ (O 0 é o elem. neutro em } \mathbb{R}).\\ &\Rightarrow\ \widehat{e}(x) = -f(x),\ \forall x \text{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{R}).\end{aligned}$$

$\therefore\ \widehat{e} \equiv -f(x)$.
Da unicidade: se existir $e^{'}$ *tal que*

$$(f + e^{'}) = 0.$$

Então, $\forall\ x \in I$

$$\begin{aligned}(f + e^{'})(x) = 0 \ &\Rightarrow\ f(x) + e^{'}(x) = 0 \text{ (Definição de adição em } \mathcal{F}).\\ &\Rightarrow\ f(x) + e^{'}(x) = f(x) - f(x),\ \forall\ x \text{ (O 0 é o elem. neutro em } \mathbb{R}).\\ &\Rightarrow\ e^{'}(x) = -f(x),\ \forall\ x \text{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{R}).\end{aligned}$$

$\therefore \widehat{e} = e^{'} = -f$ *e vale a unicidade.*

M_1 - $1f = f$:
Suponha $f \in \mathbb{F}$, $\forall\ x \in I$, *então*

$$\begin{aligned}(1f)(x) &= 1f(x),\ \forall\ x \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathcal{F}).\\ &= f(x) \text{ (O número 1 é o elemento neutro da multiplicação em } \mathbb{R}).\end{aligned}$$

$\therefore 1f = f,\ \forall\ x \in I.$

M_2 - $[(k_1k_2)f] = k_1(k_2f)$:
Considere $f \in \mathbb{F}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ *os números reais* k_1 *e* k_2, *então*

$$\begin{aligned}[(k_1k_2)f](x) &= (k_1k_2)f(x),\ \forall\ x \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathcal{F}).\\ &= k_1(k_2f(x)) \text{ (Associatividade em } \mathbb{R}).\end{aligned}$$

$\therefore\ [(k_1k_2)f] = k_1(k_2f),\ \forall\ x \in I.$

M_3 - $(k_1 + k_2)f = k_1f + k_2f$:

Considere $\boldsymbol{f} \in \mathcal{F}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ *os números reais* k_1 *e* k_2, *então*

$$\begin{aligned}
[(k_1+k_2)f](x) &= (k_1+k_2)f(x),\ \forall\, x \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathcal{F}).\\
&= k_1f(x)+k_2f(x) \text{ (Distributividade em } \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

$\therefore [(k_1+k_2)f] = k_1f + k_2f,\ \forall\, x \in I.$

M_4 - $k(f+g) = kf + kg$:
Considere $\boldsymbol{f}$ *e* $\boldsymbol{g} \in \mathcal{F}$ *onde* $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall\, x \in I$ *e o número real* k, *então*

$$\begin{aligned}
[k(f+g)](x) &= k(f+g)(x),\ \forall\, x \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathcal{F}).\\
&= k[f(x)+g(x)] \text{ (Definição de adição em } \mathcal{F}).\\
&= kf(x)+kg(x) \text{ (Distributividade em } \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

$\therefore k(f+g) = kf + kg,\ \forall\, x \in I.$

Logo, concluímos que a terna $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.*

2.3 O espaço das funções polinomiais sobre o corpo dos números reais

Sejam, $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e $\mathcal{P}_n$ o conjunto das funções $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que são da forma:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

onde os números $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n$ são reais fixos (independentes de x). Uma função deste tipo é denominada **função polinômial sobre** $\mathbb{R}$. As oprações de adição algébrica de polinômios e produto entre polinômio e um número real são definidas, com base em [8], como segue :

Definição 2.3.1. *A operação* $(+)$ *é chamada de adição algébrica de polinômios* $p, q : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *em* $\mathcal{P}_n$, *onde*

$$(p+g) : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ (p+q)(x) = p(x) + q(x),\ \forall\, x \in I.$$

Definição 2.3.2. *O produto* $(\cdot)$ *do escalar* $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ *pela função polinômial* p *é definida* *por kp, onde*

$$(kp) : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ (kp)(x) = kp(x),\ \forall\ x\ \in\ I.$$

Exemplo 2.3.3. *Afirmamos que a terna $(\mathcal{P}_n, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.*
Prova:
Com efeito, sejam p, q e r pertencentes ao conjunto $\mathcal{F}$, onde p, q e $r : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, daí teremos que

A_1 - $(p+q) = (q+p)$*:*

$$\begin{aligned} (p+q)(x) &= p(x)+q(x) \text{ (Definição de adição em } \mathcal{P}_n\text{).} \\ &= q(x)+p(x) \text{ (Prop. comutativa dos números reais).} \\ &= (q+p)(x) \text{ (Definição de adição em } \mathcal{P}_n\text{).} \end{aligned}$$

Como p e q são funções definidas num mesmo domínio I, temos

$$(p+q)(x) = (q+p)(x),\ \forall\ x\ \in\ I$$

e, portanto,

$$(p+q) = (q+p).$$

A_2 - $[p+(q+r)] = [(p+q)+r]$:

$$\begin{aligned} [p+(q+r)](x) &= p(x)+(q+r)(x) \text{ (Definição de adição em } \mathcal{P}_n\text{).} \\ &= p(x)+[q(x)+r(x)] \text{ (Definição de adição em } \mathcal{P}_n\text{).} \\ &= [p(x)+q(x)]+r(x) \text{ (Prop. associativa em } \mathbb{R}\text{).} \\ &= [(p+q)(x)]+r(x) \text{ (Definição de adição em } \mathcal{P}_n\text{).} \\ &= [(p+q)+r](x) \text{ (Definição de adição em } \mathcal{P}_n\text{).} \end{aligned}$$

Como p, q e r são funções definidas num mesmo domínio I, temos

$$[p+(q+r)](x) = [(p+q)+r](x),\ \forall\ x\ \in\ I$$

e, portanto,

$$[p+(q+r)] = [(p+q)+r].$$

A_3 - *existe um único vetor* ***e*** *em $\mathcal{P}_n$, denominado polinômio nulo, tal que $p+e = e+p = p$ para todo p em $\mathbb{P}_n$;*

Suponha que existe $\boldsymbol{e} \in \mathcal{P}_n$ *tal que*

$$(p+e) = (e+p) = p.$$

Então, $\forall\, x \in I$

$$\begin{aligned}(p+e)(x) = f(x) \;&\Rightarrow\; p(x)+e(x) = p(x) \text{ (Definição de adição em } \mathcal{P}_n).\\ &\Rightarrow\; e(x) = 0,\ \forall\, x \text{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{R}).\end{aligned}$$

$\therefore e \equiv 0$ *(polinômio identicamente nulo.)*
Da unicidade: se existir $\overline{e}$ *tal que*

$$(p+\overline{e}) = p.$$

Então,

$$\begin{aligned}(p+\overline{e})(x) = p(x) \;&\Rightarrow\; p(x)+\overline{e}(x) = p(x) \text{ (Definição de adição em } \mathcal{P}_n).\\ &\Rightarrow\; \overline{e}(x) = 0,\ \forall\, x \text{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{R}).\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{e} = e = 0$ *e vale a unicidade.*

A_4 - $\forall\, p \in \mathcal{P}_n$ *existe um único vetor* $\widehat{e}$ *em* $\mathcal{P}_n$*, denominado o vetor simétrico, tal que* $p+\widehat{e} = \widehat{e}+p = 0$.
Suponha que existe $\widehat{e} \in \mathcal{P}_n$*, tal que*

$$(p+\widehat{e}) = (\widehat{e}+p) = 0.$$

Então, $\forall\, x \in I$

$$\begin{aligned}(p+\widehat{e})(x) = 0 \;&\Rightarrow\; p(x)+\widehat{e}(x) = 0 \text{ (Definição de adição em } \mathcal{P}_n).\\ &\Rightarrow\; p(x)+\widehat{e}(x) = p(x)-p(x),\ \forall\, x \text{ (O 0 é o elemento neutro em } \mathbb{R}).\\ &\Rightarrow\; \widehat{e}(x) = -p(x),\ \forall\, x \text{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{R}).\end{aligned}$$

$\therefore \widehat{e} \equiv -p(x)$.
Da unicidade: se existir $e^{'}$ *tal que*

$$(p+e^{'}) = 0.$$

Então, $\forall\ x\ \in\ I$

$$\begin{aligned}(p+e^{'})(x)=0 &\Rightarrow p(x)+e^{'}(x)=0 \text{ (Definição de adição em } \mathcal{P}_n\text{).}\\ &\Rightarrow p(x)+e^{'}(x)=p(x)-p(x),\ \forall\ x \text{ (O 0 é o elemento neutro em } \mathbb{R}\text{).}\\ &\Rightarrow e^{'}(x)=-p(x),\ \forall\ x \text{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{R}\text{).}\end{aligned}$$

$\therefore\ \widehat{e}=e^{'}=-p$ *e vale a unicidade.*

M_1 - $1p=p$: *Suponha* $\boldsymbol{f}\ \in\ \mathcal{P}_n,\ \forall\ x\ \in\ I$, *então*

$$\begin{aligned}(1p)(x) &= 1p(x),\ \forall\ x \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathcal{P}_n\text{).}\\ &= p(x) \text{ (O número 1 é o elemento neutro da multiplicação em } \mathbb{R}\text{).}\end{aligned}$$

$\therefore 1p=p,\ \forall\ x\ \in\ I.$

M_2 - $[(k_1k_2)p]=k_1(k_2p)$:
Considere $p\ \in\ \mathcal{P}_n,\ \forall\ x\ \in\ \mathbb{R}$ *os números reais* k_1 *e* k_2, *então*

$$\begin{aligned}[(k_1k_2)p](x) &= (k_1k_2)p(x),\ \forall\ x \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathcal{P}_n\text{).}\\ &= k_1(k_2p(x)) \text{ (Associatividade em } \mathbb{R}\text{).}\end{aligned}$$

$\therefore [(k_1k_2)p]=k_1(k_2p),\ \forall\ x\ \in\ I.$

M_3 - $(k_1+k_2)p=k_1p+k_2p$:
Considere $p\ \in\ \mathcal{P}_n,\ \forall\ x\ \in\ \mathbb{R}$ *os números reais* k_1 *e* k_2, *então*

$$\begin{aligned}[(k_1+k_2)p](x) &= (k_1+k_2)p(x),\ \forall\ x \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathcal{P}_n\text{).}\\ &= k_1p(x)+k_2p(x) \text{ (Distributividade em } \mathbb{R}\text{).}\end{aligned}$$

$\therefore (k_1+k_2)p=k_1p+k_2pf,\ \forall\ x\ \in\ I.$

M_4 - $k(p+q)=kp+kq$:
Considere p *e* $q\ \in\ \mathcal{P}_n$ *onde* $p,q:I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\forall x\ \in\ I$ *e o número real* k, *então*

$$\begin{aligned}[k(p+q)](x) &= k(p+q)(x),\ \forall\ x \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathcal{P}_n\text{).}\\ &= k[p(x)+q(x)] \text{ (Definição de adição em } \mathcal{P}_n\text{).}\\ &= kp(x)+kq(x) \text{ (Distributividade em } \mathbb{R}\text{).}\end{aligned}$$

$\therefore k(p+q)=kp+kq,\ \forall\ x\ \in\ I.$

Logo, concluímos que a terna $(\mathcal{P}_n, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.*

2.4 O espaço das matrizes $m \times n$ sobre o corpo dos números reais

Seja $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e $\mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes $m\times\ n$, com m e n inteiros e positivos, sobre o corpo $\mathbb{R}$. Vamos considerar duas matrizes genéricas de ordem $m\times\ n$ dadas por $A = (a_{ij})$ e $B = (bij)$, onde $i = 1, 2, 3, \cdots, m$ e $j = 1, 2, 3, \cdots$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

As oprações de adição algébrica de matrizes e produto entre uma matriz e um número real são definidas, tendo por base [8], por:

Definição 2.4.1. *A operação* $(+)$ *é chamada de adição algébrica de matrizes, onde* $A = (a_{ij})$ *e* $B = (b_{ij})$*, ambas com ordem igual a* $m\times\ n$*, onde* $i = 1, 2, 3, \cdots, m$ *e* $j = 1, 2, 3, \cdots, n$*, definida por:*

$$(A + B)_{ij} = (a_{ij}) + (b_{ij}).$$

Definição 2.4.2. *A operação* $(\cdot)$ *é chamada de produto por escalar* k *por* $A = (a_{ij})$ *em* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *é definida por:*

$$(kA)_{ij} = ka_{ij}.$$

Exemplo 2.4.3. *Afirmamos que a terna* $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{R}), +, \cdot)$ *é um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{R}$*.*

Prova:

Com efeito, sejam A, B e C pertencentes ao conjunto $\mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$, onde A, B e C são matrizes de ordem $m\times n$ dadas por $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$, onde $i = 1, 2, 3, \cdots, m$ e $j = 1, 2, 3, \cdots, n$, daí teremos que

A_1 - $(A+B)_{ij} = (B+C)_{ij}$:

$$\begin{aligned}
(A+B)_{ij} &= a_{ij} + b_{ij} \text{ (Def. de adição em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})). \\
&= b_{ij} + a_{ij} \text{ (Prop. comutativa dos números reais).} \\
&= (B+A)_{ij} \text{ (Def. de adição em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})).
\end{aligned}$$

Como A e B são matrizes de mesma ordem $m \times n$, temos

$$(A+B)_{ij} = (B+A)_{ij}$$

e, portanto,

$$(A+B) = (B+A).$$

A_2 - $[A+(A+B)]_{ij} = [(A+B)+C]_{ij}$:

$$\begin{aligned}
[A+(B+C)]_{ij} &= a_{ij} + (B+C)_{ij} \text{ (Def. de adição em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})). \\
&= a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) \text{ (Def. de adição em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})). \\
&= (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} \text{ (Prop. assoc. em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})). \\
&= (a+b)_{ij} + c_{ij} \text{ (Def. de adição em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})). \\
&= [(A+B)+C]_{ij} \text{ (Def. de adição em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})).
\end{aligned}$$

Como A, B e C são funções matrizes de mesma ordem $m \times n$, temos

$$[A+(B+C)]_{ij} = [(A+B)+C]_{ij}$$

e, portanto,

$$[A+(B+C)] = [(A+B)+C].$$

A_3 - existe um único vetor $E = (e_{ij})$ em $\mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$, denominado matriz nula, tal que $A+E = E+A = A$ para toda matriz $A = (a_{ij})$ em $\mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$.
Suponha que existe $E \in \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$ tal que

$$(A+E) = (E+A) = A.$$

Então,

$$\begin{aligned}
(A+E)_{ij} = A_{ij} &\Rightarrow a_{ij} + e_{ij} = a_{ij} \text{ (Def. de adição em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})).\\
&\Rightarrow e_{ij} = 0,\ \forall\ x \text{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{R}).\\
&\Rightarrow E_{ij} = 0
\end{aligned}$$

$\therefore E \equiv\ 0$ (matriz identicamente nula.)

Da unicidade: se existir $\overline{E} = \overline{e}$ tal que

$$(A + \overline{E}) = A,$$

Então,

$$\begin{aligned}
(A+\overline{E})_{ij} = A_{ij} &\Rightarrow a_{ij} + \overline{e}_{ij} = a_{ij} \text{ (Def. de adição em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})).\\
&\Rightarrow \overline{e}_{ij} = 0,\ \forall\ x \text{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

$\therefore \overline{E} = E = 0$ e vale a unicidade.

A_4 - $\forall A \in \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$ existe um único vetor $\widehat{E}$ em $\mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$, denominado matriz simétrica, tal que $A + \widehat{E} = \widehat{E} + A = 0$;

Suponha que existe $\widehat{E} \in \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$, tal que

$$(A + \widehat{E}) = (\widehat{E} + A) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
(A+\widehat{E})_{ij} = 0 &\Rightarrow a_{ij} + \widehat{e}_{ij} = 0 \text{ (Def. de adição em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})).\\
&\Rightarrow a_{ij} + \widehat{e}_{ij} = a_{ij} - a_{ij},\ \forall a_{ij} \text{ (O 0 é o elemento neutro em } \mathbb{R}).\\
&\Rightarrow \widehat{e}_{ij} = -a_{ij},\ \forall a_{ij} \text{ (Lei do cancelamento em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})).
\end{aligned}$$

$\therefore \widehat{E} \equiv -A.$

Da unicidade: se existir $E^{'}$ tal que

$$(A + E^{'}) = 0,$$

Então, $\forall A \in \mathbb{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}(A+E^{'})_{ij}=0 &\Rightarrow a_{ij}+e^{'}_{ij}=0 \text{ (Def. de adição em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})).\\ &\Rightarrow a_{ij}+e^{'}_{ij}=a_{ij}-a_{ij},\ \forall a_{ij} \text{ (O 0 é o elemento neutro em } \mathbb{R}).\\ &\Rightarrow e^{'}_{ij}=-a_{ij},\ \forall a_{ij} \text{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{R}).\end{aligned}$$

$\therefore \widehat{E}=E^{'}=-A$ e vale a unicidade.

M_1 - $1A=A$:

Suponha $A=(a_ij)\in\mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R}),\ \forall a_{ij}\in\mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}(1A)_{ij} &= 1a_{ij},\ \forall a_{ij} \text{ (Def. de produto por escalar em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})).\\ &= a_{ij} \text{ (O número 1 é o elemento neutro da multiplicação em } \mathbb{R}).\end{aligned}$$

$\therefore 1A=A,\ \forall A\in\mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$.

M_2 - $[(k_1k_2)A]=k_1(k_2A)$: Considere $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R}),\ \forall a_{ij}\in\mathbb{R}$ os números reais k_1 e k_2, então

$$\begin{aligned}[(k_1k_2)A_{ij}] &= (k_1k_2)a_{ij},\ \forall a_{ij} \text{ (Def. de produto por escalar em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})).\\ &= k_1(k_2a_{ij}) \text{ (Associatividade em } \mathbb{R}).\end{aligned}$$

$\therefore [(k_1k_2)A]=k_1(k_2A),\forall x\in I.$

M_3 - $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$: Considere $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R}),\ \forall a_{ij}\in\mathbb{R}$ os números reais k_1 e k_2, então

$$\begin{aligned}(k_1+k_2)A_{ij} &= (k_1+k_2)a_{ij},\ \forall a_{ij} \text{ (Def. de produto por escalar em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})).\\ &= k_1a_{ij}+k_2a_{ij} \text{ (Distributividade em } \mathbb{R}).\end{aligned}$$

$\therefore (k_1+k_2)A=k_1A+k_2A,\ \forall A\in\mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$.

M_4 - $k(A+B)=kA+kB$: Considere $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$ e o número real k, então

$$\begin{aligned}[k(A+B)_{ij}] &= k(a_{ij}+b_{ij}), \text{ (Def. de adição em } \mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})). \\ &= ka_{ij}+kb_{ij} \text{ (Prop. distributiva em } \mathbb{R}). \\ &= kA_{ij}+kB_{ij} \text{ (Def. de produto por escalar em } \mathbb{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})).\end{aligned}$$

$\therefore k(A+B) = kA+kB.$

Logo, concluímos que a terna $(\mathcal{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

2.5 O espaço euclidiano sobre o corpo dos números reais

Sejam, $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e $\mathbb{R}^2$ o conjunto de totos os pares ordenados (a,b) com a e b números reais. Seja $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ o conjunto de todos os ares ordenados munido de duas operações $(+)$ e $(\cdot)$. Observando o que está em [11], temos:

Definição 2.5.1. *A operação $(+)$ é chamada de adição algébrica de dois vetores, em $\mathbb{R}^2$, chamados pares ordenados $A=(a,b)$ e $B=(c,d)$, onde a, b, c e d $\in$ $\mathbb{R}$, definida por:*

$$A+B=(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d), \textit{ onde } A \textit{ e } B \in \mathbb{R}^2.$$

Definição 2.5.2. *A operação produto $(\cdot)$ do escalar $k \in \mathbb{R}$ pelo par ordenado $A=(a,b)$ é definida por kA, onde*

$$(kA)=k(a,b)=(ka,kb), \ \forall \ A \in \mathbb{R}^2.$$

Exemplo 2.5.3. *Afirmamos que a terna $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.*
Prova:
Com efeito, sejam A,B e C pertencentes ao conjunto $\mathbb{R}^2$, onde A,B e C são pares ordenados dados por

$$A=(a,b), B=(c,d) \textit{ e } C=(e,f), \textit{ onde a,b,c e d } \in \mathbb{R}$$

, daí teremos que

A_1 - $(A+B)=(B+C)$:

$$\begin{aligned}(A+B)=[(a,b)+(c,d)] &\Rightarrow [(a,b)+(c,d)]=(a+c,b+d) \textit{(Def. de soma em } \mathbb{R}^2\textit{)}.\\ &\Rightarrow (a+c,b+d)=(c+a,d+b) \textit{ (Prop. distrib. em } \mathbb{R}\textit{)}.\\ &\Rightarrow (c+a,d+b)=(c,d)+(a,b) \textit{ (Def. de adição em } \mathbb{R}\textit{)}.\\ &\Rightarrow (c,d)+(a,b)=(B+A)\end{aligned}$$

Como A e B são pares ordenados, temos que

$$(A+B)=(B+A).$$

A_2 - $[A+(B+C)]=[(A+B)+C]$:

$$\begin{aligned}[A+(B+C)] &= [(a,b)+((c,d)+(e,f))]\\ &= [(a,b)+(c+e,d+f)] \textit{ (Definição de adição em } \mathbb{R}^2\textit{)}.\\ &= (a+c+e,b+d+f) \textit{ (Definição de adição em } \mathbb{R}^2\textit{)}.\\ &= [(a+c)+e,(b+d)+f] \textit{ (Dropriedade associativa em } \mathbb{R}\textit{)}.\\ &= [(a+c,b+d)+(e,f)] \textit{ (Definição de adição em } \mathbb{R}^2\textit{)}.\\ &= [((a,b)+(c,d))+(e,f)] \textit{ (Definição de adição em } \mathbb{R}^2\textit{)}.\\ &= [(A+B)+C].\end{aligned}$$

Como A, B e C são pares ordenados, temos

$$[A+(B+C)]=[(A+B)+C].$$

A_3 - *existe um único vetor $E=(e,e)$ em $\mathbb{R}^2$, denominado par ordenado nulo, tal que $A+E=E+A=A$, para todo par ordenado $A=(a,b)$ em $\mathbb{R}^2$.*
Suponha que existe $E \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$E=(e,\epsilon) \text{ e } (A+E)=(E+A)=A.$$

Então,

$$\begin{aligned}(A+E)=A &\Rightarrow [(a,b)+(e,\epsilon)]=(a,b)\\ &\Rightarrow (a+e,b+\epsilon)=(a,b) \textit{ (Def. de adição em } \mathbb{R}^2\textit{)}.\\ &\Rightarrow a+e=a \text{ e } b+\epsilon=b\ \forall\ x \textit{ (Def. de igualdade em } \mathbb{R}^2\textit{)}.\\ &\Rightarrow e=0 \text{ e } \epsilon=0 \textit{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{R}^2\textit{)}.\end{aligned}$$

$\therefore\ E \equiv\ (0,0)$ *(par ordenado nulo).*
Da unicidade: se existir $\overline{E} = (\overline{e},\ \overline{\epsilon})$ *tal que*

$$(A + \overline{E}) = A.$$

Então,

$$\begin{aligned}(A + \overline{E}) = A \ &\Rightarrow\ (a,b) + (\overline{e}, \overline{\epsilon}) = (a,b)\\ &\Rightarrow\ (a + \overline{e}), b + \overline{\epsilon}) = (a,b) \text{ (Definição de adição em } \mathbb{R}^2\text{).}\\ &\Rightarrow\ a + \overline{e} = a \text{ e } b + \overline{\epsilon} = b \text{ (Usando a igualdade em } \mathbb{R}^2\text{).}\\ &\Rightarrow\ \overline{e} = 0 \ e\overline{\epsilon} = 0\end{aligned}$$

$\therefore \overline{E} = E = (0,0)$ *e vale a unicidade.*

A_4 - $\forall A \in \mathbb{R}^2$ *existe um único vetor* $\widehat{E}$ *em* $\mathbb{R}^2$*, denominado ponto simétrico de* $A = (a,b)$*, tal que* $A + \widehat{E} = \widehat{E} + A = 0$*. Suponha que existe* $\widehat{E} \in \mathbb{R}^2$*, onde* $\widehat{E} = (\widehat{e}, \widehat{\epsilon})$ *tal que*

$$(A + \widehat{E}) = (\widehat{E} + A) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}(A + \widehat{E}) = 0 \ &\Rightarrow\ [(a,b) + (\widehat{e}, \widehat{\epsilon})] = 0\\ &\Rightarrow\ (a + \widehat{e}, b + \widehat{\epsilon}) = (0,0) \text{ (Definição de adição em } \mathbb{R}^2\text{).}\\ &\Rightarrow\ a + \widehat{e} = 0 \text{ e } b + \widehat{\epsilon} = 0 \text{ (Definição de igualdade em } \mathbb{R}^2\text{).}\\ &\Rightarrow\ (a + \widehat{e}) = (a - a) \text{ e } (b + \widehat{\epsilon}) = (b - b) \text{(O 0 é o elem. neutro em } \mathbb{R}\text{).}\\ &\Rightarrow\ \widehat{e} = -a \text{ e } \widehat{\epsilon} = -b, \text{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{R}\text{).}\end{aligned}$$

$\therefore\ \widehat{E} \equiv\ -A\ \equiv\ (-a, -b).$
Da unicidade: se existir $E^{'}$ *tal que*

$$E = (e^{'}, \epsilon^{'}) \text{ e } (A + E^{'}) = 0.$$

Então, $\forall\ A\ \in\ \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(A + E^{'}) = 0 \ &\Rightarrow\ [(a,b) + (e^{'}, \epsilon^{'}) = (0,0)\\ &\Rightarrow\ (a + e^{'}, b + \epsilon^{'}) = (0,0) \text{ (Definição de adição em } \mathbb{R}^2\text{).}\\ &\Rightarrow\ a + e^{'} = 0 \ eb + \epsilon^{'} = 0 \text{ (Definição de igualdade em } \mathbb{R}^2\text{).}\\ &\Rightarrow\ a + e^{'} = a - a \ eb + \epsilon^{'} = b - b, \text{ (O 0 é o elem. neutro em } \mathbb{R}\text{).}\\ &\Rightarrow\ e^{'} = -a \text{ e } \epsilon^{'} = -b, \text{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{R}\text{).}\end{aligned}$$

$\therefore \widehat{E} = E' = (e', \epsilon) = -A$ *e vale a unicidade.*

M_1 - $1A = A$: *Suponha* $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, *então*

$$\begin{aligned} (1A) &= 1(a,b) \\ &= (1a, 1b),\ \forall\, A \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathbb{R}^2\text{).} \\ &= (a,b) \text{ (O número 1 é o elemento neutro da multiplicação em } \mathbb{R}\text{).} \end{aligned}$$

$\therefore 1A = A$, $\forall\, A \in \mathbb{R}^2$.

M_2 - $[(k_1k_2)A] = [k_1(k_2A)]$: *Considere* $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\, a$ *e* $b \in \mathbb{R}$ *os números reais* k_1 *e* k_2, *então*

$$\begin{aligned} [(k_1k_2)A] &= [(k_1k_2)(a,b)] \\ &= (k_1k_a, k_1k_2b),\ \forall\, A \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathbb{R}^2\text{).} \\ &= [k_1(k_2a), k_1(k_2b)] \text{ (Associatividade em } \mathbb{R}\text{).} \\ &= k_1(k_2a, k_2b) \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathbb{R}^2\text{).} \\ &= k_1[k_2(a,b)] \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathbb{R}^2\text{).} \end{aligned}$$

$\therefore [(k_1k_2)A] = [k_1(k_2A)]$, $\forall\, A \in \mathbb{R}^2$.

M_3 - $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$: *Considere* $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\, A \in \mathbb{R}^2$ *os números reais* k_1 *e* k_2, *então*

$$\begin{aligned} (k_1+k_2)A &= (k_1+k_2)(a,b) \\ &= [(k_1+k_2)a, (k_1+k_2)b] \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathbb{R}^2\text{).} \\ &= (k_1a + k_2a, k_1b + k_2b) \text{ (Distributividade em } \mathbb{R}\text{).} \\ &= (k_1a, k_1b) + (k_2a, k_2b) \text{ (Definição de adição em } \mathbb{R}^2\text{).} \\ &= k_1(a,b) + k_2(a,b) \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathbb{R}^2\text{).} \end{aligned}$$

$\therefore (k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$, $\forall\, A \in \mathbb{R}^2$.

M_4 - $k(A + B) = kA + kB$: *Considere* $A = (a, b)$ *e* $B = (c, d) \in \mathbb{R}^2$ *o número real* k, *então*

$$\begin{aligned}
[k(A+B)] &= k[(a,b)+(c,d)] \\
&= k(a+c,b+d) \text{ (Definição de adição em } \mathbb{R}^2\text{).} \\
&= [k(a+c),k(b+d)] \text{ (Definição de multiplicação por escalar em } \mathbb{R}^2\text{).} \\
&= (ka+kc,kb+kd) \text{ (Propriedade distributiva em } \mathbb{R}\text{).} \\
&= (ka,kb)+(kc,kd) \text{ (Definição de adição em } \mathbb{R}^2\text{).} \\
&= k(a,b)+k(c,d) \text{ (Definição de produto por escalar em } \mathbb{R}^2\text{).}
\end{aligned}$$

$\therefore k(A+B) = kA+kB.$

Logo, concluímos que a terna $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ *é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.*

2.6 O espaço dos números complexos sobre o corpo dos números reais

Sejam, $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos $z = a+b.i$ com a e b números reais, onde $i^2 = \sqrt{-1}$, e i é chamada unidade imaginária. Seja $(\mathbb{C},+,\cdot)$ o conjunto de todos os números complexos munido de duas operações $(+)$ e $(\cdot)$.

Definição 2.6.1. *A operação* $(+)$ *é chamada de adição algébrica de dois números complexos* $z_1 = a+b.i$ *e* $z_2 = c+d.i$*, onde a, b, c e d* $\in \mathbb{R}$, z_1 *e* $z_2 \in \mathbb{C}$ *, definida por:*

$$z_1+z_2 = (a+bi)+(c+di) = [a+c,(b+d)i], \text{ onde } z_1 e z_2 \in \mathbb{C}$$

Definição 2.6.2. *A operação produto* $(\cdot)$ *do escalar* $k \in \mathbb{R}$ *pelo número complexo* $z = a+b\cdot i$ *é definida por* kz*, onde*

$$(kz) = k(a+b.i) = (ka+kb.i), \; \forall\, z \in \mathbb{C}(ver,[15]).$$

Exemplo 2.6.3. *Afirmamos que a terna* $(\mathbb{C},+,\cdot)$ *é um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{R}$.
Prova: *Com efeito, sejam* z_1, z_2 *e* z_3 *pertencentes ao conjunto* $\mathbb{C}$*, onde* z_1, z_2 *e* z_3 *são pares ordenados dados por* $z_1 = a+b\cdot i$, $z_2 = c+d\cdot i$ *e* $z_3 = e+f\cdot i$*, onde a,b,c,d,e e f* $\in \mathbb{R}$*, daí teremos que*

A_1 - $(z_1 + z_2) = (z_2 + z_1)$:

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) &= (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) \\
&= [(a + c) + (b + d) \cdot i] \text{ (Definição de adição em } \mathbb{C}\text{).} \\
&= [a + c + b \cdot i + d \cdot i] \text{ (Propriedade distributiva dos números complexos).} \\
&= [c + d \cdot i + a + b \cdot i] \text{ (Propriedade comutativa em } \mathbb{C}\text{).} \\
&= (c + d \cdot i) + (a + b \cdot i) \text{ (Propriedade associativa em } \mathbb{C}\text{).} \\
&= (z_2 + z_1)
\end{aligned}$$

Como z_1 e $z_2$são números complexos, temos que

$$(z_1 + z_2) = (z_2 + z_1).$$

A_2 - $[z_1 + (z_2 + z_3)] = [(z_1 + z_2) + z_3]$:

$$\begin{aligned}
[z_1 + (z_2 + z_3)] &= \{(a + b \cdot i) + [(c + d \cdot i) + (e + f \cdot i)]\} \\
&= \{(a + b \cdot i) + [(c + e) + (d + f) \cdot i]\} \text{ (definição de adição em } \mathbb{C}\text{).} \\
&= [(a + c + e) + (b + d + f) \cdot i] \text{ (Definição de adição em } \mathbb{C}\text{).} \\
&= [a + c + e + b \cdot i + d \cdot i + f \cdot i] \text{ (Prop. distributiva em } \mathbb{C}\text{).} \\
&= [(a + c + b \cdot i + d \cdot i) + (e + f \cdot i)] \text{ (Prop. assoc. e comutativa } \mathbb{C}\text{).} \\
&= \{[(a + b \cdot i) + (c + d \cdot i)] + (e + f \cdot i)\} \text{ (Prop. associativa em } \mathbb{C}\text{).} \\
&= [(z_1 + z_2) + z_3].
\end{aligned}$$

Como z_1, z_2 e z_3 são pares ordenados, temos

$$[z_1 + (z_2 + z_3)] = [(z_1 + z_2) + z_3].$$

A_3 - *existe um único vetor $E = (e + e \cdot i)$ em $\mathbb{C}$, denominado número complexo nulo, tal que $z + E = E + z = z$, para todo par $z = a + b \cdot i$ em $\mathbb{C}$.*
Suponha que existe $E \in \mathbb{C}$ tal que

$$E = (e + \epsilon \cdot i) \text{ e } (z + E) = (E + z) = z.$$

Então,

$$\begin{aligned}
(z+E)=z &\Rightarrow [(a+b\cdot i)+(e+\epsilon\cdot i)]=a+b\cdot i) \\
&\Rightarrow (a+e)+(b+\epsilon)\cdot i=a+b\cdot i \text{ (Definição de adição em } \mathbb{C}\text{).} \\
&\Rightarrow a+e=a \text{ e } b+\epsilon=b \text{ (Definição de igualdade em } \mathbb{C}\text{).} \\
&\Rightarrow e=0 \text{ e } \epsilon=0 \text{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{C}\text{).}
\end{aligned}$$

$\therefore E\equiv 0+0\cdot i$ *(número complexo nulo).*
Da unicidade: se existir $\overline{E}=(\overline{e}+\overline{\epsilon})$ *tal que*

$$(z+\overline{E})=z.$$

Então,

$$\begin{aligned}
(z+\overline{E})=z &\Rightarrow (a+b\cdot i)+(\overline{e}+\overline{\epsilon})=a+b\cdot i \\
&\Rightarrow (a+\overline{e})+(b+\overline{\epsilon})=a+b\cdot i \text{ (Definição de adição em } \mathbb{C}\text{).} \\
&\Rightarrow a+\overline{e}=a \text{ e } b+\overline{\epsilon}=b \text{ (Definição de igualdade em } \mathbb{C}\text{).} \\
&\Rightarrow \overline{e}=0 \text{ e } \overline{\epsilon}=0 \text{ (Definição de adição em } \mathbb{C}\text{).}
\end{aligned}$$

$\therefore \overline{E}=E=0+0\cdot i$ *e vale a unicidade.*

A_4 - $\forall z\in\mathbb{C}$ *existe um único vetor* $\widehat{E}$ *em* $\mathbb{C}$, *denominado simétrico de* $z=a+b\cdot i$, *tal que* $z+\widehat{E}=\widehat{E}+z=0$.
Suponha que existe $\widehat{E}\in\mathbb{C}$, *onde* $\widehat{E}=(\widehat{e}+\widehat{\epsilon}\cdot i)$ *tal que*

$$(z+\widehat{E})=(\widehat{E}+z)=0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
(z+\widehat{E})=0+0\cdot i &\Rightarrow [(a+b\cdot i)+(\widehat{e}+\widehat{\epsilon}\cdot i)]=0+0\cdot i \\
&\Rightarrow (a+\widehat{e}+b\cdot i+\widehat{\epsilon}\cdot i)=0+0\cdot i \text{ (Def. de adição em } \mathbb{C}\text{).} \\
&\Rightarrow a+\widehat{e}=0 \text{ e } b+\widehat{\epsilon}=0\cdot i \text{ (Definição de igualdade em } \mathbb{C}\text{).} \\
&\Rightarrow a+\widehat{e}=a+(-a) \text{ e } b+\widehat{\epsilon}=b+(-b) \text{ (Elem. neutro em } \mathbb{R}\text{).} \\
&\Rightarrow \widehat{e}=-a \text{ e } \widehat{\epsilon}=-b \text{ (Lei do cancelamento em } \mathbb{R}\text{).}
\end{aligned}$$

$\therefore \widehat{E}\equiv(-a-b\cdot i)\equiv -z$. *Da unicidade: se existir* $E^{'}$ *tal que*

$$z=(e^{'}+\epsilon^{'}\cdot i) \text{ e } (z+E^{'})=0.$$

Então, $\forall\ z\ \in\ \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
(z+E^{'}) = 0+0\cdot i \ \Rightarrow\ & [(a+b\cdot i)+(e^{'}+\epsilon^{'}\cdot i) = 0+0\cdot i \\
\Rightarrow\ & [(a+e^{'}+(b+\epsilon^{'})\cdot i] = 0+0\cdot i \ \textit{(Definição de adição em } \mathbb{C}\textit{).} \\
\Rightarrow\ & a+e^{'} = 0 \ e \ b+\epsilon^{'} = 0, \ \textit{(Definição de igualdade em } \mathbb{C}\textit{).} \\
\Rightarrow\ & a+e^{'} = a+(-a) \ e \ b+\epsilon^{'} = b+(-b) \ \textit{(Elem. neutro em } \mathbb{R}\textit{).} \\
\Rightarrow\ & e^{'} = -a \ e \ \epsilon^{'} = -b, \ \forall\ a \ e \ \forall\ b \ \textit{(Lei do cancelamento em } \mathbb{R}\textit{).}
\end{aligned}
$$

$\therefore \widehat{E} = E^{'} = -z$ *e vale a unicidade.*

M_1 - $1z = z$*: Suponha* $z = a+b\cdot i\ \in\ \mathbb{C}$*,* $\forall a$ *e* $b\ \in\ \mathbb{R}$ *, então*

$$
\begin{aligned}
(1z) &= 1(a+b\cdot i) \\
&= 1a+1b\cdot i, \ \forall\ a \ e \ b \ \textit{(Def. de produto por escalar em } \mathbb{C}\textit{).} \\
&= a+b\cdot i \ \textit{(O número 1 é o elemento neutro da multiplicação em } \mathbb{R}\textit{).}
\end{aligned}
$$

$\therefore 1z = z,\ \forall\ z\ \in\ \mathbb{C}.$

M_2 - $(k_1k_2)z = k_1(k_2z)$*: Considere* $z = a+b\cdot i\ \in\ \mathbb{C}$*,* $\forall\ a$ *e* $b\ \in\ \mathbb{R}$ *os números reais* k_1 *e* k_2*, então*

$$
\begin{aligned}
(k_1k_2)z &= (k_1k_2)(a+b\cdot i) \\
&= (k_1k_2a+k_1k_2b\cdot i), \ \forall\ z \ \textit{(Definição de produto por escalar em } \mathbb{C}\textit{).} \\
&= [k_1(k_2a)+k_1(k_2b\cdot i)] \ \textit{(Dssociatividade em } \mathbb{C}\textit{).} \\
&= k_1(k_2a+k_2b\cdot i) \ \textit{(Definição de produto por escalar em } \mathbb{C}\textit{).} \\
&= k_1[k_2(a+b\cdot i)] \ \textit{(Definição de produto por escalar em } \mathbb{C}\textit{).}
\end{aligned}
$$

$\therefore (k_1k_2z) = k_1(k_2z),\ \forall\ z \in \mathbb{C}.$

M_3 - $(k_1+k_2)z = k_1z+k_2z$*: Considere* $z = a+b\cdot i\ \in\ \mathbb{C}$*,* $\forall\ a$ *e* $b\ \in\ \mathbb{R}$ *e os números reais* k_1 *e* k_2*, então*

$$
\begin{aligned}
(k_1+k_2)z &= (k_1+k_2)(a+b\cdot i) \\
&= [(k_1+k_2)a+(k_1+k_2)b\cdot i], \ \textit{(Definição de produto por escalar em } \mathbb{C}\textit{).} \\
&= k_1a+k_2a+k_1b\cdot i+k_2b\cdot i \ \textit{(Propriedade distributiva em } \mathbb{C}\textit{).} \\
&= k_1(a+b\cdot i)+k_2(a+b\cdot i) \ \textit{(Prop. assoc. e distributiva em } \mathbb{C}\textit{).} \\
&= k_1z+k_2z \ \textit{(Definição de produto por escalar em } \mathbb{C}\textit{).}
\end{aligned}
$$

$\therefore (k_1 + k_2)z = k_1 z + k_2 z, \ \forall \ z \ \in \ \mathbb{C}.$

M_4 - $k(z_1 + z_2) = kz_1 + kz_2$: *Considere* $z_1 = a + b \cdot i$ *e* $z_2 = c + d \cdot i \ \in \ \mathbb{C}$, *e o número real* k, *então*

$$\begin{aligned}
[k(z_1 + z_2)] &= k[(a + b \cdot i) + (c + d \cdot i)] \\
&= k[(a + c) + (b + d) \cdot i], \ \text{(Def. de adição em } \mathbb{C}\text{).} \\
&= [k(a + c) + k(b + d) \cdot i] \ \text{(Def. de multiplicação por escalar em } \mathbb{C}\text{).} \\
&= ka + kc + kb \cdot i + kd \cdot i \ \text{(Propriedade distributiva em } \mathbb{C}\text{).} \\
&= k(a + b \cdot i) + k(c + d \cdot i) \ \text{(Prop. associativa e distributiva em } \mathbb{C}\text{).} \\
&= [kz_1 + kz_2]
\end{aligned}$$

$\therefore k(z_1 + z_2) = kz_1 + kz_2.$

Logo, concluímos que a terna $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.*

3 Considerações Finais

Nosso estudo foi realizado com o objetivo de estudar a forma como os professores do ensino básico apresenta os conteúdos de funções, funções polinomiais, matrizes, o espaço euclidiano e os números complexos e sugerir uma forma como os professores deverão apresentar esses conteúdos aliados à ideia de que esses conjuntos munidos das operações de soma e multiplicação por escalar constituem estruturas conhecidas no ensino superior como estruturas de espaços vetoriais. Podemos com este tipo de abordagem, mostrar para os nossos alunos caminhos possíveis de estudos futuros, e para os mais aguçados, podemos até chamar atenção no sentido de antecipar saberes. Nesse sentido, nosso trabalho teve como foco central uma reflexão na prática docente dos professores do ensino básico.

Baseados na análise alguns de livros didáticos do ensino básico, como o livro Fundamentos de Matemática Elementar do professor Gelson Iezzi, teoria dos conjuntos da coleção schaum e outros, podemos apontar algumas constatações de ordem geral relativas a apresentação teórica destes temas:

- Nos livros didáticos que analisamos percebemos que, em nenhum momento do texto refente a funções há referencia a soma entre funções nem a multiplicação de função por uma constante. Não se fala em momento algum que o conjunto das funções munido das operações de soma e multiplicação por escalar é um exemplo clássico de um espaço vetorial;

- No caso das funções polinomiais, apresenta-se a soma e multplicação por escalar, mas não há comentário com relação a espaço vetorial;

- Com relação aos pares ordenados, matrizes e números complexos não menciona-se nada a respeito de espaços vetoriais.

Fazendo uma breve comparação com os livros de Cálculo, que é uma das primeiras disciplinas da graduação, em sua grande parte, apresentam, por exemplo, o conjunto das funções nunido das operações de soma e multiplicação entre número e uma função, bem como o faz com o conjunto das matrizes de mesma ordem munido das operações de soma e multiplicação por escalar. Com tudo isso, podemos amenizar as dificuldades dos nossos alunos que vão ingressar no ensino superior mostrando, desde o início do ensino médio, que estas são estruturas algébricas conhecidas como espaços vetoriais que serão estudadas no futuro, em uma disciplina de Cálculo e/ou em um curso de Álgebra Linear, ao ingressarem no ensino superior nas áreas de exatas. Além disso, nosso estudo aponta para outra dificuldade comum no que diz respeito à especificidade da linguagem algébrica, o que nos remete à uma reflexão, quanto à introdução dessa linguagem, já nos primeiros anos da educação escolar propiciando, assim, um pensamento algébrico desenvolvido por meio de atividades que assegurem o exercício dos elementos caracterizadores desse pensamento facilitando com isso a abordagem desses assuntos com as ideias de Álgebra Linear.

Acreditamos ser necessário repensar a forma de o professor apresentar os conteúdos mencionados, no sentido de se apresentar uma linguagem que tenha significado e, portanto, aponte para a introdução de estruturas de espaços vetroriais. Detectamos, em nosso estudo, que a maior parte das propriedades algébricas de espaços vetoriais são ensinadas pelo professor do ensino básico, porém o que ainda não faz parte de muitos processos de aprendizagem, é a ponte entre esse nível de ensino e o ensino superior, que pode ser feito através de uma relação entre esses assuntos e as estruturas de espaço vetorial estudadas no ensino superior nos cursos de Álgebra Linear em áreas de exatas. Esta ligação entre as duas formas de se estudar estes matemáticos, servirá como instrumento para o desenvolvimento de um raciocínio mais abrangente e dinâmico no intuito de preparar melhor o aluno para que possa dar continuidade aos seus estudos com menos dificuldades, ao ingressarem em cursos superiores nas áreas de exatas. Para tanto, acreditamos, assim, ser fundamental a formação de professores reflexivos e, no que diz respeito ao nosso estudo, dos professores de Matemática, pois será em sua formação inicial que existirá a possibilidade de se discutir as concepções sobre a Matemática, seu ensino, sua aprendizagem e especificidades inerentes a ela. No nosso entender, a formação inicial tem contribuído muito pouco para ajudar o professor nessa reflexão, pois para que os professores se predisponham a mudanças, é preciso que tenham a oportunidade de perceber sua necessidade e importância. Assim, acreditamos que dificilmente um professor de matemática formado em um programa tradicional, cristalizado e com um currículo obsoleto, estará preparado para enfrentar os desafios, que se fazem crescentes, em sua prática pedagógica. Defendemos uma reforma curricular, uma atualização no sentido de oferecer condições para que esse professor desempenhe o seu novo papel social, ou seja, preparar jovens e adultos para uma sociedade em constante evolução. Outro aspecto importante na formação de professores é o desenvolvimento de uma formação reflexiva que aponte caminhos para uma educação matemática como prática social, preparando o professor com uma visão panorâmica, para uma educação matemática que prepare seus alunos para a continuidade dos estudos, tornando-os mais preparados para que ao ingressarem no ensino superior não tenham tantas dificuldades nos primeiros cursos, como acontece em cursos de Cálculo e Álgebra Linear. Esse caminho pode ser apontado criando-se condições para uma articulação entre a teoria e a prática no momento da formação. Acreditamos ser necessário que os professores entrem em contato com a realidade que os espera, o mais cedo possível. Talvez, do conhecimento da realidade, aliado à reflexão, surja uma consciência político-social que leve os futuros professores a compreenderem que a educação ultrapassa e muito o conceito de instrução.

Compartilhando com as idéias de D'Ambrósio (ver [4]), acreditamos ser necessário que os professores de Matemática possuam uma visão do que venha a ser a Matemática e do que constitui a legitima atividade matemática. Defendemos a ideia da necessidade de mudança nas propostas pedagógicas e na reformulação do ensino da Matemática, até então centrada nos moldes do ensino tradicional, entretanto há que se ter uma orientação adequada e consciente, para que esse movimento aconteça com compreensão particular e subjetiva, para que esse conhecimento se transforme em um saber socializado.

Não defendemos o abandono das aulas expositivas e nem dos livros didáticos, entretanto chamamos a atenção no enfoque que os mesmos dão ao ensino dos temas estudados em nosso trabalho, percebendo que é razoável que o professor do ensino básico trabalhe com os conteúdos de Funções, Polinômios, Matrizes, Geometria Analítica e Números complexos com perspectivas para estudos futuros dos alunos que ingressarem em áreas exatas. Apontamos, portanto, a condição de reflexão por parte do professor com uma visão de educação voltada para a prática social, onde as aulas expositivas e os livros didáticos sejam fortes aliados na construção de um conhecimento que tenha significado e possa ajudá-lo em seus primeiros cursos do ensino superior facilitando cada vez mais sua aprendizagem. Ao professor cabe selecionar, criar dinâmicas exploratórias, propiciando um ambiente de pesquisa em sala de aula, onde a reflexão sobre e na sua prática também possa ser compartilhada e incentivada aos seus alunos, para que os mesmos exerçam uma postura crítica e reflexiva sobre sua aprendizagem, levando-os a investigações e explorações do seu conhecimento.

Podemos com este tipo de abordagem, mostrar para os nossos alunos caminhos possíveis de estudos futuros, e para os mais aguçados, podemos até chamar atenção no sentido de antecipar saberes.

Referências

[1] BRASIL, Presid. da República, *Lei nº 11892, de 29 de dezembro de 2008. Institui a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, cria os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, e dá outras providências. In: Brasil. (Lei 11892/08 - apresentação Carlos Roberto Jamil Cury. 6 ed.*, Rio de Janeiro: DP & A, 2003.

[2] BRASIL, Presid. da República, *Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. In: Brasil [Lei de diretrizes da educação Nacional]. (Lei 9.394/96 / apresentação Carlos Roberto Jamil Cury. 6 ed.*, Rio de Janeiro: DP & A, 2003.

[3] BRASIL, Ministério da Edução e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental, *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática.*, Brasília, 1997.

[4] D'AMBRÓSIO, Beatriz S., *Formação de professores de Matemática para ao século XXI: o grande desafio*, Pró-Posições, Campinas, v. 4, n 1[10], p. 35-41, mar. 1993.

[5] FIORENTINI, Dario e CASTRO, Franciana Carneiro., *Tornando-se professor de Matemática: O Caso de Allan em prática de ensino e estágio supervisionado. In: FIORENTINI, Dario (org) Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares*, Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003.

[6] FREIRE, Paulo., *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*, São Paulo: Paz e Terra, 1996.

[7] GÓMEZ, Angel Pérez., *O pensamento prático do professor - A formação do professor como profissional reflexivo. In: NÓVOA, A. (coord). Os Professores e a sua formação, 3ª ed.* , Lisboa: Dom Quixote, 1997.

[8] Hoffman, Kenneth e Kunze, Ray, *Algebra Linear, por Kenneth Hoffman e Ray Kunze; traduzido por Adalberto P. Bergamasco*, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1976.

[9] Iezzi, G.(e outros), *Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 1*, São Paulo: Atual Editora, 1977.

[10] Iezzi, G.(e outros), *Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 4*, São Paulo: Atual Editora, 1977.

[11] Boldrini, José Luiz, *Álgebra Linear, 3ª ed.*, São Paulo: Atual Editora, 1977.

[12] Lipschutz, S., *Álgebra Linear*, Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1971.

[13] Lipschutz, S., *Teoria dos Conjuntos, Coleção Schaum*, Rio de Janeiro: Editora McGraw-Hill do Brasil LTDA.

[14] MUNEM, M. A. & FOULIS, D. J., *Cálculo, vol. 1 - 1ª ed.*, Rio de Janeiro: Guanabara, 1982.

[15] Paiva, Manoel., *Matemática - Paiva, vol. 3 - 1ª ed.*, São Paulo: Moderna, 2009.

[16] SAVIANI, D., *Educação: Do sendo comum à consciência filosófica*, São Paulo, Cortez e Autores Associados, 1980.

[17] SILVEIRA, M.R.A. da., *A Interpretação da Matemática na Escola, no Dizer dos Alunos: Ressonâncias do sentido de "Dificuldades"*, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do sul, 2000.

[18] SOARES, J.S., *Didática, Educaçaõ e Política: uma Releitura de Platão*, Cortez Editora, 2000.