UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Uma introdução a matrizes, determinantes e sistemas lineares e suas aplicações

Liliane Menezes Cabrera

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Liliane Menezes Cabrera

Uma introdução a matrizes, determinantes e sistemas lineares e suas aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luís Zani

USP – São Carlos
Junho de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

C117i Cabrera, Liliane Menezes
Uma introdução a matrizes, determinantes e sistemas lineares e suas aplicações / Liliane Menezes Cabrera; orientador Sérgio Luís Zani. -- São Carlos, 2018.
103 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Matrizes. 2. Determinantes. 3. Sistemas Lineares. I. Zani, Sérgio Luís , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Liliane Menezes Cabrera

An introduction to matrices, determinants, and linear systems and some applications

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Sérgio Luís Zani

USP – São Carlos
June 2018

Este trabalho é dedicado à memória de Angelo Marques Sabadin, por acreditar em mim e mostrar que podemos fazer sempre o melhor de nós,
mesmo nas situações consideradas irreversíveis.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me fazer seguir, mesmo nos dias mais difíceis. A minha família, por toda paciência, incentivo e compreensão nas numerosas horas de trabalho; em especial, minha irmã Juliana. A CAPES, por acreditar e incentivar esse programa. Aos colegas e professores do PROFMAT pela ajuda, solidariedade e carinho. Aos amigos Francine e Fabrício, pela amizade e apoio nas horas mais difíceis. Ao meu orientador, professor Sérgio Zani, pela competência, presteza, paciência e disponibilidade para orientar este trabalho.

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja,
que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."
(Lobachevsky)

RESUMO

CABRERA, L. M. **Uma introdução a matrizes, determinantes e sistemas lineares e suas aplicações**. 2018. 103 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Este trabalho tem como objetivo apresentar os conteúdos de matrizes, determinantes e sistemas lineares aos professores de matemática que lecionam no ensino médio, ressaltando as situações-problema bem como suas aplicações, contextualizando através de problemas.

Palavras-chave: Matrizes, Determinantes, Sistemas lineares, Ensino, Aplicações.

ABSTRACT

CABRERA, L. M. **An introduction to matrices, determinants, and linear systems and some applications**. 2018. 103 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

The goal of this work is to present an introduction to matrices, determinants, and linear systems to high school mathematics teachers highlighting some applications.

Keywords: Matrices, Determinants, Linear Systems, Teaching, Applications.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem duas vertentes: A primeira é apresentar o conceito formal de matrizes, determinantes e sistemas lineares, de forma que o docente tenha embasamento e confiança dentro da sala de aula, pois ter domínio da matéria é fundamental. Nesse aspecto, pode ser então uma ferramenta para o professor ter condições de argumentar teoria e resultados apresentados nos livros didáticos. A segunda mostra aplicações na resolução de problemas diários, enriquecendo então as aulas com exemplos mais estimulantes e mostrando a aplicabilidade dos conteúdos até então apenas expostos.

Na pretensão de atingir um nível satisfatório do aprendizado da matemática nos alunos, será feito nesse estudo a contextualização para que se possa empregar conceitos e procedimentos matemáticos como uma ferramenta na condução de problemas cotidianos, estreitando-se a relação entre professores, alunos e a matemática.

A prática matemática é algo cada vez mais frequente em provas de vestibulares, concursos públicos e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Contudo, é importante observar como se aplicam os conceitos matemáticos no intuito de solucionar problemas rotineiros em sala de aula porque resolver problemas contextualizados não é uma tarefa fácil. Na transmissão dessas informações aos alunos, a falta de solidez e de um rigor acentuado pode fazer com que a ação não tenha efeito. Desta forma, a ligação entre as partes de um todo se torna uma obrigação de todo educador para com o seu educando.

O estudo de matrizes, determinantes e sistemas lineares podem formar um espaço de significativa importância para que o aluno treine sua capacidade de abstrair, generalizar e resolver problemas.

Hoje em dia presencia-se no ensino de ciência matemática um descontentamento nos alunos, com maior frequência nos do ensino médio. A razão desse desinteresse pode estar ligada à falta do elo dos conteúdos abordados com a prática cotidiana, gerando desmotivação na maioria das vezes. Simplesmente não perceber a riqueza do significado dentro do estudo da ciência matemática, faz existir uma cultura elitizada de que a matemática é algo muito complexo, alcançável apenas por mentes intelectualmente superiores e que se distancia do mundo tangível.

De acordo com a maioria dos alunos que participaram do teste aplicado nesta dissertação, os educadores são apontados como os grandes responsáveis pela repugnância e apatia à matemática, que se torna muitas vezes a ciência menos admirada da grade curricular. Comumente, os temas são abordados de maneira desmotivada, com ênfase apenas na parte algébrica e domínio do cálculo.

É muito corriqueiro em sala de aula emergir a indagação: "Professor, onde eu vou usar isso na minha vida?". A falta de execução prática dos conteúdos nos bancos escolares percorre a um aprendizado robótico, desprendido de reflexão, exatamente por não possuir associação com a realidade prática cotidiana. Sem relevar as circunstâncias, o aprendizado de um determinado tema impede a sua exploração, inviabilizando a construção significativa do conhecimento.

A necessidade do desenvolvimento da capacidade de compreensão que envolva a prática da matemática, permitirá assim reconhecer problemas, classificar as informações, buscar soluções e tomar decisões. A potencialização dessa capacidade na escola faz com que o aprendizado do aluno seja mais perspicaz e assertivo, seja no ensino fundamental ou no ensino médio.

A matemática deve ter uma posição essencial do conhecimento humano, necessária para qualquer pessoa em formação, que contribuirá para uma leitura da realidade ao longo da vida.

Nos capítulos 2, 3 e 4, serão abordados, respectivamente, matrizes, determinantes e sistemas lineares, contemplando contextos históricos, conteúdos e aplicações práticas dos mesmos. O capítulo 5 trata da aplicação de um teste em sala de aula, envolvendo teoria contextualizada, com seis exercícios.

CAPÍTULO 2

MATRIZES

2.1 Conceito histórico

Na história, quando se compara a exposição de determinados conteúdos matemáticos com a ordem em que surgiram, é muito frequente deparar-se com uma inversão (BERNARDES; ROQUE, 2016).

O início do estudo de matrizes e determinantes surge por volta do século IV a.C. com os babilônios, quando estudavam sistemas de equações lineares. No século III a.C., os chineses abordaram o conceito de matrizes de forma mais precisa, apresentando um processo de resolução de sistemas lineares cuja ideia de matrizes aparecia implícita (IEZZI *et al.*, 2016).

O conceito de matriz apareceu após a noção de determinantes, sistemas lineares, transformações lineares e formas quadráticas. Foi o matemático britânico James Joseph Sylvester (1814 – 1897) quem introduziu o termo, no ano de 1850, no Philosophical Magazine (BERNARDES; ROQUE, 2016).

De acordo com Bernardes e Roque (2016, p. 2), Sylvester definiu matriz:

> [. . .] nós devemos começar, não com um quadrado, mas com um arranjo retangular de termos consistindo, suponha, de m linhas e n colunas. Isto não representará em si mesmo um determinante, mas, uma Matriz da qual podemos formar vários sistemas de determinantes por fixar um número p, e selecionar quaisquer p linhas e p colunas, os quadrados correspondendo ao que pode ser chamado de determinantes de p-ésima ordem.

Em 1858, na escola inglesa Trinity College, Cambridge, em uma memória do matemático Arthur Cayley (1821 – 1895) sobre a teoria das transformações, teriam surgido as matrizes, onde definiu as operações com matrizes e enunciou suas respectivas propriedades (BOYER, 2010).

Cayley era contemporâneo e amigo de Sylvester (BERNARDES; ROQUE, 2016), que compartilhou o seu interesse por transformações lineares e invariantes algébricos, surgindo a teoria das matrizes de Cayley (BAUMGART, 1992).

Bernardes e Roque (2016, p. 2) aponta as considerações de Cayley:

> O termo matriz pode ser usado em um sentido mais geral, mas nesta memória eu considero somente matrizes quadradas e retangulares, e o termo matriz sem qualificação deve ser interpretado como uma matriz quadrada; neste sentido restrito, um conjunto de quantidades arranjadas na forma de um quadrado [. . .].

Cayley criou isso sem imaginar nas aplicações que teria posteriormente como, por exemplo, a representação de dados em tabelas (organizadas em linhas e colunas), as imagens digitais e a computação gráfica (IEZZI *et al.*, 2016).

2.2 O uso das matrizes no cotidiano

Diariamente, são encontradas informações em jornais, revistas, internet, livros, etc. Geralmente essas informações vêm organizadas em formato de tabelas; em outras situações, essas tabelas podem vir implícitas, dependendo do conteúdo abordado, de forma que são utilizadas sem ser percebidas, como é o caso das imagens digitais. Alguns exemplos:

Exemplo 1. As planilhas de dados, organizadas em tabelas, são utilizadas constantemente. É muito comum encontrar as informações distribuídas como na tabela a seguir, com dados do Censo:

Figura 1 – Estimativas de domicílios, rendimento mensal per capita dos domicílios particulares e a existência de tablet no domicílio em 2015

Tabela 2.2.1a - Coeficientes de variação das estimativas de domicílios particulares permanentes, moradores em domicílios particulares permanentes e rendimento, médio e mediano, mensal per capita dos domicílios particulares permanentes, segundo as Grandes Regiões e a existência de tablet no domicílio - 2015

Grandes Regiões e existência de *tablet* no domicílio	Domicílios particulares permanentes		Moradores em domicílios particulares permanentes		Rendimento médio mensal per capita dos domicílios particulares permanentes (%)(1)	Rendimento mediano mensal per capita dos domicílios particulares permanentes (%)(1)
	Valores absolutos (%)	Valores relativos (%)	Valores absolutos (%)	Valores relativos (%)		
Brasil	0,2	-	-	-	1,0	-
Havia	1,1	1,1	1,1	1,1	2,1	0,4
Não havia	0,3	0,2	0,2	0,2	0,7	0,2
Norte	0,6	-	-	-	1,9	0,7
Havia	3,7	3,6	4,0	4,0	5,1	1,1
Não havia	0,7	0,3	0,4	0,4	1,6	0,5
Nordeste	0,4	-	-	-	1,7	0,3
Havia	2,3	2,2	2,2	2,2	3,7	1,1
Não havia	0,5	0,3	0,3	0,3	1,3	0,7
Sudeste	0,3	-	0,1	-	1,7	0,2
Havia	1,7	1,6	1,6	1,6	3,4	0,5
Não havia	0,6	0,4	0,5	0,5	1,2	0,3
Sul	0,5	-	0,1	-	1,6	0,1
Havia	2,4	2,4	2,3	2,3	2,9	0,6
Não havia	0,7	0,5	0,6	0,5	1,5	0,5
Centro-Oeste	0,6	-	0,1	-	2,7	0,5
Havia	3,1	3,0	2,9	2,9	5,0	0,7
Não havia	0,8	0,6	0,7	0,7	1,9	0,5

Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios 2015.

(1) Exclusive as informações dos domicílios sem declaração de rendimento mensal domiciliar *per capita* .

Fonte: IBGE. Pesquisa nacional por amostra de domicílios - 2015

Exemplo 2. Pixel

O acrônimo de *picture element* dá origem à palavra *pixel*.

Pixel é um ponto luminoso minúsculo que, quando se junta com outros milhares ou milhões de pontos luminosos do mesmo tipo, ficando todos justapostos, passam sem ser notados e formam as imagens digitais das telas de celular, televisores, tablets, notebooks, máquinas fotográficas e muitos outros aparelhos eletrônicos.

Aproximando-se da tela de um computador, por exemplo, pode-se notar que existem vários pontinhos coloridos: os pixels.

Imagens na tela do computador ou uma fotografia em máquina digital podem ser representadas por matrizes:

1. Se um monitor de computador tem 1920×1080 pixels, essa é a máxima resolução que ele tem. Sendo assim, tem-se 1920 pixels na horizontal e 1080 na vertical. Fazendo-se o produto: $1920 \cdot 1080 = 2073600$, tem-se um total de 2073600 pixels, ou ainda, 2 megapixels [1], aproximadamente. Esse formato em linhas e colunas é denominado **matriz**.

2. De acordo com Iezzi *et al.* (2016), quando se utiliza uma câmera e a imagem digital obtida por ela tem uma resolução de 3840 pixels na horizontal e 2400 na vertical, então $3840 \cdot 2400 = 9216000$, isto é, aproximadamente 9 megapixels. Nesse caso, tem-se uma matriz com 3840 linhas e 2400 colunas.

   Maior número de pixels numa fotografia significa maior número de detalhes e maior será a chance de uma resolução melhor no momento em que a foto for impressa. A resolução também vem atrelada à capacidade de captação do sensor da câmera.

   a) federal (2017) expõe um exemplo muito simples de imagem binária, que é composta por duas cores: preto e branco, formando uma matriz binária 35×35, em que por conveniência o zero (0) indicará a cor preta e o um (1), a cor branca. Cada quadradinho representa um pixel.

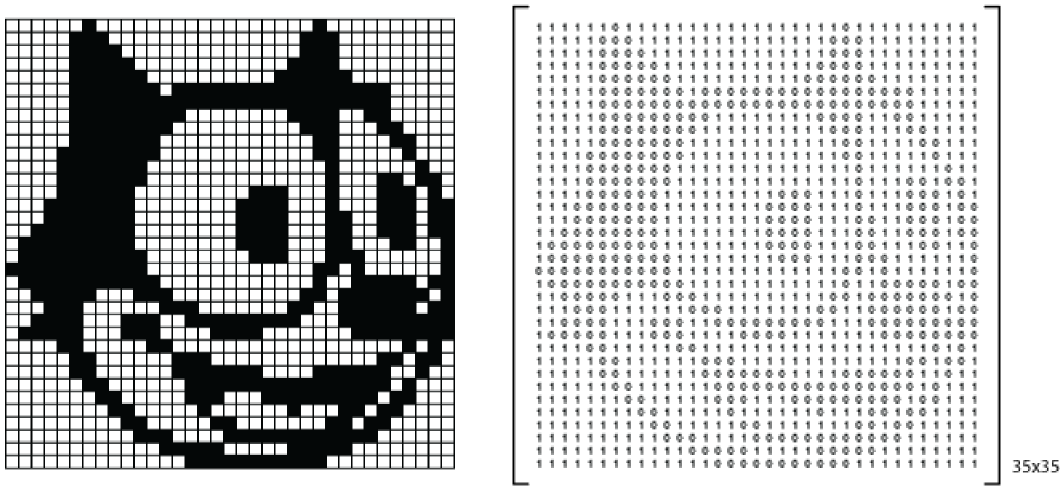
      A menor unidade de configuração que pode ser transmitida ou armazenada é 1 bit, que assume dois valores: 0 e 1. Geralmente, em imagens capturadas em câmera digital ($2D$), os programas computacionais fazem uma associação: cada unidade de imagem com um valor inteiro não negativo que corresponde a $1\ byte = 8\ bits$.

      Assim, para cada bit, tem-se 0 ou 1 (2 possibilidades). Como são 8 bits, então tem-se: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$, que é o número de valores distintos que pode ser associado a um pixel.

      Nestes termos, 0 indica a ausência total de intensidade luminosa (cor preta) e 255 indica a luminosidade máxima (cor branca). Os valores entre 0 e 255 representam

[1] $1\ megapixel = 1000000\ pixels$

Figura 2 – Gato Félix: matriz binária



Fonte:<http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html>

escalas de cinza. E assim se formam as imagens digitais em preto e branco, com tons de cinza.

b) Para imagens coloridas, cada pixel pode ter uma cor, que é a combinação de três cores primitivas: vermelho (red), verde (green) e azul (blue). Essas cores assumem um sistema padrão **RGB**, com as iniciais em inglês. Cada cor possui 256 tonalidades, com variações da mais clara à mais escura: o zero (0) indica a ausência de cor e o 255 indica a presença máxima da cor na combinação, representada por ternas (R, G, B), indicando, sempre nesta ordem, a intensidade de cada cor no ponto de imagem considerado. Assim, por exemplo, tem-se as correspondências:

- AZUL: RGB $(0, 0, 255)$
- VERMELHO: RGB $(255, 0, 0)$
- VERDE: RGB $(0, 255, 0)$
- COBRE: RGB $(184, 115, 51)$
- Na fotografia digital colorida da figura 3, existem pixels coloridos no formato RGB. A mesma imagem é mostrada em quatro diferentes resoluções, mostrando a importância da quantidade de pixels na resolução.

Figura 3 – Coelho: fotografia em quatro tipos de resolução

Fonte: Foto produzida por Nayara Zattoni Fotografias, Duartina-SP. Recebida em 17/08/2017.

A matriz que comporta os pontos que compõem a imagem mais distorcida tem apenas 80 linhas e 53 colunas (80×53 *pixels*). Já a imagem com 6016 linhas e 4016 colunas (6016×4016 *pixels*), exibe uma definição bem melhor.

2.3 Definição

Sejam m e n números naturais não nulos. Uma matriz é um arranjo retangular de mn números reais (ou complexos) distribuídos em m linhas horizontais e n colunas verticais. Geralmente, usa-se uma letra maiúscula para representar uma matriz, como por exemplo: A, ou mesmo $A_{m\times n}$, quando for salientar a quantidade de linhas (m) e colunas (n). Os números que aparecem na matriz são chamados elementos ou termos da matriz. Para representar o elemento de uma matriz, usamos uma letra minúscula com dois índices, como, por exemplo, a_{ij}: o primeiro indica em que linha o elemento se encontra; o segundo, a coluna (IEZZI *et al.*, 2016). Atribui-se o nome de fila quando se refere à linha ou coluna da matriz, indistintamente.

Formalmente, a matriz é uma função que associa cada par $(i, j) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\}$

ao número real a_{ij}.

Uma matriz A, de ordem $m \times n$ será escrita genericamente, como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou ainda, } A = [a_{ij}]$$

Nota-se que:

- A *i-ésima* linha de A é $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$, sendo $1 \leq i \leq m$;

- A *j-ésima* coluna de A é $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$, sendo $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 3. A matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ é quadrada 3×3, com $d_{11} = 1,\ d_{21} = 0,\ d_{31} = 2,\ d_{12} = 3,\ d_{22} = 1,\ d_{32} = -1,\ d_{13} = 4,\ d_{23} = 0,\ d_{33} = 0.$

Exemplo 4. Balestri (2016) ressalta a utilidade de planilhas diariamente. No caso da planilha eletônica, que é um programa de computador, as informações são registradas em células organizadas em linhas e colunas, como em uma matriz. Cita ainda a importância da aplicação de matrizes nos conteúdos que envolvam situações cotidianas, como uma planilha escolar de notas.

Tabela 1 – Notas dos alunos em matemática

Notas dos alunos em Matemática (2017)				
Nome	1º Bimestre	2º Bimestre	3º Bimestre	4ºBimestre
Juliana	8,5	7,9	7,5	9,1
Laura	9,4	8,2	6,9	7,3
Paula	9,1	6,5	7,4	8,6
Rafael	8,9	9,4	8,8	8,8
Samuel	5,5	4,3	6,0	7,1

Fonte: Elaborada pelo autor.

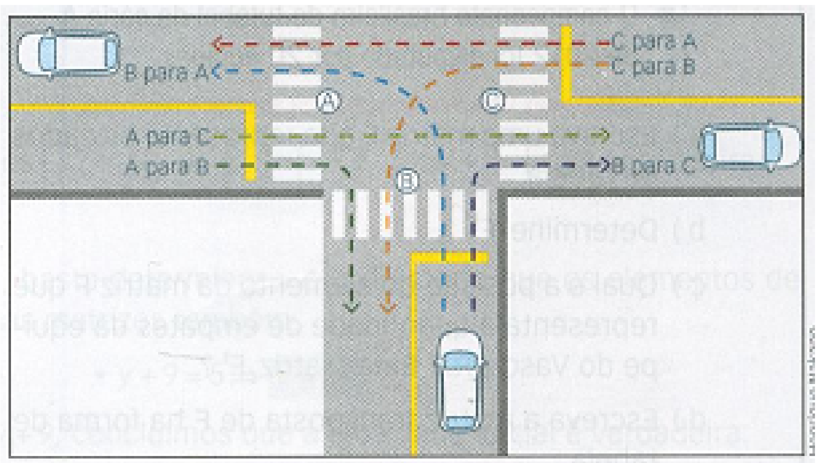
Essa tabela, com valores das notas organizados em 5 linhas e 4 colunas, é uma matriz de ordem 5×4, podendo ser representada de modo simplificado por:

$$\begin{bmatrix} 8,5 & 7,9 & 7,5 & 9,1 \\ 9,4 & 8,2 & 6,9 & 7,3 \\ 9,1 & 6,5 & 7,4 & 8,6 \\ 8,9 & 9,4 & 8,8 & 8,8 \\ 5,5 & 4,3 & 6,0 & 7,1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5. Balestri (2016) também comenta sobre a origem dos semáforos em 1868, nas esquinas movimentas de Londres. Tinham lanternas verdes e vermelhas para estruturar o fluxo de carruagens e pedestres. Nos Estados Unidos, em 1914, iniciou-se a utilização dos mesmos sinais com luz elétrica, controlados então por guardas.

Na figura a seguir, o fluxo de veículos que passam pelos pontos A, B e C é organizado por 3 semáforos:

Figura 4 – Esquema que representa o encontro de duas vias de mão dupla



Fonte:<https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questao/d4cc48bc-1d>

Balestri (2016) explica que os valores indicam o tempo, em minutos, que cada semáforo verde (aberto) a cada 2 minutos, no sentido de acesso da via indicada pela linha para a via indicada pela coluna da matriz. O elemento a_{12}, por exemplo, mostra que o valor $1,5$ indica que o semáforo que dá acesso da via A (linha A) para a via B (coluna B) fica aberto $1,5$ minutos a cada período de 2 minutos:

Tabela 2 – Tempo de abertura

	A	B	C
A	0	1,5	1
B	0,5	0	1
C	1,5	0,5	0

Fonte: Elaborada pelo autor.

Essa tabela pode ser representada pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1,5 & 1 \\ 0,5 & 0 & 1 \\ 1,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 6. Escreva a matriz $X = [a_{ij}]$, com $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 3$, tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ para } i = j \\ 0, \text{ para } i \neq j \end{cases}.$$

A matriz X terá três linhas e três colunas. Sua representação genérica é:

$$X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Pelas condições descritas no exercício: $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ e $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$. Tem-se, portanto:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7. Considera-se $A = [a_{ij}]_{2\times 3}$ de tal forma que $a_{ij} = 2i + j, \forall i \in \{1,2\}$ e $\forall j \in \{1,2,3\}$. Assim, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1+1 & 2\cdot 1+2 & 2\cdot 1+3 \\ 2\cdot 2+1 & 2\cdot 2+2 & 2\cdot 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

2.4 Tipos particulares de matrizes

Deve-se levar em conta que as ordens das matrizes são números naturais não nulos, e seus elementos podem ser números reais ou complexos.

2.4.1 Matriz linha

A matriz $A_{m\times n}$ é chamada de **matriz linha** quando $m = 1$, ou seja, é formada por uma única linha e pode ser representada por $A_{1\times n}$.

Exemplo 8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha 1×3.

Exemplo 9. $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha 1×2.

2.4.2 Matriz coluna

A matriz $A_{m\times n}$ é chamada de **matriz coluna** quando $n = 1$, ou seja, é formada por uma única coluna e pode ser representada por $A_{m\times 1}$.

Exemplo 10. $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 4×1.

2.4.3 Matriz quadrada

Uma matriz $A_{m\times n}$ é chamada de quadrada, se $m = n$, ou seja, quando o número de linhas é igual ao número de colunas. Sua representação é A_n.

Se A é uma matriz quadrada, define-se:

- A **diagonal principal**, que é constituída por todos os elementos de A cujo índice da linha é igual ao índice da coluna;
- A **diagonal secundária**, que é formada pelos elementos de A cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n+1$.

Para $n = 3$, tem-se, de forma geral:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

onde: a_{11}, a_{22} e a_{33} são elementos da diagonal principal; e a_{13}, a_{22} e a_{31} compõem a diagonal secundária. Chama-se **traço** de uma matriz quadrada a soma dos elementos de sua diagonal principal.

Exemplo 11. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & -5 \end{bmatrix}$. Tem-se que A é quadrada de ordem 3, cujos elementos da diagonal principal são: $a_{11} = 2$, $a_{22} = 1$ e $a_{33} = -5$; já a diagonal secundária tem como elementos: $a_{13} = 0$, $a_{22} = 1$ e $a_{31} = 6$.

Exemplo 12. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2, cujos elementos da diagonal principal são: $a_{11} = 1$ e $a_{22} = \sqrt{3}$; já a diagonal secundária tem como elementos: $a_{12} = 0$ e $a_{21} = -1$.

2.4.4 Matriz nula

É a matriz cujos elementos são todos iguais a zero. Indica-se a matriz nula $m \times n$ por $O_{m\times n}$, ou simplesmente por O.

Exemplo 13. A matriz $O_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz nula 3×3.

2.5 Matriz triangular superior e inferior

Considera-se a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n. Chama-se de **matriz triangular superior** quando $a_{ij} = 0$, para $i > j$ e **matriz triangular inferior** quando $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

• **Matriz triangular superior:** Todos os elementos abaixo da diagonal principal tem valor igual a zero.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

• **Matriz triangular inferior:** Todos os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2.6 Matriz diagonal

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ é chamada de matriz diagonal quando todos os elementos fora da diagonal principal forem iguais a zero.

Ou seja,

$$a_{ij} = 0, \text{ quando } i \neq j, \text{ isto é, } A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Se a matriz diagonal $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ tem todos os termos da diagonal principal **iguais**, é chamada então de **matriz escalar**. Ou seja:

$$a_{ij} = \begin{cases} x, \text{ para } i = j \\ 0, \text{ para } i \neq j \end{cases} .$$

Sendo assim:

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{bmatrix}$$

Exemplo 14. As matrizes $F = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ são diagonais.

Exemplo 15. A matriz $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal escalar.

2.7 Matriz transposta

Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Chama-se **matriz transposta de A**, e indica-se por A^t, à matriz:

$$A^t = (a'_{ij})_{n\times m}, \text{ com } a'_{ij} = a_{ji}, \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m$$

Pode-se dizer assim que a matriz A^t é formada trocando-se, ordenadamente, as linhas pelas colunas, ou seja, a linha 1 da matriz A passa a ser a coluna 1 da matriz A^t; a linha 2 da matriz A passa a ser a coluna 2 da matriz A^t, e assim sucessivamente para todas as linhas da matriz A.

Exemplo 16. A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ é $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ e percebe-se que a linha 1 da matriz A passou a ser a coluna 1 da matriz A^t.

Seja A uma matriz quadrada de ordem $m \times m$, A^t sua transposta e a_{ij} cada elemento de A. Uma matriz é **simétrica** se $A = A^t$, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Quando $A = -A^t$, recebe o nome de **antissimétrica**.

Exemplo 17. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. A matriz transposta é

$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Logo, a matriz A é simétrica, pois $A = A^t$.

As propriedades da matriz transposta serão demonstradas ainda neste capítulo, após as operações com matrizes.

2.8 Matriz identidade (ou unidade)

É a matriz quadrada de ordem n. Pode-se representar por $I_n = [a_{ij}]_{n \times n}$, onde:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ 1, \text{ se } i = j \end{cases}$$

Denota-se por:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz identidade é um caso particular de matriz escalar.

2.9 Outros tipos de matrizes

1. **Matriz nilpotente de índice** n:

   Seja a matriz quadrada A e a matriz nula O, ambas de mesma ordem.

   A matriz A é nilpotente se para algum $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$), tem-se:

$$A^n = O$$

Exemplo 18. Neste caso, a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ é nilpotente porque:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. **Matriz idempotente**

   É chamada de matriz idempotente toda matriz quadrada A que satisfaz:

$$A^2 = A$$

Exemplo 19. A matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ é idempotente, pois:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) & (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ (-3) \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) & (-3) \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-6 & -4+6 \\ 6-9 & -6+9 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = A.$$

2.10 Operações com matrizes

2.10.1 Adição de matrizes

Sejam duas matrizes A e B, de mesma ordem, $m \times n$. Denomina-se **soma da matriz** A **com a matriz** B, e representa-se por $A + B$, a matriz C que é do tipo $m \times n$, cujos elementos são obtidos quando se somam os elementos de A e B correspondentes. Pode-se dizer então que $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes $m \times n$, e a soma de A e B é a matriz $C = [c_{ij}]$, $m \times n$, definida por:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

com

$$1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

Ou seja: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$

Portanto C é decorrente da adição dos elementos correspondentes de A e B.

Exemplo 20. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -6 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -6 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & 5-4 & -2-1 \\ 2+7 & 8+0 & -6+2 \\ 1+3 & 4+1 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 9 & 8 & -4 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sejam A e B duas matrizes, de mesma ordem, $m \times n$. Denomina-se **diferença** entre A e B, que se representa por $A - B$, a soma da matriz A com a matriz oposta de B:

$$A - B = A + (-B)$$

Ou seja: dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$. A matriz $C = A - B$ é dada por

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \text{ para } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

Exemplo 21. Considerando-se as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$,

tem-se:

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 4+1 & 0-3 \\ -1-2 & 5+0 & 3+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

2.10.2 Multiplicação por um escalar

Seja $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ uma matriz e k um número real. A multiplicação de A por um **escalar** k, kA, é a matriz $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, dada por:

$$b_{ij} = ka_{ij}, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

ou seja, a matriz kA é obtida multiplicando-se cada elemento de A por k.

2.10.3 Multiplicação de matrizes

É comum, no cotidiano escolar, resolver problemas com multiplicação de matrizes de forma mecânica, sem conexão com a prática.

De acordo com Kolman e Hill (2006) e Dante (2014), a multiplicação de matrizes não é uma operação que possa ser considerada tão simples, pois requer mais cuidado do que a adição, tendo em vista que as propriedades algébricas da multiplicação de matrizes são distintas daquelas satisfeitas pelos números reais. Mencionam também que uma das causas do problema é o fato de AB ser definida somente quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, que será considerado ainda nesta subseção. Tanto Kolman e Hill (2006) quanto Dante (2014) consideram situações-problema para um entendimento mais apurado do conceito.

Dante (2014) faz referência ao grupo C do futebol masculino durante as olimpíadas realizadas em Londres, em 2012, que era composto por quatro países: Brasil, Egito, Bielorrússia e Nova Zelândia, organizados em tabela.

Figura 5 – Olimpíadas 2012 - Grupo C

Fonte:<https://tvrsd.wordpress.com/tag/tabela-do-jogo-masculino-nas-olimpiadas/>

De acordo com os resultados (número de vitórias, empates e derrotas) de cada um, pode-se montar uma nova tabela e a matriz $A_{4\times 3}$:

	Vitórias	Empates	Derrotas
Brasil	3	0	0
Egito	1	1	1
Bielorrússia	1	0	2
Nova Zelândia	0	1	2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pelo regulamento das olimpíadas, cada vitória, empate ou derrota tem pontuação correspondente a 3, 1 ou 0 pontos, respectivamente. Esse fato pode também ser registrado em uma tabela, que gera a matriz $B_{3\times 1}$:

	Número de pontos
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ao terminar a primeira fase, para verificar o total de pontos dos países participantes, basta fazer:

Brasil	$3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 9$
Egito	$1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4$
Bielorrússia	$1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3$
Nova Zelândia	$0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$

Essa tabela, com a pontuação total, sugere como deve ser feita a multiplicação de matrizes, ou seja AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $m \times p$ e uma matriz $B = [b_{ij}]$ de ordem $p \times n$, o produto AB é a matriz $C = [c_{ij}]$ cuja ordem é $m \times n$, que assim se define:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Nesta equação, o *i,j-ésimo* elemento da matriz produto é o produto da *i-ésima* linha e a *j-ésima* coluna:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$(\text{linha } i) \cdot (\text{coluna } j) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Nota-se que só é possível o produto de A e B quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, resultando na matriz C. A matriz resultante terá o mesmo número de linhas de A, e o mesmo número de colunas de B. Assim:

$$AB = (A_{m \times p}) \cdot (B_{p \times n}) = C_{m \times n}$$

Caso AB seja possível, nem sempre o produto BA será. Quatro situações diferentes podem ocorrer:

- Se $n \neq m$, BA não se define.

- Se $m = n$, BA é definida.
- Se AB e BA são da mesma ordem, elas podem ser iguais.
- Se AB e BA são da mesma ordem, elas podem ser diferentes.

  As propriedades básicas da multiplicação de matrizes serão consideradas na última seção deste capítulo.

Exemplo 22. Kolman e Hill (2006) usa o exemplo:

Os pesticidas são aplicados às plantas a fim de eliminar os insetos daninhos. Entretanto, uma parte destes pesticidas é absorvida pela planta. Os pesticidas são absorvidos pelos animais herbívoros quando eles se alimentam de plantas que receberam pesticida. Para determinar a quantidade de pesticida absorvida por um animal herbívoro, procedemos da seguinte maneira. Suponha que temos três pesticidas e quatro plantas. Represente por a_{ij} a quantidade de pesticida i (em miligramas) que foi absorvida pela planta j, formando a tabela que dá origem à matriz A:

	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4
Pesticida 1	2	3	4	3
Pesticida 2	3	2	2	5
Pesticida 3	4	1	6	4

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Suponha agora que temos três animais herbívoros, e que b_{ij} representa o número de plantas do tipo i que um animal herbívoro do tipo j come por mês, formando a tabela (matriz B):

	Herbívoro 1	Herbívoro 2	Herbívoro 3
Planta 1	20	12	8
Planta 2	28	15	15
Planta 3	30	12	10
Planta 4	40	16	20

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 20 & 12 & 8 \\ 28 & 15 & 15 \\ 30 & 12 & 10 \\ 40 & 16 & 20 \end{bmatrix}$$

O elemento (i, j) em AB fornece a quantidade de pesticida do tipo i que o animal j absorveu. Dessa forma, se $i = 1$ e $j = 3$, o elemento $(1,3)$ em AB é:

$$2(8) + 3(15) + 4(10) + 3(20) = 16 + 45 + 40 + 60 = 161$$

Portanto, 161 mg do pesticida 1 absorvidos pelo animal herbívoro 3.

Exemplo 23. Se A é uma matriz 2×4 e B é uma matriz 4×3, então AB é uma matriz 2×3 e BA não é definida.

Exemplo 24. Dadas: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, o produto AB é possível, pois a matriz A é de ordem 2×3, e a matriz B é de ordem 3×2 (número de colunas de A é igual ao número de linhas de B); então: $A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} = C_{2\times2}$.

Logo:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1\cdot 4+2\cdot 1+5\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot 3+5\cdot 1 \\ 3\cdot 4+1\cdot 1+0\cdot 2 & 3\cdot 3+1\cdot 3+0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2+10 & 3+6+5 \\ 12+1+0 & 9+3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 14 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}$$

Observação: O produto BA também é possível, pois a matriz B é de ordem 3×2, e a matriz A é de ordem 2×3 (número de colunas de B é igual ao número de linhas de A); então: $B_{3\times 2} \cdot A_{2\times 3} = C_{3\times 3}$, e o cálculo procederia-se como no produto AB, com a diferença que se teria uma matriz resultante de ordem 3.

A operação de multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, mesmo que sejam possíveis ambos os produtos AB e BA, tem-se, em geral, $AB \neq BA$.

Exemplo 25. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, obter AB e BA.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 3 & 2\cdot(-2)+1\cdot 5 \\ (-2)\cdot 1+3\cdot 3 & (-2)\cdot(-2)+3\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 19 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2+[(-2)\cdot(-2)] & 1\cdot 1-2\cdot 3 \\ 3\cdot 2+5\cdot(-2) & 3\cdot 1+5\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 18 \end{bmatrix}$$

Na multiplicação de matrizes, não vale a lei de anulamento do produto, isto é, se $AB = 0$ não se tem necessariamente $A = 0$ ou $B = 0$

Exemplo 26. Dadas as matrizes não nulas $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 4+0\cdot(-4) \\ 2\cdot 0+2\cdot 0 & 2\cdot 4+2\cdot(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0-0 \\ 0+0 & 8-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na multiplicação de matrizes não vale a lei de cancelamento do produto, isto é, se $AC = BC$, nem sempre $A = B$, a não ser que C seja inversível.

Exemplo 27. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se:

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 5+1\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 5+0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 0+2\cdot 0 & 0\cdot 5+2\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 5+0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota-se que $AC = BC$, mas $A \neq B$. De fato, a matriz C não possui inversa.

Seja I_n a matriz identidade de ordem n e A uma matriz quadrada de ordem n, tem-se:

$$AI_n = I_nA = A$$

Exemplo 28. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, tem-se:

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1+(-1)\cdot 0 & 2\cdot 0+(-1)\cdot 1 \\ 3\cdot 1+4\cdot 0 & 3\cdot 0+4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 0-1 \\ 3+0 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A.$$

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2+0\cdot 3 & 1\cdot(-1)+0\cdot 4 \\ 0\cdot 2+1\cdot 3 & 0\cdot(-1)+1\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & -1+0 \\ 0+3 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A.$$

Portanto: $AI_2 = I_2A = A$

Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, sendo $m \neq n$, então:

$$I_mA = AI_n = A$$

Exemplo 29. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$.

$$I_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot(-4)+0\cdot 1+0\cdot(-1) \\ 0\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 1 & 0\cdot(-4)+1\cdot 1+0\cdot(-1) \\ 0\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 1 & 0\cdot(-4)+0\cdot 1+1\cdot(-1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1+0+0 & -4+0+0 \\ 0+2+0 & 0+1+0 \\ 0+0+1 & 0+0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A.$$

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+(-4)\cdot 0 & 1\cdot 0+(-4)\cdot 1 \\ 2\cdot 1+1\cdot 0 & 2\cdot 0+1\cdot 1 \\ 1\cdot 1+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 0+(-1)\cdot 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-0 & 0-4 \\ 2+0 & 0+1 \\ 1-0 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A.$$

Portanto $I_3A = AI_2 = A$.

Observação:

- Os produtos AI_3 e I_2A não são possíveis, pois em $AI_3 = (A_{3\times 2}).(I_{3\times 3})$ o número de colunas de A é diferente do número de linhas de I.
- $I_2A = (I_{2\times 2})(A_{3\times 3})$ não é possível pois o número de colunas de I é diferente do número de linhas de A.

Sendo assim, nota-se que a validade da fórmula depende da **ordem** em que se multiplica a matriz dada pela matriz identidade.

2.11 Propriedades das operações com matrizes

2.11.1 Propriedades da adição de matrizes

Propriedades da adição de matrizes:

1. **Comutativa:** $A+B=B+A$

Demonstração. Sejam as matrizes:

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$ e$B=[b_{ij}]_{m\times n}$.

Tem-se:

$A+B=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}=[b_{ij}+a_{ij}]_{m\times n}=[b_{ij}]_{m\times n}+[a_{ij}]_{m\times n}=B+A$

□

Exemplo 30. Seja $A=\begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & -5\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ 0 & 4\end{bmatrix}$.

$$A+B=\begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 6\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-1 & -3+6\\ 2+0 & -5+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$B+A=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ 0 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+5 & 6-3\\ 0+2 & 4-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Portanto $A+B=B+A$.

2. **Associativa:** $(A+B)+C=A+(B+C)$

Demonstração. Sejam as matrizes:

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ e $C=[c_{ij}]_{m\times n}$.

Então:

$(A+B)+C=([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}]=([a_{ij}+b_{ij}]+c_{ij})=(a_{ij}+[b_{ij}+c_{ij}])=[a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}]=[a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}])=A+(B+C)$

□

Exemplo 31. Tem-se $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -4\end{bmatrix}$.

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}5 & 6\\ -1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5+0 & 6+(-1)\\ -1+1 & 2+(-4)\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 5\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+5 & 3+5\\ -1+0 & 4+(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 8\\ -1 & 2\end{bmatrix}.$$

$$(A+B)+C=\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 6\\ -1 & 2\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+5 & 3+6\\ -1+(-1) & 4+2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -4\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}6 & 9\\ -2 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6+0 & 9+(-1)\\ -2+1 & 6+(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6+0 & 9-1\\ -2+1 & 6-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 8\\ -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Portanto: $A+(B+C)=(A+B)+C$.

3. **Elemento Neutro:** $A+O=A$

   Demonstração. Considerando a matriz nula $O=[o_{ij}]_{m\times n}$, com $o_{ij}=0$, e a matriz $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, tem-se:

   $$A+O=[a_{ij}+o_{ij}]=[a_{ij}+0]=[a_{ij}]=A$$

   □

4. **Elemento oposto ou simétrico:** $A+(-A)=O$

   Para cada matriz A, existe uma matriz oposta B tal que $A+B=B+A=O$, sendo O a matriz nula.

   Demonstração. Seja $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ e defina $B=[-a_{ij}]_{m\times n}$. Tem-se

   $$A+B=[a_{ij}]_{m\times n}+[-a_{ij}]_{m\times n}=(a_{ij}+[-a_{ij}])_{m\times n}=[0]_{m\times n}=O$$

   □

   Denota-se a matriz $[-a_{ij}]_{m\times n}$ por $-A$. Dessa forma, $A+(-A)=O$.

2.11.2 Propriedades da multiplicação de matrizes

De acordo com Levorato (2017), para $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ e $B=[b_{jk}]_{n\times p}$ são válidas as propriedades:

1. **Associativa**

   Se $C=[c_{ks}]_{p\times q}$, então: $A(BC)=(AB)C$.

   Demonstração.

   $$A(BC)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{ks})=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{ij}b_{jk}c_{ks}$$

   $$(AB)C=\sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk})c_{ks}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}c_{ks}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{ij}b_{jk}c_{ks}$$

   □

2. **Distributiva:**

   • **À direita**

   Se $C = [c_{jk}]_{n\times p}$, então: $(A+B)C = AC+BC$.

   Demonstração.

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{jk})c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{jk}c_{jk} = AC+BC$$

$\square$

   • **À esquerda**

   Se $C = [c_{jk}]_{n\times p}$, então: $A(B+C) = AB+AC$.

   Demonstração.

$$A(B+C) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} = AB+AC$$

$\square$

3. **Elemento neutro**

$$I_m A = A$$

   Para esta propriedade, considera-se o que já foi abordado na subseção 2.10.3.

   Demonstração. Se $I = [\delta_{ij}]$ e $A = [a_{jk}]$:

$$I = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

$$I_m A = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij}a_{jk} = \delta_{i1}a_{1k} + \delta_{i2}a_{2k} + \cdots + \delta_{ii}a_{ik} + \cdots + \delta_{im}a_{mk} = a_{ik} = a_{jk} = A$$

   Logo, $I_m A = A$ $\square$

2.11.3 Propriedades da multiplicação por escalar

Propriedades

Sejam x e $y \in \mathbb{R}$, e $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ matrizes de mesma ordem. São válidas as seguintes propriedades:

1. **Propriedade 1**

   $x(yA) = (xy)A$

Demonstração. $x(yA) = x(y[a_{ij}]) = x(ya_{ij}) = (x[ya_{ij}]) = (xy)[a_{ij}] = (xy)A$ □

2. **Propriedade 2**

   $x(A+B) = xA + xB$

   Demonstração. $x(A+B) = x([a_{ij}] + [b_{ij}]) = (x[a_{ij}] + x[b_{ij}]) = xa_{ij} + xb_{ij} = xA + xB$ □

3. **Propriedade 3**

   $(x+y)A = xA + yA$

   Demonstração. $(x+y)A = (x+y)[a_{ij}] = (x[a_{ij}] + y[a_{ij}]) = xa_{ij} + ya_{ij} = xA + yA$ □

4. **Propriedade 4**

   $1A = A$

   Demonstração. $1A = 1[a_{ij}] = 1a_{ij} = a_{ij} = A$ □

5. **Propriedade 5**

   $-A = (-1)A$

   Demonstração. $-A = [-a_{ij}] = [(-1)[a_{ij}]] = (-1)[a_{ij}] = (-1)A$ □

2.11.4 Propriedades da Transposta

Propriedade 1: $(A^t)^t = A$

Demonstração. Sejam as matrizes: $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $A^t = [a'_{ij}]_{n\times m}$ e $(A^t)^t = [a''_{ij}]_{m\times n}$, tem-se que:

$$a''_{ij} = a'_{ji} = a_{ij}$$

□

Exemplo 32. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

Sua transposta será $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

A transposta da matriz transposta será: $(A^t)^t = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ e, portanto, constata-se que $(A^t)^t = A$.

Propriedade 2: $(A+B)^t = A^t + B^t$

Demonstração. Considerando $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, $A^t = [a'_{ji}]_{n\times m}$ e $B^t = [b'_{ji}]_{n\times m}$, tem-se:

$A+B = C \Rightarrow (A+B)^t = C^t$ Então:

$$c'_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = a'_{ji} + b'_{ji}$$

Logo, $C^t = A^t + B^t$. □

Exemplo 33. Dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 1+7 \\ 0+1 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$(A+B)^t = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$B^t = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$.

$A^t + B^t = \begin{bmatrix} 2+5 & 0+1 \\ 1+7 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

Portanto, $(A+B)^t = A^t + B^t$.

Propriedade 3: $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

Demonstração. $[(AB)^t]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} [A^t]_{kj}[B^t]_{ik} = \sum_{k=1}^{p} [B^t]_{ik}[A^t]_{kj} = [B^tA^t]_{ij}$ □

Observação: No produto AB, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Fazendo-se a transposta, o número de colunas de B passa a ser igual ao número de linhas de A, sendo possível apenas (na maioria das vezes) efetuar-se B^tA^t ao invés de A^tB^t.

Exemplo 34. Considera-se as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1)-1\cdot 3 & 1\cdot(-1)-1\cdot 4 \\ 0\cdot(-1)+2\cdot 3 & 0\cdot(-1)+2\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-3 & -1-4 \\ 0+6 & 0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

$(AB)^t = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$.

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$B^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$B^tA^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\cdot 1+3\cdot(-1) & -1\cdot 0+3\cdot 2 \\ -1\cdot 1+4\cdot(-1) & -1\cdot 0+4\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-3 & 0+6 \\ -1-4 & 0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Logo, $(AB)^t = B^t \cdot A^t$.

Propriedade 4: $(mA)^t = mA^t$

Demonstração. Considerando $(mA)^t = (a''_{ji})_{n\times m}$, tem-se:

$a''_{ji} = ma_{ij} = ma'_{ji}, \forall i, j \in \mathbb{N}^*$ □

Exemplo 35. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, mostre que $(2A)^t = 2A^t$.

A transposta será $A^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Multiplicando-se por 2 a transposta:

$$2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Considerando-se a matriz A multiplicada por 2, tem-se:

$$2\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Fazendo-se $(2A)^t = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

Portanto, $(2A)^t = 2A^t$.

2.12 Matrizes de bits (ou booleana)

De acordo com Kolman e Hill (2006), a expansão contínua da tecnologia da computação fez com que o uso da representação binária (base 2) da informação emergisse nos dias atuais. Cita também que na maioria das aplicações que existem no computador, tais como jogos, transferências de dinheiro em caixas eletrônicos, vídeos em DVD, músicas em CD, comunicações via satélite ou via fax, a matemática que está por baixo é invisível para quem usa ou observa, porém de extrema importância, pois os dados codificados em binários têm inúmeras aplicações.

Kolman e Hill (2006) fala da representação binária da informação, que utiliza apenas dois símbolos: 0 e 1, e a informação é codificada em 0 e 1 em uma sequência de bits. Pode-se usar como exemplo o número 5, que é representado como a sequência binária 101, interpretada na base 2 como:

$$5 = 1(2^2) + 0(2^1) + 1(2^0)$$

Logo, a representação binária de 5 é dada pela sequência de bits 101, que é determinada pelos coeficientes das potências de 2.

Da mesma forma que se pode realizar operações ao usar a base decimal quando se trata de números reais ou complexos, pode-se realizar também operações na base binária (aritmética binária) (KOLMAN; HILL, 2006).

As tabelas a seguir mostram a estrutura da adição e da multiplicação de binários, respectivamente.

Tabela 3 – Adição

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que $0+0=0$ e $1+1=0$. Desta forma, o inverso aditivo de 0 é 0 (como já ocorre comumente) e o inverso aditivo de 1 é 1. Assim, o cálculo da diferença das matrizes de bits A e B é dado por:

$$A - B = A + (\text{inversa de } 1)B = A + 1B = A + B$$

Tabela 4 – Multiplicação

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma matriz que possui todos os elementos cujo valor é 0 ou 1 é chamada de **matriz de bits**.

Uma matriz cuja ordem é $n \times 1$ ou $1 \times n$, formada por todos os elementos que são bits, é conhecida por **vetor de bits de dimensão** n (ou simplesmente vetor).

Exemplo 36. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz de bits 4×4.

Exemplo 37. A matriz $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é um vetor de bits de dimensão 5, que normalmente vem representado por letra minúscula $u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 38. (UNESP) Uma rede de comunicação tem cinco antenas que transmitem uma para outra, conforme mostrado na matriz $A = [a_{ij}]$, em que $a_{ij} = 1$ significa que a antena i transmite diretamente para a antena j, e $a_{ij} = 0$ significa que a antena i não transmite para a antena j.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual o significado do elemento b_{41} da matriz $B = A^2$?

Como $B = A^2 = A \cdot A$, faz-se a multiplicação da quarta linha de A pela primeira coluna de A:

$$b_{41} = a_{41} \cdot a_{11} + a_{42} \cdot a_{21} + a_{43} \cdot a_{31} + a_{44} \cdot a_{41} + a_{54} \cdot a_{51} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$

Significa que existem 3 maneiras distintas de a antena 4 transmitir informações para a antena 1, usando apenas uma única retransmissão entre elas. Assim:

- 4 transmite para a antena 2 e esta retransmite para a 1;
- 4 transmite para a antena 3 e esta retransmite para a 1;
- 4 transmite para a antena 5 e esta retransmite para a 1.

Exemplo 39 (Kolman e Hill (2006))**.** O 0 representa DESLIGADO, o 1 representa LIGADO e

$$A = \begin{bmatrix} LIGADO & LIGADO & DESLIGADO \\ DESLIGADO & LIGADO & DESLIGADO \\ DESLIGADO & LIGADO & LIGADO \end{bmatrix}.$$

Encontre a matriz B LIGADO/DESLIGADO tal que $A + B$ seja uma matriz em que todos os elementos sejam LIGADO.

Tem-se então a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. A matriz B pode ser escrita como: $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{bmatrix}$.

Então:

$$A+B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

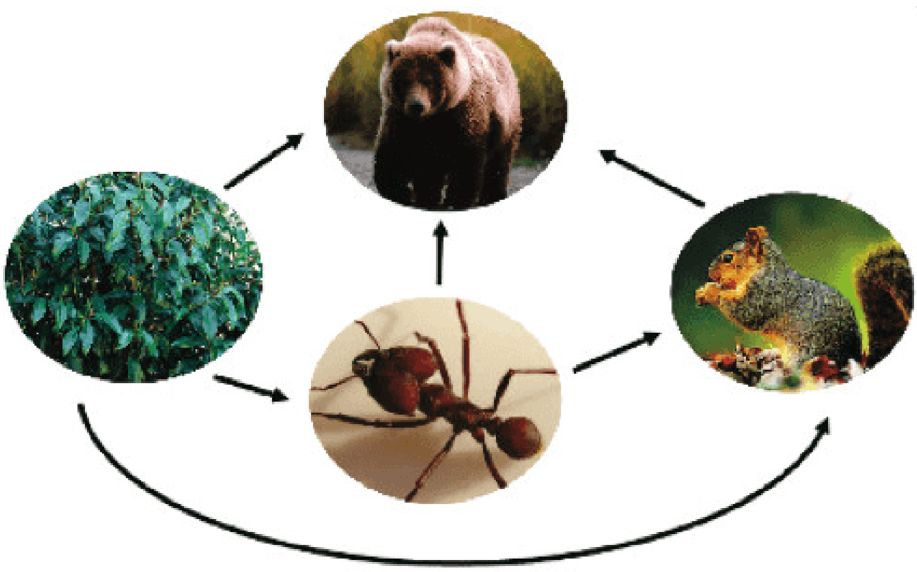
$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\x&y&z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Assim, os valores que B assume, para que $A+B$ seja uma matriz em que todos os elementos sejam LIGADO é:

$$B=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

Exemplo 40. (BALESTRI, 2016) usa um exemplo da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM-RS) para visualizar uma matriz a partir de um diagrama que representa a cadeia alimentar simplificada de um determinado ecossistema. A indicação da espécie de que a outra espécie se alimenta é feita por setas:

Figura 6 – Cadeia



Fonte:<https://www.stoodi.com.br/exercicios/ufsm/2011/>

Atribuindo-se valor 1 quando uma espécie se alimenta de outra, e 0 quando não se alimenta, tem-se a tabela:

Tabela 5 – Cadeia alimentar

	Urso	Esquilo	Inseto	Planta
Urso	0	1	1	1
Esquilo	0	0	1	1
Inseto	0	0	0	1
Planta	0	0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para resolver os exemplos a seguir, deve-se levar em consideração que as definições de adição e multiplicação por um escalar de matrizes também são utilizadas nas matrizes de bits com a condição de que se utilize sempre a base 2 para qualquer cálculo, inclusive para os escalares.

O cálculo para matrizes de bits ou vetores de bits com dimensão n pode ser feito facilmente, considerando-se o uso de tabelas em 2.12, nas quais se utiliza apenas os escalares 0 e 1, bem como definição e propriedades da adição de matrizes em 2.10.1.

Exemplo 41. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $A+B$.

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+0 \\ 0+1 & 1+1 \\ 0+1 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 42. Considerando-se $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcula-se $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ da seguinte forma:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1+0 \\ 1+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

CAPÍTULO

3

DETERMINANTES

3.1 História dos determinantes

O aparecimento dos determinantes se dá a partir da busca de solução para os sistemas lineares por uma série de matemáticos. Esse estudo de determinantes precedeu o estudo de matrizes, que foi feito por Cayley (FILHO; SILVA, 2003).

Em 1683 surgiam os primeiros trabalhos sobre determinantes, com um artigo do matemático japonês Seki Kowa (1642 – 1708). Kowa foi considerado o maior matemático japonês do século XVII.

Dez anos depois, na Europa, o alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) formalizou o conceito de determinantes, dando-lhes então uma notação escrita (BAUMGART, 1992).

Esses trabalhos, que surgiram quase na mesma época, tratavam de expressões matemáticas associadas aos coeficientes das incógnitas das equações que formam um sistema linear. Atualmente, pode-se dizer que essas expressões definem o determinante da matriz incompleta dos coeficientes de um sistema (BALESTRI, 2016).

A representação de determinante através de duas barras verticais paralelas ocorreu em 1841, por Cayley. Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) atribuiu o nome **determinante** ao conceito, além de reunir tudo sobre o assunto no ano de 1812, sendo considerado o trabalho mais completo (BAUMGART, 1992). Cauchy reprovou os resultados obtidos por outros matemáticos anteriormente, fornecendo resultados novos e precisos (FAGUNDES, 2013). Foi considerado a estrela da década de 1820.

Outros matemáticos contribuíram também com a teoria dos determinantes, entre eles: Alexandre Theóphile Vandermonde (1735 – 1796), Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), Gabriel Cramer (1704 – 1752), Étienne Bézout (1730 – 1783) e Josef Maria Wronski, que no século

XVIII deixaram publicações valiosas a respeito dos determinantes (BAUMGART, 1992).

No século XIX, a teoria dos determinantes teve um destaque maior, desenvolvendo-se com dois grandes matemáticos: Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 – 1851) e Cauchy, permitindo posteriormente a resolução de problemas em áreas diversas através do desenvolvimento de técnicas avançadas; a computação é um exemplo disso (BALESTRI, 2016).

3.2 Permutação

Seja $P = \{1,2,3,\cdots,n\}$ o conjunto de todos os números inteiros que vão de 1 a n, postos em ordem crescente. Uma reordenação $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$ dos elementos de P recebe o nome de permutação de P (KOLMAN; HILL, 2006).

Qualquer um dos n elementos de P podem ser colocados na primeira posição, qualquer um dos outros $n-1$ elementos de P na segunda posição, qualquer um dos outros $n-2$ elementos de P na terceira posição, e assim sucessivamente, até chegar na n-ésima posição, que pode ser preenchida pelo último elemento restante Kolman e Hill (2006). Assim, P tem $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$ permutações. Representa-se o conjunto de todas as permutações de P por P_n.

Então, tem-se, por exemplo:

$P_1 = 1! = 1$
$P_2 = 2! = 2\cdot 1 = 2$
$P_3 = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$
$P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$
$P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$
$P_6 = 6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$

Significa que P_1 consiste em apenas uma permutação do conjunto $\{1\}$, isto é, 1; P_2 tem duas permutações do conjunto $\{1,2\}$, ou seja, 12 e 21; P_3 possui 6 permutações do conjunto $\{1,2,3\}$: 123, 132, 231, 213, 312 e 321.

Pode-se dizer que uma permutação $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$ de $P = \{1,2,3,\cdots,n\}$ terá uma inversão se um inteiro j_m precede um outro inteiro menor j_n. Uma permutação recebe o nome de par ou ímpar dependendo do número total de inversões ser também par ou ímpar. Desta forma, em P_3, por exemplo:

- As permutações pares são: 123 (não possui inversão), 231 (duas inversões: 21 e 31) e 312 (duas inversões: 31 e 32);

- As permutações ímpares são: 321 (três inversões: 32, 31 e 21), 132 (uma inversão: 32) e 213 (uma inversão: 21).

3.3 Determinantes

Determinante é um número associado a uma matriz quadrada.

Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. O determinante de A, indicado por $\det A$, ou $\left|A\right|$, é assim definido:

$$\det A = \left|A\right| = \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

Na fórmula, o somatório varia por todas as permutações $j_1j_2j_3\cdots j_n$ do conjunto $P = \{1,2,3,\cdots,n\}$. O sinal depende da permutação $j_1j_2j_3\cdots j_n$: é positivo $(+)$ quando par, e é negativo $(-)$ quando ímpar.

Em cada termo $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ do $\det A$, os índices das linhas estão em sua ordem natural, já os índices das colunas estão na ordem $j_1j_2j_3\cdots j_n$, que é a reordenação de 1 a n e, portanto, não tem repetição. Logo, cada termo do $\det A$ é um produto de n elementos de A, cada um com seu sinal. A soma que define o $\det A$ tem $n!$ termos, pois soma-se todas as permutações do conjunto $P = \{1,2,3,\cdots,n\}$

Se $A = [a_{ij}]_{1\times 1}$, então P_1 tem apenas uma permutação par (permutação identidade 1).

Então:

$$\det A = \left|a_{11}\right| = a_{11}$$

Exemplo 43. $A = \begin{bmatrix}-1\end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \left|-1\right| = -1$

Caso A seja uma matriz 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

O seu determinante é obtido a partir dos termos:

$$a_{1-}a_{2-} \quad \text{e} \quad a_{1-}a_{2-}$$

Os espaços vazios são preenchidos com todos os elementos possíveis de P_2; os índices se tornam 12 e 21. Como 12 é uma permutação par, então o sinal $(+)$ é associado a $a_{11}a_{22}$; sendo 21 uma permutação ímpar, o sinal $(-)$ é associado a $a_{12}a_{21}$. Por isso:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo 44. Dada a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, então:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot(-1) = 4+2 = 6$$

Logo, $\det B = 6$.

Se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

é uma matriz 3×3, então, para calcular o seu determinante, escreve-se:

$$a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\ , a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\ , a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\ , a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\ , a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\ \text{ e }\ a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$$

Com todos os elementos de P_3, preenchem-se os espaços. Coloca-se o sinal $(+)$ quando a permutação for par e $(-)$ quando a permutação for ímpar:

$$\det A = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

O cálculo do determinante da matriz A será feito através da regra de Sarrus, procedendo-se da seguinte forma:

1. Reescreve-se a matriz A e repete-se a primeira e a segunda coluna à direita de A:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

   Observação: A regra de Sarrus pode ser aplicada reescrevendo-se a matriz A e repetindo-se a segunda e a terceira coluna à esquerda de A, nesta ordem.

2. Multiplica-se os três elementos da diagonal principal de A. Seguindo-se a mesma direção da diagonal principal, multiplica-se separadamente os três elementos das outras duas diagonais.

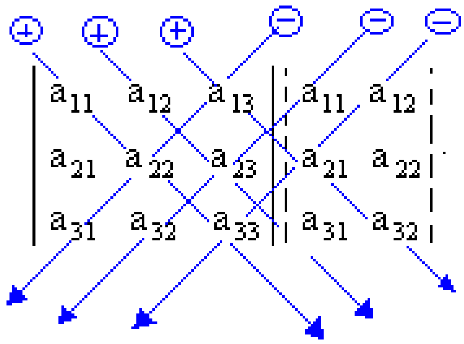
3. Multiplica-se os três elementos da diagonal secundária de A, trocando-se o sinal do produto. Seguindo-se a mesma direção da diagonal secundária, multiplica-se separadamente os três elementos das outras duas diagonais, trocando-se também o sinal do produto obtido.

4. Soma-se todos os resultados obtidos nos itens 2 e 3, encontrando o determinante da matriz A. Ou seja:

   $\det A = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$.

Convém lembrar que os métodos fornecidos até aqui não se aplicam para matrizes com ordem superior ou igual a 4.

Figura 7 – Regra de Sarrus



$$= -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

Fonte:<https://www.somatematica.com.br/emedio/determinantes/determinantes3.php>

Exemplo 45. (Apostila Objetivo: UNESP - adaptado - modelo ENEM) Foi realizada uma pesquisa, num bairro de determinada cidade, com um grupo de 500 crianças de 3 a 12 anos de idade. Para esse grupo, em função da idade x da criança, concluiu-se que o peso médio $p(x)$, em quilogramas, era dado pelo determinante da matriz A, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -x \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Com base na fórmula $p(x) = \det A$, podemos concluir que o peso médio de uma criança de 5 anos é, em kg, igual a:

a) 18

b) 19

c) 20

d) 21

e) 22

Resolução:

$$p(x) = \det A = 1 \cdot 0 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot (-x) - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-x) \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot \frac{2}{3} =$$

$$0 + 6 + 0 - 0 + 2x + 2 = 2x + 8.$$

Para $x = 5$, tem-se: $p(5) = 2 \cdot 5 + 8 = 18$

Logo, a primeira alternativa é a correta.

Exemplo 46. Calcule o determinante da matriz de bits 3×3:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$\det A = 1\cdot1\cdot1+0\cdot0\cdot0+1\cdot1\cdot1-1\cdot0\cdot1-1\cdot0\cdot1-0\cdot1\cdot1 = 1+0+1-0-0-0 = 1+1 = 0$$

Propriedades dos determinantes

Propriedade 1: Uma matriz quadrada A e sua transposta (A^t) têm os determinantes iguais. Logo:

$$\det A = detA^t$$

Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{bmatrix}$ e sua transposta $A^t = \begin{bmatrix} a & x & r \\ b & y & s \\ c & z & t \end{bmatrix}$.

Calculando-se os determinantes:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = csx + brz + aty - btx - asz - cry$$

$$\det A^t = \begin{vmatrix} a & x & r \\ b & y & s \\ c & z & t \end{vmatrix} = brz + csx + aty - btx - asz - cry$$

E, portanto, conclui-se que: $\det A = \det A^t$.

Propriedade 2: Se a matriz C é obtida da matriz A quando se troca a posição de duas linhas (ou colunas) de A, tem-se:

$$\det C = -\det A$$

Considera-se a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. O seu determinante será:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Trocando-se as duas colunas de A, por exemplo, obtém-se a matriz $C = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$, cujo determinante será:

$$\det C = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad.$$

Então: $\det C = bc - ad = -ad + bc = -(ad - bc) = -\det A$.

Propriedade 3: Se duas filas paralelas são iguais, o determinante será nulo. Isto é, quando os elementos correspondentes de duas linhas (ou duas colunas) forem iguais:

$$\det A = 0$$

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}$, na qual a primeira linha é igual à terceira.

$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = bcd + abf + ace - bcd - abf - ace = 0.$

Logo, $\det A = 0$.

Propriedade 4: O Determinante de uma matriz A é nulo ($\det A = 0$), quando uma fila de A é nula.

Considera-se a matriz genérica A, de ordem n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Seja a m-ésima linha de A nula. Como cada termo na definição do determinante de A contém um fator da m-ésima linha, cada termo do determinante de A é nulo. Logo, $\det A = 0$.

Propriedade 5: Multiplica-se uma fila da matriz A por um número real m, obtendo-se uma nova matriz B, cujo determinante será $m \det A$. Então:

$$\det B = m \det A$$

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$. O seu determinante é:

$$\det A = ae - bd$$

Multiplicando-se a primeira linha de A pelo número real m, obtém-se a matriz $B = \begin{bmatrix} ma & mb \\ d & e \end{bmatrix}$, então:

$$\det B = mae - mbd = m(ae - bd) = m \det A$$

Multiplicando-se esta matriz (todos os elementos) por um número real k, tem-se cada elemento de A multiplicado por k. Desta forma, o seu determinante ficará multiplicado por k^n, ou seja:

$$\det(kA_n) = k^n \det A$$

Então:

- ao multiplicar por um número real uma linha: o determinante de A fica multiplicado por k, ou seja, $k \det A$;

- ao multiplicar por um número real duas linhas: o determinante de A fica multiplicado por $k \cdot k = k^2$, ou seja, $k \cdot k \cdot \det A = k^2 \det A$;

- ao multiplicar por um número real n linhas: o determinante de A fica multiplicado por $k \cdot k \cdot k \cdots k = k^n$, ou seja $k^n \det A$.

Exemplo 47. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então $\det A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$.

Fazendo-se $4A = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$, então $\det(4A) = 4 \cdot 16 - 12 \cdot 8 = 64 - 96 = -32$.

Como $\det(kA_n) = k^n \det A = 4^2.(-2) = 16 \cdot (-2) = -32$.

Propriedade 6: Se a matriz $A = [a_{ij}]$ é triangular (superior ou inferior) então o seu determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal principal:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$$

.

Na matriz identidade de ordem n (I_n), o determinante será:

$$\det(I_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

Observação: O determinante da matriz diagonal será o produto dos elementos da sua diagonal principal.

Propriedade 7: O determinante da multiplicação de duas matrizes quadradas e de mesma ordem, $\det(AB)$, é igual ao produto do determinante da matriz A pelo determinante da matriz B.

Considerando-se matrizes quadradas de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & x \\ b & y \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} z & w \\ c & d \end{bmatrix}$$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & x \\ b & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z & w \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az+xc & aw+xd \\ bz+yc & bw+yd \end{bmatrix}$.

$\det(AB) = \begin{vmatrix} az+xc & aw+xd \\ bz+yc & bw+yd \end{vmatrix} = (az+xc)\cdot(bw+yd) - [(aw+xd)\cdot(bz+yc)] = azbw + azyd + xcbw + xcyd - [awbz + awyc + xdbz + xdyc] = azbw + azyd + xcbw + xcyd - awbz - awyc - xdbz - xdyc = adyz + bcxw - acyw - bdxz.$

$\det A = \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = ay - bx.$

$\det B = \begin{vmatrix} z & w \\ c & d \end{vmatrix} = zd - cw.$

$\det A \cdot \det B = (ay-bx)\cdot(zd-cw) = adyz - acyw - bdxz + bcxw = adyz + bcxw - acyw - bdxz.$

Comparando-se então, nota-se que $\det(AB) = \det A \det B$.

Considerando-se as matrizes de mesma ordem, $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times m}$, não se pode afirmar que $\det(A+B) = \det A + \det B$ sempre será válido.

Para as matrizes A e B, de ordem 2, por exemplo, tem-se:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$.

$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$.

$\det(A+B) = \begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{vmatrix} = (a+e)\cdot(d+h) - [(c+g)\cdot(b+f)] = ad + ah + ed + eh - [cb + cf + gb + gf] = ad + ah + ed + eh - cb - cf - gb - gf.$

$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

$\det B = \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = eh - fg.$

$\det A + \det B = ad - bc + eh - fg.$

Portanto, $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

Considerando-se duas matrizes de ordens distintas, A e B, há ainda a possibilidade da existência de $\det(AB)$ mesmo quando não existir $\det A$ ou $\det B$.

Exemplo 48. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$.

O determinante de ambas não é possível, tendo em vista que não são matrizes quadradas. Os produtos AB e BA são possíveis e resultam em matrizes quadradas de ordens 2 e 1, respectivamente. Sendo assim:

$$AB = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{bmatrix}.$$

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix} = abcd - abcd = 0.$$

$$BA = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac + bd \end{bmatrix}.$$

$$\det(BA) = \begin{vmatrix} ac + bd \end{vmatrix} = ac + bd.$$

Propriedade 8: O determinante será nulo quando uma matriz possuir duas linhas (ou duas colunas) paralelas proporcionais.

Considerando-se $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ na & nb & nc \end{bmatrix}$, pode-se observar que a terceira linha é proveniente da multiplicação da primeira linha por n. Logo, os elementos da primeira e da terceira linha são proporcionais. Então:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ na & nb & nc \end{vmatrix} = bcdn + abfn + acen - bcdn - abfn - acen = 0.$$

Propriedade 9: Teorema de Jacobi

Se a matriz $B = [b_{ij}]$ é obtida da matriz $A = [a_{ij}]$ pela adição a cada elemento da m-ésima linha (coluna) de A de uma constante k vezes o elemento correspondente da p-ésima linha (coluna) de A, sendo $m \neq p$, então:

$$\det B = \det A$$

Considera-se a matriz de ordem 2, $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. O determinante da matriz A será:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

A partir da matriz A, multiplicando-se a primeira coluna por k e adicionando-se o resultado à segunda coluna, obtém-se a matriz B:

$B = \begin{bmatrix} a & ka+c \\ b & kb+d \end{bmatrix}$, cujo determinante será:

$\det B = \begin{vmatrix} a & ka+c \\ b & kb+d \end{vmatrix} = a(kb+d) - b(ka+c) = kab + ad - kab - bc = ad - bc = \det A.$

Então: $\det B = \det A$.

3.4 Cálculo do determinante de matriz de ordem n

Considerando-se uma matriz quadrada de ordem n, sendo $n \in \mathbb{N}^*$, o cálculo do determinante é geralmente feito quando se reduz a ordem. Então, pode-se calcular o determinante de uma matriz de ordem n a partir de uma matriz com ordem $n-1$, sem alterar o valor do determinante. Com determinantes de ordem menor, o cálculo fica mais simples e, por exemplo, pode-se calcular a partir de uma matriz de ordem 3 um determinante de ordem 4. Trata-se de uma recorrência: para se calcular um determinante de ordem n, recorre-se aos de ordem $n-1$.

3.4.1 Cálculo do menor complementar

Considera-se uma matriz A quadrada, de ordem n, $n \geqslant 2$ e representada por $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, onde a_{ij} é um elemento de A. O menor complementar de A pelo elemento a_{ij} é o determinante D_{ij} que é um número associad à matriz quadrada proveniente de A, excluindo a linha e a coluna na qual está este elemento a_{ij}. Então, na matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Escolhendo-se o elemento a_{22}, o menor complementar da matriz A por este elemento a_{22} é representado por:

$$D_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemplo 49. Considerando-se a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, tem-se:

- Pelo elemento a_{11}, o menor complementar de A será:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 4 + 1 = 5$$

- Pelo elemento a_{21}, o menor complementar de A será:

$$D_{21} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 2 - 0 \cdot (-1) = -8 + 0 = -8$$

- Pelo elemento a_{31}, o menor complementar de A será:

$$D_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = -4 - 0 = -4$$

- Pelo elemento a_{12}, o menor complementar de A será:

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 6 - 5 = 1$$

- Pelo elemento a_{22}, o menor complementar de A será:

$$D_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 - 5 \cdot 0 = -2 - 0 = -2$$

- Pelo elemento a_{32}, o menor complementar de A será:

$$D_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = -1 - 0 = -1$$

- Pelo elemento a_{13}, o menor complementar de A será:

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -3 - 10 = -13$$

- Pelo elemento a_{23}, o menor complementar de A será:

$$D_{23} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 5 \cdot (-4) = 1 + 20 = 21$$

- Pelo elemento a_{33}, o menor complementar de A será:

$$D_{33} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 - 3 \cdot (-4) = -2 + 12 = 10$$

3.4.2 Cofator

Definição 1. Sendo $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz quadrada de ordem n ($n \geqslant 2$) e a_{ij} um elemento da matriz A, o cofator de a_{ij} é um número real obtido quando se multiplica $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar D_{ij} de a_{ij}, que se representa por A_{ij}. Portanto:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Considerando-se a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$. Para encontrar o cofator A_{11}, faz-se:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Exemplo 50. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$, tem-se:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = 5 - 0 = 5.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [(-5) \cdot 2 - 2 \cdot 3] = -1 \cdot [-10 - 6] = -1 \cdot [-16] = 16.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) = 0 + 3 = 3.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [4 \cdot (-5) - 2 \cdot 0] = (-1) \cdot [-20 - 0] = (-1) \cdot [-20] = 20.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-5) - 2 \cdot 3 = 5 - 6 = -1.$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)[(-1) \cdot 0 - 4 \cdot 3] = (-1)[0 - 12] = (-1)[-12] = 12.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 8 + 2 = 10.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)[(-1) \cdot 2 - 2 \cdot 2] = (-1)[-2 - 4] = (-1)[-6] = 6.$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 4 = 1 - 8 = -7.$$

3.5 Teorema de Laplace

Considerando-se uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ e $j = 1, 2, 3, \cdots, n$, e escolhendo-se qualquer fila desta matriz, o cálculo do determinante será obtido a partir da soma dos produtos de todos os elementos da fila pelos seus respectivos cofatores.

Exemplo 51. Seja a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Escolhendo-se a terceira linha e calculando seus cofatores, tem-se:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)] = 1 \cdot [1+3] = 1 \cdot 4 = 4$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [(-1) \cdot 1 - 0 \cdot 3] = (-1) \cdot [-1-0] = (-1) \cdot [-1] = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot [(-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 0] = 1 \cdot [1-0] = 1 \cdot 1 = 1$$

Multiplicando-se então os elementos da linha escolhida pelos seus respectivos cofatores:

$a_{31} \cdot A_{31} = 2 \cdot 4 = 8.$

$a_{32} \cdot A_{32} = 0 \cdot 1 = 0.$

$a_{33} \cdot A_{33} = 1 \cdot 1 = 1.$

O determinante será dado por:

$\det A = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} = 8 + 0 + 1 = 9$

Portanto: $\det A = 9$.

Observação: Se na matriz existir um elemento cujo valor é zero, recomenda-se escolher a fila na qual este elemento está (de preferência, a fila que contenha o maior número de zeros). Isto facilitará o cálculo do determinante e a conta ficará menor.

3.6 Regra de Chió

O cálculo dos determinantes de matrizes de ordem n pode ser feito pela regra de Chió, utilizando uma matriz de ordem $n-1$. Se o elemento a_{11} da matriz é igual a 1, essa regra se torna muito prática.

Procedimentos:

1. a) Se $a_{11} = 1$, elimina-se a primeira linha e a primeira coluna da matriz de ordem n:

$a_{11} = 1$	a_{12}	a_{13}	$\cdots$	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\cdots$	a_{2n}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\cdots$	a_{3n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	$\cdots$	a_{nn}

b) Nesta mesma matriz, é subtraído de cada elemento o produto dos dois elementos que foram excluídos, na mesma linha e coluna na qual se encontra o elemento. Pode-se esquematizar assim:

1	a_{12}	a_{13}	$\cdots$	a_{1n}
a_{21}	$a_{22}-a_{21}a_{12}$	$a_{23}-a_{21}a_{13}$	$\cdots$	$a_{2n}-a_{21}a_{1n}$
a_{31}	$a_{32}-a_{31}a_{12}$	$a_{33}-a_{31}a_{13}$	$\cdots$	$a_{3n}-a_{31}a_{1n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_{n1}	$a_{n2}-a_{n1}a_{12}$	$a_{n3}-a_{n1}a_{13}$	$\cdots$	$a_{nn}-a_{n1}a_{1n}$

c) Obtém-se então uma matriz A' de ordem $n-1$ com o resultado do procedimento anterior, que possui o mesmo determinante da matriz de ordem n.

$a_{22}-a_{21}a_{12}$	$a_{23}-a_{21}a_{13}$	$\cdots$	$a_{2n}-a_{21}a_{1n}$
$a_{32}-a_{31}a_{12}$	$a_{33}-a_{31}a_{13}$	$\cdots$	$a_{3n}-a_{31}a_{1n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_{n2}-a_{n1}a_{12}$	$a_{n3}-a_{n1}a_{13}$	$\cdots$	$a_{nn}-a_{n1}a_{1n}$

2. Aplica-se também a regra de Chió, nos casos em que $a_{11} \neq 1$:

a) O elemento a_{11} é diferente de 1, mas existe o elemento 1 na matriz, que pode ter sua posição alterada, trocando-se duas linhas ou duas colunas, obtendo-se uma matriz equivalente.

Exemplo 52. Neste exemplo, trocando-se a terceira linha com a primeira e, em seguida a segunda coluna com a primeira:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Caso o elemento a_{11} seja diferente de 1 e não existe nenhum elemento com valor igual a 1 na matriz, pode-se aplicar o teorema de Jacobi, de modo que apareça algum elemento cujo valor é 1.

Exemplo 53. Neste exemplo, faz-se a primeira linha menos a segunda, modificando a primeira.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 7 \\ -1 & 4 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 7 \\ -1 & 4 & 9 & 6 \end{vmatrix}.$$

c) Se $a_{11} \neq 1$, pode-se colocar um número em evidência, caso seja possível.

Exemplo 54. $\begin{vmatrix} 2 & 10 & 20 & 8 \\ 7 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 7 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 & 4 \\ 7 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 7 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$

No exemplo a seguir, será calculado o determinante de ordem 4:

Exemplo 55. Considerando-se a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Como o elemento $a_{11} = 1$, pode-se aplicar a regra de Chió e calcular então o determinante da matriz A:

Montando-se uma tabela, tem-se:

1	4	2	0
0	3	2	-1
2	-1	-5	3
1	3	1	4

Eliminando-se todos os elementos da primeira linha e primeira coluna da tabela, calcula-se:

$$\begin{vmatrix} 3-0\cdot 4 & 2-0\cdot 2 & -1-0\cdot 0 \\ -1-2\cdot 4 & -5-2\cdot 2 & 3-2\cdot 0 \\ 3-1\cdot 4 & 1-1\cdot 2 & 4-1\cdot 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-0 & 2-0 & -1-0 \\ -1-8 & -5-4 & 3-0 \\ 3-4 & 1-2 & 4-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -9 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Por Chió, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ terá o mesmo determinante da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -9 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Concluindo-se, pela Regra de Sarrus:

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -9 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot(-9) + 2\cdot 3\cdot(-1) + 3\cdot(-9)\cdot 4 - 4\cdot(-9)\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot (-1) - (-1)\cdot(-9)\cdot(-1) = -9 - 6 - 108 + 72 + 9 + 9 = -33.$

Logo, o determinante é -33.

3.7 Matriz de Vandermonde

É toda matriz quadrada de ordem $n \geqslant 2$, que tem a forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & \cdots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Cada coluna é composta por potências de mesma base, com expoentes inteiros, variando de 0 a $n-1$.

O determinante desta matriz é dado por:

$$\det A = (a_2-a_1)\cdot(a_3-a_2)\cdot(a_3-a_1)\cdot(a_4-a_3)\cdot(a_4-a_2)\cdot(a_4-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})\cdots(a_n-a_1)$$

Exemplo 56. Calcular o determinante da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$.

A matriz B pode ser escrita assim: $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^1 & 3^1 & 4^1 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{bmatrix}$.

Essa matriz é uma matriz de Vandermonde, com $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ e $a_3 = 4$.

Logo: $\det B = (a_2-a_1)\cdot(a_3-a_1)\cdot(a_3-a_2) = (3-2)\cdot(4-2)\cdot(4-3) = 1\cdot 2\cdot 1 = 2$

3.8 Determinante de matriz complexa

Para o cálculo do determinante de uma matriz complexa, a definição e todas as propriedades dos determinantes são válidas.

Exemplo 57. Dada a matriz $B = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 5+2i & 1-i \end{bmatrix}$, o determinante será:

$\det B = \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 5+2i & 1-i \end{vmatrix} = (1+i)\cdot(1-i) - [(5+2i)\cdot(1-i)] = 1^2 - i^2 - [5-5i+2i-2i^2] = 1-(-1)-[5-3i-2\cdot(-1)] = 1+1-[5-3i+2] = 2-[7-3i] = 2-7+3i = -5+3i.$

CAPÍTULO

4

SISTEMAS LINEARES

4.1 Contexto histórico

A solução simultânea de um conjunto de equações é um problema fundamental na descrição matemática de alguns fenômenos, que ocorre com frequência. Explicando numa linguagem matemática, esses fenômenos são expostos por um conjunto com m equações em que se aspira encontrar a solução de n incógnitas (FILHO, 2013).

Filho (2013) afirma que era comum os chineses usarem barras de bambu para escrever seus coeficientes e representarem os sistemas lineares sobre os quadrados de um tabuleiro. Surge daí o método de resolução por eliminação que, por meio de operações elementares, anulam-se coeficientes. Exemplos assim são encontrados no Chiu Chang Suan-Shu.

O Chiu Chang Suan-Shu ou Nove Capítulos sobre a Arte Matemática (ou simplesmente Nove Capítulos), composto por volta de 250 a.C., e possivelmente o mais influente livro de matemática chinês, contém 246 problemas sobre assuntos matemáticos diversos como propriedades dos triângulos retângulos, agricultura, impostos, solução de equações (BOYER, 2010).

Os chineses procediam da mesma maneira que os babilônios, reunindo coleções que continham problemas específicos. O capítulo 8 do Nove Capítulos é expressivo porque contém a solução de problemas sobre equações lineares, na qual são usados números positivos e negativos. O último problema deste capítulo reúne quatro equações em cinco incógnitas, e assim, trabalhar com equações indeterminadas seria um dos tópicos preferidos pelos orientais (BOYER, 2010).

Segundo Boyer (2010), era comum os chineses terem o gosto por diagramas, explicando então o fato de que o primeiro registro, de origem antiga porém desconhecida, é de um quadrado mágico:

Figura 8 – Quadrado mágico chinês

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: Elaborada pelo autor.

A preocupação com os diagramas fez com que o autor dos Nove Capítulos resolvesse o sistema de equações lineares simultâneas:

$$3x+2y+z=39$$

$$2x+3y+z=34$$

$$x+2y+3z=26$$

Ao efetuar operações sobre as colunas na matriz $\begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \\ \hline\end{array}$ para ser reduzida a $\begin{array}{|ccc|}\hline 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \\ \hline\end{array}$, representando então as equações:

$$36z=99$$

$$5y+z=24$$

$$3x+2y+z=39$$

A partir daí, calcula-se os valores de z, y e x, nesta ordem.

Ainda de acordo com Boyer (2010), Leibniz através de cartas, em 1693, revelou a Guillaume de L'Hospital (1661 − 1704) que ocasionalmente usava números indicando linhas e colunas, formando um conjunto de equações simultâneas. Essa carta foi publicada somente em 1850.

Esse estudo evoluiu, com a colaboração de diversos matemáticos, como Gabriel Cramer ao resolver um sistema de equações num caso específico. Esse trabalho obteve um aprofundamento com Jacobi (FILHO; SILVA, 2003).

Carl Friedrich Gauss (1777 − 1855) criou um método sistemático e eficaz para resolver sistemas lineares, a eliminação Gaussiana, que consiste em aplicar operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada do sistema, sem alterar o conjunto solução. De fato, o sistema linear que corresponde com a forma escalonada por linhas, possuirá as mesmas soluções do sistema inicialmente utilizado (FAGUNDES, 2013).

De acordo com Fagundes (2013), uma versão desse método já havia aparecido no livro chinês Nove Capítulos, todavia só foi reconhecido quando Gauss calculou a órbita do asteróide Ceres; popularizou-se mais tarde pelo alemão Wilhelm Jordan no Handbuch der Vermessungskunde, livro publicado em 1888.

Depois das teorias de Gauss, Cauchy e Jacobi, numerosos matemáticos aprofundaram ainda mais os estudos a respeito dos sistemas lineares, ampliando-se em larga escala o conhecimento que se tem sobre o assunto até agora. Os sistemas lineares são utilizados em diversas áreas atualmente, tornando-se um conteúdo extremamente relevante a ser abordado em todas elas, além, é claro, da sua significativa importância na matemática (PEDRINI, 2013).

Na resolução de problemas, com equações que envolvam muitas incógnitas, a aplicação de sistemas lineares é fundamental. É comum o uso dos sistemas lineares na distribuição de energia elétrica, na logística de transporte em uma determinada região e no gerenciamento de linhas de telecomunicações (DANTE, 2014).

4.2 Aplicações práticas

Exemplo 58. Iezzi *et al.* (2016) faz referência a um problema rotineiro: Augusto foi sacar dinheiro num caixa eletrônico que só dispunha de cédulas de $R\$10,00$ e de $R\$20,00$. Ele precisava de $R\$90,00$. Como pode ser feita essa distribuição das cédulas, a fim de totalizar $R\$90,00$? Representando por x o número de cédulas de $R\$10,00$ e por y o a quantidade de cédulas de $R\$20,00$, deve-se determinar os possíveis valores de x e de y tal que:

$$10x + 20y = 90$$

A equação obtida recebe o nome de equação linear.

Exemplo 59. (FGV - modificado) As livrarias A, B, C e D de uma cidade vendem livros de matemática do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, de uma coleção, com preço comum estabelecido pela editora. Os dados das vendas diárias são as seguintes:

Tabela 6 – Vendas de livros

Livraria	Número de livros vendidos 6º ano	7º ano	8º ano	9º ano	Valor total recebido (*R*\$)
A	2	2	3	2	563,10
B	2	1	2	4	566,10
C	0	5	0	0	304,50
D	3	2	5	1	687,90

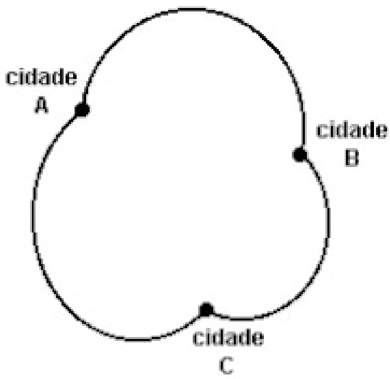
Fonte: Elaborada pelo autor.

Qual o preço de venda de cada um dos livros da coleção? Para responder a essa pergunta, utiliza-se um sistema linear. Considerando que x, y, z e w são os valores do livro do 6º ano, 7º ano, 8º ano e 9º ano, respectivamente, monta-se o sistema:

$$\begin{cases} 2x+2y+3z+2w=563,10 \\ 2x+y+2z+4w=566,10 \\ 5y=304,50 \\ 3x+2y+5z+w=687,90 \end{cases}$$

Exemplo 60. Mais um exemplo de problema que pode ser resolvido com um sistema: as ligações entre as cidades A, B e C figuram num mapa rodoviário conforme ilustrado abaixo. Seguindo esse mapa, uma pessoa que se deslocar de A para C, passando por B, percorrerá 450 km. Caso a pessoa se desloque de A para B, passando por C, o percurso será de 600 km. Para se deslocar de B para C, passando por A, a pessoa vai percorrer 800 km. Quantos quilômetros esta pessoa percorrerá ao se deslocar de A para B, sem passar por C?

Figura 9 – Ligação entre as cidades



Fonte:<http://professor.bio.br/matematica/provas_questoes.asp?section=sistemas-lineares&curpage=13>

Exemplo 61. (UFPE - modelo ENEM) Perguntado sobre a idade de seu filho Júnior, José respondeu o seguinte: “Minha idade quando somada à idade de Júnior é igual a 47 anos; e quando somada à idade de Maria é igual a 78 anos. As idades de Maria e Júnior somam 39 anos.” Qual a idade de Júnior?

a) 2 anos

b) 3 anos

c) 4 anos

d) 5 anos

e) 10 anos

Resolução: Considere

x: idade de José;

y: idade de Júnior;

z: idade de Maria.

Então:

$$\begin{cases} x+y=47 \\ x+z=78 \\ y+z=39 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot0\cdot1+1\cdot1\cdot0+0\cdot1\cdot1-1\cdot1\cdot1-1\cdot1\cdot1-0\cdot0\cdot0=0+0+0-1-1-0=-2$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 47 & 0 \\ 1 & 78 & 1 \\ 0 & 39 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot78\cdot1+47\cdot1\cdot0+0\cdot1\cdot39-47\cdot1\cdot1-39\cdot1\cdot1-0\cdot78\cdot0=$$
$78+0+0-47-39-0=-8$

Dessa forma: $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-8}{-2}=4$

Resposta: C.

4.3 Equação linear

Inúmeros problemas trabalham com equações que fazem relação entre dois conjuntos de variáveis. Sendo assim, uma equação do tipo $ax=b$, que expressa a variável b em função da variável x e da constante a, recebe o nome de equação linear, pois o gráfico desta equação é uma linha reta.

Analogamente, toda sentença aberta do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

é uma equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$, em que $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são números reais chamados coeficientes das incógnitas, e b, também real, o coeficiente (ou termo) independente da equação, em função das variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e das constantes conhecidas $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

No caso particular em que $b = 0$, a equação é chamada equação linear homogênea.

Uma solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n$ é a $n-upla$ de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ que, ao se substituir em $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, respectivamente, torna a igualdade verdadeira:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots + a_n\alpha_n = b$$

4.4 Sistema linear

Sistema linear $m \times n$, sendo $m \geqslant 1$ e $n \geqslant 1$, é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas. A $n-upla$ $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é uma solução de um sistema linear $m \times n$ caso seja solução de todas as equações do sistema. O conjunto solução contém todas as soluções de um sistema linear (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 1990).

Um sistema linear se apresenta assim:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

No caso das equações de um sistema linear serem homogêneas, tem-se então um sistema linear homogêneo no qual a $n-upla$ $(0, 0, 0, \cdots, 0)$ é uma das soluções e denomina-se solução nula ou trivial.

Exemplo 62. Os sistemas

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x - y = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 8x - 2y + 2z = 6 \\ 4x + 2y + 6z = 14 \end{cases}$$

são lineares, pois contém apenas equações do primeiro grau.

Exemplo 63. Os sistemas

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y = 2 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^{-1} + y = 2 \\ x^2 + y = 7 \end{cases}$$

não são lineares pois, em cada um, nem todas as equações são lineares, pois aparece x^2 e x^{-1}.

Exemplo 64. O par ordenado $(2,1)$ é solução do sistema $\begin{cases} x+3y=5 \\ x+y=3 \end{cases}$, pois, substituindo x por 2 e y por 1 em cada equação do sistema, obtemos sentenças verdadeiras: $\begin{cases} 2+3.1=5 \\ 2+1=3 \end{cases}$.

Exemplo 65. O par ordenado (2,3) não é solução do sistema $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x-5y=10 \end{cases}$, pois substituindo x por 2 e y por 3 em cada equação do sistema, uma das sentenças não é verdadeira: $\begin{cases} 2.2+3.3=13 & \text{(verdadeira)} \\ 3.2-5.3\neq 10 & \text{(falsa)} \end{cases}$.

4.5 Classificação de um sistema linear quanto ao número de soluções

Um sistema linear S é impossível se S não admite nenhuma solução. É possível determinado quando admite uma única solução. Quando admitir mais de uma solução, então é possível indeterminado.

Figura 10 – Classificação de um sistema

$$\begin{cases} \bullet \text{ possível ou compatível (apresenta solução)} & \begin{cases} \bullet \text{ determinado (apresenta solução única)} \\ \bullet \text{ indeterminado (apresenta infinitas soluções)} \end{cases} \\ \bullet \text{ impossível ou incompatível (não apresenta solução)} \end{cases}$$

Fonte:<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAevdIAJ/sistlineares?part=2>

Exemplos:

1. O sistema $\begin{cases} x+3y=5 \\ x+y=3 \end{cases}$ tem como única solução o par ordenado $(2,1)$, pois

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+3\cdot 1=5 \text{ (verdadeiro)} \\ 2+1=3 \text{ (verdadeiro)} \end{cases}$$

Então o sistema é possível e determinado.

2. O sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ 3x+3y=12 \end{cases}$ é possível e indeterminado, pois apresenta infinitas soluções. Tem-se aí todos os pares ordenados do tipo $(m, 4-m)$.

3. O sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=2 \end{cases}$ é impossível, pois não existe par ordenado (x,y) que torne, ao mesmo tempo, as duas sentenças verdadeiras.

4.6 Matrizes associadas a um sistema linear

Seja o sistema linear:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A um sistema linear podemos associar duas matrizes, em que os elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema.

Denomina-se matriz aumentada (completa) de S à matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

colocando-se em cada linha, ordenadamente, os coeficientes e o termo independente de cada equação de S.

A matriz associada ao sistema (incompleta) é composta apenas de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A representação matricial do sistema

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é dada por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots b_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 66. Ao sistema

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 5y+z=1 \\ -2y+z=3 \\ z=-2 \end{cases}$$

associa-se as matrizes A e B, completa e incompleta, respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.6.1 Regra de Cramer

De acordo com Callioli, Domingues e Costa (1990), pode-se considerar um sistema de Cramer sobre $\mathbb{R}$:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ou, de modo equivalente, $AX = B$, onde $A = [a_{ij}]$ é inversível, $X = (x_1 x_2 \cdots x_n)^t$ e $B = (b_1 b_2 \cdots b_n)^t$.

Levando-se em consideração que os sistemas que são compatíveis determinados tem a solução dada por $X = A^{-1}B$ e que uma matriz quadrada A tal que $\det A \neq 0$ é inversível, com inversa dada por $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(adjA)$. Então:

$$X = \frac{1}{\det A}(AdjA)B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \cdots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{j1} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{jn} b_j \end{bmatrix}$$

O termo $\sum_{j=1}^{n} A_{j1} b_j$ é o determinante da matriz:

$$\triangle_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

que foi desenvolvido pela primeira coluna. Generalizando, $\sum_{j=1}^{n} A_{jk} b_j$, sendo $k \in \{1,2,3,\cdots,n\}$ é o desenvolvimento, pela k-ésima coluna, do determinante da matriz

$$\triangle_k = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

obtida de A pela substituição de sua k-ésima coluna por B. Logo:

$$x_k = \frac{\det(\triangle_k)}{\det A}$$

A solução $AX = B$, quando A é inversível conhecida, surge desta fórmula, que recebe o nome de regra de Cramer.

4.7 Escalonamento de sistemas lineares

Diz-se que um sistema linear está escalonado se, de cima para baixo, os termos nulos que precedem o primeiro termo não nulo de uma equação vão aumentando de equação para equação até que sobrem eventualmente equações com todos os seus termos nulos.

Ou seja, um sistema que tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Para resolver um sistema escalonado, usa-se a substituição, a partir da última equação. Pode-se fazer a discussão a partir da equação $a_{nn}x_n = b_n$

Seja o sistema linear:

$$S = \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Pode-se notar que:

- Trocando de lugar as duas equações, obtemos o sistema

$$S_1 = \begin{cases} a_2x + b_2y = c_2 \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

- Multiplicando a primeira equação de S por um número real $m \neq 0$, conservando a segunda, temos:

$$S_2 = \begin{cases} ma_1x + mb_1y = mc_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Considerando o par ordenado real (α, β) como solução do sistema S, podemos dizer que (α, β) também é solução de S_2. Da mesma forma, se o par ordenado de números reais (α, β) é solução de S_2, também é de S, pois $a_1\alpha + b_1\beta = c_1 \Leftrightarrow ma_1\alpha + mb_1\beta = mc_1, \forall m \neq 0$.

Logo, S_1 e S possuem o mesmo conjunto solução.

Sendo um sistema linear S, denominaremos por $T_1, \quad T_2 \quad e \quad T_3$ as três transformações algébricas elementares sobre as equações de S, às seguintes operações:

- **T1**: Trocamos de lugar, entre si, duas equações;
- **T2**: Multiplicamos (ou dividimos) uma equação por um número real não nulo;
- **T3**: Multiplicamos uma equação por um número real não nulo e adicionamos à uma ouutra equação.

Utilizando estas transformações algébricas, obteremos então o método do escalonamento, tendo assim um sistema linear equivalente escalonado. Para facilitar, poderemos nos orientar da seguinte forma:

- Escolhemos uma primeira equação que tenha coeficiente igual a 1 na primeira incógnita. Caso não exista uma equação assim, poderemos obter uma nestas condições, por meio das transformações algébricas;
- Da segunda equação em diante, tornar igual a zero o coeficiente da primeira incógnita;

- Na segunda equação, tornar o coeficiente da segunda incógnita igual a 1;
- Na terceira equação em diante, tornar o coeficiente da segunda incógnita igual a zero e o coeficiente da terceira incógnita igual a 1, procedendo-se assim sucessivamente para n equações. Teremos então a forma escalonada do sistema;
- Pelo sistema escalonado, encontramos então a solução do sistema dado.

4.7.1 Escalonamento de sistemas a duas incógnitas

Sistemas lineares de duas equações com duas incógnitas (x e y), com coeficientes não nulos, podem ser resolvidos por escalonamento. Considerando-se duas equações lineares, com incógnitas x e y, $x, y \in \mathbb{R}$, define-se sistema linear 2×2 como um conjunto de duas equações lineares.

No sistema $\begin{cases} 5x + y = 7 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$, pode-se multiplicar a primeira equação por -2, obtendo o sistema equivalente: $\begin{cases} -10x - 2y = -14 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$. Somando-se a primeira equação com a segunda, elimina-se a incógnita y, encontrando-se o valor de x: $\begin{cases} -10x - 2y = -14 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \Longrightarrow -6x = -6 \cdot (-1) \Longrightarrow 6x = 6 \Longrightarrow x = 1$.

Substitui-se então esse valor em qualquer uma das equações do sistema, identificando-se o valor de y:

$$5x + y = 7$$
$$5 \cdot 1 + y = 7$$
$$5 + y = 7$$
$$y = 7 - 5$$
$$y = 2$$

Os valores de x e y satisfazem as duas equações ao mesmo tempo. Portanto, pode-se dizer que a solução do sistema é $S = \{(1, 2)\}$.

Esse método faz uso de duas propriedades envolvendo igualdade, no conjunto dos números reais:

• *Propriedade* 1 : A igualdade se mantém quando se multiplica os seus dois membros por um número real não nulo.

Então, para $x, y \in \mathbb{R}$ e $w \in \mathbb{R}^*$, vale:

$$x = y \Longrightarrow x \cdot w = y \cdot w$$

• *Propriedade* 2 : Obtém-se uma nova igualdade quando há soma (ou subtração) das duas igualdades, membro a membro. Para $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{cases} x = y \\ a = b \end{cases} \Longrightarrow x + a = y + b$$

Pode-se resolver também ao isolar uma variável em uma das equações. Feito isso, substitui-se na outra equação, determinando-se assim o valor de uma das variáveis. Substitui-se esse valor na equação com a variável isolada, encontrando-se o valor da outra incógnita. Sendo assim: $\begin{cases} 5x + y = 7 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$

• Equação 1:

$$5x + y = 7$$
$$y = 7 - 5x$$
$$y = 7 - 5 \cdot 1$$
$$y = 7 - 5$$
$$y = 2$$

• Equação 2:

$$4x + 2y = 8$$
$$4x + 2 \cdot (7 - 5x)$$
$$4x + 14 - 10x = 8$$
$$-6x = 8 - 14$$
$$-6x = -6 \cdot (-1)$$
$$6x = 6$$
$$x = \frac{6}{6}$$
$$x = 1$$

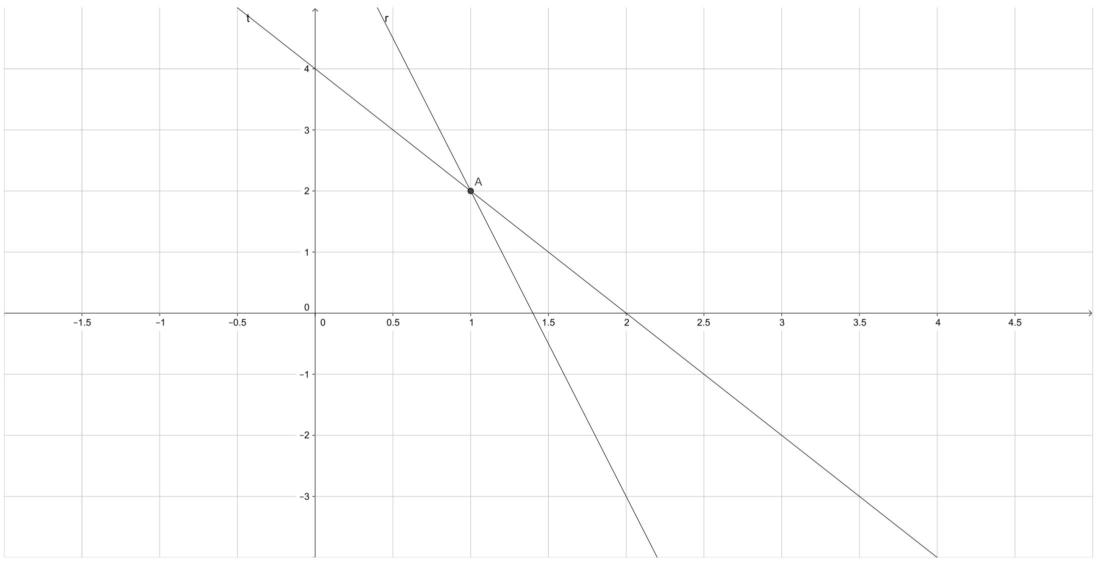
Os valores de x e y satisfazem as duas equações simultaneamente. Conclui-se então que a solução é única: $S = \{(1, 2)\}$.

Interpretação geométrica e classificação: Pode-se representar um sistema por gráficos. Considerando-se o sistema dado anteriormente, tem-se:

$$\begin{cases} 5x + y = 7 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

A equação linear $5x + y = 7$ é equivalente a $y = 7 - 5x$, ou seja, a lei de uma função afim, cujo gráfico é uma reta (r) enquanto que na equação linear $4x + 2y = 8$ tem-se a equação equivalente $y = \dfrac{8 - 4x}{2}$ que também é uma função afim, onde o gráfico é uma reta (t):

Figura 11 – Solução do sistema possível determinado

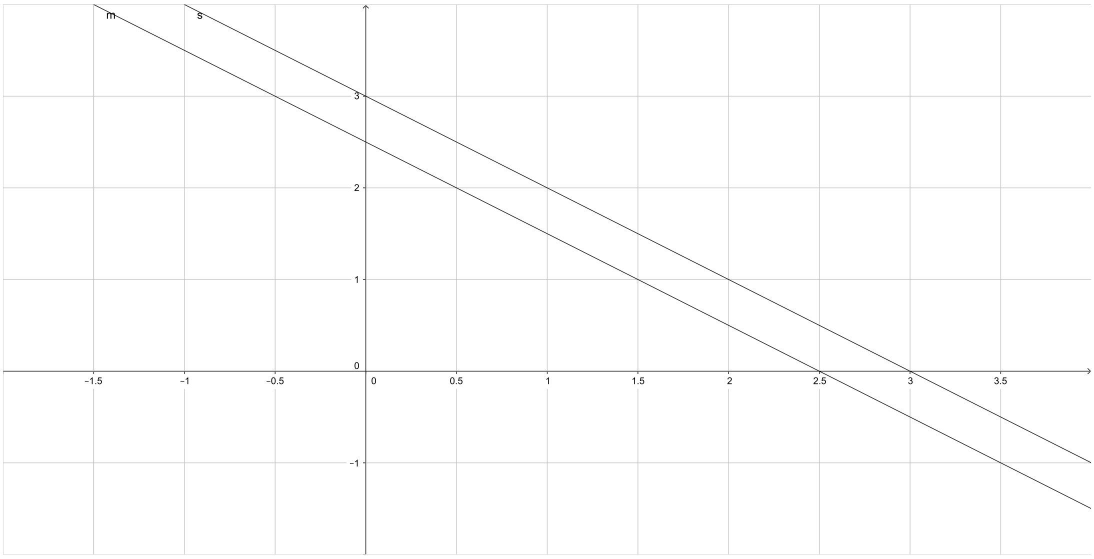


Fonte: Elaborada pelo autor.

Há um ponto A, único, que representa a intersecção entre as retas r e t, ou seja, o par ordenado $(1, 2)$ é solução única do sistema $\begin{cases} 5x + y = 7 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$ porque satisfaz as duas equações ao mesmo tempo.

Observa-se na Figura 12 a representação gráfica deste sistema.

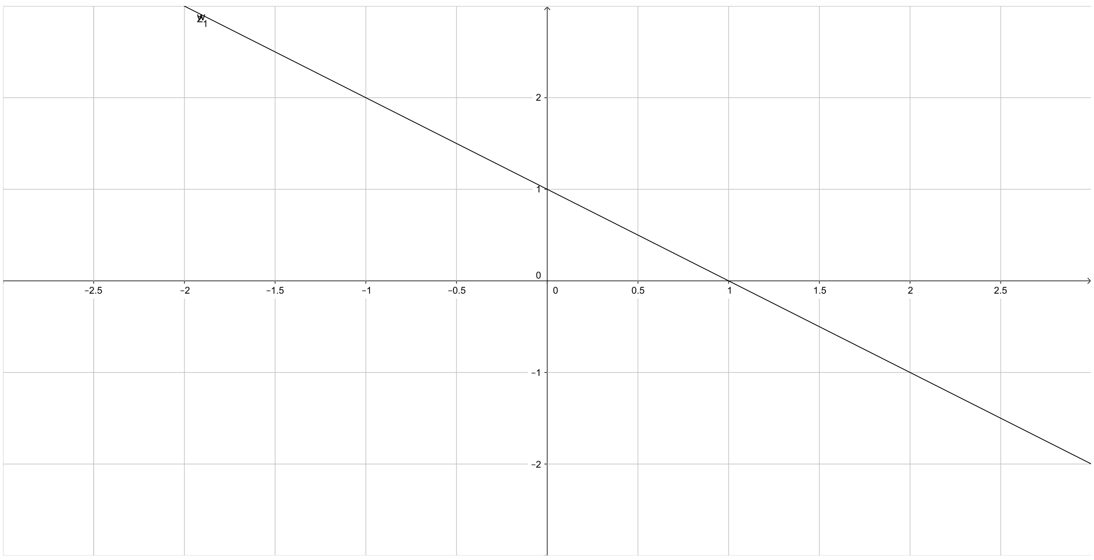
Figura 12 – Sistema impossível: retas paralelas distintas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se na Figura 13 a representação gráfica deste sistema.

Figura 13 – Sistema possível indeterminado: retas paralelas coincidentes



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, para resolver o sistema

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ -2x-4y=-16 \end{cases} \Leftrightarrow^{1} \begin{cases} x+2y=8 \\ 0x+0y=0 \end{cases} \Leftrightarrow^{2} \begin{cases} x+2y=8 \end{cases}$$

[1] Soma-se a segunda equação à primeira multiplicada por 2.
[2] Retira-se a segunda equação, pois aceita qualquer solução.

Logo, temos um sistema possível e indeterminado, cujo conjunto solução será formado por todas as soluções de $x+2y=8(a)$.

Fazendo $y=\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, e substituindo em (a) teremos
$x+2\alpha=8$
$x=8-2\alpha$

Portanto, o conjunto solução ou verdade, que representaremos por V, será: $V=\{(8-\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

4.7.2 Escalonamento de sistemas a três incógnitas

Considera-se o sistema linear

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x-3y+2z=14 \\ 3x+y-z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ -7y-4z=2 \\ -5y-10z=-20 \end{cases} \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ -7y-4z=2 \\ y+2z=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ y+2z=4 \\ -7y-4z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ y+2z=4 \\ 10z=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ y+2z=4 \\ z=3 \end{cases}$$

Substituindo-se $z=3$ na equação $y+2z=4$, tem-se:

$$y+2z=4$$
$$y+2\cdot 3=4$$
$$y+6=4$$
$$y=4-6$$
$$y=-2$$

Substituindo-se $z=3$ e $y=-2$ na equação $x+2y+3z=6$, tem-se:

$$x+2\cdot(-2)+3\cdot 3=6$$
$$x-4+9=6$$
$$x+5=6$$
$$x=6-5$$
$$x=1$$

Assim $x=1$, $y=-2$ e $z=3$ é uma solução do sistema linear.

4.8 Matriz inversa

Dada uma matriz A, quadrada, de ordem n, se X é uma matriz de tal forma que $AX = XA = I_n$, então X é chamada de **matriz inversa de A** e sua indicação será A^{-1}. Se existe a matriz inversa de A, então A é uma matriz **invertível** ou **não-singular**. Se não existir a inversa, então a matriz A é chamada de **singular** ou **não-invertível**.

Procedimento para o cálculo da inversa de uma matriz quadrada de ordem 2

Considera-se uma matriz quadrada A de ordem 2 e a matriz identidade I_n, também de ordem 2.

O cálculo da matriz inversa de A, que só é possível quando $\det A \neq 0$, pode assim ser feito:

- Multiplica-se a matriz A por uma matriz M (inversa de A), com elementos desconhecidos (os elementos são incógnitas), e iguala-se à matriz identidade I_n.
- Ao fim deste cálculo, determina-se o valor de cada incógnita de M, obtendo-se assim a matriz inversa de A, desde que seja possível.

Exemplo 67. Para o cálculo da inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, considera-se $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sendo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e faz-se:

$$A \cdot M = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a + 1c & 2b + 1d \\ 3a + 2c & 3b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + 1c = 1 \cdot (-2) \\ 3a + 2c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -4a - 2c = -2 \\ 3a + 2c = 0 \end{cases} \implies -a = -2 \implies a = 2$$

Como $a = 2$, tem-se:

$$2a + 1c = 1$$

$$2 \cdot 2 + c = 1$$

$$4 + c = 1$$

$$c = 1 - 4$$

$$c = -3$$

$$\begin{cases} 2b + 1d = 0 \\ 3b + 2d = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -4b - 2d = 0 \\ 3b + 2d = 1 \end{cases} \Longrightarrow -b = 1 \Longrightarrow b = -1.$$

Como $b = -1$, tem-se:

$$\begin{gathered} 3b + 2d = 1 \cdot (-2) \\ 3(-1) + 2d = 1 \\ -3 + 2d = 1 \\ 2d = 1 + 3 \\ 2d = 4 \\ d = \frac{4}{2} \\ d = 2 \end{gathered}$$

Então $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = A^{-1}$.

Portanto, a inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Verifica-se, por exemplo, que:

1. A inversa de $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é
   $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, pois:
   $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 & 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 9 & -15 + 15 \\ 6 - 6 & -9 + 10 \end{bmatrix} =$
   $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$.

2. A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é singular, pois:
   $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$ e, assim, não existe matriz inversa.
   Pode-se calcular, também, de outra maneira: chama-se de matriz inversa a matriz $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, e aplica-se a fórmula: $A \cdot B = I_2$. Então:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a+4c & 2b+4d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+4c=1 \\ a+2c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2a+4c=1 \\ -2a-4c=0 \end{cases} \implies 0=1 \text{ (falso)}.$$

Então, o sistema é impossível e a matriz A não admite inversa.

Pode-se optar em fazer da maneira a seguir:

1. Calcula-se o determinante da matriz A;
2. Divide-se cada elemento da matriz A pelo valor do determinante da matriz ($\det A$);
3. Na diagonal principal, troca-se as posições dos elementos;
4. Na diagonal secundária, troca-se o sinal dos elementos;
5. Considerando-se a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, tem-se então como inversa:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det A} & \dfrac{-a_{12}}{\det A} \\ \\ \dfrac{-a_{21}}{\det A} & \dfrac{a_{11}}{\det A} \end{bmatrix}$$

.

Exemplo 68. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Calcula-se o determinante da matriz A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 10 - 8 = 2.$$

Dividindo-se cada elemento de A pelo determinante de A:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2}{2} & \dfrac{4}{2} \\ \\ \dfrac{2}{2} & \dfrac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \\ 1 & \dfrac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Trocando-se as posições da diagonal principal e os sinais dos números da diagonal secundária:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{5}{2} & -2 \\ \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{2} & -2 \\ \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Procedimentos para o cálculo da inversa de uma matriz quadrada de ordem 3

Considerando-se a matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{m\times m}$, e que para o cálculo da matriz inversa A^{-1} deve-se ter como condição $\det A \neq 0$, pode-se seguir os passos abaixo, com a finalidade de facilitar o cálculo:

1. **Passo 1**: Calcula-se o determinante da matriz A;
2. **Passo 2**: Determina-se a matriz de cofatores dos elementos de A;
3. **Passo 3**: Faz-se a transposta da matriz de cofatores, obtendo a **matriz adjunta de A** $(adjA)$;
4. **Passo 4**: Determina-se o valor da matriz inversa, que se define pela fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (adjA)$$

Exemplo 69. Considera-se a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Calcula-se então o determinante da matriz A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 0\cdot(-1) + 1\cdot 3\cdot(-2) + 1\cdot 1\cdot 0 - 0\cdot 0\cdot(-2) - 1\cdot 3\cdot(-1) - 0\cdot 1\cdot 1 =$$
$$0 - 6 + 0 + 0 + 3 - 0 = -3.$$

Como $\det A \neq 0$, prossegue-se para o cálculo da matriz de cofatores dos elementos de A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 3 = 1\cdot 3 = 3.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 0 = -1\cdot 0 = 0.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (-6) = 1\cdot(-6) = -6.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-3) = (-1)\cdot(-3) = 3.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot 3 = (-1) \cdot 3 = -3.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot 1 = (-1) \cdot 1 = -1.$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Obtém-se então a matriz dos cofatores:

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Faz-se a transposta desta matriz, ou seja, $(A')^t$, e obtém-se então a matriz adjunta de A:

$$adjA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determina-se então os valores da matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (adjA) = \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{-3} & \frac{0}{-3} & \frac{-6}{-3} \\ \frac{3}{-3} & \frac{0}{-3} & \frac{-3}{-3} \\ \frac{-1}{-3} & \frac{-1}{-3} & \frac{1}{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

CAPÍTULO

5

PLANO DE AULA

5.1 Introdução

É comum no Ensino Médio os livros didáticos apresentarem conteúdos de forma muito robótica, de tal forma que os exercícios trazem as palavras: "calcule", "determine", "resolva", induzindo assim o discente diretamente ao cálculo, sem muitas vezes compreenderem o porquê.

Este trabalho tem como propósito expor e enfatizar aos professores de matemática do ensino médio formas e exemplos do uso prático dos conceitos em sala de aula e inserir a aplicação de matrizes, determinantes e sistemas lineares no cotidiano dos alunos, facilitando o processo de aprendizagem, pois geralmente esses conteúdos são trabalhados apenas de forma teórica.

A apresentação do conteúdo aos alunos, de forma clara e objetiva, sugerindo aplicações práticas e diferentes maneiras de solução, será uma forma de buscar um olhar diferenciado.

O trabalho foi desenvolvido com a turmas do ensino médio (2ª e 3ª séries) das escolas:

1. Equilíbrio Sociedade Educativa, que utiliza o material didático do Objetivo. Situado em Duartina-SP. Total de alunos que participaram: 29.

2. Escola Estadual Senador Rodolfo Miranda, que utiliza o material apostilado fornecido pelo Estado. Situada em Cabrália Paulista-SP. Total de participantes: 31.

O motivo da escolha foi o desafio de tentar trabalhar com duas esferas da educação, muitas vezes consideradas bem distantes umas das outras, porém, com muitos laços em comum; um deles: a matemática.

5.2 Procedimento

Primeiramente passamos o conteúdo exatamente como estava na apostila dos alunos, sem fazer nenhuma conexão com situações cotidianas. Resultado: muitos aprenderam os cálculos, mas não sabiam a empregabilidade deles; outros, não aprenderam e de imediato, já se desinteressaram.

Quando se falou das inúmeras aplicações, percebemos um interesse maior de todos que participaram. Os que desistiram anteriormente, desta vez perguntaram. Pensando assim, uma aula com conexão às situações rotineiras dos alunos teria uma boa aceitação.

Fizemos uma revisão, com explicações na lousa em 3 aulas de 50 minutos cada, sendo: 1 aula para matrizes, 1 aula para determinantes e 1 aula para sistemas lineares. Logo em seguida, foi utilizada 1 aula de 50 minutos para a resolução da lista, contendo seis exercícios.

5.3 Lista de exercícios

1. (Kolman, B.; Hill, D.R.) O 0 representa DESLIGADO e o 1 representa LIGADO e

$$A = \begin{bmatrix} LIGADO & LIGADO & DESLIGADO \\ DESLIGADO & LIGADO & DESLIGADO \\ DESLIGADO & LIGADO & LIGADO \end{bmatrix}$$

   Encontre a matriz B LIGADO/DESLIGADO, tal que $A + B$ seja uma matriz em que todos os elementos sejam DESLIGADO.

2. (Kolman, B.; Hill, D.R.) Um fabricante de um determinado produto produz três modelos A, B e C. Cada modelo é produzido parcialmente na fábrica F_1 em Formosa e, então, finalizado na fábrica F_2 nos Estados Unidos. O custo total de cada produto é composto pelo custo de produção e pelo custo de transporte. Portanto, o custo de cada fábrica, em dólares, pode ser descrito pelas matrizes F_1 e F_2, 3×2:

Fábrica 1	Custo de produção	Custo de transporte
Modelo A	32	40
Modelo B	50	80
Modelo C	70	20

$$\Downarrow$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 32 & 40 \\ 50 & 80 \\ 70 & 20 \end{bmatrix}$$

Fábrica 2	Custo de produção	Custo de transporte
Modelo A	40	60
Modelo B	50	50
Modelo C	130	20

$$\Downarrow$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 50 & 50 \\ 130 & 20 \end{bmatrix}$$

A matriz $F_1 + F_2$ fornece o total dos custos de produção e transporte para cada produto. Assim, qual o total dos custos de produção e transporte do modelo C?

3. (Colégio Objetivo) Ao comprar os produtos necessários para fazer uma feijoada, uma dona de casa resolveu pesquisar preços em três supermercados. A matriz P dos preços está representada a seguir: a primeira linha mostra os preços por kg do supermercado A; a segunda, os do supermercado B; a terceira, os do supermercado C. Esses preços são relativos, respectivamente, aos produtos feijão, linguiça, tomate e cebola.

$$P = \begin{bmatrix} 2,05 & 9,89 & 2,48 & 1,78 \\ 1,93 & 11,02 & 2,00 & 1,60 \\ 1,70 & 10,80 & 2,40 & 1,20 \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sabendo que a matriz Q representa as quantidades necessárias, respectivamente, de feijão, linguiça, tomate e cebola, a dona de casa economizará mais se efetuar as compras no supermercado

a) A.

b) B.

c) C.

d) A ou B indiferentemente.

e) A ou C indiferentemente.

4. (Extraído da apostila - Colégio Objetivo) Foi realizada uma pesquisa, num bairro de determinada cidade, com um grupo de 500 crianças de 3 a 12 anos de idade. Para esse grupo, em função da idade x da criança, concluiu-se que o peso médio $p(x)$, em quilogramas, era dado pelo determinante da matriz A, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -x \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Com base na fórmula $p(x) = \det A$, podemos concluir que o peso médio de uma criança de 5 anos é, em kg, igual a:

a) 18.

b) 19.

c) 20.

d) 21.

e) 22.

5. (Colégio Objetivo) Para uma festinha, foram encomendados 90 refrigerantes, 230 salgados e 120 doces. Os convidados foram divididos em três faixas: crianças, senhores e senhoras. Cada criança deverá consumir exatamente 2 refrigerantes, 8 salgados e 4 doces; cada senhor deverá consumir exatamente 3 refrigerantes, 5 salgados e 3 doces; cada senhora deverá consumir exatamente 3 refrigerantes, 6 salgados e 3 doces. Qual deverá ser o total de convidados, para que não sobrem e nem faltem refrigerantes, salgados e doces?

6. (Kolman, B.; Hill, D.R.) Seja $p = \begin{bmatrix} 18,95 & 14,75 & 8,60 \end{bmatrix}$ uma matriz 1×3 que representa os preços atuais de três itens de uma loja. Suponha que a loja anuncie uma promoção em que o preço de cada item esteja reduzido em 20%.

   a) Determine um vetor de dimensão 3 que forneça as alterações de preço para os três itens.

   b) Determine um vetor de dimensão 3 que forneça os novos preços dos itens.

5.4 Resultados

Percebemos um interesse bem maior por parte dos alunos que, mesmo encontrando alguma dificuldade, tentaram resolver. Até mesmo discentes considerados desinteressados se envolveram.

Comparando o resultado entre as redes particular e pública, percebe-se que há uma certa diferença nos acertos, tendo em vista que o material utilizado pelos alunos da escola pública não tem todo o conteúdo, e muitos apresentam defasagem (que ocorre desde as séries iniciais do ensino fundamental).

Ao término do teste, muitos agradeceram e disseram que foi bem mais legal a aula desta forma. Relataram também que o fato de estarem envolvidos na situação, possibilitou uma melhor percepção do problema e as ideias surgiram para tentar resolvê-lo.

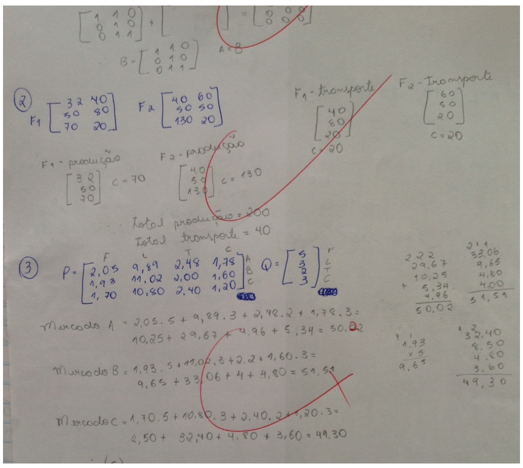
A questão 5, referente ao escolanamento de um sistema, foi a que mais teve menor aceitação, pois encontraram bastante dificuldade na resolução.

Tabela 7 – Resultado do teste

Acertos (%) por questão		
Questão	Equilíbrio Sociedade Educativa	Escola Estadual Senador Rodolfo Miranda
1	85	75
2	95	75
3	90	72,5
4	92,5	80,5
5	55	2
6	90	80

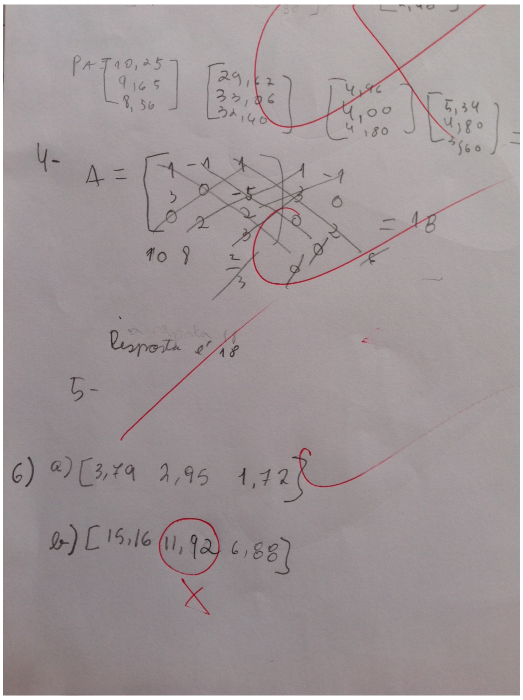
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 14 – Resoluções



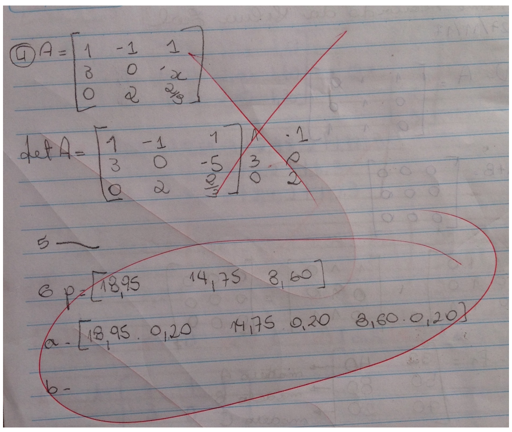
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 15 – Resoluções



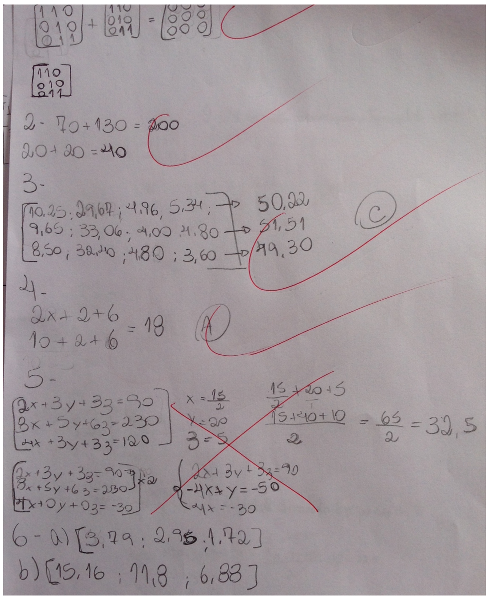
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 16 – Resoluções



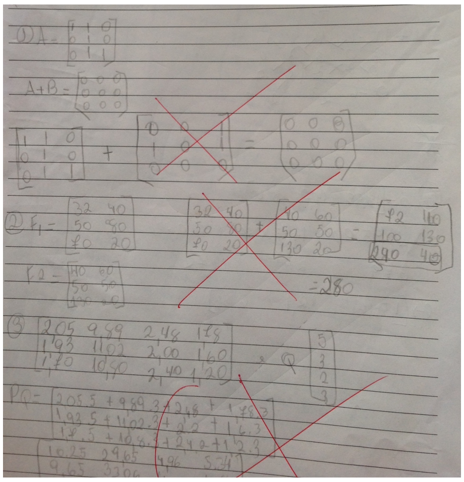
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 17 – Resoluções



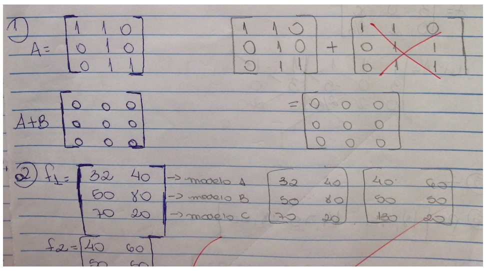
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 18 – Resoluções



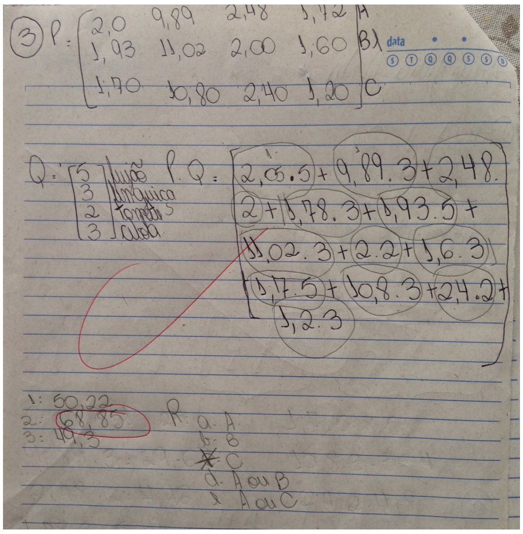
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Resoluções



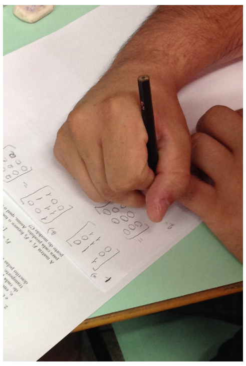
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 20 – Resoluções



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21 – Resoluções

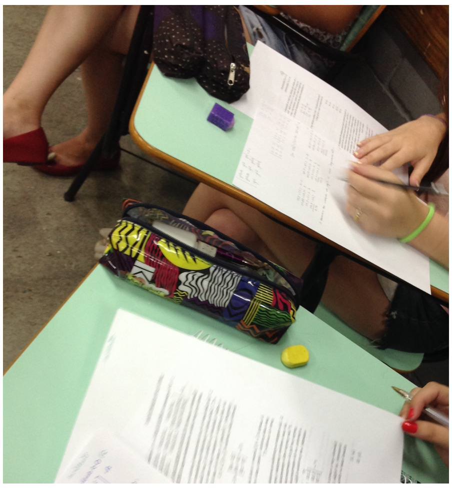


Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 22 – Resoluções

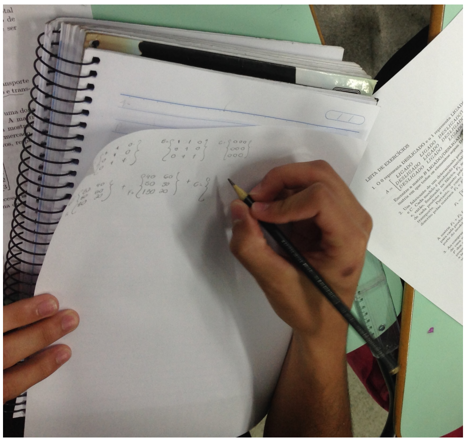
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 23 – Resoluções



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 – Resoluções



Fonte: Elaborada pelo autor.

REFERÊNCIAS

BALESTRI, R. **Matemática: interação e tecnologia**. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016. v. 2. ISBN 9788545103257. Citado nas páginas 29, 30, 51, 53 e 54.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de história da matemática**: para uso em sala de aula. São Paulo: Atual, 1992. v. 4. ISBN 85-7056-454-6. Citado nas páginas 24, 53 e 54.

BERNARDES, A.; ROQUE, T. (Ed.). **HISTÓRIA DA NOÇÃO DE MATRIZ: UMA RELEITURA SOB A LUZ DE NOVAS ABORDAGENS HISTORIOGRÁFICAS**. 2016. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.16,no31/1%20-%20Aline%20Bernardes.pdf>. Citado nas páginas 23 e 24.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3ª. ed. São Paulo: Blucher, 2010. ISBN 9788521205135. Citado nas páginas 23, 71 e 72.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. F. C. **Álgebra linear e aplicações**. 6ª. ed. São Paulo: ATUAL, 1990. ISBN 978-85-7056-297-5. Citado nas páginas 76 e 79.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 2ª. ed. São Paulo: Ática, 2014. v. 2. Citado nas páginas 37 e 73.

FAGUNDES, J. L. L. **Resolução de sistemas lineares no ensino médio**. 50 p. Monografia (techreport) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2013. Citado nas páginas 53 e 73.

FEDERAL universidade. **Gato Félix**. 2017. Disponível em: <www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html>. Citado na página 26.

FILHO, A. J. de S. **Aplicações e resoluções de problemas como metodologia para o ensino de matrizes, sistemas lineares e determinantes**. techreport, Teresina, 2013. Citado na página 71.

FILHO, B. B.; SILVA, C. X. da. **Matemática aula por aula**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2003. v. 2. ISBN 85-322-5190-0. Citado nas páginas 53 e 72.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PéRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. **Matemática: ciência e aplicações**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 2. ISBN 9788547205386. Citado nas páginas 23, 24, 26, 28 e 73.

KOLMAN, B.; HILL, D. R. **Introdução à álgebra linear: com aplicações**. 8ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. ISBN 852161478-0. Citado nas páginas 37, 40, 48, 49, 50 e 54.

LEVORATO, G. B. P. **Matrizes, determinantes e sistemas lineares: aplicações na engenharia e economia**. Rio Claro: [s.n.], 2017. Citado na página 44.

PEDRINI, L. C. **O estudo de sistemas lineares nos ensinos fundamental e médio**. techreport, Campo Grande - MS, 2013. Citado na página 73.

ICMC USP
SÃO CARLOS