Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e
Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Livros didáticos e o equilíbrio das Componentes Básicas para o Ensino da Matemática no tópico de Logaritmo

Paulo Roberto de Sousa Gomes

Teresina
2018

RESOLUÇÃO CEPEX Nº. 089/2016

ANEXO A

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO DIGITAL

Concedo à Universidade Estadual do Piauí (UESPI) o direito não-exclusivo de reproduzir, traduzir e/ou distribuir este trabalho (incluindo o resumo) por todo o mundo, no formato impresso e eletrônio e em qualquer meio, incluindo os formatos áudio ou vídeo.

Concordo que a UESPI pode, sem alterar o conteúdo, transpor este trabalho para qualquer meio ou formato para fins de preservação.

Concordo que a UESPI pode manter mais de uma cópia de meu trabalho para fins de segurança, backup ou preservação.

Declaro que este trabalho é original e tenho o poder de conceder os direitos contidos nesta licença.

Declaro também que o depósito deste trabalho não infringe direitos autorais de ninguém.

Levando-se em conta que o trabalho ora depositado tenha sido de resultado de patrocínio ou apoio de uma agência de fomento ou outro organismo que não seja a UESPI, declaro que foram respeitados todos e quaisquer direitos de revisão como também as demais obrigações exigidas por contrato ou acordo.

Contendo este trabalho material do qual não possuo titularidade dos direitos autorais, declaro que obtive a permissão irrestrita do detentor dos direitos autorais para conceder à Universidade os direitos apresentados nesta licença, e que esse material está claramente identificado e reconhecido no texto ou no conteúdo do trabalho ora depositado.

A UESPI se compromete a identificar claramente seu nome(s) ou o(s) nome(s) dos detentores dos direitos autorais do trabalho em questão, e não fará qualquer alteração, além daquelas concedidas por esta licença.

De acordo com esta licença.

Teresina, PI 07 de junho de 2018.

Paulo Roberto de S. Gomes

Assinatura

Livros didáticos e o equilíbrio das Componentes Básicas para o Ensino da Matemática no tópico de Logaritmo

Título do trabalho

Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT

Curso

Paulo Roberto de Sousa Gomes

Livros didáticos e o equilíbrio das Componentes Básicas para o Ensino da Matemática no tópico de Logaritmo

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao programa de mestrado profissional em matemática (PROFMAT) em rede nacional da Universidade Estadual do Piauí - Campus Poeta Torquato Neto, como parte dos requisitos para obtenção do grau de mestre em matemática.
Área de concentração: Matemática no Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva

Teresina
2018

G633l Gomes, Paulo Roberto de Sousa

Livros didáticos e o equilíbrio das componentes básicas para o ensino da matemática no tópico de logaritmo / Paulo Roberto de Sousa Gomes. – 2018.

93 f .: il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT, 2018.

“Orientador Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva.”

1. Componentes Básicas. 2. Livros Didáticos. 3.Logaritmos. 4. Ensino. I. Título.

CDD: 512.922

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Nayla Kedma de Carvalho Santos (Bibliotecária) CRB-3ª/1188

PAULO ROBERTO DE SOUSA GOMES

LIVROS DIDÁTICOS E O EQUILÍBRIO DAS COMPONENTES BÁSICAS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA NO TÓPICO DE LOGARITMO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA
Aprovado por:

Afonso Norberto da Silva

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva - Examinador
Universidade Estadual do Piauí -UESPI

Pedro Antonio Soares Junior

Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior - Examinador
Universidade Estadual do Piauí -UESPI

Prof. Dr. Paulo Sérgio Marques dos Santos - Examinador externo
Universidade Federal do Piauí – UFPI

TERESINA
Maio/2018

Paulo Roberto de Sousa Gomes, graduou-se em Matemática pela UESPI - CPTN, concluiu Especialização em Matemática no Ensino Médio pelo IFPI e depois o curso de Mestrado PROFMAT/UESPI, bolsista pela CAPES. É professor efetivo da rede pública no IFMA - Campus de São João dos Patos.

Dedicatória

Dedico este trabalho a meus pais Geralda e Adalberto, minha vó Maria e minha futura esposa Aline Lima.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por ter me dado saúde, força e sabedoria para poder realizar meus estudos e concluir este trabalho.

Agradeço imensamente aos meus amados pais Geralda e Adalberto e a minha vó Maria (Dona Neguinha), por seus bons exemplos e mesmo sem terem concluído os estudos, tinham a certeza que a educação é uma via de transformação de vidas.

À minha futura esposa, Aline Lima por ser a presença física em muitos lugares para que eu pudesse ficar em casa e dedicar meu tempo aos estudos e ao trabalho, sem sua ajuda e paciência, carinho e companheirismo, não apenas este trabalho mais outras conquistas não seriam possíveis.

Aos meus irmãos Paula, Roberto, Francisco e Adalberto por todo apoio.

Ao professor Dr. Afonso Norberto da Silva, pela paciência, por acreditar em mim, por acreditar no projeto de pesquisa e toda a sua disponibilidade para me orientar.

A todos os professores do PROFMAT da UESPI que tenho o maior prazer de citá-los: Profº Dr. Neuton, Profº Dr. Pedro Junior, Profº Dr. Arnaldo e Profº Me. Hélder Laranjeira que contribuíram para o enriquecimento dos meus conhecimentos, compartilhando suas experiências didáticas e teóricas para além do exame de qualificação.

A todos os colegas de mestrado pelo ambiente de estudo, pelos momentos de alegria, amizade e companheirismo.Aos meus amigos Raphael Ramon, Nakya e Mauro Olavo.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática(SBM) ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pelo incentivo financeiro.

A todos, minha eterna gratidão.

A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos, como também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.

René Descartes

Resumo

Neste trabalho, analisou-se livros didáticos de Matemática do Ensino Médio selecionados por critérios e parâmetros comuns que permite indicar como "adequado"ou "inadequado"a abordagem do tópico de logaritmo tendo como base a principal ferramenta de análise: As Componentes Básicas para o Ensino da Matemática. Primeiramente, identificou-se o quanto as Componentes Básicas se adequavam no julgamento em considerar um tópico da matemática como conhecimento escolar pertinente. Compartilhou-se os mesmos parâmetros usados no livro "Exame de Textos"como um direcionador de sugestões a serem seguidas na análise dos livros didáticos no tópico de logaritmo.
Além disso, independentemente das considerações quanto à adequação dos livros e em relação ao tópico de logaritmos e reconhecendo o livro como uma ferramenta didática a mais, foi proposto atividades de complementação naquele tópico classificado como "necessário de um maior aprofundamento". Para tal, usou-se as Componentes Básicas e as propostas metodológicas abordadas para este objetivo. Nossas principais referências foram: [1], [40], [17], [18], [19] e [20].

Palavras-chave: Componentes Básicas. Livros Didáticos. Logaritmos. Ensino.

Abstract

In this work, textbooks of High School Mathematics were analyzed selected by common criteria and parameters that allows to indicate the "adequate"or "inappropriate" the approach of the topic of logarithm based on the main analysis tool witch is The Basic Components for Teaching Mathematics First, it was identified how the Basic Components were suited in the judgment to consider a topic of mathematics as an pertinent school knowledge. The same parameters previous described were used in the book "Exame de textos"as a guideline for suggestions to be followed in analyzing the textbooks in the logarithmic topic. In addition, regardless of the provisions concerning the appropriateness of the books and in relation to the topic of logarithms and recognizing the book as an additional didactic tool, it was proposed to have complementary activities in that topic classified as necessary for a complementary study. For this purpose, we choice and delevopmented certain methodologic and the Basic Components in this paper. Our main references were:: [1], [40], [17], [18], [19] e [20].

Keywords: Components Basics. Didatic Books. Logarithms. Teaching.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Uma das primeiras ferramentas usadas para o contato com o conteúdo de logaritmos é o livro didático, fonte de conhecimentos que será referência para alunos e professores. Para muitos professores, o livro didático irá sistematizar a abordagem de conteúdos durante o período letivo, podendo mesmo até ser a única fonte impressa confiável que terá a sua disposição no planejamento de suas aulas. E quando o ensino é guiado apenas pelo livro didático, muitos tópicos de matemática ficam limitados a sua discussão pelo que o livro didático apresenta, e quando não são apresentados geram um enorme prejuízo no entendimento dos conteúdos que guardam um relação de dependência ou são base de discussão em outras áreas do conhecimento.

O tópico de logaritmos é utilizado em aplicações diversass que vão desde o decaimento radioativo a propagação de um boato. Saber manipular as propriedades e operações, internalizar conceitos e significados, são exigências que configuram as Componentes Básicas para o Ensino da Matemática, e com suas inúmeras aplicações não é exagero em afirmar que o tópico de logaritmo, de vez em quando, irá fazer parte da vida escolar dos alunos, por explorar um campo vasto de áreas do conhecimento. E Lima, em ([19], p.114) destaca a importância dos logaritmos como conteúdo cientifico ao dizer que: "[...] podemos afirmar, sem perigo de erro, que enquanto houver ciência haverá aplicações logarítmicas e exponenciais".

As diversas aplicações do tópico logaritmo em muitas áreas do conhecimento, facilitam a contextualização e interdisciplinaridade, que é aqui entendida por articulação, integração e sistematização de fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas do conhecimento, conforme PCN+ ([2], p. 27). Com as aplicações os livros didáticos podem articular o conhecimento cientifico dos logaritmos com objetivo de garantir o significado contextualizado do conteúdo.

Dessa forma, o presente trabalho surgiu da motivação em verificar quais saberes relacionados aos logaritmos foram priorizados e quais foram omitidos nos livros didáticos. Será usado como critério de analise as Componentes básicas para o Ensino da Matemática, e para realizar essa investigação, iremos utilizar as críticas que foram feitas as coleções de matemática no ano de 2001 no tópico de logaritmo, uma opção teórica advinda após a leitura do trabalho de Lima et. all (2001),do livro "Exame de Textos", pois constituirá na listagem organizada daquilo que os autores consideram necessário para o ensino dos logaritmos.

Estudar e relacionar a forma de como o individuo aprende e gera um novo conhecimento, assim como ele é capaz de não somente decodificar símbolos matemáticos, mas de interpretar situações e utilizar a matemática de forma consciente como um meio para solucionar seus problemas além das atividades escolares, não é exatamente um processo fácil. Turmas numerosas com alunos em diferentes níveis de aprendizado, contextos sociais diversificados tornam o processo de ensino um desafio, então verificar que práticas podem ser generalizadas ou individualizadas, utilizar ferramentas didáticas bem elaboradas, podem contribuir na própria prática em sala de aula, acerca do trabalho que está sendo feito para estimular a criatividade, autonomia e a capacidade critica de cada aluno.

Portanto, analisar os livros didáticos e sua abordagem do tópico de logaritmo é fundamental para entender se a listagem do conteúdo seleciona um público em especifico ou existe uma multiplicidade de abordagens e de fundamentações teóricas do ensino de matemática, se há excesso quanto as manipulações, conceitos errados ou de difícil entendimento e aplicações relevantes e condizentes com a realidade. Libâneo em [16], destaca que os programas oficiais e o livro didático deve ser encarado como diretrizes de orientação geral pelo professor e ainda:

> As particularidades em relação aos desdobramentos dos programas, á resseleção de conteúdos, á escolha de métodos e técnicas são determinados pelo professor de modo mais ou menos independente, tendo em conta as condições locais da escola, dos alunos, bem as situações didáticas especificas ás diferentes séries. ([16], p.134)

Por mais adequada que uma ferramenta didática pareça, não ter habilidades para manusear e explorar essa ferramenta, ela será inútil. E possuir as habilidades e se limitar a uso de uma só ferramenta, ela será ineficaz. E se a ferramenta não é de boa qualidade? todos que fizeram uso dela vão depender muito de sua habilidade para que ela seja eficiente ou para poder descarta-la e usar outra melhor elaborada.

Toda essa história de ferramentas e habilidades podem se resumir ao seguinte: Um livro didático bem elaborado auxilia alunos e professores. Para o professor que se divide em várias escolas e turnos na busca de um salário melhor ou para o professor que será apresentado ao conteúdo através do livro didático, pois teve a formação baseado em uma matemática pouco aplicada para o nível de ensino básico, o livro didático será seu principal guia em transpor saber cientifico em saber escolar.

O que seguirá é uma investigação exploratória, bibliográfica, tomando as Componentes Básicas para o Ensino da Matemática: conceituação, manipulação e aplicações, e a listagem do que é considerado adequado para o ensino de logaritmos de acordo com as críticas na obras "Exame de Textos"de Elon et all, para verificar a abordagem do conteúdo de logaritmo nos livros didáticos e propor um complemento do que for considerado pouco explorado na maioria dos livros didáticos.

Para desenvolver o trabalho foi realizada a seguinte divisão:

- Capítulo 1: tratamos sobre a história da invenção dos logaritmos o contexto social, político e tecnológico, concebido como conhecimento cientifico da ação humana.

- Capítulo 2: tratamos sobre o PNLD e os critérios adotados para selecionar os livros (2018-2020) quanto a abordagem do tópico de logaritmos.

- Capítulo 3: abordamos as características conceituais sobre os fundamentos básicos para o ensino de matemática.

- Capitulo 4: Relacionamos as Componentes Básicas e as tendências metodológicas e avaliativas no ensino de matemática.

- Capitulo 5: analisamos dos livros no tópico de logaritmo, usando os critérios estabelecidos.

- Capitulo 6: apresentamos uma proposta complementar, usando as Componentes Básicas e auxiliado pelas tendências metodológicas ao que for apontado no contexto geral nos livros didáticos como pouco explorado no tópico de logaritmo.

- No apêndice, encontra-se a base formal cientifica da função logarítmica e as soluções dos problemas da proposta complementar [18], [19] e [20].

1 Logaritmos: Aspectos Históricos

Para a discussão deste capítulo serão utilizadas as seguintes referências [7], [19] e [24].

O século XVII, período histórico conhecido por Idade Moderna, foi marcado por muitas mudanças sociais, econômicas, politicas e tecnológicas. O renascimento cuja principal corrente filosófica estava centrado no humanismo, incentivou um maior senso crítico, uma atenção aos fenômenos da natureza e as necessidades humanas. Possibilitando que grupos organizados de intelectuais questionassem a ordem vigente, a partir de suas próprias concepções de mundo, independente da doutrina religiosa dominante. A invenção da imprensa permitiu uma maior divulgação de material e estudos científicos, a impressão em língua vernácula permitiu o alcance de um público maior, pois anteriormente publicações em latim se restringia aos conhecedores dessa língua. As navegações impulsionaram o comércio e um status inicial da globalização.

O uso da matemática é encorajado e na astronomia cálculos exatos significavam rotas mais precisas e economia de recursos. Ao relacionar grandezas e demonstrar verdades essenciais, com a matemática o método cientifico formulou-se mais rigoroso e crítico, impulsionando as pesquisas em matemática na Europa. Os destaques nesse período foram: a invenção dos logaritmos, notação e codificação da álgebra, as leis do movimento planetário, Geometria analítica moderna, teoria dos números e a criação do cálculo, e grande parte dessa produção científica concentrou-se na França, Inglaterra e Itália.

A partir da necessidade de resolver cálculos longos, poupando assim tempo na resolução de problemas na área das ciências exatas e da natureza, os logaritmos surgiram como um conhecimento matemático construído pelo homem, ainda no Séc. XVII, que impactou em uma ferramenta auxiliar significativa, às tabuas de logaritmos, usadas para facilitar o desenvolvimento de problemas trabalhosos. Tal ferramenta com o desenvolvimento da humanidade foi perdendo sua utilidade e espaço para os recursos tecnológicos atuais.

Quase um século antes de sua invenção, Michael Stifel[1] (1487-1567) já divulgava os benefícios em associar progressões aritméticas a uma progressão geométrica, já se notava um prenúncio aos logaritmos. Mas, foi ao escocês nascido em Edimburgo, John

[1]Michael Stifel: costuma-se apresentar Stifel como o maior algebrista alemão do século XVI. Sua obra matemática mais conhecida é Arithmetica integra, publicada em 1544. Fonte:[24].

Napier (1550-1617) que ficou reservado o seu lugar na história ao desenvolver as regras das partes circulares, invenção das barras ou osso de Napier, Analogias de Napier (Quatro fórmulas trigonométricas) e sua obra mais notável que são os logaritmos. Criado com objetivo de tornar multiplicações em somas e divisões em subtrações. Porém essas ideias e interesse não foram construídos do nada, as fórmulas trigonométricas, já se faziam presentes nesse papel de prostaférese.

$$2cosA.cosB = cos(A + B) + cos(A - B)$$
$$2cosA.senB = sen(A + B) - sen(A - B)$$
$$2senA.senB = cos(A - B) - cos(A + B)$$
$$2senA.cosB = sen(A + B) + sen(A - B)$$

As quatro fórmulas são conhecidas por fórmulas de Warner[2]. As fórmulas e modelos trigonométricos que já eram utilizadas e reformuladas ao longo da história desde a Grécia há 300 a.C. Essas fórmulas permitiam a transformação de multiplicações em somas, mas o método não se mostrava muito prático, quando eram manuseados em várias operações.

Napier, dedicou pelo menos vinte anos a teoria dos logaritmos, para finalmente poder explanar os princípios do seu trabalho em termos geométricos. Até que no ano de 1614 publicou um texto intitulado de *Minifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da Maravilhosa lei dos logaritmos). Sua publicação e a invenção dos logaritmos foi recebida com muito entusiasmo aos que despendiam boa parte de seu tempo em extensas contas e cálculos.

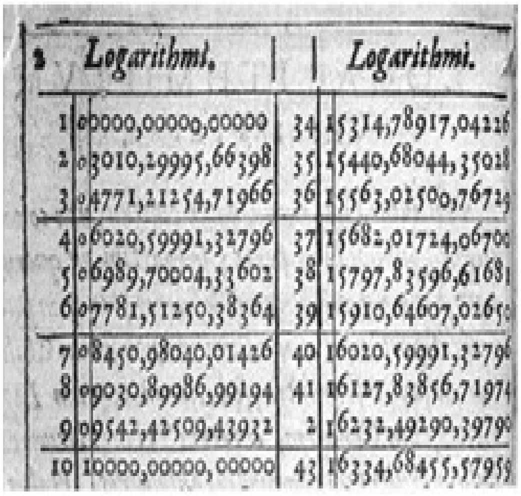
[2]Johannes Werner(1468-1528): As fórmulas largamente usadas por matemáticos e astrônomos perto do fim do século XVII como um método de conversão de produtos em somas e diferenças. Fonte:[7]

Figura 1: John Napier
Fonte:[7], p.341

Figura 2: Capa da Obra de John Napier
Fonte:[6], p.189

Em [7] a frase de Pierre Simon de Laplace (1749-1827), descreve bem a importância que foram dadas aos logaritmos ao dizer que "ao reduzir suas tarefas, a invenção dos logaritmos dobrou a vida dos astrônomos". Um ano após sua publicação o matemático Henry Briggs (1561-1631), encantado com a invenção e entusiasta dos logaritmos foi a Escócia conhecer o seu inventor. E juntamente com Napier, concordaram em conceber tábuas que fossem mais úteis, esses são os logaritmos que conhecemos até hoje por logaritmos decimais.

No ano de 1624 Briggs publicou a lista de tábuas com 14 casas decimais, dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. Todo esse trabalho se justificava, pois as tábuas eram feitas uma única vez, para inúmeras utilizações.



	Logarithmi.		Logarithmi.
1	00000,00000,00000	34	15314,78917,04226
2	03010,29995,66398	35	15440,68044,3502
3	04771,21254,71966	36	15563,02500,7672
4	06020,59991,32796	37	15682,01724,0670
5	06989,70004,33602	38	15797,83596,6168
6	07781,51250,38364	39	15910,64607,0265
7	08450,98040,01426	40	16020,59991,3279
8	09030,89986,99194	41	16127,83856,7197
9	09542,42509,43932	2	16232,49290,3979
10	10000,00000,00000	43	16334,68455,5795

Figura 3: Tábua de Logaritmos
Disponível em:http://www.scielo.org.mx

Tempos depois o suíço, Jobst Burgi (1552-1632) publicou de forma independente seu trabalho sobre logaritmos, anunciando sua descoberta ao mundo, uma reivindicação quanto aos méritos da invenção dos logaritmos. Fato que se mostrava improvável, dois matemáticos desconhecidos um para o outro, divulgarem ideias comuns na invenção de uma ferramenta matemática, mas visto que eles estavam sujeitos as dificuldades compartilhadas ao desenvolver cálculos cada vez mais demorados na investigação de fenômenos que se relacionavam com a matemática naquele momento da história, é perfeitamente possível as descobertas ocorrerem em locais diferentes e claro por pessoas diferentes, "pois tal descoberta corresponde á solução de um problema importante, do qual muitos se vinham ocupando"[19].

Com a invenção dos logaritmos e a popularização das tábuas, manusear as anotações de cada logaritmo não parecia algo muito prático, então em 1622 o inglês William Oughtred (1574-1660), tomando por base os logaritmos de Napier, inventou a "Régua de Cálculo". Dispositivo que era adaptado conforme a necessidade de quem a utilizava, e em mais de três séculos foi unanimidade quanto a sua praticidade. Com advento das calculadoras foram entrando em desuso até serem totalmente substituídas.

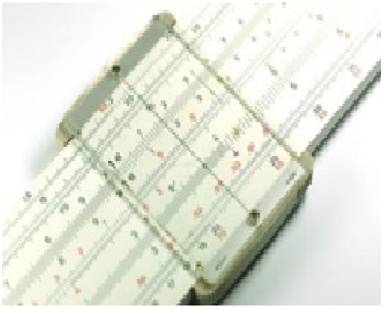


Figura 4: Régua de Cálculo
Fonte: [41]

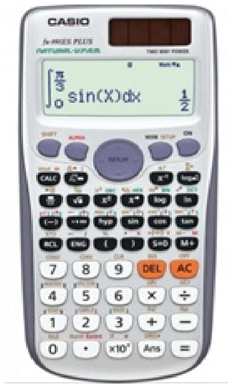


Figura 5: Calculadora Científica
Fonte: [42]

A história dos logaritmos é uma oportunidade de mostrar a relação entre o desenvolvimento da matemática, conhecimento científico e as novas aplicações que um determinado conteúdo matemático vai tobtendo perante as necessidades da sociedade.

No próximo capítulo é verificado os critérios de escolha do livro didático e as justificativas do que deve ser exigido no tópico de logaritmos.

2 Tópico de logaritmos nos livros selecionados pelo PNLD (2018-2020)

O capítulo será desenvolvido baseado nas referências [9],[10],[2] e [16] com o objetivo de entender as políticas públicas voltadas a distribuição de livros didáticos as escolas públicas do Ensino Médio e os critérios adotados para uma coleção ser considerada adequada ou inadequada em relação ao tópico de logaritmos.

A princípio este capítulo tem como objetivo analisar de que forma ocorre a seleção das obras destinadas as escolas públicas de Ensino Médio, para que os professores façam a escolha do livro e posteriormente as obras selecionadas sejam distribuídas aos alunos, e de maneira particular conhecer quais os critérios são entendidos como abordagens adequadas ao tópico de logaritmos nos livros da 1ª série do Ensino Médio.

No entanto entender como funciona o programa de políticas públicas do livro didático não foge a um dos objetivos destes trabalho, pois verificou-se que o processo já percorre mais de oito décadas com a procura constante de melhorias que não se aplica somente a quantidade de alunos atendidos pelo programa, mas principalmente com a qualidade didática, metodológica, pedagógica e física do material que será fornecido de maneira gratuita aos estudantes das escolas públicas.

Por meio do decreto - lei 93 de 21 de dezembro de 1937, foi criado o Instituto Nacional do Livro, programa voltado a publicação, edição material de didático e manutenção de bibliotecas públicas em todo território nacional. Vários programas foram implementados desde a criação do Instituto Nacional do Livro, e uma observação importante durante esse período, é que somente em 1976 a autarquia governamental conhecida por Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) passou a ter sua parcela de participação no programa por meio de recursos financeiros, e em 1985, o programa passou a ter a denominação que é usada atualmente que é o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), mas juntamente com a mudança de denominação, houveram alterações que ganharam destaque: as obras selecionadas para serem distribuídas passariam a ser escolhidas pelos professores e uma preocupação com uso de recursos a partir da reutilização do livro, possibilitando assim a implantação de um banco de livros didáticos, o fim da participação financeira dos estados, tendo a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE) a responsável pelos recursos e controle decisório.

A FAE, permaneceu com a política de execução do PNLD até o ano de 1997, onde no mesmo ano, no mês de fevereiro, ocorre a sua extinção e a responsabilidade pela política de execução do programa é transferida de maneira integral ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE).

O PNLD atende a educação básica, com exceção do Ensino Infantil, mas a sua atuação no Ensino Médio de maneira integral tem um pouco mais de uma década, vindo a ser executado esse atendimento ao Ensino Médio de maneira progressiva. Em 2004, foi criado o Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM) em seu primeiro ano de execução, foram adquiridos livros de matemática e português para os alunos da 1º série do Ensino Médio do Norte e Nordeste, de acordo com a Resolução/CD/FNDE nº 38, de 15 de outubro de 2003 que estabelece no Art.8º:

> I. Inscrição dos livros didáticos: realizar-se-á pelos titulares de direitos autorais conforme critérios estabelecidos no Edital de Convocação a ser publicado no Diário Oficial da União, visando conferir-lhe publicidade e garantir a ampla participação dos interessados no processo;
> II. Triagem dos livros: consistirá na verificação da conformidade das obras aos critérios definidos no Edital, as quais, se consideradas aprovadas, serão encaminhadas à SEMTEC/MEC para avaliação pedagógica;
> III. Pré-Análise: consistirá na verificação das obras que atenderem as especificações mínimas definidas no edital.
> IV. Avaliação Pedagógica: obedecerá aos critérios constantes de Edital, resultando na elaboração do catálogo pela SEMTEC;
> V. Produção Gráfica do Catálogo de Escolha: consistirá na contratação dos serviços para produção gráfica do catálogo e dos demais instrumentos para escolha e distribuição dos livros didáticos às escolas;
> VI. Escolha dos Livros: consistirá no processo de escolha dos livros pelos professores, no âmbito das escolas. [...]

Desde o projeto piloto de incluir as escola públicas do Ensino Médio no programa de acesso ao livro didático, já existia uma preocupação quanto a qualidade do material a ser disponibilizado, visto que todo esse processo estava relacionado com experiências anteriores realizadas no Ensino Fundamental, por também tratar de maneira criteriosa a respeito das obras que deveriam previamente atender um edital, passando posteriormente a avaliação pedagógica e metodológica que eram trabalhadas em cada obra aprovada, segundo as normas do edital publicado. E para auxiliar a escolha do professor é produzido um material complementar chamado de Guia de Livros Didáticos (implementado no ano de 1996, para os livros de 1ª a 4ª série[3]), destacando os pontos positivos e negativos apresentados nas obras analisadas.

[3]A Lei Federal nº 11.114, aprovada em maio de 2005, estabeleceu a alteração de série para ano e nova estrutura do Ensino Fundamental.

Mas foi a partir do ano de 2006, que a distribuição dos livros didáticos de matemática e português passaram a ser realizadas as demais regiões do pais, ocorrendo de maneira progressiva a inclusões de materiais de outras áreas do conhecimento, e finalmente no ano de 2011, foram distribuídos integralmente livros didáticos correspondentes a todo currículo do Ensino Médio para serem utilizados no ano de 2012, destaca-se a preocupação em fornecer material didático específico para modalidade de educação de jovens e adulto (EJA).

O quadro abaixo lista as obras que foram aprovados para os anos de 2018-2020. As obras foram disponibilizadas as escolas e submetidas as processo de analise dos professores.

Tabela 1: Obras de Matemática aprovadas no âmbito do PNLD 2018

EDITORA	**CÓDIGO**	**COLEÇÕES**
ÁTICA	0008P18023	MATEMÁTICA-CONTEXTO &APLICAÇÕES
SM	0070P18023	QUADRANTE-MATEMÁTICA
SARAIVA	0082P18023	MATEMÁTICA: CIÊNCIAS E APLICAÇÕES
SARAIVA	0096P18023	MATEMÁTICA PARA COMPREENDER O MUNDO
LEYA	0127P18023	MATEMÁTICA: INTERAÇÃO E TECNOLOGIA
FTD	0155P18023	#CONTATO MATEMÁTICA
MODERNA	0180P18023	MATEMÁTICA-PAIVA
MODERNA	0195P18023	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA

Fonte:[3]

Percebe-se que foi estabelecido a forma de como ocorre a escolha do livro didático, mas ainda não está claro quanto aos critérios que fundamentam as obras aptas como opções aos professores no tópico de logaritmo. Em relação as obras atuais, que serão uma das fontes de pequisa, o guia dos livros didáticos ([**?**], p.14) , esclarece quais são os critérios gerais:

> a. respeito à legislação, às diretrizes e às normas oficiais relativas ao Ensino Médio;
> b. observância de princípios éticos e democráticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano;
> c. coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica assumida pela obra no que diz respeito à proposta didático-pedagógica explicitada e aos objetivos visados;
> d. respeito à perspectiva interdisciplinar na abordagem dos conteúdos;
> e. correção e atualização de conceitos, informações e procedimentos;
> f. observância das características e finalidades específicas do manual do professor e adequação da obra à linha pedagógica nela apresentada;
> g. adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico aos objetivos didático-pedagógicos da obra.

E de maneira particular, os critérios para a escolha do livro de matemática apresentado no Guia ([?], p.14) consiste em:

> 1. incluir todos os campos da Matemática escolar, a saber, números, álgebra, geometria e estatística e probabilidade;
> 2. privilegiar a exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas;
> 3. apresentar os conceitos com encadeamento lógico, evitando: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas, entre outros;
> 4. propiciar o desenvolvimento, pelo estudante, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização, entre outras.

O guia do livro didático não oferece uma abordagem individual para cada tópico presente nas coleções selecionadas, mas apresenta de que forma os critérios particulares podem ser alcançados por campo do saber em: números e operações, álgebra, geometria, estatística e probabilidade. Dentro da análise de cada campo do saber são feitas observações quanto ao uso de tecnologias, textos motivadores, aplicações, resoluções de problemas, envolvimento com o cotidiano, observações quanto ao uso insistente em métodos manipulativos e conceitos que estão incompletos ou apresentados de uma forma clara, objetiva e significativa, e por vezes por ideias que só levam a uma maior obscuridade sobre definições e propriedades matemáticas.

Uma importante contribuição do guia é evidenciar que o livro didático é mais uma ferramenta auxiliar no processo de ensino, cabendo ao professor dentro de sua realidade gerir meios que possibilite o tratamento mais heterogêneo possível nas suas práticas de ensino.

> Valorizar o papel do livro didático não significa, contudo, que ele seja dominante no processo de ensino e aprendizagem, em detrimento da atuação do professor. Isso porque, além das tarefas inerentes à condução das atividades da sala de aula ou fora dela, o professor sempre pode ampliar o seu repertório profissional com fontes bibliográficas e outros recursos complementares. Guia Do Livro Didático ([?], p.13):

Na detalhada verificação do guia, não é possível estabelecer uma linha de comparação no tópico de logaritmos nas obras que estão sendo resenhadas, portanto para entender como cada obra distribui e reconhece a forma mais adequada para o tratamento do conteúdo de logaritmo, portanto fazer a exploração física das obras surge por opção, mas seria se resumiria a apenas informar que uma obra apresenta uma linguagem adequada, se está com exercícios ou problemas mais bem trabalhados, a existência ou não do uso da tecnologia, sendo que isso já é feito de uma forma generalizada pelo guia dos livros didáticos.

Estabelecer critérios e parâmetros mínimos necessários para verificar a abordagem de um conteúdo como a mais adequada possível, não significa atribuir somente ao livro a sistematização dos conhecimentos que devem ser difundidos. Na obra de [16], relaciona a escolha dos conteúdos ao domínio seguro da matéria, sensibilidade crítica e a capacidade do professor em confrontar o livro didático com a prática de vida dos alunos e a realidade.

Tabela 2: Coleções com o maior número de tiragem

EDITORA	COLEÇÕES	TIRAGEM
SARAIVA	MATEMÁTICA: CIÊNCIAS E APLICAÇÕES	1.875.264
ÁTICA	MATEMÁTICA-CONTEXTO &APLICAÇÕES	1.578.805
FTD	#CONTATO MATEMÁTICA	1.387.227
MODERNA	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	756.739
SM	QUADRANTE-MATEMÁTICA	572.576
SM	MATEMÁTICA PAIVA	563.294

Fonte: As informações foram prestadas pela equipe do livro didático do FNDE, diretamente com a coordenação de cálculo e orçamento (Protocolo de Atendimento inicial: 2018-0016609273)

Das obras aprovadas pelo PNLD, foram selecionadas as seis que correspondem a quase 93% das coleções distribuídas no país.

As obras serão analisadas por um critério comum que são as Componentes Básicas para o Ensino da Matemática, onde todas as obras serão submetidas a um mesmo parâmetro de comparação. O próximo capítulo é a exploração do que são as Componentes Básicas, e se representam critérios objetivos ao julgar a adequação do tópico de logaritmo nos livros didáticos.

3 Componentes Básicas para o Ensino da Matemática

A conceituação, manipulação e aplicação, são considerados por [19], como suficientes para assegurar a harmonia do ensino e cada uma dessas componentes são necessárias para o seu bom êxito. Essas três componentes na medida certa é fator de equilíbrio de aprendizagem na matemática. Vejamos o que são cada uma delas segundo [19] e ampliando as definições com outras propostas teóricas de ensino.

3.1 Conceituação

Por conceituação entende-se por capacidade de atribuir significados, uma busca de sentidos e compreensão aos aspectos formais da matemática, sendo a matemática também um domínio conceitual. Ela não é, como muitos pensam, uma lista de fatos e métodos a serem lembrados [1]. Segundo em [17], p.154:

> A *conceituação* compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos sob formas e termos. (Grifo do autor)

A conceituação compreende quando vinculada ao ensino e a aprendizagem os seguintes pontos:

- As definições matemáticas devem ser apresentadas de forma objetiva e correta, dando significado preciso ao discurso e do seu conteúdo.
- Algumas demonstrações podem ser apresentadas deixando claro o que é uma hipótese (suposição) e uma tese (o que quer provar).
- Noções conceituais corretas podem ser reformuladas e interpretadas de diferentes formas, estabelecendo conexões entre diferentes tópicos da matemática.

3.2 Manipulação

A manipulação remete a utilização da memória em experiências conceituais, operações, manuseio de símbolos e relações matemáticas durante o aprendizado escolar.A

Memória as vezes pode se referir aquilo que ficou gravado, ou seja, aprendido. E de maneira simplificada [34], estabelece o conceito de memória num evento que consta de, pelo menos, três fases: Aquisição, formação e consolidação, e evocação. Assim, só é possível retomar conhecimentos anteriores se estes tiverem sido consolidados no processo de ensino e aprendizagem. Ainda sobre o significado da manipulação em [17], p.154:

> A *Manipulação*, de caráter principalmente (mas não exclusivamente)algébrico, está para o ensino e aprendizagem de matemática assim como a prática de exercícios e escalas musicais está para a música[...]. A habilidade e a destreza no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permite ao usuário da matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, poupando-lhe a perda de tempo e energia com detalhes secundário.(Grifo do autor)

Nota-se que a manipulação vai além de usar símbolos e relações, é a prática consciente dos conhecimentos adqueridos.

3.3 Aplicações

Não é incomum alunos buscarem saber o motivo em ter que aprender determinado conteúdo, e simplesmente o professor dizer que deve aprender, pois foi aquilo que recebeu de ofício baseado no currículo e projeto politico pedagógico institucional. De fato isso não é mentira, mas de nada atende a essência da pergunta do aluno, esperando uma resposta que lhe deixe confortável, motivado e curioso pelo que virá.

Porém, antes que o aluno questione sobre o novo conteúdo, o professor de forma crítica e com boas argumentações pode começar apresentando as aplicações e o alcance do conteúdo a ser estudado. "Assim, o professor precisa saber avaliar a pertinência dos objetivos e conteúdos propostos pelo sistema escolar oficial[...]Deve também saber compatibilizar os conteúdos com necessidades, aspirações, expectativas da clientela escolar[...]"([16] p. 121).

Quando são propostos problemas para os quais os estudantes precisam conhecer um método antes de apresenta-lo, é dado a oportunidade de aprender e usar a intuição [1]. Sobre aplicações em [17], p.155:

> *Aplicações* são emprego das noções das teorias da matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do di-a-dia a questões mais sutis que surgem em outras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais.(Grifo do autor)

São nas aplicações que se evidencia a necessidade da matemática, a busca em resolver problemas de modo claro, preciso e indiscutível. Mas alguns preceitos devem está presentes [17]:

- As aplicações não substituem a conceituação e manipulações.
- Não privilegiar temas ou abordagens que não busque a harmonia, ou seja, o equilíbrio entre as três componentes básicas do ensino;

O esquema abaixo extraído de ([34], p.186), representa o percurso segundo os estudos da neurociência que são necessários para obtenção das competências em matemática. O esquema foi elaborado a partir de pesquisas sobre os transtornos da aprendizagem com foco na discalculia. São as reação internas ao individuo que segundo a pesquisa são necessárias para a aprendizagem em matemática. Qualquer falha em uma dessas etapas irá prejudicar o alcance adequado as competências em matemática.

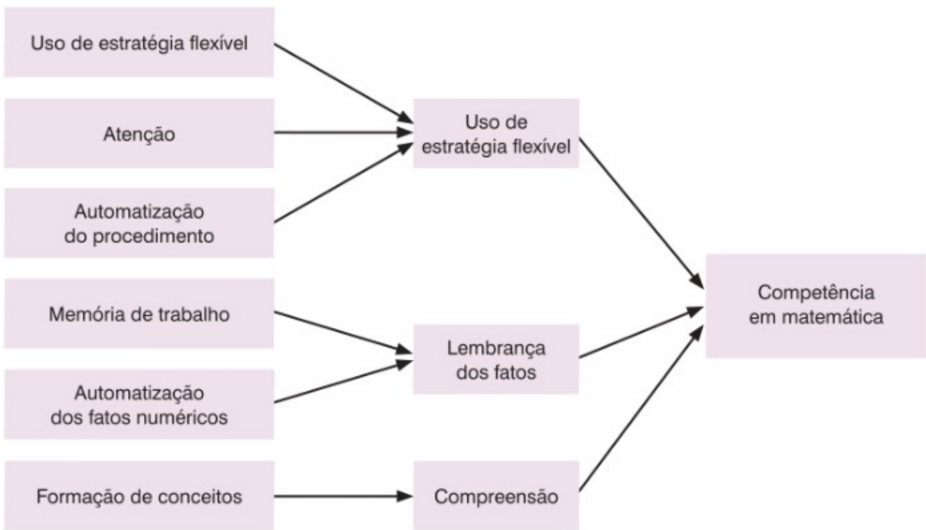


Figura 6: Habilidades necessárias para competência em matemática, com destaque para atenção.
Fonte:[34]

Evidências da neurociência revelam que todas as pessoas com mensagem de ensino adequado, podem ser bem sucedidas em matemática com alto nível de desempenho nas atividades escolares [1]. Qualquer criança cuja capacidade mental lhe permita aprender a ler e escrever é capaz de aprender matemática e qualquer outra disciplina ([19], p.2).

O percurso para o alcance das competências em matemática segundo [34], trás as Componentes Básicas, relações entre teoria e prática, e atitudes individuais no processo de ensino e aprendizagem. Seguindo na verificação das Componentes básicas na dimensão didática por meio das tendências metodológicas e na dimensão avaliativa

4 Componentes Básicas para o Ensino da Matemática: Dimensão Metodológica e avaliativa

Deve-se desenvolver práticas pedagógicas inovadoras ou mesmo fazer uso de propostas testadas dentro de um determinado contexto, mas adaptada para que seja a mais eficaz possível do ponto de vista da educação na formação do aluno ([8] p. 76). O capitulo será desenvolvido para examinar a relação das Componentes Básicas e algumas tendências metodológicas do ensino e aprendizagem em matemática e a dimensão avaliativa. Apoiado nas referências [8], [31] e [30].

4.1 Dimensão Metodológica

A lista de recursos criados para tornar a vida humana mais prática, podem ser enumeradas começando pelo simples cartão de crédito e percorrer a lista com o acesso a informação e comunicação com a internet, aplicativos que permitem a comunicação de forma síncrona, celulares que dispensam uso de computadores domésticos, manipulação de alimentos tornando-os mais resistentes a pragas, procedimentos médicos auxiliados por robôs, Tv a cores, caneta esferográfica, pen drive e vamos parar por aqui, pois listar esses recursos compreenderia outro trabalho de pesquisa. Mas todos os recursos que foram citados apresentam algo em comum, que é o fato de quase todos serem creditados ao século XX (dessa lista só exclui o pen drive, sendo do século XXI). Então um olhar para o hoje sem apenas os recursos que foram citados, é uma instauração de um retrocesso e a readaptação ao modo de vida que já foi alterado pelo sociedade. "Com tantos meios de informação e diversão, entende-se que alunos reajam ao ambiente escolar de modo bem diferente até poucos anos atrás. Assim, é necessário ter em mente que aquilo que funcionou bem nas escolas até a década de 1970 já não surtiu bons efeitos nos anos de 1990 e está obsoleto no século XXI". ([39], p.8).

Diante dessas mudanças que vão ocorrendo com o passar do tempo a educação o processo de ensino e aprendizagem, aqui destando a relação professor e aluno, não estão isentos de mudanças, pois o professor e o aluno, são indivíduos que pertencem a sociedade, trazendo consigo seus valores, crenças e experiências. "Por causa de suas experiências biológicas e culturais, históricas pessoais e experiências idisiocraticas, os estudantes não chegam a escola como tábuas rasas e nem como indivíduos que podem ser alinhados unidimensionalmente ao longo de um eixo único de realizações intelectuais" ([14], p. 128) que interagem com o meio modificando o sendo modificado. Então aquilo que antes poderia funcionar nas salas de aulas como técnicas e uso de recursos didáticos para o ensino da matemática, atualmente podem não ter a mesma eficácia, proporcionada até mesmo pela própria matemática que está em constante desenvolvimento, por ser uma disciplina dinâmica, e uma ciência em construção. Em [17], p. 161:

> É bem verdade que a validez das teorias matemáticas é perene e subsiste através dos séculos. Porém a posição dessas teorias e das técnicas a elas associadas em face dos novos desenvolvimentos, das novas descobertas e da ocorrência de áreas recentes de aplicação, dentro e fora da matemática. Tais mudanças devem necessariamente refletir-se no ensino, a fim de que este cumpra sua missão primordial de preparar os jovens para a vida moderna.

E observando esses fatores em modificação que um movimento sobre a educação matemática dedicado ao estudo da aprendizagem e ensino de matemática, e os fatores que os permeiam, motivaram e estabeleceram mudanças no currículo na área de matemática. Propostas e intervenções são temas frequentes em congressos com a preocupação de discutir conteúdos e metodologias de ensino da matemática, intercâmbio e troca de experiências com profissionais de outros países como inspiração e incentivos para formação de grupos de estudos voltados de forma específica para a didática em matemática, pois como toda ciência a matemática detém saberes exclusivos e particulares. Portanto, investigar essas relações individualizada da matemática com a aprendizagem e o ensino confere em resumo ao movimento em educação matemática.

Impulsionado no final da década de 70 no Brasil, uma forte corrente em prol de novos modelos, posturas e importância da matemática, traduzida em uma disciplina além da transmissão de formalidades e conhecimentos prontos e acabados para uma postura crítica, autônoma e política dos alunos. Onde são delineadas metodologias chamadas de tendências em educação matemática. A educação matemática como ciência não prioriza o ensino e nem a aprendizagem, é vista "como resultante das múltiplas relações que se estabelecem entre o específico e o pedagógico num contexto construído de dimensões histórico-epistemologicas, psicocognitivas, histórico-culturais e sócio políticas"([8], p.5).

E algumas dessas Tendências Metodológicas em Educação Matemática são: Resolução de problemas, modelagem matemática, etnomatemática, história da matemática, tecnologia da informação e comunicação, jogos na educação matemática, investigação matemática em sala de aula, filosofia da matemática dentre outras. As tendências que enumeramos são linhas interacionais de pesquisas em educação matemática ([8], p.52). Não obstante do fato que recorre-se as Componentes Básicas para o Ensino da Matemática, existe uma lacuna a ser preenchida que é perceber a metodologia que pode ser utilizada quanto ao objetivo do ensino, se algumas dessas metodologias apresenta um ou mais Componentes Básicas.

Os logaritmos foram criados a partir das dificuldades enfrentadas na resolução de longos cálculos no século XVII, percebe-se a importância da história dos logaritmos na justificativa do conteúdo como produção da ação humana, tábuas de logaritmos perderam espaço para as calculadoras, celulares e computadores. Essas reflexões, direcionam as tendências metodológicas baseadas na resolução de problemas, estudo da história da matemática e Tecnologias da informação e comunicação.

4.1.1 Tendência em Educação Matemática: Resolução de Problemas

As pesquisas sobre a história da matemática relatam que os registros encontrados foram motivados por problemas que surgiam na tentativa de entender padrões e casos que fugiam aos padrões e generalidades, gerando a inquietação, curiosidade e proporcionada pela natureza investigativa de muitos matemáticos. Registro de resoluções de problemas foram encontrados no papiro de Rhind datado de 2000 a 1800 a.C. O papiro Rhind constitui uma fonte rica sobre a matemática egípcia antiga e o desenvolvimento da matemática, contendo muitas aplicações da matemática a problemas práticos distribuídos em 85 problemas numéricos ([7], p.70).

O matemático Geoge Polya (1887-1985) em sua obra "a arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático", demonstra seu incentivo e motivação de utilizar a metodologia da resolução de problemas na aprendizagem e ensino da matemática. Considera que a resolução de problemas procede a esquematização de quatro fases consideradas primordiais na aquisição de conhecimento por parte do alunos, onde essas fases quando suprimidas poderiam gerar algum prejuízo no aprendizado. Em ([31], p.3-12), as quatro fases são:

> **Compreensão do Problema.** [...] O aluno deve compreender o problema, mas não só isso, deve também desejar resolvê-lo. [...] Primeiro que tudo, o enunciado verbal do problema precisa ficar bem entendido.
> [...] **Estabelecimento de um plano.** Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso.
> [...] **Execução do plano.** Conceber um plano, a ideia da resolução, não é fácil.
> [...] **Retrospecto.** [...] se fizerem o retrospecto da resolução completa, considerando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou ate este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. (Grifo do autor)

Essas fases determinam posturas frente ao problema e evidencia que o problema deve despertar o desejo em encontrar sua resolução, constituindo um desafio a ser superado.

Em [40], os problemas são divididos em categorias: exercícios de reconhecimentos, onde seu principal objetivo é fazer recordar uma propriedade, teoria, definição, utilizando-se tão somente da memória. Exercícios algorítmicos, cuja ênfase é a manipulação, transformações algébricas e cálculos numéricos. Problemas de aplicação, parte da transformação da matemática escrita em algoritmos que possam ser manipulados. Problemas de pesquisa aberta, são aqueles que em seu enunciado não apresentam palavras que indiquem que tipo de estratégias ou procedimentos algorítmicos podem ser utilizados. E por fim Situações-Problemas, são situação a serem investigadas, envolvendo outras áreas do conhecimento e que muitas vezes podem ser identificadas no cotidiano, essa categoria aproxima o aluno da realidade e contribui para responder à questão relacionada onde pode ser aplicado determinado conteúdo, algoritmos e procedimentos.

A Resolução de problemas, como tendência da Educação Matemática considera os educandos como participantes ativos do processo de aprendizagem. A efetivação de práticas pedagógicas no ensino da Matemática de modo que a própria disciplina torne-se um caminho que leve a pensar, organizar, analisar, refletir e tomar decisões. Segundo ([36], p. 52-53):

> A resolução de problemas como ação didática, como provocadoras dos movimentos de aquisição de saberes, requer a seleção de problemas que realmente exijam dos alunos algumas habilidades na busca de estratégias de resolução. As operações matemáticas ocorrerão por necessidade na busca pela solução apropriada.

Em [22], incentiva que conteúdos matemáticos devem ser iniciados com problemas instigantes, criativos e bem elaborados. Que os problemas devem ser escolhidos de maneira cuidadosa, fugindo de expressões que evidenciam ao aluno sobre que conteúdo deve fazer uso. Ainda pontua que problemas bem construídos favorecem a aplicação dos fundamentos do ensino de matemática, pois na formulação de ideias deverá ter bem construído os conceitos para que possa verificar sua validade na solução do problema e nessa fase de verificação terá que manipular símbolos e operações.

Na Tendência metodológica na resolução de problemas, a manipulação, conceituação e aplicação é uma escolha feita a partir da categoria de problema selecionado.

4.1.2 Tendência em Educação Matemática: História da Matemática

No tópico de logaritmo a estreita relação com a história da matemática vai além de anedotas que podem ser contadas ou de situações improváveis. É compreendido o seu surgimento pela necessidade verificada a princípio em reduzir o tempo de trabalho em extensos cálculos. Mas ainda existe o contexto histórico-social e cultural de quando os logaritmos foram apresentados ao mundo, onde teorias, conceitos e propriedades levam tempo para serem reconhecidas e formalizadas. Usar a história da matemática como proposta de ensino e aprendizagem não é somente fazer o discurso sobre tempo e espaço dos acontecimentos e apresentar os que deram início as descobertas numa análise biográfica.

Nota-se que nos livros didáticos a história da matemática é colocada para trabalhar as primeiras motivações e importância do conteúdo a ser desenvolvido, surge apenas dentro do aspecto de curiosidade. A história da matemática que é compreendida sua importância, pois beneficia o "desenvolvimento da aprendizagem matemática dos alunos em sala de aula é uma história que tem a vocação de explicar a organização conceitual das matemáticas produzidas no tempo e no espaço"([25], p.17). E sobre qual história da matemática os autores se referem:

> Diante do que foi mencionado anteriormente, podemos asseverar que a história da matemática que consideramos adequada para ser inserida no desenvolvimento conceitual dos estudantes refere-se diretamente ao desenvolvimento epistemológico das ideias, conceitos e relações matemáticas ensinadas e aprendidas na Educação Básica e no Ensino Superior. Trata-se, mais concretamente, das histórias relacionadas aos aspectos matemáticos em seu processo de criação, reinvenção e organização lógica, estabelecido no tempo e no espaço com a finalidade de sistematizar soluções de problemas de ordem sociocultural, científica e tecnológica, em todos os tempos e lugares. (p.19)

Para [36] Silveira (2008), "levar em consideração o desenvolvimento histórico de um conceito pode auxiliar o trabalho em sala de aula, pois em muitos momentos o aluno poderá passar por dificuldades semelhantes por aquelas que passaram os matemáticos". O desenvolvimento da matemática não ocorre de forma perfeitamente encadeado, muitas vezes o trabalho em constituir objetos de estudo da matemática para ter sua aplicação prática, necessita de instrumentos que ainda não foram concebidos, então avanços e retrocessos, erros e acertos fazem parte de maneira natural do estudo da matemática.

No dia 20 de dezembro de 2017 foi aprovada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que norteará o ensino infantil e Fundamental. Ela servirá de referência para a construção dos currículos em toda a rede pública do país. Quanto a base referência para o Ensino Médio, ainda se encontra em construção, mas o que chama atenção no documento para nosso estudo é o desafio proposto ao professor que desde os anos finais do Ensino Fundamental a história da matemática é reconhecida por ser um importante recurso didático. Conforme a BNCC ([5] p.296):

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.

Objetivamente sob o olhar dos autores mencionados, é notório que a didática matemática apoiada na história da matemática é capaz de proporcionar uma aprendizagem dinâmica, reflexiva sobre os conhecimentos historicamente construídos. Quanto as Componentes Básicas para o Ensino, é verificado a prevalência do estudo da parte conceitual, sua evolução e mudanças no decorrer do tempo, mas implicitamente existe a necessidades de manipulações na aplicação do conceito dentro de um determinado contexto. No livro "Meu Professor de Matemática e outras histórias"do professor Elon

Lages Lima, a história da matemática é o principal componente da obra na explicação de notações, símbolos e o desenvolvimento de ideais matemáticas constituídas ao longo da história. Em [22], no capitulo intitulado "Sobre a evolução de algumas ideias matemática", sintetiza sobre o tópico de logaritmos e de maneira especifica os logaritmos naturais e faz uma comparação entre a importância assumida pelos logaritmos no século XVII e nos dias atuais.

4.1.3 Tendência em Educação Matemática: Tecnologias da Informação e Comunicação - TIC´s

É improvável não reconhecer o destaque que as aplicações matemáticas ganharam na criação desse mundo de "coisas"e aqui o uso da palavra "coisa"em sua forma literal, por representar tudo aquilo que possa existir de forma corpórea ou incorpórea. Na matemática aplicada para constituir e contribuir na criação de objetos, ferramentas e recursos tecnológicos, por vez as linhas de pesquisa em matemática que ainda terão que ser cada vez mais exploradas para ter sua aplicabilidade. "Ninguém pode, em sua sã consciência, negar a enorme importância prática das calculadoras e muito menos a posição fundamental dos computadores na organização da sociedade moderna"([17], p. 185).

Alunos que dentro e fora da escola fazem uso de recursos tecnológicos atuais, tabletes, celulares com alto nível de desempenho, computadores, exploram o mar de informação com auxílio da internet. "A matemática foi uma das primeiras disciplinas em que se fez uso do computador em sala de aula"([38], p.83). A matemática participa de maneira protagonista na criação desses recursos, então explorá-los em sala de aula é atender o anseio dos alunos em relacionar o que eles já conhecem aos conceitos e aplicações do conhecimento matemático.

Ainda em [38], destaca que somente reconhecer as TIC´s rica em modelos que podem ser inseridos no ambiente escolar na aprendizagem e ensino de matemática é trivial. O que não pode ser colocado de lado nesse trabalho de mediação entre aprendizagem e uso das tecnologias é quem está gerindo o ensino, seu preparo e qualificação para obter êxito. Nesse contexto em ([38], p.86):

> Em primeiro lugar, muitos dos ambientes tecnológicos, tais como geometria dinâmica, a álgebra computacional e as planilhas eletrônicas, são ricos e complexos. É exatamente por essa razão que são tecnologias potencialmente produtivas para a aprendizagem de matemática. No entanto, isso também significa que os pesquisadores precisam eles mesmos aprender como usar essas ferramentas para trabalhar com matemática. Em segundo lugar, muitas dessas ferramentas são tão poderosas, tem tanto potencial que é difícil para os professores saber por onde começar. A geometria dinâmica, por exemplo, poderia ser usada para ensinar propriedades dos círculos ou funções e gráficos. Embora haja tantos livros, artigos e websites que ofereçam ideias para se começar, só as ideias não são suficientes. Os professores precisam de apoio para se arriscar a usar TIC´s na sala de aula, especialmente quando estão trabalhando em sistema de avaliação de alta exigência.

Assim, relacionando com as tendências anteriores, as TIC´s de maneira se mostram uma proposta didática no ensino da matemática que precisa ser definida dentro das propostas de atividades, qual a Componente do ensino da matemática será dado preferência ao aplicá-la. Ressalta-se a crítica de [17], ao mencionar que os computadores não são soluções milagrosas para problemas relacionados ao ensino e aprendizagem de qualquer matéria, quando outros obstáculos ainda persistem, professores com baixos salários a falta de políticas públicas visando a qualificação profissional e escolas com infraestruturas inadequadas. Em [8], p.46:

> Parece haver uma crença, entre alguns responsáveis pelas políticas educacionais, de que as novas tecnologias são a panaceia para solucionar os males da educação atual. Essa é mais uma razão pela qual a comunidade EM deve investigar seriamente a implementação e utilização das TICs, pois, se, de um lado, pode ser considerado relativamente simples equipar as escolas com essas tecnologias, de outro, isso exige profissionais que saibam utilizá-las com eficácia na prática escolar.

Nesse sentido, é observado que usar as TIC´s em sala de aula é uma metodologia na educação matemática que precisa de cuidado quanto aos objetivos almejados ao aplicar atividades, que para alguns alunos pareça simples já para outros as dificuldades acabem sendo potencializadas, por não terem familiaridade com essas ferramentas. E que as atividades propostas não fiquem limitadas ao passo a passo, que pouco exige do processo de reflexão crítica. O uso das TIC´s assumirá o objetivo que for traçado pelo professor em qualquer uma das Componentes Básicas para o Ensino da Matemática.

4.2 Dimensão Avaliativa

As avaliações nacionais e internacionais fazem uso de matrizes de referência que estabelece de forma geral as habilidades e competências que espera-se ser demonstrada pelos estudantes [13]. Vamos averiguar o quanto as Componentes Básicas para o Ensino da matemática, constam de maneira explicitamente ou implicitamente nessas avaliações.

4.2.1 Prova Brasil

A Avaliação Nacional de Rendimento Escolar (Anresc) criada pela portaria do MEC n° 931, de 21 de março de 2005, conhecida como Prova Brasil, faz parte do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) que desde 1990 atua com o objetivo de "realizar um diagnóstico da educação básica brasileira e de alguns fatores que possam interferir no desempenho do estudante, fornecendo um indicativo sobre a qualidade do ensino ofertado" [13].

Em relação a matriz referência é destacado que é apenas um recorte do currículo, não significando orientações metodológicas ou procedimentos a serem seguidos. É constatado o recorte quanto ao conteúdo de logaritmos quando habilidades são resumidas a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial [12].

Há um divisão em dez níveis crescente de desempenho e o tópico de logaritmo é reconhecido por uma habilidade ou competência alcançada no nível 9. Onde a interpretação e a aplicação da função exponencial e logaritmo são exigidas em problemas contextualizados. Conforme ([12], p.64), no nível nove "é provável que seja capaz de determinar a expressão algébrica correspondente a uma função exponencial, com base em dados fornecidos em texto ou gráfico; a inversa de uma função exponencial dada, representativa de uma situação do cotidiano."

E em relação as operações cognitivas, há a divisão em três níveis de competência em Ciências da Natureza e Ciências Humanas que são o de reconhecer os conceitos, compreender os conceitos e aplicar os conceitos. Em [12], p.36:

> A) Reconhecimento de conceitos em situações/contextos: identificar, reconhecer,nomear, distinguir, caracterizar, listar, citar, classificar, comparar, associar, ordenar, selecionar, decodificar, relacionar.
> B) Compreensão de processos: caracterizar, analisar, interpretar, explicar, confrontar.
> C) Uso de conceitos em situações-problema: sintetizar, extrapolar, julgar, inferir.

No entendimento das Componentes Básicas para o ensino da matemática é possível correlacioná-lo com o eixo de operações cognitivas tratados no "Relatório SAEB 2005-2015: Panorama de uma Década"[12]

4.2.2 PISA

O Pisa - Programa Internacional de Avaliação de Alunos - é uma avaliação internacional, aplicado aos países que fazem parte da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Países que não são membros da OCDE, também podem participar por via convite da organização. O PISA é reconhecido mundialmente como uma das avaliações mais importantes sobre o ensino e aprendizado que mede o nível educacional de jovens de 15 anos por meio de provas de Leitura, Matemática e Ciência. Avaliação que é aplicada a cada três anos com foco em um dos eixos avaliados. O objetivo principal do Pisa é produzir indicadores que contribuam, dentro e fora dos países participantes, para a discussão da qualidade da educação básica e que possam subsidiar políticas nacionais de melhoria da educação [13].

E recentemente o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA[4]) lançou em janeiro de 2018 a tradução do relatório sobre o PISA realizado em 2012, onde o foco foi a matemática. O documento intitulado de Ten Questions for Mathematics Teachers...and How PISA can Help Aswer Them (10 questões para professores de matemática ... e como o PISA pode ajudar a respondê-la), apresentou os componentes que podem ser considerados fundamentais na aprendizagem da matemática, são eles: Memorização, Estratégia de controle e Estratégias de elaboração. Examinamos a relação desses fundamentos com as Componentes Básicas para o Ensino da Matemática.

Por memorização é dado o entendimento que é "aprender completamente algo para que possa ser posteriormente recobrado ou repetido"([27], p.37). E retomando a Componentes Básica manipulação, percebe-se uma estreita relação com a memorização, pois

[4] O Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) é uma unidade de ensino e pesquisa qualificada como Organização Social vinculada ao Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC) e ao Ministério da Educação (MEC). Fonte: https://impa.br/sobre. Acesso:30.03.2018.

foi destacado o desenvolvimento de atitudes automática e principalmente sobre reflexos condicionados."Em aulas de matemática, os professores muitas vezes encorajam alunos a usar suas memórias através de atividades como simulados, exercícios periódicos e questionários"([27], p.37). No relatório do PISA a memorização é apontada como necessária, porém carente de outras estratégias de aprendizado, pois não consegue atingir um grau de cobrança mais complexa no entendimento da matemática, e, de acordo com os dados levantados, a estratégia somente é significativa quando os alunos são submetidos a problemas considerados fáceis.

Em linhas gerais estratégia de controle "está relacionada a conceitos como eficiência, aprendizado estratégico, autorregulação e metacognição"([27], p.47).O aluno tem o controle daquilo que planejou para aprender, estabelecimento de metas e entendimento objetivo e preciso sobre os métodos que foram aplicados para solucionar um problema, questionamentos são motivados entre os alunos para que possam demonstrar a capacidade de argumentar matematicamente e descobrir por meio da reflexão porque diferentes métodos funcionam e o que pode ser desconsiderado a partir de conclusões objetivas sustentada nos conceitos matemáticos. E sob essas perspectivas, percebe-se a estreita relação da Componente Básica que se refere a conceituação.

As estratégias de aprendizado conhecidas como estratégias de elaboração encorajam os estudantes a fazerem conexões entre tarefas de matemática, a fazerem ligações entre o aprendizado do aluno e seus conhecimentos prévios e situações da vida real; e a encontrarem diferentes maneiras de resolver um problema. Essas estratégias de aprendizado incluem desenvolver analogias e exemplos, fazer brainstorming[5], usar mapas conceituais e encontrar diferentes maneiras de resolver um problema.([27], p.57) Estratégias de elaboração são especialmente úteis quando ajudam os estudantes a entenderem novas informações em matemática e reterem essa informação a longo prazo.

No Relatório do PISA, publicado pelo IMPA e as Componentes Básicas para o Ensino da Matemática é percebido simplificadamente a seguinte relação: manipulação e memorização, conceitos e estratégia de controle, aplicações e estratégias de elaboração.

As propostas metodológicas para o ensino de matemática reúnem todas as componentes básicas ou priorizam uma delas. Na dimensão avaliativa as competências exigidas ao bom desempenho da matemática é a percepção do equilíbrio entre as Componentes Básicas para o Ensino da Matemática.

[5]Tempestade de ideias, mais que uma técnica de dinâmica de grupo, é uma atividade desenvolvida para explorar a potencialidade criativa de um indivíduo ou de um grupo. Disponível em: https://www.significados.com.br/brainstorming/. Acesso: 05.04.2018

Foi verificado que analisar o tópico de logaritmo fundamentado nas Componentes Básicas, podem oferecer um resultado objetivo do quanto o conteúdo está adequadamente explorado no livro didático.

5 Análise do tópico de logaritmo nos livros Didáticos

O livro Publicado no ano de 2001 e intitulada de "Exame de Texto" [21], reuniu as doze coleções de matemática mais populares do Brasil que foram analisadas por um grupo de especialistas na área da matemática e organizada por Elon Lages Lima. De maneira detalhada, exploraram as coleções no que diz respeito a matemática do Ensino Médio. É observado que o tópico de logaritmo é tratado de maneira individual; as obras são minunciosamente resenhadas e os autores responsáveis por analisar cada obra, fazem críticas e discorrem sobre o excesso, erros gráficos, apresentação inadequada de formalidades matemáticas, exercícios com contextos construídos inadequadamente, excesso de manipulações que reforçam uma ideia que aprender matemática é apenas uma aplicação de fórmulas.

E sobre a importância do livro didático em ([33], p.43) a matéria sobre a obra "Exame de Textos" menciona que:

> O livro didático é o instrumento essencial utilizado pelo professor para realizar seu trabalho. Dele são tirados as listas de exercícios, é nele que estão as definições, os exemplos, as observações, as demonstrações e a linguagem a ser usada na comunicação com a classe. Muitas vezes (quase sempre) o livro didático é onde o professor aprende aquilo que vai transmitir a seus alunos, pois em geral não estudou na faculdade (se é que frequentou alguma) um número considerável de assuntos que fazem parte do currículo.

Assim, é ressaltado a responsabilidade em produzir livros didáticos de qualidade. O nível e a qualidade do ensino dificilmente são superiores ao nível e qualidade dos livros didáticos disponíveis ([33], p.45).

Ao fazer a análise das coleções na obra "Exame de Textos" foram definidos os critérios e parâmetros, sem deixar de respeitar a lei de diretrizes de base da educação. As Componentes Básicas para o Ensino da Matemática: Conceituação, Manipulação e Aplicações, são utilizados para padronizar o aspecto de comparação entre os livros analisados, conforme visto no capítulo anterior que as Componentes Básicas, representam competências a serem alcançadas por meio da aprendizagem e cobradas nos processos de avaliação, sejam internas ou externas.

A partir das críticas que foram feitas as coleções no livro "Exame de Textos" foi construída uma lista com sugestões que podem ser usadas para verificar a adequação do tópico de logaritmo as Componentes Básicas para o Ensino da Matemática.

Críticas observadas e Sugestões propostas

C1: Inicia o capítulo com uma situação problema realista.

C2: Discussão do papel histórico desempenhado pelos logaritmos.

C3: As propriedades das funções logarítmicas são mencionadas e demonstradas.

C4: Sobre a mudança de base é comentado que um logaritmo pode representar qualquer outro, bastando para isso uma constante conveniente.

C5: Apresenta a função logarítmica como inversa da função exponencial.

C6: Compara a função logarítmica e exponencial em relação ao crescimento ou decrescimento.

C7: Generalização das funções logarítmicas nos reais.

C8: Gráficos com aspecto visual correto.

C9: Aplicações da função logarítmica sem que no enunciado apareça a palavra logaritmo.

C10: Aplicações bem elaboradas, envolvendo elementos da realidade.

C11: Manipulações com uso da tecnologia

C12: É esclarecedor sobre a utilização e o significado no número "e".

5.1 Livro: Matemática Ciência e Aplicações [11]

C1: Inicia o capítulo com uma situação problema realista.

Apresenta uma aplicação dos logaritmos relacionando com a acuidade sonora para em seguida tratar sobre a depreciação de um caminhão no decorrer do tempo. (página 148)

C2: Discussão do papel histórico desempenhado pelos logaritmos

Nessa situação é feita uma comparação do objetivo inicial da invenção dos logaritmos e sua importância na atualidade, (página 152). E, na página 155 é mostrado o quanto o papel aritmético dos logaritmos perderam espaço para as calculadoras.

C3: As propriedades dos logaritmos são mencionadas e demonstradas.

Cada propriedade mencionada vem acompanhada com sua demonstração e uma manipulação que a exemplifique.

C4: Sobre a mudança de base é comentado que um logaritmo pode representar qualquer outro, bastando para isso uma constante conveniente.

De maneira sutil é mostrado que mesmo a calculadora apresentando apenas logaritmos em duas bases distintas (10 e "e"), é possível escrever qualquer logaritmo, conforme a preferência da base. A propriedade da mudança de base é citada e demonstrada, logo em seguida é feito um exemplo para comparar o uso da mudança de base, usando o logaritmo decimal e o logaritmo natural. (página 158)

C5: Apresenta a função logaritmo como inversa da função exponencial.

Há comparação entre as funções com utilização de alguns valores em uma tabela, e os gráficos construídos dão suporte visual entre as características das funções, não usa o termo função inversa.

C6: Compara a função logarítmica e exponencial em relação ao crescimento ou decrescimento.

Em nenhum momento é feito essa comparação objetivamente.

C7: Generalização das funções logarítmicas nos reais.

No capítulo anterior em relação a função exponencial é construída a ideia do expoente irracional. Com isso a função logarítmica é generalizada usando a definição nos reais.

C8: Gráficos com aspecto visual correto.

Gráficos bem construídos.

C9: Aplicações das funções logaritmos sem que no enunciado apareça a palavra logaritmo.

Todas as questões envolvendo aplicações dos logaritmos aparecem uma aproximação do valor do log ou ln para ser utilizado. Portanto, não existem questões de aplicação em que o enunciado logaritmo não apareça.

C10: Aplicações bem elaboradas envolvendo elementos da realidade.

São colocadas questões sobre decaimento radioativo, aplicação financeira, crescimento populacional há uma variedade de aplicações em diferentes áreas do conhecimento.

C11: Manipulações com o uso da tecnologia.

Apenas com o uso da calculadora.

C12: É esclarecedor sobre a utilização e significado do número "e".

Na página 137 no capítulo sobre a função exponencial é feito um comentário sobre o número "e"e colocada a expressão $(1+x)^{1/x}$ sem justificativa, para depois chamar de "e"o limite dessa expressão para x próximo de zero. E no capítulo sobre logaritmos o comentário é repetido de uma maneira resumida (página 153), declarando que o número "e" é importante, mas não deixa claro que importância é essa que foi percebida apenas com o advento do cálculo.

5.2 Livro: Conexões com a Matemática [28]

C1: Inicia o capítulo com uma situação problema realista

O capítulo é iniciado com uma imagem de destruição causado pela força de um abalo sísmico que ocorreu na cidade de Coquimbo no Chile. E posteriormente uma situação sobre o tempo de crescimento de uma cultura de bactérias é usado para introduzir o conteúdo sobre os logaritmos.

C2: Discussão do papel histórico desempenhado pelos logaritmos.

Não é feita nenhuma referência sobre o papel histórico dos logaritmos.

C3: As propriedades dos logaritmos são mencionadas e demonstradas.

As propriedades são mencionadas, demonstradas e seguidas com exemplos de manipulação.

C4: Sobre a mudança de base é comentado que um logaritmo pode representar qualquer outro, bastando para isso uma constante conveniente.

A calculadora é usada para mostrar que existe uma tecla que usa a base 10 por padrão (tecla *log*), sendo levantada a questão sobre a base ser diferente e o que poderia ser feito para manipular propriedades onde as bases também fossem diferentes. É apresentada a mudança de base, feita a demonstração, e em seguida a manipulação, usando alguns exemplos. (pagina 174)

C5: Apresenta a função logaritmo como inversa da função exponencial.

Na pagina 179 é mostrado que a função logarítmica é inversa da função exponencial.

C6: Compara a função logarítmica e exponencial em relação ao crescimento ou decrescimento.

Não é feita a comparação entre o crescimento e decrescimento das funções.

C7: Generalização das funções logarítmicas nos reais.

No capítulo sobre função exponencial é feita a abordagem para o expoente irracional e ao comparar as funções como inversa uma da outra é definido nos reais.

C8: Gráficos com aspecto visual correto.

Todos os gráficos apresentam o aspecto visual de representação corretos.

C9: Aplicações das funções logaritmos sem que no enunciado apareça a

palavra logaritmo.

Apresenta uma questão sem que a palavra logaritmo esteja presente, mas pede que utilize a calculadora cientifica como ferramenta auxiliar (páginas: 176 e 186)

C10: Aplicações bem elaboradas envolvendo elementos da realidade.

Aplicações envolvendo a matemática financeira, biologia, química e radioatividade.

C11: Manipulações com o uso da tecnologia.

É explicado sobre a tecla log da calculadora e muitos exercícios solicitam o auxilio da calculadora científica.

C12: É esclarecedor sobre a utilização e significado do número "e".

Nenhuma referência é feita ao logaritmo natural ou número "e".

5.3 Livro: #Contato Matemática [37]

C1: Inicia o capítulo com uma situação problema realista.

Utiliza o crescimento de uma cultura de bactérias para iniciar o capítulo, cabe ressaltar que o tipo de crescimento é uma fase analisada, pois depois de certo tempo à cultura de bactérias não teria o mesmo ambiente ideal apontado no início da análise.

C2: Discussão do papel histórico desempenhado pelos logaritmos.

Fala sobre o seu inventor e o principal objetivo de sua invenção.

C3: As propriedades dos logaritmos são mencionadas e demonstradas.

Após a definição de logaritmos as propriedades são mencionadas, demonstradas e acompanhadas com exemplos de manipulação.

C4: Sobre a mudança de base é comentado que um logaritmo pode representar qualquer outro, bastando para isso uma constante conveniente.

Mostra que podemos usar a base do logaritmo que for conveniente, enuncia a propriedade e traz a demonstração.

C5: Apresenta a função logaritmo como inversa da função exponencial.

A função logarítmica é apresentada como inversa da função exponencial a partir da definição de função inversa na pagina 168. E na pagina 170 é feita a representação geométrica do significado de função logarítmica inversa da exponencial.

C6: Compara a função logarítmica e exponencial em relação ao crescimento ou decrescimento.

Não é mencionado essa comparação entre as funções.

C7: Generalização das funções logarítmicas nos reais.

No capítulo sobre função exponencial é feita a abordagem para o expoente racional. Ao comparar as funções como inversa uma da outra é definido nos reais.

C8: Gráficos com aspecto visual correto.

Construção de poucos gráficos, mas estão visualmente representando o que se dispõe a fazer.

C9: Aplicações das funções logaritmos sem que no enunciado apareça a palavra logaritmo.

Todas as questões de aplicação tem a aproximação do logaritmo para ser usado.

C10: Aplicações bem elaboradas envolvendo elementos da realidade.

As aplicações envolvem situações sobre o pH, radioatividade, sismologia, aplicação na medicina, ou seja, envolvimento de várias áreas do conhecimento.

C11: Manipulações com o uso da tecnologia.

O uso da tecnologia é feito apenas com a calculadora.

C12: Ser esclarecedor sobre a utilização e significado do número "e".

De maneira quase imperceptível na página 161 é mencionado sobre logaritmo neperiano, termo que é considerado por (LIMA como) inadequado.

5.4 Livro: Quadrante Matemática [4]

C1: Inicia o capítulo com uma situação problema realista

Inicia com história da invenção dos logaritmos e atribui a importância dos logaritmos ao se relacionar com potências e a função exponencial. (página 150)

C2: Discussão do papel histórico desempenhado pelos logaritmos.

Uma abordagem biográfica do inventor, sem esclarecer a importância do seu invento naquela época.

C3: As propriedades dos logaritmos são mencionadas e demonstradas.

A propriedades são apresentadas e demonstradas, em seguida exemplos fazem a manipulação das propriedades.

C4: Sobre a mudança de base é comentado que um logaritmo pode representar qualquer outro, bastando para isso uma constante conveniente.

Comenta que logaritmos com bases diferentes devem ser colocados na mesma base para que se possa usar as propriedades. Usa a definição e faz a demonstração da mudança de base, vários exemplos são feitos para aplicar a teoria explicada.

C5: Apresenta a função logaritmo como inversa da função exponencial.

Antes de fazer a comparação entre a função exponencial e a logarítmica na página 157 é dedicado um tópico para definir o que é uma função inversa.

C6: Compara a função logarítmica e exponencial em relação ao crescimento ou decrescimento.

Não faz a comparação entre o crescimento e o decrescimento entre as duas funções.

C7: Generalização das funções logarítmicas nos reais.

No capítulo sobre função exponencial é feita a abordagem para o expoente irracional. Ao comparar as funções como inversa uma da outra é definido nos reais.

C8: Gráficos com aspecto visual correto.

Todos os gráficos apresentam o aspecto visual de acordo com a sua representação.

C9: Aplicações das funções logaritmos sem que no enunciado apareça a palavra logaritmo.

A única aplicação sem a palavra logaritmo no enunciado é uma atividade resolvida.

C10: Aplicações bem elaboradas envolvendo elementos da realidade.

Os problemas envolvem aplicações na sismologia, economia, crescimento populacional, acuidade auditiva e uma aplicação que chama atenção é a curiosidade sobre a Lei de Benford.

C11: Manipulações com o uso da tecnologia.

É incentivado o uso da calculadora e a pesquisa de algumas aplicações, por exemplo na sismologia ao citar o momento sísmico na página 156.

C12: Ser esclarecedor sobre a utilização e significado do número "e".

O número "e"é completamente omitido, não é se quer mencionado no capítulo de exponencial.

Os dois próximos livros didáticos não serão apenas verificados com o uso da lista de sugestões que obtemos, usando por parâmetro e critérios as Componentes Básicas. Eles serão verificados em relação as suas adequações, pois obras dos referidos autores, foram resenhadas no livro "Exame de Textos", então podemos fazer um comparativo sobre a aplicação das sugestões feitas.

5.5 Livros: Matemática Paiva e Contexto & Aplicações

Das coleções examinados em 2001 e as coleções aprovadas pelo PNLD (2018-2020), é percebido que duas coleções apresentam uma similitude, conforme as tabela 3 e 4.

Tabela 3: Coleções analisadas no Livro Exame de Textos.

Coleções de 2001	**Autores**	**Editora**
Coleção Matemática	Manoel Rodrigues Paiva	Moderna
Contexto e Aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática

Fonte: [21], 2001.

Tabela 4: Coleções aprovadas PNLD (2018-2020)

Coleções 2018-2020	**Autores**	**Editora**
Matemática Paiva	Manoel Rodrigues Paiva	Moderna
Contexto e Aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática

Fonte: [?], 2017.

O livro "Exame de Textos"ao comparar a abordagem matemática de cada obra, estabeleceu o que seria considerado adequado e inadequado de forma geral. Nesse julgamento comparativo, todas as obras foram submetidas as Componentes Básicas para o Ensino da Matemática quanto ao equilíbrio entre a conceituação, Manipulação e Aplicações. Será verificado a utilização dessas sugestões nas obras numa aproximação do que é considerar adequado ao tópico de logaritmo, visto a importância das Componentes Básicas para o Ensino da Matemática estarem equilibrados nos livros didáticos.

Para essas duas obras, terá a analise feita usando as críticas apontadas no livro "Exame de Textos"as coleções anteriormente publicadas pelos mesmos autores, e não apenas a lista de sugestões que foi elaborada baseada em todas as críticas ao tópico de logaritmo em diferentes coleções analisadas.

5.5.1 Livro: Matemática Paiva [29]

Quadro 3: Critícas ao tópico de logaritmos

Coleção	Autor	Editora	Tópico	Críticas
Matemática: Paiva	Manoel Rodrigues Paiva	Moderna	Logaritmo	**1-** Generalização da função logarítmica nos números reais, sem nenhum comentário; **2-** As propriedades das funções logarítmicas são mencionadas sem demonstração; **3-** Não é feita a discussão do papel histórico desempenhado pelos logaritmos; **4-** O uso de logaritmos para resolver equações exponenciais provenientes de situações práticas é totalmente ignorado; **5-** Terminologia errada ao tratar sobre "interpolação logarítmica" ao invés de interpolação linear; **6-** Manipulações e conceitos bem trabalhados, mas deixa a desejar nas aplicações;

Fonte: [17], 2001

É importante destacar que a constatação da utilização das críticas que aqui foram abordadas como sugestões (com algumas adaptações) feitas as coleções no livro Exame de Textos, não implica na afirmação que foram incorporadas somente as atuais coleções do PNLD(2018), mas podendo perfeitamente terem sido aplicadas em coleções anteriores.

As críticas quando feitas por especialistas de uma área em particular, tem o papel de subsidiar um trabalho oferecendo uma resposta positiva ou negativa de sua execução. Em ([21], p.5), é esclarecedor o papel educativo da avaliação das coleções:

> Cada relatório concernente á analise de uma coleção deverá (além dos destaques dos pontos positivos e das criticas as suas deficiências) sugestões no sentido de corrigir as falhas, dando assim oportunidade a que os autores e editores de boa vontade possam, em edições posteriores, formular os textos, adaptando aos objetivos do ensino médio, conforme definidos na Lei de Diretrizes e Bases.

Sobre as críticas presente no Quadro 3, cada uma delas será adaptada a uma ou mais sugestões sobre o tópico de logaritmos.

1ª. Fazer comentários sobre a generalização da função logarítmica no conjunto dos números reais.

Segue que a obra ainda trás de forma direta a função logarítmica nos números reais, sem comentários. Mas anteriormente é bem construída a relação entre a função logarítmica e a função exponencial.

2ª As propriedades das funções logarítmicas devem ser mencionadas e apresentar sua demonstração.

Todas as propriedades são mencionadas e demonstradas de uma forma simples e em seguida exemplos são feitos com intuito de colocar em prática a manipulação das propriedades.

3ª Deve apresentar a discussão sobre o papel histórico dos logaritmos.

"Para enfrentar o mar aberto, os marinheiros deveriam basear as rotas, na posição dos astros, como o sol e as estrelas. Precisavam conhecer com precisão, a localização e o movimento relativo dos astros. Essa necessidade impulsionou o desenvolvimento da astronomia"(PAIVA, 2015, p. 238), e seguindo a explicação da necessidade de manipulação de cálculos cada vez mais demorados é constatado que os logaritmos surgem como uma ferramenta poderosa em tornar multiplicações em operações simples como a adição e divisões em subtrações.

No capítulo momentos históricos são citados, mas é no suplemento com orientações para os professores que um texto chama atenção pelo propósito de oferecer subsídios para esclarecer ao professor sobre como os logaritmos são necessários em situações de seu enorme poder de modelagem. O autor usa como referência a obra Meu professor de Matemática de Elon Lages Lima, e com isso o caminho trilhado para verificar a qualidade de abordagem do tópico de logaritmo a partir de recomendações no livro exame de textos, parece ainda mais coerente e aceitável.

4ª Utilizar a função logarítmica e exponencial em situações prática.
Os exercícios propostos seguem um padrão que vai ao encontro das Componentes Básicas e das estratégias de aprendizagem, pois questões que cobram apenas o uso de conceitos e manipulações vem seguida por questões com aplicações em diferentes áreas: ao tratar sobre pH, radioatividade, sismologia, financiamentos e empréstimos, equações modeladas a partir do uso de logaritmos como por exemplo o uso da lei de Weber-Fechner.

5ª Usar a terminologia Interpolação linear ao invés de "Interpolação logarítmica".
Nota-se a inexistência do termo "interpolação logarítmica", mas também não consta interpolação linear.

6ª Apresentar situações para melhor tratar sobre as aplicações dos logaritmos.
Já aparece respondida na quarta recomendação, quando são cobradas as aplicações e integração entre os tópicos de logaritmos e exponencial.

No suplemento de orientações para o professor, reconhecendo a importância do livro didático bem como suas limitações, conforme Paiva (2015, p.285):

> Nesse universo tão rico e paradoxal, será ao mesmo tempo um desafio e uma condição para o professor desempenhar um bom trabalho, conhecer e entender como seus alunos pensam, quais são suas expectativas e seus questionamentos. É importante lembrar que, embora as políticas educacionais sejam únicas e os recursos, como o livro didático, limitados, caberá ao professor fazer as adaptações necessárias para adequar sua aula e os instrumentos de que dispõe (como o livro didático) à realidade de cada turma.

Mesmo tendo todas as sugestões aplicadas no tópico de logaritmo, isso não é reconhecer o conteúdo como esgotado apenas em um capítulo ou completo em suas aplicações, mas implicar em livro constituindo como uma ferramenta didática capaz de proporcionar uma melhor abordagem do tópico de logaritmo ao aplicar as Componentes Básicas.

5.5.2 Livro: Contexto & Aplicações [6]

Segue abaixo o quadro com as críticas apresentadas no livro "Exame de Textos"a coleção Contextos& Aplicações:

Quadro 4: Critícas ao tópico de logaritmos

Coleção	Autor	Editora	Tópico	Críticas
Contextos & Aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática	Logaritmo	**1-** Exercícios interessantes, mas a formulação não está de maneira realista; **2-** Exposição da função logarítmica inteiramente manipulativa; **3-** Não há aplicações da função logarítmica sem que no enunciado apareça a palavra logaritmo; **4-** Em todo livro não há um comentário sobre como a função exponencial cresce rapidamente nem como a função logaritmo cresce lentamente; **5-** Alguns gráficos estão mal feitos, dando a impressão que a curva tem uma assintota horizontal; **6-** "Vendo Logaritmos como áreas"é interessante, mas carente de maiores explicações ou referências;

Fonte: [17], 2001

No livro contextos e Aplicações aprovado pelo PNLD (2018-2020) o primeiro contanto com o tópico de logaritmo é feito como continuação do conteúdo sobre equação exponencial com exemplo de uma aplicação financeira, apresentando uma dificuldade em solucionar o problema com os conteúdos até o momento ensinado, e assim faz uma introdução ao tópico de logaritmo que tem "o objetivo de transformar uma equação exponencial como uma igualdade entre potências de mesma base [...]"(Dante, 2015).

Observa-se que o primeiro contato com o conteúdo prioriza o conceito e a manipulação, com muitos exemplos e exercícios. Na página 183 é introduzido o uso da calculadora a partir de uma situação problema sobre potencial hidrogeniônico (pH), apontando conexão com a Química e o conteúdo de logaritmo.

Os trechos abaixo foram extraídos do livro "Exame de Textos" com suas críticas e sugestões e do livro Contexto e Aplicações (2015) no tópico de logaritmo.

> "Não é possível resolver esta equação transformando-a em uma igualdade entre potências de mesma base, como vimos no capítulo anterior. Para resolvê-la, precisamos utilizar logaritmos". Ora, usar logaritmos é exatamente transformar a equação em uma igualdade entre potências de mesma base. O que deveria ser dito era: "A fim de transformar uma equação exponencial numa igualdade entre potências de mesma base, usaremos a noção de logaritmo."[17](2001, p.278)

> Não é possível resolver essa equação usando os conhecimentos adqueridos até aqui. Com o objetivo de transformar uma equação exponencial como essa em uma igualdade de potências de mesma base, vamos desenvolver a noção de **logaritmo**. (Grifo do autor) [6](2015, p.185)

Confrontando os trechos notamos que a sugestão foi utilizada e quanto as críticas feitas no quadro 4, iremos considerá-las sugestões e verificar se estão presentes no livro analisado.

1ª Formular problemas que sejam realistas.

Esse breve roteiro sobre a apreciação de algumas páginas é o percurso seguido até a verificação da primeira sugestão, onde se observa muitos exemplos e exercícios formulados por situações que criticamente podem ser incorporados a realidade.

Em julho de 2015, o Banco Central do Brasil classificou 12 instituições bancárias em relação às taxas de juros ao ano oferecidas para financiamento de imóveis a pessoas físicas. A taxa média de juros dessas instituições nesse período foi de 12,13% ao ano. Se a taxa permanecer a mesma, o valor a ser pago ao banco dobrará caso o financiamento seja pago em quantos anos?

Figura 7: Situação Problema de Economia

Fonte:[6](2015, p.185)

Química

Em um laboratório, uma pessoa verifica que a taxa de crescimento relativo contínuo de bactérias em uma cultura é de 2,5% por minuto. Nessas condições, em quantos minutos o número de bactérias passará de 4 000 para 6 000?

Figura 8: Situação Problema de Química

Fonte:[6](2015, p.186)

As situações problemas estabelecem uma relação entre a matemática e outras áreas do conhecimento, isso é confortável sobre a aplicação do conteúdo e sua utilidade.

2ª A exposição do tópico de logaritmo deve apresentar equilíbrio entre a conceituação, manipulação e aplicações.

A função logaritmo é definida a partir da função exponencial com a formalização de função inversa e pela caracterização da função exponencial. A segunda sugestão é observada, pois a exposição é feita conceitualmente, graficamente e de forma manipulativa. Ressaltado a abertura do conteúdo sobre função logaritmo com um texto sobre como era antes da invenção, descoberta, criação ou desenvolvimento dos logaritmos e o trabalho árduo e moroso dos que necessitavam fazer multiplicações e divisões antes dos logaritmos.

3ª Apresentar situações problemas que não apareça explicitamente sobre qual ferramenta o aluno precisa dispor para resolvê-la.

A terceira sugestão é creditada a primeira sugestão. Essas atividades poderão ser adaptadas conforme as particularidades da turma.

4ª Comentar como a função exponencial cresce rapidamente e como a função logarítmica cresce lentamente

Na coleção atual é feito o comentário em relação ao crescimento das funções exponenciais e logarítmicas e ainda acrescentado um exemplo para melhor entendimento do crescimento lento da função logarítmica.

> Ao contrário da função exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 1$, que cresce rapidamente, a função logarítmica $\log_{10} x$ com $a > 1$ cresce muito lentamente. Veja, por exemplo, que, se $\log_{10} x = 1000$, então $x = 10^{1000}$. Assim, se quisermos que $\log_{10} x$ seja maior do que 1000, será preciso tornar um número x que tenha pelo menos 1001 algarismos;[6](2015, p.193).

5ª Os gráficos devem ser bem construídos para melhor representação visual.

Nenhum gráfico da função logarítmica dá impressão de uma curva assíntota horizontal e uma parte do capitulo sobre o conteúdo é dedicado a matemática e tecnologia, aparecendo o uso do software geogebra, portanto de modo prático é possível alunos e professores construir graficamente a função logaritmo, usando o passo a passo que foi colocado na obra.

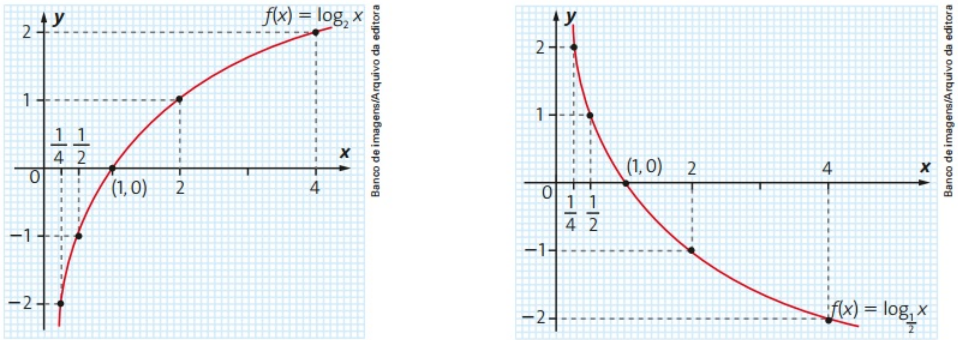


Figura 9: 5ª sugestão no livro didático
Fonte:[6](2015, p.192)

6ª Para colocar sobre a relação dos logaritmos com área é preciso mais detalhes, explicações e referências
A obra atual não trás nenhuma seção sobre a relação entre logaritmos e áreas. Não implica que o tópico esteja incompleto, pois era apresentado como uma curiosidade.

Pelo que foi colocado como parâmetros de análise do tópico de logaritmos das coleções que farão parte da vida acadêmica dos alunos da 1ª série do Ensino Médio das escolas públicas durante os anos de 2018 a 2020, constatou-se que todas as sugestões, críticas, recomendações feitas as coleções que foram filtradas para esse comparativo, estão sendo consideradas, pois o que antes era visto como falha, pecado por excesso ou falta, encontra-se corrigido. Nas duas obras o logaritmo natural, é aplicado nas questões sem muitos detalhes em considerá-lo base dos logaritmos.

5.6 Quadro Comparativo dos livros didáticos selecionados

De forma resumida apresenta-se o quadro comparativo entre os livros didáticos analisados, o quadro abaixo será marcado com "X" a sugestão que está presente na livro didático, com "X*" para as sugestões presentes, mas incompletas e caso nada seja marcado significa que a sugestão não foi percebida no livro didático.

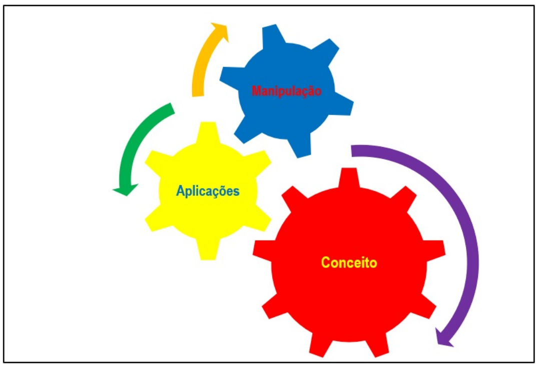
Quadro 4: Sugestões segundo os Fundamentos básicos do ensino de matemática para analise do tópico de logaritmo no livro didático.

Livros Didáticos	Critérios Observados											
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12
Matemática: Ciência e Aplicações	X	X	X	X	X	X*	X	X	X	X	X	X*
Conexões com a Matemática	X		X	X	X	X*		X	X	X	X	
# Contato Matemática	X	X	X	X	X	X*	X	X	X	X	X	
Quadrante Matemática	X		X	X	X	X*		X		X	X	
Matemática: Paiva	X	X	X	X	X	X*	X	X	X	X	X	
Matemática: Contexto & Aplicações	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X*

Fonte: Elaborado pelo autor com base nas críticas de [19]

Representação esquemática das Componentes Básicas para o Ensino da Matemática e a interação contínua entre as componentes.

Figura 10: Esquematização



Fonte: Elaborada pelo autor

Em situações em que o livro didático é a única ferramenta que o professor dispõe para abordar o tópico de logaritmo, a observância aos Fundamentos básicos do ensino de matemática poderá possibilitar uma melhor sistematização no processo de ensino.

Na análise dos livros didáticos usando as Componentes Básicas para o Ensino de Matemática e a lista de sugestões geradas a partir do livro "Exame de Textos" com a aplicação dessas Componentes, é evidenciado pelo quadro 4 que os livros didáticos não trazem com clareza o significado do número "e", e alguns, pouco contribuem ao cobrar nas aplicações a sua utilização com apenas modelos matemáticos prontos que somente fortalecem o pensamento matemático estático.

Todos os livros didáticos analisados trazem a propriedade de mudança de base, comentam de forma breve que é possível escrever o logaritmo na base que desejarmos, desde que seja obedecida a definição de logaritmo. Nesse momento, se perde a oportunidade de comentar sobre a base com número "e", e fazer comparações com logaritmo de base dez.

Podendo ser usado na base do logaritmo qualquer número real positivo diferente de um e nos modelos matemáticos são atribuídos a base dez e a base "e", as calculadoras trazem as teclas log e ln, uma preferência discutível, principalmente com a base "e".

Visto que as Componentes Básicas para o Ensino da Matemática se configuram em uma proposta viável na análise do livro didático e ensino dos logaritmos, iremos propor por meio da conceituação, manipulação e aplicação um complemento aos livros didáticos que poderá ser utilizado pelo professor ao tratar o número "e" e o logaritmo natural, onde de acordo com quadro 4, é o critério mais carente nos livros didáticos analisados.

6 Proposta complementar ao tópico de logaritmo

Foi verificado que a maioria dos livros didáticos não mostram o significado do número "e" e por consequência é omitido o logaritmo natural, e os que mostram, falta clareza e objetividade sobre a utilização e significado.

Mas, em [24] direcionam no entendimento das dificuldades em construir um significado do número "e" e do logaritmo natural, no próprio processo de desenvolvimento da matemática, caracterizar e entender esses conceitos precisamente só foi possível com o advento do cálculo infinitesimal.

Nossa proposta complementar é resultado da exploração dos fundamentos básicos para o ensino de matemática mediada pelas tendências metodológicas que são consideradas pertinente para alcançar um determinado objetivo, seja, de carácter conceitual, manipulativo ou de aplicação.

6.1 História da Matemática e o conceito do número "e".

As primeiras constatações do número "e" é tão antiga quanto a necessidade do homem em acumular riquezas. Um problema descoberto no tablete de argila da Mesopotâmia datado de 1700 a.C. propõe o seguinte: Quanto tempo é necessário para uma soma em dinheiro dobrar a juros composto com taxa anual de 20%?

O problema se resumia a resolver a equação $1,2^x = 2$. Os babilônios usando o método de interpolação linear e sem as técnicas de álgebra que dispomos, chegaram ao valor de $x \approx 3,7870$, um valor muito próximo do que conhecemos $x \approx 3,8017$.

De forma geral um capital C_0, aplicado a taxa i, durante um período t, será obtido uma soma S_t (A taxa e o tempo de aplicação dentro de um mesmo período) e conforme [17], [24]:
Para n=1, S_1=$C_0 + i.C_0$=$C_0.(1+i)$
Para n=2, S_2=$S_1 + i.S_1$=$S_1.(1+i)$=$C_0.(1+i).(1+i)$, assim $S_2 = C_0.(1+i)^2$
Para n=3, S_3=$S_2 + i.S_2$=$S_2.(1+i)$=$C_0.(1+i).(1+i).(1+i)$, assim $S_3 = C_0.(1+i)^3$

Prosseguindo, obtemos a dedução da relação:

$$S_t = C_0.(1+i)^t \tag{1}$$

Do problema do tablete de argila da Mesopotâmia, temos que a soma de dinheiro é C_0, tempo é t, taxa 20% ao ano e queremos obter $2.C_0$. Aplicando a relação do juros composto $2C_0$=$C_0.(1+0,2)^t$, logo $2 = 1,2^t$ e usando adequadamente as propriedades do logaritmo, obtém-se resultado de $n \approx 3,8017$, ou seja, 3 anos 9 meses e 18 dias.

Os bancos podem usar diferentes períodos para acumular os juros, assim uma taxa i ao ano, pode ser aplicada para acumulação do juros ao semestre, trimestre, bimestre, mês, dia e etc. E essas formas diferenciadas de acumulação de juros eram utilizadas, desde o século XVI, acredita-se que nessa época a relação $\left(1+\frac{\alpha t}{n}\right)^n$, já era aplicada nas operações financeiras [24].

Quanto um capital $C_0 = 1$, a uma taxa $i = 100\%$ ao ano a juros composto, renderá no final de um ano? Para nossos cálculos imaginar um rendimento de 100% ao ano, sendo oferecido por alguma instituição financeira é o que constitui uma contextualização "forçada", mas no papel de devedor, quando o banco empresta dinheiro ao usar o cartão de crédito, os juros por ano chegam a 330,2% [6],ou seja, ou invés de investir fosse feita uma dívida, o exemplo estaria dentro de um contexto "forçado"pela taxa de juros abaixo do esperado. Faz-se o uso da situação "forçada"para analisar o comportamento da relação $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Respondendo ao problema temos:

$$S = C_0.(1+i)^n$$
$$S = 1.(1+1)^1$$
$$S = (1+1)^1$$
$$S = 2$$

Ao final de um ano o capital inicial dobrou. Ao invés de aplicar a uma taxa ao ano, fosse aplicado a uma taxa semestral de 50%, qual o rendimento total no final do ano?

$$S = C_0.(1+i)^n$$
$$S = 1.\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$$
$$S = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2$$
$$S = 2,25$$

[6]Dados do Banco Central - <http://www.bcb.gov.br> Acesso em: 12 de maio de 2018.

Portanto, é mais vantajoso dividir a taxa de juros anual em duas partes iguais e aplicar semestralmente. E se dividir a taxa de juros anual em três e aplicar ao quadrimestre, em quatro e aplicarm ao trimestre, em doze e aplicar mensalmente, em trezentos e sessenta e cinco e aplicar diariamente e assim por diante, o capital inicial chegaria a triplicar? Pois bem, essa questão foi levantada por Jakob Bernoulli (1654-1705), e chegou a conclusão que mesmo aplicando em um tempo mínimo possível o capital nunca triplicará([24], p.151).

Quadro 5: n Aplicações em um período

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	S
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$	2
2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$	$2,25$
3	$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$	2,370
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12	$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$	2,6130
365	$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$	2,71456
10000	$\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}$	2,718145
100000	$\left(1+\frac{1}{100000}\right)^{100000}$	2,718268
1000000	$\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000}$	2,7182804
10000000	$\left(1+\frac{1}{10000000}\right)^{10000000}$	2,7182816

Fonte: Elaborado pelo autor com base em [17]

Para n suficientemente grande $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281$. Afirmar a partir de casos particulares que se obtem um padrão, pode ser aceitável para outras áreas do conhecimento, mas na matemática as afirmações devem vim acompanhada de um encadeamento lógico de ideias e argumentos que a tornem irrefutável, ou seja, as afirmações devem ser demonstradas para serem aceitas.

E foi com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal e a aplicação da noção de limite que se chegou ao valor aproximado de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando $n \mapsto \infty$ (n tende ao infinito) e essa relação Leonhard Euler (1707-1783), chamou de "e" que é denominado de número de Euler, uma das suposições para a escolha da letra "e", é pelo fato de ser a primeira letra da palavra exponencial.

As demonstrações das afirmações que foram feitas fogem do nosso objetivo que é apresentar uma proposta de abordagem do conteúdo de logaritmo natural voltada para o Ensino Básico. Mas as demonstrações podem ser consultadas em [24], p.249 e [17] p.95.

Em notação de limite, $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, onde $e \approx 2,7182818$. Em [24], p. 251, encontra-se a prova que o "e" é um número irracional.

Ao longo da história da matemática, problemas sem soluções ou contestáveis foram inspirações para continuidade de muitos trabalhos, nesse processo os matemáticos revisavam e produziam ideias e conceitos.

6.2 TIC's em Matemática e a Manipulação

Usaremos as propriedades e definições em [19] e [18] sobre a função exponencial.

Quando um investimento cresce constantemente a 5% ao ano, a taxa de crescimento do investimento, em qualquer momento, é proporcional ao valor do investimento naquele momento. O crescimento de uma cultura de bactérias, tem a taxa de crescimento em qualquer momento proporcional ao número total de bactérias naquele momento. Uma pilha de urânio radioativo ^{235}U decai a uma taxa que, a cada momento, é proporcional a quantidade presente de ^{235}U [15].

Outros exemplos que seguem a mesma relação de taxa, quantidade e momento, está na aplicação de uma injeção de penicilina, datação pelo método do radiocarbono usado para estimar o tempo dos objetos pertencentes a civilizações antigas e resfriamento de um corpo [19].

Os psicólogos verificaram que, em muitas situações de aprendizado, a taxa à qual a pessoa aprende é rápida no começo e depois diminui [15]. E quando a tarefa é aprendida, chega-se a um nível que é aparentemente impossível ultrapassar. Criaram então a partir do estudo dessas situações o modelo matemático chamado de curva de aprendizado, uma equação que diz que, se for dada uma lista de M sílabas à uma pessoa testada, à taxa de memorização é proporcional ao número de sílabas que resta a memorizar. Muitos outros exemplos podem ser explorados nas áreas como administração, saúde pública, sociologia, química, biologia, arqueologia e etc.

As situações exemplificadas podem ser descritas e estudadas tanto pela função exponencial como pela função logarítmica. Os fenômenos que foram citados podem ser explorados a cada hora, dia, mês e ano, bem como a cada segundo, décimo de segundo, centésimo de segundo, ou seja, a qualquer momento ou instante.

E qual o comportamento do crescimento se a taxa for α ao ano, o valor inicial C_0, em diferentes momentos de aplicação. O que queremos saber é o que ocorre com

$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{nt}$ quando aplicado em diferentes momento durante o período de um ano por exemplo.

Vimos que para n suficientemente grande $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$. E o que ocorre com $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{nt}$ com n nas mesmas condições?

Seja $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = e$, elevando ambos os membros a $\alpha > 0$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n\alpha} = e^{\alpha}$

Por $n\alpha = m$, n suficientemente grade, então $n\alpha$ é suficientemente grande, assim $\dfrac{1}{n} = \dfrac{\alpha}{m}$, e portanto $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n\alpha} = \left(1+\dfrac{\alpha}{m}\right)^{m} = e^{\alpha}$. Ao final de um período com aplicação de uma taxa α o crescimento instantâneo é dado por e^{α} com m aplicações, onde m é suficientemente grande.

Para $\beta = -\alpha$, obtemos $\beta < 0$, elevando ambos os membros a β, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n\beta} = e^{\beta}$

Por $n\beta = m$, n suficientemente grande, então $n\beta$ é suficientemente grande, assim $\dfrac{1}{n} = \dfrac{\beta}{m}$. Fazendo as devidas substituições, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n\beta} = \left(1+\dfrac{\beta}{m}\right)^{m} = e^{\beta}$. Ao final de um período com aplicação de uma taxa β o decrescimento instantâneo é dado por e^{β} com m aplicações, onde m é suficientemente grande.

Em situações que a taxa de crescimento ou decrescimento, em qualquer momento, é proporcional ao resultado obtido naquele momento o número e^{α} surge naturalmente na investigação desses fenômenos.

Com auxilio de uma planilha eletrônica, pode-se verificar de forma prática como se comporta a expressão $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n}$ para n suficientemente grande e dada uma taxa α. As planilhas eletrônicas podem ser acessadas de diferentes sistemas operacionais e baixadas gratuitamente para qualquer plataforma utilizada nos aparelhos celulares, e sobre a planilha eletrônica e os benefícios proporcionados pela sua utilização sugere-se a referência [38]. O seguinte exemplo constitui a forma prática do significado dessa relação entre taxa, resultado obtido em um determinado momento e proporcionalidade do momento investigado.

Exemplo: Um investimento cresce a taxa de 5% ao ano a juros composto. Podemos afirmar que quanto maior o valor inicial investido maior será a razão entre o capital final e o capital inicial?

Preencher a planilha conforme a figura 11 e as orientações.

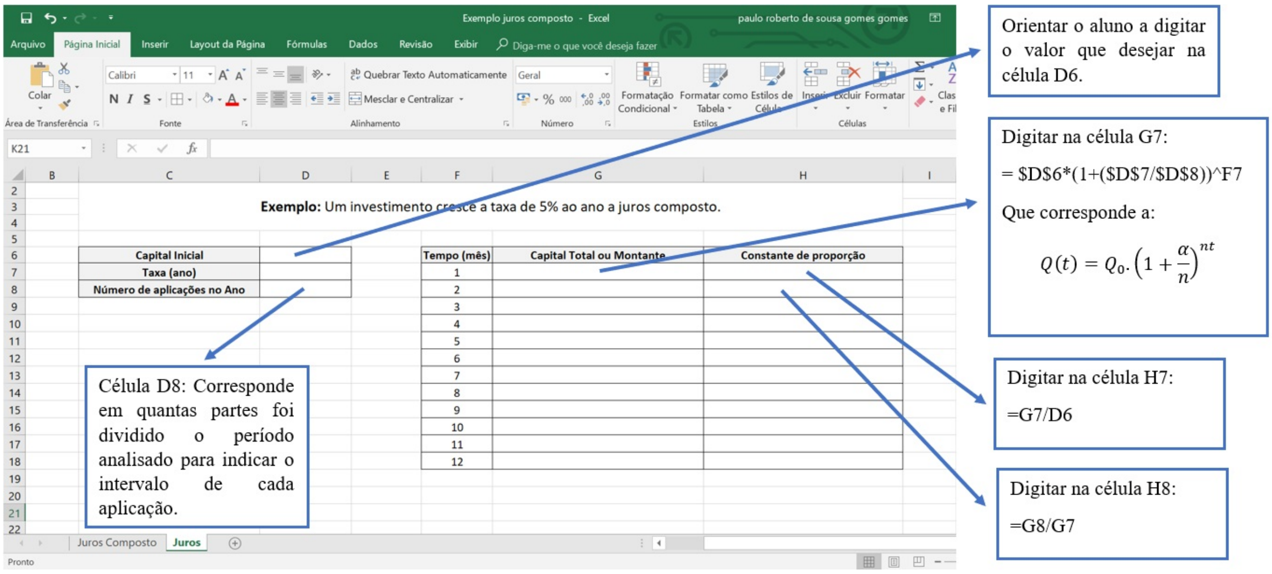


Figura 11: Resolução do exemplo usando a planilha eletrônica
Fonte: Criada pelo autor

Vamos usar o valor do capital inicial igual a R$ 954,00 e a taxa conforme o exemplo, obtemos:

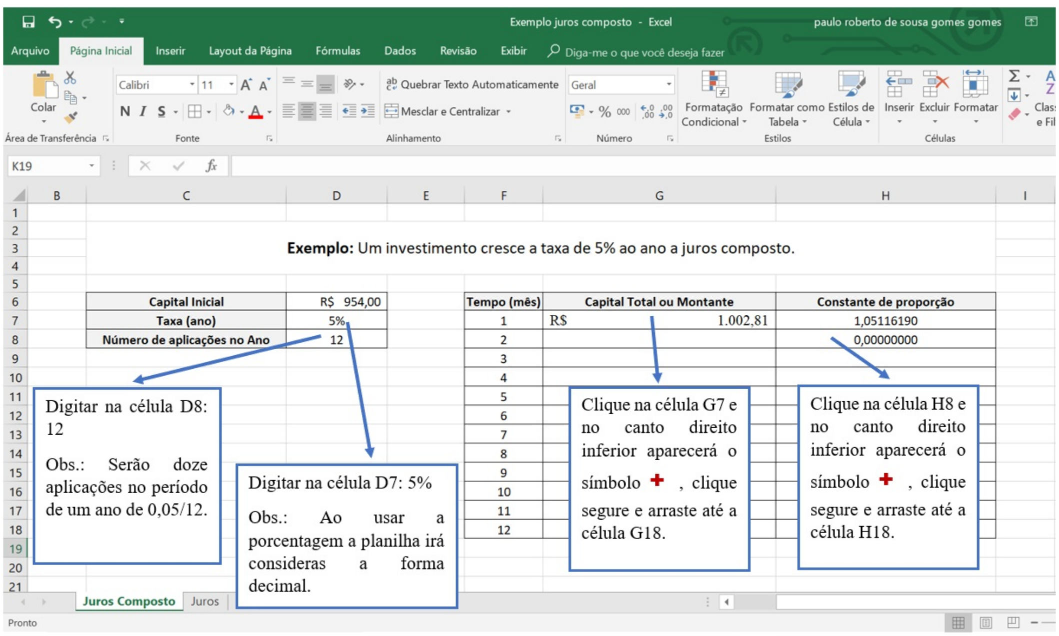
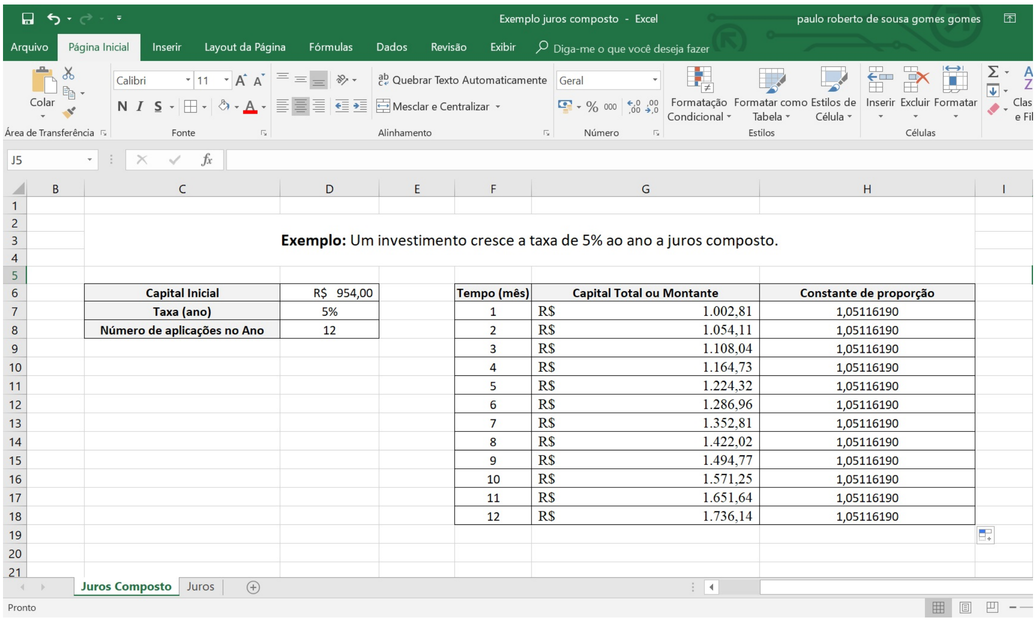


Figura 12: Resolução do exemplo usando a planilha
Fonte: Criada pelo autor



Exemplo: Um investimento cresce a taxa de 5% ao ano a juros composto.

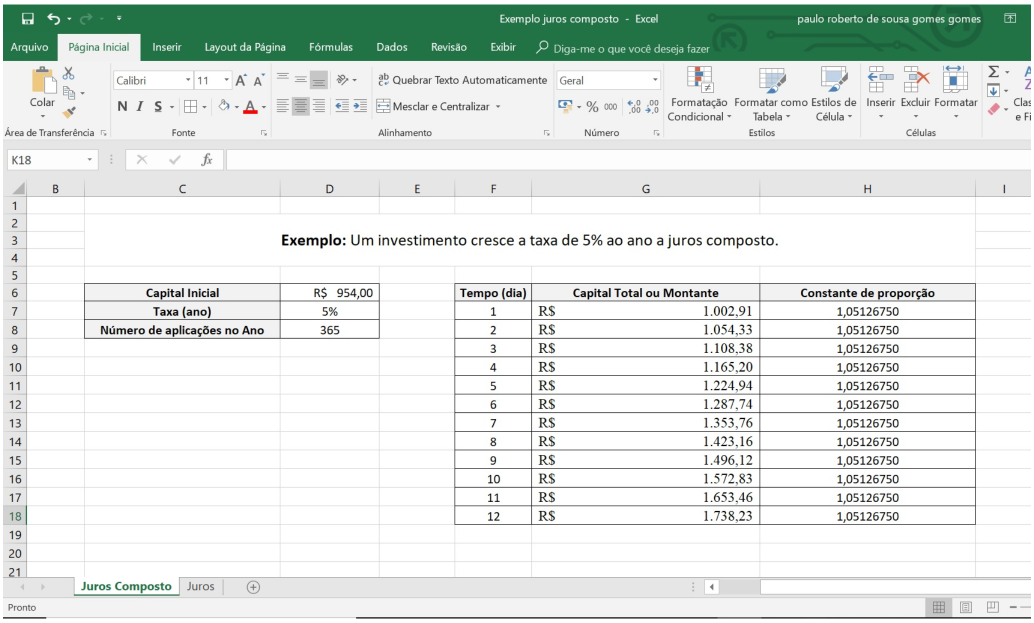
Capital Inicial	R$ 954,00
Taxa (ano)	5%
Número de aplicações no Ano	12

Tempo (mês)	Capital Total ou Montante	Constante de proporção
1	R$ 1.002,81	1,05116190
2	R$ 1.054,11	1,05116190
3	R$ 1.108,04	1,05116190
4	R$ 1.164,73	1,05116190
5	R$ 1.224,32	1,05116190
6	R$ 1.286,96	1,05116190
7	R$ 1.352,81	1,05116190
8	R$ 1.422,02	1,05116190
9	R$ 1.494,77	1,05116190
10	R$ 1.571,25	1,05116190
11	R$ 1.651,64	1,05116190
12	R$ 1.736,14	1,05116190

Figura 13: Aplicações ao mês durante um ano

Fonte: Criada pelo autor

Alterando o número de aplicações ao ano em momentos que ocorre por dia e por hora, obtemos as planilhas:



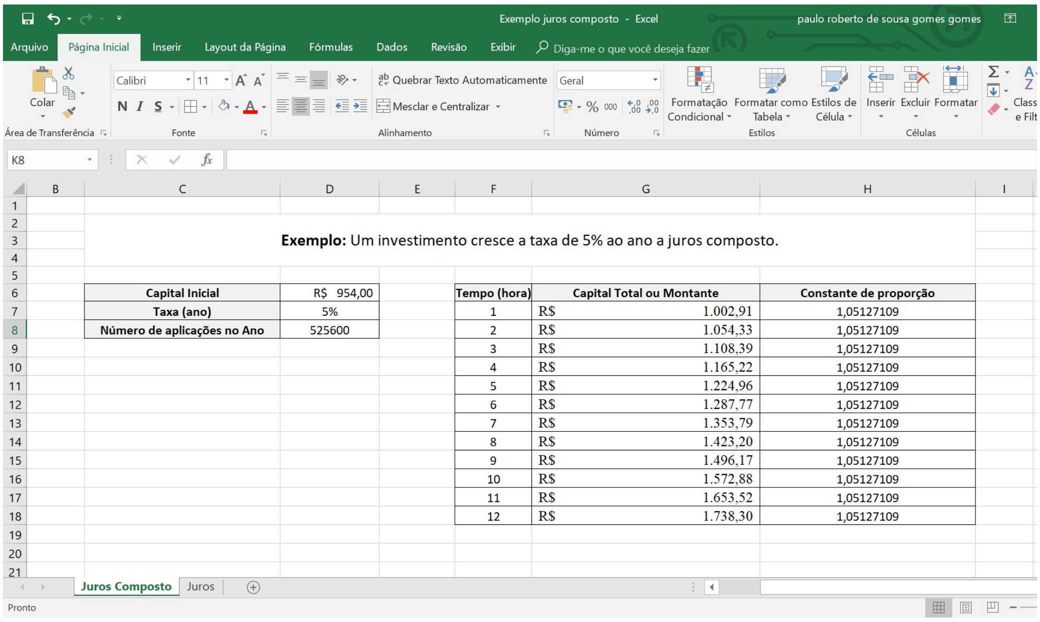
Exemplo: Um investimento cresce a taxa de 5% ao ano a juros composto.

Capital Inicial	R$ 954,00
Taxa (ano)	5%
Número de aplicações no Ano	365

Tempo (dia)	Capital Total ou Montante	Constante de proporção
1	R$ 1.002,91	1,05126750
2	R$ 1.054,33	1,05126750
3	R$ 1.108,38	1,05126750
4	R$ 1.165,20	1,05126750
5	R$ 1.224,94	1,05126750
6	R$ 1.287,74	1,05126750
7	R$ 1.353,76	1,05126750
8	R$ 1.423,16	1,05126750
9	R$ 1.496,12	1,05126750
10	R$ 1.572,83	1,05126750
11	R$ 1.653,46	1,05126750
12	R$ 1.738,23	1,05126750

Figura 14: Aplicações ao dia durante um ano

Fonte: Elaborada pelo autor



Exemplo: Um investimento cresce a taxa de 5% ao ano a juros composto.

Capital Inicial	R$ 954,00
Taxa (ano)	5%
Número de aplicações no Ano	525600

Tempo (hora)	Capital Total ou Montante	Constante de proporção
1	R$ 1.002,91	1,05127109
2	R$ 1.054,33	1,05127109
3	R$ 1.108,39	1,05127109
4	R$ 1.165,22	1,05127109
5	R$ 1.224,96	1,05127109
6	R$ 1.287,77	1,05127109
7	R$ 1.353,79	1,05127109
8	R$ 1.423,20	1,05127109
9	R$ 1.496,17	1,05127109
10	R$ 1.572,88	1,05127109
11	R$ 1.653,52	1,05127109
12	R$ 1.738,30	1,05127109

Figura 15: Aplicações por hora durante um ano
Fonte: Elaborada pelo autor

Ao indagar os alunos sobre o resultado da constante de proporção, são levados a perceber que independente do capital inicial estipulado a proporção é a mesma para períodos iguais. Pode ser pedido que façam as razões entre o capital total a cada dois meses, por exemplo:

$$\frac{1108,04}{1002,81} \approx 1,1049 \text{ e } \frac{1164,73}{1054,11} \approx 1,1049, \text{ onde } \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{nt} = \left(1+\frac{0,05}{1}\right)^{1.2} \approx 1,1049$$

E ainda, a partir da figura 15, os equipamentos tecnológicos podem ser manuseados de modo que a sua utilidade e praticidade é relacionada com o conhecimento matemático. Não estamos propondo a substituição da tecnologias pelos métodos formais da matemática historicamente conhecido, mas propondo que o conhecimento matemático possibilita o uso consciente dessas ferramentas, como por exemplo entender o significado do número "e" nas calculadoras. Inicialmente propormos analisar o significado de $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$, mas vimos que $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$ que resultaria na constante de proporção instantânea.

Usando a calculadora e comparando com a planilha de aplicações durante um ano a cada hora:

Para $\alpha = 5\% = 5/100$, temos que $e^\alpha = e^{5/100}$

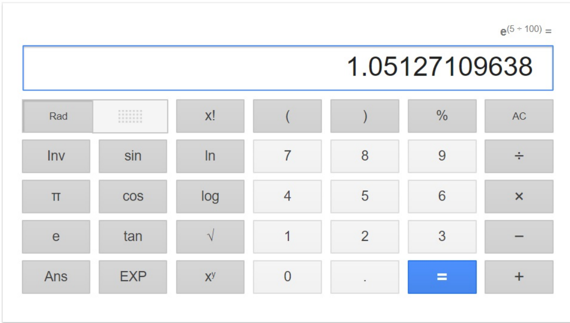


Figura 16: Aplicações instantânea durante um ano
Fonte: Elaborada pelo autor

Isso poderá mostra que para uma divisão do período de um ano em n partes, para n suficientemente grande a taxa de crescimento entre os valores nesse momento tenderá a $e^{\alpha} = e^{5/100}$.

A relação $Q(t) = Q_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{nt}$, pode ser substituída por $Q(t) = Q_0 \cdot e^{\alpha t}$ para capitalizações a juros compostos contínuos. Construindo, assim, a naturalidade em que o número "e" surge na expressão de uma funçao exponencial de base "e". Com algumas manipulações obtem-se:

$Q(t) = Q_0 \cdot e^{\alpha t}$

Como $Q_0 \neq 0$, podemos fazer

$\dfrac{Q(t)}{Q_0} = e^{\alpha t}$, aplicando logaritmo

$\log_e \dfrac{Q(t)}{Q_0} = \alpha t$

O logaritmo onde o número "e" aparece como base

é denominado de logarimo natural e representado por ln.

Simplificadamente, $ln \dfrac{Q(t)}{Q_0} = \alpha t$

Dessa maneira é levantado a importância da função exponencial ter a base igual a "e". A função exponencial $f(x) = ba^x$, definida em [22] p.57, pode ser escrita como $f(x) = be^{\alpha x}$ e de fato pelas propriedades em [22], exite $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $e^{\alpha} = a$. A função logarítmica $f(f(x)) = \log_a f(x)$ como inversa da função exponencial de base a ([22] p.59), obtemos $\log_a f(x) = x \Leftrightarrow a^x = f(x)$, usando $y = f(x)$ um ponto (x, y)

pertence a $y = a^x$ se, e somente se, (y, x) pertence a $f(y) = \log_a y = x$. Usando a base "e" visto a sua importância no estudo do crescimento ou decrescimento contínuos, $y = (e^{\alpha})^x \Leftrightarrow \log_a y = x$, então $\log_e y = \alpha x$.

A função exponencial ao utilizar a base "e" é denominada de função exponencial natural e a sua inversa de logaritmo natural, onde de forma simplificada $\log_e y = \ln y$. A mesma importância atribuída a função exponencial de base "e" é atribuída a sua inversa que é o logaritmo natural.

6.3 Situações Problemas e Aplicações

Os problemas que serão propostos vão ao encontro dos critérios C1, C10 e principalmente do C9, pois foi uma das carências apresentadas nos livros didáticos, que é trazer um problema sem que no enunciado tenha a palavra logaritmo, ou seja, não venha indicando o que possivelmente o aluno deve usar para resolver o problema. As referências que serviram de base são [15], [22] e [19].

Problema 1: Um dos problemas relacionados com explosões nucleares na atmosfera é a precipitação radioativa que se acumula nas plantas e na grama, que forma o suprimento alimentício de animais. O estrôncio 90 é um dos mais perigosos componentes nesse processo, porque tem uma meia-vida relativamente longa. Além disso, por ser quimicamente parecido com o cálcio, é absorvido pela estrutura óssea dos animais (incluindo humanos) que ingerirem o alimento contaminado. O iodo 131 também é produzido em explosões nucleares, mas apresenta menos perigo, porque sua meia-vida é de 8 dias. Se as vacas leiteiras comerem muito capim contendo iodo radioativo, seu leite será inadequado para o consumo. Se o capim tiver 10 vezes mais o nível máximo de iodo 31 permitido, quantos dias o capim deveria ser armazenado antes de ser dado como alimento para as vacas leiteiras?

Problema 2: A população mundial era de 5,51 bilhões em 1º de janeiro de 1993 e de 5,88 bilhões em 1º de janeiro de 1998. Suponha que a qualquer tempo a população cresça a uma taxa proporcional a população naquele instante. Em que ano a população mundial será de 7 bilhões?

Problema 3: Sob condições ideais, uma colônia de bactérias *Escherichia coli* pode crescer 100 vezes a cada duas horas. Se inicialmente estiverem presentes 4.000 bactérias, quanto tempo levará para que o número chegue a 1.000.000 de bactérias?

Problema 4: Quantos anos são necessários para que um investimento dobre de valor se ele estiver valorizando a taxa de juros de 4% compostos continuamente?

Problema 5: Uma bola de aço aquecida a uma temperatura de 100°C é posta num ambiente constante de 40°C. Em dois minutos a temperatura da bola é de 80°C. Em quanto tempo a temperatura será de 43°C?

Problema 6: Num hospital veterinário, são injetados 8 unidades de sulfato num cachorro. Depois de 50 minutos, permaneciam apenas 4 unidades nesse animal. Seja $f(t)$ a quantidade de sulfato presente depois de t minutos. A qualquer tempo a taxa de variação de $f(t)$ é proporcional ao valor de $f(t)$. Encontre uma fórmula para $f(t)$.

Problema 7: Foram injetados $20mg$ de uma certa droga em uma paciente. A taxa instantânea de eliminação da droga, imediatamente após a injeção, é de $5mg$ por hora. Qual a meia-vida da droga?

Problema 8: No Boqueirão da Pedra Furada, um dos mais bonitos sítios do parque Nacional Serra da Capivara, localizado na cidade de São Raimundo Nonato no Piauí, foram encontrados "restos"do que teria sido uma fogueira feita por um brasileiro da Idade da Pedra, datada na época em 48.500 anos. Qual o percentual de massa de ^{14}C, sabendo que tem meia-vida de 5730 anos?

Os problemas que seguirão são sobre a aplicação de modelos a partir de estudos na área da sociologia, economia, sismologia e saúde pública.

Problema 9: A notícia da renúncia de um ocupante de cargo público foi transmitida com frequência pelas estações de rádio e televisão. A metade dos habitantes de uma cidade ouviu a notícia nas 4 primeiras horas depois de sua veiculação. Quando 90% dos habitantes terão conhecimento da notícia? (Use a relação $P(t) = P_0(1-e^{-kt})$).

Problema 10: O Serviço de Saúde Pública de uma cidade de 500.000 habitantes monitora a disseminação de uma epidemia de gripe de uma variedade particularmente longa. No início da primeira semana de monitoração, haviam sido registrados 200 casos; durante a primeira semana, são registrados 300 novos casos. Dê uma estimativa em semanas de quando 45000 indivíduos estarão infectados. Use o modelo $P(t) = \dfrac{P}{1 + Be^{-kt}}$ (Aplicados por sociólogos para descrever a difusão de um rumor e por economistas para descrever a difusão sobre o conhecimento de um produto).

Problema 11: A Escala de Magnitude de Momento (abreviatura como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiro Kanamori, substituiu a escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3}\log_{10} M_0$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimentos da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o $dina.cm$.
O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7,3$. Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe em $(dina.cm)$?

Problema 12: Quando o júri considerou o prefeito de uma certa cidade culpado por aceitar suborno, o jornal, a rádio e a televisão começaram imediatamente a veicular a notícia. Dentro de uma hora, uma quarta parte dos cidadãos tinha conhecimento da decisão. Dê uma estimativa de quantos três quartas partes da cidade tinham conhecimento da notícia.

7 Considerações finais

Discutimos sobre o uso das Componentes Básicas para o Ensino da Matemática, e ela se mostrou um critério objetivo na análise do tópico de logaritmo nos livros didáticos. E ao analisarmos os livros didáticos que foram selecionados por critérios específicos, foi verificado que o tópico de logaritmo está apresentado de forma satisfatória, levando em consideração o equilíbrio entre as Componentes Básicas: conceituação, manipulação e aplicações. Foi visto também que a maioria dos livros ignoram o número "e" e o logaritmo natural.

Relacionando com as teorias metodológicas de aprendizagem é notado referências a história da matemática (como curiosidade), Resolução de problemas em diversas categorias e o uso da Tecnologia (computador e calculadora). E reconhecendo as limitações dos livros didáticos e as dimensões do trabalho pedagógico, são propostas atividades que podem ser aplicadas conforme o objetivo e intenção do professor quanto as Componentes Básicas para o Ensino da Matemática e com auxilio das tendências da educação matemática.

O livro didático bem estruturado é a garantia de uma ferramenta confiável quanto ao conhecimento científico matemático. Conduzir o ensino e a aprendizagem de matemática tomando como base o equilíbrio de teorias que apontam para a efetivação do objetivo do professor em orientar e acompanhar o desenvolvimento do aluno e sua capacidade de criticar, investigar, organizar ideias, propor soluções, realizar intervenções e se sentir livre para que possa perceber na matemática a ciência democrática em pensamentos, sendo que chegar a mesma solução ou propostas de soluções não significa passividade ou mesmo controle, pois até o resultado que possivelmente poderá ser definitivo, houve todo um processo de construção, a liberdade de pensamentos e o encadeamento lógico de ideias. Propriedades, definições e manipulações são questionáveis até serem apropriadas e atribuídas conceitos significativos. Mas todas essas questões passam pela qualificação e o esforço contínuo do professor, pelo seu comprometimento em exercer a profissão sempre com qualidade e refletindo sobre sua prática em sala de aula.

Independente do conteúdo, as propostas de ensino e aprendizagem não podem ser feita de forma generalizada, por mais que fatores comuns existam, conhecer as particularidades de cada turma é o primeiro passo no planejamento de aulas mais envolventes, seja no cumprimento do currículo escolar ou alcance de competências.

Referências

[1] Boaler, Jo., *Mentalidades Matemáticas: Estimulando os estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador.* - Porto Alegre: Penso,2018.

[2] Brasil. *Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias.* - Brasília: MEC, 2002.

[3] Brasil. *Secretaria de Educação Básica Portaria Nº 62, de 1º de agosto 2017* Poder Executivo, Brasília, DF, 02 ago. 2017. Seção 1, p.16.

[4] Chavante, E;Prestes, D., *Quadrante matemática, 1º ano.* - 1.ed.-São Paulo: SM,2016. p.130-168.

[5] Brasil. *Base Nacional Curricular Comum - Ensino Fundamental (BNCC) - A Áreas de Matemática.* - Brasília: MEC, 2017. p.263-296.

[6] Dante, Luiz Roberto., *Matemática: contexto e aplicações.* - 3.ed.-São Paulo: Ática,2016. p.148-199;291-319.

[7] Eves, Howard. *Introdução a História da Matemática.* Tradução: Hygino H. Domingues - 5.ed.-Campinas-SP: Unicamp,2011.

[8] Fiorentini, Dario., *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.* - 9.ed.rev.-Campinas-SP: Autores Associados, 2012.

[9] FNDE., *Programas do Livro.* Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/acesso-a-informacao/institucional/area-de-imprensa/noticias/item/11169-fnde-lança-filme-e-concurso-em-homenagem-aos-80-anos-do-livro-didático>, Acesso em: 12.02.2018.

[10] FNDE., *Área da imprensa.* Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/acesso-a-informacao/institucional/legislacao/item/4256-resolução-cd-fnde-nº-38,-de-15-de-outubro-de-2003>, Acesso em: 12.02.2018.

[11] Iezzi,G. et.all., *Matemática: ciência e aplicações.* - 9.ed.-São Paulo: Saraiva,2016. p.127-169

[12] INEP . *Relatório SAEB (ANEB e ANRESC) 2005-2015* - Brasília : Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2018.

[13] INEP,*Educação Básica - SAEB* .Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb> Acesso em: 10 de maio de 2018.

[14] Knud, Illeris., *Teorias Contemporâneas da Aprendizagem.*Tradução: Ronaldo Catalado Costa; Revisão Técnica: Francisco Silva Cavalcante Junior. Porto Alegre: Penso, 2013. p.127-137.

[15] Larry, et all., *Matemática Aplicada: economia, administração e contabilidade.* Tradução técnica: Claus Ivo Doering.- 12.ed.-Porto Alegre: Bookman,2012. p.229-297.

[16] Libâneo, J.C., *Didática.*- São Paulo: Cortez, 1994.

[17] Lima, E.L., *Matemática e Ensino.*- 3.ed.-Rio de Janeiro: SBM,2007. p.153-233;p113-130

[18] Lima, E.L.et all., *A matemática do ensino médio-Volume 1.* - 9.ed.-Rio de Janeiro: SBM,2006. p.171-211.

[19] Lima, E.L., *Logaritmos.*- 6.ed.-Rio de Janeiro: SBM,2016.

[20] Lima, E.L., *Números e Funções Reais.*Rio de Janeiro: SBM,2013. p. 147-183.

[21] Lima, E.L. et all., *Exame de Textos.*- Rio de Janeiro: Vitae,2001.

[22] Lima, E.L. et all., *Temas e Problemas.*- Rio de Janeiro: SBM,2010.p.45-66.

[23] Lima, E.L., *Meu professor de Matemática e outras Histórias.*-6ª ed.- Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[24] Maor, Eli., *e:A história de um número.*Tradução: Jorge -5ª ed. - Rio de Janeiro: Record, 2008.

[25] Mendes,I.A.; Chaquiam, M., *História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores* .Belém: SBHMat, 2016.

[26] Mota, et all., *A formação de professores e seus desafios frente as mudanças sociais, politicas e tecnológicas.* - Porto Alegre: Penso, 2015. p.241-256.

[27] OCDE. *Ten Questions for Mathematics Teachers?and How PISA Can Help Answer Them.*Tradução: Thiago Pandim - Rio de Janeirao: IMPA & SBM, 2018.

[28] Org. Editora Moderna., *Conexões com a matemática.* - 3.ed.-São Paulo: Moderna,2016. p.149-187.

[29] Paiva, Manoel., *Manoel:Paiva.* - 3.ed.-São Paulo: Moderna,2015. p.214-258;283-328.

[30] PERRENOUD, P. , *Dez novas competências para ensinar.*Porto Alegre: Artmed, 2000.

[31] Polya, G, *A arte de resolver problemas: um novo aspecto matemático.*Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araujo - 2.ed.reimp.- Rio de Janeiro: Intercjência,1995. p.1-70.

[32] Posamentier A.S.,Krulik S., *A arte de motivas os estudantes do ensino médio para matemática.* Tradução: Roberto Cataldo Costa; Revisão Técnica: Katia Stocco Smole. - Dados Eletrônicos. - Porto alegre: AMGH, 2014.

[33] Revista RPM., *materia sobre exame de textos.* - 12.ed.

[34] Rotta, et all., *Transtornos de aprendizagem: abordagem neurobiológica e multidisciplinar.* - 12.ed.- Porto Alegre: Artmed,2016. p.176-187.

[35] Rouseau C.,Saint-Albauin Y., *Matemática e atualidade Volume 1.*Tradução: Minguel V.S. Frasson. - Rio de Janeiro: SBM, 2015. p. 165-179.

[36] Silveira, E.;Miola, J. L., *Professor-Pesquisador em Educação Matemática.* - Curitiba: Ibpex, 2008.

[37] Sousa, J.;Garcia, J. S. R., *Coleção # contato matemática.* - 1.ed.-São Paulo: FTD,2016. p.134-176.

[38] Sutherland, Rosamund, *Ensino Eficaz de Matemática.* Tradução: Adriano Moraes Migliavaca -Dados Eletrônicos - Porto Alegre: Artmed, 2009.

[39] Toledo, M.B.A.,Toledo, M. A., *Teoria e prática de matemática: com dois e dois.* -1.ed - São Paulo: FTD, 2009. p.6-14

[40] Wachiliski, Marcelo., *Didática e avaliação: algumas perspectivas da educação.* - Curitiba: Ibpbex,2007.

[41] <https://catarinabaptista.files.wordpress.com/2010/06/reguacalc1.jpg> Acesso em: 15 de maio de 2018.

[42] <https://static.mundomax.com.br/produtos/61916/550/1.jpg> Acesso em: 15 de maio de 2018.

APÊNDICE A - Função Logarítmica

Teorema 1. *(Caracterização das Funções Logarítmicas) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva tal que $f(x_1.x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para quaisquer x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ (números reais positivos). [19]*

Demonstração

Como a função é monótona injetiva iremos demonstrar o caso onde a função é crescente, e segue de maneira análoga o caso quando a função é decrescente.
Primeiramente temos que $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$. Vamos supor que existe $a \in \mathbb{R}$, tal que $f(a) = 1$. Como a função é crescente $0 = f(1) < f(a)$, então $a > 1$. Verifiquemos os seguinte casos:
i) $f(a^n)$ para $n \in \mathbb{N}$;
ii) $f(a^m)$ para $m \in \mathbb{Z}$;
iii) $f(a^r)$ para $r \in \mathbb{Q}$;
iv) $f(a^x)$ para $x \in \mathbb{R}$;
i) $f(a^n) = f(a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a) = f(a) + f(a) + ... + f(a)$, logo $f(a^n) = 1 + 1 + ... + 1 = n$
ii) De $a^n \cdot a^{-n} = 1$, temos $0 = f(a^n \cdot a^{-n}) = f(a^n) + f(a^{-n})$, do caso (i) obtemos $n + f(a^{-n}) = 0$, assim $f(a^{-n}) = -n$.
iii) Façamos $r = \frac{m}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$ com $m = n \cdot r$, usando os casos (i) e (ii)
$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f[(a^r)^n]$
$f[(a^r)^n] = n \cdot f(a^r) = m$
$f(a^r) = \frac{m}{n} = r$
iv) Seja $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, para r e s números racionais, tais que $r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s$ $\Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s)$, pelos casos analisados $r < f(a^x) < s$, note que $r < x < s$, então devemos ter um $x \in \mathbb{R}$, onde $f(a^x) = x$.
Com $f(a^x) = x$, $a^x = y \Longleftrightarrow \log_a y = x$, dai segue que $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$.

A função crescente $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que $g(x_1.x_2) = g(x_1) + g(x_2)$, sabendo que $g(1) = 0$ e $g(2) = d > 0$, pois $1 < 2$, temos $g(1) = 0 < g(2)$.
Uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = g(x)/d$ é crescente, e transforma somas em produtos e cumpre ainda $f(2) = g(2)/d = 1$, logo para todo $x > 0$, tem-se $f(x) = \log_2 x$ uma função logaritmo de base 2.

É válido o fato que $x = 2^{f(x)} = 2^{g(x)/d} = [2^d]^{g(x)}$

Tomando $a = 2^d$*, temos* $x = a^{g(x)}$*, aplicando* log_a *na igualdade obtemos,* $log_a x = log_a a^{g(x)}$*, portanto* $log_a x = g(x) \cdot log_a a$*, é a função* $g(x) = log_a x$*.* $\square$

Com a caracterização da função logarítmica, podemos tratar sobre a definição e as propriedades que surgem como consequências.

Definição 1. *Uma função real* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$*. Chama-se uma função logarítmica ou sistema de logaritmos de tal modo que temos:*
a) f *é uma função crescente,isto é,* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$*.*
b) $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ *para quaisquer* x_1*,* $x_2 \in \mathbb{R}^+$*.*

Pela definição temos como consequência as seguintes propriedades:
Propriedade 1. O logaritmo de 1 é zero
Demonstração
Seja $x = 1$, pela condição (b) da definição, $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, onde obtemos $f(1) = f(1) - f(1) = 0$.

Propriedade 2. Os números maiores que 1 tem logaritmos positivos.
Demonstração
Seja $1 < x$, pela condição (a) da definição, $f(1) < f(x)$ como $f(1) = 0$,
$f(1) = 0 < f(x)$, então $0 < f(x)$.

Propriedade 3. Para todo $x > 0$, tem-se $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$.
Demonstração
Seja $x.\dfrac{1}{x} = 1$ e pela condição (b) da definição $f(x.\frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x})$. Na propriedade (1) temos $f(1) = 0$, podemos concluir que $f(\frac{1}{x}) = f(1) - f(x) = -f(x)$ $\square$.

Propriedade 4. Os números menores do que 1 tem logaritmos negativos.
Demonstração
Para $0 < x < 1$, podemos multiplicar a desigualdade por $\frac{1}{x}$, é importante lembrarmos que $x \in \mathbb{R}^+$.

Assim $\dfrac{0}{x} < \dfrac{x}{x} < \dfrac{1}{x}$, obtemos $0 < 1 < \dfrac{1}{x}$ pela condição (a) da definição $f(1) < f(\frac{1}{x})$
Na propriedade (3), $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$.
Logo, $f(1) < -f(x)$, $0 = f(1) < -f(x)$ então $f(x) < 0$ □

Propriedade 5. Para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, vale $f(x_1/x_2) = f(x_1) - f(x_2)$.
Demonstração
Pelo condição (b) da definição, podemos fazer $f\left(x_1 \cdot \frac{1}{x_2}\right) = f(x_1) + f\left(\frac{1}{x_2}\right)$, usando adequadamente as propriedades já expostas $f(\frac{1}{x_2}) = -f\,(x_2)$, assim podemos concluir que $f(x_1/x_2) = f(x_1) - f(x_2)$. □.

Propriedade 6. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo racional $r = \dfrac{p}{q}$ tem-se $f(x^r) = r \cdot f(x)$.
Demonstração
Pela condição (b) da definição, $f(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) = f(x_1 \cdot x_2) + f(x_3) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ a partir desse fato podemos fazer $f(x^n) = f(x) + f(x) + ... + f(x) = n \cdot f(x)$, logo para $n \in \mathbb{N}$, $f(x^n) = n \cdot f(x)$.
De $f(1) = 0$, tem-se $f(1) = f(x^n \cdot x^{-n}) = f(x^n) + f(x^{-n})$
$f(x^{-n}) = -f(x^n) = -[n \cdot f(x)] = -n \cdot f(x)$, com $-n \in \mathbb{Z}$.
Caso tenhamos x^0, então $f(x^0) = f(1) = 0$. De maneira geral para $m \in \mathbb{Z}$, $f(x^m) = m \cdot f(x)$.
Agora seja r racional tal que $r = \frac{m}{n}$, onde $m = r \cdot n$, desse fato $x^m = x^{r \cdot n}$, logo
$f(x^m) = f(x^{r \cdot n}) = f((x^r)^n) = n \cdot f(x^r)$
Daí $n \cdot f(x^r) = f(x^m) = m \cdot f(x)$, $f(x^r) = \frac{m}{n} \cdot f(x) = r \cdot f(x)$ □

O teorema a seguir mostra que duas funções logarítmicas são distintas ao menos de uma constante positiva, isso estabelece a relação para mudança de base.
Teorema 2. Dadas duas funções logarítmicas $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $f(x) = c \cdot g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.
Demonstração
Suponha que existe $a > 1$ tal que $f(a) = g(a)$. Provemos que $f(x) = g(x)$ para todo $x > 0$. De $f(a) = g(a)$, temos $f(a^r) = r \cdot f(a) = g(a^r)$.Para $0 < r < s$ números racionais, existe $x > 0$ de modo que $r < x < s$. Esse fato recairá sobre a caracterização da função logarítmica. Estaremos admitindo que a função é monótona crescente de acordo com a definição 1. Assim, segue que $f(a^r) < f(a^x) < f(a^s)$, $g(a^r) = f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) = g(a^s)$, dessa desigualdade temos as seguintes possibi-

lidades para $g(a^x)$

i) $g(a^x)<f(a^x)$
ii) $g(a^x)>f(a^x)$
iii) $g(a^x)=f(a^x)$

Se $g(a^x)<f(a^x)$, temos um racional t de modo que $g(a^x) < t < f(a^x)$, assim $g(a^x) < g(a^t) = f(a^t) < f(a^x)$, vamos convencionar que tenhamos $a^t = w$ e $a^x = d$, ou seja, uma melhor aproximação possível para a^x. Obtemos $g(d) < g(w)$ e $f(w) < f(d)$ como g e f são crescente, chegamos a um absurdo com $d < w$ e $d > w$. Portanto $g(a^x)=f(a^x)$, ou seja, $g(y) = f(y)$ para todo $y > 0$. Analogamente podemos demonstrar para (ii) e concluiremos que somente a (iii) será válida.

Dados f e g funções logarítmicas arbitrárias, tal que $a > 1$,então $f(a) > 0$ e $g(a) > 0$. Seja $c = \dfrac{f(a)}{g(a)}$ e uma função $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = c.g(x)$.
$h(a) = c \cdot g(a) = \dfrac{f(a)}{g(a)}.g(a) = f(a)$, como $h(a) = f(a)$ segue que $h(x) = f(x)$ para todo $x > 0$. Portanto conseguimos demonstrar que $f(x) = c \cdot g(x)$ para todo $x > 0$.
$\square$

Pelo Teorema 2, podemos obter qualquer função logaritmica a partir de uma já conhecida. É a justificativa para padronizar uma base para a função logarítmica e com ela obter qualquer outra, independente da base escolhida conforme a definição.

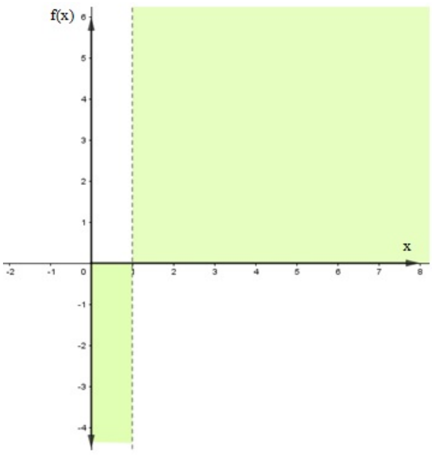
Em ([19], p.25) enuncia e demonstra as propriedades sobre a função logarítmica ser ilimitada superiormente e inferiormente. Em ([19], p.32) traz o corolário que diz: Toda função logarítmica $f(x) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$. Iremos usar essas propriedades para visualizar a representação geométrica da função logarítmica.

Representação Geométrica

A representação geométrica das funções constitui uma possibilidade de investigação e manipulação visual. Para podermos construir o gráfico da função logarítmica partiremos das analises feitas anteriormente e de teoremas que aqui iremos citá-los sem demonstrar, mas que podem ser encontrado com suas devidas demonstrações em [19].

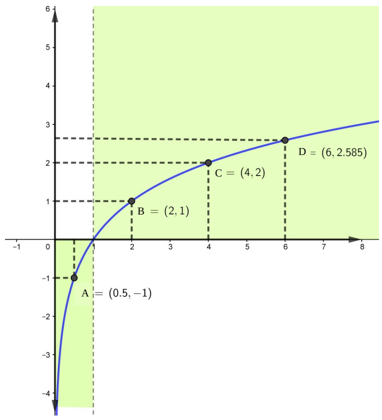
Primeiramente temos que toda função logarítmica $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$. Ainda pela definição da função crescente estudada vamos fazer $y = f(x) = \log_a x$, onde $a > 0$ é uma base escolhida e y é o nosso logaritmo. Outras considerações a serem feitas são as seguintes:$x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$, $f(x)$ é ilimitada inferiormente e superiormente [19], $f(1) = 0$ e pela propriedade 3. $f(x) > 0$ se $x > 1$ e $f(x) < 0$ se $0 < x < 1$.

Figura 17: $f(x) = \log_a x$ crescente.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 18: $f(x) = \log_2 x$



Fonte: Elaborada pelo autor

De acordo com o teorema 2, a partir de uma função logarítmica somos capazes de representar todas as outras, pois serão diferentes ao menos de constante positiva c. A figura 15, é o caso particular de uma função logarítmica crescente, e todas as outras podem ser representadas por $g(x) = \log_a x = c.f(x) = c \cdot \log_2 x$. Essa característica permite usarmos a base de nossa preferência desde que atenda a definição. Mas algumas bases são comumente utilizadas, que é o caso da base dez, sua importância está relacionada ao sistema numérico que é o sistema decimal, e a base de número "e" que é reconhecida sua importância por aplicações em diferentes áreas do conhecimento.

APÊNDICE B - Soluções dos Problemas Propostos

Problema 1:

Seja Q_0 a quantidade de iodo radioativo presente no capim. E para t o tempo em dias transcorrido, teremos $Q(t)$. A quantidade de iodo no capim é decrescente com o passar do tempo, a uma taxa $e^{-\alpha}$.

O iodo 131 é reduzido instantaneamente a $\left(1-\dfrac{\alpha}{n}\right)$ com n suficientemente grande. Para um período verificado a redução é de $Q_0\left(1-\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$, para t períodos obtemos $Q_0\left(1-\dfrac{\alpha t}{n}\right)^n = Q_0.e^{-\alpha.t}$

Então a quantidade para um tempo t é $Q(t) = Q_0.e^{-\alpha.t}$

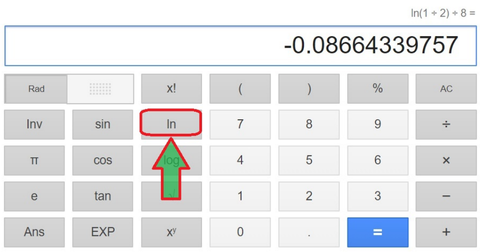
A meia-vida do iodo 131 é de 8 dias, então $Q(8) = \dfrac{Q_0}{2}$, metade da quantidade inicial.

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0.e^{-\alpha.8}$$
$$\frac{1}{2} = e^{-\alpha.8}$$
$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\alpha.8}$$

De $\ln e^{-\alpha.8} = \log_e e^{-\alpha.8}$, pelas propriedades dos logaritmos $\ln e^{-\alpha.8} = \log_e e^{-\alpha.8} = -\alpha.8$

A algumas décadas atrás iriamos utilizar uma "régua de cálculo"ou as famosas tábuas de logaritmos. Mas, hoje os métodos aritméticos ganham praticidade com o uso da calculadora.

Figura 19: Uso da calculadora



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\ln\frac{1}{2} = -\alpha.8$$

$$\alpha = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{8}$$

$$\alpha = -(-0,0866433)$$
$$\alpha = 0,0866433$$
$$Q(t) = Q_0.e^{-0,0866433.t}$$

Para a solução do problema, queremos saber o tempo para ser seguro a uso do capim na alimentação das vacas, a quantidade desejada de iodo radiotivo é de $Q(t)$ e se tem $10.Q(t)$.

$$Q(t) = 10.Q(t).e^{-0,0866433.t}$$
$$\frac{Q(t)}{10} = Q(t).e^{-0,0866433.t}$$
$$\frac{1}{10} = e^{-0,0866433.t}$$
$$\ln 0,1 = \ln e^{-0,0866433.t}$$
$$t = \frac{\ln 0,1}{-0,0866433}$$

$t \approx 26,5754$, por segurança usaremos o tempo de 27 dias.

Problema 2:

Crescimento a uma taxa proporcional no instante analisado. Crescimento exponencial e relação logarítmica, são os modelos para solucionar o nosso problema.
$P_0 = 5,51$ população inicial e depois de 5 anos será de $P(5) = 5,88$

$$P(5) = P_0.e^{\alpha.5}$$
$$\frac{P(5)}{P_0} = e^{5.\alpha}$$
$$\frac{5,88}{5,1} = e^{\alpha.5}$$
$$\ln 1.152941 = \ln e^{\alpha.5}$$
$$\alpha = \frac{\ln 1,152941}{5}$$
$$\alpha \approx 0,0284632$$

Chegamos na relação $P(t) = P_0.e^{0,0284632.t}$
$7 = 5,1.e^{0,0284632.t}$, $t \approx 11,12$ anos

Pela hipótese, no ano de 2005 a população mundial chegaria a 7 bilhões de habitantes. Porém, a população mundial chegou a 7 bilhões de habitantes no ano de 2011[7].

Figura 20: Notícia de Divulgação sobre a população mundial

MENU G1 MUNDO

31/10/2011 09h06 - Atualizado em 01/11/2011 15h45

Mundo chega a 7 bilhões de pessoas; confira curiosidades e números

Bebê filipina foi escolhida para simbolizar marca alcançada nesta segunda (31).
Infográfico mostra desafios do mundo diante do crescimento populacional.

Fonte:http://g1.globo.com/mundo/noticia

Problema 3:

Quantidade inicial $Q_0 = 4000$, depois de 2 horas terá $Q(2) = 400.000$.

$$Q(t) = Q_0.e^{\alpha.t}$$
$$100 = e^{2.\alpha}$$
$$\ln 100 = \ln e^{2.\alpha}$$
$$\alpha = \frac{\ln 100}{2} \approx 2,302585$$

Para $Q(t) = 1.000.000$

$$250 = e^{t.2,302585}$$
$$\ln 250 = \ln e^{t.2,302585}$$
$$t = \frac{\ln 250}{2,302585} \approx 2,3979$$

[7] http://g1.globo.com/mundo/noticia/2011/10/mundo-chega-7-bilhoes-de-pessoas-confira-curiosidades-e-numeros.html. Acesso em 11 de maio de 2018

Aproximadamente duas horas e vinte e quatro minutos para chegar a um milhão de bactérias.

Problema 4:

A capitalização é a juros compostos contínuos, vamos usar a relação $C(t) = C_0.e^{0,04.t}$, onde C_0 é o capital inicial e $C(t)$ é o capital em um determinado tempo t. Queremos saber quanto teremos $C(t) = 2.C_0$.

$$2.C_0 = C_0.e^{t.0,04}$$

$$e^{t.0,04} = 2$$

$$\ln e^{t.0,04} = \ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{0,04} \approx 17,3286$$

Precisará de aproximadamente 17 anos e 4 meses para o investimento dobrar.

Problema 5:

A característica desse problema é o tratamento dado a lei do resfriamento de Newton, onde para resolvê-lo partiremos de $D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t}$, onde D_0 é a diferença de temperatura no instante $t = 0$ e $D(t)$ é a diferença num instante t qualquer.

Pelas informações $D_0 = 100° - 40°$ e $D(2) = 80°$, usaremos para determinar a constante α.

$$D(2) = D_0.e^{-\alpha \cdot t}$$

$$e^{-\alpha \cdot 2} = \frac{D(2)}{D_0}$$

$$e^{-\alpha \cdot 2} = \frac{80}{60}$$

$$\ln e^{-\alpha \cdot 2} = \ln \frac{80}{60}$$

$$\alpha = -\frac{\ln 80/60}{2} \approx -0,143841$$

Queremos saber o tempo para $Q(t) = 43°$, usando $D(t) = 60 \cdot e^{-0,143841t}$

Chegamos a solução que $t \approx 2,316060$, o que é aproximadamente dois minutos e dezenove segundos.

Problema 6:

A quantidade inicial de sulfato é $f(0) = 8$, com o tempo analisado em minutos, após 50 minutos a quantidade é $f(50) = 4$. Com o passar do tempo a quantidade de sulfato no organismo do animal vai diminuindo, então obtemos $f(t) = f(0) \cdot e^{-\alpha t}$.

$$\alpha = \frac{\ln f(t)/f(0)}{t}$$

$$\alpha = \frac{\ln f(50)/8}{50}$$

$$\alpha = \frac{\ln 4/8}{50} \approx 0,01386$$

Logo, $f(t) = 8 \cdot e^{-0,01386t}$ a quantidade de sulfato no cachorro depois de t minutos.

Problema 7:

$f(t) = f(0) \cdot e^{-\alpha t}$, onde $f(0) = 20$ e foram eliminados 5mg da droga em uma hora, então $f(1) = 15$ que é a droga restante.

$$\alpha = \frac{\ln f(t)/f(0)}{t}$$

$$\alpha = \frac{\ln f(1)/20}{1}$$

$$\alpha = \ln 15/20 \approx 0,287682$$

$$f(0)/2 = f(0) \cdot e^{-0,287682t}$$

A droga terá meia-vida de $t = \dfrac{\ln 1/2}{-0,287682} \approx 2,41$. Que significa aproximadamente duas horas e vinte e quatro minutos.

Problema 8:

A quantidade inicial de ^{14}C é Q_0 e sua constante de desintegração é de $-0,0001209$.

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-0,0001209t}$$

$$Q(48500) = Q_0 \cdot e^{-0,0001209 \cdot 48500}$$

$$Q(48500) = Q_0 \cdot 0,00284$$

Notemos que $0,00284 = 0,284\%$ que foi o percentual encontrado de ^{14}C.

Figura 21: Pintura rupestre simbolo do Parque Nacional
Serra da Capivara, no Piauí.

Fonte:https://brasil.elpais.com/brasil/2014/05/16/politica/1400268067495159.html

Problema 9:

O problema é modelado pela função $P(t) = P_0(1 - e^{-kt})$. Metade dos habitantes ouviram a notícia nas 4 primeiras horas $f(4) = \frac{P_0}{2}$

$$\frac{P_0}{2} = P_0(1 - e^{-k4})$$
$$\frac{1}{2} = (1 - e^{-4k})$$
$$-e^{-4k} = \frac{1}{2} - 1$$
$$e^{-4k} = \frac{1}{2}$$

Teremos, $k = \dfrac{ln(1/2)}{-4} \approx 0,173286$ assim, $P(t) = P_0(1 - e^{-0,173286t})$

$0,9 \cdot P_0$ correspondem a 90% da população com conhecimento da notícia.

$$0,9 \cdot P_0 = P_0(1 - e^{-0,173286t})$$
$$0,9 = (1 - e^{-0,173286t})$$
$$-e^{-0,173286t} = 0,9 - 1$$
$$e^{-0,173286t} = 0,1$$

$t = \dfrac{ln(0,1)}{-0,173286} \approx 13,2877$. Portanto, 90% da população terá conhecimento da notícia em aproximadamente treze horas e dezessete minutos.

Problema 10:

A aplicação do modelo epidemiológico depende das seguintes hipóteses:

1- A população é um número fixo P e cada membro da população é suscetível à doença.

2- A duração da doença é longa, portanto, não ocorrem cura durante o período de tempo sob estudo.

3- Todos os indivíduos infectados são contagiosos e circulam livremente entre a população.

4- Durante cada período de tempo (como um dia ou uma semana) cada pessoa infectada faz c contato e cada contato com uma pessoa não infectada resulta na transmissão da doença.

Da relação $P(t) = \dfrac{P}{1+Be^{-kt}}$, P é a quantidade de habitantes, $P(0) = 200$ é o início do monitoramento com a quantidade de pessoas infectadas, $P(1) = 200 + 300 = 500$ é a quantidade de pessoas infectadas no final da primeira semana.

$$P(t) = \frac{P}{1+Be^{-kt}} = \frac{500000}{1+Be^{-kt}}$$
$$\text{Com } P(0) = 200,\ 200 = \frac{500000}{1+Be^{-k0}} = \frac{500000}{1+B}$$
$$1+B = \frac{500000}{200}$$
$$B = 2499$$

Usando o fato que $P(1) = 500$, obtemos k

$$P(1) = \frac{500000}{1+2499e^{-kt}}$$
$$500 = \frac{500000}{1+2499e^{-k1}} = \frac{500000}{1+2499e^{-k}}$$
$$1+2499e^{-k} = \frac{500000}{500}$$
$$2499e^{-k} = 1000-1$$

$e^{-k} \approx 0,4$, usando logaritmo natural, obtemos $k = 0,92$

E construímos a relação modelada conforme a situação exposta, $P(t) = \dfrac{500000}{1 + 2499e^{-0,92t}}$

E para $P(t) = 45000$ infectados o tempo será de:

$$\begin{aligned} 45000 &= \frac{500000}{1 + 2499e^{-0,92t}} \\ 1 + 2499e^{-0,92t} &= \frac{500000}{45000} \\ 2499e^{-0,92t} &= \frac{100}{9} - 1 \\ e^{-0,92t} &= \frac{91}{22491} \end{aligned}$$

Usando logaritmo natural, obtemos $t \approx 5,98$. O que significa que em aproximadamente 6 semanas haverá 45000 habitantes infectados.

Problema 11:

Processo exclusivamente manipulativo.

$$\begin{gathered} M_w = -10,7 + \frac{2}{3}\log_{10} M_0 \\ \text{De } M_w = 7,3, \text{ temos } 7,3 = -10,7 + \frac{2}{3}\log_{10} M_0 \\ 18 = \frac{2}{3}\log_{10} M_0 \\ \log_{10} M_0 = 27 \end{gathered}$$

De $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, logo $M_0 = 10^{27}$ *dina.cm*

Problema 12:

Pelos dados do problema $P(1) = \dfrac{P_0}{4}$ e queremos obter t tal que $P(t) = \dfrac{3P_0}{4}$

Usaremos o modelo $P(t) = P_0(1 - e^{-kt})$

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{4} &= P_0(1 - e^{-k1}) \\ \frac{1}{4} &= (1 - e^{-k}) \\ -e^{-k} &= \frac{1}{4} - 1 \end{aligned}$$

$$e^{-k} = \frac{3}{4}$$

$$e^{-k} \approx 0,75, \text{ usando logaritmo natural, obtemos } k \approx 0,2876$$

Logo, $P(t) = P_0(1 - e^{-0,2876t})$ e para $P(t) = \dfrac{3P_0}{4}$

$$\begin{aligned}
\frac{3P_0}{4} &= P_0(1 - e^{-0,2876t}) \\
\frac{3}{4} &= (1 - e^{-0,2876t}) \\
-e^{-0,2876t} &= \frac{3}{4} - 1 \\
e^{-0,2876t} &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$e^{-0,2876t} \approx 0,25, \text{ usando logaritmo natural, obtemos}$$

$$t = \frac{\ln 0,25}{-0,2876} \approx 4,82$$

75% da população saberá da notícia em aproximadamente 5 horas.