Programa de Mestrado Profissional em Matemática

em Rede Nacional

BIANCA DO REGO SILVA

ATIVIDADES INTERATIVAS PARA UMA ABORDAGEM DINÂMICA DE FUNÇÕES REAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA:

UM ESTUDO DE CASO

Orientador: Wanderley Moura Rezende

NITERÓI
JULHO/2016

BIANCA DO REGO SILVA

ATIVIDADES INTERATIVAS PARA UMA ABORDAGEM DINÂMICA DE FUNÇÕES REAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA:

UM ESTUDO DE CASO

Dissertação apresentada por **BIANCA DO REGO SILVA** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Wanderley Moura Rezende

Niterói
2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística da UFF

S586 Silva, Bianca do Rego
Atividades interativas para uma abordagem dinâmica de funções reais na educação básica: um estudo de caso / Bianca do Rego Silva. – Niterói, RJ : [s.n.], 2016.

146 f.

Orientador: Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Fluminense, 2016.

1. Ensino de matemática. 2. Geometria dinâmica. 3. Funções Reais. I. Título.

CDD 510.7

BIANCA DO REGO SILVA

ATIVIDADES INTERATIVAS PARA UMA ABORDAGEM DINÂMICA DE FUNÇÕES REAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM ESTUDO DE CASO

Dissertação apresentada por **Bianca Do Rego Silva** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em: 22/07/2016

Banca Examinadora

Prof. Wanderley Moura Rezende - Orientador

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Profa. Andreia Carvalho Maciel Barbosa - Membro

Doutor – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Profa. Dirce Uesu Pesco - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Profa. Miriam del Milagro Abdon - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

NITERÓI

2016

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

À Capes, pela concessão da bolsa.

Ao professor orientador Wanderley Moura Rezende pelo suporte, paciência e por todos os ensinamentos e pela impecável condução deste meu trabalho.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Ao meu noivo Wanderson Moreira, pela paciência na “fase mestrado”.

Aos meus alunos que participaram da oficina e contribuíram com o trabalho.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

ID	- Indicador de Desempenho
IDEB	- Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IDERJ	- Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado do Rio de Janeiro
IF	- Indicador de Fluxo
INEP	- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
INL	- Instituto Nacional do Livro
PCN	- Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	- Programa Nacional do Livro Didático
SAERJ	- Sistema de Avaliação do Estado do Rio de Janeiro

RESUMO

O estudo das variações quantitativas presentes nos fenômenos naturais foi, sem dúvida, um dos grandes pilares na construção da ideia de função. Contudo, ainda que os PCN ratifiquem que o ensino de funções deva ser apresentado inicialmente como relação entre grandezas (considerando sempre que possível as situações de modelagem matemática como ponto de partida), os livros didáticos têm explorado pouco o desenvolvimento de questões dessa natureza.A abordagem do ensino de funções reais vem sendo realizada em contexto essencialmente algébrico. Em geral, apresenta-se a expressão analítica da função, analisa-se o domínio da função apenas como restrição algébrica da expressão dada e dá-se pouca importância ao estudo do crescimento e decrescimento da função. Assim, motivado pela ideia de construir uma abordagem mais dinâmica do conceito de função, este trabalho desenvolve e avalia uma sequência didática composta de nove atividades interativas, construídas a partir de situações geométricas representadas em um ambiente virtual com o software de matemática dinâmica *Geogebra.* O uso desta ferramenta tecnológica possibilita que o aluno reconheça a variável independente, e por meio de sua variação o domínio da função. Permite que visualize as regiões onde os valores da função crescem e onde decrescem, tornando possível a análise dos pontos críticos considerando o contexto da variabilidade como ponto de partida para a construção desses conceitos. As atividades foram aplicadas a um grupo piloto de sete alunos do ensino médio de um Colégio Estadual do Município de Niterói do Estado do Rio de Janeiro. E mesmo sem o hábito de trabalhar este tipo de questão, é interessante notar que eles passaram a produzir, de forma progressiva e gradual, respostas de acordo com os objetivos propostos. Apesar dos erros produzidos no campo algébrico e geométrico, pode-se concluir que a maioria dos alunos compreendeu efetivamente o significado de variável ao longo da realização das atividades, re-significando o conceito de domínio e a identificação de pontos ótimos em um contexto dinâmico do conceito de função como relação entre grandezas.

Palavras chave: funções reais; variabilidade; ensino médio; geometria dinâmica; sequência didática.

ABSTRACT

The study of the quantitative variations present in natural phenomena was, doubtless, one of the greatest pillars in the construction of the idea of function. However, although the Brazilian National Curricular Parameters (PCN) ratify that the teaching of functions should be presented initially as a relation between quantities, considering –as far as possible – situations of mathematical modelling as a starting point, course books have explored very little the development of questions of this nature. The approach to the teaching of real functions has been done in an essentially algebraic context. In general, the analytical expression of the function is presented, then the domain of the function is analyzed merely as an algebraic restriction of the given expression and very little importance is given to the study of the increasing and decreasing of the function. Thus, motivated by the idea of constructing a more dynamic approach to the concept of function, the present work develops and evaluates a didactical sequence made up of nine interactive activities, designed from geometric situations represented in a virtual environment with the mathematics software *Geogebra*. The use of this technological tool enables the student to recognize the independent variable, and through its variable, the function domain. It allows them to visualize the regions where the values of the function increase and where they decrease, enabling the analyses of the critical points, considering the context of the variability as a starting point for the construction of such concepts. The activities were applied to a pilot group of seven high school students from a state school in the city of Niterói in the state of Rio de Janeiro. And even without the habit of working out this type of question, it is interesting to notice that they started to produce, progressive and gradually, answers according to the proposed goals. In spite of the mistakes made in the algebraic and geometric fields, it may be concluded that most students have effectively understood the meaning of variable throughout the working-out of the activities, re-signifying the concept of domain and recognition of optimal points in a dynamic context of the concept of function as relations between quantities.

Key words: real functions; variability; high school; dynamic geometry; didactical sequence.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Historicamente, o conceito de função se estabelece como uma ferramenta da Matemática que ajuda o homem a entender os processos de fluência e de interdependência que são intrínsecos às coisas e aos seres do nosso Universo (CARAÇA, 1989). Portanto, saber que a variação de uma grandeza depende da variação da outra é um aspecto importante no estudo do conceito de função, mas que se torna incompleto do ponto de vista epistemológico se não estudamos como ocorre esta variação, isto é, se não conseguimos dar qualidade e quantificar este processo de variação. O estudo das variações quantitativas presentes nos fenômenos naturais foi, sem dúvida, um dos grandes pilares na construção da ideia de função.

Contudo, ainda que nos PCN tenham orientações de que o ensino de funções deva ser apresentado inicialmente como relação entre grandezas, considerando – sempre que possível – situações de modelagem matemática como ponto de partida, os livros didáticos têm explorado muito pouco o desenvolvimento de questões dessa natureza. Segundo algumas pesquisas, a abordagem do ensino de funções no ensino médio vem sendo feito de forma estática (BOTELHO, 2005; SÁ, 2005). Há um treinamento exacerbado no estudo das funções elementares em contextos algébricos. Incentiva-se, por exemplo, o estudo do domínio de funções a partir apenas das restrições algébricas de suas expressões analíticas. Estuda-se o sinal das funções, mas não suas regiões de crescimento e decrescimento – ou melhor, de como crescem ou decrescem os seus valores –, estuda-se suas propriedades algébricas (injetividade, raízes, etc.) como se o objetivo de se estudar função fosse somente resolver problemas de equações ou inequações associadas a cada uma delas. A função já é dada! Temos apenas que resolver um problema futuro (de equação ou inequação) com a situação-problema já modelada.

Sendo assim, motivados pela ideia de construir uma abordagem mais dinâmica do conceito de função, imaginamos nosso projeto de pesquisa. O projeto consiste na elaboração e avaliação de uma sequência didática composta de nove atividades interativas, construídas a partir de situações geométricas representadas em um ambiente virtual com o software de matemática dinâmica *Geogebra.* Elas estimulam o estudo do domínio de funções reais, o reconhecimento de suas expressões analíticas e de seus pontos críticos (máximos e mínimos), considerando o contexto da variabilidade como ponto de partida para a construção desses conceitos.

A pesquisa em si não se resume na elaboração das atividades, mas, sobretudo, a uma avaliação da aplicação do material didático elaborado junto a alunos de uma escola pública. O trabalho de campo foi desenvolvido em forma de oficinas com um grupo de alunos do Colégio Estadual Alcina, localizado em Itaipu. Para cada uma das cinco primeiras atividades foram elaboradas versões impressas das mesmas. Logo, em uma primeira etapa da experiência didática os alunos resolveram as cinco primeiras atividades impressas e interativas do seguinte modo: em um primeiro momento, tentava resolver a atividade impressa utilizando apenas lápis e papel; no segundo momento, o aluno tinha acesso à versão interativa da situação-problema da questão apresentada na versão impressa. Para as últimas quatro atividades da sequência didática foram consideradas apenas a versão interativa. A proposta de atividades para a abordagem do conceito função no ensino médio, sua motivação e objetivos são apresentados no capítulo 3.

O relato da experiência didática realizada é feito no capítulo 4. Neste capítulo apresentamos também as informações preliminares e a metodologia da pesquisa. A avaliação dos alunos, sujeitos da pesquisa, e da pesquisadora é realizada no capítulo 5, que contém a relação do objetivo alcançado com a aplicação das atividades. Para a avaliação dos alunos foi considerado uma escala Likert de cinco pontos e um formulário com sete itens.

A revisão de literatura acerca do tema é realizada nos dois capítulos iniciais.

No capítulo 1, faz-se uma breve discussão sobre o conceito de função e sua relação com a organização da matemática escolar, utilizando o texto de Dassie (2008) que discute as propostas de Euclides Roxo (1937) para a matemática do ensino secundário. Ainda neste capítulo são debatidas, as dificuldades de aprendizagem com relação a este conceito encontradas no ensino superior, tomando como referência os trabalhos de Domingos (2002), Sierpinska (1987), Rezende (2003) e Cabral (1998). Na última seção deste capítulo são discutidas questões relacionadas ao conceito de função na educação básica, observando as orientações curriculares existentes sobre o ensino deste conceito em documentos oficiais (PCN). Na parte final desta seção apresenta-se uma revisão bibliográfica de trabalhos que apresentam propostas didáticas alternativas para o ensino de funções na educação básica (SANTOS, 2008; SANTOS, 2005; SIQUEIRA, 2013; SOARES, 2012; OLIVEIRA E DORINI, 2013; REZENDE *et al*, 2012; REZENDE, 2013; SALES, 2008).

No capítulo 2, apresenta-se uma síntese da avaliação realizada pela equipe do PNLD (2015) sobre a abordagem do conceito de função, tendo como referência os livros didáticos aprovados neste programa e as orientações do documento a respeito do tema. Neste mesmo capítulo, apresenta-se também um mapeamento realizado pela autora deste trabalho da abordagem do conceito de função em dois livros didáticos do ensino médio aprovados pelo PNLD (2015). Na parte final faz-se uma análise comparada dos mapas produzidos pela autora com os mapas elaborados por Botelho (2005) e Sá (2005) de edições anteriores dos mesmos livros.

CAPÍTULO 1 – SOBRE O ENSINO DE FUNÇÕES

1.1 – O conceito de função e a história da matemática escolar

Historicamente a organização da matemática foi realizada em três vias: aritmética, geometria e álgebra. No decorrer dos anos, notou-se que a forma tradicional de ensino poderia estar limitando os alunos com relação ao aprendizado. Por isso, começaram a ocorrer mudanças que possibilitaram o desenvolvimento deste alunado.

> Em todos os tempos, as idéias sobre educação e as práticas de ensino têm apresentado variações. [...] A partir de que data podemos marcar-lhes a presença? De modo mais vivo, desde os últimos anos do século passado [século XIX]. Em vários países, muitos educadores então passaram a considerar novos problemas relativos ao desenvolvimento das crianças. Outros experimentaram variar os procedimentos de ensino, ou logo transformar as normas tradicionais da organização escolar, com isso ensaiando uma escola nova, no sentido de escola diferente das que existissem. [...] Não se refere a um só tipo de escola, ou sistema didático determinado, mas a todo um conjunto de princípios tendentes a rever as formas tradicionais do ensino. (LOURENÇO FILHO[1], 1978, p. 17, *apud* DASSIE, 2008, p. 56)

Segundo Roxo (1937, *apud* DASSIE, 2008), foi Felix Klein que, em 1893, no I Congresso Internacional de Matemática, propôs uma reforma que irá revolucionar a organização da matemática escolar.

> Foi Felix Klein o primeiro que, em 1893, perante o Congresso Internacional de Matemática, reunido em Chicago, chamou a atenção dos professores de matemática, para a conveniência de adotar-se como idéia axial, capaz de unificar o ensino dessa matéria, o conceito de função. [...] Em outra ocasião, repisava as mesmas idéias e as defendia com calor. "Sim meus senhores, estou plenamente convencido de que o conceito de função, sob forma geométrica, deve ser a alma do ensino da matemática na escola secundária! Em torno dessa noção, agrupam-se facilmente todos os assuntos a ensinar em matemática e esta se vem, muitas vezes, ressentindo, até aqui, da falta de uma conexão devidamente planeada [Felix Klein]" (ROXO[2], 1937, p. 178, *apud* DASSIE, 2008, p. 100).

Por conseguinte, com base nas idéias do alemão Felix Klein, Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II, propõe em 1929 uma reforma no ensino secundário brasileiro que culminou com a criação da disciplina de Matemática. Nesta proposta houve uma preocupação em se unir as diversas áreas do conhecimento matemático (aritmética, geometria e álgebra).

---

[1] LOURENÇO FILHO, M. B. Introdução ao estudo da escola nova: bases, sistemas e diretrizes da pedagogia contemporânea. 12 ed. São Paulo: Melhoramentos: [Rio de Janeiro]: Fundação Nacional de Material Escolar, 1978. (Obras Completas de Lourenço Filho, v. 2) (Biblioteca de educação).

[2] ROXO, E. A Matemática na Educação Secundaria. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1937. (Atualidades Pedagógicas, vol. 25).

> Organizaram-se assim diversos cursos em que se procurou fazer o ensino das partes da Matemática, relacionando-as do modo mais intimo possível. Em tais cursos, que são denominados cursos de Matemáticas gerais, cursos compósitos, correlacionados ou unificados, procuram-se eliminar, racionalmente, as barreiras que separam a aritmética, a álgebra e a geometria, intentando alcançar uma organização da matéria que ofereça uma introdução psicológica e pedagogicamente mais eficaz aos estudos da Matemática, e evitando - se que a aderência estrita a concepção de disciplinas distintas obscureça a real compreensão que o aluno deve ter dos métodos matemáticos. (ROXO, 1937, p. 142, *apud* VALENTE, 2003)

Dentre as mudanças metodológicas apresentadas, Euclides Roxo propõe, tal como foi sugerido por Klein em sua proposta original, que o conceito de função então, seja ideia unificadora do ensino da matemática.

> Entre as mudanças metodológicas proposta por Euclides Roxo a mais importante foi à articulação entre os conceitos de aritmética, álgebra e geometria a partir da fusão desses diferentes ramos. Associada a esta mudança podemos também classificar a introdução do conceito de função como a inclusão mais importante entre as acima citadas. Com efeito, as noções de função para Euclides Roxo deveria ser a idéia unificadora do ensino da matemática. (DASSIE, 2008, p.100)
>
> Além do argumento de idéia unificadora, Euclides Roxo discute a importância do conceito de função associada aos objetivos da educação matemática e na preparação para o ensino superior, e como idéia vivificadora do ensino (ROXO, 1937, p. 179 – 181, *apud* DASSIE, 2008, p.100).

Tal fato é justificado com base nos princípios preconizados por Félix Klein, para o qual o conceito de função encontra-se presente não só na literatura moderna das ciências exatas como também em diversas situações do cotidiano.

> Introdução precoce da noção de função, que, para Klein, é o âmago do moderno movimento de reforma, apresentada - o que se não deve perder de vista - sob forma geométrica e expressa, eficazmente, pelas representações gráficas, das quais diz Klein: “Penetram não somente através a grande literatura moderna das ciências exatas, mas pode-se dizer, surgem em todas as cogitações da vida atual”. (ROXO[3],1940, *apud* VALENTE, 2003, p. 104 - 105)

Ao defender sua proposta, Euclides Roxo mostra sua indignação quanto ao fato de “o Brasil” ter ignorado até então a grande “conquista pedagógica” anunciada por Félix Klein para o ensino de matemática. Segundo o professor, o conceito de função permitiria uma abordagem mais realista da matemática escolar, potencializando assim discussões de natureza interdisciplinar.

> Desde que foi defendido por Felix Klein, esse princípio pedagógico [a noção de função como ideia axial do ensino de matemática] tornou - se vencedor em quase todos os países civilizados. (...) É pena que o Brasil abra mão da grande conquista

[3] ROXO, E. A matemática e o curso secundário. In: PEIXOTO, A. et.al. Um grande problema nacional (estudos sobre ensino secundário). Rio de Janeiro: irmãos Pongetti editores, 1940, PP. 56-85.

> pedagógica que foi a aceitação desse princípio na reforma de 1931. (ROXO[4], 1931, apud VALENTE, 2003, p. 146)

> A ideia de função vem ainda dar ao ensino da matemática secundária mais vida e mais interesse, permitindo não só tratar de questões de maior realidade para o aluno, como estabelecer conexões a outras matérias mais concretas. (ROXO, 1937, *apud* VALENTE, 2003, p. 181)

Na proposta de Euclides Roxo há também uma preocupação com a inserção de uma noção intuitiva do Cálculo no ensino secundário. O autor sugere a "introdução de noções de cálculo diferencial e integral, apoiados de modo preponderante em métodos geométricos, e, portanto, intuitivos." (ROXO, 1940, *apud* VALENTE, 2003, p. 105)

Dassie (2008) fala do posicionamento de Euclides Roxo, ainda seguindo as ideias de Klein, que visa duas vertentes para a reintrodução do cálculo no ensino secundário brasileiro.

> O primeiro deles está também associado ao ensino superior, como no caso das funções. O argumento baseia-se na descontinuidade entre o curso secundário e o superior, onde as noções de cálculo, como as de função, favoreceriam a articulação entre estes dois níveis de ensino. O outro é o reconhecimento do cálculo infinitesimal como elemento de cultura geral. (DASSIE, 2008, p.101)

Em verdade, como veremos mais adiante, nem as propostas de Felix Klein, nem a de Euclides Roxo para a abordagem do conceito de função, foi realizada de forma plena, tal qual desejavam os professores.

1.2 – O conceito de função e as dificuldades de aprendizagem no ensino superior de Matemática

Diversas pesquisas na área de educação matemática no ensino superior têm apontado que uma das principais fontes de dificuldades de aprendizagem de conceitos ensinados, em particular no ensino de Cálculo e Análise, é o conceito de função, melhor dizendo, a formação básica que o estudante possui acerca deste conceito.

Domingos (2002), em seu texto "A construção do conhecimento matemático avançado: o caso do conceito de sucessão" faz um relato da experiência que realizou com uma

[4] Carta sua a Gustavo Capanema: Ver CPDOC, Arquivo Gustavo Capanema, documento código GC 41.09.03 (série g).

aluna que estava fazendo a disciplina de Análise Matemática I[5] pela primeira vez por ocasião de uma pesquisa feita com alunos desta disciplina. Ao solicitar à aluna que explicasse "o que é sucessão?", obteve como resposta a seguinte frase: "numa reta são… pontos que seguem uma determinada expressão, faz corresponder…" (*ibdem*, 2002, p.302)

E assim, não revelando as entrelinhas da entrevista, o pesquisador conclui que na atitude da aluna "A noção de correspondência acaba, no entanto, por ser negligenciada, dando mais destaque à representação dos pontos na reta." (*ibdem*, 2002, p.302).

Em seguida o autor apresenta duas representações gráficas da sucessão $\frac{1}{x}$ feitas pela aluna:

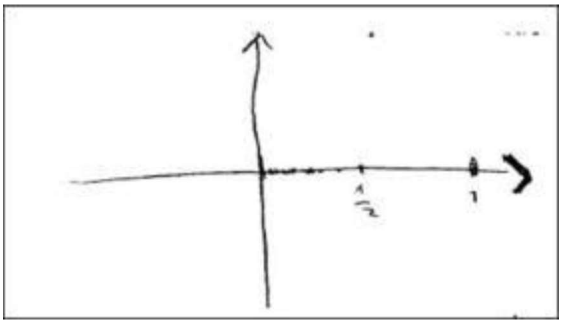


Figura 1 - Imagem da primeira representação gráfica feita pela aluna.
Fonte: (DOMINGOS, 2002, pag.303)

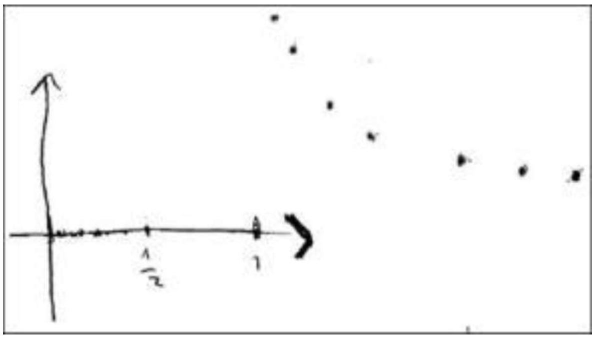


Figura 2 - Segunda representação gráfica feita pela aluna.
Fonte: (DOMINGOS, 2002, pag.303)

Com base na figura, observa-se que a aluna faz a primeira representação como se estivesse representando apenas uma reta "... e o destaque principal é dado à forma como os termos vão evoluindo." A segunda representação surge a partir do momento em que o

[5]Disciplina usualmente oferecida no 1º ano de um curso de Matemática do ensino superior em universidades portuguesas.

pesquisador pede para a aluna calcular e representar os primeiros termos da sucessão. Nesta representação ela mantém os valores da sequência no eixo das abscissas, acrescentando alguns pontos sem referência explícita às coordenadas desses pontos. Apesar das tentativas expostas, a aluna acaba admitindo, segundo o pesquisador, que não está habituada a trabalhar com a representação de sucessões por meio de gráficos de funções reais.

> Embora tenha recorrido à representação esquemática/gráfica para explicitar o seu conceito de sucessão ela acaba por admitir que não está familiarizada com esta representação por não ser usual trabalhar as sucessões desta forma. (DOMINGOS, 2002, p. 305)

Por meio deste relato percebe-se que a aluna não reconhece uma sucessão de números reais como uma função real. Como consequência desse fato, a sua interpretação gráfica equivocada da sequência de números reais compromete sua compreensão do limite proposto.

Ainda no âmbito do ensino de Cálculo (ou de Análise), porém em outra perspectiva, Sierpinska (1987), ao analisar e classificar as interpretações dos seus estudantes em relação à noção de limite, concluiu que as concepções dos alunos sobre conhecimento científico, sobre os conceitos de infinito, de número real e de **função** são as principais fontes dos obstáculos epistemológicos.

Em consonância com as ideias de Domingos (2002) e Sierpinska (1987), Rezende (2003) aponta que grande parte das dificuldades no ensino de Cálculo são consequências da "forma como este conceito [o de função] é trabalhado em geral no ensino médio e fundamental".

> A forma como este conceito [o de função] é trabalhado em geral no ensino médio e fundamental provoca sérios desvios de natureza epistemológica no ensino de Cálculo e da própria matemática. (REZENDE, 2003, p.343)

Acrescenta ainda, o pesquisador, que (em geral) o conceito de função é apresentado ao aluno por meio de sua expressão analítica, isto é, sem a preocupação de se estabelecer e quantificar "a variação de uma das variáveis em relação à outra".

> Saber que a variação de uma grandeza depende da variação da outra é um aspecto importante no estudo do conceito de função, mas que se torna incompleto do ponto de vista epistemológico, se não estudamos como ocorre esta variação, isto é, se não conseguimos dar qualidade e quantificar este processo de variação. (REZENDE, 2008, p.1)

A falta de habilidade dos alunos em problemas relacionados ao conceito de funções no contexto citado acima é, segundo Rezende (2003), um dos principais obstáculos de aprendizagem na resolução de problemas de otimização e de taxas relacionadas em um curso inicial de Cálculo.

> Alguns dos principais obstáculos de aprendizagem para os alunos de um curso de Cálculo são os ditos "problemas de taxas relacionadas" e os "problemas de otimização". A dificuldade que encontram é tanta que em certas instituições existe um acordo tácito entre os professores de "bom senso" e "boa alma" de não cobrarem ambos os temas numa mesma prova.E, além disso, a fim de amenizar o desastre provocado pela inserção da única questão, procura-se apresentar situações problemas simples para esta - de preferência, dentro do próprio contexto da matemática: problemas geométricos ou algébricos, nada de física ou outras áreas "estranhas" ao aluno.(*Ibdem*, 2003, p. 345)

E é pensando em problemas de variabilidade ao quais os alunos se deparam no ensino superior, que Cabral (1998), em sua tese, identifica e classifica em quatro níveis as respostas dadas por alunos a problemas de taxa relacionada e problemas de otimização. São os níveis aritméticos, algébrico, funcional e diferencial.

Deixamos claro que o estudo de casos de nossa dissertação se limita aos níveis aritmético, algébrico e funcional, uma vez que estamos trabalhando com alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola pública. A seguir, apresentamos uma situação para ilustrar cada nível de significação.

Situação problema: Uma escada de 5 m de comprimento está recostada em uma parede. A base da escada escorrega, afastando-se da parede a uma taxa (velocidade) de 2 cm/seg. Com que velocidade cai o topo da escada no momento em que a base da escada está a 3 m da parede ?

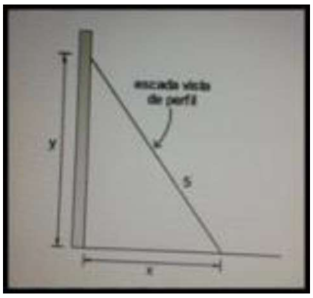


Figura 3 – Ilustração da situação problema apresentada
Fonte: (CABRAL, 1998)

Com base nas respostas dos alunos, a pesquisadora identifica os quatro níveis de significação:

Nível aritmético: $\sqrt{5^2 - 3^2}$

Nível algébrico: $y^2 + 3^2 = 5^2$

Nível funcional: $y = 5^2 - x^2$

Nível diferencial: $y\frac{dy}{dt} = -x\frac{dx}{dt}$

No nível aritmético, o aluno consegue visualizar apenas os valores numéricos do problema proposto. Já o aluno, que alcança o nível algébrico, possui a capacidade de representar o problema, mas não é capaz de fazer uma análise do ponto de vista da variabilidade. No nível funcional o aluno consegue representar a situação proposta corretamente, contudo representa o problema como se fosse algo estático e não ultrapassa a ideia de que é uma figura, ou seja, não reconhece as taxas.

O nível diferencial é o mais difícil por exigir do aluno um entendimento completo da situação proposta. [6]Os níveis aritméticos e algébricos aparecem com mais frequência nas respostas dos alunos. Segundo (Cabral, 1998) muitos alunos entram na universidade sem saber sequer o nível aritmético, que é considerado por ela o nível mais primitivo dentre os quatro.

> Isto é, muitos alunos ingressam na universidade sem saberem lidar com operações algébricas, e outros, embora possa parecer bizarro, não operam sequer em nível aritmético. (CABRAL, 1998)

Ao interpretar os resultados da pesquisa de Cabral (1998), Rezende (2003) conclui que a principal dificuldade dos alunos em resolver problemas desta natureza é "'enxergar' as quantidades variáveis envolvidas no problema e "a relação funcional entre elas".

> Este resultado justifica, com efeito, por que os alunos temem tanto os problemas dessa natureza: não conseguem definitivamente "enxergar" as quantidades variáveis envolvidas no problema nem tampouco a relação funcional entre elas: "o difícil mesmo é encontrar a função"[7].... Isso mesmo, como exigir agora desse aluno que "enxergue" o conceito de função, se até o momento, a função sempre foi dada "pronta" para ele? Como pode ele "enxergar" as "variáveis" do problema, se até agora estas eram apenas "letras" (x e y, de modo geral) que representavam números que se relacionavam segundo uma lei de correspondência explicitada a priori? Identificar o que varia, e em função de que varia é, sem dúvida, o primeiro passo para a resolução da questão. (REZENDE, 2003, p.347)

Foi pensando nesta falta de preparação do aluno ao chegar na universidade e se deparar com o ensino de Cálculo que algumas instituições incluíram em sua grade curricular

[6] A solução do problema citado encontra-se no anexo 1.

[7] Frase dita por um aluno entrevistado por Cabral e que representa, efetivamente, a dificuldade encontrada pela maioria dos nossos alunos de Cálculo quando têm de resolver problemas dessa natureza.

uma disciplina de Fundamentos da Matemática (ou Matemática Básica, ou Pré-Cálculo, entre outros). Os conteúdos presentes na ementa desta disciplina são voltados para o ensino de funções com foco na disciplina de Cálculo.

Por conta disso há um crescente número de trabalhos na Educação Matemática desenvolvendo pesquisas de transição do ensino médio para o superior. Neste sentido, destaca-se o trabalho de Palis (2013). Em seu artigo, a autora afirma que a noção de função é fundamental nos cursos de ensino médio e nos anos iniciais das universidades de cursos nas áreas técnicos - científicas e enfatiza que alunos que resolvem problemas de otimização apresentam progressos na compreensão do conceito de domínio de funções pelos diversos aspectos abordados em atividades deste tipo. Os alunos tendem a desenvolver os seguintes aspectos:

> [...] avançar na problemática da leitura e interpretação de enunciados pelos alunos, na discriminação entre constantes e variáveis, no uso de representações múltiplas de funções (por esquemas gráficos, tabela, representação algébrica, representação gráfica), nos processos de justificativa de resolução de problema e no desenvolvimento do conceito de aproximação de um numero real. (PALIS, 2013, p.6)

Ao trabalhar com funções representadas por expressões analíticas já construídas, o aluno é estimulado a realizar apenas tratamentos algébricos com relação a este conceito. Essa afirmação fica clara quando Palis (2013), em consonância com Carlson[8] (1998), afirma que:

> Na transição do ensino médio para o superior, um número expressivo de alunos acredita que todas as funções podem ser definidas por uma fórmula algébrica; uma função é somente pensada em termos de manipulação simbólica e numérica, de forma desconectada do seu aspecto conceitual.Essa concepção de função como fórmula é acompanhada da dificuldade em discernir variável de incógnita, função de equação, e da construção de domínio de uma função como sendo um tipo de exercício no qual se "resolvem" denominadores e argumentos de funções raiz quadrada ou logarítmica.(PALIS, 2013, p. 1)

A autora acrescenta ainda que várias pesquisas que investigam o ensino e a aprendizagem de funções têm destacado a necessidade de um desenvolvimento do conceito de função "que inclua uma concepção de função como covariação de quantidades e não somente como correspondência". Tomando como referência os trabalhos de Oehrtman et al.[9] (2008) e

---

[8] Carlson, M. P. A Cross-Sectional Investigation of The Development of The Function Concept. In: Schoenfeld, A. H.; J. Kaput, J.; Dubinsky, E. (Eds.), CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education, American Mathematical Society, n. 7, p. 114-162, 1998.

[9] Oehrtman, M. C.; Carlson, M. P.; Thompson, P. W. Foundational Reasoning Abilities that Promote Coherence in Students' Understandings of Function. In: Carlson, M. P.; Rasmussen, C. (Eds.), Making The Connection: Research and Practice in Undergraduate Mathematics, Mathematical Association of America, p. 27-42, 2008

Thompson[10] (1994), ratifica a importância de "que o aluno seja exposto a atividades envolvendo o conceito de função como covariação". Sobre o que estamos completamente de acordo.

Palis (2013), em seu trabalho, criou então uma sequência didática com o intuito de propiciar um avanço na concepção do conceito de funções por parte dos alunos. Partindo deste princípio a autora observa que:

> Os alunos que vêm realizando esse tipo de atividade têm mostrado progressos na compreensão do conceito de domínio de funções dadas por representações diversas. Também verificamos um aumento no percentual de alunos que são bem-sucedidos em problemas de otimização cujos enunciados não trazem a expressão algébrica da função a estudar. (PALIS, 2013, p 10)

Logo, parece que os bons resultados alcançados pela pesquisa de Palis tem a ver com a mudança de abordagem do conceito de função adotada pela própria pesquisadora.

De fato, o conceito de função por sua diversidade de interpretações e de contextos possibilita vários percursos epistemológicos, cada qual com suas potencialidades e dificuldades intrínsecas. Nesse sentido destaca-se o trabalho de Sierpinska (1992)[11] no qual desenvolve uma análise de natureza epistemológica do conceito de função. Neste trabalho a pesquisadora observa inicialmente o que diz respeito aos problemas de aprendizagem em relação ao conceito de função.

> Os estudantes têm tido problemas em fazer a ligação entre as diferentes representações de funções: fórmulas, gráficos, diagramas, descrições verbais de relações; em interpretar gráficos; em manipular símbolos relacionados as funções. (SIERPINSKA, 1992)

Com o intuito de propor algumas orientações pedagógicas, a autora faz algumas sugestões consideradas importantes para o tratamento deste conceito:

> a) Motivação: Deve-se motivar os alunos para que eles estejam interessados em encontrar variações, regularidades entre variações e que isto os levem a compreender melhor o seu mundo.
>
> b) Contextos introdutórios: Utilizar expressões analíticas primeiramente como ferramentas de modelagem de certas situações, busca-se então situações (modelos) que representem uma situação real.
>
> c) Contextos de desenvolvimento: utilizar métodos de interpolação e construção de tabelas.

[10] Thompson, P. W. Students, Functions, and The Undergraduate Curriculum. In: Dubinsky, E.; Schoenfeld, A. H.; Kaput, J. J. (Eds.), CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education, American Mathematical Society, n. 4, p. 21-44, 1994.

[11] *On understanding the notion of function*

> d) Desenvolvimento de um nível mais elaborado de compreensão das funções: Os estudantes devem ser capazes de perceber não apenas como os objetos de variação se modificam mas também o que muda.
>
> e) Pré-requisitos: Ter consciência algébrica no nível estrutural.
>
> f) Representações: Fornecer uma grande diversidade de representações de funções, adquirindo flexibilidade nas diversas representações.
>
> g) Definições: Definições informais são suficientes em nível secundário, apenas em níveis mais elevados expõe-se, por exemplo, a definição de Peano.
>
> h) Distinções entre a noção de função e outras noções gerais: discussão entre as diferenças entre as relações causal e funcional e discussão em classes de similaridade. (SIERPINSKA, 1992)

Assim, em consonância com as ideias até aqui expostas, entendemos que para uma abordagem significativa de função deve-se realizar uma mudança substancial na forma como este conceito é apresentado. Torna-se urgente resgatar o conceito de função como relação entre quantidades variáveis a partir de situações - problema em contextos dinâmicos. É assim que pensamos e essa é a proposta deste trabalho. Entretanto, antes de apresentá-la, convém discutir alguns trabalhos interessantes que consideram uma abordagem dinâmica do conceito de função no âmbito do ensino médio.

1.3 - O conceito de função na educação básica

Neste capítulo tentaremos perceber quais são as dificuldades encontradas para se trabalhar o conceito de funções no ensino médio e entender o porquê da abordagem ainda pouco significativa com relação a este tema.

Os PCN trazem orientações importantes para o ensino da matemática assim como o PNLD trás critérios de escolha com relação ao livro didático, no entanto ainda há dificuldade de apresentar esse tema aos alunos. Nesta seção tentaremos justificar um pouco da dificuldade do aluno ao chegar ao ensino médio. Apresentaremos algumas deficiências dos livros didáticos apontadas pelos PNLD e faremos uma breve comparação com relação a apresentação do conceito de funções destes materiais utilizados hoje em contraste com os utilizados a alguns anos atrás.

1.3.1 - O que dizem os PCN?

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, PCN e as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, conhecido como PCN + (BRASIL, 2002), indicam algumas competências a serem desenvolvidas pelas disciplinas do grupo das Ciências da Natureza e da Matemática.

> O domínio de linguagens, para a representação e a comunicação científico-tecnológicas, é um campo comum a toda ciência e a toda a tecnologia, com sua nomenclatura, seus símbolos e códigos, suas designações de grandeza e unidades (...). A articulação dessa nomenclatura, desses códigos e símbolos em sentenças, diagramas, gráficos, esquemas e equações, a leitura e interpretação destas linguagens, seu uso em análises e sistematizações de sentido prático ou cultural, são construções características dessa área do conhecimento, (...). Por isso, o desenvolvimento de códigos e linguagens em ciência e tecnologia deve ser tomado como um aspecto formativo de interesse amplo. (BRASIL, 2002, p. 24)

Podemos perceber que há uma preocupação com a articulação de códigos, símbolos em sentenças, diagramas, gráficos, esquemas e equações, leitura e interpretações destas linguagens. O estudo de funções abrange todos esses aspectos.

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a **relação entre grandezas** e **modelar situações-problema**, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (*Ibdem*, 2002, p. 121, grifo nosso)

Além da preocupação com o domínio do conteúdo, o aluno deve ser capaz de relacionar o tema proposto com outros temas matemáticos já abordados. Além disso, é desejável que o ensino de funções esteja sempre vinculado a outras áreas de conhecimento.

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. (BRASIL, 2000, p. 43)

> [...] Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. (*Ibdem*, 2000, p. 43)

Pensando no tema em questão, o ensino de Matemática deveria garantir ao aluno a possibilidade de construir habilidades para resolver situações problema de Matemática e de outras áreas do conhecimento a partir de uma postura investigativa, isto é, a partir do seu conhecimento sobre funções o aluno seria capaz de construir um modelo para interpretação e investigação em matemática.

> Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 44)

Dentre as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática expostas pelos PCN, uma em especial chamou bastante atenção: “Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.*”* Apesar desta referência estar explícita nos PCN, não há, em geral, um compromisso efetivo de se desenvolver esta habilidade no aluno a partir da abordagem de funções na educação básica.

Não obstante, o documento não só reforça a importância desta habilidade como também alerta que esse processo deve ser “lento” e “trabalhoso”, agregando outras competências necessárias para o desenvolvimento de “habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento”.

> Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de **estimular a busca de regularidades**, **a generalização de padrões**, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (*ibdem*, 2000, grifo nosso, p. 41)

Vimos que há uma preocupação dos PCN com o ensino da matemática, mais especificamente, com o ensino de funções de forma a buscar regularidades, generalizar padrões e ainda possibilitar a interdisciplinaridade e a contextualização, podendo assim aplicar a matemática na própria matemática e em outras áreas do conhecimento.

Mas e os professores? Será que eles estão preparados para ensinar funções nesta perspectiva anunciada pelos PCN? E os livros didáticos? Será que eles contemplam as propostas de encaminhamento sugeridas pelo documento? Esse último é o assunto da próxima seção.

1.3.2 - Algumas experiências

Na literatura existem diversos trabalhos de autores que procuram utilizar recursos didáticos inovadores para a abordagem do conceito de funções no ensino médio. Nesta seção apresentaremos e discutiremos de forma breve alguns deles: (SANTOS, 2008), (SANTOS, 2005), (SIQUEIRA , 2013), (SOARES, 2012), (OLIVEIRA E DORINI, 2013), (REZENDE E OUTROS, 2012), (REZENDE, 2013) e (SALES, 2008).

Ao aplicar um questionário em vinte e sete professores[12] que lecionam em escolas públicas e/ou particulares, Santos (2005) identifica algumas dificuldades dos alunos destes professores com relação à aprendizagem do conceito de função. Dentre as perguntas do questionário, uma em especial chama bastante atenção:

13. Uma grande dificuldade que os alunos têm no ensino de funções é a passagem de um gráfico para a expressão algébrica:	
SIM	27
NÃO	

Figura 4 – Ilustração de uma tabela.

Fonte: (SANTOS, 2005, p. 20)

Todos os professores entrevistados afirmam que os alunos apresentam dificuldade na construção da expressão algébrica.

Santos (2008) em sua monografia apresenta "Uma proposta alternativa para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas no ensino médio". Ele se preocupou não só com o fato de uma grandeza variar, mas também com a forma como a grandeza varia. O pesquisador apresentou alternativas que possibilitaram a busca de padrões e regularidades no estudo da variação de grandezas.

> [...] é essencial o estudo do comportamento variacional das funções reais na educação básica, visto que o conceito de função é um dos elos de ligação entre diferentes assuntos dentro da própria matemática, além de desempenhar um papel

[12]Todos os professores entrevistados lecionam no ensino médio e/ou superior.

> central em outras áreas do conhecimento como ferramenta para a compreensão de certos fenômenos e representação das variações dos mesmos. (SANTOS, 2008, p.55)

O pesquisador realiza seu trabalho em três etapas: o nível numérico (utilizando planilhas), gráfico (com atividades exploradas no Geogebra) e o algébrico. Em um primeiro momento há uma caracterização das funções exponencial e logarítmica onde o pesquisador inicia com uma etapa de experimentação e observação através das progressões aritméticas e geométricas. Na sequência, utiliza uma planilha onde analisa o comportamento variacional de cada uma dessas funções, dando ênfase a função exponencial e apresentando a função logarítmica como sua inversa. Podemos observar inicialmente que se os valores de x formam uma P.A, a sequência de valores $f(x)$ formam uma P.G. O autor observa ainda que$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}$ é uma constante que depende apenas de Δx. Em seguida, apresenta o gráfico no Geogebra utilizando o controle deslizante para cada parâmetro da função dada com o intuito de o aluno poder movimentar individualmente cada parâmetro e perceber o que ocorre com a função. E por fim, resolve algebricamente o problema proposto. Ao final de seu trabalho ele apresenta uma sequência didática com atividades do tipo “modelagem”.

Cabe destacar que o autor se utiliza com muita propriedade dos controles deslizantes do software (Geogebra) para uma análise mais detalhada do comportamento variacional destas funções. Há de se destacar, entretanto, que o autor não aplicou as atividades propostas e, desta forma, não é possível identificar qualitativamente o uso deste material.

Concordando com Santos (2008), Rezende e outros (2012) ressaltam que os alunos não devem estudar apenas o que ocorre com a função, mas também como ocorre o comportamento das variáveis.

> Saber que a variação de uma grandeza depende da variação da outra é um aspecto importante no estudo do conceito de função, mas que se torna incompleto do ponto de vista epistemológico, se não estudamos como ocorre esta variação, isto é, se não conseguimos dar qualidade e quantificar este processo de variação. (REZENDE e outros, 2012, p. 75)

Siqueira (2013), tendo como foco o uso de recursos computacionais para o ensino de funções reais, analisou três tipos de softwares para saber qual atenderia melhor sua proposta de trabalho. São eles: Winplot, Geogebra e Graphmatica. A preferência se estabeleceu em relação as seguintes características: por ser um software gratuito, que associa a lei de formação e gráfico da função, por apresentar uma versão em português e oferecer uma interface agradável. O que melhor atendeu aos interesses da pesquisadora foi o Geogebra.

A pesquisa de Siqueira (2013) foi realizada com alunos do primeiro ano do ensino médio. Seu trabalho apresentava 15 questões em que o aluno deveria utilizar o software Geogebra para respondê-las (Ver figura 5). As perguntas possuíam vários itens aonde apareciam perguntas sobre funções constante, linear, afim, quadrática, exponenciais e logarítmicas, e itens sobre domínio, imagem, concavidade, valor máximo e mínimo, quem é a variável dependente/independente entre outros. O Geogebra foi utilizado apenas como ferramenta para desenhar o gráfico de forma a permitir apenas uma análise de cada item proposto. Não houve a preocupação de se utilizar dos recursos dinâmicos do Geogebra - como o controle deslizante, por exemplo. Além disso, todos os exercícios foram propostos a partir da apresentação da expressão analítica da função. Isto é, dada a expressão analítica da função, e a representação gráfica fornecida pelo Geogebra, pretendia - se que os alunos inferissem algumas propriedades das funções enunciadas. Em nenhuma atividade foi proposto o caminho inverso: dadas algumas propriedades ou a representação gráfica da função, reconhecer ou determinar a expressão analítica da função associada.

3) **Trace, no *software* Geogebra, as funções y=2x, y=-3x, y=x, y=-1,7x e responda:**

a) **Que tipo de gráfico é expresso na tela?**______________________________
b) **Que tipo de função esses gráficos representam?**_______________________
c) **Qual o domínio e a imagem de cada função?**____
____
d) **Calcule a raiz ou zero de cada função:**______________________________
e) **Em qual abscissa cada função intersecta o eixo x?**____
f) **O que você pode concluir a respeito da raiz de cada função e o ponto de intersecção com o eixo x?**____
g) **Qual ponto todos os gráficos intersectam?**___________________________
h) **Qual o valor do coeficiente "a" em cada função?**______________________
i) **Quais funções são crescentes e quais são decrescentes?**________________
j) **Qual a relação entre o sinal do coeficiente "a" e o crescimento e decrescimento das funções?**____

Figura 5 - Questão extraída da lista de exercícios utilizada com alunos no texto de Siqueira (2013)
Fonte: (SIQUEIRA, 2013, p. 51)

Com o intuito de avaliar o seu instrumento de pesquisa, Siqueira (2013) solicitou que os alunos elencassem aspectos positivos e negativos das atividades propostas e da utilização do Geogebra.

> ... É muito melhor usar o Geogebra do que ficar desenhando no caderno, temos uma visão muito mais limpa e fácil de entender, e quando erramos, é bem fácil corrigir""O trabalho foi bem cansativo, mas também muito interessante. (Resposta dos alunos das turmas I e k respectivamente, Siqueira, 2013, p. 41)

Soares (2012), assim como Siqueira (2013), utiliza o software Geogebra como uma ferramenta para o estudo das funções reais elementares, ele considera apenas o universo das funções polinomiais do 1º e 2º graus. Contudo, o pesquisador tem o intuito de fazer o aluno perceber o que acontece com o gráfico da função. À medida que se varia os valores dos coeficientes da expressão polinomial correspondente criam-se controles deslizantes que permitem variar estes últimos.

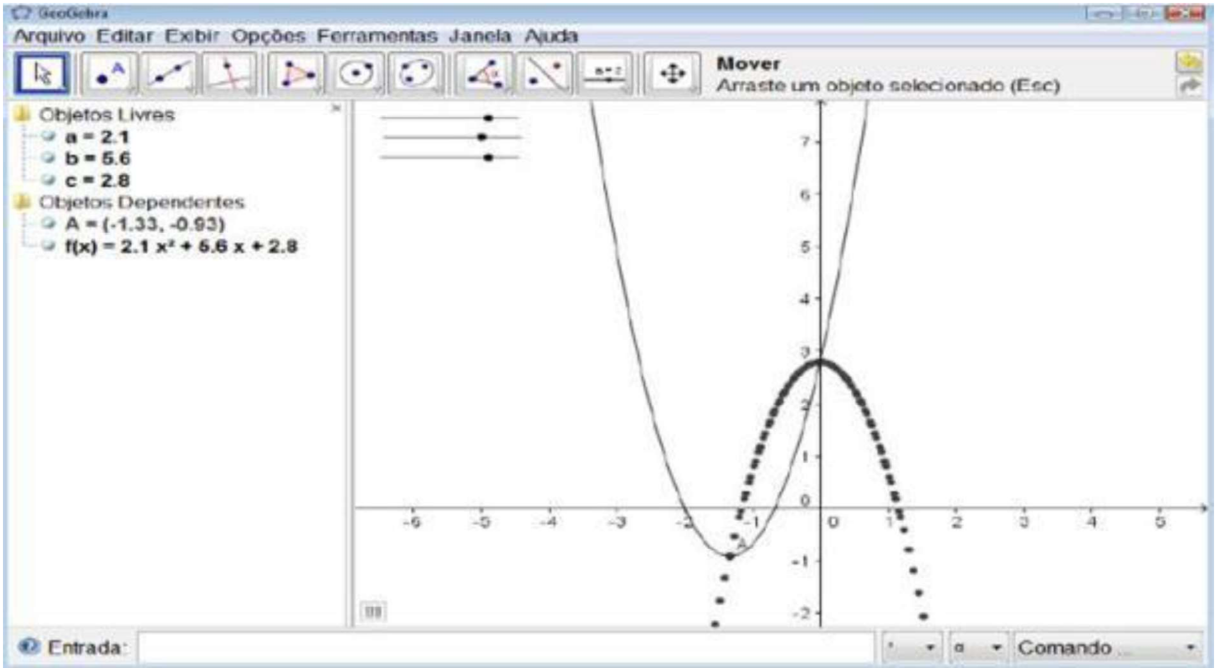


Figura 6- Função quadrática: lugar geométrico do ponto de vértice após variação do coeficiente b.
Fonte: (SOARES, 2012, p.11)

Cabe destacar que os trabalhos (SIQUEIRA, 2013 e SOARES, 2012) citados nesta dissertação não exploram o estudo do comportamento variacional das funções e subutilizam o potencial dinâmico e interativo do software proposto para a realização das atividades.

Oliveira e Dorini (2013), em seu trabalho, destacam que:

> A abordagem de forma mecanizada com pouca reflexão na qual se desenvolve o domínio de técnicas, fórmulas e procedimentos de manipulações simbólicas e numéricas pode levar os alunos a associarem ao conceito apenas a ideia de correspondência. Desta forma, inibe-se o desenvolvimento de uma disposição e forma de pensar em que possam, constantemente, buscar e examinar diferentes tipos de relações, conjecturar, utilizar diferentes sistemas de representação, estabelecer conexões e empregar vários argumentos. (OLIVEIRA E DORINI, 2013, p. 32)

Assim, em consonância com as ideias propostas em (REZENDE E OUTROS, 2012), os autores apresentam um texto com atividades que possibilitam o estudo da função quadrática através da sua caracterização:

> Uma função contınua $f : R \rightarrow R$ é quadrática se, e somente se, toda progressão aritmética não constante $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ e transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, em que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n), \ldots$ (OLIVEIRA E DORINI, 2013, p. 33)

O enunciado das atividades considera apenas contextos geométricos em ambientes construídos com o software Geogebra. Na atividade da figura 7 é dado um quadrado ABCD cuja diagonal mede 6 cm de comprimento e um ponto H livre no segmento AC, que está contido em um segmento que é paralelo a diagonal BD e que forma um polígono P. Considerando h=|AH|. A questão pede a variação da área do polígono P em função de h. Através da área da figura dada e do seu lado ou altura, por exemplo, propõe-se questões que exploram o reconhecimento de uma função quadrática a partir da caracterização enunciada e também dos seus pontos críticos (ver figura 7) . Este texto apresenta uma sequência de atividades que seguem a mesma ideia que este trabalho propõe. Entretanto as mesmas não foram aplicadas com os alunos. Os *applets* construídos pelos autores possibilitam alterar o valor de Δh através dos controles deslizantes. A ideia de variação pode ser percebida através da planilha do lado direito do *applet* apresentada na figura 7 e do próprio esboço do gráfico, no *applet* apresentado na figura 8.

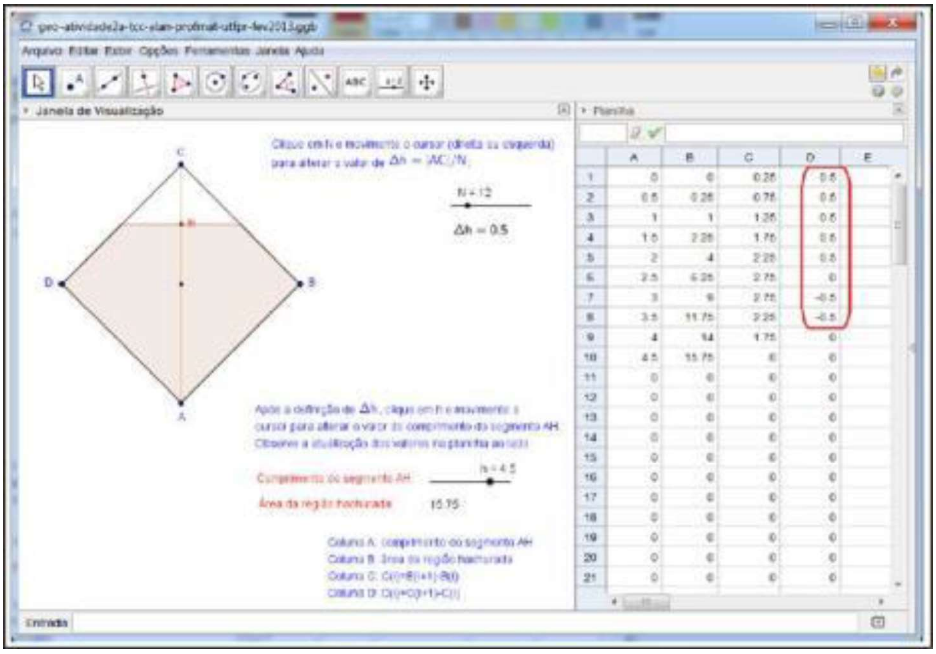


Figura 7 - Ilustração da variação da área A em função de $h = |AH|$; $\Delta h = 0.5$.
Fonte: (OLIVEIRA E DORINI, 2013, Pag. 38)

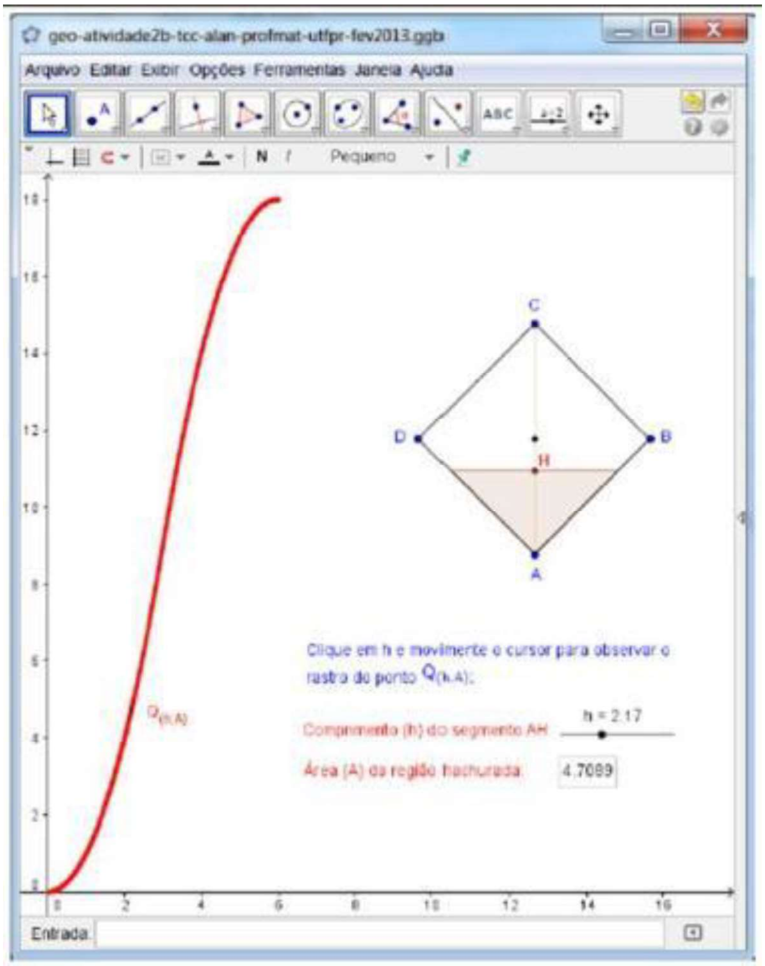


Figura 8 - Ilustração do gráfico da área, A, em função de $h = |AH|$.
Fonte: (OLIVEIRA E DORINI, 2013, Pág. 40)

É notório que o uso do computador é potencial para o desenvolvimento de ambientes de aprendizagem. Não obstante, conforme nos revela Sales (2008), a construção de ambientes computacionais dissociada de uma prática de pesquisa pode não contribuir para o desenvolvimento de uma boa metodologia de ensino.

> "O uso do computador propicia um ambiente educacional que permite inúmeras interações imediatas, visualizações e interpretações, mas ele, por si só,não é capaz de gerar uma metodologia de ensino. É preciso muita pesquisa para obter dados e insights das concepções dos estudantes geradas por seu uso e para o desenvolvimento de uma metodologia." (SALES, 2008, p. 39)

Sales (2008) apresenta uma pesquisa pautada em uma metodologia chamada *Design Experiments* que surge nos Estados Unidos, aproximadamente em 1970. Esta metodologia utiliza a fala e a atitude dos estudantes ao ter contato com algum tema da matemática para tentar perceber de que forma o individuo vê este conteúdo.

Segundo Steffe e Thompson (2000, *apud* Sales, 2008),*"*o principal objetivo para usar a metodologia Design Experiments é pesquisar, em primeira mão, as aprendizagens e o raciocínio matemático dos estudantes*"*; e, desta forma, conseguir buscar novos meios de aprendizagem e o desenvolvimento de técnicas que melhorem o processo de ensino - aprendizagem.

> O Design Experiments surge não como uma metodologia padrão ou com o intuito de padronizar algo, mas sim como uma ferramenta conceitual que os pesquisadores usam para organizar suas atividades. (SALES, 2008, p.44)

Pensando no desenvolvimento de um trabalho que possibilitasse a utilização desta metodologia de forma consistente, Sales (2008) utiliza um software (*Cabri-Géomètre*) para trabalhar o ensino de funções de uma forma diferente da apresentada tradicionalmente. Além da representação gráfica usual de função em um sistema cartesiano de eixos ortogonais, a autora desenvolve atividades explorando representações deste conceito por meio de eixos paralelos. Com o auxílio do software, a pesquisadora explora dois ambientes computacionais, o micromundo *Cartesiangraph* no qual representa o gráfico no plano cartesiano e o micromundo *Dynagraph* que apresenta representações gráficas de funções nas quais os eixos x e y são configurados horizontalmente[13]. Segundo a pesquisadora:

---

[13]A autora define micromundo segundo Hoyles e Noss (1987) como sendo "... *Um caminho de interação entre o aluno e o programa (computacional), sendo bastante influenciado pela situação didática na qual as interações são feitas."(*Sales,2008, p.47)

> "As abordagens possíveis em ambientes digitais, com certeza, permitem um acesso mais fácil para inúmeros gráficos de funções de complexidade diferente, possibilitando conexões entre suas diferentes formas de representação. Estas ferramentas computacionais oferecem possibilidades para explorar potenciais *raízes narrativas*, talvez menos presentes ou óbvias quando utilizado papel e lápis." (SALES, 2008, p.39)

No *Dynagraph* [14] o estudante pode mover livremente os valores da variável independente da função e sua imagem assume valores de acordo com o movimento feito em x e com sua lei de formação.

As representações abaixo são do micromundo *Dynagraph* da função $f(x) = -x^2$.

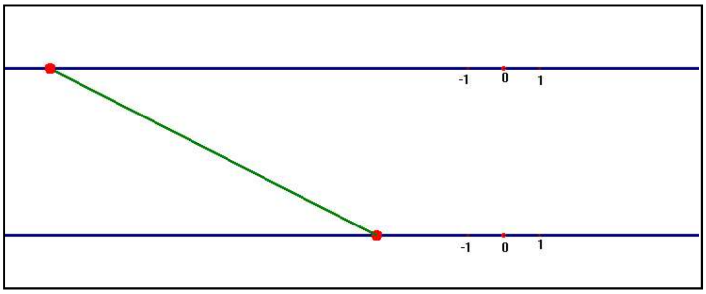


Figura 9 - Representação gráfica da função $f(x) = -x^2$para um valor negativo de x.
Fonte: (SALES, 2008, p.49)

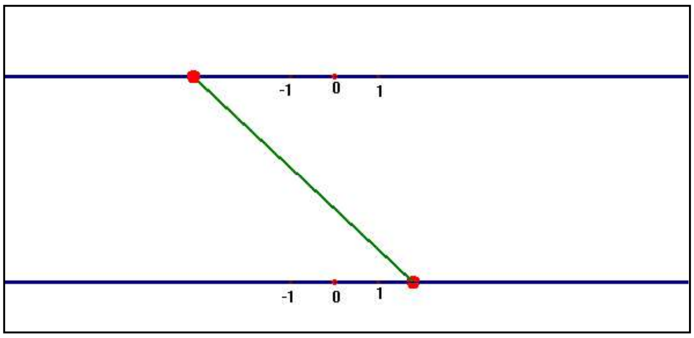


Figura 10 - Representação gráfica da função $f(x) = -x^2$para um valor positivo de x.
Fonte: (SALES, 2008, p.49)

No *Dynagraph* é possível movimentar a variável independente fazendo com que a outra automaticamente seja relacionada. Neste ambiente os pontos do domínio e da imagem são representados por uma bolinha vermelha. No *Cartesiangraph* há uma única bolinha vermelha que, ao ser movimentada, descreve uma trajetória registrada por um rastro. É o que mostra a figura abaixo.

[14] Segundo a autora este ambiente computacional é inspirado nos estudos de Goldenberg, Lewis e O'Keefe e criado no programa *Cabri-Géomètre.*

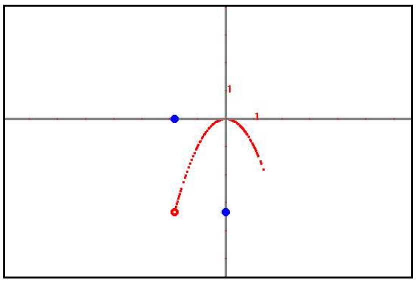


Figura 11 - Representação gráfica da função $\boldsymbol{f(x) = -x^2}$, utilizando a ferramenta *rastro.*
Fonte: (SALES, 2008, p.49)

Para a realização da sua pesquisa a autora utilizou três fichas de atividades. Nas fichas 1 e 2 era solicitado que os alunos classificassem 10 funções quanto a semelhança encontrada na movimentação de cada uma delas, diferenciando-se apenas quanto ao micromundo ao ser utilizado. As 10 funções utilizadas nestas fichas eram as mesmas. As expressões analíticas destas funções são reveladas apenas no enunciado da ficha 3. Nesta ficha solicita-se que o aluno relacione essas expressões aos nomes sugeridos por eles nas atividades anteriores.

A pesquisadora trabalha com alunos do 1º ano dividido em quatro duplas. Sua pesquisa é realizada em três etapas. Na primeira etapa 2 duplas resolvem a ficha de atividades – 1 no *Dynagraph* e as outras 2 no *Cartesiangraph.* Na segunda etapa as duplas resolvem a ficha de atividades 2 nos micromundos que ainda não haviam utilizado. Na terceira etapa todas as duplas utilizam a ficha de atividades 3.

Após realizar os dois momentos iniciais, a pesquisadora desenvolve a terceira fase de sua pesquisa com os alunos. Neste momento, os alunos se deparam com todas as funções que haviam manipulado intuitivamente sem o reconhecimento a priori da expressão analítica. Ao apresentar as expressões das funções envolvidas, os alunos começam a reconhecer as "velhas" funções a partir de sua expressão. A seguir, registram-se as falas de duas alunas participantes da pesquisa:

> ***Carolina****: Eu achei que eu não sabia fazer isso, sabia?*
>
> ***Juliana****: Eu também.* (SALES, 2008, p.124)

O trabalho inicial de classificar as funções sem saber suas expressões analíticas possibilitou ao aluno conhecer uma nova representação gráfica deste conceito, aumentando a confiança e o interesse dos alunos na realização de tarefas relacionadas ao conceito de função.

Tal fato pode ser confirmado pelo relato do professor da classe de onde foram escolhidos os alunos que participaram da pesquisa. Segundo ele, apenas um aluno teve desempenho “ruim” e os demais apresentaram maior interesse nas aulas de matemática.

> De modo geral, os alunos que participaram da experiência, mostram um pouco mais de interesse em compreender a matemática e não apenas conseguir nota. Apenas um aluno, dos oito que participaram, teve seu desempenho, que era ruim, inalterado. (SALES, 2008, p. 137)

Um dos objetivos da pesquisa de Sales (2008) é que o aluno consiga, além de agrupar as funções por tipo, também identificar qual é o tipo de função que eles estão manipulando. Essas classificações são livres e cada dupla criou os seus próprios grupos de classificação.

Após sua análise de cada momento das atividades feitas pelos estudantes, Sales (2008) reuniu em duas tabelas as classificações feitas por cada dupla e fez um paralelo entre a classificação convencional[15] e a dos grupos criados pelos alunos.

Função	Classificação Convencional	Carolina e Juliana		Adriano e Luciano	
		Cartesiangraph (1ª sessão de ensino)	Dynagraph (2ª sessão de ensino)	Cartesiangraph (1ª sessão de ensino)	Dynagraph (2ª sessão de ensino)
$a(x) = x - 2$	Função afim	Funções que formam uma reta	Grupo das funções proporcionais	- Formam uma reta diagonal - Não passam pelo centro	Livre proporcional
$b(x) = 2x - 1$					
$d(x) = -x + 2$			Grupo que a distância muda proporcionalmente		Bolinhas opostas
$g(x) = x$	Função linear	- Funções que formam uma reta - Funções que passam pelo zero	Grupo das funções proporcionais	- Formam uma reta diagonal - Passam pelo centro	Livre proporcional
$c(x) = x^2 + 1$	Função quadrática	- Funções que formam uma curva - Funções que formam um "V" - *Função e* Funções que passam pelo 0	Grupo elástico	- Formam um arco - *Funções c, j* não passam pelo centro - *Função e* passa pelo centro	Função da bolinha de um sentido
$e(x) = -x^2$					
$j(x) = 3x^2 - 2$					
$f(x) = \frac{1}{x}$	Função com assíntota	- Funções que formam uma curva - Funções que se teletransportam	Grupo que gira	Circunferência não passa pelo centro, nem forma reta	Movimento giratório
$i(x) = x + \frac{1}{x}$				- Formam um arco - Não passa pelo centro	
h (x) = o dobro do maior inteiro menor que $\frac{x}{2}$	Função descontínua	- Funções que foram uma "escada" - Funções que passam pelo 0.	Grupo coelhinho	Escada	Função escalar contínua

Figura 12 - Classificação no Cartesiangraph e no Dynagraph do grupo 1 (Carolina e Juliana; Adriano e Luciano)
Fonte: (SALES, 2008, p.132)

.

[15]Entende - se por convencional a classificação que em geral aparece nos livros didáticos: função afim, função quadrática, etc.

Função	Classificação Convencional	Geiza e Natalia		Helio e Vinicius	
		Cartesiangraph (2ª sessão de ensino)	Dynagraph (1ª sessão de ensino)	Cartesiangraph (2ª sessão de ensino)	Dynagraph (1ª sessão de ensino)
$a(x) = x - 2$	Função afim	Grupo rampa	Funções que as bolinhas sempre andam juntas uma com a outra	Grupo das réguas	Grupo da locomotiva
$b(x) = 2x - 1$			As bolinhas se distanciam conforme vão se afastando dos números.		Grupo que a partir de um certo ponto, com pequenas variações na linha de baixo haveriam grandes variações na linha de cima.
$d(x) = -x + 2$					
$g(x) = x$	Função linear (grupo particular da função afim)		Funções que as bolinhas sempre andam juntas uma com a outra		Grupo da locomotiva
$c(x) = x^2 + 1$	Função quadrática	Grupo bate e volta	Não importa se a bolinha de baixo vai para direita ou para esquerda, a bolinha de cima vai sempre na mesma direção.	Grupo dos transferidores	Grupo das funções que têm certo limite.
$e(x) = -x^2$					
$j(x) = 3x^2 - 2$					
$f(x) = \frac{1}{x}$	Função com assíntota	Grupo Montanha Russa	Quando a bolinha de baixo encosta na origem, a bolinha de cima some e depois vai para o outro lado	Grupo do teletransporte	Grupo que o resultado é nulo
$i(x) = x + \frac{1}{x}$					
h (x) = o dobro do maior inteiro menor que $\frac{x}{2}$	Função descontínua	Grupo escada	A bolinha de cima fica tentando alcançar a de baixo. E a de baixo tenta "fugir".		Grupo pulo

Figura 13 - Classificação no Cartesiangraph e no Dynagraph do grupo 2 (Geiza e Natalia; Helio e Vinicius)
Fonte: (SALES, 2008, p.132)

Daremos destaque agora aos fatores que motivaram os agrupamentos feitos pelos alunos e a relação existente entre a classificação feita por eles e a convencional.

Na classificação das funções no Cartesiangraph feita pelas duplas está exposto que os alunos relataram bem o comportamento das funções, associaram a função afim a uma “reta”, “reta diagonal”, “rampa” e “régua”. A quadrática foi denominada como “bate e volta”, “que formam um 'v'”, entre outros. Criaram o grupo da “montanha russa” para as funções com assíntota e a escada para a descontínua.

No Dynagraph, em geral, os alunos associaram os tipos de funções aos comportamentos que cada uma apresentou, por exemplo, “grupo locomotiva” ou “bolinhas proporcionais” para as funções afins, “grupo elástico” ou “bolinha de um sentido” para as funções quadráticas e ainda o “grupo pulo” ou “coelhinho” para funções descontínuas.

A partir destas ideias e análises dos alunos é possível auxiliá-los e dar sentido a cada comportamento por eles observado. É interessante perceber que os alunos, apesar de terem apresentado algumas dificuldades, conseguem separar as funções apenas pelo comportamento que elas apresentam.

Sales (2008) apresentou um trabalho que permite analisar como os alunos classificam as funções quanto ao seu comportamento utilizando-se de dois micromundos. A pesquisadora buscou algo bem diferente da proposta dos demais pesquisadores. Houve uma preocupação com as variáveis: ao mudar a projeção dos pontos para um plano de retas paralelas, criou-se um facilitador para a análise de como varia cada variável.

Neste trabalho, damos foco à representação cartesiana – trabalhamos a representação analítica a partir da modelagem de uma situação problema –analisando o domínio das funções – como conjunto de valores possíveis da variável independente – e destacando os pontos críticos da função. Diferente do trabalho de Santos (2008) aplicamos as atividades propostas e desta forma foi possível uma análise mais detalhada dos resultados com relação a um aprendizado significativo ou não por parte dos alunos. Mas, antes de apresentar nossa proposta daremos destaque primeiramente a como os livros didáticos nacionais abordam esse tópico importante da matemática escolar.

CAPITULO 2 – O ENSINO DE FUNÇÕES NOS LIVROS DIDÁTICOS NACIONAIS

2.1 – Algumas análises preliminares

Como ponto de partida para a escrita desta seção foram analisadas duas monografias – (BOTELHO, 2005) e (SÁ, 2005) – que realizaram o mapeamento da abordagem de quatro tipos de funções em alguns livros didáticos nacionais. Em ambos os trabalhos o mapeamento realizado tinha como foco observar de que modo o estudo da variabilidade dessas funções era realizado, procurando assim identificar os principais elementos que compõem o feixe de relações utilizadas na abordagem dos livros didáticos pesquisados. Botelho (2005) mapeou as abordagens dos conceitos de funções afins e quadráticas em quatro livros do nono ano (antiga 8ª série) do ensino fundamental e seis livros do 1º ano do ensino médio. Enquanto Sá (2005) realizou o mapeamento das abordagens das funções exponenciais e logarítmicas em seis livros do ensino médio.

Para a escolha dos livros didáticos os pesquisadores consideraram obras de autores renomados ou que eram utilizados em escolas públicas da rede de ensino local (nos municípios de Niterói e São Gonçalo). E, para a construção dos mapas, os autores utilizaram uma simbologia própria.

Para que os quadros a seguir fiquem mais claros vai a seguir algumas orientações dos autores: Os tópicos usados para o ensino de funções serão representados no interior de retângulos coloridos que serão interligados a outros através de linhas ou setas.

Para diferenciar o tipo de abordagem que é utilizada em cada tópico as cores amarelo, rosa e azul foram utilizadas. As cores amarelo e rosa foram empregadas para indicar abordagens de naturezas algébrica e geométrica, respectivamente. A cor azul foi utilizada para indicar a presença de elementos que abordem o estudo da variabilidade das funções citadas. As setas indicam o sentido do fluxo da relação entre os tópicos e as linhas pontilhadas indicam que a relação tem menor intensidade.

> ...o que se pretende aqui é verificar, mais especificamente, se a função foi caracterizada a partir do seu comportamento variacional, como ocorreu historicamente. Assim, ao definir a escala, optamos por representar no mapa apenas os caminhos relevantes para a sua compreensão, tendo em vista a projeção desejada. (BOTELHO, 2005, p. 25)

Tendo em vista que esta pesquisa tem também como objetivo investigar como o tópico funções é abordado em livros didáticos mais atuais, escolhemos oito mapas de dois livros didáticos analisados pelos pesquisadores e que recentemente foram aprovados pelo PNLD 2015 para efeito de ilustração. Os mapas construídos pelos autores foram elaborados com base nas obras "Matemática: Contextos e Aplicações" e "Matemática: Paiva", tendo como referências as edições publicadas no ano de 2002[16].A seguir apresentamos os oito mapas selecionados.

Figura 14 – Mapeamento da abordagem da função afim tendo como referência o livro (PAIVA, 2002).
Fonte: Botelho (2005, p. 30)

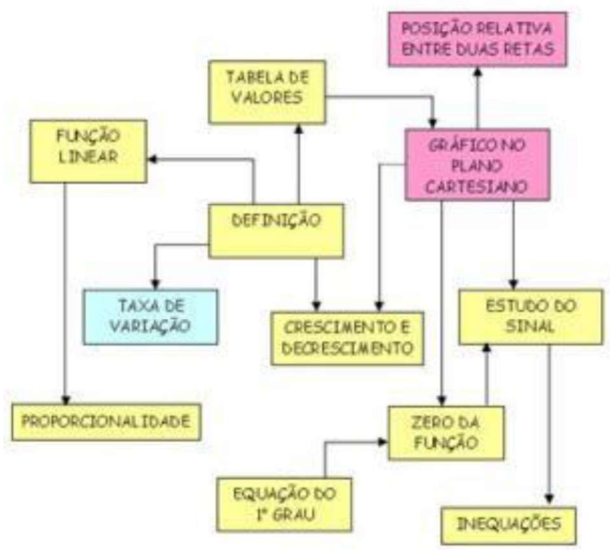


Figura 15 - Mapeamento da abordagem da função afim tendo como referência o livro (DANTE, 2002).
Fonte: Botelho (2005, p. 29)

[16] Neste trabalho analisaremos também as edições dessas obras publicadas em 2015.

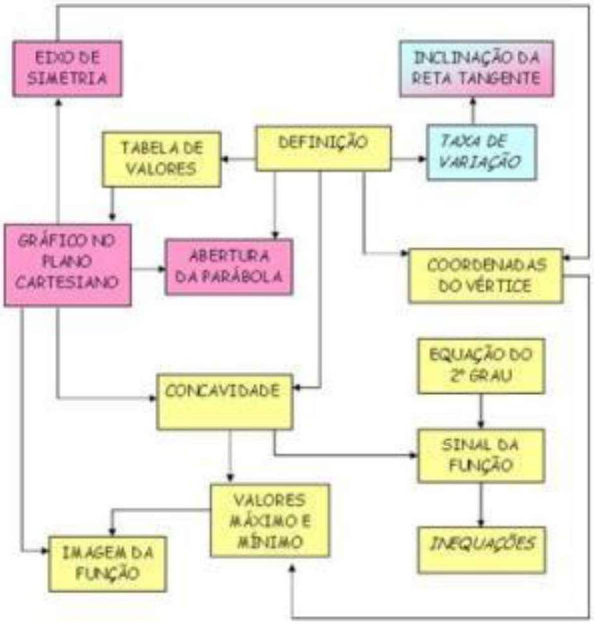


Figura 16 - Mapeamento da abordagem da função quadrática tendo como referência o livro (DANTE, 2002).
Fonte: Botelho (2005, p. 41)

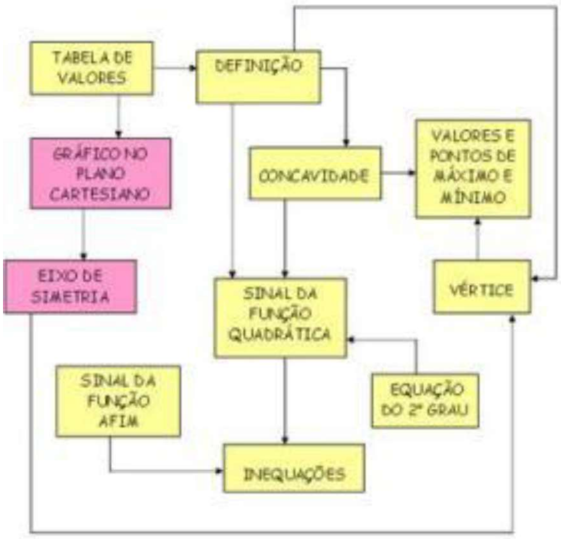


Figura 17 - Mapeamento da abordagem da função quadrática tendo como referência o livro (PAIVA, 2002).
Fonte: Botelho (2005, p. 42)

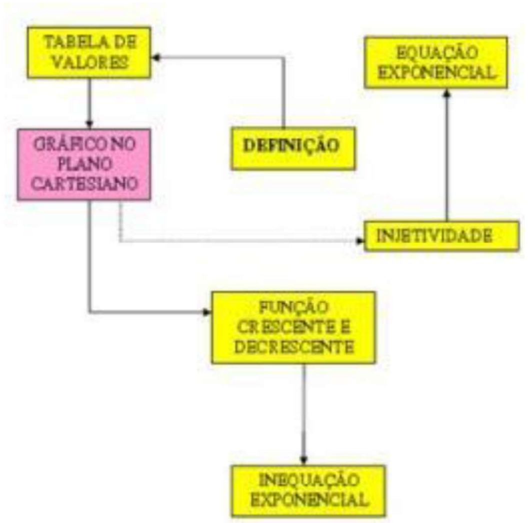


Figura 18 - Mapeamento da abordagem da função Exponencial tendo como referência o livro (PAIVA, 2002).
Fonte: Sá (2005, p. 37)

Figura 19 - Mapeamento da abordagem da função Exponencial tendo como referência o livro (DANTE, 2001).
Fonte: Sá (2005, p. 43)

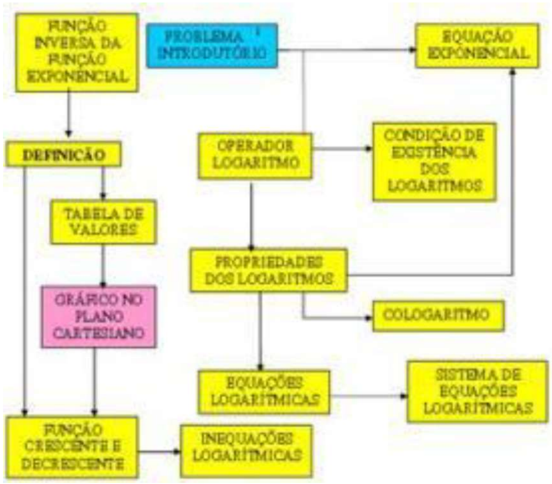


Figura 20 - Mapeamento da abordagem da função Logarítmica tendo como referência o livro (DANTE, 2001).
Fonte: Sá (2005, p. 44)

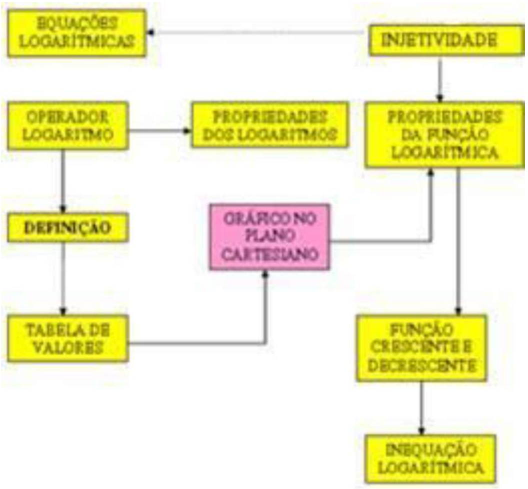


Figura 21 - Mapeamento da abordagem da função Logarítmica tendo como referência o livro (PAIVA, 2002).
Fonte: Sá (2005, p. 38)

Após a análise dos livros didáticos e construção dos mapas os autores chegaram às seguintes conclusões:

> (...) o que observamos foi uma grande predominância, quase um monopólio, da representação algébrica do conceito de função. **(...)** uma ausência quase total, nos textos didáticos, de tópicos que analisem o comportamento destas funções sob o ponto de vista da variabilidade. (BOTELHO, 2005, p. 55)

> Na maioria das vezes, parece que a finalidade de estudar função é treinar a resolver equação e inequação ou construir gráficos. (SÁ, 2005, p. 48)

> O mapeamento dos livros didáticos que fizemos nos revela, em primeiro lugar, a ausência quase completa do estudo da variabilidade das funções exponencial e logarítmica. Abordam o assunto com a predominância de um viés algébrico, sendo as definições dessas funções introduzidas normalmente através de suas fórmulas algébricas. (SÁ, 2000, p. 48)

Após uma breve descrição dessas duas pesquisas nós podemos perceber que os livros didáticos por eles analisados não apresentaram o ensino de funções do ponto de vista da variabilidade. Fica explícito que o ensino de funções está direcionado apenas a resolução de equações e inequações e a construção de gráficos. Não houve uma preocupação com o estudo domínio e a construção da expressão analítica da função a partir de problemas contextualizados. Além disso, não é citada a presença de pontos críticos das funções que são elementos essenciais para as caracterizações das mesmas.

Levando em consideração a análise feita por Botelho (2005) e Sá (2005), vimos que em 2002 os livros didáticos exploravam poucas atividades contextualizadas e abordavam o ensino de funções com um viés algébrico. Será que esse viés persiste atualmente? Os livros didáticos apresentam uma preocupação maior com o estudo da variabilidade de funções? Há uma preocupação com a contextualização e com o estudo do domínio das funções para além da restrição algébrica? Foi com esta motivação que realizamos nossa análise dos livros didáticos atuais. Antes, porém, nos debruçaremos sobre o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Ao final de nossa análise nós consideraremos apenas os livros que foram aprovados no PNLD 2015.

2.2 - O PNLD do Ensino Médio (2015)

2.2.1 - Um breve histórico

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) foi criado em 1929 com a denominação Instituto Nacional do Livro (INL) e é o mais antigo dos programas que distribuem obras didáticas aos estudantes da rede pública de ensino brasileira.

Em 1985, com a edição do Decreto nº 91.542, de 19/8/85, foi criado o então Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que trouxe, dentre outras, as seguintes mudanças:

- Indicação do livro didático pelos professores;
- Reutilização do livro, implicando a abolição do livro descartável e o aperfeiçoamento das especificações técnicas para sua produção, visando maior durabilidade e possibilitando a implantação de bancos de livros didáticos;
- Extensão da oferta aos alunos de 1ª e 2ª série das escolas públicas e comunitárias;
- Fim da participação financeira dos estados, passando o controle do processo decisório para a FAE e garantindo o critério de escolha do livro pelos professores.

Em 2002 inicia-se a distribuição integral dos livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental, mas é apenas em 2005 que há a primeira distribuição parcial dos livros didáticos para o ensino médio, contemplando apenas as disciplinas de português e matemática com distribuição para a 1º série das regiões norte e nordeste. A partir do ano 2006 inicia-se a distribuição parcial dos livros didáticos para todas as regiões do país. E aos poucos vão sendo inseridos livros didáticos de outras disciplinas. Atualmente, o PNLD é voltado para toda a educação básica, exceto a educação infantil.

A inserção dos livros didáticos de forma gratuita no ensino médio é algo relativamente recente nas escolas públicas. Além da preocupação em contemplar todos os alunos também há uma inquietação com a qualidade do material como veremos a seguir.

2.2.2 - Orientações gerais para as coleções

Há diversas orientações do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), algumas são gerais para os livros didáticos e outras são específicas para cada disciplina. A Matemática é usada nos dias atuais para "fazer estimativas e previsões, ler, interpretar e organizar dados, (...) compreender e utilizar conceitos e procedimentos matemáticos na resolução de problemas em muitas áreas do conhecimento ou no dia a dia. "Desta forma, o livro didático deve contemplar formas que capacitem o aluno a:

1. Usar com autonomia o raciocínio matemático, para a compreensão do mundo que nos cerca;
2. Raciocinar, fazer abstrações com base em situações concretas, generalizar, organizar e representar;
3. Planejar ações e projetar soluções para problemas novos, que exigem iniciativa e criatividade;
4. Resolver problemas, criando estratégias próprias para sua resolução, ou utilizando estratégias convencionais, desenvolvendo a imaginação e a criatividade;

> 5. Compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação;
> 6. Estabelecer relações entre os campos da Matemática e entre esses e outros campos do saber;
> 7. Relacionar conceitos e estratégias de diferentes campos matemáticos, sendo capaz de identificar diferentes formas ou abordagens para resolver problemas;
> 8. Interpretar matematicamente situações do dia a dia, e também do mundo tecnológico e científico;
> 9. Avaliar se resultados obtidos na solução de situações-problema são ou não razoáveis;
> 10. Fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados;
> 11. Utilizar as novas tecnologias da informação e da comunicação. (PNLD, 2014, p.16)

Os objetivos acima propostos devem permitir que todo o processo de ensino aprendizagem ocorra de maneira adequada permitindo que o aluno desenvolva além do saber matemático, a habilidade intuitiva e a capacidade de raciocinar. Há uma preocupação com o trabalho coletivo, com o raciocínio lógico dedutivo e ainda com a inserção de conteúdos básicos relativos aos campos Números e Operações, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

O ensino de Matemática, no contexto do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD, 2015), deve capacitar os estudantes para, entre outras:

> Saber empregar os conceitos e procedimentos algébricos, incluindo o uso do conceito de função e de suas várias representações (gráficos, tabelas, fórmulas etc.) e a utilização das equações. (PNLD, 2015, p. 13)
>
> Reconhecer regularidades e conhecer as propriedades das figuras geométricas planas e sólidas, relacionando-as com os objetos de uso comum e com as representações gráficas e algébricas dessas figuras, desenvolvendo progressivamente o pensamento geométrico. (*Ibdem*)

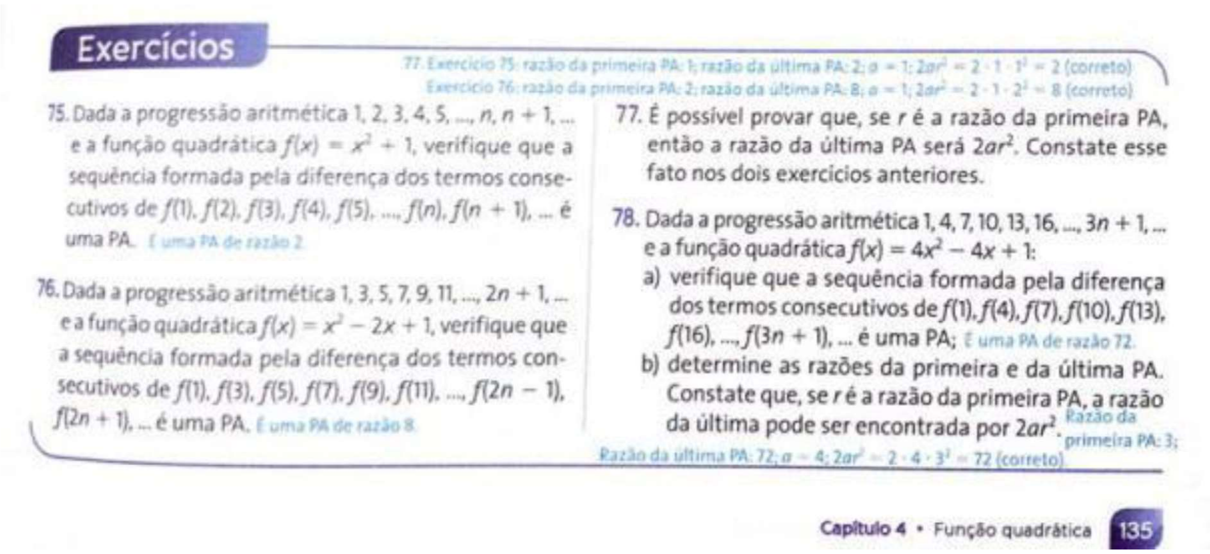
Será que os livros aprovados seguem exatamente as orientações do PNLD? Faremos uma breve análise das coleções aprovadas pelo PNLD 2015 e tentaremos perceber a qualidade e também os problemas encontrados em cada coleção com relação à apresentação do tema funções.

2.3 - Análise das coleções

De uma forma geral, os professores utilizam os livros didáticos como principal recurso de ensino. Deste modo os livros considerados "aptos" para o uso dos professores regentes do ensino fundamental e médio tem a avaliação realizada pelo PNLD que procura observar de forma criteriosa de a qual forma cada tema deve ser abordado. Entretanto o que queremos observar, tal como fizeram Botelho (2005) e Sá (2005), é se estes livros estão apresentando uma abordagem significativa do ponto de vista da variabilidade da função estudada. Se eles consideram a presença ou não de elementos que possibilitem uma abordagem dinâmica deste conceito. Assim, tendo como referências os seis livros aprovados pelo PNLD (2015) nós faremos uma breve síntese sobre como o tema funções é abordado em cada coleção aprovada. Os livros serão apresentados de forma codificada – chamaremos os livros aprovados de L1, L2, L3, L4, L5 e L6.[17] A seguir são apresentadas as sínteses das resenhas dos livros aprovados no que diz respeito à abordagem do ensino de funções, publicada no Guia de livros didáticos (PNLD 2015).

O livro L1, segundo o Guia, apresenta uma boa exploração das funções afins, quadrática, exponencial e logarítmica, entretanto "a conexão das funções afins e quadráticas com as respectivas equações algébricas é muito superficial." Já as sequências são definidas apenas como progressão aritmética e geométrica.

Com um julgamento positivo, os avaliadores do PNLD afirmam que o livro L2 expõe as funções através de atividades contextualizadas, o que possibilita a articulação com as sequências aritméticas e geométricas e com outras áreas do conhecimento como física e biologia.



Exercícios

77. Exercício 75: razão da primeira PA: 1; razão da última PA: 2; $a = 1$; $2ar^2 = 2 \cdot 1 \cdot 1^2 = 2$ (correto)
Exercício 76: razão da primeira PA: 2; razão da última PA: 8; $a = 1$; $2ar^2 = 2 \cdot 1 \cdot 2^2 = 8$ (correto)

75. Dada a progressão aritmética 1, 2, 3, 4, 5, ..., n, $n + 1$, ... e a função quadrática $f(x) = x^2 + 1$, verifique que a sequência formada pela diferença dos termos consecutivos de $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, ..., $f(n)$, $f(n + 1)$, ... é uma PA. É uma PA de razão 2.

76. Dada a progressão aritmética 1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., $2n + 1$, ... e a função quadrática $f(x) = x^2 - 2x + 1$, verifique que a sequência formada pela diferença dos termos consecutivos de $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$, $f(9)$, $f(11)$, ..., $f(2n - 1)$, $f(2n + 1)$, ... é uma PA. É uma PA de razão 8.

77. É possível provar que, se r é a razão da primeira PA, então a razão da última PA será $2ar^2$. Constate esse fato nos dois exercícios anteriores.

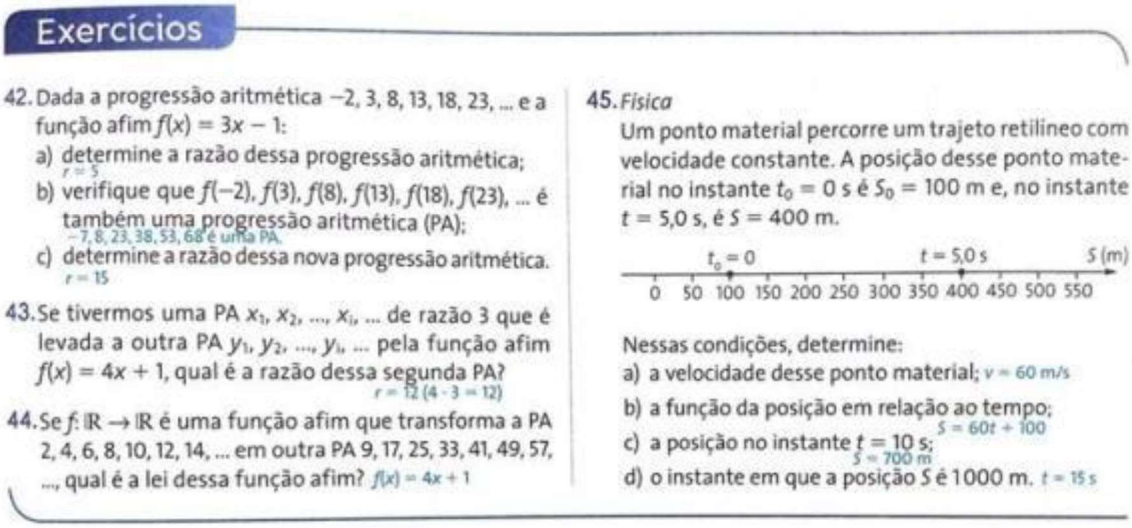
78. Dada a progressão aritmética 1, 4, 7, 10, 13, 16, ..., $3n + 1$, ... e a função quadrática $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$:
a) verifique que a sequência formada pela diferença dos termos consecutivos de $f(1)$, $f(4)$, $f(7)$, $f(10)$, $f(13)$, $f(16)$, ..., $f(3n + 1)$, ... é uma PA; É uma PA de razão 72.
b) determine as razões da primeira e da última PA. Constate que, se r é a razão da primeira PA, a razão da última pode ser encontrada por $2ar^2$. Razão da primeira PA: 3; Razão da última PA: 72; $a = 4$; $2ar^2 = 2 \cdot 4 \cdot 3^2 = 72$ (correto).

Capítulo 4 • Função quadrática 135

Figura 22 – Exemplo dado pela autora do trabalho.
Fonte: (DANTE, 2014, p. 135)

Entretanto, os avaliadores apontam que: "... por vezes, na escolha do conceito matemático para abordar um fenômeno, não se discute o caráter aproximado do modelo abstrato adotado."

[17] As codificações encontram- se no anexo 2.



Exercícios

42. Dada a progressão aritmética −2, 3, 8, 13, 18, 23, ... e a função afim $f(x) = 3x - 1$:
a) determine a razão dessa progressão aritmética; $r = 5$
b) verifique que $f(-2), f(3), f(8), f(13), f(18), f(23), \ldots$ é também uma progressão aritmética (PA); −7, 8, 23, 38, 53, 68 é uma PA.
c) determine a razão dessa nova progressão aritmética. $r = 15$

43. Se tivermos uma PA $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ de razão 3 que é levada a outra PA $y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots$ pela função afim $f(x) = 4x + 1$, qual é a razão dessa segunda PA? $r = 12$ $(4 \cdot 3 = 12)$

44. Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim que transforma a PA 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... em outra PA 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, ..., qual é a lei dessa função afim? $f(x) = 4x + 1$

45. *Física*
Um ponto material percorre um trajeto retilíneo com velocidade constante. A posição desse ponto material no instante $t_0 = 0$ s é $S_0 = 100$ m e, no instante $t = 5{,}0$ s, é $S = 400$ m.

Nessas condições, determine:
a) a velocidade desse ponto material; $v = 60$ m/s
b) a função da posição em relação ao tempo; $S = 60t + 100$
c) a posição no instante $t = 10$ s; $S = 700$ m
d) o instante em que a posição S é 1000 m. $t = 15$ s

Figura 23–Exemplo dado pela autora do trabalho
Fonte: (DANTE, 2014, p. 91)

O livro L3, segundo os autores do Guia, possui uma preocupação em trabalhar questões contextualizadas e pode-se observar a riqueza de diferentes tipos de representações como a utilização de diagramas, gráficos e representações algébricas.

Com respeito ao livro L4, avaliam que esta coleção “trabalha bem” a noção de função com base em situações do cotidiano que envolva relações entre grandezas, favorecendo portanto a atribuição de significados pelo aluno. Já como aspecto negativo aponta que, “em alguns casos, sem justificativa, os gráficos são apresentados usando apenas alguns pontos do plano cartesiano.”

O livro L5, segundo os avaliadores do Guia, apresenta as funções através das relações entre grandezas e articula bem as diferentes formas de representações das funções. Observaram, contudo, que nas conversões entres as diferentes representações não são levados em consideração, de modo preciso: o domínio, o contradomínio e a lei de formação das funções.

Com relação à sexta coleção aprovada, L6, os autores do Guia observaram que o texto trabalha com bons exemplos que incentivam a relação entre grandezas de forma a permitir uma melhor compreensão do conceito de funções. Todavia, a caracterização do conceito como relação entre conjuntos é realizada modo inadequada. Há uma preocupação em trabalhar de forma contextualizada. As sequências são bem definidas como funções e as progressões aritméticas e geométricas são bem relacionadas com as funções afim, quadrática e exponencial.

Em geral, os livros atuais apresentam uma maior preocupação com a ideia de função como relação entre grandezas. A introdução do tema é realizada com base na exploração de situações problema – no qual o conceito de função é apresentado como relação entre grandezas – o que não garante, de certo modo, que a abordagem realizada contemple os elementos colocados como metas pelo nosso trabalho. Cabe destacar que todas as coleções apresentaram uma preocupação com a inserção do conteúdo sequência. Cada um a sua maneira, mas a partir sempre da observação de regularidades. E o PCN é muito claro com relação a este tema:

> Com relação **às sequências**, é preciso garantir uma abordagem conectada à ideia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito. Essas ideias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades. (BRASIL, 2002, p. 121)

Esta articulação entre o tópico de funções com as progressões, por meio do estudo de regularidades, é um ponto bastante positivo das coleções aprovadas. Cabe observar que esta articulação era pouco ou nunca explorada pelos livros didáticos mais antigos.

Entretanto, apesar de sinalizar o uso de aplicativos computacionais, os livros didáticos aprovados pelo PNLD (2015) minimizam o uso desses recursos. Eles o indicam apenas para facilitar a resolução de alguns cálculos, para "plotar" gráficos ou para estimular pesquisas na internet.

> O uso de aplicativos computacionais, que permitem visualizar o gráfico de funções, ajuda tanto a perceber as propriedades dos seus vários tipos, quanto a fazer experimentos com maior riqueza de exemplos. Por isso, é elogiável a tendência, observada em alguns materiais didáticos destinados ao ensino médio, de empregar os referidos aplicativos como recursos para a aprendizagem da Matemática. (PNLD, 2015, p. 95)

Ao analisar a coleção *Conexões com a Matemática*, o guia da coleção expõe que:

> Em alguns momentos, [na coleção] há incentivo ao uso de softwares matemáticos e de calculadoras. Mas, (...) a prioridade é para os aspectos técnicos em detrimento dos pedagógicos, o que pouco contribui para a elaboração ou validação de conjecturas por parte dos alunos. (PNLD, 2015, p. 27)

Ao analisar o PNLD 2015, percebe-se que os livros didáticos aprovados não incentivam a utilização de aplicativos computacionais. Alguns apresentam os recursos, porém não há uma proposta integrada e adequada para o seu uso em proveito de um estudo mais dinâmico do conceito de função.

Apesar da preocupação em incluir a relação entre grandezas e temas que possibilitem aos alunos a busca pela regularidade, cabe aqui destacar que nada foi falado sobre o comportamento variacional das funções. Ainda há um "abismo" entre “apresentar as funções como relação entre grandezas” e “realizar um estudo efetivo de funções no contexto de variações de grandezas”. Produzir material didático para essa empreitada é um dos objetivos deste trabalho.

Faremos agora uma análise comparada dos livros analisados por Botelho (2005) e Sá (2005) – Matemática: Contextos e Aplicações e Matemática: Paiva– com suas versões atuais – L2 e L3, respectivamente – aprovadas pelo PNLD (2015). O que mudou? Se é que mudou.

2.4 - Análise comparada

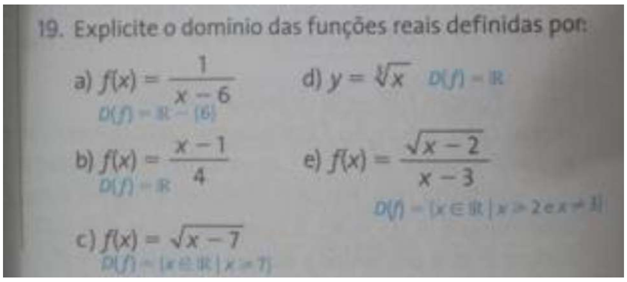
Para a realização da nossa análise nós tomaremos como referência os mapas produzidos por Botelho (2005) e Sá (2005), utilizando a mesma simbologia e o mesmo padrão de cores adotado pelos autores:

Álgebra Cálculo Geometria

Para cada uma das coleções L2 e L3 serão construídos novos mapas relativos às funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, analisadas por Botelho (2005) e Sá (2005) em edições anteriores dessas obras.

2.4.1 – Análise comparada do livro L2

Esta coleção possui uma seção com Matemática e Tecnologia, que apesar de se apresentar ainda de forma muito superficial, expõe o gráfico da parábola usando o **Geogebra.** Este recurso é utilizado apenas para a construção dos gráficos em todos os tipos de funções apresentadas. No que diz respeito à articulação do conceito de função com o estudo das sequências e com sua aplicação em outras áreas, observa-se uma coerência com as orientações preconizadas pelos PCN. Entretanto, o estudo do domínio das funções é realizado apenas com base no universo das restrições algébricas das expressões analíticas que as definem (ver figura 24).



19. Explicite o domínio das funções reais definidas por:

a) $f(x) = \frac{1}{x-6}$ $D(f) = \mathbb{R} - \{6\}$

b) $f(x) = \frac{x-1}{4}$ $D(f) = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \sqrt{x-7}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

d) $y = \sqrt[3]{x}$ $D(f) = \mathbb{R}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ e } x \neq 3\}$

Figura 24 - atividade de domínio de funções.
Fonte: (DANTE, 2014, p. 48)

Mapeamento - Dante -2014 - funções afins

Figura 25 – Mapeamento da função afim do livro do Dante 2014

Para o estudo das funções afins, além dos tópicos abordados no mapeamento feito por Botelho (2005), foram acrescentados os temas: equação da reta, progressão aritmética e aplicação na física. Houve uma preocupação em trabalhar de forma contextualizada com a física e apresentar as funções através das progressões aritméticas. A função modular foi incluída no mapa apenas para indicar que houve uma preocupação do autor com o momento para inserção deste tema. Não obstante, não entraremos em detalhe por não ser nosso foco na pesquisa.

Mapeamento - Dante -2014 - funções quadráticas

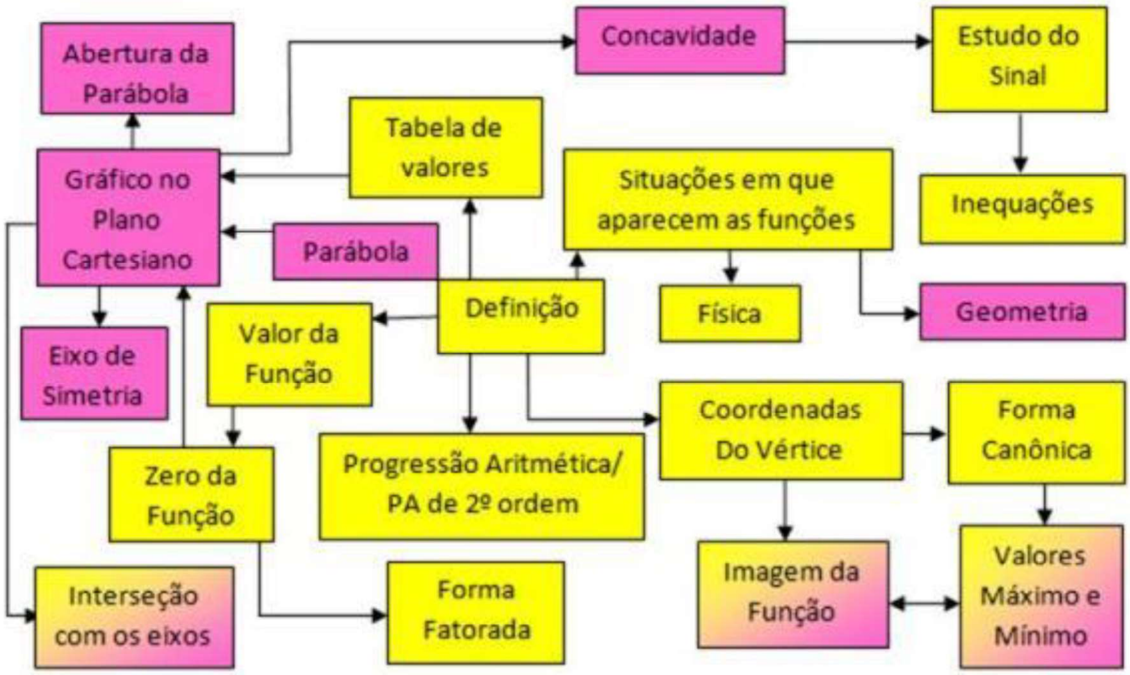


Figura 26 - Mapeamento da função quadrática do livro do Dante 2014

Com relação ao mapeamento feito por Botelho (2005) do livro (Dante, 2002) para o estudo das funções quadráticas, houve mudanças bem significativas. Foram retirados os tópicos “taxa de variação” e “inclinação da reta”. Em contrapartida, houve um acréscimo de tópicos como “situações em que aparecem funções”, mais especificamente na geometria e na física. O texto aborda de forma breve os tópicos Progressão Aritmética e Progressão Aritmética de 2º ordem. São apresentadas também a forma fatorada e a forma canônica, esta para visualizar pontos de máximo e mínimo sem utilizar a fórmula dos vértices. E por fim, a interseção do gráfico das funções com os eixos coordenados.

Em um contexto geral os pontos críticos são muito bem explorados na função quadrática. As atividades apresentadas trabalham, além dos conceitos básicos, a construção da expressão analítica da função através de problemas contextualizados (fig.27).

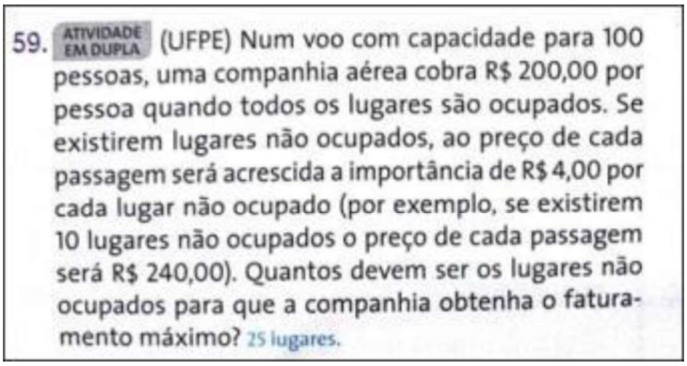

59. ATIVIDADE EM DUPLA (UFPE) Num voo com capacidade para 100 pessoas, uma companhia aérea cobra R$ 200,00 por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, ao preço de cada passagem será acrescida a importância de R$ 4,00 por cada lugar não ocupado (por exemplo, se existirem 10 lugares não ocupados o preço de cada passagem será R$ 240,00). Quantos devem ser os lugares não ocupados para que a companhia obtenha o faturamento máximo? 25 lugares.

Figura 27– Problema envolvendo funções
Fonte: (DANTE, 2014, p. 125)

Mapeamento Dante (2014) - Função Exponencial

Figura 28-Mapeamento da função Exponencial do livro do Dante 2014

Ao comparar a análise feita por Sá (2005) do capítulo do livro que trabalha com funções exponenciais, nota-se que foi alterada a ordem em que se apresentam as propriedades de potenciação e ainda foram acrescentadas as propriedades de radiciação. Agora estas propriedades vêm logo após a definição de função exponencial. Outra mudança que ocorreu foi a inclusão do estudo das progressões geométricas e ainda a aplicação deste tema em outras áreas do conhecimento. Vale ressaltar que o livro faz uma breve caracterização da função tipo exponencial transformando P.A em P.G.

Mapeamento - Dante -2014 - função Logarítmica

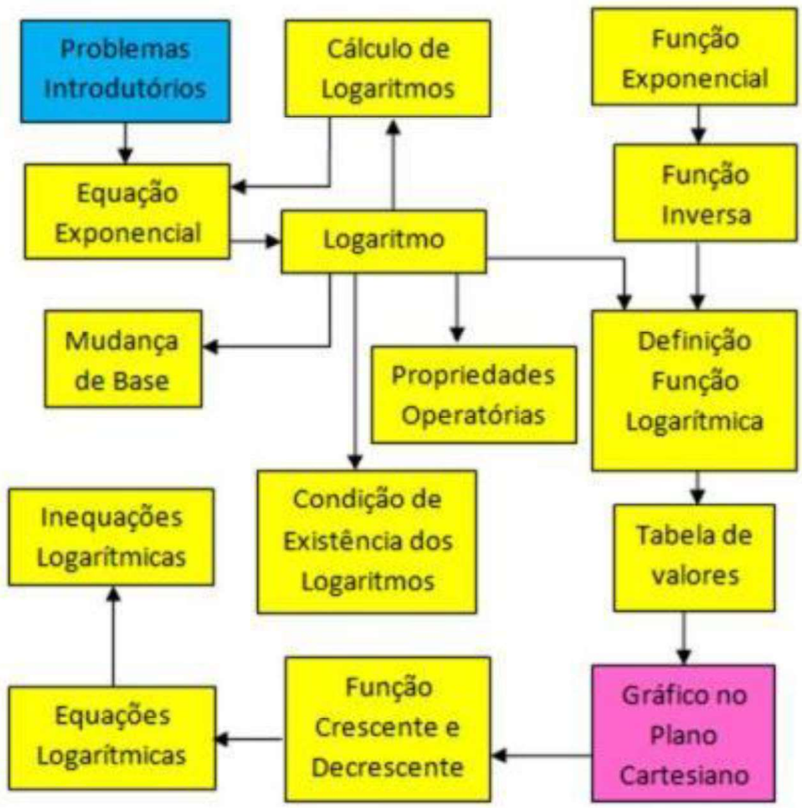


Figura 29-Mapeamento da função logarítmica do livro do Dante 2014

Na abordagem da função logarítmica houve apenas uma mudança: a retirada do tópico Co-logaritmo. O livro apresenta a caracterização da função logarítmica com base na propriedade $f(x_1.x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

Há uma preocupação com as propriedades logarítmicas antes de se apresentar a função. E também a exploração da função inversa para explorar o fato de a função logarítmica ser o inverso da exponencial.

2.4.2 - Análise comparada do livro L3

O livro *Matemática: Paiva* apresenta um capítulo introdutório que aborda domínio e imagem de função em um contexto geral. Nos capítulos subseqüentes não se dá mais ênfase ao estudo de domínio e imagem de funções, mas apresenta atividades em que o domínio é explorado de forma contextualizada (ver figura 30). E no final de cada capítulo há uma seção denominada *Matemática sem Fronteiras* que normalmente trabalha alguma atividade de forma contextualizada trazendo uma curiosidade para o aluno.

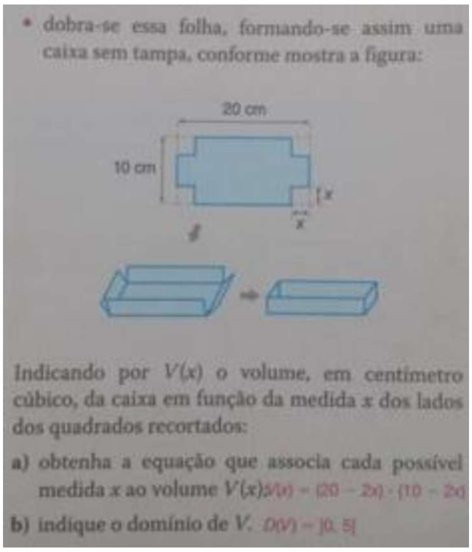


Figura 30 – Exercício contextualizado
Fonte: (PAIVA, 2013 p. 135)

Seguem algumas atividades do livro que exploram problemas contextualizados e que estimulam o aluno a determinar a expressão analítica através da situação problema apresentada.

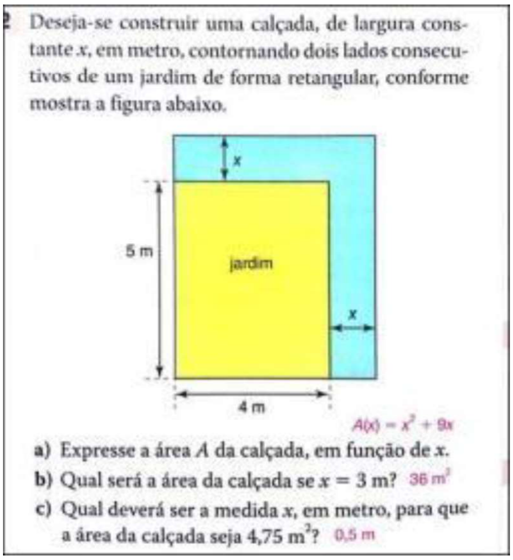
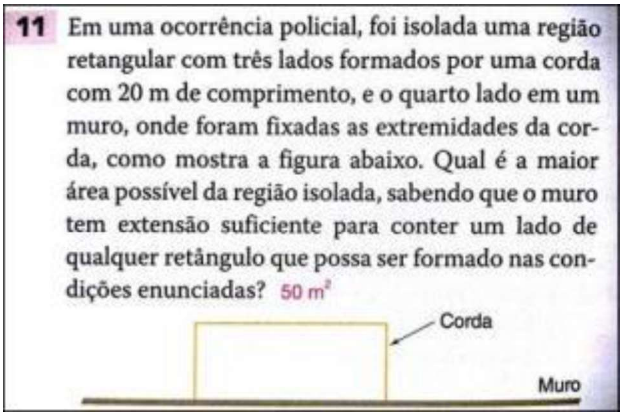


Figura 31 – Exercício contextualizado
Fonte: (PAIVA, 2013, p. 176)



11 Em uma ocorrência policial, foi isolada uma região retangular com três lados formados por uma corda com 20 m de comprimento, e o quarto lado em um muro, onde foram fixadas as extremidades da corda, como mostra a figura abaixo. Qual é a maior área possível da região isolada, sabendo que o muro tem extensão suficiente para conter um lado de qualquer retângulo que possa ser formado nas condições enunciadas? $50\ m^2$

Corda

Muro

Figura 32 – Exercício contextualizado.

Fonte: (PAIVA, 2013, p. 180)

Com relação ao uso de softwares, nada é apresentado dentro do tema Funções. O livro não apresentou nenhum tipo de abordagem deste tipo. Apesar de o PNLD trazer como orientação a inclusão desse recurso.

Mapeamento Paiva 2013 - Função Afim

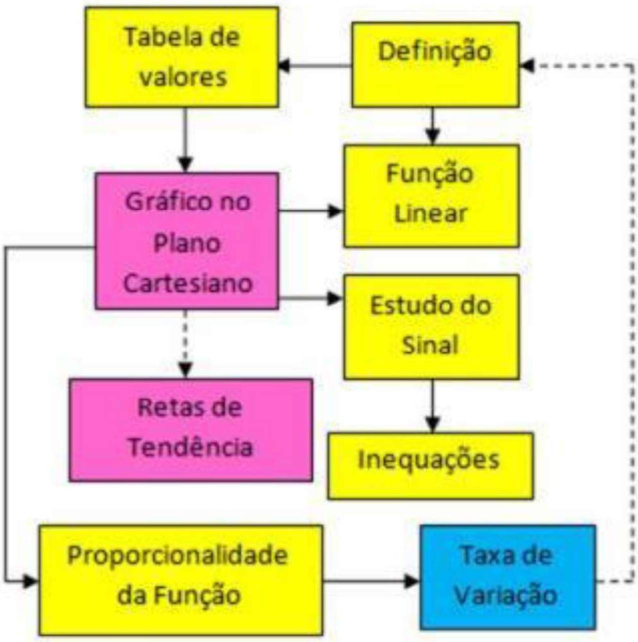


Figura 33-Mapeamento da função afim do livro do Paiva 2013

O mapeamento do tópico função afim apresentou diversas alterações se comparado com o mapeamento do livro (Paiva 2002) feito por Botelho (2005). Nesse novo mapa foram incluídos três tópicos: “Retas de Tendência”, “Taxas de Variação” e “Proporcionalidade”. O tema “Retas de Tendência” apresenta as funções afins como uma melhor aproximação dos pontos de determinada pesquisa no qual os dados não são apresentados por pontos do gráfico, mas necessariamente alinhados. Os temas “Proporcionalidade” e “Taxa de Variação” estão atrelados ao estudo da variação da função de forma bem sucinta. Alguns tópicos não foram tratados com tanta relevância como, por exemplo, o estudo do crescimento e decrescimento desse tipo de função.

Mapeamento Paiva 2013 – Função quadrática

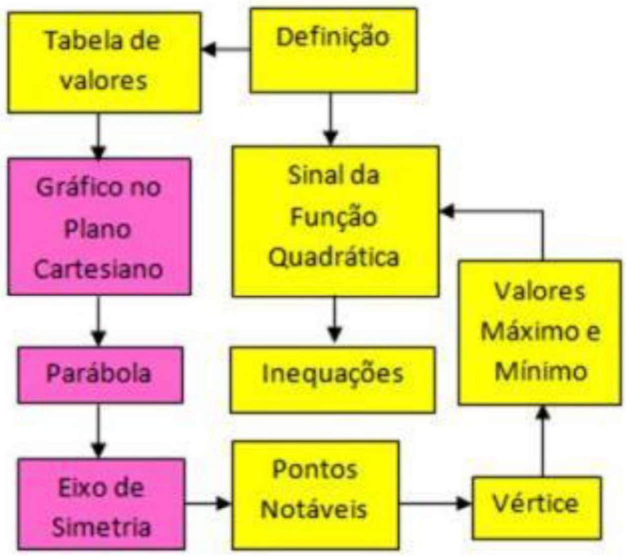


Figura 34-Mapeamento da função quadrática do livro do Paiva 2013

O novo mapa da função quadrática não apresentou muitas alterações com relação ao mapa elaborado por Botelho (2005). A ideia de máximos e mínimos é trabalhada através da fórmula que determina o vértice da parábola. Este capítulo do livro possui atividades que exploram máximos e mínimos. É um capítulo bem curto se comparado com o livro (Dante, 2014).

Mapeamento Paiva 2013 - Função Exponencial

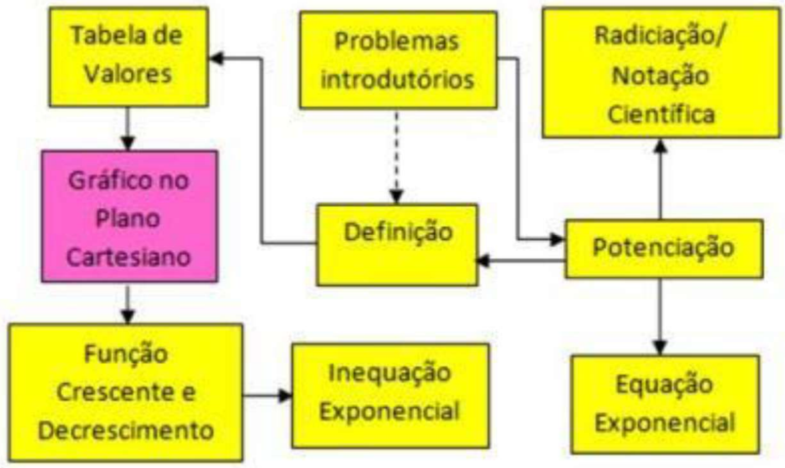


Figura 35-Mapeamento da função exponencial do livro do Paiva 2013

O novo mapa da função exponencial não apresentou muitas mudanças com relação ao elaborado por Sá (2005). O capítulo inicia apresentando as propriedades de potencia, em seguida ele explora a notação científica e propriedades de radiciação. Inicia a parte de funções com uma apresentação apenas da construção dos gráficos e como eles se apresentam. Conclui falando de equação e inequação exponencial. Vale ressaltar que as atividades apresentadas nesta seção são contextualizadas.

Mapeamento Paiva (2013) - Função Logarítmica

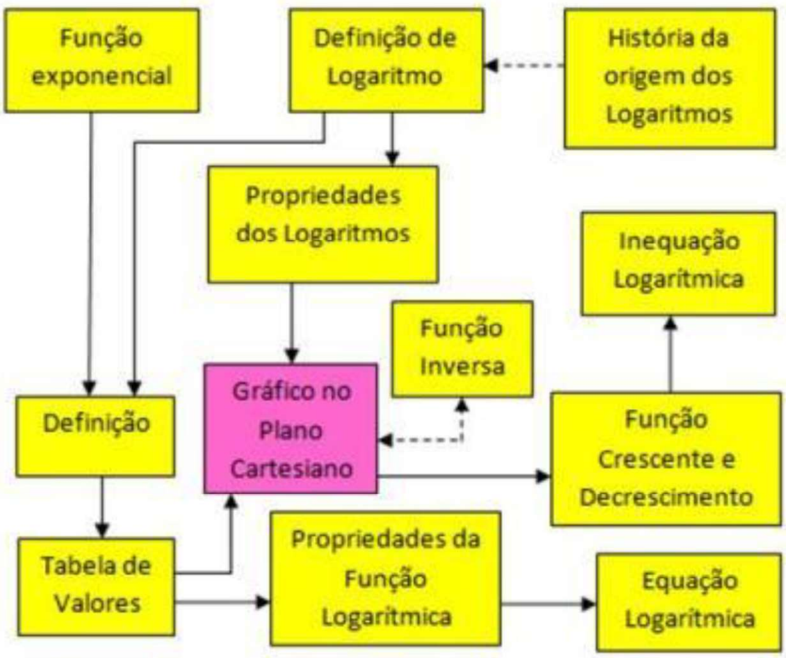


Figura 36-Mapeamento da função logarítmica do livro do Paiva 2013

No novo mapa da função logarítmica foi retirado “Operador Logaritmo” e incluído o tópico “História da origem dos Logaritmos”. Este capítulo apresenta inicialmente as propriedades logarítmicas, em seguida fala-se em função logarítmica. Houve uma preocupação em comparar os gráficos da função exponencial e logarítmica. Esta seção termina falando de equação e inequação.

2.4.3 - Comparação de uma forma geral

Após a comparação feita analisando os mapas dos livros didáticos de (DANTE, 2002) e (PAIVA, 2002) feitos por Botelho (2005) e Sá (2005) com os livros L2 e L3 aprovados pelo PNLD 2015, observam-se claramente as mudanças que ocorreram não só com relação à estrutura dos livros, mas com a abordagem.

O livro L2 apresentou algumas mudanças. Houve uma exploração maior de atividades contextualizada que permitem um aprendizado mais significativo do conceito de funções. Foram inseridas situações que estimulam o aluno a construir a expressão analítica da função. Foram também trabalhadas atividades que englobassem P.A e ainda os conceitos da física.

O livro L3 apresentou poucas mudanças significativas. Não fez articulação com o estudo de sequências (PA e PG) e nem faz referência ao uso de recursos computacionais na abordagem do estudo de funções.

Em consonância com as ideias observadas em Dassie e outros (2010), Sá (2005) e Botelho (2005), observa-se uma predominância algébrica e estática do conceito de função. Segundo Dassie e outros (2010) “[...] o caráter dinâmico do conceito de função é muito pouco abordado.”

Se observarmos neste período de 2002 à 2015, os livros analisados não apresentaram melhoras significativas no que diz respeito ao estudo das funções reais no contexto da variabilidade. Mas esse é o propósito de nosso trabalho. No capítulo seguinte apresentaremos uma proposta de atividades, que procura contemplar sob alguns aspectos, o estudo das funções nesse novo contexto.

CAPÍTULO 3 – UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES DINÂMICAS PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

Neste capítulo apresentaremos nossa proposta de atividades para a abordagem do conceito função no ensino médio (seção 3.2). Antes, porém faremos a análise da algumas questões preliminares que justificam a nossa proposta.

3.1 – Algumas questões preliminares

Ao ensinar Cálculo, os professores do ensino superior observam muitas dificuldades dos alunos com relação ao conceito de função (Rezende, 2003 e 2013; Cabral, 1998; Domingos, 2002; Sierpinska, 1987). Cabral (1998) e Rezende (2013), por exemplo, relatam sobre a dificuldade encontrada pelos alunos no ensino superior em desenvolver habilidades para construir a expressão analítica de uma função a partir de uma situação problema proposta. A falta de exercícios contextualizados e o excesso de atividades que apresentam um viés algébrico no desenvolvimento desse tópico no ensino básico podem ser talvez algumas das razões para as dificuldades apresentadas pelos alunos.

Esta conjectura, que vimos anteriormente, é ratificada pelos trabalhos de Botelho (2005) e Sá (2005), que observaram que a abordagem do conteúdo de funções vinham sendo trabalhados nos livros didáticos de forma estática sem se preocupar com o modo como as variáveis dependentes e independentes se relacionavam e de que forma se dava a relação entre suas variações.

Após uma comparação feita entre o mapeamento de dois livros didáticos aprovados pelo PNLD 2015e os mapas construídos por Botelho (2005) e Sá (2005) desses mesmos livros dez anos atrás (ver seção 2.4), observou-se que houve uma melhora na abordagem de conteúdos. Apresentam, por exemplo, relação entre funções e sequências numéricas (PA e PG), além de apresentar exercícios contextualizados de funções relacionados ao universo da Física e da Biologia, dentre outros. Porém ainda há muito que mudar. Pouco se fala sobre os pontos críticos das funções. O estudo de máximos e mínimos de funções fica restrito ao estudo das funções quadráticas no qual os alunos são treinados e acabam associando esta ideia ao uso das fórmulas das coordenadas dos vértices da parábola, sem entender bem o porquê de estarem aplicando esta fórmula.

A partir da revisão de literatura realizada em (2.2.1) destacou-se diversas tentativas de modificar a abordagem usual do conceito de função no âmbito do ensino médio. (SANTOS, 2008), (SALES, 2008) e (OLIVEIRA E DORINI, 2013) foram alguns dos trabalhos estudados. Os dois últimos utilizaram softwares de geometria dinâmica para o desenvolvimento das atividades propostas. Assim como Oliveira e Dorini (2013), também optamos pelo uso do Geogebra por se tratar de um software livre e por ter uma interface bem amigável com os nossos propósitos. Sales (2008), utilizando o micromundo *Dynagraph*, desenvolve atividades para o ensino de funções, pois considerou uma nova representação das funções através de eixos paralelos. Entretanto, apesar de bem original, nós preferimos explorar em nossas atividades a representação cartesiana. Entendemos que esta representação é boa e a mais indicada para observarmos os pontos críticos, intervalos de crescimento ou decrescimento e as "formas" como se dá a variação da função.

Nosso trabalho, por exemplo, tem a intenção de abordar questões de otimização a partir de uma interpretação intuitiva do gráfico (cartesiano) da função e uma estimativa geométrica dos pontos ótimos com o auxílio do software. Pretende-se, portanto que o aluno seja capaz de entender a ideia de ponto de máximo local. Pensar que os valores da função, em uma vizinhança do ponto ótimo, crescem até a variável independente "atingir" este ponto e depois decrescem a partir deste ponto (figura 37). Não se pretende aqui que o aluno determine o valor exato do ponto ótimo – ainda que na grande maioria das atividades pensadas isto será possível, mesmo sem os recursos do cálculo diferencial[18].

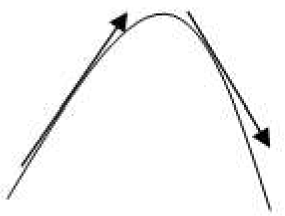


Figura 37 - Função com ponto de máximo

Figura 38 - Função com ponto de mínimo

Foi pensando nisso e na simplicidade dos contextos geométricos que optamos por desenvolver as atividades a partir de problemas geométricos. Cabe destacar com relação a isso, que o texto *Geometrical Adventures in Functionland,*de Arcavi e outros (1987), serviu

[18] Algumas soluções apresentadas têm justificativas essencialmente geométricas.

como motivação inicial para a elaboração das nossas atividades. A sequência didática proposta pelos autores relaciona o estudo funções algébricas com problemas envolvendo situações geométricas com quadriláteros. São atividades que exploram um certo tipo de "geometria elástica". As atividades consistem na tarefa de determinar a expressão da área de figuras planas que sofrem deformações em função da variação de outra grandeza geométrica. Segue um exemplo:

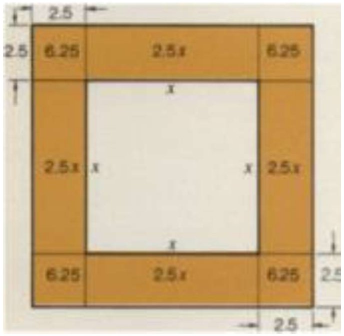


Figura 39–ilustração do problema selecionado do artigo “GeometricalAdventures in Functionland”

A partir da imagem proposta, pede-se no problema exposto que o aluno determine a expressão analítica da área da parte mais escura (região compreendida entre os dois quadrados concêntricos da figura) em função da variável x (medida do lado do quadrado interior) e discuta sobre o domínio dessa função.

Apesar das atividades se utilizarem apenas de material impresso, vê-se claramente a intenção de explorar aspectos dinâmicos na abordagem do conceito de função. Discute-se o domínio da função a partir da interpretação da variação de grandeza independente no contexto do problema. A expressão analítica, assim como o domínio, não é explicitado. Eles precisam ser determinados pelo aluno no ato de imaginar a deformação elástica possível da figura apresentada. Vale ressaltar a simplicidade das questões propostas por este texto. São questões com conceitos básicos de geometria: área de figuras planas simples (triângulo, quadrado), perímetro, diagonais de quadrados, etc. E todas recaem em funções polinomiais do 1º grau e do 2º grau.

Assim, motivados pela simplicidade dos contextos geométricos propostos na geometria elástica de Arcavi e outros (1987), construímos nove atividades com o Software Geogebra. Dois princípios básicos balizaram a elaboração das atividades: acreditar que o ensino de funções deve ser abordado como relação entre grandezas (variáveis), a partir de problemas propostos e não a partir de definições algébricas por meio de expressões analíticas já dadas; que a determinação do domínio de uma função deixe de ser apenas o estudo de uma restrição algébrica de sua expressão analítica, mas que seja ele estudado a partir da interpretação do significado atribuído à variável independente no contexto apresentado.

Assim sendo, para todas as atividades propostas elencam-se os seguintes objetivos:

(i) determinar a expressão analítica de uma função a partir de uma situação problema apresentada;

(ii) determinar o domínio de uma função a partir da interpretação do significado atribuído á variável independente no contexto do problema apresentado;

(iii) iniciar o estudante em problemas de otimização a partir de ideias e interpretações gráficas e intuitivas da variação de uma função na vizinhança de um ponto ótimo.

Todas as atividades interativas construídas com o Geogebra encontram-se disponíveis no ***GeoGebra Tube.***

3.2 - A proposta de atividades

Na apresentação das atividades fizemos um "*print"* das imagens da tela de trabalho do Geogebra após a movimentação e exibição da ajuda. Cabe destacar que a tela inicial da atividade não contém as dicas (os alunos é que devem solicitar "ajuda" ao interagir com o aplicativo). A maioria das funções que modelam os problemas propostos se apresenta como função afim ou quadrática. Todas as atividades pedem a expressão analítica, domínio da função, ponto de máximo e ponto de mínimo, quando for o caso. Além disso, todos os *applets* apresentam duas janelas de visualização: uma contendo a animação da situação problema e outra que apresenta uma representação gráfica da função. A seguir apresentaremos uma descrição detalhada das nove atividades propostas.

3.2.1 - Atividade 1

Esta atividade foi inspirada no texto de R. Hershkowitz, A. Arcavi& T. Eisenberg. 1987. Na janela de visualização esquerda observa-se um quadrado ALJK de lado medindo 4centímetros e AEIH um outro quadrado interno a este com um vértice em comum e lado medindo x centímetros. Na janela de visualização 2, observa-se o gráfico da área do polígono ELJKHI em função da variável x. Sabe-se que a área S do polígono ELJKHI varia de acordo com o valor de x escolhido.

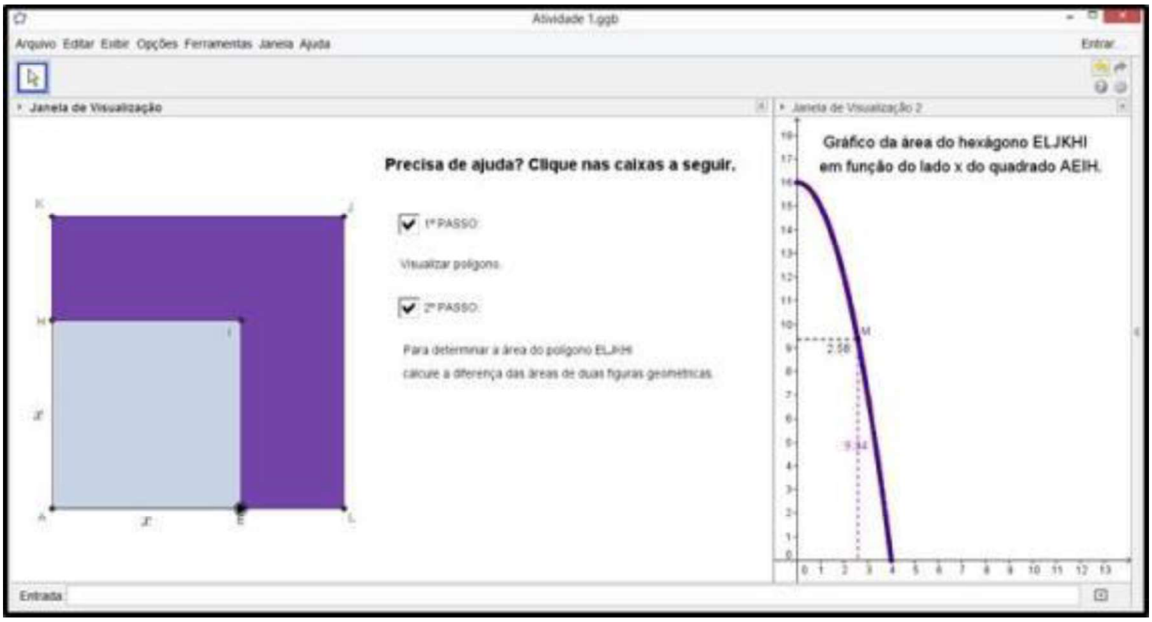


Figura 40 - Ilustração do *applet* da versão interativa da atividade 1 (tela final)
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/mAr3mCzV

Esta atividade pede para que o aluno determine a expressão analítica da área do polígono ELJKHI em função de x (medida do lado do quadrado ALJK), estudar o domínio e determinar os pontos ótimos da função. Esta situação problema recai em uma restrição da função quadrática (muito conhecida pelos alunos do ensino médio) e trabalha com conteúdos simples de geometria como, por exemplo, área de quadrado.

Para ver a solução desta atividade, bem como as de todas as atividades que serão apresentadas neste capítulo, o leitor deverá consultar o anexo 2.

3.2.2 - Atividade 2

Esta atividade foi concebida pela própria autora deste trabalho. Na janela de visualização esquerda observa-se um quadrado de lado medindo 4 centímetros do qual retira-se um retângulo de largura x centímetros de sua parte superior e dois quadradinhos de lado $x$centímetrosde cada vértice da parte inferior formando uma figura em forma de T. Na janela de visualização 2 aparece o gráfico da função que determina a área da região T em função da medida x dos lados das partes retiradas. A área A da figura T varia com o valor de x escolhido.

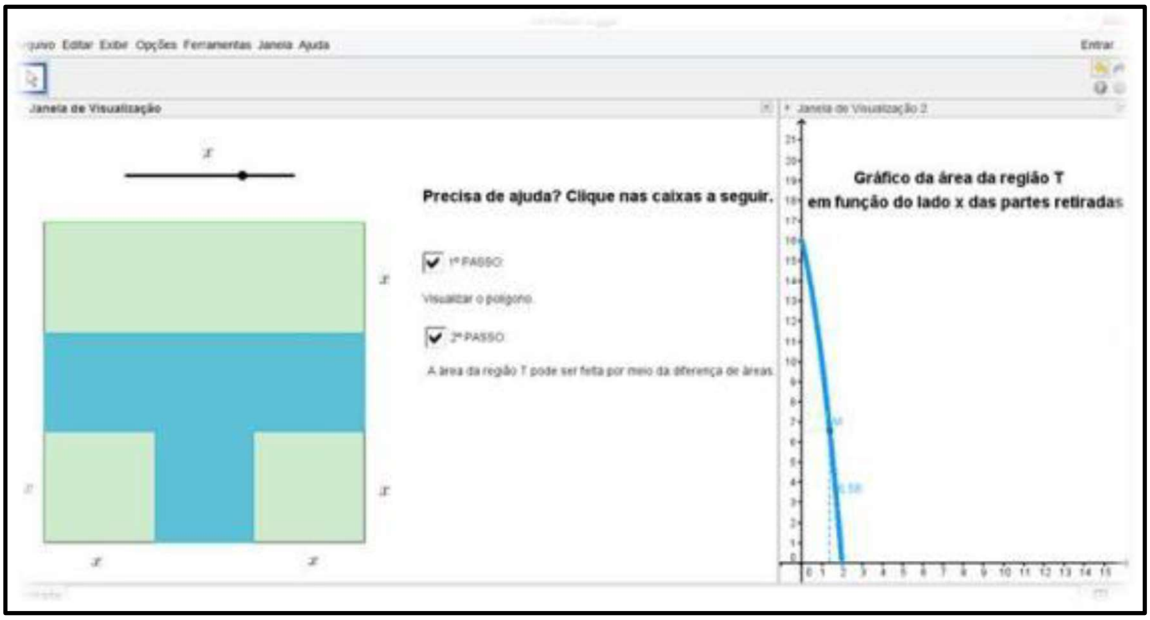


Figura 41 - Ilustração do *applet* da versão interativa da atividade 2 (tela final)
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/mpg5kCuE

Esta atividade pede para que o aluno determine a área A da figura em forma de T em função da variável x, o domínio e os pontos ótimos desta função. Assim como a atividade 1, esta atividade apresenta conceitos simples de geometria trabalhando apenas com área de quadrados e retângulos. A função que modela o problema é uma função que é restrição da função quadrática. Para resolver o problema precisa-se apenas dos conceitos de áreas de quadrados e retângulos.

3.2.3 - Atividade 3

Esta atividade também teve como motivação o texto de R. Hershkowitz, A. Arcavi e T.Eisenberg (1987). Na janela de visualização esquerda observa-se um quadrado ABCD de lado medindo 4 centímetros e um polígono cinza (EBCD) que varia de tamanho à medida que deslocamos o vértice E ao longo da diagonal do quadrado. A variável u representa o comprimento do segmento EC. Na janela de visualização 2 aparece o gráfico da função da área do polígono EBCD em função da variável *u.*

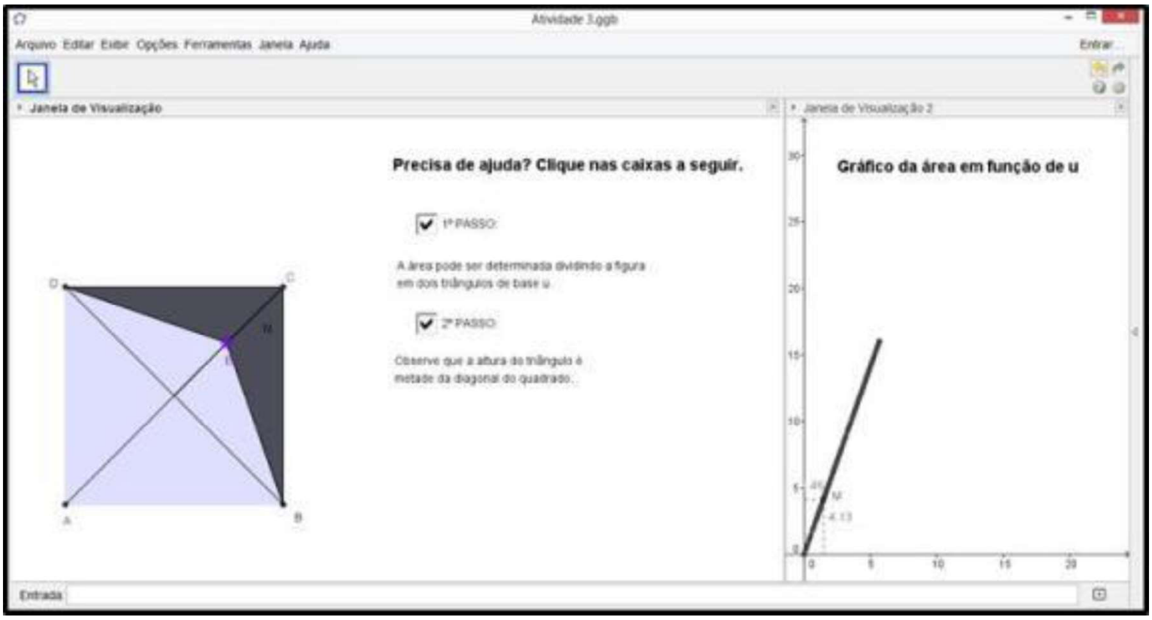


Figura 42 - Ilustração do *applet* da versão interativa da atividade 3 (tela final)
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/M7MfdNTn

A atividade proposta pede para determinar a área do polígono EBCD em função da variável *u,* estudar o seu domínio e determinar seus pontos ótimos. Esta atividade apresenta como modelo uma função que é uma restrição da função afim. Para resolução da atividade trabalha-se com conceitos simples de geometria, como por exemplo, medidas da diagonal de um quadrado e de áreas de triângulos.

3.2.4 - Atividade 4

Esta atividade foi adaptada do texto de R. Hershkowitz, A. Arcavi e T. Eisenberg (1987). Na janela de visualização esquerda observa-se um quadrado ABCD de lado medindo 6 centímetros e um polígono que varia de tamanho a medida que clicamos sobre o ponto F e movimentamos (no Geogebra). Sabendo que o ponto F só vai até o ponto C. Na janela de visualização 2 temos o gráfico da função que determina a área do polígono BCDF em relação à variável x. A variável x representa o comprimento que vai do vértice C do quadrado ao ponto F que movimentamos.

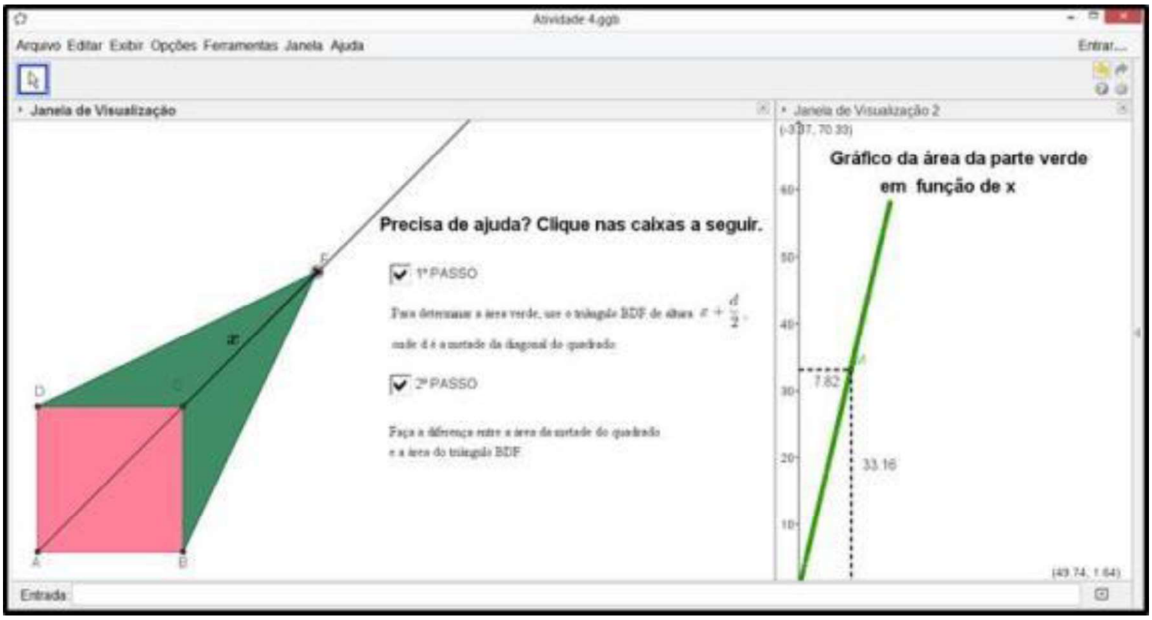


Figura 43- Ilustração do *applet* da versão interativa da atividade 4 (tela final)
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/JEZSbn54

A atividade pede a expressão analítica da área do polígono BCDF em função da variável x, o domínio e os pontos ótimos da função. Esta atividade é parecida com a atividade 3 – a função que modela o problema é uma restrição da função afim, utiliza o conhecimento da medida da diagonal de um quadrado e de áreas de triângulos para a sua resolução.

3.2.5 - Atividade 5

Esta atividade foi adaptada do livro didático de matemática do ensino médio Paiva, volume I, página 102. Na janela de visualização esquerda observa-se um retângulo de base medindo x metros e perímetro 100 metros. Na janela direita apresenta-se o gráfico da função que determina a área do retângulo em função do comprimento x da base do retângulo.

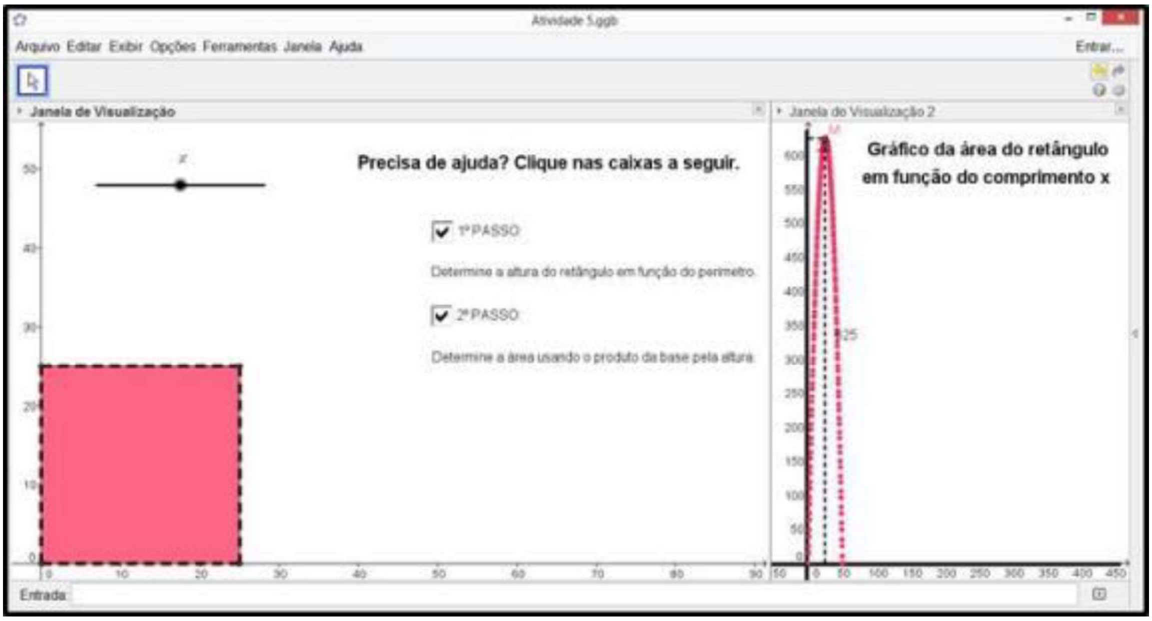


Figura 44 - Ilustração do *applet* da versão interativa da atividade 5 (tela final)
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/gytDSXPp

Nesta atividade trabalha-se com a restrição de uma função quadrática. A ideia do livro de onde ela foi retirada é explorar o “vértice da parábola”. O nosso intuito não é que o aluno resolva a atividade usando fórmulas clássicas, mas sim que ele tente entender o que ocorre com a área do retângulo ao variar suas medidas e assim procurando observar estratégias para determinar o ponto ótimo. Além disso, a atividade solicita que sejam determinados a expressão analítica e o domínio da função que modela o problema.

3.2.6 - Atividade 6

Esta atividade é de autoria da própria pesquisadora. Na janela de visualização esquerda observa-se um ângulo inscrito ACB em um círculo de raio medindo $2\sqrt{2}$ centímetros aonde o segmento AB é o lado do quadrado inscrito no mesmo círculo. Na janela de visualização 2, apresenta-se o gráfico da função que determina o ângulo a medida do ângulo α do triângulo ACB em relação ao comprimento do arco t, no qual t é a medida do arco BC contido no maior arco do círculo com extremidades nos ponto A e B.

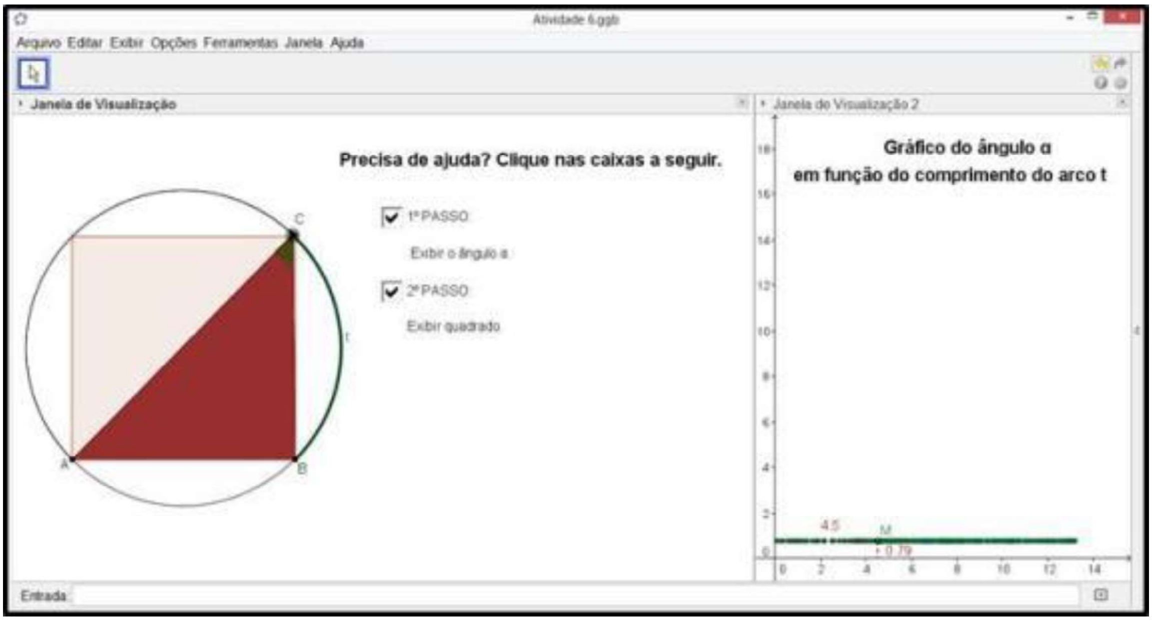


Figura 45-Ilustração do *applet* da versão interativa da atividade 6 (tela final)
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/kW5usPqY

Nesta atividade solicita-se a expressão analítica da função que determina a medida do ângulo α em relação ao comprimento do arco t, o seu domínio e os seus pontos ótimos. Nesta atividade explora-se o conhecimento de ângulo inscrito em um círculo. A função que modela o problema é a restrição de uma função constante.

3.2.7 - Atividade 7

Esta atividade foi adaptada do texto de R. Hershkowitz, A. Arcavi& T. Eisenberg. 1987. Na janela de visualização esquerda observa-se um quadrado de lado medindo 4 centímetros, um trapézio isósceles ABFH (construído com bases AB e HF paralela a AB) e um polígono AJIBFH (obtido pela retirada do quadrado ABIJ do trapézio isósceles ABFH). A área do polígono AJIBFH varia de acordo com o valor de x que indica a medida dos segmentos IF e JH. Na janela de visualização 2, observa-se o gráfico da função que determina a área do polígono AJIBFH em relação à variável x.

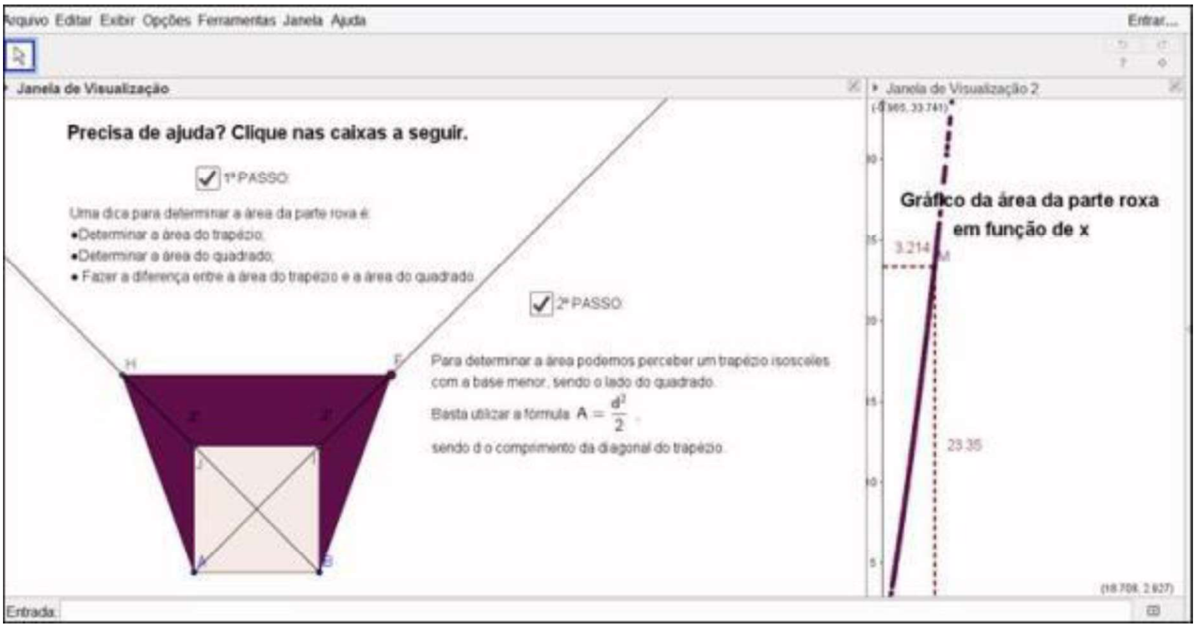


Figura 46 - Ilustração do *applet* da versão interativa da atividade 7 (tela final)
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/d3DHKHr8

Nesta atividade solicita-se a expressão analítica da área do polígono AJIBFH em função da variável x, o domínio e os pontos ótimos da função. A função que modela o problema é a restrição de uma função quadrática.

3.2.8 - Atividade 8

Esta atividade foi adaptada do módulo 13 do Projeto Ótimo UFF (BORTOLOSSI *et al*, 2016).Uma cruz simétrica é a figura formada pela sobreposição de dois retângulos congruentes e ortogonais inscritos em um círculo. Na janela de visualização esquerda observa-se uma cruz simétrica inscrita em um círculo de raio unitário cujo comprimento do retângulo que constitui a cruz mede x centímetros. Na janela de visualização 2, apresenta-se o gráfico da função que determina a área da cruz em relação à variável x. A área A da cruz varia com o valor de x escolhido.

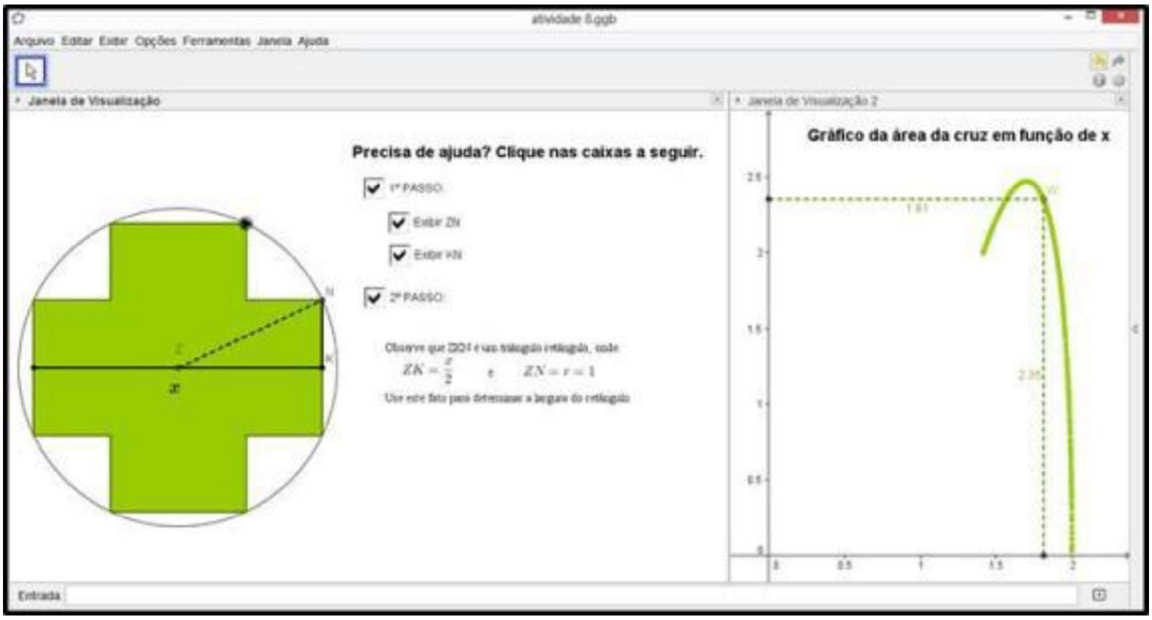


Figura 47 - Ilustração do *applet* da versão interativa da atividade 8 (tela final)
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/VtWRfgdY

A atividade pede para determinar a expressão analítica da área da cruz em função da variável x, estudar o domínio e determinar os pontos ótimos da função que modela o problema. A função que modela o problema não é muito conhecida pelos alunos. Nosso intuito com este tipo de atividade, dentre outras coisas, é permitir que o aluno seja capaz de fazer estimativas de valores máximos e mínimos sem a utilização de "fórmulas". Como é uma atividade que apresenta maior grau de dificuldade em determinar seus pontos ótimos isso se torna possível.

3.2.9 - Atividade 9

Esta atividade é de autoria da própria pesquisadora. Na janela de visualização esquerda observa-se um triângulo inscrito em uma circunferência de raio medindo 4 centímetros. A área do triângulo ABC varia de acordo com a medida da variável *x*, que representa a medida do lado AC do triângulo. A janela 2 apresenta o gráfico da função da área do triângulo ABC em relação à variável *x*.

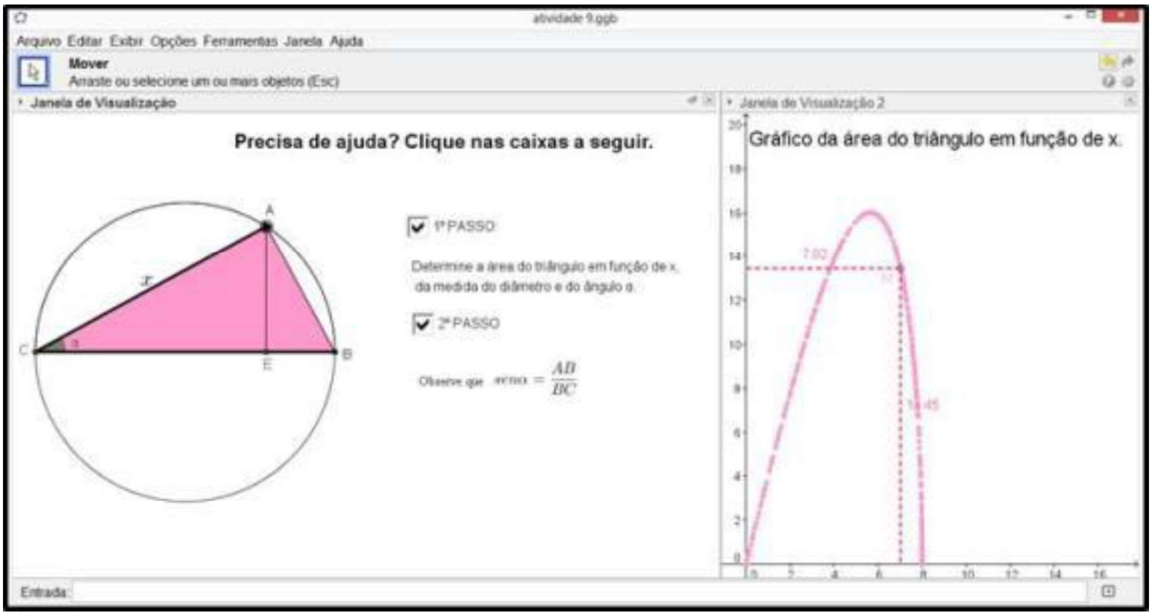


Figura 48- Ilustração do *applet* da versão interativa da atividade 9 (tela final)
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/MmEHpuNP

A atividade pede para determinar a expressão analítica da área do triângulo ABC em função da variável *x*, o domínio e os pontos ótimos da função que modela o problema. Esta atividade, assim como a atividade 8, apresenta como solução com uma função não muito familiar ao aluno.

CAPITULO 4 – A PESQUISA

Uma vez construída as atividades (apresentadas no capítulo três desta dissertação), decidiu-se pela experimentação das mesmas com alunos do ensino médio. Para tal foi constituído um grupo piloto composto de sete alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola pública para a realização das atividades planejadas. Esta pesquisa tem como objetivo avaliar se os alunos conseguem "enxergar a função" numa determinada situação-problema. Verificar se eles são capazes de identificar as variáveis e o domínio da função dentro do contexto da questão, além de fazer estimativas de valores máximos e mínimos da função quando existirem.

A pesquisa realizada aqui é de natureza qualitativa. Não estamos preocupados em "quantificar" erros ou acertos dos alunos frente às questões apresentadas. Mas investigar suas argumentações e atitudes em relação aos problemas propostos. Nós procuramos observar em que medida o contexto dinâmico e interativo contribuiu para que se atingissem os objetivos anunciados. O relato dessa experiência de forma detalhada encontra-se na seção 4.3.

Ao final da pesquisa aplicou-se um questionário nos alunos para avaliar o nível aceitação deles com relação ao material e à abordagem utilizada. O resultado dessa avaliação encontra-se no capítulo 5 desta dissertação.

Antes, porém, apresentaremos algumas informações preliminares referentes à pesquisa realizada.

4.1- Informações preliminares

Nesta seção apresentamos o perfil da escola e dos alunos que participaram da pesquisa.

4.1.1 Perfil da escola

A escola onde foi realizada a pesquisa fica localizada no bairro Itaipu em Niterói. Seu horário de funcionamento está subdividido em três turnos: manhã, tarde e noite. O Colégio Estadual Alcina é a única escola da região que possui ensino médio inovador que tem como objetivo priorizar novas tecnologias, aulas dinâmicas e a interdisciplinaridade. Esta escola possui um laboratório de informática com 18 computadores com o Geogebra instalado.

Contudo, tomando como referência o IDEB– que avalia através de provas o desenvolvimento dos alunos em carater nacional – conclui-se que o colégio apresenta um baixo rendimento escolar. Nas séries finais do ensino fundamental em 2007 e 2009 foram os únicos anos em que a escola alcançou a meta estipulada, ficando assim com 3,1 nos dois anos[19]. Já nos anos de 2011 e 2013 as notas foram 2,6 e 3,0, sendo as metas estipuladasem 3,3 e 3,8, respectivamente.

Tomando como referência outro indicador, o IDERJ, observa-se que a escola também não consegue atingir as metas estipuladas. O IDERJ é uma avaliação feita no Rio de Janeiro que se utiliza de duas ferramentas: Indicador de Desempenho (ID) e Indicador de Fluxo (IF). O ID é avaliado pelas notas emitidas pelo SAERJ e o IF é calculado através das taxas divulgadas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Neste caso, para o ensino fundamental a escola recebeu nota 1,8 (com meta estipulada em 2,4) no ano de 2011. Em 2012 teve nota de 2,2 (com meta 3,0) e em 2013 obteve nota 2 (com meta de 3,7). Já no ensino médio as notas foram em 2011 teve a nota de 1,7 (com meta 1,4), em 2012 obteve 1,6 (com meta 2,1) e em 2013 teve a nota de 1,9 (com meta 2,6).

Com base nos índices apresentados, pode-se perceber que a escola possui baixo desenvolvimento com base nas avaliações externas.

4.1.2 Perfil dos alunos

O grupo piloto é formado por alunos do 2º ano do ensino médio que possuem um conhecimento limitado com relação a alguns conteúdos. Por outro lado eles cumprem os pré-requisitos básicos para a aplicação das atividades. Todos os alunos já haviam tido aulas no 1º ano do ensino médio sobre funções afim e quadrática.

Para a seleção dos alunos para participarem do grupo piloto foi utilizado o seguinte critério de escolha: cinco alunos com média na disciplina de matemática entre 6,5 e 8,0 e

[19] As metas estipuladas para esses dois anos eram 2,7 e 2,9, respectivamente.

cinco alunos com médias entre 4,0 e 6,5. A amostra não possui nenhum aluno com médias abaixo de 4,0 ou acima de 8,0.

Todos foram convidados a participar da oficina que iniciou com três alunos com médias entre 6,5 e 8,0 e três alunos com médias entre 4,0 e 6,5. Após iniciar a oficina, um aluno com média acima de 8,0 e um aluno com média entre 4,0 e 6,5 pediram para participar. Desta forma ficamos com uma amostra de quatro alunos com média entre 4,0 e 6,5, três alunos com médias entre 6,5 e 8,0 e um aluno com média acima de 8,0.

4.2 - Metodologia da pesquisa

Para a realização desta pesquisa imaginou-se dois modelos de atividades: uma versão impressa que se assemelha ao formato escrito em um livro didático e uma versão interativa composta de um texto e um *applet* construído com o software Geogebra. Na versão interativa utilizamos as nove atividades propostas no capítulo anterior com breve texto explicativo de como utilizar o *applet* para resolver o problema proposto. As versões impressas consistem de uma redação em "formato de livro didático" das atividades propostas. Foram utilizadas nove atividades, sendo as cinco primeiras em duas versões (impressa e interativa) e as demais apenas na versão interativa.

Esta pesquisa foi realizada na sala de informática por meio de uma sequência didática composta de dez aulas no qual cada uma delas teve 1h e 40 minutos de duração. As aulas ocorreram após o horário regulamentar, das 14 horas e 40 minutos às 16 horas 20 minutos, às sextas feiras. Na segunda feira, ocorrem nos primeiros horários das 7:00 às 8:40. As aulas foram gravadas, a fim de registrar todos os comentários relevantes. As atividades tiveram início no dia 25 de agosto com previsão para término no dia 6 de outubro de 2014. Como o ano foi de eleição, tivemos que ministrar três aulas após o dia 6 para completar as dez aulas, encerrando assim no dia 10 de novembro de 2014.

As aulas ocorreram de forma bem natural porque todos são alunos da pesquisadora. As atividades foram realizadas de forma individual e trabalhadas como mostra o cronograma (tabela 1). Inicialmente, os alunos assistiam a uma apresentação de 20 minutos, onde foram abordados os conteúdos que são necessários para a resolução de cada atividade. Em seguida, recebiam a atividade na versão impressa e tinham 30 minutos para resolver a questão. Após esse tempo o aluno devolvia a sua resolução da versão impressa e recebia a versão interativa, tendo acesso ao arquivo do Geogebra da atividade proposta. Na aula seguinte a atividade era resolvida, momento em que se mostravam os erros e acertos de cada aluno. Posteriormente, apresentavam-se orientações para a próxima atividade. Daqui em diante iniciava-se um novo ciclo em relação à segunda atividade. Este procedimento foi repetido até a quinta atividade, a partir da qual apenas a versão interativa passou a ser considerada.

Tabela 1 – Cronograma da pesquisa

Data	Título	Conteúdo	Tempo
29/08/14	Aula 1	Apresentação do projeto	20 minutos
		Revisão de conceitos geométricos e produtos notáveis	20 minutos
		Atividade 1 impressa	30 minutos
		Atividade 1 interativa	30 minutos
05/09/14	Aula 2	Correção da Atividade 1 interativa	20 minutos
		Revisão domínio de uma função e área de polígonos	20 minutos
		Atividade 2 impressa	30 minutos
		Atividade 2 interativa	30 minutos
08/09/14	Aula 3	Correção da Atividade 2 interativa	20 minutos
		Revisão	20 minutos
		Atividade 3 impressa	30 minutos
		Atividade 3 interativa	30 minutos
15/09/14	Aula 4	Correção da Atividade 3 interativa	20 minutos
		Revisão	20 minutos
		Atividade 4 impressa	30 minutos
		Atividade 4 interativa	30 minutos
22/09/14	Aula 5	Correção da Atividade 4 interativa	20 minutos
		Revisão	20 minutos
		Atividade 5 impressa	30 minutos
		Atividade 5 interativa	30 minutos
29/09/14	Aula 6	Correção da Atividade 5 interativa	20 minutos
		Revisão de círculo, polígono regular inscrito em um círculo	20 minutos
		Atividade 6 interativa	50 minutos
13/10/14	Aula 7	Correção da Atividade 6 interativa	20 minutos
		Revisão	20 minutos
		Atividade 7 interativa	50 minutos
20/10/14	Aula 8	Correção da Atividade 7 interativa	20 minutos
		Revisão	20 minutos
		Atividade 8 interativa	50 minutos
02/11/14	Aula 9	Correção da atividade 8	20 minutos
		Revisão	20 minutos
		Atividade 9 interativa	50 minutos
10/11/14	Aula 10	Correção da atividade 9	20 minutos
		Ficha de avaliação	20 minutos
		Encerramento	10 minutos

4.3 - O relato da experiência

O relato será feito considerando as atividades realizadas. Para cada uma delas observaremos características gerais e pontuais das respostas dadas pelos alunos nas duas versões: impressa e interativa. Para não expor os alunos utilizaremos as iniciais do nosso alfabeto – A, B, C, D, E, F e G – para representá-los.

Durante a aplicação das atividades, a pesquisadora perguntou aos alunos "o que vem a cabeça deles ao ouvir a palavra função". As respostas foram: plano cartesiano, números, equação, gráfico, incógnita. Isso vai de encontro aos resultados obtidos por Rossini (2006) em sua pesquisa junto a professores de matemática da educação básica. Tal como os nossos alunos, plano cartesiano, gráfico, incógnita são palavras que também estão presentes no mapa conceitual dos professores entrevistados por Rossini.

Além disso, a pesquisadora perguntou para os alunos "o que é função" e os alunos apresentaram algumas respostas:

O aluno D respondeu: "*É uma equação que tenha letra*"

O aluno G respondeu: "*... é você usar o "x"dentro de um gráfico.*"

Aluno A: "*... descobrir o valor de x?*"

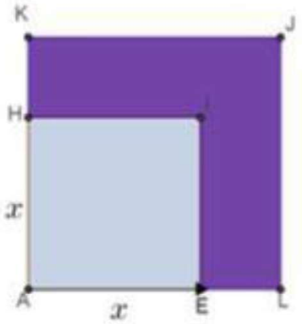
Pelas respostas iniciais, percebe-se claramente que os conhecimentos de funções dos estudantes são vãos e pontuais, o que já era previsível de certo modo. Nota-se uma identificação do conceito de função com o conceito de equação.

A seguir faremos o relato da experiência na ordem cronológica, mas organizando o texto em seções por atividade realizada. Inicialmente, para a comodidade do leitor, apresentamos a atividade na versão impressa e na versão interativa. Em seguida, na mesma seção (mas em subseções diferentes), fazemos os relatos dos resultados obtidos com a realização de cada uma delas. No entanto, cabe destacar que para as quatro últimas atividades foram realizadas com os estudantes apenas as atividades interativas. Portanto, para esses casos temos apenas o relato dos resultados da aplicação das atividades interativas.

4.3.1- Atividade 1

Atividade 1 versão impressa

Seja ALJK um quadrado de lado 4 centímetros e AEIH um outro quadrado interno a este com um vértice em comum e lado medindo x centímetros. Sabe-se que a área S do polígono ELJKHI varia de acordo com o tamanho escolhido para o segmento x.



a) Determine a área S do polígono ELJKHI em função de x.
b) Determine o domínio da função.
c) Para que valor de x, a área do polígono ELJKHI é máxima?
d) Para que valor de x, a área do polígono ELJKHI é mínima?

Figura 49 - Ilustração da versão impressa da atividade 1.

Atividade 1 - Versão interativa

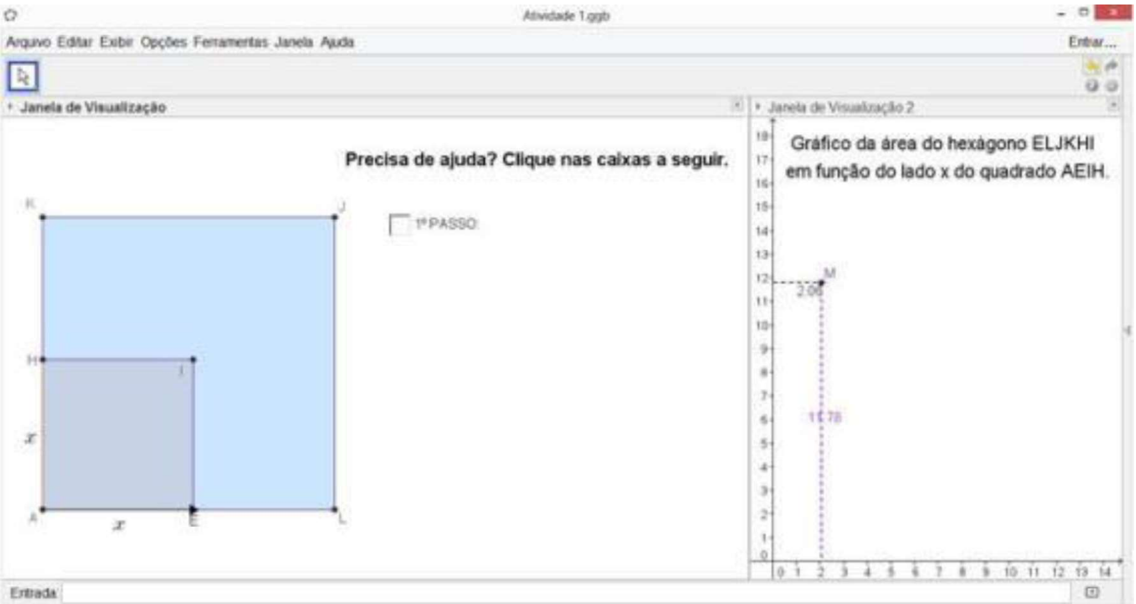


Figura 50-Ilustração da situação inicial do *applet* da versão interativa da atividade 1

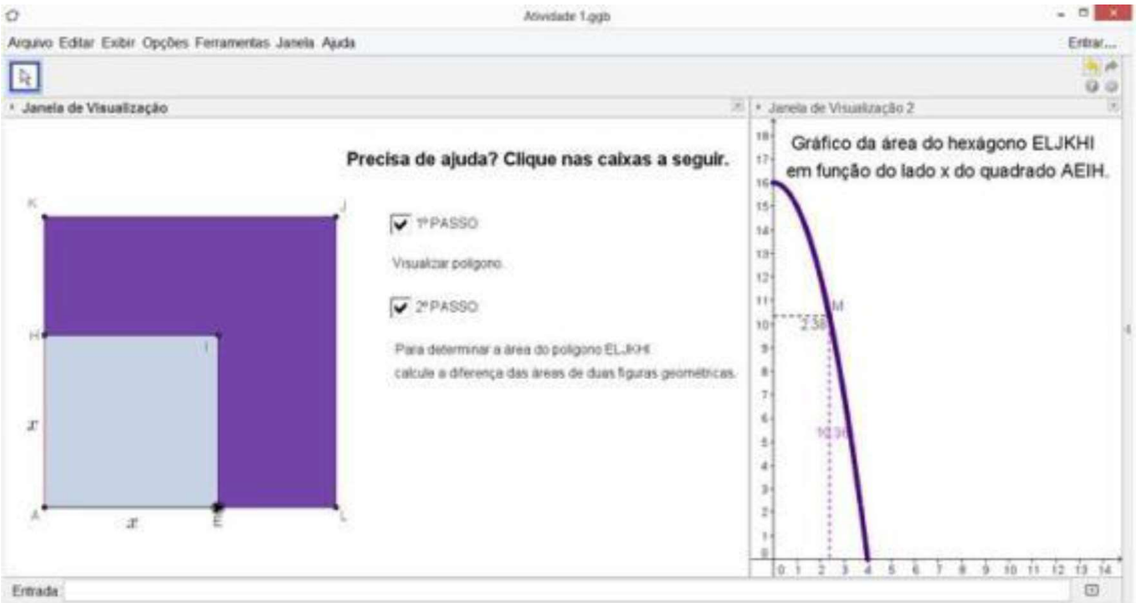


Figura 51 - Ilustração de situação intermediária do *applet* da versão interativa da atividade 1.

Observações gerais: Com o primeiro contato com as atividades na versão impressa percebe-se claramente a dificuldade dos alunos de observarem o contexto dinâmico do problema. Na versão interativa alguns alunos conseguiram perceber que a expressão analítica da função pode ser construída através da diferença de áreas. Entretanto a maioria dos alunos ignorou o significado de variável e determinaram o valor da área solicitada a partir de um valor fixo para a variável x.

4.3.1.1 Comentários das respostas dos alunos da versão impressa da atividade 1

Ao se depararem com o enunciado da versão impressa da atividade 1, os alunos ficaram apreensivos por estar vendo pela primeira vez a "geometria ganhando movimento" e não acreditavam que conseguiriam resolver uma questão tão diferente do que estavam acostumados. Alguns alunos perguntaram como a figura se movimentava. A maior dificuldade foi de interpretar o que era pedido no item (a): "Determinar a expressão analítica da função".

Na versão impressa, apenas o aluno B pensou em determinar a área através da diferença de áreas, porém calculou a área como se a medida do quadrado AEIH fosse "fixa", considerando x=2.

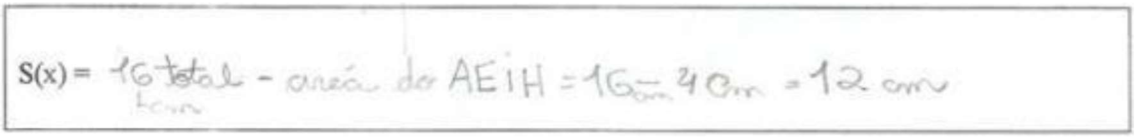


Figura 52 - Resposta do aluno B para o item (a) da atividade 1 versão impressa.

O aluno E, por meio de uma estimativa visual, interpretou de forma equivocada que o polígono EIHKJL tinha a metade da área do quadrado ALJK.

Figura 53-Resposta do aluno E para o item (a) da atividade 1 versão impressa.

Erros à parte, pode-se observar que as respostas desses alunos (B e E) correspondem ao nível aritmético indicado por Cabral (1998) em questões relacionadas ao problema de variabilidade.

Os alunos C e G desistiram da atividade, porém chegaram a montar uma figura. O aluno G disse ter dificuldade em determinar a área da figura roxa por não conseguir identificar o tipo de polígono. Ele relatou que o formato de figura que aparece não se assemelha a nenhum tipo de polígono que seja conhecido para aplicar uma fórmula dada. Essa atitude do aluno é consequência da abordagem predominante dada ao cálculo de áreas no ensino da matemática.

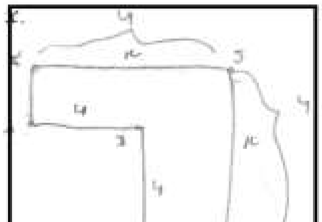


Figura 54 - Resposta do aluno G para o item (a) da atividade 1 versão impressa.

Já o aluno D utilizou a função afim como modelo. Tal procedimento pode ser justificado pelo fato de que este conteúdo estava sendo ensinado em RPM[20].

[20] Trata-se de uma das disciplinas da grade curricular do ensino médio inovador onde o professor aborda conteúdos da disciplina de matemática na qual os alunos possuem grande dificuldade.

Figura 55 - Resposta do aluno D para o item (a) da atividade 1 versão impressa.

Ao perceber que os alunos só estavam tentando fazer o item (a), a pesquisadora perguntou a eles se os itens (b), (c) e (d) dependiam deste item.

A maioria dos alunos respondeu que sim. Talvez esta atitude dos alunos justifica-se pelo fato de estarem habituados a resolver exercícios de máximos e mínimos ou mesmo relacionados ao domínio de uma função a partir do conhecimento prévio de sua expressão analítica. Assim, diante da dificuldade de encontrar a expressão analítica, ignoravam a possibilidade de analisar os itens (b), (c) e (d) independente da resolução do item (a). Cabe ressaltar, entretanto, que os alunos A e B responderam que apenas a resolução do item(b) não dependia do item (a).

Ao serem perguntados sobre qual era a dificuldade deles para resolver a questão, o aluno D respondeu: "*Não tem números para a gente usar, se tivessem números seria mais fácil.*"

Um dos alunos (o aluno A) respondeu de forma totalmente incongruente com relação ao que se pedia. Este aluno utilizou os vértices como segmentos, dando a seguinte resposta para o item (a):

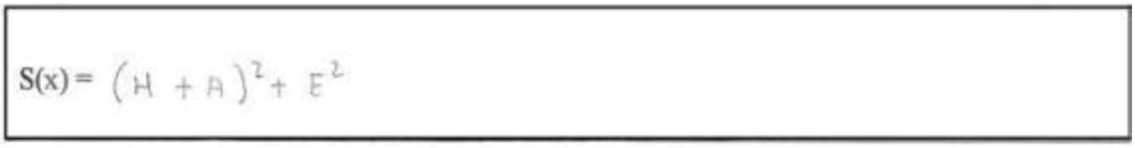


Figura 56 - Resposta do aluno A para o item (a) da atividade 1 versão impressa.

Um aluno (aluno F) entregou o espaço da resolução da atividade em branco.

4.3.1.2 Comentários das respostas dos alunos da versão interativa da atividade 1

Apesar do contato com o *applet* do *Geogebra*, as respostas dos alunos B, C, D e G para o item (a) são produzidas ainda no nível aritmético.

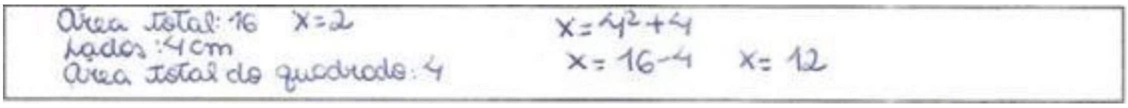


Figura 57 - Resposta do aluno D para o item (a) da atividade 1 versão interativa.

Ao comentar a sua resposta, o aluno B acrescenta ainda que “(...) quando eu movimentei, perdi o valor”. O aluno fechou o arquivo do Geogebra e o abriu novamente com o intuito de resgatar o valor inicial da área do quadrado AEIH.

Mesmo utilizando o Geogebra, o aluno B não percebeu a variação da variável x e atribuiu um valor para determinar a “expressão analítica” da função.

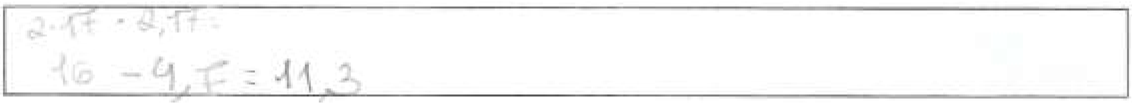


Figura 58 - Resposta do aluno B para o item (a) da atividade 1 versão interativa.

Com relação ao item referente ao domínio da função, estabeleceu-se um diálogo entre os alunos A, B e G:

Aluno G:*O domínio podia variar de 0 a 4 ou de 0 a 16?*

Aluno B:*O domínio pode variar de 0 a 4 por que ele é um lado, é exatamente um lado.*

Aluno A: *Não, ele pega os dois lados, ele toma conta do quadrado todo... Então vai dar 16* – em sua intervenção o aluno A está considerando o perímetro do quadrado.

Cabe destacar que apenas dois alunos (B e G) responderam corretamente sobre domínio da função, ainda que de modo bem informal, sem uma identificação precisa do intervalo.

Figura 59 - Resposta do aluno B para o item (b) da atividade 1 versão interativa.

Um fato curioso é que poucos alunos utilizaram a janela de visualização 2que contém o gráfico da função para responderem sobre esta questão. Os alunos A e E, os únicos a adotarem tal procedimento, interpretaram os valores do domínio da função como sendo os valores imagens S(x).

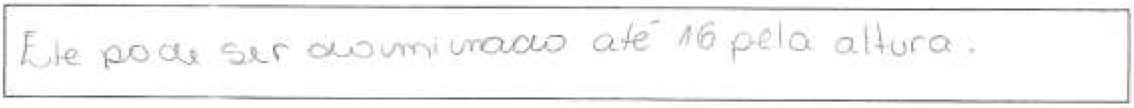

Ele pode ser aumentado até 16 pela altura.

Figura 60 - Resposta do aluno E para o item (b) da atividade 1 versão interativa.

Ao discutir sobre os pontos ótimos da função, os alunos C, D, E e G não observaram que pedia-se o valor de x para o qual a área seria máxima e deram como resposta a área máxima, isto é, o valor máximo da função.


O máximo é 16.

Figura 61 - Resposta do aluno D para o item (c) da atividade 1 versão interativa.

Apenas os alunos A e B responderam que o valor máximo da área era alcançado quando x= 4.

De modo análogo, no item (d), todos os alunos deram como resposta o valor mínimo da área e não o valor que a variável x assume para que essa área seja mínima.

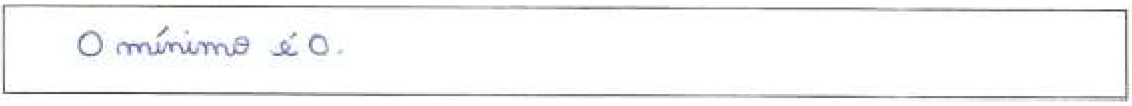

O mínimo é 0.

Figura 62 - Resposta do aluno D para o item (d) da atividade 1 versão interativa.

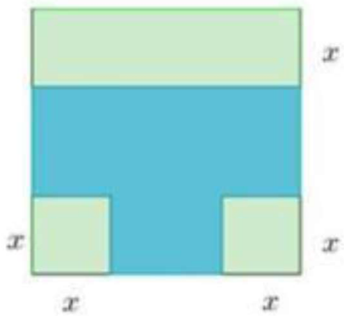
Correção das atividades

Os alunos reagiram à correção de forma muito positiva. Apesar da dificuldade na realização das atividades, alguns acharam a solução muito simples e se mostraram animados para tentar a atividade 2.

4.3.2 - Atividade 2

Atividade 2 – Versão impressa

De uma folha de papel quadrada de lado medindo 4 centímetros, retira-se um retângulo de largura x centímetros de sua parte superior e dois quadradinhos de lado x centímetros de cada ponta da parte inferior, formando uma figura em forma de T. A área A da figura T varia com o valor de x escolhido.



a) Determine a área A em função de x.

b) Determine o domínio da função.

c) Para que valor de x, a área da figura T é máxima?

d) Para que valor de x, a área da figura T é mínima?

Figura 63 - Ilustração da versão impressa da atividade 2

Atividade 2 - Versão interativa

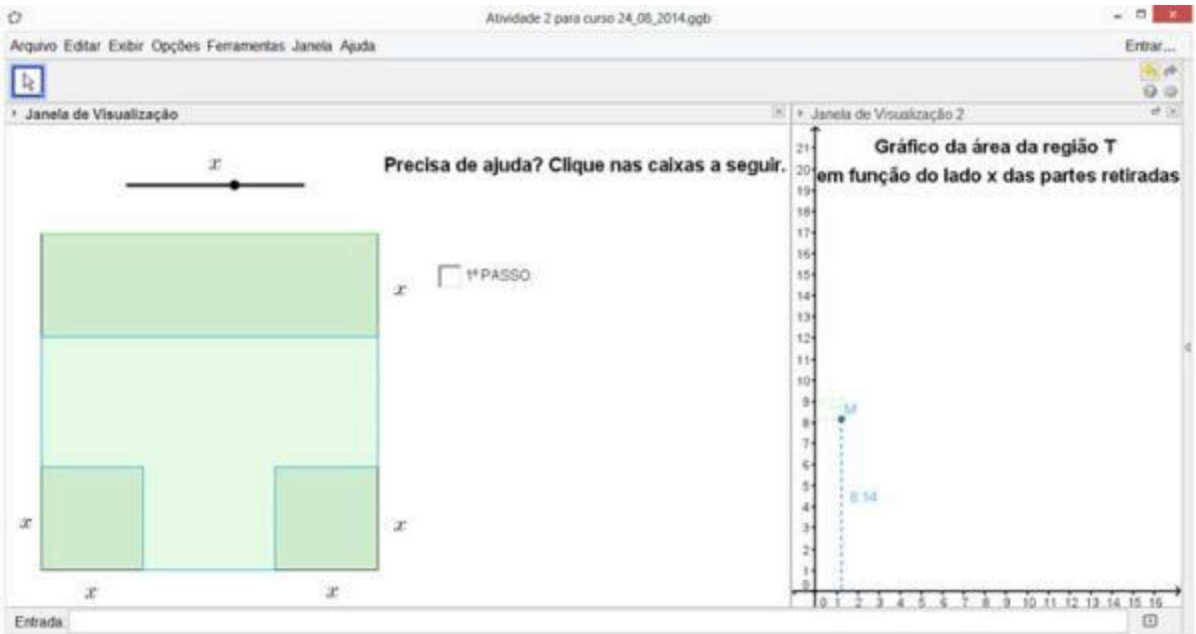


Figura 64 - Ilustração da situação inicial do *applet* da versão interativa da atividade 2.

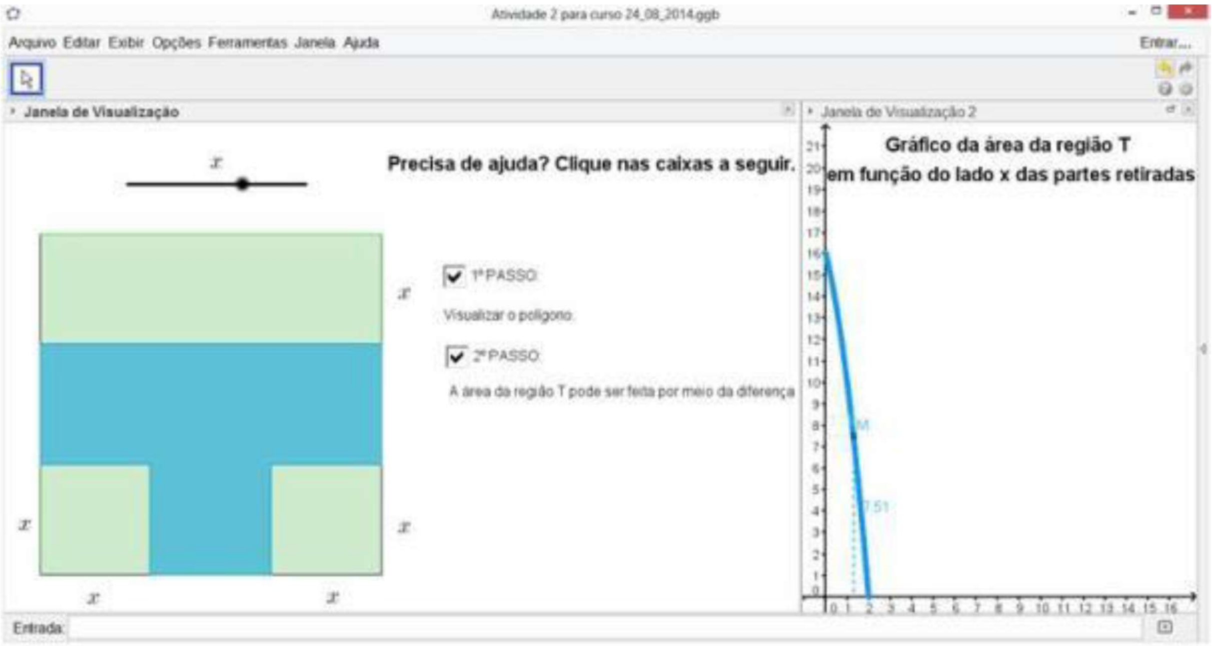


Figura 65 - Ilustração de situação intermediária do *applet* da versão interativa da atividade 2.

Observações gerais: Levando em consideração a grande dificuldade na construção da expressão analítica vista na atividade 1, alguns alunos apresentaram melhora neste sentido, tentando desenvolver a expressão através da diferença de áreas como proposto na primeira atividade. Na versão impressa os alunos não conseguiram visualizar que, quando os lados dos quadrados e do retângulo em verde aumentam, em algum momento ficam tão próximos que não podem mais aumentar e isso faz com que o valor de x não ultrapasse a medida de 2 centímetros. Já na versão interativa os alunos apresentaram mais facilidade no que diz respeito ao domínio da função. O aluno B faz uma colocação bem interessante a esse respeito: "*É como se dividisse o lado ao meio.*" Veremos a seguir.

4.3.2.1 Comentários das respostas dos alunos da versão impressa da atividade 2

Nesta atividade, tendo em vista que já haviam tido contato com outra atividade, eles tiveram uma preocupação maior em tentar resolver a versão impressa, principalmente o item (a), em que se pedia a expressão analítica da função.

O aluno B percebeu claramente a proposta do item (a), porém ao desenvolver o raciocínio ficou na dúvida com relação à área do retângulo e a representou como $4x^2$ ao invés de apenas $4x$. O mesmo ocorreu com o aluno F. Este equívoco ocorreu, segundo os alunos, por terem seguido o raciocínio da área dos quadrados dos cantos inferiores. Eles acreditaram que o retângulo da parte superior era formado por vários quadrados iguais aos da parte inferior da figura, como o lado mede 4 cm eles multiplicaram por 4.

Figura 66 - Resposta do aluno B para o item (a) da atividade 2 versão impressa.

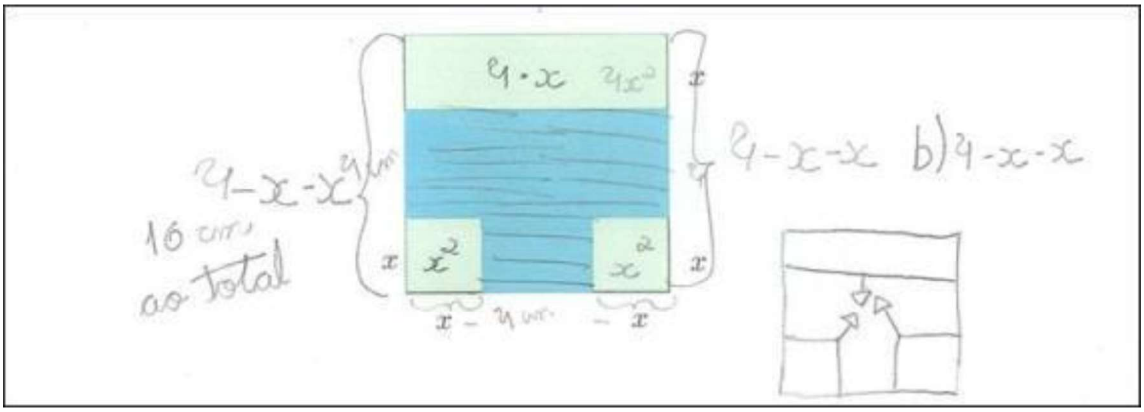


Figura 67 - Resposta do aluno B para o item (a) da atividade 2 versão impressa.

O aluno C também desenvolveu corretamente a decomposição da figura, mas além de não apresentar a conclusão da diferença de áreas cometeu alguns erros de sinais e de cálculos algébricos.

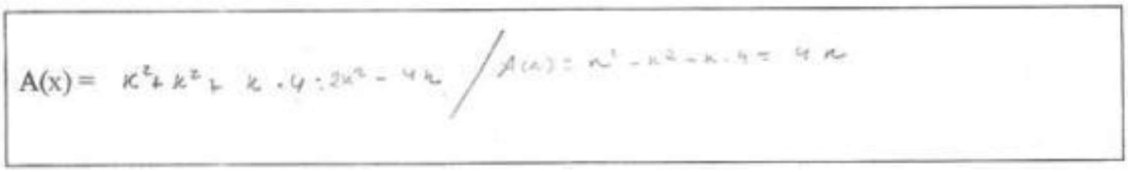


Figura 68 - Resposta do aluno C para o item (a) da atividade 2 versão impressa.

A expressão analítica apresentada pelo aluno A não faz referência à área do retângulo da parte superior da figura.

Figura 69- Resposta do aluno A para o item (a) da atividade 2 versão impressa.

Já os alunos D, E e G apresentaram respostas incompreensíveis para este item.

Figura 70- Resposta do aluno D para o item (a) da atividade 2 versão impressa.

Figura 71 - Resposta do aluno E para o item (a) da atividade 2 versão impressa.

Figura 72 - Resposta do aluno G para o item (a) da atividade 2 versão impressa.

Com relação ao item (b), que pede o domínio da função, os alunos tiveram muita dificuldade em perceber quais valores que a variável independente poderia assumir. "*O que eu não consigo pensar é o domínio da função ... Acho que é a maior dificuldade*" – disse o Aluno B.

Os alunos B, E, F e G responderam que o domínio da função era o intervalo fechado com extremos em x=0 e x=4. O lado do quadrado mede 4 cm e isso pode ter sido o fator que fez com que a maioria desse esta resposta para o domínio.Apesar de incorreta, essa resposta sinaliza algum progresso em relação à atividade anterior: os alunos já identificam a natureza da variável independente x (ela é o comprimento do lado de uma figura que tem como limitação o lado do quadrado). Faltou apenas observar que a partir de x=2, a situação geométrica descrita é inconsistente.

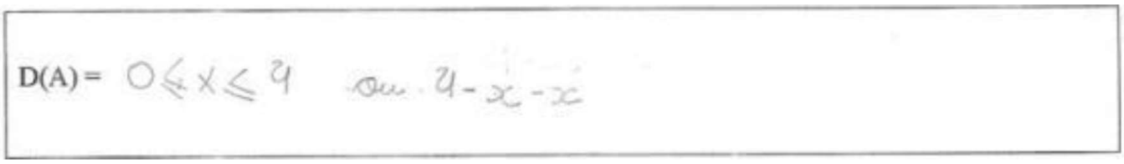


Figura 73 - Resposta do aluno B para o item (b) da atividade 2 versão impressa.

Já o aluno A, percebeu que a variação total de x era de 2 cm, porém não conseguiu identificar os extremos do intervalo de variação.

Figura 74 - Resposta do aluno A para o item (b) da atividade 2 versão impressa.

Os alunos C e D não responderam este item.

Com relação ao item (c) – em que se perguntava sobre o(s) valor(es) que a variável independente deve assumir para que o valor de T seja o maior possível. Os alunos A, B, E, F e G responderam que T era máximo para x= 4. Já com relação ao valor mínimo de T todos afirmaram que tal fato acontecia para x=0. Os alunos C e D não responderam e deixaram em branco o item (c). Assim, percebe-se que, apesar de os alunos não conseguirem determinar corretamente a expressão analítica da função, eles conseguem produzir significados com relação aos itens (c) e (d). Tal fato comprova que os alunos já conseguem analisar a situação problema considerando o contexto geométrico e dinâmico proposto, identificando (ainda que parcialmente) o significado das variáveis. Isso já representa um grande passo.

4.3.2.2 Comentários das respostas dos alunos da versão interativa da atividade 2

Com relação ao primeiro item, os alunos A, B e F mantiveram suas representações da expressão analítica da função. Os alunos C, D, E e G responderam ainda de maneira inconsistente este item. Os problemas de base em conteúdos de geometria e de álgebra elementar ainda persistem.

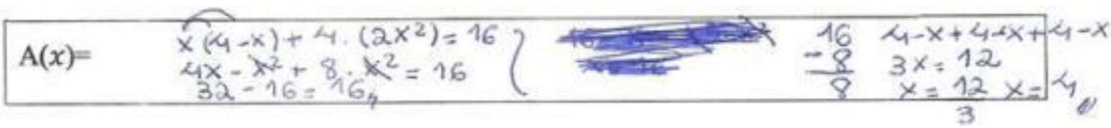


Figura 75 - Resposta do aluno D para o item (a) da atividade 2 versão interativa.

Além de fazer uma decomposição equivocada da figura, o aluno D demonstra estar ainda na fase de transição dos níveis aritmético-algébrico determinado por Cabral (1998).

Com relação ao item (b), os alunos A, B, F e G representaram o domínio como a maioria havia representado na versão impressa.

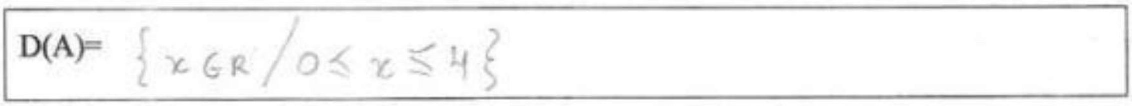


Figura 76 - Resposta do aluno A para o item (b) da atividade 2 versão interativa.

O aluno C apresentou uma resposta truncada que sugere o intervalo [2,4] como resposta.

Figura 77 - Resposta do aluno C para o item (b) da atividade 2 versão interativa.

Os alunos D e E conseguiram identificar claramente a variação da variável independente, com diferença apenas na indicação de suas respostas.

Figura 78 - Resposta do aluno D para o item (b) da atividade 2 versão interativa.

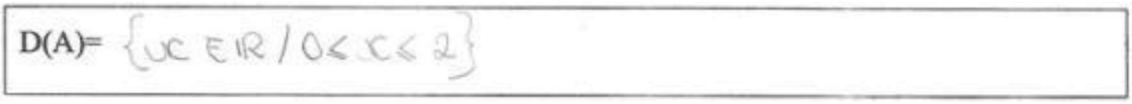


Figura 79 - Resposta do aluno E para o item (b) da atividade 2 versão interativa.

Os alunos A, B, C e F responderam que a maior área ocorria foi para x = 4. O aluno D deu como resposta o valor máximo da função (a área máxima) e não o valor que x deve assumir para que tal fato ocorresse. Já os alunos E e G afirmaram que a figura assume área máxima quando x =2.

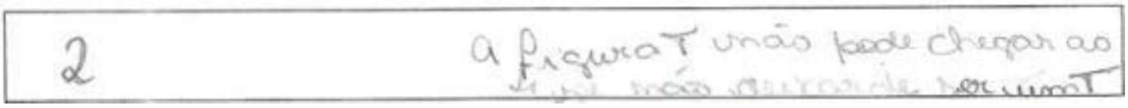


Figura 80 - Resposta do aluno G para o item (c) da atividade 2 versão interativa.

Os alunos A, B, E e F responderam que para que a área seja mínima a variável independente deve ser x = 0. Já os alunos C e D afirmam que a resposta para x deve ser 2.

É muito interessante como alguns alunos evoluíram com relação à tarefa de determinar a expressão analítica do problema. Com base nas respostas dos alunos (ainda que incorretas) já podemos perceber um indicador da passagem de suas atitudes do nível aritmético para o nível algébrico, visto que já começam a perceber a necessidade de se trabalhar com todos os valores possíveis para a variável independente. Contudo, percebe-se claramente nas atitudes dos estudantes que os seus conhecimentos básicos de geometria e de álgebra elementar são, com efeito, os grandes obstáculos para encontrar a expressão analítica correta para a função.

Cabe destacar ainda que para dois alunos do grupo o uso do aplicativo contribuiu para a resolução do item (b).

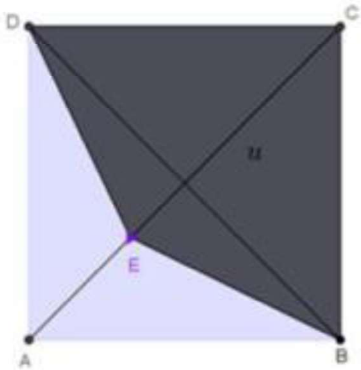
Correção das atividades

Os alunos apresentaram grande interesse por esta atividade por perceber a similaridade com a atividade anterior e ver possibilidades de resolver usando a mesma ideia. Durante a correção do item (b) da atividade, os alunos A, B e F afirmaram que haviam percebido a ausência do "T" nas situações extremas x=0 e x=2, no momento em que resolviam esta questão na versão interativa, mas não seguiram a sua intuição. Talvez isto se justifique pelo fato de não estarem habituados com este tipo de questão.

4.3.3 - Atividade 3

Atividade 3 – Versão impressa

Na figura, visualiza-se o quadrado ABCD de lado medindo 4 centímetros e um polígono cinza, EBCD, que varia de tamanho à medida que deslocamos o vértice E ao longo da diagonal do quadrado. A variável u representa o comprimento do segmento EC.



a) Determine a área S do polígono EBCD em função de u.

b) Determine o domínio da função.

c) Determine o(s) valor(es) de u, caso existam, para os quais a área do polígono EBCD é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de u, caso existam, para os quais a área do polígono EBCD é mínima.

Figura 81 - Ilustração da versão impressa da atividade 3

Atividade 3 - Versão interativa

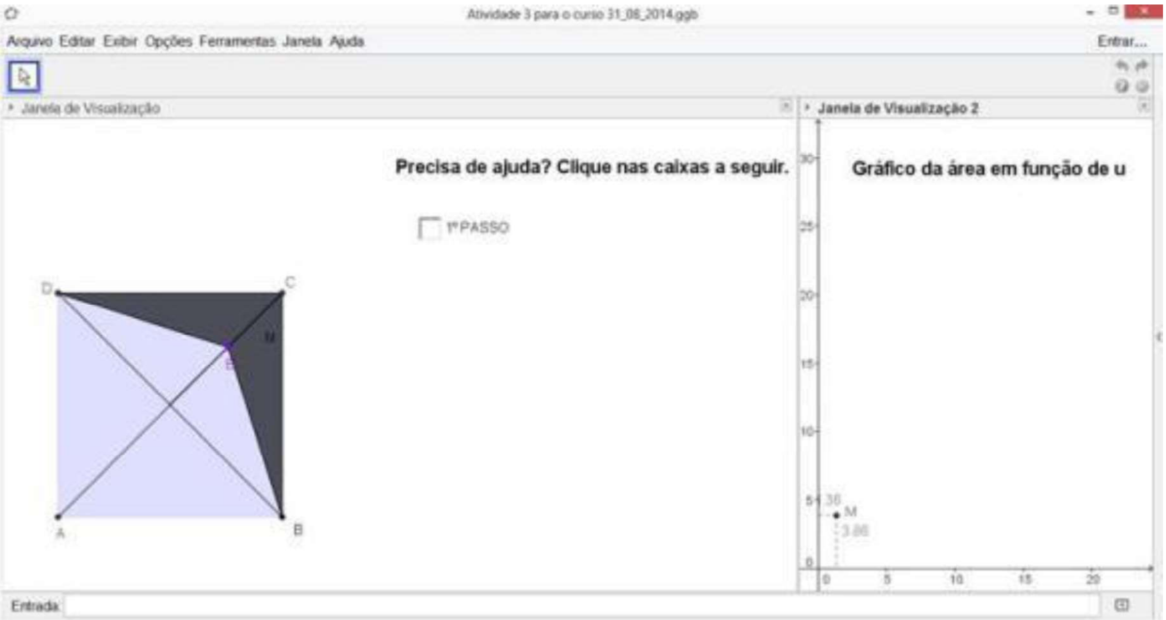


Figura 82 - Ilustração da situação inicial do *applet* da versão interativa da atividade 3.

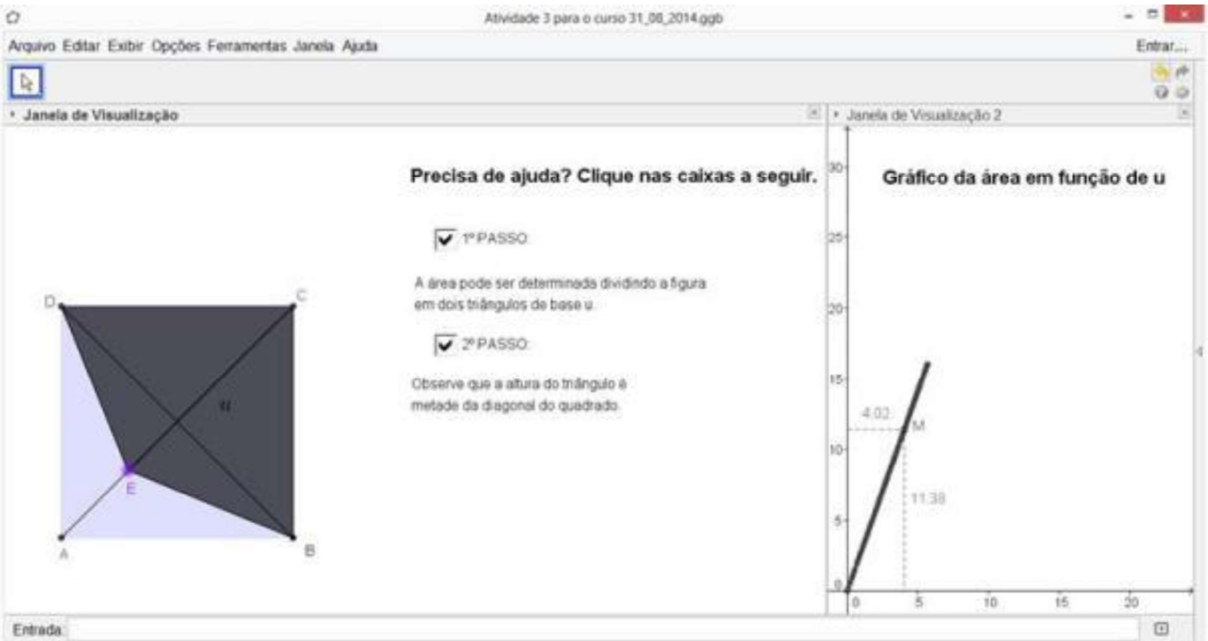


Figura 83 - Ilustração de situação intermediária do *applet* da versão interativa da atividade 3.

Observações gerais: Devido a correção da atividade 2, onde apareceram fatos novos com relação ao domínio da função, alguns alunos mostraram-se preocupados em fazer uma análise mais cuidadosa dos extremos do domínio. Esta atividade é muito diferente das duas anteriores no que diz respeito a perceber a variação da variável independente, pelo fato desta ocorrer sobre a diagonal do quadrado e não sobre seus lados. Apesar das dificuldades que os alunos tiveram em analisar essa variação, pôde-se perceber alguns resultados bem significativos, como veremos a seguir.

4.3.3.1 Comentários das respostas dos alunos da versão impressa da atividade 3

O aluno B apresentou como resposta para o item (a) a expressão analítica S(u) =$\sqrt{2}\ u$. O único erro foi esquecer que a figura possuia dois triângulos iguais, ou seja, deveria multiplicar a resposta encontrada por dois.

Figura 84 - Resposta do aluno B para o item (a) da atividade 3 versão impressa.

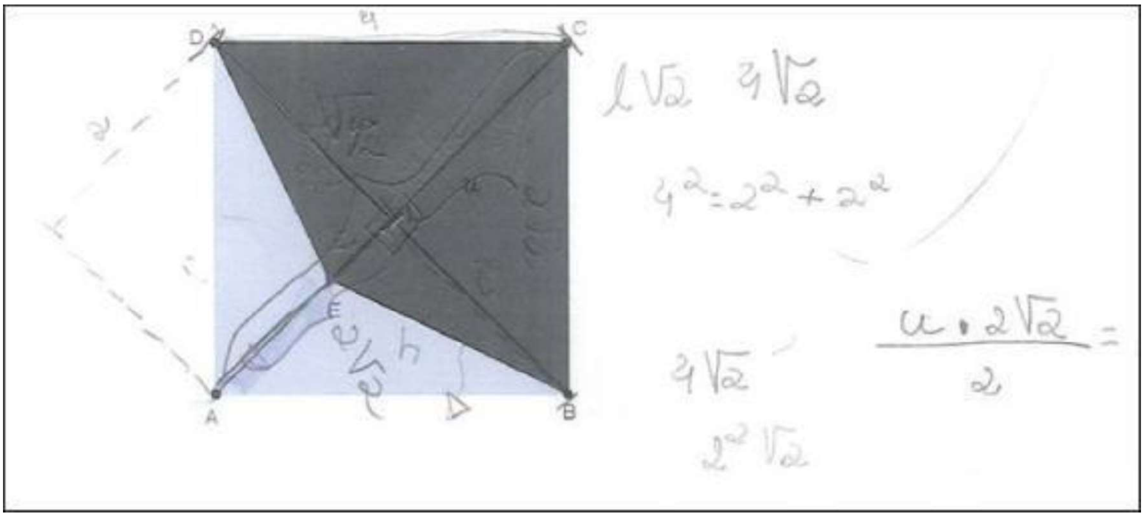


Figura 85- Desenvolvimento do aluno B para a atividade 3 item(a) versão impressa

Já o aluno A deduziu que todas as atividades iam seguir a mesma forma de resolução e tentou encontrar a solução através da diferença de áreas.

Figura 86–Resposta do aluno A para o item (a) da atividade 3 versão impressa.

Os alunos C, D e G apresentaram respostas incoerentes para o item (a).

$S(u) =$ $4^2 + 4^2 = X^2$ $\quad A_T = 16$
$16 + 16 = X^2$
$X^2 = 32$

Figura 87- Resposta do aluno D para o item (a) da atividade 3 versão impressa.

Os alunos E e F não responderam a este item.

No item (b) apenas o aluno B notou que a variável ***u*** estava variando sobre a diagonal, mas não identificou os extremos do domínio de forma correta.

$D(S) = \{u \in R \,/\, 2\sqrt{2} \geq u \leq 4\sqrt{2}\}$

Figura 88- Resposta do aluno B para o item (b) da atividade 3 versão impressa.

Os alunos C, D e G apresentaram respostas incoerentes. O aluno D, por exemplo, representa o domínio considerando a variação dos valores da variável independente sobre o lado do quadrado como nas atividades anteriores.

$D(S) = \{x \in R \;\; 0 < x < 4\}$

Figura 89–Resposta do aluno D para o item (b) da atividade 3 versão impressa.

O item (c) foi respondido corretamente pelos alunos B e G.

$4\sqrt{2}$

Figura 90 - Resposta do aluno B para o item (c) da atividade 3 versão impressa.

Apesar de ter sido ressaltado na correção das atividades anteriores que era o valor da variável independente que fornecia o valor máximo da função, os alunos D e E apresentaram como resposta o valor máximo da função.

16,,

Figura 91 - Resposta do aluno D para o item (c) da atividade 3 versão impressa.

Os alunos A e C consideram o ponto "mais alto" sobre a diagonal AC da figura como o ponto de máximo. Concluíram que não existe ponto de máximo, pois para este valor o "polígono some." Em verdade a situação ótima descrita pelos alunos corresponde ao ponto de mínimo da função, sendo o ponto "mais alto" correspondente ao menor valor que a variável independente pode assumir (u=0).

Figura 92 - Resposta do aluno A para o item (c) da atividade 3 versão impressa.

Os alunos E, B, C, D e G responderam corretamente o item (d). Apesar do aluno A apresentar uma solução diferente dos outros colegas, afirmando não existir polígono. Podemos considerar que ele também respondeu este item de forma correta.

Figura 93 - Resposta do aluno A para o item (d) da atividade 3 versão impressa.

É importante ressaltar nesta atividade que o valor do ponto de mínimo coincide com o valor mínimo desta função, com isso a solução pode ter sido dada pensando no valor mínimo e não no valor que assume a variável ***u*** no momento em que este valor é mínimo. Portanto, esta atividade não permite a análise precisa com relação ao fato do aluno estar se referindo ao ponto ou ao valor mínimo da função.

4.3.3.2 Comentários das respostas dos alunos da versão interativa da atividade 3

Nesta versão os alunos apresentaram respostas muito significativas. Gostaríamos de destacar a resposta correta dada pelo aluno G ao item (a).

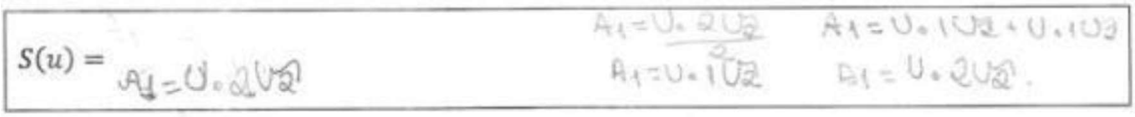


Figura 94 - Resposta do aluno G para o item (a) da atividade 3 versão interativa.

Ao analisar as respostas dos alunos tomando como referência os resultados obtidos por Cabral (1998), percebemos que o aluno G conseguiu chegar ao nível funcional e apresentou corretamente a solução da expressão analítica.

Curiosamente o aluno B, que havia respondido de forma coerente no item (a) da versão impressa, apresentou sua resposta para esta versão no nível aritmético. Talvez essa atitude do aluno seja consequência da visualização de uma situação ótima possibilitada pelo Geogebra.

Figura 95 - Resposta do aluno B para o item (a) da atividade 3 versão interativa.

Os alunos E e F deixaram este primeiro item em branco. As respostas dos alunos A, C e D para este item foram totalmente incongruentes com o enunciado da questão.

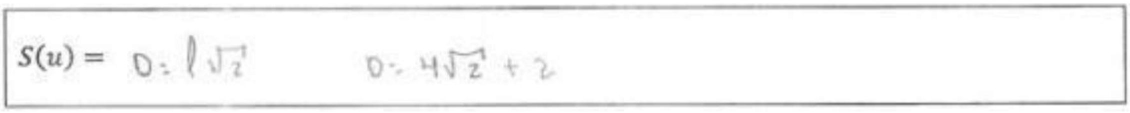


Figura 96 - Resposta do aluno A para o item (a) da atividade 3 versão interativa.

Para o item (b), os alunos A e D consideraram valores aproximados vistos no gráfico da janela de visualização 2 em suas respostas.

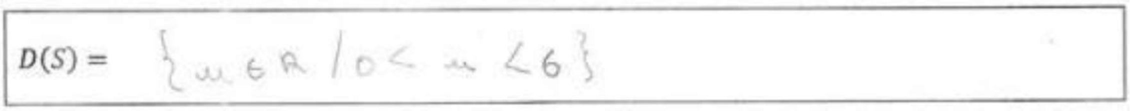


Figura 97 - Resposta do aluno A para o item (b) da atividade 3 versão interativa.

Já os alunos B e F apresentaram suas respostas com base na visualização do gráfico da função na janela de visualização 2. Consideraram o maior valor atribuído a u como sendo um dos extremos do intervalo que representa o domínio da função.

Figura 98 - Resposta do aluno B para o item (b) da atividade 3 versão interativa.

Todos os demais alunos apresentaram respostas incongruentes com o enunciado da questão.

Figura 99 - Resposta do aluno E para o item (b) da atividade 3 versão interativa.

Figura100 - Resposta do aluno C para o item (b) da atividade 3 versão interativa.

Para o item (c) os alunos, mais uma vez, esqueceram que o que se pedia era o ponto de máximo e não a área máxima. Os alunos C, D, E e G assumiram como solução o valor máximo da função.

Os alunos B e F usaram o valor aproximado pelo gráfico ***u*** =5,66 que é a melhor aproximação dada pelo *applet* produzido para a atividade. Já o aluno A manteve sua resposta dada na versão impressa, afirmando que não existe a área máxima.

Com relação ao item (d) os alunos A, B, D e G acertaram como no caso da versão impressa.

O aluno F afirmou que ***u***> 0, ou seja, ele percebeu que ***u*** não pode assumir o valor zero. Mas por outro lado também afirmou que existe um valor [de *u*] para o qual a função assume valor mínimo, mas que não é o zero. Como o valor do ponto de mínimo e o valor mínimo da função são ambos iguais a zero, não se consegue concluir sobre à qual deles o valor zero dado como resposta está se referindo.

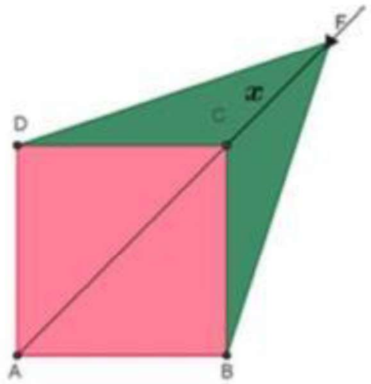
Correção das atividades

Acreditamos que a maior dificuldade apresentada para os alunos nesta atividade foi o fato da variável independente assumir valores sobre a diagonal do quadrado, o que não é uma situação geométrica muito usual para eles.

4.3.4 - Atividade 4

Atividade 4 – Versão impressa

Na figura, visualiza-se o quadrado ABCD de lado medindo 6 centímetros e um polígono verde, BCDF, que varia de tamanho à medida que deslocamos a seta F ao longo da semirreta, originada pelo prolongamento da diagonal do quadrado. A variável x representa o comprimento do segmento CF.



a) Determine a área A do polígono BCDF em função de x.

b) Determine o domínio da função.

c) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do polígono BCDF é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do polígono BCDF é mínima.

Figura 101 - Ilustração da versão impressa da atividade

Atividade 4 - Versão interativa

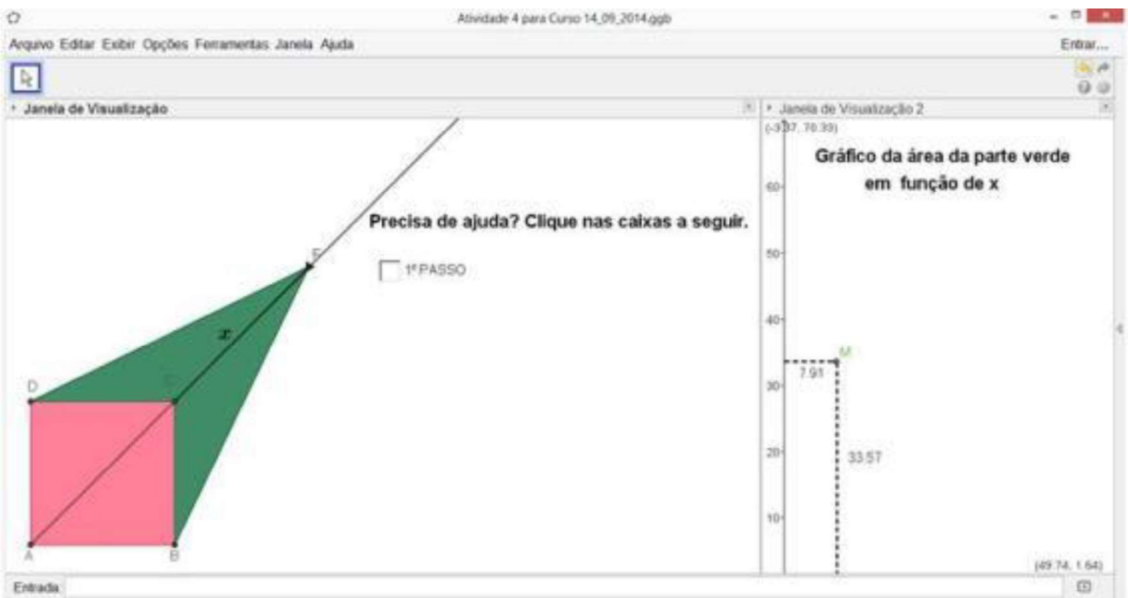


Figura 102-Ilustração da situação inicial do *applet* da versão interativa da atividade 4

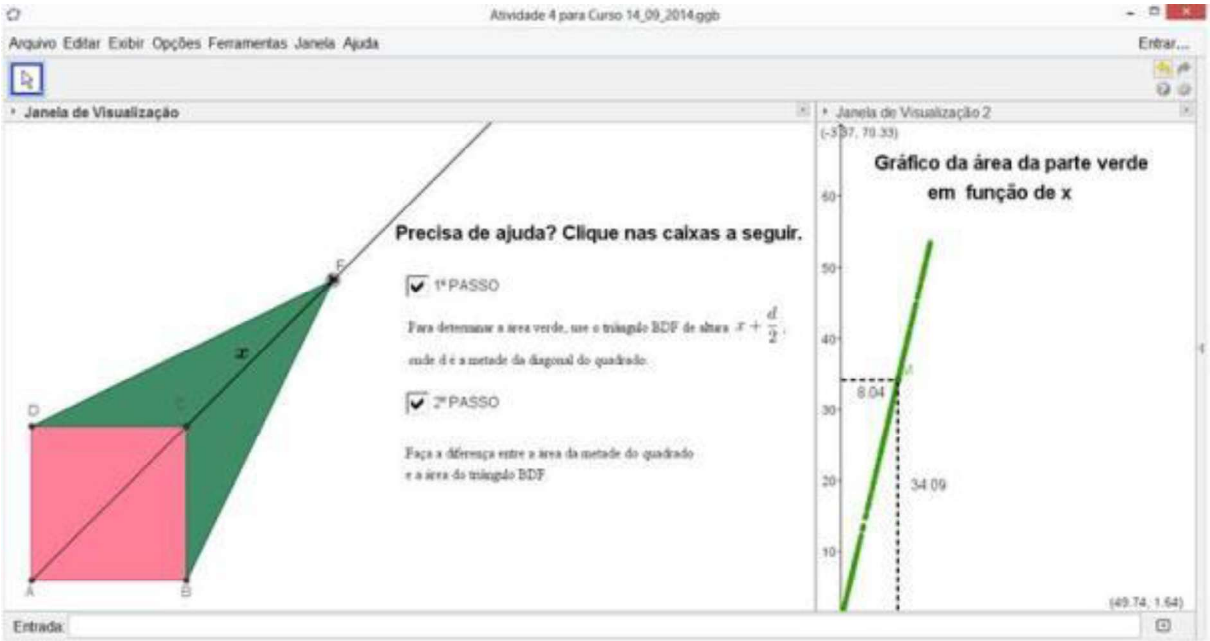


Figura 103-Ilustração de situação intermediária do *applet* da versão interativa da atividade 4.

Observações gerais: Esta atividade foi a primeira que apresentou uma função cujo domínio não era limitado superiormente. Logo, tanto na versão impressa quanto na versão interativa houve grande dificuldade na percepção desse fato. Além disso, na versão interativa os alunos apresentaram dificuldade em representar o domínio, mas alguns outros perceberam que os valores da variável independente são maiores que zero.

Esta atividade gerou dúvidas nos alunos durante a aplicação por parecer que a movimentação do ponto F poderia ir até o prolongamento da semirreta no ponto A. Porém a pesquisadora orientou os alunos e pediu que considerassem o movimento do ponto F apenas até o ponto C.

4.3.4.1 Comentários das respostas dos alunos da versão impressa da atividade 4

Na resolução do item (a) os alunos A e B determinaram corretamente a função.

Figura 104 – Resposta do aluno B para o item (A) da atividade 3 versão impressa.

Já o aluno F esqueceu que eram dois triângulos e não multiplicou por 2 a área encontrada.

O aluno G apresentou uma resposta muito próxima da correta, porém multiplicou por 6.

$A(x) = \frac{(6\sqrt{2}\cdot x)\cdot 6}{2}$

Figura 105 - Resposta do aluno G para o item (a) da atividade 4 versão impressa.

Os alunos C e D tiveram respostas inconsistentes e o aluno E não respondeu. Ver figuras 84 e 85 respectivamente.

$A(x) = \frac{18\sqrt{2}x}{2} = 9\sqrt{2}x \quad 36\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = 27\sqrt{2}$

Figura 106 - Resposta do aluno C para o item (a) da atividade 4 versão impressa.

$A(x) = \quad A = 6^2 = 36 \quad \frac{36x}{2} = \quad x = 18 \quad LQ = \ell^2 \quad LQ = 36$

Figura 107 - Resposta do aluno D para o item (a) da atividade 4 versão impressa.

No item (a), já se nota um avanço nas atitudes dos alunos A, B e G que apresentam suas respostas no nível funcional.

Já no item (b), apenas o aluno B respondeu corretamente, apesar de ter feito a representação um pouco fora da usual.

$D(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$

Figura 108 - Resposta do aluno B para o item (b) da atividade 4 versão impressa.

Os alunos A, F e G reconheceram que os valores da variável independente eram maiores que zero, no entanto, limitaram o domínio da função. Os alunos A e G utilizaram o valor do comprimento do quadrado como cota superior para o domínio da função.

$D(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 6\}$

Figura 109 - Resposta do aluno A para o item (b) da atividade 4 versão impressa.

O aluno F, curiosamente, usou o valor $7\sqrt{2}$como cota superior. Disse que utilizou a régua para encontrar a sua resposta. Ao ser questionado pela pesquisadora, o aluno não soube justificar o procedimento adotado.

Figura 110 - Resposta do aluno F para o item (b) da atividade 4 versão impressa.

Os alunos C, D, E e H desistiram de determinar o domínio da função.

Com relação ao item (c), os alunos C, D, G e H desistiram da tarefa de determinar o valor de x para o qual a área do polígono BCDF é máxima.

Para este item, o aluno A deu como resposta o valor x= 3, justificando tal fato dizendo que “o tamanho da parte que possui x é um pouco menor que a diagonal”. Os alunos B e F responderam de forma inconsistente, já o aluno E deixou a atividade em branco.

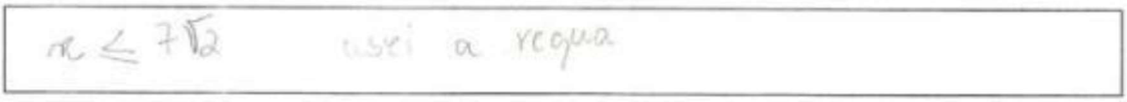


Figura 111 - Resposta do aluno F para o item (c) da atividade 4 versão impressa.

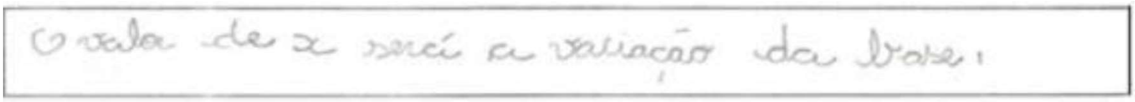


Figura 112 - Resposta do aluno B para o item (c) da atividade 4 versão impressa.

No item (d), os alunos A, B e D responderam corretamente. O aluno C afirmou que o ponto de mínimo é x=6. Os alunos E, G e H deixaram em branco e o aluno F afirmou que x>0.

4.3.4.2 Comentários das respostas dos alunos da versão interativa da atividade 4

Assim como na versão impressa, o aluno B respondeu corretamente. Já o aluno A esqueceu de multiplicar por 2. O aluno G apresentou uma resposta bem mais consistente, porém cometeu alguns erros algébricos.

$A(x) = 3\sqrt{2} \cdot x + 1{,}5\sqrt{2}$

Figura 113 - Resposta do aluno G para o item (a) da atividade 4 versão interativa.

Os alunos C, D e F produziram respostas no nível aritmético e o aluno E respondeu de forma inconsistente.

$A(x) = \dfrac{b \cdot h}{2}$

Figura 114 - Resposta do aluno E para o item (a) da atividade 4 versão interativa.

Com base nessas observações, percebe-se que os alunos C, D, E e F ainda elaboram suas soluções no nível aritmético.

No item (b) os alunos E e G explicitaram o limite superior do domínio como sendo o maior valor possível de se visualizar na tela do Geogebra.

O aluno B permaneceu correto e os alunos A, C e F pensaram o correto, porém fizeram uma representação errada do ponto de vista matemático.

$D(A) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < x < \infty\}$

Figura 115 - Resposta do aluno F para o item (b) da atividade 4 versão interativa.

Apesar de representarem com certa dificuldade um domínio positivo,eles tiveram uma boa visualização através do Geogebra.

O item(c) o aluno A respondeu corretamente. Já os alunos C, D, F e H responderam " infinito".

Já os alunos E e G , de mesma forma que na letra B mantiveram coerência com o domínio dizendo que x = 12.

No item (d) apenas os alunos E e F tiveram respostas incoerentes, os demais responderam corretamente o valor de x para o qual a área do polígono BCDF era mínima.

Nesta atividade os alunos A e B representaram corretamente a expressão analítica podendo assim serem classificados seguindo a ideias de Cabral (1998), como alcançando o nível funcional.

Correção das versões

Os alunos conseguiram acompanhar a correção de forma participativa – respondendo as perguntas oralmente. Percebe-se que apesar das dificuldades eles já estão acompanhando e entendendo o passo a passo da solução.

4.3.5 - Atividade 5

Atividade 5 – Versão impressa

Um granjeiro utilizou 100 metros lineares de tela para cercar um terreno retangular:

x

a) Obter a lei $y = f(x)$ que expressa a área y, em metros quadrados, do terreno em função da medida x, em metros, da base do retângulo.

b) No contexto do problema, qual é o domínio da função f obtida no ítem a?

c) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do retângulo é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do retângulo é mínima.

Figura 116-Ilustração da versão impressa da atividade 5

Atividade 5 - Versão interativa

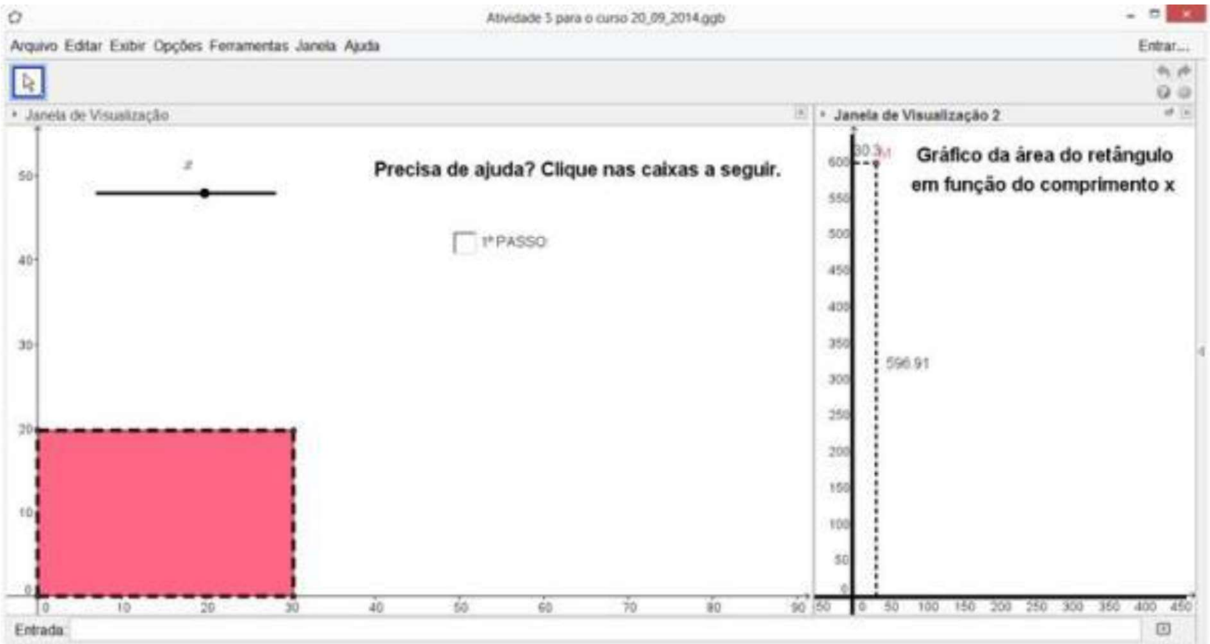


Figura 117-Ilustração da situação inicial do *applet* da versão interativa da atividade 5.

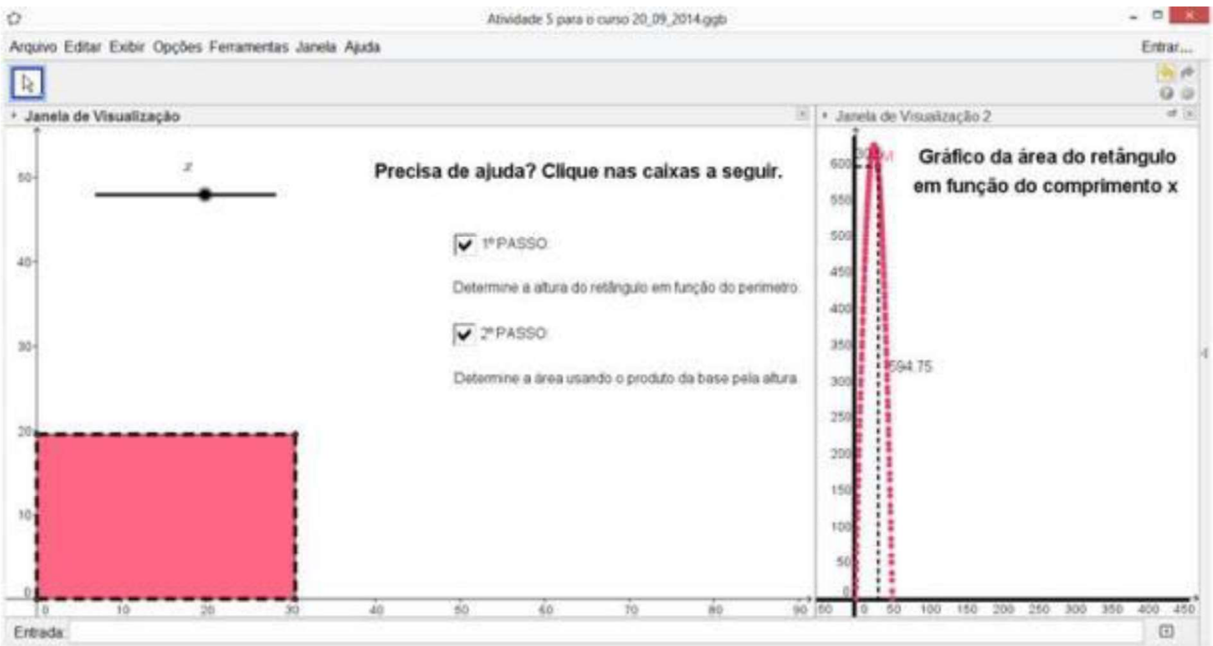


Figura 118-Ilustração de situação intermediária do *applet* da versão interativa da atividade 5.

Observações gerais: Esta atividade apresentou uma novidade para os alunos no que diz respeito ao ponto de máximo. Nas atividades anteriores os pontos de máximo e mínimo coincidiam com os extremos da função, o que não ocorre neste caso. É notável, ao longo desta análise, o desenvolvimento do conceito de máximo e mínimo pelos alunos ao comparar com as atividades anteriores.

4.3.5.1 Comentários das respostas dos alunos da versão impressa da atividade 5

Para a versão impressa os alunos C, E, F e H deixaram todos os itens em branco.

O item (a) pedia para determinar a expressão analítica da função e diferente de todas as atividades anteriores, os alunos não conseguiram nem desenvolver uma ideia coerente para este item. O aluno D não respondeu este item. Apesar de muitas tentativas nenhum aluno conseguiu desenvolver uma solução coerente. Segue abaixo as tentativas dos alunos A, B e G. Figuras 119, 120 e 121 respectivamente.

Figura 119 - Resposta do aluno A para o item (a) da atividade 5 versão impressa.

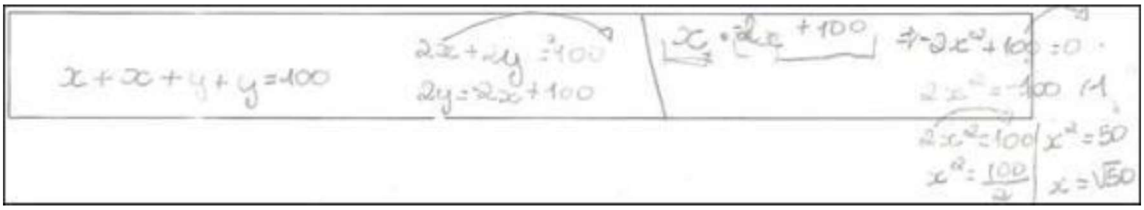


Figura 120 - Resposta do aluno B para o item (a) da atividade 5 versão impressa.

Figura 121 - Resposta do aluno G para o item (a) da atividade 5 versão impressa.

O aluno B apresentou uma resposta muito bem encaminhada, mas infelizmente não consegui concluir seu raciocínio.

No item (b), como perímetro é igual a 100 metros foi interpretado pelo aluno A como sendo exatamente o domínio da função.

Figura 122- Resposta do aluno A para o item (b) da atividade 5 versão impressa.

O aluno B respondeu de forma incoerente ao trabalhar com o símbolo que representa o infinito.

Figura 123 - Resposta do aluno B para o item (b) da atividade 5 versão impressa.

O aluno D representou corretamente este domínio.

Figura 124 - Resposta do aluno B para o item (b) da atividade 5 versão impressa.

O item (c) que pedia o ponto de máximo, os alunos A e G responderam x=100 e o aluno B respondeu que o valor de x vai para o infinito e o aluno D que x =26. O aluno D foi o único que conseguiu se aproximar da reposta.

Os alunos A, B, D e G responderam o item (d) como x=0.

Esta atividade foi retirada de um livro didático do 1° ano de ensino médio. Infelizmente os alunos não foram ou não estão preparados para desenvolver este tipo de questão usando os “métodos tradicionais”. Com isso ficou clara a dificuldade de se trabalhar com esta questão sem o auxilio do *applets* Geogebra.

4.3.5.2 Comentários das respostas dos alunos da versão interativa da atividade 5

Na versão interativa, o aluno B foi o único aluno que conseguiu desenvolver algo diferente do item (a). Na verdade ele se utilizou da solução feita na versão impressa desta mesma atividade.

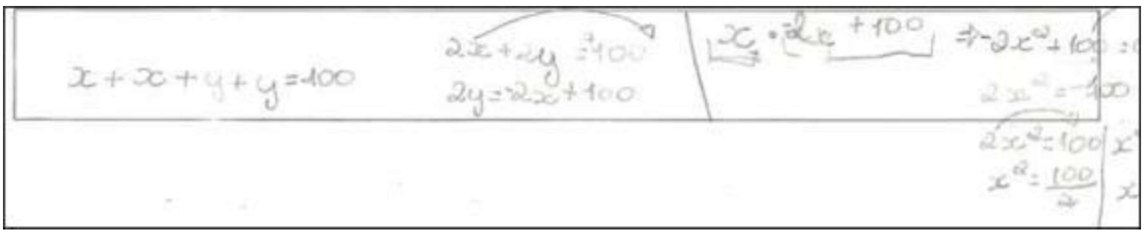


Figura 125 - Resposta do aluno B para o item (a) da atividade 5 versão interativa.

O aluno desenvolveu corretamente a primeira parte achando uma equação para o perímetro, mas não conseguiu finalizar a expressão analítica (figura 125).

O item (b), nesta versão, foi mais explorado por alguns alunos que conseguiram entender o que acontecia com a figura, apesar dos equívocos.

O aluno B erroneamente escreveu o domínio terminando no ponto de máximo do retângulo e o Aluno A conseguiu chegar ao domínio, mas não se atentou aos extremos.

Figura 126 - Resposta do aluno B para o item (b) da atividade 5 versão interativa

.

Figura 127 - Resposta do aluno A para o item (b) da atividade 5 versão interativa.

O aluno C escreveu o domínio de 0 a 50 e apagou em seguida por acreditar que estava errado. O aluno F também afirmou que o domínio estava variando de 0 a 50, porém aberto no 0 e fechado no 50. E por fim, o aluno H deixou este item em branco.

No item (c) o Aluno H conseguiu perceber que a figura representava um quadrado no ponto de máximo.

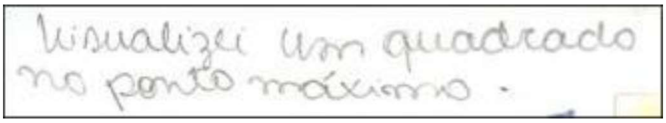


Figura 128 - Resposta do aluno H para o item (b) da atividade 5 versão interativa.

Os alunos A, B, F e G responderam corretamente x= 25 e os alunos C e H responderam x=26 por não conseguirem a precisão no Geogebra, mas entenderam que o ponto de máximo era o ponto mais alto daquele gráfico. Vale ressaltar como o Geogebra permitiu a esses alunos desenvolverem a ideia de máximo desta questão. Um item, que na versão impressa havia sido pouco explorado, agora é resolvido pela maioria dos alunos e por quatro deles de forma correta. Os dois alunos que deram como resposta x =26 também já estão entendendo a proposta do ponto de máximo. Apenas não conseguiram a precisão do ponto no Geogebra.

Os alunos A, B, C e G responderam corretamente ao item (d). Se observarmos este item da mesma forma que o anterior os alunos também conseguiram respostas bem mais coerentes com relação às dadas para a versão impressa.

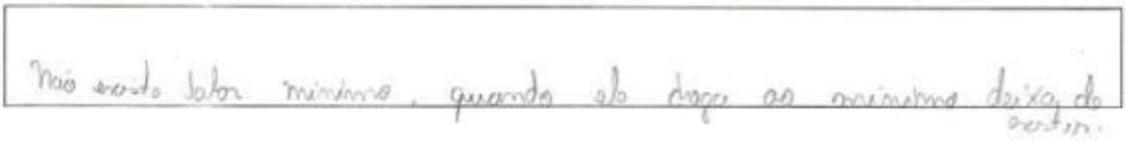

Não existe valor mínimo, quando ele chega ao mínimo deixa de existir.

Figura 129 - Resposta do aluno A para o item (d) da atividade 5 versão interativa.


não existe

Figura 130 - Resposta do aluno C para o item (d) da atividade 5 versão interativa.

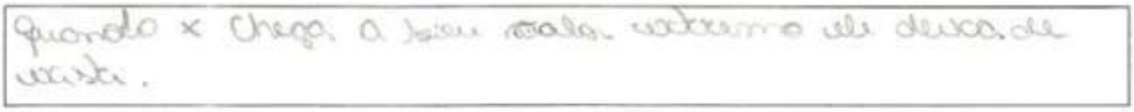

Quando x chega a seu valor extremo ele deixa de existir.

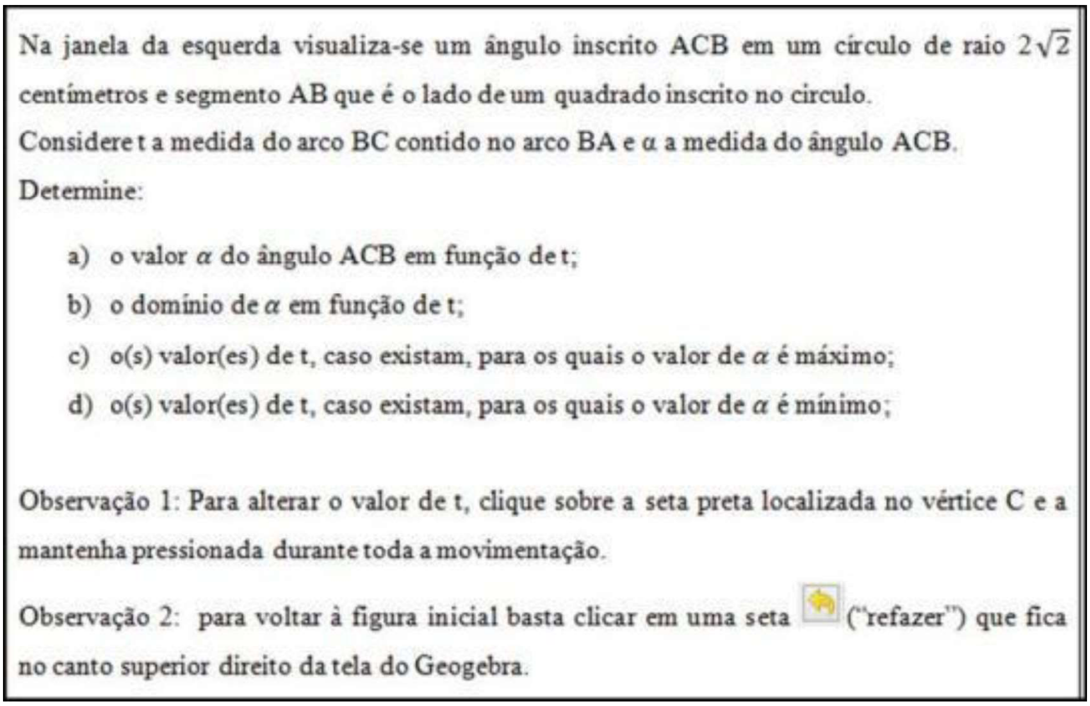
Figura 131 - Resposta do aluno G para o item (d) da atividade 5 versão interativa.

Correção das versões

Alguns alunos apresentaram dificuldade em entender como determinar a expressão analítica mesmo após a correção. Os demais itens foram bem entendidos pelos alunos.

4.3.6 - Atividade 6

Atividade 6 – Orientações para a realização da atividade interativa


Na janela da esquerda visualiza-se um ângulo inscrito ACB em um círculo de raio $2\sqrt{2}$ centímetros e segmento AB que é o lado de um quadrado inscrito no circulo.

Considere t a medida do arco BC contido no arco BA e α a medida do ângulo ACB.

Determine:

a) o valor α do ângulo ACB em função de t;
b) o domínio de α em função de t;
c) o(s) valor(es) de t, caso existam, para os quais o valor de α é máximo;
d) o(s) valor(es) de t, caso existam, para os quais o valor de α é mínimo;

Observação 1: Para alterar o valor de t, clique sobre a seta preta localizada no vértice C e a mantenha pressionada durante toda a movimentação.

Observação 2: para voltar à figura inicial basta clicar em uma seta ("refazer") que fica no canto superior direito da tela do Geogebra.

Figura 132 - Ilustração da versão interativa da atividade 6

Atividade 6 - Versão interativa

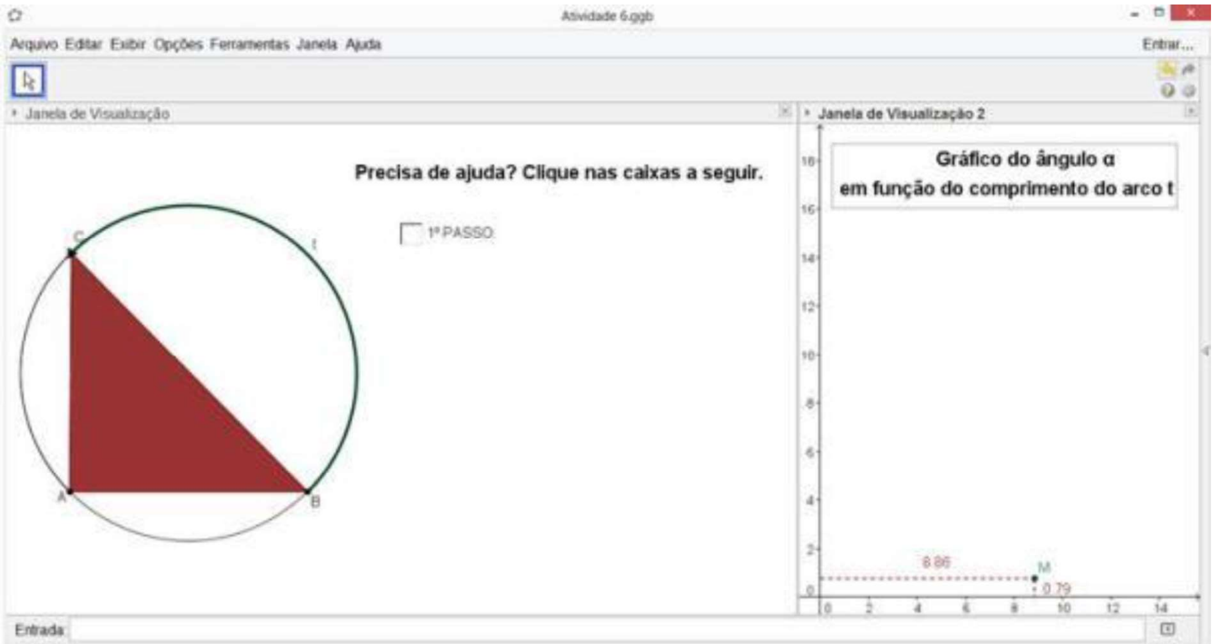


Figura 133- Ilustração da situação inicial do *applet* da versão interativa da atividade 6.

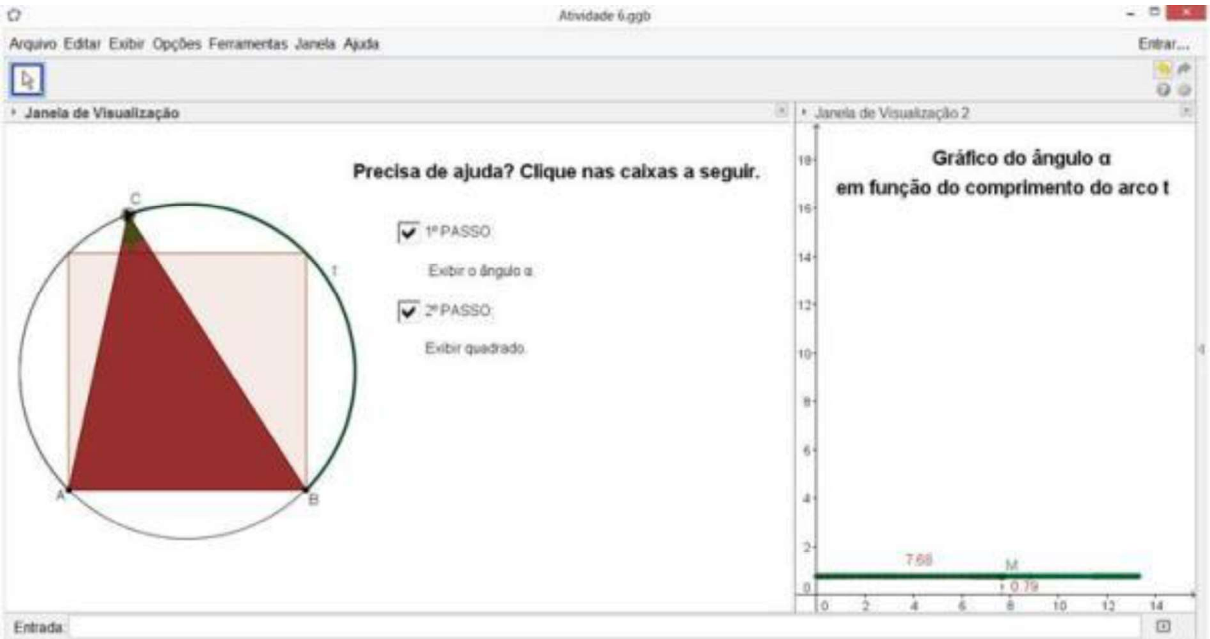


Figura 134 - Ilustração de situação intermediária do *applet* da versão interativa da atividade 6.

Observações gerais: Ao apresentar a revisão de vinte minutos foram dados alguns exemplos de polígonos inscritos em um círculo. O intuito era facilitar o entendimento desta atividade que aparece com toda a dinâmica diferente das demais abordadas até o momento. Além de ser uma atividade diferente por conter o círculo, esta atividade possui uma função constante que também não apareceu nas atividades anteriores.

Esta atividade, e todas as que virão a partir de agora, apresenta apenas a versão interativa.

4.3.6.1 Comentários das respostas dos alunos da versão interativa da atividade 6

Ao tentar resolver o item (a), os alunos A, B e D desenvolveram corretamente suas respostas. Ao observar a resposta dada pelo aluno D (ver figura 135) fica muito clara a evolução do aluno com relação a determinar a expressão analítica a partir de uma situação problema.

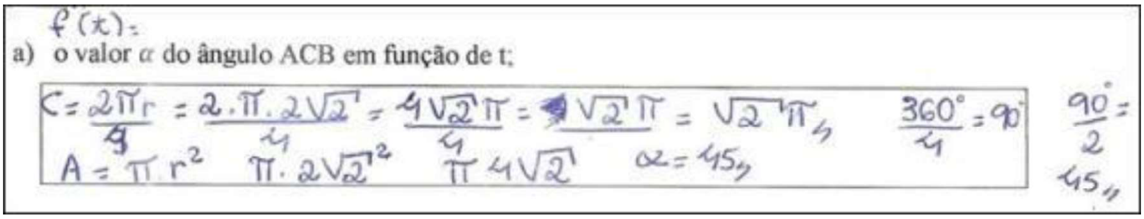


Figura 135 - Resposta do aluno D para o item (a) da atividade 6 versão interativa.

Observamos dois alunos (C e G) que apresentaram suas respostas de forma inadequada para a pergunta apresentada e os alunos E e F desistiram deste item. O aluno C tentou criar uma expressão, mas não conseguiu concluir seu raciocínio. E o aluno G respondeu com se o ângulo α variasse de 0° a 90°. (ver figura 136 e 137)

Figura 136 - Resposta do aluno C para o item (a) da atividade 6 versão interativa.

Figura 137 - Resposta do aluno G para o item (a) da atividade 6 versão interativa.

Podemos observar que o item (b) foi respondido pelos alunos A, B e D corretamente. O mais interessante é que eles olharam para o gráfico da função e analisaram o momento em que o valor some. Desta forma todos colocaram o intervalo aberto. Nesta atividade fica claro que eles já estão utilizando o software a favor deles para conseguir responder os itens.

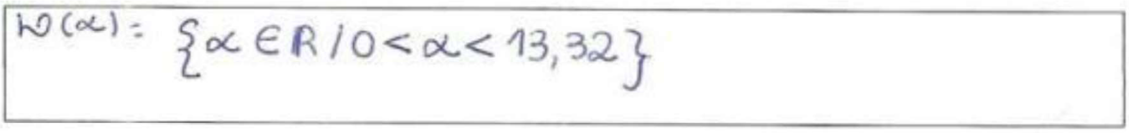


Figura 138 - Resposta do aluno D para o item (b) da atividade 6 versão interativa.

Os alunos C e E desistiram de determinar o domínio da função e os alunos F e G tiveram respostas incongruentes. Isto ocorre por que estes alunos ainda não conseguiram olhar para a situação proposta e perceber toda a potencialidade do software Geogebra.

Figura 139 - Resposta do aluno G para o item (b) da atividade 6 versão interativa.

Figura 140 - Resposta do aluno F para o item (b) da atividade 6 versão interativa.

Já o item (c), em sua maioria, os alunos responderam seguindo o extremo do domínio. Logo, a maioria dos alunos afirmou que a função tinha ponto de máximo e que era 13,32. O aluno C desistiu e o aluno F respondeu de forma incongruente ao afirmar que $t < 8$. Vale ressaltar que este item não apresenta ponto de máximo nem de mínimo por ser uma função constante. E esses alunos ainda não haviam se deparado com este tipo de atividade neste curso.

Para concluir a análise da atividade 6, falaremos do item (d). Neste item os alunos A e B acertaram ao afirmar que não existe ponto de mínimo para esta função. Já os alunos C, D e E afirmaram que o ponto de mínimo seria igual a 0. O aluno F percebeu que o número "0" não poderia, nesta atividade, ser determinado como mínimo e afirmou que qualquer valor maior que ele seria mínimo e o aluno G apresentou uma resposta incoerente afirmando que valor mínimo é $t = 0,5$.

Correção da versão

Não ocorreu grande surpresa na correção desta atividade. Houve alguns alunos que acompanharam a correção com muita facilidade e se manifestaram de forma a contribuir com a resolução.

4.3.7 - Atividade 7

Atividade 7 – Orientações para a realização da atividade interativa

Na janela da esquerda visualiza-se um quadrado de lado medindo 4 centímetros e um polígono vinho que varia de tamanho a medida que clicamos sobre o ponto e movimentamos. A variável x representa o comprimento que vai do vértice do quadrado ao ponto que movimentamos.

a) Escreva a área da nova figura (em vinho) em função do segmento x.

b) Determine o domínio da função.

c) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do polígono vinho é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do polígono vinho é mínima.

Observação 1: Se você preferir, você pode resolver o problema olhando apenas para a janela de visualização da direita. Nesta janela visualiza-se o gráfico da função. À medida que movemos a seta preta da figura, de forma simultânea, na janela de visualização 2, o ponto M movimenta-se deixando como rastro o gráfico da função.

Observação 2: para voltar à figura inicial basta clicar em uma seta ("refazer") que fica no canto superior direito da tela do Geogebra.

Figura 141-Ilustração da versão interativa da atividade 7

Atividade 7 - Versão interativa

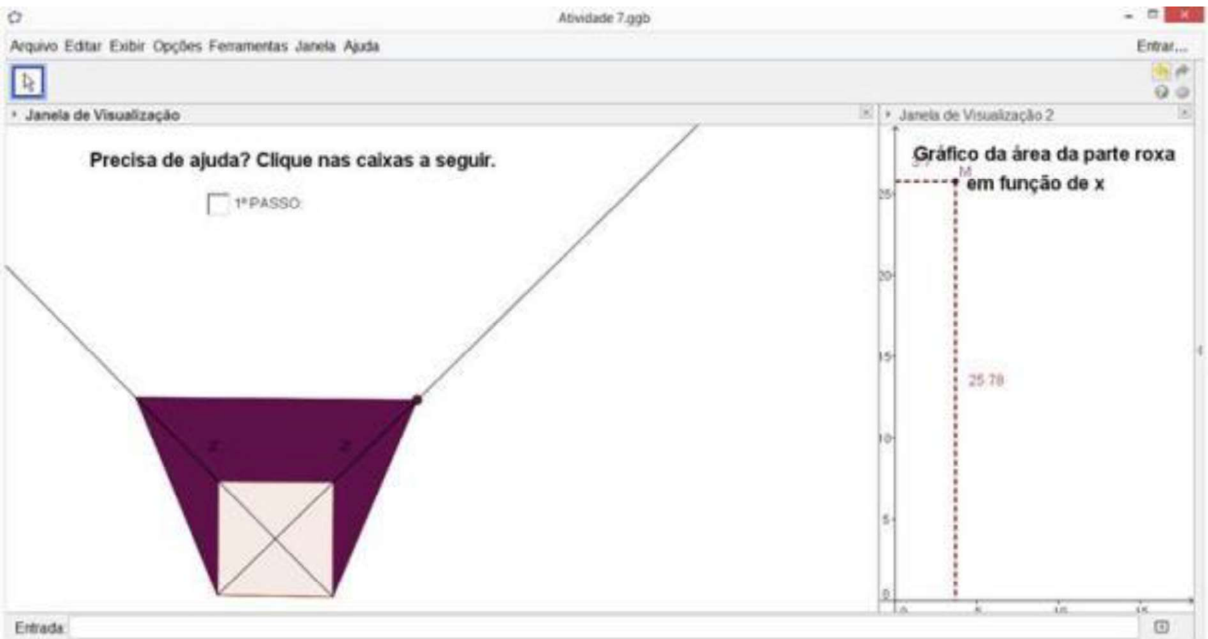


Figura 142-Ilustração da situação inicial do *applet* da versão interativa da atividade 7.

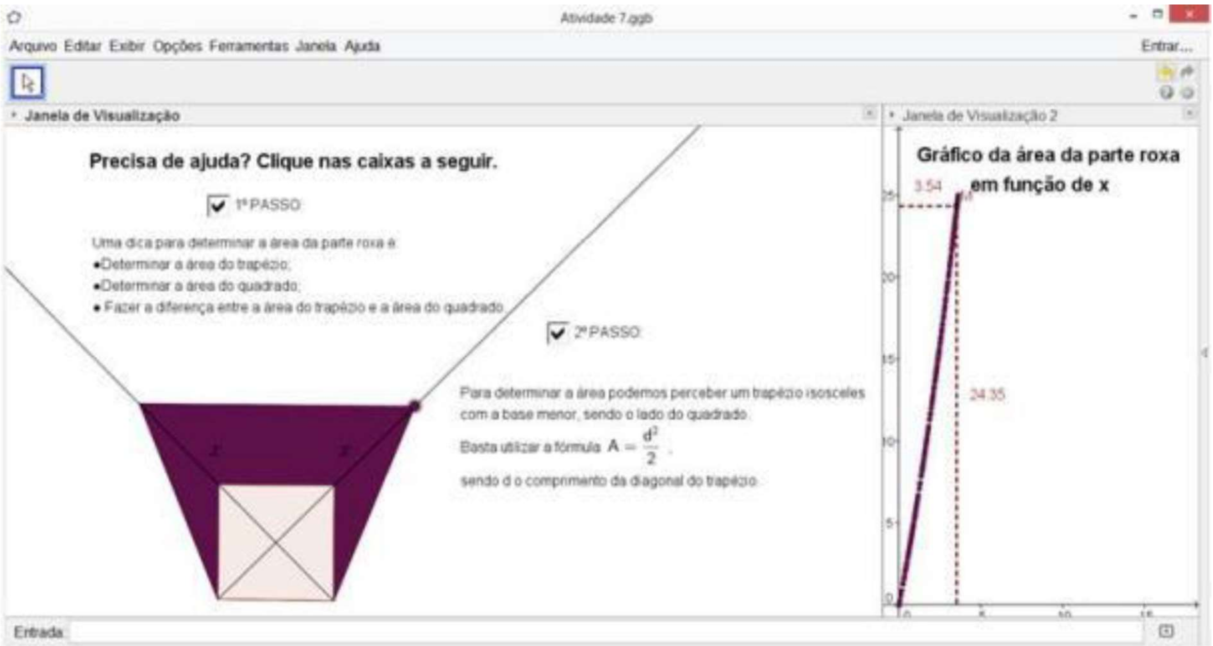


Figura 143-Ilustração de situação intermediária do *applet* da versão interativa da atividade 7.

Observações gerais: Esta atividade é uma versão um pouco mais elaborada da atividade 4 onde o aluno necessita utilizar o conhecimento adquirido em exercícios anteriores. Como, por exemplo, a diferença de áreas. Perceber que ao clicar e movimentar o ponto, esta movimentação vai além desta tela, representa apenas uma ilustração da atividade no Geogebra. A atividade ainda apresenta dicas que facilitam a resolução do item (a).

4.3.7.1 Comentários das respostas dos alunos da versão interativa da atividade 7

Apesar de ser uma atividade com um grau de dificuldade um pouco maior, os alunos A, B e F expressaram corretamente a expressão analítica deste problema. (ver figura 144)

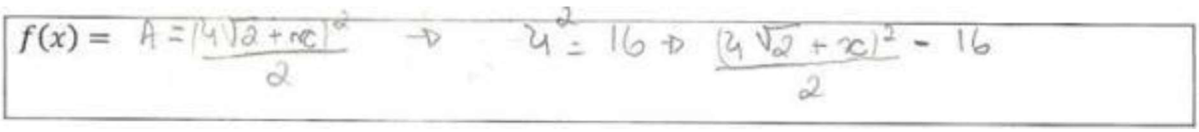


Figura 144 - Resposta do aluno F para o item (a) da atividade 7 versão interativa.

Os alunos C, E e G acharam a atividade muito difícil e não responderam a este item. Já o aluno D apresentou uma resposta incongruente como mostra a figura 145.

$f(x) = 2\sqrt{2} + 2.x$ $\quad 4\sqrt{2} + x = 4x\sqrt{2}$

$4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = \cancel{8\sqrt{2} + 2x} =$ $\quad A = \frac{d^2}{2}$ $\quad A = \frac{4x\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Figura 145 - Resposta do aluno D para o item (a) da atividade 7 versão interativa.

O item (b) foi respondido corretamente pelos alunos A, B, F e G apesar da representação esta incorreta. É importante ressaltar que este tipo de domínio já havia aparecido em uma atividade anterior e apenas o aluno B havia respondido corretamente. Isso mostra que os alunos já tiveram uma melhora significativa com relação a determinar o domínio da função.

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x < \infty\}$

Figura 146 - Resposta do aluno A para o item (b) da atividade 7 versão interativa.

Nas figuras 147 e 148 aparecem as respostas dos alunos C e D que por responderam de forma incoerente. O aluno E não respondeu a este item.

$D(f) = \{(x \in \mathbb{R} \,/\, 1{,}64 < x > 9{,}74)\}$

Figura 147 - Resposta do aluno C para o item (b) da atividade 7 versão interativa.

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 2\sqrt{2}\}$

Figura 148 - Resposta do aluno D para o item (b) da atividade 7 versão interativa.

O item(c) não foi respondido pelo aluno E. Já o aluno G respondeu corretamente afirmando que não existe ponto de máximo. Os demais alunos responderam apresentando o símbolo de infinito.

Para o último item apenas o aluno E deixou em branco, o aluno A afirmou que não existe ponto de mínimo e os alunos B, C, D, F e G afirmaram que x=0.

Correção da versão

O aluno A se destacou na resolução deste item apresentando uma evolução considerável das atividades anteriores para esta. Os alunos ainda estão apresentando dificuldade nos símbolos e nas representações matemáticas.

4.3.8 - Atividade 8

Atividade 8 – Orientações para a realização da atividade interativa

Uma cruz simétrica é a figura formada pela sobreposição de dois retângulos congruentes e ortogonais inscritos em uma circunferência. Na janela da esquerda visualiza-se uma cruz simétrica inscrita em um círculo de raio unitário cujo comprimento do retângulo que constitui a cruz mede x centímetros. A área A da cruz varia com o valor de x escolhido.

a) Determine valor da área A em função de x.

b) Determine o domínio da função.

c) Para que valor de x, a área da cruz é máxima?

d) Para que valor de x, a área da cruz é mínima?

Observação 1: Para alterar o valor de x, clique e movimente a seta, mantendo-a pressionada.

Observação 2: Se você preferir, você pode resolver o problema olhando apenas para a janela de visualização da direita. Nesta janela visualiza-se o gráfico da função. À medida que movemos a seta preta da figura, o ponto M movimenta-se na janela de visualização 2, deixando como rastro o gráfico da função.

Observação 3: para voltar à figura inicial basta clicar em uma seta ("refazer") que fica no canto superior direito da tela do Geogebra.

Figura 149 - Ilustração da versão interativa da atividade 8

Atividade 8 - Versão interativa

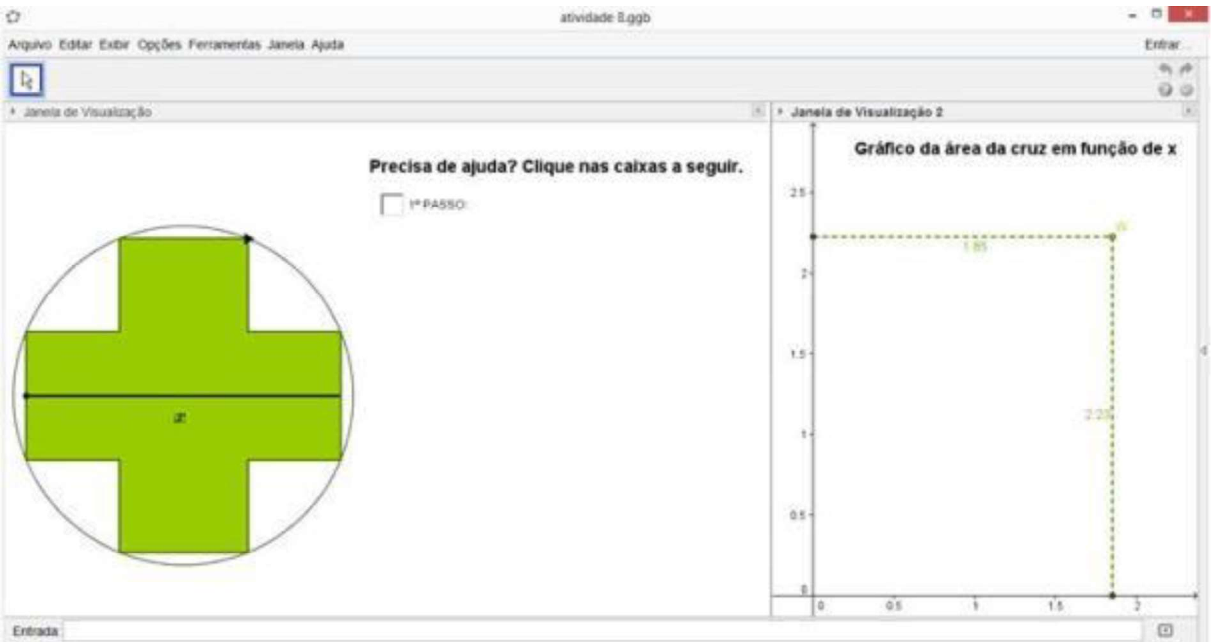


Figura 150-Ilustração da situação inicial do *applet* da versão interativa da atividade 8.

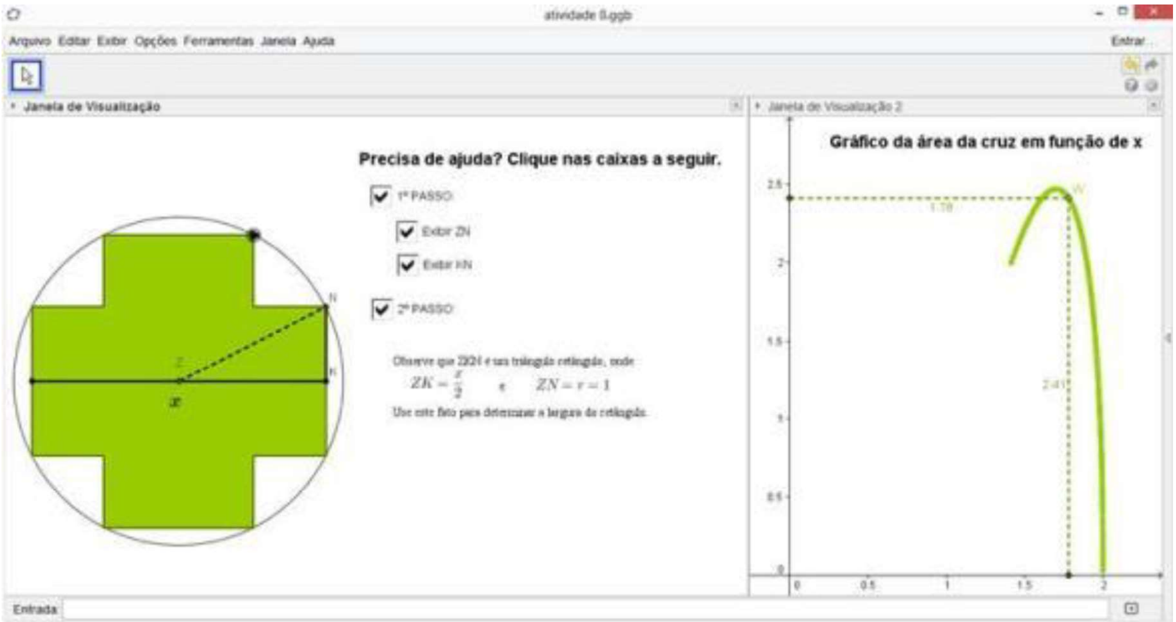


Figura 151-Ilustração de situação intermediária do *applet* da versão interativa da atividade 8.

Observações gerais: Nesta atividade determinar a expressão analítica não é tarefa fácil. Os alunos não resolveram o problema mesmo com as dicas postas no Geogebra. Além disso, diferente das atividades anteriores, o domínio não inicia do zero e isso pode de alguma forma fazer com que seja perceptível a evolução daqueles alunos para conseguirem determinar o domínio independente deste fator.

4.3.8.1 Comentários das respostas dos alunos da versão interativa da atividade 8

Os alunos apresentaram extrema dificuldade no item (a) que pede para determinar a expressão analítica. Os alunos A, B, C e D tentaram resolver a expressão analítica e não obtiveram sucesso e os alunos E, F e G deixaram este item em branco.

Figura 152 - Resposta do aluno A para o item (a) da atividade 8 versão interativa.

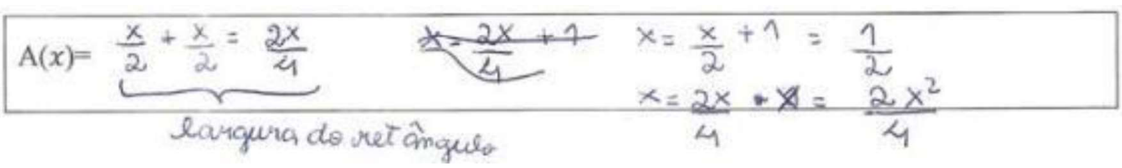


Figura 153 - Resposta do aluno D para o item (a) da atividade 8 versão interativa.

No item (b) todos explicitaram um domínio, porém apenas o aluno A obteve uma resposta coerente com o item.


D(A)= $\{x \in \mathbb{R} / 1{,}41 < x < 2\}$

Figura 154 - Resposta do aluno A para o item (b) da atividade 8 versão interativa.

O aluno B tentou uma aproximação para o valor 1,41. Este aluno, apesar de ter apresentado a resposta com um dos extremos errado, pensou de forma correta o domínio.


D(A)= $\{x \in \mathbb{R} / 1{,}5 < x < 2\}$

Figura 155 - Resposta do aluno B para o item (a) da atividade 8 versão interativa.

Para o item(c) apenas os alunos A e F apresentaram a resposta 1,7 que é a correta. Os alunos C e D representaram mais uma vez a área máxima e não o ponto onde a área é máxima e os alunos E e G também apresentaram a área máxima porém aproximada. O aluno B afirmou que o ponto de máximo é x=2.

Os alunos apresentaram a resposta x=2 para o item(d) com exceçãodo aluno B que afirmou o ponto de mínimo como sendo x=0. Estes alunos ao observarem o ponto de mínimo olharam apenas para um dos extremos da função.

Correção da versão

Foi a atividade que os alunos tiveram maior dificuldade em resolver. Isso fica claro quando nenhum deles apresenta solução correta para o item (a) e, além disso, a atividade apresentou um domínio diferente dos anteriores, não começou do zero. Foi interessante que alguns alunos (A e B) conseguiram independente de ser diferente das demais, desenvolverem uma ideia coerente.

4.3.9 - Atividade 9

Atividade 9 - Orientações para a realização da atividade interativa

Na janela da esquerda visualiza-se um triângulo inscrito em uma circunferência de raio medindo 4 centímetros que varia de tamanho a medida que clicamos sobre a seta preta. A variável x representa o comprimento do lado AC do triângulo.

a) Determine a área $A = A(x)$ do triângulo ABC em função de x.

b) No contexto do problema, qual é o domínio da função obtida no item a?

c) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do polígono ABC é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do polígono ABC é mínima.

Observação 1: Se você preferir, você pode resolver o problema olhando apenas para a janela de visualização da direita. Nesta janela visualiza-se o gráfico da função. À medida que movemos a seta preta da figura, o ponto M movimenta-se na janela de visualização 2, deixando como rastro o gráfico da função.

Observação 2: para voltar à figura inicial basta clicar em uma seta ("refazer") que fica no canto superior direito da tela do Geogebra.

Figura 156 - Ilustração da versão interativa da atividade 9

Atividade 9 - Versão interativa

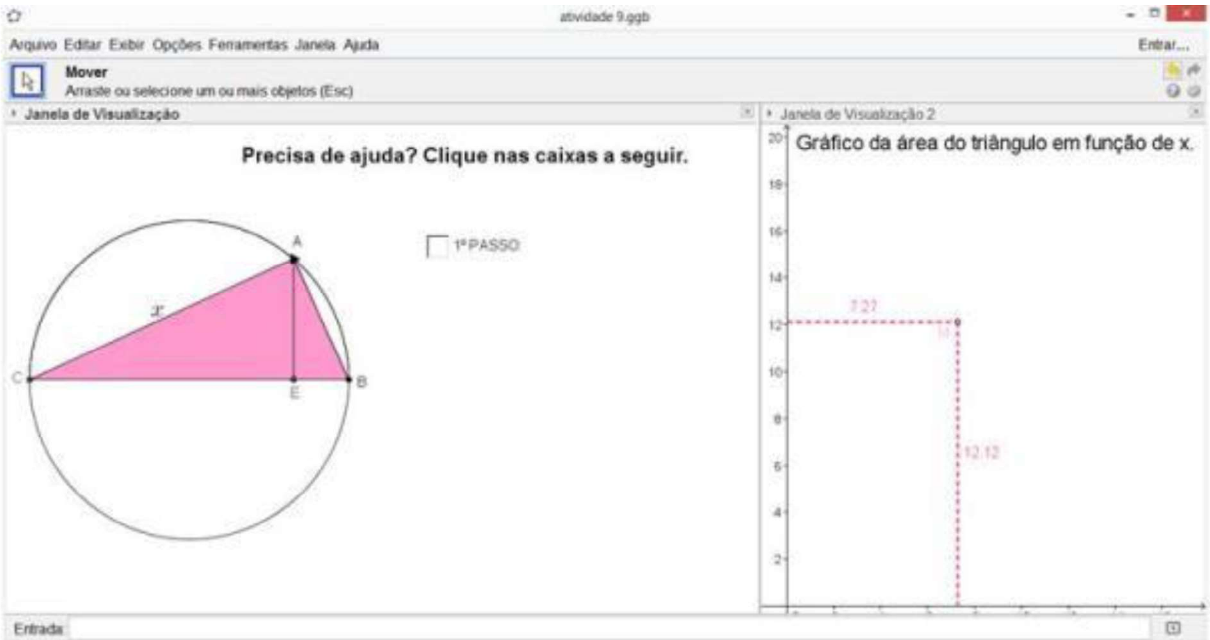


Figura 157-Ilustração da situação inicial do *applet* da versão interativa da atividade 9.

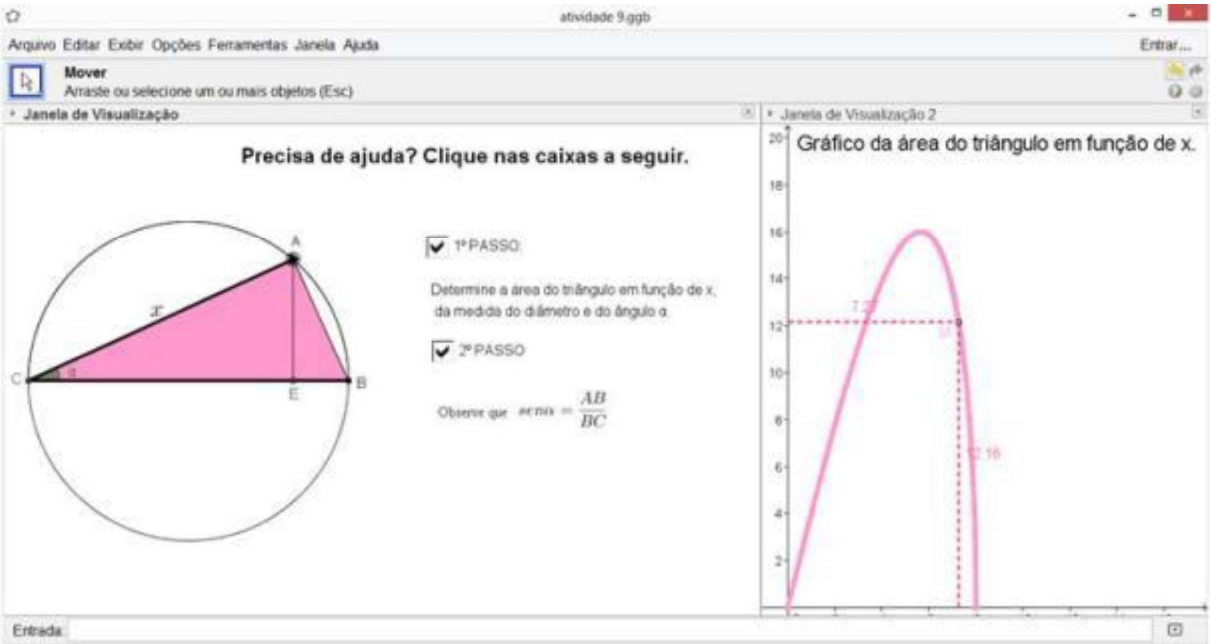


Figura 158-Ilustração de situação intermediária do *applet* da versão interativa da atividade 9.

Observações gerais: Esta atividade engloba tudo que já foi trabalhado nas atividades anteriores e alguns conceitos geométricos novos. É uma atividade que pode levar o aluno ao erro pela similaridade com o formato do gráfico da função do 2º grau.

4.3.9.1 Comentários das respostas dos alunos da versão interativa da atividade 9

Os alunos apresentaram muita dificuldade no item (a) e no item (b). Os alunos E, F e G desistiram dos dois itens. Apesar de muitas tentativas, os alunos A, B, C e D não conseguiram encontrar a expressão analítica que representa esta função. Segue abaixo algumas tentativas destes alunos.

$A: \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2} \qquad \frac{7,5 \cdot 10,4 \cdot 8}{2} = 624$

Figura 159 - Resposta do aluno A para o item (a) da atividade 9 versão interativa.

$\frac{a.b.\operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{7,5 \cdot 10,4 \cdot 8}{2} = \frac{624}{2} = 312$

Figura 160 - Resposta do aluno B para o item (a) da atividade 9 versão interativa.

$A = \frac{a.b \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2} \qquad A = \frac{8 \cdot x \cdot \frac{x}{8}}{2} \qquad A = \frac{8 \cdot \frac{x^2}{8}}{2} \qquad A \ \frac{x^2}{2}$

Figura 161 - Resposta do aluno C para o item (a) da atividade 9 versão interativa.

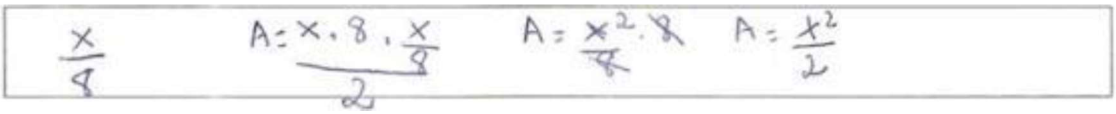


Figura 162- Resposta do aluno D para o item (a) da atividade 9 versão interativa.

No item (b) o aluno A respondeu corretamente, o aluno B representou de forma errada, mas acredita-se que tentou representar um intervalo entre 0 e 8. Os alunos C e D representaram o intervalo visualizando a área máxima como sendo o extremo.

Figura 163 - Resposta do aluno A para o item (b) da atividade 9 versão interativa.

Figura 164 - Resposta do aluno B para o item (b) da atividade 9 versão interativa.

Figura 165 - Resposta do aluno C para o item (b) da atividade 9 versão interativa.

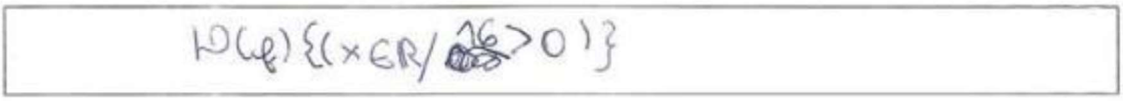


Figura 166 - Resposta do aluno D para o item (b) da atividade 9 versão interativa.

O ponto de máximo que é pedido no item (c) os alunos A, C, D, E e G responderam 16 que é exatamente a área máxima. O aluno B respondeu “0” e o aluno F respondeu 5,6 que é a solução que mais se aproxima da verdadeira.

Ao item (d) responderam corretamente os alunos A e F afirmando que não existe ponto de mínimo. Os alunos E e G responderam 4cm. O aluno D respondeu “0”, o C “0” ou “8” e o aluno B respondeu 8 cm.

Correção das versões

Foi a atividade onde os alunos apresentaram maior dificuldade, apesar de terem se esforçado para tentar desenvolver da melhor maneira possível não só a expressão analítica, mas também o domínio e o pontos de máximos e mínimos.

CAPÍTULO 5 – AVALIAÇÃO DA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo apresenta-se a avaliação da experiência didática realizada com os alunos. Em um primeiro momento será relatada a avaliação dos alunos. E no final, a pesquisadora faz sua avaliação de todo o processo.

A avaliação dos estudantes tem como foco o material apresentado e a forma de abordagem do tema funções. O objetivo é analisar o nível de satisfação dos alunos com relação à forma como foi apresentado o tema. Para avaliar a opinião dos alunos utilizou-se uma ficha contendo sete frases afirmativas e uma escala Likert de cinco pontos: Discordo totalmente; Discordo; Não concordo nem discordo; concordo; concordo totalmente.

Iniciaremos este capítulo falando um pouco da escala de Likert que foi utilizada como referência para a avaliação da nossa pesquisa, em seguida apresentaremos a analise a cada resposta e a conclusão feita pela pesquisadora.

5.1 - Escala de Likert

Com o intuito de realizar uma pesquisa analisando de forma fiel a opinião dos alunos com relação ao trabalho desenvolvido com eles, utilizamos a escala de Likert. Esta escala é uma das mais conhecidas e utilizadas em pesquisa quantitativa, já que pretende registrar o nível de concordância ou discordância com relação a uma declaração dada. Ao invés de trabalhar com as perguntas sim ou não, a escala nos permite conhecer o grau de conformidade do entrevistado com qualquer afirmação proposta. É totalmente útil para situações em que precisamos que o entrevistado expresse com detalhes a sua opinião. Utilizando a escala de cinco pontos citada acima nós construímos uma sequência com sete frases afirmativas (ver anexo 4), onde em cada uma delas o aluno teria a opção de marcar um dos cinco "carinhas" (figura 167) de acordo com o grau de concordância dele com relação a cada afirmativa.

Figura 167 -"Carinhas" utilizadas pelos alunos no questionário.

Desta forma, se o aluno marcar a primeira "carinha", ou seja, a mais feliz, ele estará concordando totalmente com a afirmativa. Já se ele marcar a última "carinha", ou seja, a mais triste, ele estará discordando totalmente da afirmativa. Enquanto que as demais "carinhas" representam situações intermediárias: concordo parcialmente, não concordo nem discordo e discordo parcialmente.

A pesquisadora orientou os alunos a colocarem nome na avaliação apenas se isso não influenciasse em suas respostas. Isso porque o intuito seria ter a resposta mais sincera possível com relação à oficina.

A seguir, analisaremos o nível de concordância dos alunos em relação a cada pergunta e logo após faremos uma analise geral das respostas para saber se os alunos perceberam alguma vantagem ao utilizar o software Geogebra.

5.2 - Análise das respostas dadas pelos alunos

A fim de quantificar o nível de concordância dos estudantes foram atribuídos a seguinte pontuação: 1 para discordo totalmente; 2 para discordo; 3 para não concordo nem discordo; 4 para concordo; 5 para concordo totalmente.

Tabela 2 - Relação das "carinhas" com os pontos atribuídos

Resposta do aluno (carinha)	Nível de concordância	Ponto atribuído
	concordo totalmente	5
	concordo	4
	não concordo nem discordo	3
	discordo	2
	discordo totalmente	1

Para determinar o nível de concordância em relação a um item calcula-se a média ponderada. Considerava-se as quantidades de respostas atribuídas para cada carinha como pesos.

Para um melhor entendimento desse cálculo, vejamos um exemplo: suponha que 2 alunos responderam “concordo totalmente”; 3, respondeu concordo; 1, discordo; e 1, respondeu discordo totalmente; então o nível de concordância é da pela média:

$$média: \frac{2x5 + 3x4 + 1x2 + 1x1}{7} \approx 3{,}57$$

que se encontra na zona de concordância (de 3 a 5).

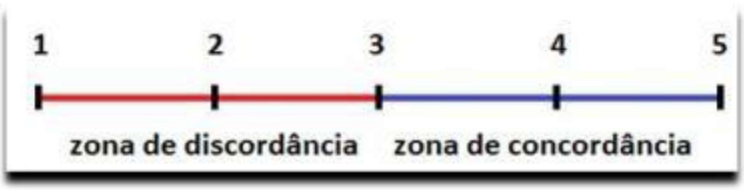


Figura 168-Termômetro da escala Likert

Passemos então à análise das respostas dos alunos.

Afirmativa 1: O Geogebra auxiliou você na resolução dos problemas propostos.

Tabela 3: tabela indicando os resultados das respostas dos alunos para o primeiro item

					
Afirmação 1	4	2	1	0	0

$$média: \frac{4x5 + 2x4 + 1x3}{7} = 4{,}43$$

Em sua maioria os alunos concordam que o Geogebra auxiliou na resolução das atividades.

Afirmação 2: Você gostou das atividades apresentadas.

Tabela 4: tabela indicando os resultados das respostas dos alunos para o segundo item

					
Afirmação 2	3	4	0	0	0

$$média: \frac{3x5 + 4x4}{7} = 4{,}43$$

Os alunos afirmaram que gostaram das atividades com alguma restrição.

Afirmação 3: Você gostaria que o seu professor utilizasse estas atividades em sala de aula.

Tabela 5: tabela indicando os resultados das respostas dos alunos para o terceiro item

					
Afirmação 3	2	3	0	1	1

$$média: \frac{2x5 + 3x4 + 1x2 + 1x1}{7} = 3{,}57$$

Como a média ficou acima de 3 temos que este item ainda está dentro da zona de concordância. Entretanto, dois alunos não gostariam que essas atividades não fossem utilizadas.

Afirmação 4: A utilização do *Geogebra* proporcionou um melhor entendimento do significado de domínio de uma função.

Tabela 6: tabela indicando os resultados das respostas dos alunos para o quarto item

					
Afirmação 4	6	1	0	0	0

$$média: \frac{6x5 + 1x4}{7} = 4{,}86$$

Ao que parece, o Geogebra proporcionou um melhor entendimento do significado de domínio de uma função.

Afirmação 5: A utilização do *Geogebra* proporcionou um melhor entendimento do significado de função.

Tabela 7: tabela indicando os resultados das respostas dos alunos para o quinto item

	😃	🙂	😐	😕	😠
Afirmação 5	4	3	0	0	0

$$média: \frac{4x5 + 3x4}{7} = 4{,}57$$

Do mesmo modo, os alunos concordaram que o *Geogebra* proporcionou um melhor entendimento do significado de função.

Afirmação 6: A utilização do *Geogebra* ajudou a encontrar a expressão que define a função.

Tabela 8: tabela indicando os resultados das respostas dos alunos para o sexto item

	😃	🙂	😐	😕	😠
Afirmação 6	2	3	2	0	0

$$média: \frac{2x5 + 3x4 + 2x3}{7} = 4$$

Também concordaram que o *Geogebra* ajudou a encontrar a expressão que define a função.

Afirmação 7: Após a realização das atividades você tem mais segurança em resolver problemas relacionados ao conceito de função.

Tabela 9: tabela indicando os resultados das respostas dos alunos para o terceiro item

	😃	😊	😐	😕	😠
Afirmação 7	3	3	1	0	0

$$média: \frac{3x5 + 3x4 + 1x3}{7} = 4{,}28$$

E, por último, os alunos concordaram que a realização das atividades deu a eles mais confiança para resolver problemas relacionados ao conceito de função.

Assim, analisando cada afirmação, podemos concluir que para o aluno o uso do Geogebra foi de extrema importância na realização das atividades.

Figura 169 - Gráfico da média de cada item da opinião dos alunos com relação à experiência didática.

5.3 – Avaliação da pesquisadora

Apesar das dificuldades apresentadas pelos alunos ao resolverem as questões, acredito que a pesquisa foi bem sucedida. Foi possível perceber que tudo era novo para eles: não estavam habituados com a utilização de softwares na resolução de problemas e, muito menos, ter trabalhado com funções em um contexto dinâmico e interativo.

Contudo, ouso dizer que Geogebra foi muito importante para o desenvolvimento das atividades pelos alunos. A proposta inicial de se trabalhar com as versões impressas e digitais das atividades tinha também como objetivo que o aluno percebesse como um software pode ajudar significativamente na resolução de problemas matemáticos. Além disso, é importante saber do próprio aluno o que ele sentiu de diferença se comparando com as aulas tradicionais. Pensando em cada afirmação da avaliação da oficina podemos tirar algumas conclusões.

Primeiro, que o Geogebra teve boa aceitação por parte dos alunos. Segundo, que ele contribuiu efetivamente para a compreensão do significado de domínio de uma função e do próprio conceito de função.

De modo geral, analisando cada resposta dada pelos alunos no capitulo 4 e a avaliação feita pelos alunos, acredito que o material desenvolvido e a forma que ele foi apresentado para os alunos atingiu o seu objetivo. Pôde-se perceber claramente a evolução dos alunos ao utilizar o software e como eles conseguiram resolver algumas atividades que antes pareciam extremamente difíceis.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao analisar os PCN e o PNLD pode-se observar que ambos os documentos orientam que o ensino do conceito de funções deveria permitir que os alunos se apropriassem da linguagem algébrica com o intuito de expressar a relação entre grandezas e modelar situações problema. Essas orientações deveriam ser seguidas pelos livros didáticos. No entanto, com o mapeamento dos livros didáticos que fizemos no capítulo 2 pudemos observar algum avanço em relação aos resultados obtidos por Botelho (2005) e Sá (2005), mas o cenário apresentado ainda inspira cuidado. Há, em geral, um tratamento superficial e excessivamente algébrico sobre tema. Exploram-se pouco as atividades de funções a partir de situações problema no qual a função precisa ser descoberta, e quando isso é feito os estudos do domínio, dos pontos críticos e do gráfico de uma função são negligenciados ou tratados de forma ingênua e equivocada.

Nesse sentido, pode-se dizer que este trabalho procurou contribuir com uma proposta de atividades que permitisse ao alunado desenvolver esta capacidade de modelar um problema, de determinar e estudar alguns elementos principais de uma função real (domínio, pontos críticos) a partir da relação entre grandezas. Para isso foram utilizados o contexto geométrico e o software de matemática dinâmica, o Geogebra. O uso da ferramenta tecnológica possibilitou que os alunos reconhecessem a variável independente e por meio de sua variação estabelecer o domínio da função; visualizassem as regiões onde os valores da função crescem e onde decrescem, tornando possível a análise dos pontos críticos da função. O resultado obtido com a experiência didática e a avaliação que os alunos fizeram permite-nos concluir que a realização das atividades atingiu o seu objetivo.

Analisando as atividades de um a cinco, que foram apresentadas nas duas versões (impressa e interativa), podemos notar claramente que a evolução da atitude dos alunos na resolução das atividades na versão interativa é maior. Contudo, a partir da atividade 2 (na versão impressa) os alunos passam a ter mais autonomia e atitude positiva na resolução das questões. Na atividade 1 impressa, os alunos deixaram todos os itens, exceto o primeiro, praticamente em branco. Ainda estavam com o pensamento de que só poderiam responder aos demais itens se conseguissem resolver o primeiro item. Este pensamento mudou apenas no momento em que foram questionados pela pesquisadora com relação à possibilidade de resolver os demais itens da questão sem que conhecessem a expressão analítica da função.

Analisando de forma um pouco mais detalhada as cinco primeiras atividades impressas, é interessante notar que os alunos tiveram bastante dificuldade nas atividades 1 e 5. A primeira era uma atividade relativamente fácil, mas os alunos ainda não estavam habituados com este tipo de questão. Não sabiam interpretar a pergunta e nem entendiam o que significava aquele "desenho" e sua relação com o que se pedia em cada item proposto. Já na atividade 5, acreditamos que o resultado obtido pode ter sido consequência da própria dificuldade no entendimento do contexto geométrico associada ao fato deles preferirem e optarem por fazer logo a mesma questão na versão interativa.

No que diz respeito aos níveis de significação propostos e discutidos no texto de Cabral (1998), observa-se que na atividade 1, tanto na versão impressa quanto na versão interativa, os alunos apresentaram respostas apenas no nível aritmético. Eles olham para a figura como algo rígido que não possui movimento, e mesmo depois de abrir o Geogebra, eles retornam à figura inicial para "capturar" os valores que aparecem na figura e "resolver" a questão por meio de cálculos aritméticos. Além disso, eles também não entendiam o significado da notação f(x) e da palavra domínio. Contudo, já era visível uma evolução das atitudes dos estudantes na resolução da versão impressa para a versão interativa, mesmo na realização da primeira atividade. Os alunos tentaram resolver todos os itens que anteriormente parecia impossível para eles. Alguns deles conseguiram determinar corretamente o domínio da função. A dificuldade encontrada foi em diferenciar ponto de máximo de valor máximo. Todos assumiram o valor máximo ao invés do ponto máximo. Todavia isso também não invalida o objetivo da questão que trata-se de um erro técnico e de nomenclatura cometido inclusive por diversos alunos em um curso inicial de Cálculo.

Nas atividades 2, 3 e 4, os alunos que conseguiram desenvolver a expressão analítica na versão impressa também conseguiram na interativa (item (a) de todas as atividades). A princípio, pode parecer que a aplicação interativa não tenha contribuído para a evolução da atitude dos estudantes, o que pode não ser verdade. Observemos, por exemplo, o resultado da atividade 1, na qual os estudantes não ultrapassaram o nível aritmético de significação na realização da atividade impressa. Assim, o sucesso dos alunos que conseguiram resolver o item (a) da atividade 2 impressa poderia ser atribuído à correção feita pela professora da atividade 1, tendo como suporte a versão interativa. Cabe destacar que com a resolução consecutiva das atividades os alunos começam a desenvolver estratégias para encontrar a expressão analítica da função. Produzindo assim cada vez mais respostas no nível funcional proposto por Cabral (1998). No entanto, a maior dificuldade encontrada pelos alunos para determinar a expressão analítica de forma correta é a falta de conhecimento de conceitos básicos de geometria e álgebra (ver p.91, por exemplo).

Por outro lado observa-se um progresso da quantidade de respostas corretas dos estudantes com relação aos demais itens. Os alunos apresentavam mais detalhes e desenvolviam melhor suas representações do domínio a cada atividade realizada. Isso fica claro quando comparamos os resultados deste item nas versões impressa e interativa da atividade 4: enquanto apenas um aluno consegue determinar o domínio na versão impressa, na versão interativa quatro alunos conseguem responder corretamente ao item. O que é mais interessante aqui é que nesta atividade o domínio não é limitado como nas atividades anteriores e o Geogebra. Mesmo assim ajudou os alunos a "enxergarem" esta possibilidade.

Outro ponto positivo observado com a aplicação das atividades é que os alunos procuram determinar o domínio da função a partir do significado da variável independente no contexto do problema (e não apenas por meio do estudo de restrições algébricas da função analítica). Os alunos percebem que valor da variável independente ("o valor de x") se altera a medida que ele movimenta a figura.

Com relação aos pontos de máximo e de mínimo, é interessante notar que os alunos iniciaram as atividades na versão interativa sem grande preocupação com a janela de visualização 2 (a que apresentava o gráfico da função), mas passam a perceber a importância do gráfico na resolução das atividades (ver item (c) da atividade 5, p.14) a medida que foram resolvendo os problemas.

Sendo assim, ignorando os erros produzidos no campo algébrico e geométrico, poder-se-ia concluir que pelo menos quatro alunos (B, C, F e G) passaram a produzir respostas no nível funcional. É interessante notar que estes alunos não estavam habituados com atividades que articulasse o conceito de função com contextos geométricos. Acredito que esta forma de trabalhar melhora o entendimento do significado das variáveis dependentes e independentes, além de ampliar o conhecimento do aluno com relação aos conceitos de domínio e pontos de máximo e mínimo de uma função. Enquanto o conceito de domínio é re-significado em um contexto dinâmico de relação entre grandezas, as noções de máximos e mínimos são introduzidas de forma intuitiva, gráfica, transcendendo de forma criativa o "único" exemplo didático da matemática escolar estudado no universo das funções quadráticas. Os alunos compreenderam efetivamente o significado de variável ao longo da realização das atividades.

Na visão dos alunos a experiência realizada também foi bem sucedida. A análise feita utilizando a escala de Likert indica isso: todas as afirmativas permaneceram dentro da zona de concordância. Os alunos concordaram que o material auxiliou na compreensão dos conteúdos apresentados. Nesse sentido eles deram destaque à utilização do software Geogebra.

De fato, o uso do Geogebra foi de fundamental importância para a elaboração e realização das atividades interativas, aumentando a capacidade de visualização dos alunos e possibilitando, desse modo, que elas atingissem os seus objetivos.

Contudo há uma necessidade de aprimorar o material elaborado. Seria interessante que o recurso do gráfico (disponível na janela de visualização 2) estivesse disponível apenas para a realização dos itens (c) e (d) das atividades. Como trabalho futuro pretende-se expandir o material elaborado e aplicar em uma situação didática real de sala de aula.

REFERÊNCIAS:

B. de J. Caraça. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9a edição. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

BORTOLOSSI, H. *etalli.* Problema da Bobina. Projeto Ótimo. CDME. Disponível em: http://www.uff.br/cdme/pbo/pbo-html/pbo-01-br.html. Acesso em 27 de abril de 2016.

BOTELHO, L.M.L. **Funções Polinomiais na Educação Básica**: Uma Proposta. Monografia de Pós-graduação. Niterói: UFF, 2005.

BRASIL, **PCN Ensino Médio**: Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação,Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

______.**PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

______. **Programa Nacional do Livro Didático 2012**: Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2011.

______.**Programa Nacional do Livro Didático 2015**: Matemática do ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.

CABRAL, T.C.B. **Contribuições da Psicanálise à Educação Matemática:** A Lógica da Itervenção nos processos de Aprendizagem. Tese de Doutorado. São Paulo: USP, 1998.

DASSIE, Bruno Alves**. Euclides Roxo e a constituição da educação matemática no Brasil**.Tese de doutorado. PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2008.

DOMINGOS, A. A construção do conhecimento matemático avançado: O caso do conceito de sucessão. Em S.E.M. da. S.P.C.E. (Ed.).**Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores**. Coimbra: 2002. Cap. 19, p. 291-308.

LOURENÇO FILHO, M. B. **Introdução ao estudo da escola nova**: bases, sistemas e diretrizes da pedagogia contemporânea. 12 ed. São Paulo: Melhoramentos: [Rio de Janeiro]: Fundação Nacional de Material Escolar, 1978.

OLIVEIRA, A.G. E DORINI, F.A. O uso de ambiente de geometria dinâmica como subsidio para a caracterização das funções quadráticas. **RPM** número 1, volume 1. 2013

PALIS, Gilda de La Rocque. **Atividades que podem propiciar o desenvolvimento do raciocínio funcional no alunado do ensino médio e universitário inicial**. Vol. 1. Número 1. Rio de Janeiro: PUC. ISSN 2319-023X, 2013.

REZENDE, W.M, **O ensino de Cálculo**: Dificuldades de Natureza Epistemológica. Tese de Doutorado. São Paulo: USP, 2003a.

______.Um **Mapeamento das Ideias Fundamentais do Cálculo no Ensino Básico**. Artigo. Rio de Janeiro: IM-UFF, 2006.

REZENDE, W.M ,BORTOLOSSI, H.J e PESCO, D.U, Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. Artigo**. 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra.**ISSN 2237-9657, pp.74- 89, 2012.

HERSHKOWITZ,R., ARCAVI, A. e EISENBERG, T. Geometrical Adventures in Functionland. **Mathematics Teacher**, 80, 346-352. 1987.

ROXO, E. A **Matemática na Educação Secundaria**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1937. (Atualidades Pedagógicas, vol. 25).

______. A matemática e o curso secundário. In: PEIXOTO, A. et.al. **Um grande problema nacional (estudos sobre ensino secundário)**. Rio de Janeiro: Irmãos Pongetti Editores, 1940.

______. O Ensino da Matemática na Escola Secundária XII – Principais Escopos e Diretivas do Movimento de Reforma – O Conceito de Função como Idéia Axial do Ensino. **Jornal do Commercio,** Rio de Janeiro, 22 fev. 1931.

SÁ, S.L.S. **Um Mapeamento do Ensino de funções Exponenciais e Logarítmicas no Ensino Básico**. Monografia de Pós-graduação. Niterói: UFF, 2005.

SALES, C.O.R.**Explorando Função através de representações dinâmicas:** Narrativas de estudantes do Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Universidade Bandeirante, 2008.

SANTOS, Fabio Lennon Marchon. **Uma proposta alternativa para o ensino das Funções exponenciais e logarítmicas no ensino médio**. Monografia.Niterói: UFF, 2008.

SIERPINSKA, A. Humanities Students and Epistamological Obstacles Related to Limits. **Educational Studies em Mathematics**, 18, 1987.

______. On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E. e Harel, G. (eds.), **The concept of function:Elements of Pedagogy and Epistemolgy**. Notes and Reports Series of the Mathematical Association of America, vol.25, p.25 -58.(1992)

SIQUEIRA, D.M. **Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado. USP - São Carlos, 2013.

SOARES, L. H. Tecnologia computacional no ensino de matemática: o uso do Geogebra no estudo de funções.1º edição.**Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**. 2012.

VALENTE, W.R. (org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil**. 1ª edição. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 2003.PP. 56-85.

LIVROS DIDÁTICOS

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto & Aplicações Vol. 1. 2ª edição. São Paulo: Ática, 2014.

IEZZI, Gelson e colaboradores. **Matemática –** Ciência e Aplicações Vol. 1. 7ª edição. São Paulo: Saraiva, 2013.

LEONARDO, Fábio Martins. **Conexões Com a Matemática** Vol. 1. 2ª edição. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática –** Paiva Vol. 1. 2ª edição. São Paulo: Moderna, 2013.

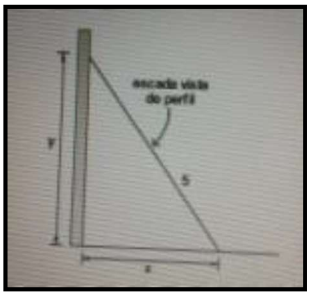
SMOLE, Katia C. Stocco; DINIZ Maria Ignez. **Matemática** - Ensino Médio Vol. 1. 9ª edição. São Paulo: Saraiva, 2013.

SOUZA, Joamir. **Novo Olhar**: Matemática Vol. 1. 2ª edição. São Paulo: FTD, 2013.

ANEXO 1

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA ESCADA.

Situação problema: Uma escada de 5 m de comprimento está recostada em uma parede. A base da escada escorrega, afastando-se da parede a uma taxa (velocidade) de 2 cm/seg. Com que velocidade cai o topo da escada,no momento em que a base da escada está a 3 m da parede ?



1º) Situação inicial da escada:

$$y^2 + x^2 = 5^2$$

2º) Variação da velocidade da escada com relação ao tempo:

$$\frac{dx}{dt} = 2cm/seg$$

3º) Devemos derivar implicitamente a equação de (1º)

$$y^2 = -x^2 + 5^2$$

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$$

4º) Substituir (2º) em (3º):

$$4\frac{dy}{dt} = 3.2$$

$$\frac{dy}{dt} = 1{,}5cm/seg$$

ANEXO 2

LIVROS DIDÁTICOS APROVADOS PELO PNLD 2015.

L1 - Conexões Com a Matemática

L2 - Matemática: Contextos e Aplicações

L3 - Matemática: Paiva

L4 - Matemática: Ciência e Aplicações

L5 - Matemática: Ensino Médio (Kátia Stocco)

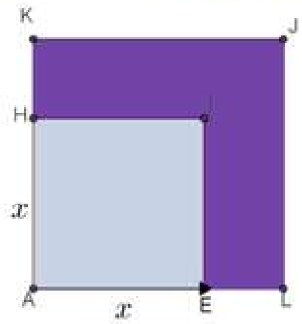
L6 - Novo Olhar: Matemática

ANEXO 3 – PRODUTO DA DISSERTAÇÃO

VERSÃO IMPRESSA E DIGITAL COM SOLUÇÃO COMENTADA

Atividade 1

Seja ALJK um quadrado de lado 4 centímetros e AEIH um outro quadrado interno a este com um vértice em comum e lado medindo x centímetros. Sabe-se que a área S do polígono ELJKHI varia de acordo com o tamanho escolhido para o segmento x.



a) Determine a área S do polígono ELJKHI em função de x.
b) Determine o domínio da função.
c) Para que valor de x, a área do polígono ELJKHI é máxima?
d) Para que valor de x, a área do polígono ELJKHI é mínima?

Solução

a) $S(x) = 16 - x^2$

Uma maneira simples de resolver o item (a) é fazer a diferença de áreas.

b) $0 \leq x \leq 4$

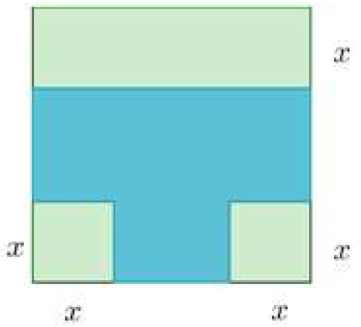
Quando x é igual a zero a área S chega a sua área máxima e quando o x chega a 4 o polígono ELJKHI some.

c) Portanto sua área máxima é assumida em $x = 0$

d) Sua área mínima é assumida em $x = 4$.

Atividade 2

De uma folha de papel quadrada de lado medindo 4 centímetros, retira-se um retângulo de largura x centímetros de sua parte superior e dois quadradinhos de lado x centímetros de cada ponta da parte inferior, formando uma figura em forma de T. A área A da figura T varia com o valor de x escolhido.



a) Determine a área A em função de x.
b) Determine o domínio da função.
c) Para que valor de x, a área da figura T é máxima?
d) Para que valor de x, a área da figura T é mínima?

Solução:

a) Ainda pensando como a atividade 1, podemos fazer por diferença de áreas.

$A(x) = 16 - 4x - 2x^2$

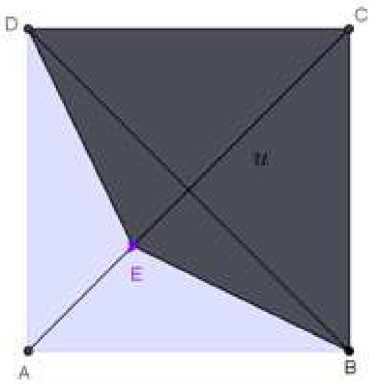
b) O menor valor que pode ser assumido pela variável x é zero quando não há nenhum recorte no papel. Desta forma não temos o T proposto. E o maior valor que pode ser assumido por x é 2 que corresponde a metade do lado do quadrado. Quando isso ocorre também não é mais possível ter um T. Portanto o domínio é: $D(A) = \{x\epsilon\ R|0 < x < 2\}$

c) Não existe.

d) Não existe.

Atividade 3

Na figura, visualiza-se o quadrado ABCD de lado medindo 4 centímetros e um polígono cinza, EBCD, que varia de tamanho à medida que deslocamos o vértice E ao longo da diagonal do quadrado. A variável u representa o comprimento do segmento EC.



a) Determine a área S do polígono EBCD em função de u.

b) Determine o domínio da função.

c) Determine o(s) valor(es) de u, caso existam, para os quais a área do polígono EBCD é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de u, caso existam, para os quais a área do polígono EBCD é mínima.

Solução:

a) Seja o triângulo CED de base CE medindo u temos:

$$A(CED) = \frac{u.2.\sqrt{2}}{2} = u.\sqrt{2}$$

$$A(u) = 2.u.\sqrt{2}$$

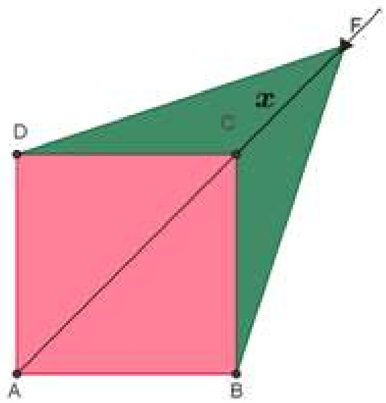
b) $D(A) = \{u \in R | 0 < u \leq 4\sqrt{2}\}$

c) $u = 4\sqrt{2}$

d) Não existe.

Atividade 4

Na figura, visualiza-se o quadrado ABCD de lado medindo 6 centímetros e um polígono verde, BCDF, que varia de tamanho à medida que deslocamos a seta F ao longo da semirreta, originada pelo prolongamento da diagonal do quadrado. A variável x representa o comprimento do segmento CF.



a) Determine a área A do polígono BCDF em função de x.

b) Determine o domínio da função.

c) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do polígono BCDF é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do polígono BCDF é mínima.

Solução:

a) Observando a figura podemos perceber que a área do triângulo CDF de base CF e altura que coincide com a medida da metade da diagonal do quadrado ABCD é $\frac{x.\frac{6\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3x\sqrt{2}}{2}$

Logo, a área do polígono BCDF é $A(x) = \frac{2.3x\sqrt{2}}{2} = 3x\sqrt{2}$

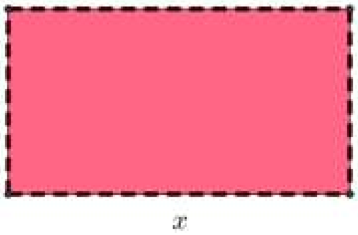
b)$\mathrm{D(A)} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R} \mid \mathrm{e\ x} > 0\}$

c) Não existe.

d) $x = 0$

Atividade 5

Um granjeiro utilizou 100 metros lineares de tela para cercar um terreno retangular:



a) Obter a lei $y = f(x)$ que expressa a área y, em metros quadrados, do terreno em função da medida x, em metros, da base do retângulo.

b) No contexto do problema, qual é o domínio da função f obtida no ítem a?

c) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do retângulo é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do retângulo é mínima.

Solução:

a) Sabemos que dois lados do retângulo medem x, como a medida do perímetro deste mesmo retângulo é 100 m temos que o outro lado pode ser expresso por $\frac{100-2x}{2} = 50 - x$. Desta forma $f(x) = x.(50 - x)$

b) $\mathrm{D(f)} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R} | 0 < \mathrm{x} < 50\}$

c) A área máxima ocorre quando o retângulo vira um quadrado, ou seja, todos os lados medem x. Logo $x = 25m$.

d) Não existe área mínima.

Atividade 6

Na janela da esquerda visualiza-se um ângulo inscrito ACB em um círculo de raio $2\sqrt{2}$ centímetros e segmento AB que é o lado de um quadrado inscrito no circulo.
Considere t a medida do arco BC contido no arco BA e α a medida do ângulo ACB.
Determine:

a) o valor α do ângulo ACB em função de t;
b) o domínio de α em função de t;
c) o(s) valor(es) de t, caso existam, para os quais o valor de α é máximo;
d) o(s) valor(es) de t, caso existam, para os quais o valor de α é mínimo;

Observação 1: Para alterar o valor de t, clique sobre a seta preta localizada no vértice C e a mantenha pressionada durante toda a movimentação.

Observação 2: para voltar à figura inicial basta clicar em uma seta ("refazer") que fica no canto superior direito da tela do Geogebra.

Solução:

a) A expressão analítica de α em função de t é: $\alpha(t) = 0{,}79$, logo é uma função constante. O valor do ângulo α = 45º em graus. Que neste caso o GeoGebra converte em π rad.

b) O domínio é dado pela medida do comprimento do circulo que varia de 0 a $\frac{3.2\pi r}{4}$ já que sua medida assume até ¾ da medida do círculo.

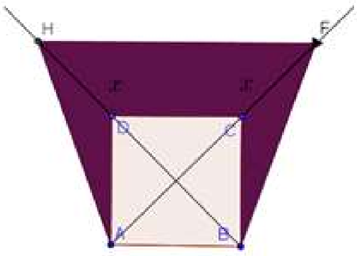
Portanto: $\mathrm{D}(\alpha) = \{\mathrm{t} \in \mathrm{R} | 0 < \mathrm{x} < 13{,}32\}$

c) Não existe.

d) Não existe.

Atividade 7

Na figura, visualiza-se o quadrado ABCD de lado medindo 4 centímetros e o polígono vinho ADCBFH que varia de tamanho a medida que movimentamos a seta preta sobre o prolongamento da diagonal AC do quadrado. A variável x representa o comprimento que vai do vértice C do quadrado ao ponto F que movimentamos.



a) Escreva a área do polígono ADCBFH em função do segmento x.

b) Determine o domínio da função.

c) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do polígono vinho é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do polígono vinho é mínima.

Solução:

a) Pensando em um ângulo de 45º em HFC temos:

$$\text{sen}45° = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}.x = y$$

Sendo y a menor distância entre os segmentos FH e CD.

$$\text{A base maior do trapézio (HF)} = 2.\frac{\sqrt{2}}{2}.x + 4 = \sqrt{2}.x + 4$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2}.x + 4 + 4).\left(4 + \frac{\sqrt{2}}{2}.x\right)}{2} - 16 = \frac{x^2}{2} + 4\sqrt{2}x + 16 - 16 = \frac{x^2}{2} + 4\sqrt{2}x$$

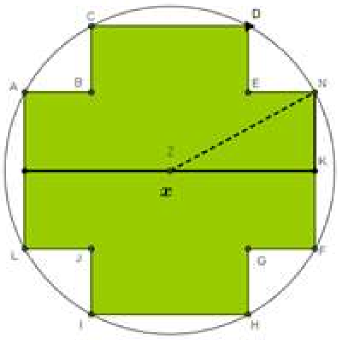
b) $D(f) = \{x \in R \mid e\ x > 0\}$

c) Não existe

d) Não existe

Atividade 8

Uma cruz simétrica é a figura formada pela sobreposição de dois retângulos congruentes e ortogonais inscritos em um círculo. Na figura, visualiza-se uma cruz simétrica inscrita em um círculo de raio unitário cujo comprimento do retângulo que constitui a cruz mede x centímetros. A área A da cruz varia com o valor de x escolhido.



a) Determine valor da área A em função de x.

b) Determine o domínio da função.

c) Para que valor de x, a área da cruz é máxima?

d) Para que valor de x, a área da cruz é mínima?

Solução:

a) Primeiro devemos determinar a medida do lado do retângulo ANFL, que possui a mesma medida do retângulo CDHI.

Desta forma devemos determinar a medida de NK que é: $NK^2 = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$NK = \sqrt{\frac{(4-x^2)}{4}}$, logo $2NK = \sqrt{4 - x^2}$

Portanto, a área de cada retângulo é: $x.\sqrt{4 - x^2}$

Depois devemos determinar a área do quadrado interno que foi contado duas vezes e fazer a diferença das áreas.

A área do quadrado de lado NF é: $(2NK)^2 = (4 - x^2)$

A diferença das áreas é :$x.\sqrt{4 - x^2}$ - $(4 - X^2)$

$$A(x) = x.\sqrt{4 - x^2} - 4 + x^2$$

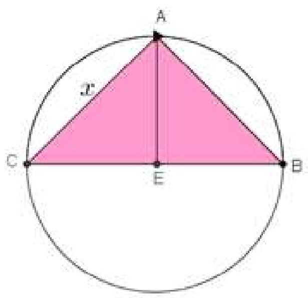
b) $D(A) = \{x \in R \mid e\ 1{,}41 < x < 2\}$

c) $x = 1{,}7$

d) Não existe.

Atividade 9

Na figura, visualiza-se o triângulo ABC inscrito em um círculo de raio medindo 4 centímetros que varia de tamanho a medida que movimentamos o ponto A sem que ultrapasse os pontos B e C. A variável x representa o comprimento do lado AC do triângulo e BC está sobre o diâmetro do círculo.



a) Determine a área $A = A(x)$ do triângulo ABC em função de x.

b) No contexto do problema, qual é o domínio da função obtida no item a?

c) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do triângulo ABC é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de x, caso existam, para os quais a área do triângulo ABC é mínima.

Solução:

a) Sabe - se que o triângulo ABC é retângulo em A, logo, utilizando o Teorema de Pitágoras temos: $AB = \sqrt{64 - x^2}$

Portanto $A(x) = \frac{x.\sqrt{64-x^2}}{2} cm^2$

b) $Dom\ (A) = \{x \in R/0 < x < 8\}$

c) $x = 4\sqrt{2}$ cm

d) Não existe.

Avaliação da oficina

Sua opinião é importante!

Lembre-se: você não precisa concordar!

Marque o *smile* que melhor representa seu grau de concordância com cada item.

1. O *Geogebra* auxiliou você na resolução dos problemas propostos.

2. Você gostou das atividades apresentadas.

3. Você gostaria que o seu professor utilizasse estas atividades em sala de aula.

4. A utilização do *Geogebra* proporcionou um melhor entendimento do significado de domínio de uma função.

5. A utilização do *Geogebra* proporcionou um melhor entendimento do significado de função.

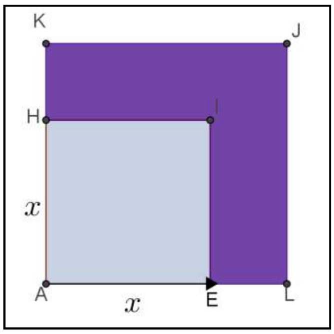
6. A utilização do *Geogebra* ajudou a encontrar a expressão que define a função.

7. Após a realização das atividades você tem mais segurança em resolver problemas relacionados ao conceito de função.

FICHA DE ATIVIDADE DA VERSÃO IMPRESSA

Atividade 1

Seja ALJK um quadrado de lado 4 centímetros e AEIH um outro quadrado interno a este com um vértice em comum e lado medindo x centímetros. Sabe-se que a área S do polígono ELJKHI varia de acordo com o tamanho escolhido para o segmento x.



a) Determine a área S do polígono ELJKHI em função de x.

S(x) =

b) Determine o domínio da função.

D(S) =

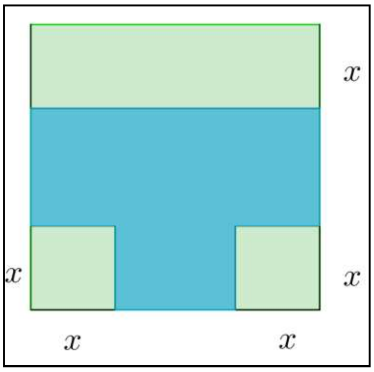
c) Para que valor de x, a área do polígono ELJKHI é máxima?

d) Para que valor de x, a área do polígono ELJKHI é mínima?

FICHA DE ATIVIDADE DA VERSÃO IMPRESSA

Atividade 2

De uma folha de papel quadrada de lado medindo 4 centímetros, retira-se um retângulo de largura x centímetros de sua parte superior e dois quadradinhos de lado x centímetros de cada ponta da parte inferior, formando uma figura em forma de T. A área A da figura T varia com o valor de x escolhido.



a) Determine a área A em função de x.

A(x) =

b) Determine o domínio da função.

D(A) =

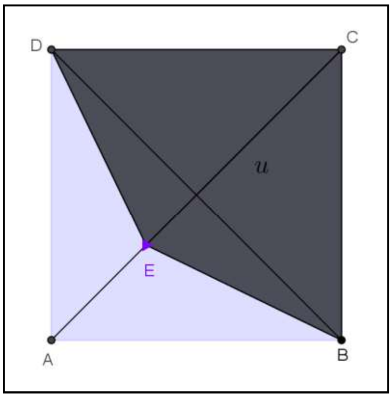
c) Para que valor de x, a área da figura T é máxima?

d) Para que valor de x, a área da figura T é mínima?

FICHA DE ATIVIDADE DA VERSÃO IMPRESSA

Atividade 3

Na figura, visualiza-se o quadrado ABCD de lado medindo 4 centímetros e um polígono cinza, EBCD, que varia de tamanho à medida que deslocamos o vértice E ao longo da diagonal do quadrado. A variável u representa o comprimento do segmento EC.



a) Determine a área S do polígono EBCD em função de u.

$S(u) =$

b) Determine o domínio da função.

$D(S) =$

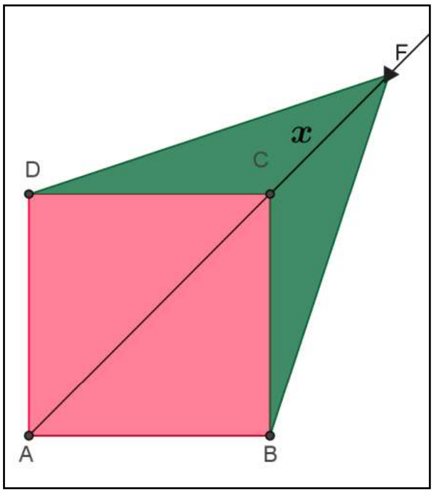
c) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{u}$, caso existam, para os quais a área do polígono EBCD é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{u}$, caso existam, para os quais a área do polígono EBCD é mínima.

FICHA DE ATIVIDADE DA VERSÃO IMPRESSA

Atividade 4

Na figura, visualiza-se o quadrado ABCD de lado medindo 6 centímetros e um polígono verde, BCDF, que varia de tamanho à medida que deslocamos a seta F ao longo da semirreta, originada pelo prolongamento da diagonal do quadrado. A variável x representa o comprimento do segmento CF.



a) Determine a área A do polígono BCDF em função de x.

$A(x) =$

b) Determine o domínio da função.

$D(A) =$

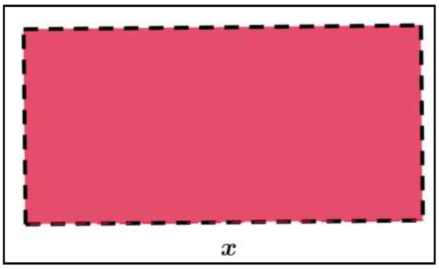
c) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{x}$, caso existam, para os quais a área do polígono BCDF é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{x}$, caso existam, para os quais a área do polígono BCDF é mínima.

FICHA DE ATIVIDADE DA VERSÃO IMPRESSA

Atividade 5

Um granjeiro utilizou 100 metros lineares de tela para cercar um terreno retangular:



a) Obter a lei $y = f(x)$ que expressa a área y, em metros quadrados, do terreno em função da medida x, em metros, da base do retângulo.

$f(x) =$

b) No contexto do problema, qual é o domínio da função f obtida no ítem a?

$D(f) =$

c) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{x}$, caso existam, para os quais a área do retângulo é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{x}$, caso existam, para os quais a área do retângulo é mínima.

FICHA DE ATIVIDADE DA VERSÃO INTERATIVA

Atividade 1

Abra o arquivo Atividade_1.ggb.

Nele visualizamos duas janelas: Na janela da esquerda visualiza-se o quadrado ALJK de lado 4 centímetros e AEIH um outro quadrado interno a este com um vértice em comum e lado medindo x centímetros. Sabe-se que a área S do polígono ELJKHI varia de acordo com o valor de x escolhido.

Para alterar o valor de x, clique sobre a seta preta e a mantenha pressionada durante toda a movimentação. Ao clicar e movimentar a seta preta, a área do quadrado menor poderá aumentar ou diminuir.

a) Determine a área S do polígono ELJKHI em função de x.

b) Determine o domínio da função.

c) Para que valor de $\boldsymbol{x}$, a área do polígono ELJKHI é máxima?

d) Para que valor de $\boldsymbol{x}$, a área do polígono ELJKHI é mínima?

Observação 1: Se você preferir, você pode resolver o problema olhando apenas para a janela de visualização da direita. Nesta janela visualiza-se o gráfico da função. À medida que movemos a seta preta da figura, de forma simultânea, na janela de visualização 2, o ponto M movimenta-se deixando como rastro o gráfico da função.

Observação 2: para voltar à figura inicial basta clicar em uma seta ("refazer") que fica no canto superior direito da tela do Geogebra.

FICHA DE ATIVIDADE DA VERSÃO INTERATIVA

Atividade 2

Abra o arquivo Atividade_2.ggb. Nele visualizamos duas janelas:

Na janela da esquerda visualiza-se um quadrado de lado medindo 4 centímetros, do qual retira-se um retângulo de largura x de sua parte superior e dois quadradinhos de lado x de cada vértice da parte inferior, formando uma figura em forma de T. A área A da figura T varia com o valor de x escolhido.

a) Determine a área A em função de $\boldsymbol{x}$.

A($\boldsymbol{x}$)=

b) Determine o domínio da função.

D(A)=

c) Para que valor de $\boldsymbol{x}$, a área da figura T é máxima?

d) Para que valor de x, a área da figura T é mínima?

Observação 1: Para alterar o valor de x, movimente o controle deslizante clicando sobre o ponto preto, mantendo-o pressionado. Ao clicar e movimentar o ponto preto, a área dos pedaços retirados poderão aumentar (movendo para a direita) ou diminuir (movendo para a esquerda), alterando a área da figura T.

Observação 2: Se você preferir, você pode resolver o problema olhando apenas para a janela de visualização da direita. Nesta janela visualiza-se o gráfico da função. À medida que movemos o ponto preto do controle deslizante, de forma simultânea, na janela de visualização 2, o ponto M movimenta-se deixando como rastro o gráfico da função.

Observação 3: Para voltar à figura inicial basta clicar na seta  (“refazer”) que fica no canto superior direito da tela do Geogebra.

FICHA DE ATIVIDADE DA VERSÃO INTERATIVA

Atividade 3

Abra o arquivo Atividade_3.ggb. Nele visualizamos duas janelas:

Na janela da esquerda visualiza-se o quadrado ABCD de lado medindo 4 centímetros e um polígono cinza, EBCD, que varia de tamanho à medida que deslocamos o vértice E ao longo da diagonal do quadrado. A variável u representa o comprimento do segmento EC.

a) Determine a área S do polígono EBCD em função de u**.**

$S(u) =$

b) Determine o domínio da função.

$D(S) =$

c) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{u}$, caso existam, para os quais a área do polígono EBCD é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{u}$, caso existam, para os quais a área do polígono EBCD é mínima.

Observação 1: Se você preferir, você pode resolver o problema olhando apenas para a janela de visualização da direita. Nesta janela visualiza-se o gráfico da função. À medida que movemos a seta preta da figura, o ponto M movimenta-se na janela de visualização 2, deixando como rastro o gráfico da função.

Observação 2: para voltar à figura inicial basta clicar em uma seta (“refazer”) que fica no canto superior direito da tela do Geogebra.

FICHA DE ATIVIDADE DA VERSÃO INTERATIVA

Atividade 4

Abra o arquivo Atividade_4.ggb. Nele visualizamos duas janelas:

Na janela da esquerda visualiza-se um quadrado ABCD de lado medindo 6 centímetros e um polígono que varia de tamanho a medida que clicamos sobre o ponto F e movimentamos. A variável x representa o comprimento que vai do vértice C do quadrado ao ponto F que movimentamos.

a) Determine a área A do polígono BCDF em função de x.

$A(x) =$

b) Determine o domínio da função.

$D(A) =$

c) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{x}$, caso existam, para os quais a área do polígono BCDF é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{x}$, caso existam, para os quais a área do polígono BCDF é mínima.

Observação 1: Se você preferir, você pode resolver o problema olhando apenas para a janela de visualização da direita. Nesta janela visualiza-se o gráfico da função. À medida que movemos a seta preta da figura, o ponto M movimenta-se na janela de visualização 2, deixando como rastro o gráfico da função.

Observação 2: para voltar à figura inicial basta clicar em uma seta (“refazer”) que fica no canto superior direito da tela do Geogebra.

FICHA DE ATIVIDADE DA VERSÃO INTERATIVA

Atividade 5

Abra o arquivo Atividade_5.ggb. Nele visualizamos duas janelas:

Na janela da esquerda visualiza-se um retângulo de base medindo x metros e perímetro 100 metros. Para alterar o valor de x, clique sobre o ponto preto e o mantenha pressionado durante toda a movimentação. Ao clicar e movimentá-lo, a área do retângulo poderá aumentar ou diminuir.

a) Obter a lei $y = f(x)$ que expressa a área y, em metros quadrados, do terreno em função da medida x, em metros, da base do retângulo.

$f(x) =$

b) No contexto do problema, qual é o domínio da função f obtida no ítem a?

$D(f) =$

c) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{x}$, caso existam, para os quais a área do retângulo é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{x}$, caso existam, para os quais a área do retângulo é mínima.

Observação 1: Se você preferir, você pode resolver o problema olhando apenas para a janela de visualização da direita. Nesta janela visualiza-se o gráfico da função. À medida que movemos a seta preta da figura, o ponto M movimenta-se na janela de visualização 2, deixando como rastro o gráfico da função.

Observação 2: para voltar à figura inicial basta clicar em uma seta (“refazer”) que fica no canto superior direito da tela do Geogebra.

FICHA DE ATIVIDADE DA VERSÃO INTERATIVA

Atividade 6

Abra o arquivo Atividade_6.ggb. Nele visualizamos duas janelas:

Na janela da esquerda visualiza-se um ângulo inscrito ACB em um círculo de raio $2\sqrt{2}$ centímetros e segmento AB que é o lado de um quadrado inscrito no circulo.
Considere t a medida do arco BC contido no arco BA e α a medida do ângulo ACB.
Determine:

a) o valor $\boldsymbol{\alpha}$ do ângulo ACB em função de t;

b) o domínio de $\boldsymbol{\alpha}$ em função de t;

c) o(s) valor(es) de t, caso existam, para os quais o valor de $\boldsymbol{\alpha}$ é máximo;

d) o(s) valor(es) de t, caso existam, para os quais o valor de $\boldsymbol{\alpha}$ é mínimo;

Observação 1: Para alterar o valor de t, clique sobre a seta preta localizada no vértice C e a mantenha pressionada durante toda a movimentação.

Observação 2: Se você preferir, você pode resolver o problema olhando apenas para a janela de visualização da direita. Nesta janela visualiza-se o gráfico da função. À medida que movemos a seta preta da figura, de forma simultânea, na janela de visualização 2, o ponto M movimenta-se deixando como rastro o gráfico da função.

Observação 3: para voltar à figura inicial basta clicar em uma seta  (“refazer”) que fica no canto superior direito da tela do Geogebra.

FICHA DE ATIVIDADE DA VERSÃO INTERATIVA

Atividade 7

Abra o arquivo Atividade_7.ggb. Nele visualizamos duas janelas:

Na janela da esquerda visualiza-se um quadrado de lado medindo 4 centímetros e um polígono vinho que varia de tamanho a medida que clicamos sobre o ponto e movimentamos. A variável x representa o comprimento que vai do vértice do quadrado ao ponto que movimentamos.

a) Escreva a área da nova figura (em vinho) em função do segmento x.

$f(x) =$

b) Determine o domínio da função.

$D(f) =$

c) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{x}$, caso existam, para os quais a área do polígono vinho é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{x}$, caso existam, para os quais a área do polígono vinho é mínima.

Observação 1: Se você preferir, você pode resolver o problema olhando apenas para a janela de visualização da direita. Nesta janela visualiza-se o gráfico da função. À medida que movemos a seta preta da figura, de forma simultânea, na janela de visualização 2, o ponto M movimenta-se deixando como rastro o gráfico da função.

Observação 2: para voltar à figura inicial basta clicar em uma seta (“refazer”) que fica no canto superior direito da tela do Geogebra.

FICHA DE ATIVIDADE DA VERSÃO INTERATIVA

Atividade 8

Abra o arquivo Atividade_8.ggb. Nele visualizamos duas janelas.

Uma cruz simétrica é a figura formada pela sobreposição de dois retângulos congruentes e ortogonais inscritos em uma circunferência. Na janela da esquerda visualiza-se uma cruz simétrica inscrita em um círculo de raio unitário cujo comprimento do retângulo que constitui a cruz mede x centímetros. A área A da cruz varia com o valor de x escolhido.

e) Determine valor da área A em função de $\boldsymbol{x}$.

A($\boldsymbol{x}$)=

f) Determine o domínio da função.

D(A)=

g) Para que valor de $\boldsymbol{x}$, a área da cruz é máxima?

h) Para que valor de $\boldsymbol{x}$, a área da cruz é mínima?

Observação 1: Para alterar o valor de x, clique e movimente a seta, mantendo-a pressionada.

Observação 2: Se você preferir, você pode resolver o problema olhando apenas para a janela de visualização da direita. Nesta janela visualiza-se o gráfico da função. À medida que movemos a seta preta da figura, o ponto M movimenta-se na janela de visualização 2, deixando como rastro o gráfico da função.

Observação 3: para voltar à figura inicial basta clicar em uma seta  ("refazer") que fica no canto superior direito da tela do Geogebra.

FICHA DE ATIVIDADE DA VERSÃO INTERATIVA

Atividade 9

Abra o arquivo Atividade_9.ggb. Nele visualizamos duas janelas:

Na janela da esquerda visualiza-se um triângulo inscrito em uma circunferência de raio medindo 4 centímetros que varia de tamanho a medida que clicamos sobre a seta preta. A variável x representa o comprimento do lado AC do triângulo.

a) Determine a área $A = A(x)$ do triângulo ABC em função de x.

b) No contexto do problema, qual é o domínio da função obtida no item a?

c) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{x}$, caso existam, para os quais a área do polígono ABC é máxima;

d) Determine o(s) valor(es) de $\boldsymbol{x}$, caso existam, para os quais a área do polígono ABC é mínima.

Observação 1: Se você preferir, você pode resolver o problema olhando apenas para a janela de visualização da direita. Nesta janela visualiza-se o gráfico da função. À medida que movemos a seta preta da figura, o ponto M movimenta-se na janela de visualização 2, deixando como rastro o gráfico da função.

Observação 2: para voltar à figura inicial basta clicar em uma seta  (“refazer”) que fica no canto superior direito da tela do Geogebra.