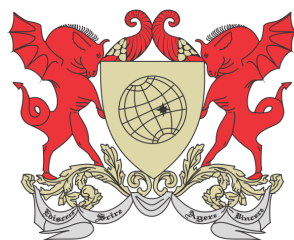


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



FELIX HORACIO MUNOZ MUNIZ JUNIOR

SEÇÕES CÔNICAS

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2018

FELIX HORACIO MUNOZ MUNIZ JUNIOR

SEÇÕES CÔNICAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2018

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T

M966s
2018

Muniz Junior, Felix Horacio Munoz, 2018-
Seções cônicas : . / Felix Horacio Munoz Muniz Junior. –
Florestal, MG, 2018.
xi, 78f : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 77-78.

1. Cônicas. 2. Elipse. 3. Hipérbole. 4. Parábola.
5. Geometria. 6. Matemática - estudo e ensino. I. Universidade
Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas.
Mestrado em Matemática - Profissional. II. Título.


FELIX HORACIO MUNOZ MUNIZ JUNIOR

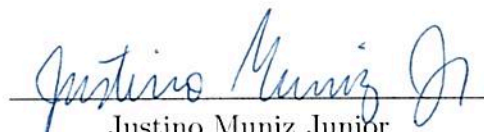
SEÇÕES CÔNICAS


Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

APROVADA: 09 de março de 2018.


Luis Felipe Gonçalves Fonseca


Éden Santana Campos Amorim


Justino Muniz Junior
(Coorientador)


Alexandre Alvarenga Rocha
(Orientador)

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa Vanessa, meus pais Felix e Matilde e minha irmã Laura.

Dedico também a cada aluno com o qual tive o prazer de trabalhar nesses anos de docência. A busca pelo aprimoramento profissional, em parte, foi motivada por vocês.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, por me dar condições de concluir mais um projeto de minha vida.

À minha amada esposa Vanessa, companheira e parceira na jornada da vida. Você é meu exemplo, minha inspiração e motivação. Obrigado por todo o incentivo nesse projeto. É um privilégio sonharmos na mesma direção!

À minha família: meu pai Felix, minha mãe Matildes e minha irmã Laura; vocês são fundamentais na minha vida. Muito obrigado por todo o incentivo e por ensinar que a educação é a melhor forma de se preparar para os desafios da vida.

Aos meus colegas do Profmat, a amizade e a alegria de vocês tornou essa caminhada mais leve e foi fundamental para vencer as dificuldades da nossa trajetória.

Ao meu orientador Alexandre, pela disponibilidade, ajuda e ensinamentos. Foram enriquecedoras as experiências como seu aluno e orientado.

Lista de Símbolos

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

\overline{AB} segmento de reta com extremidades nos pontos A e B $\triangle ABC$ triângulo com vértices nos pontos A , B e C

AB comprimento do segmento \overline{AB}

\widehat{ABC} ângulo com vértice em B $d(A,B)$ distância entre os pontos A e B

Lista de Figuras

3.1	Superfície Cônica Reta	7
3.2	Seções Cônicas	8
3.3	Segmentos tangentes à esfera	9
4.1	Esferas de Dandelin para seção tipo elipse	10
4.2	1º Teorema de Dandelin Quetelet para elipses	11
4.3	2º Teorema de Dandelin Quetelet para elipses	12
4.4	Definição usual de elipse 1	13
4.5	Definição usual de elipse 2	14
4.6	Elementos da elipse	15
4.7	Elipse com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OX	16
4.8	Elipse com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OY	17
4.9	Translação de eixos coordenados	17
4.10	Diretriz d_1 da elipse coincidente com o eixo OY e foco $F_1 = (0,p)$	20
4.11	Elipses com excentricidades próximas de 1 e de 0	20
4.12	Equações das diretrizes da elipse	22
4.13	<i>Latus Rectum</i> da Elipse	23
4.14	Construção geométrica da elipse	23
4.15	Construção da elipse com régua e compasso	24
4.16	Ilustração da construção da elipse com régua e compasso	24
4.17	Reta tangente à elipse	26
4.18	Propriedade refletora da elipse	27
5.1	Esferas de Dandelin para seções tipo hipérbole	28
5.2	1º Teorema de Dandelin Quetelet para hipérboles	29
5.3	2º Teorema de Dandelin Quetelet para hipérboles	30
5.4	Definição usual de hipérbole 1	32
5.5	Definição usual de hipérbole 2	32
5.6	Elementos da hipérbole	33
5.7	Hipérbole com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OX	34
5.8	Hipérbole com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OY	35

5.9	Hipérboles com excentricidades $e = 1,2$ e $e = 6,5$	38
5.10	Equações das diretrizes da hipérbole	39
5.11	Construção geométrica da hipérbole	41
5.12	Justificativa da construção geométrica da hipérbole	42
5.13	Construção da hipérbole com régua e compasso	42
5.14	Construção da hipérbole com régua e compasso 2	43
5.15	Reta tangente à hipérbole	44
5.16	Propriedade refletora da hipérbole	45
5.17	Propriedade refletora da hipérbole parte 2	46
6.1	Esfera de Dandelin para seções tipo parábola	47
6.2	2º Teorema de Dandelin Quetelet para parábolas	48
6.3	Definição usual de parábola	49
6.4	Elementos da parábola	50
6.5	Parábola com vértice na origem do sistema XOY e foco na parte positiva do eixo OY	51
6.6	Parábola com vértice na origem do sistema XOY e foco na parte negativa do eixo OY	51
6.7	Parábola com vértice na origem do sistema XOY e foco na parte positiva do eixo OX	52
6.8	Parábola com vértice na origem do sistema XOY e foco na parte negativa do eixo OX	53
6.9	Construção geométrica da parábola	55
6.10	Construção da parábola com régua e compasso	55
6.11	Construção da parábola com régua e compasso 2	56
6.12	Reta tangente à parábola	57
6.13	Propriedade refletora da parábola	57
6.14	Propriedade refletora da parábola parte 2	58
7.1	2ª Lei de Kepler	60
7.2	Trajetória parabólica	62
7.3	Fenômenos Naturais e Aplicações	63
7.4	Luminária de Dentistas	63
7.5	Sala dos Susurros	64
7.6	Sistema LORAN	65
7.7	Antena Parabólica	65
7.8	Forno Solar de Odelilo	66
7.9	Telescópio refletor de Newton	67
7.10	Telescópio refletor de Cassegrain	67
8.1	Obra Matemática Paiva	69
8.2	Obra Matemática:Contexto e Aplicações	71
8.3	Obra Novo Olhar Matemática	72
8.4	Obra Matemática ciência e aplicações	73

8.5	Obra Conexões com a Matemática	74
-----	--	----

Resumo

JUNIOR, Felix Horacio Munoz Muniz, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2018. **Seções Cônicas**. Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha. Coorientador: Justino Muniz Júnior.

As seções cônicas elipse, hipérbole e parábola são curvas obtidas a partir da interseção de uma superfície cônica de revolução de duas folhas e um plano secante. Tais curvas foram descobertas na Grécia Antiga por Menaecmus, quatro séculos antes de Cristo. Ainda na antiguidade, Apolônio de Perga escreveu o tratado denominado *As Cônicas*. Composta de oito volumes, essa obra representa o auge do desenvolvimento teórico do assunto e influenciou diversos matemáticos ao longo dos séculos. As seções cônicas estão presentes na natureza, em especial, nos fenômenos relacionados à gravitação universal. Além disso, possuem propriedades refletoras que são exploradas pelo homem em diversos campos do conhecimento, tais como astronomia, engenharia e medicina. No que tange ao ensino, as seções cônicas são introduzidas no último ano do ensino básico, sendo apresentadas na sequência do estudo analítico da circunferência. A abordagem através da geometria analítica é predominante, resumindo-se de modo geral, à obtenção das equações canônicas das curvas. No entanto, as cônicas representam uma rica oportunidade de se trabalhar um assunto sobre o viés das três geometrias (espacial, plana e analítica). Uma abordagem mais aprofundada sobre as curvas é possível no ensino básico e tem o potencial de despertar nos alunos deste nível uma visão sobre o poder e a aplicabilidade da matemática.

Abstract

JUNIOR, Felix Horacio Munoz Muniz, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2018. **Conical Sections**. Adviser: Alexandre Alvarenga Rocha. Co-adviser: Justino Muniz Júnior.

The ellipse, hyperbole and parabola conical sections are curves obtained from the intersection of a conical surface of two-sheet revolution and a secant plan. Menaecmus discovered those curves in Ancient Greece, four centuries before Christ. At the same period, during the ancient times, Apollonius of Perga wrote the Treaty called *Conics*. Composed by eight volumes, this work represents the peak of theoretical development of the topic and influenced many mathematicians over the centuries. The conical sections are present in nature, in special, at universal gravitation phenomena. Furthermore, they have reflective proprieties that are explored by man in various knowledge fields, such as astronomy, engineering and medicine. With regard to teaching, the conical sections are introduced in the last year of high school, and are presented just after the analytic study of circumference. The approach through analytical geometry is prevalent, mostly about the obtaining of canonical equations of the curves. However, the conics represent a great opportunity to work at the same topic from the three geometries (space, plane and analytical). A deeper approach about the curves is possible in high school and it has the potential to awaken in students, a view about the power and applicability of math.

Sumário

1	Introdução	1
2	Aspéctos Históricos das Seções Cônicas	3
3	Seções Cônicas	6
3.1	Superfície Cônica de Revolução e o Teorema de Apolônio	6
3.2	Excentricidade de uma Seção Cônica	7
3.3	Os Teoremas de Dandelin-Quetelet	9
4	Elipses	10
4.1	Elementos da Elipse	14
4.2	Tratamento Analítico da Elipse	15
4.2.1	Elipse ε com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OX	15
4.2.2	Elipse ε com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OY	16
4.2.3	Formas canônicas da elipse com centro fora da origem: translação de eixos coordenados	16
4.2.4	A excentricidade da elipse	18
4.2.5	As equações das retas diretrizes da elipse	20
4.3	Tratamento geométrico da Elipse	21
4.3.1	<i>Lactus Rectum</i> da Elipse	21
4.3.2	Construção da elipse com fio inextensível	22
4.3.3	Uma construção da Elipse com régua e compasso	23
4.3.4	Reta tangente e propriedade refletora da elipse	25
5	Hipérboles	28
5.1	Elementos da Hipérbole	32
5.2	Tratamento Analítico da Hipérbole	33
5.2.1	Hipérbole H com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OX	34
5.2.2	Hipérbole H com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OY	35
5.2.3	Formas canônicas da hipérbole com centro fora da origem	35

5.2.4	A excentricidade da hipérbole	36
5.2.5	As equações das retas diretrizes da hipérbole	38
5.2.6	Assíntotas da hipérbole	40
5.3	Tratamento geométrico da Hipérbole	40
5.3.1	Construção da hipérbole com uma haste e um fio inextensível	40
5.3.2	Uma construção da Hipérbole com régua e compasso	41
5.3.3	Reta tangente e propriedade refletora da hipérbole	43
6	Parábolas	47
6.1	Elementos da Parábola	49
6.2	Tratamento Analítico da Parábola	50
6.2.1	Parábola λ com vértice na origem do sistema XOY e eixo de simetria coincidente com o eixo OY	50
6.2.2	Parábola λ com vértice na origem do sistema XOY e eixo de simetria coincidente com o eixo OX	52
6.2.3	Formas canônicas da parábola com centro fora da origem	53
6.3	Tratamento geométrico da Parábola	54
6.3.1	Construção da parábola com esquadro e fio inextensível	54
6.3.2	Uma construção da Parábola com régua e compasso	55
6.3.3	Reta tangente e propriedade refletora da parábola	56
7	Fenômenos Naturais e Aplicações	59
7.1	As seções cônicas em fenômenos naturais	59
7.1.1	Kepler e a trajetória dos planetas	59
7.1.2	Galileu e as trajetórias parabólicas	61
7.1.3	Newton e o <i>Principia</i>	61
7.2	Aplicações das Seções Cônicas	62
7.2.1	Luminárias de Dentistas	63
7.2.2	Sala dos Sussurros	64
7.2.3	Sistema LORAN (Long Range Navigation)	64
7.2.4	Antenas Parabólicas	65
7.2.5	Forno Solar	65
7.2.6	Telescópios Refletores	66
8	Seções Cônicas no Ensino Básico	68
8.1	Análise da obra <i>Matemática Paiva</i> (ver [17])	69
8.2	Análise da obra <i>Matemática: Contexto e Aplicações</i> (ver [3])	70
8.3	Análise da obra <i>Novo Olhar Matemática</i> (ver [22])	71
8.4	Análise da obra <i>Matemática ciência e aplicações</i> (ver [11])	73
8.5	Análise da obra <i>Conexões com a Matemática</i> (ver [18])	74
9	Considerações Finais	75
	Bibliografia	77

Introdução

Elipses, hipérbolas e parábolas são curvas planas denominadas seções cônicas (ou simplesmente cônicas), pois estas podem ser obtidas como resultantes da interseção de uma superfície cônica de revolução de duas folhas com um plano secante. As posições relativas entre a superfície cônica e o plano definem a curva formada. Além da verdade, se contemplarmos todas as possibilidades de curvas obtidas pela interseção de uma superfície cônica e um plano há a circunferência, que é tratada por alguns autores como um caso particular de elipse. E ainda, se o plano secante contiver o vértice da superfície cônica, a interseção resultante pode ser um ponto, uma reta ou um par de retas concorrentes que, nesses casos, são denominadas cônicas degeneradas.

As origens das cônicas remontam a Grécia Antiga. O matemático grego Menaecmus (380-320 a.C.) descobriu as elipses, hipérbolas e parábolas quando tratava de três conhecidos problemas da geometria grega: a triseção de um ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Segundo [21] outros gregos como Aristeu (370-300 a.C.) e o próprio Euclides (325-265 a.C.) estudaram as cônicas e algumas de suas propriedades. De acordo com [2], Arquimedes (287-212 a.C.) dedicou uma pequena parcela de sua grande contribuição à Matemática ao estudo das cônicas, e entre outras descobertas teria determinado a área da elipse. No entanto, o principal nome da matemática grega antiga associada ao estudo das cônicas, é o de Apolônio de Perga (262-190 a.C.) que escreveu um tratado intitulado Seções Cônicas, composto por oito volumes, que superou todos os tratados anteriores sobre o tema. Esta obra representa o auge teórico no estudo das curvas e teve influência nas descobertas de diversos cientistas muitos séculos após ser concebida.

As seções cônicas estão presentes de maneira intrínseca na natureza. Johannes Kepler (1571-1630) descobriu, baseado nos registros astronômicos existentes à época, que as trajetórias dos planetas em torno do Sol são elípticas e não circulares como se acreditava, tanto no modelo geocêntrico de Ptolomeu como no modelo heliocêntrico de Copérnico. Galileu Galilei (1564-1642) descobriu que, desprezando-se a resistência do ar, a trajetória que um projétil lançado obliquamente descreve é uma parábola. Poucos anos mais tarde, Sir Isaac Newton (1642-1727) demonstrou que, como consequência da forma como age a força gravitacional, as trajetórias dos corpos celestes são elipses,

hipérboles ou parábolas, a depender da energia do sistema. Além disso, as cônicas possuem propriedades específicas de suas formas que são empregadas em diversos contextos pelo homem, como por exemplo em antenas e receptores, telescópios, equipamentos médicos, holofotes, sistemas de navegação, construção civil, dentre outros.

No que tange ao ensino, o assunto cônicas está presente já na educação básica. A parábola é amplamente trabalhada no primeiro ano do Ensino Médio, no contexto do gráfico das função quadráticas, mas sem haver um tratamento das propriedades da curva. De acordo com o documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio do Governo Federal (ver [1]), o assunto cônicas é tratado como tema complementar do currículo de Matemática, cabendo aos professores definirem a viabilidade de se trabalhar o tema, conforme cada contexto escolar. Quando trabalhadas, as curvas elipse e hipérbole são introduzidas no último ano do ensino médio, geralmente como uma sequência do estudo analítico da circunferência. É neste momento que também ocorre o estudo da parábola como um lugar geométrico no plano.

A evolução histórica das seções cônicas, bem como sua relevância tanto em fenômenos naturais como em aplicações tecnológicas desenvolvidas pelo homem, nos motiva a estudá-las mais profundamente neste trabalho. Acredita-se que este tópico da Matemática apresenta a rica possibilidade de se estudar um mesmo assunto sobre o viés das três geometrias: espacial, plana e analítica. Ademais, pretende-se avaliar a abordagem dada ao assunto no Ensino Básico, através de uma análise crítica das obras distribuídas às escolas públicas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do Governo Federal.

Aspéctos Históricos das Seções Cônicas

Segundo [6] as origens das cônicas remontam a Grécia Antiga no século IV a.C. O matemático grego e discípulo de Eudoxo, Menaecmus (380-320 a.C., aproximadamente) descobriu as cônicas quando tratava de três conhecidos problemas de construção da geometria grega:

i) a triseccção de um ângulo: dado um ângulo, construir um ângulo com um terço da amplitude;

ii) a duplicação do cubo: dado um cubo, construir um cubo com o dobro do volume do cubo original;

iii) a quadratura do círculo: dado um círculo, construir um quadrado de mesma área.

Estes problemas conduziam a elementos que satisfizessem propriedades expressas na proporção aumentada $a/x = x/y = y/2a$. Menaecmus descobriu que havia curvas com as propriedades desejadas. Estas curvas, que mais tarde foram denominadas elipses, hipérbolas e parábolas, podiam ser obtidas de uma mesma fonte: o corte de um cone circular reto por um plano perpendicular a um elemento do cone [2].

O primeiro tratado matemático sobre as seções cônicas é atribuído ao geômetra grego Aristeu (370-300 a.C., aproximadamente), que teria escrito cinco livros sobre as seções cônicas, apresentando um estudo das curvas e suas propriedades [6].

De acordo com [5], Euclides de Alexandria (325-265 a.C., aproximadamente) autor da ilustre obra matemática Os Elementos, também escreveu um tratado sobre seções cônicas em quatro volumes. No entanto, assim como vários outros de seus trabalhos, este tratado se perdeu, sendo conhecidos apenas por comentários posteriores.

Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C., aproximadamente), notável por seus trabalhos em matemática, física e engenharia, dedicou uma pequena parcela de sua grande contribuição à Matemática ao estudo das cônicas, e dentre outras descobertas teria determinado a área da elipse.

O principal trabalho sobre as cônicas, considerando toda a história da matemática, é devido a Apolônio de Perga (262-190 a.C., aproximadamente). Pouco se sabe sobre a vida de Apolônio, mas este juntamente a Euclides e Arquimedes formam a tríade

dos maiores matemáticos gregos da Antiguidade. Considerada a sua obra prima, Apolônio escreveu o tratado denominado *As Cônicas*, composto de oito livros dos quais sete foram preservados e chegaram até nós. Segundo [5], a obra de Apolônio reuniu cerca de 400 proposições em seus oito livros, superando completamente os trabalhos de Menaecmus, Aristeu e Euclides sobre o assunto. Segundo [27], além de reunir todo o conhecimento que já existia sobre cônicas, dando os devidos créditos aos autores, *As Cônicas* de Apolônio aprofundou muito esse tópico da matemática.

Apolônio trouxe inúmeras abordagens novas em seu trabalho sobre cônicas. As próprias terminologias elipse, hipérbole e parábola, embora já fossem utilizadas por Euclides em contextos indiretamente relacionados, teriam sido associadas às seções cônicas por Apolônio [19]. De acordo com [2], antes de Apolônio, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas de três tipos distintos de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Apolônio demonstrou que as três curvas poderiam ser obtidas de um mesmo cone variando apenas a inclinação do plano de seção. Além disso, Apolônio generalizou o conceito de seção cônica, demonstrando que para obtenção das curvas o cone circular não precisava ser reto, mas poderia ser um cone oblíquo, preservando as propriedades das curvas. Outra novidade introduzida por Apolônio foi a utilização do cone circular de duas folhas, ao invés do cone de uma única folha. Isso fez da hipérbole a curva de dois ramos da forma como a conhecemos hoje. De acordo com [15] Apolônio abordou propriedades fundamentais das cônicas em suas obras, tais como assíntotas, diâmetros conjugados e retas tangentes. *As Cônicas* de Apolônio em diversos aspectos foram uma antecipação da Geometria Analítica que seria desenvolvida no século XVII. Segundo [26], embora Apolônio não se reportasse a um sistema de eixos (hoje denominados cartesianos), utilizava um par de diâmetros conjugados como equivalentes aos eixos oblíquos.

A importância dos trabalhos de Apolônio com *As Cônicas* atravessou os séculos. É notável a sua influência sobre os trabalhos astronômicos de Johannes Kepler (1571-1630) que, baseado nos registros existentes à época (coletados pelas observações de Tycho Brahe), descobriu que as trajetórias dos planetas em torno do Sol são elípticas e não circulares como se acreditava a época. Influenciou também a mecânica de Galileu Galilei (1564-1642) que descobriu que se desprezando a resistência do ar, a trajetória que um projétil lançado obliquamente descreve é uma parábola. Poucos anos mais tarde, Sir Isaac Newton (1642-1727) demonstrou que, como consequência da forma como age a força gravitacional, as trajetórias dos corpos celestes são elipses, hipérbolas ou parábolas, a depender da energia do sistema. Para se ter uma ideia da relevância da obra de Apolônio,[2] traz:

“... foi a matemática pura de Apolônio que permitiu, cerca de 1800 anos mais tarde, os *Principia* de Newton; esse por sua vez, deu aos cientistas da década de 1960 condições para que a viagem de ida e volta a Lua fosse possível.” (p. 118)

A história das cônicas, assim como a da Matemática de um modo geral, não foi construída de forma linear. A intensa produção observada na antiguidade não se manteve nos séculos seguintes. Em particular, a idade Média (476 d.C.- 1453) foram

séculos de poucos avanços no que se referem às cônicas [27]. Depois de Apolônio, avanços significativos nesta área só vieram a ocorrer na idade moderna (1453-1789). Ao longo dos séculos desse período, diversos matemáticos deram contribuições para o estudo dessas curvas, com destaque para o matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665) que, utilizando-se dos trabalhos desenvolvidos por René Descartes (1596-1650), desenvolveu o tratamento analítico das cônicas, como suas equações cartesianas e transformações equivalentes às atuais rotações de eixos [26].

Já na idade contemporânea, destaca-se o trabalho do matemático belga Pierre Dandelin (1794-1847) que, utilizando as esferas inscritas na superfície cônica de revolução, estudadas pelo também matemático belga Jacques Quetelet (1796-1874), deu uma nova demonstração para o Teorema de Apolônio sobre as curvas formadas pelas seções cônicas. A abordagem de Dandelin forneceu uma nova perspectiva ao assunto que facilitou a visualização de certos conceitos sobre tais curvas [23].

Seções Cônicas

3.1 Superfície Cônica de Revolução e o Teorema de Apolônio

Apolônio de Perga forneceu uma definição para uma superfície cônica de revolução (de duas folhas) que continua válida ainda hoje:

“Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo, que não está em um mesmo plano com o ponto, de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo.”

Em linguagem atual, o ponto fixo da definição de Apolônio é chamado vértice da superfície cônica, as retas móveis são denominadas geratrizes e a circunferência é denominada diretriz. Tem-se ainda que a reta que une o vértice ao centro da circunferência diretriz é denominado eixo do cone. No caso em que o eixo é ortogonal ao plano que contém a circunferência diretriz, a superfície resultante é dita reta. A figura 3.1 apresenta os elementos de construção e a superfície cônica reta consolidada.

O teorema de Apolônio diz que a seção feita numa superfície cônica por um plano qualquer, que não contenha o vértice do cone, é uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, segundo o plano secante faz com o eixo do cone um ângulo superior, inferior ou igual ao semi-ângulo no vértice do cone, conforme pode ser visualizado na figura 3.2.

A fim de se esgotar todas as possibilidades para uma seção cônica, tem-se que se o ângulo β for reto, isto é, se o eixo do cone for ortogonal ao plano secante, então a seção resultante será uma circunferência. E ainda, se o plano secante passar pelo vértice da seção cônica, então a seção resultante será um ponto, uma reta ou um par de retas concorrentes e, nesses três casos, serão denominadas cônicas degeneradas. Outro fato digno de nota, é que para obtenção das curvas (elipse, hipérbole e parábola) a superfície cônica não precisa ser reta, podendo ser obtidas a partir de um cone circular oblíquo ou escaleno. Segundo [2], o próprio Apolônio teria descoberto essa

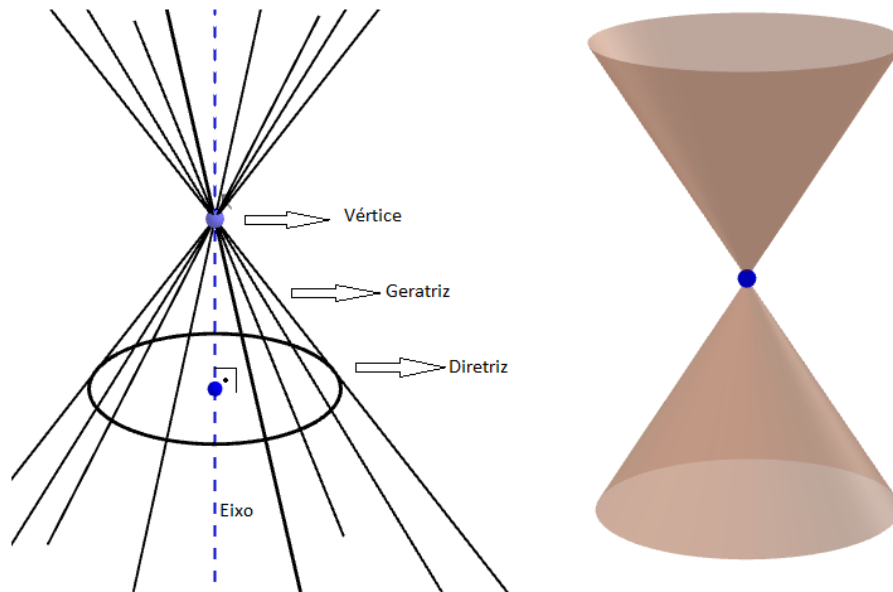


Figura 3.1: Elementos de construção e superfície cônica reta consolidada.

generalização. No entanto, nesta dissertação, sem perdas de generalidade para as propriedades das curvas e devido ao escopo pretendido, trataremos apenas os casos elipse, hipérbole e parábola obtidas pela interseção de um plano com uma superfície cônica reta.

3.2 Excentricidade de uma Seção Cônica

Definição 3.1: Seja α o ângulo formado entre uma geratriz qualquer do cone e seu eixo e β o ângulo que o plano de corte forma com o mesmo eixo, conforme ilustra a figura 3.2. Denomina-se excentricidade e da seção cônica a razão entre os cossenos dos ângulos β e α :

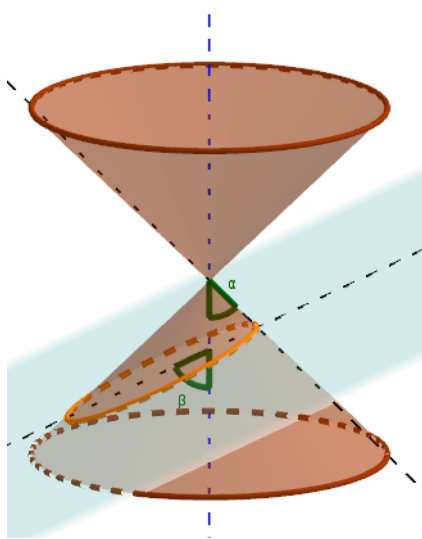
$$e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \tag{3.1}$$

Das definições de seções cônicas e de excentricidade têm-se três casos:

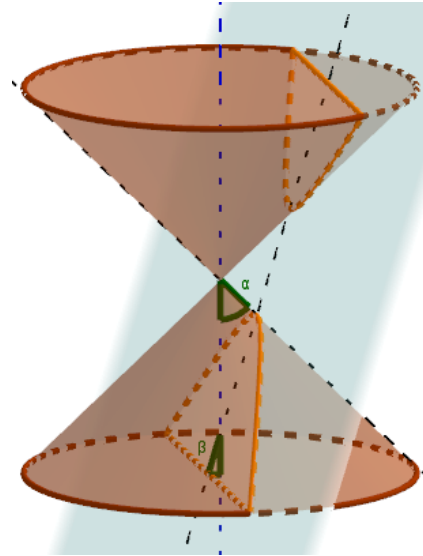
i) *Elipse* (figura 3.2a): neste caso o plano de seção é oblíquo ao eixo vertical e à geratriz do cone e intercepta a superfície cônica em apenas uma folha. Como $0 < \alpha, \beta < 90^\circ$ e $\beta > \alpha$, segue que $0 < \cos \beta < \cos \alpha < 1$. Portanto, para a excentricidade da elipse e_{ELIPSE} , tem-se:

$$0 < e_{ELIPSE} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} < 1 \tag{3.2}$$

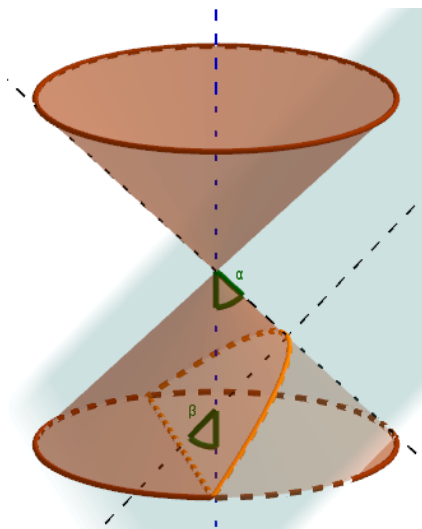
ii) *Hipérbole* (figura 3.2b): neste caso o plano de seção é oblíquo ao eixo vertical e à geratriz do cone, mas intercepta a superfície cônica nas duas folhas. Como $0 < \alpha, \beta < 90^\circ$ e $\beta < \alpha$, segue que $0 < \cos \alpha < \cos \beta < 1$. Portanto, para a



(a) Seção cônica tipo Elipse



(b) Seção cônica tipo Hipérbole



(c) Seção cônica tipo Parábola

Figura 3.2: Seções Cônicas. Em a,b e c as seções são uma elipse, hipérbole e parábola, respectivamente

excentricidade da hipérbole $e_{HIPÉRBOLE}$, tem-se:

$$e_{HIPRBOLE} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} > 1 \tag{3.3}$$

iii) *Parábola*(figura 3.2c): neste caso o plano de seção é paralelo à geratriz do cone, oblíquo ao eixo vertical e intercepta a superfície cônica em apenas uma folha. Como $\alpha = \beta$ segue que $\cos\alpha = \cos\beta$. Portanto, para a excentricidade da parábola $e_{PARÁBOLA}$, tem-se:

$$e_{PARBOLA} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 1 \tag{3.4}$$

3.3 Os Teoremas de Dandelin-Quetelet

No século XIX, Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) e Adolphe Quetelet (1796-1874), dois matemáticos belgas, desenvolveram uma demonstração alternativa para as propriedades que hoje utilizamos para definir as cônicas.

Utilizando-se das esferas inscritas à superfície cônica e tangentes ao plano de interseção, hoje denominadas “Esferas de Dandelin” (duas nos casos da elipse e hipérbole e uma no caso da parábola) Dandelin e Quetelet conseguiram determinar os focos das cônicas e verificar as propriedades focais e das retas diretrizes de uma só vez. Essa nova abordagem permitiu a visualização de certas propriedades das cônicas através da geometria espacial.

Vale observar que Dandelin e Quetelet não conseguiram provar a propriedade focal das parábolas via sua esfera. No entanto, Pierce Morton em 1829 utilizou construções semelhantes às propostas por Dandelin e Quetelet para provar tal propriedade.

Nos capítulos 4, 5 e 6, dentre outras abordagens, as cônicas serão apresentadas sob a luz dos estudos desenvolvidos por Dandelin e Quetelet. Para as demonstrações que seguem, faz-se necessário o lema 3.1:

Lema 3.1: Considere uma esfera e um ponto P exterior. Se \overline{PA} e \overline{PB} são dois segmentos tangentes à esfera, então $PA = PB$.

Demonstração. Seja O o centro da esfera de raio r (ver figura 3.3). Como \overline{PA} e \overline{PB} são dois segmentos tangentes à esfera, tem-se que $\hat{PAO} = \hat{PBO} = 90^\circ$. Além disso, $AO = BO = r$. Segue então, da congruência dos triângulos PAO e PBO (pelo caso cateto-hipotenusa), que $PA = PB$. \square

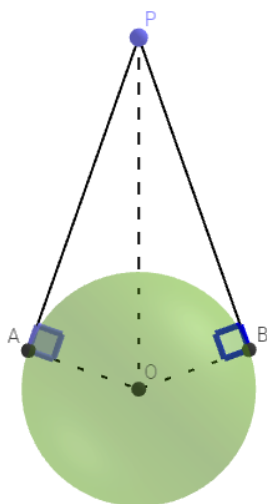


Figura 3.3: Segmentos tangentes \overline{PA} e \overline{PB} de medidas iguais.

Elipses

Considere uma seção cônica com excentricidade e , tal que $0 < e < 1$. Neste caso a seção é uma elipse e o plano secante intercepta apenas uma folha da superfície cônica. Sejam C_1 e C_2 as duas esferas inscritas ao cone e tangentes ao plano de interseção, conforme a figura 4.1. Estas esferas são denominadas “Esferas de Dandelin” para a seção tipo elipse [20].

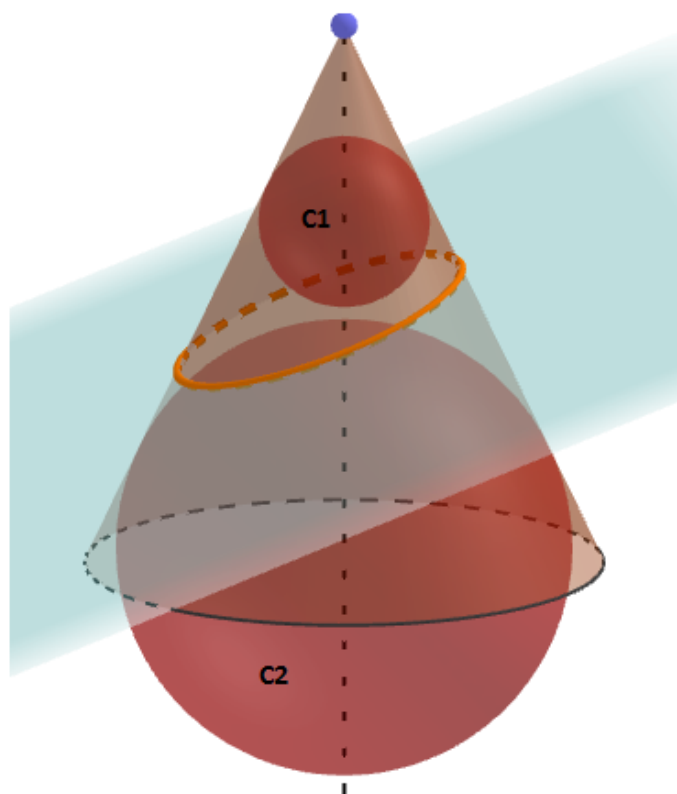


Figura 4.1: Esferas de Dandelin para seções tipo elipse.

Teorema 4.1: (1º Teorema de Dandelin- Quetelet para Elipses) Considere uma seção cônica do tipo elipse, P um ponto qualquer da curva e F_1 e F_2 os pontos de tangência das esferas de Dandelin com o plano da seção. Os pontos F_1 e F_2 ,

denominados focos da elipse, são tais que:

$$PF_1 + PF_2 = \text{constante}.$$

Demonstração. Sejam L_1 e L_2 as circunferências de interseção das esferas de Dandelin C_1 e C_2 , respectivamente, e o cone. Sejam, ainda, T_1 e T_2 os pontos de interseção da geratriz que contém o ponto P e as circunferências L_1 e L_2 , respectivamente, conforme a figura 4.2. Observe que, para qualquer ponto P da elipse o segmento $\overline{T_1T_2}$ tem comprimento constante, igual ao comprimento da geratriz do tronco de cone formado entre os planos que contém L_1 e L_2 . Como as esferas de Dandelin são tangentes ao cone, a geratriz que contém o ponto P será tangente às esferas em T_1 e T_2 . Dado que o plano de formação da elipse é tangente às esferas em F_1 e F_2 e, sendo P um ponto exterior às esferas, segue que $\overline{PT_1}$ e $\overline{PF_1}$ são segmentos tangentes à esfera C_1 e $\overline{PT_2}$ e $\overline{PF_2}$ são segmentos tangentes a esfera C_2 . Do lema 3.1 segue que $PT_1 = PF_1$ e $PT_2 = PF_2$. Portanto, $T_1T_2 = PT_1 + PT_2 = PF_1 + PF_2 = \text{constante}$. \square

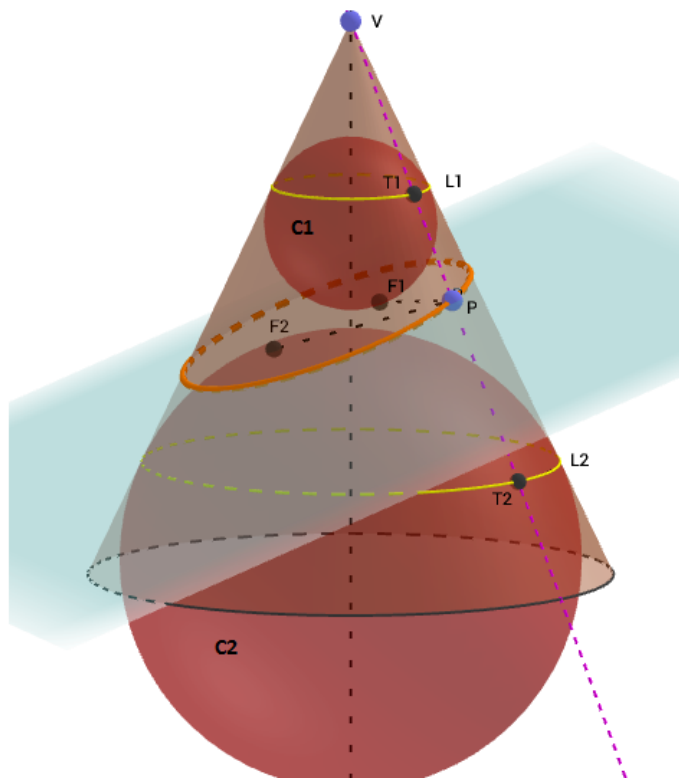


Figura 4.2: Ilustração do 1º Teorema de Dandelin-Quetelet para elipses.

Teorema 4.2: (2º Teorema de Dandelin- Quetelet para Elipses) Dada uma seção cônica do tipo elipse, com focos F_1 e F_2 e excentricidade e , existem retas fixas d_1 e d_2 (denominadas retas diretrizes da elipse) contidas no plano de formação da curva, tais que para todo ponto P da elipse vale:

$$\frac{d(P,F_1)}{d(P,d_1)} = \frac{d(P,F_2)}{d(P,d_2)} = e.$$

Demonstração. Considere os seguintes elementos conforme a figura 4.3:

- π_1 é o plano de formação da elipse;
- π_2 é o plano que contém a circunferência de interseção entre a esfera de Dandelin C_1 e o cone;
- d_1 é a reta de interseção entre os planos π_1 e π_2 .
- A é o ponto de interseção entre a geratriz que contém o ponto P e o plano π_2 ;
- \overline{PB} é o segmento paralelo ao eixo do cone, tal que $B \in \pi_2$;
- $C \in d_1$ é o pé da distância $d(P, d_1)$.

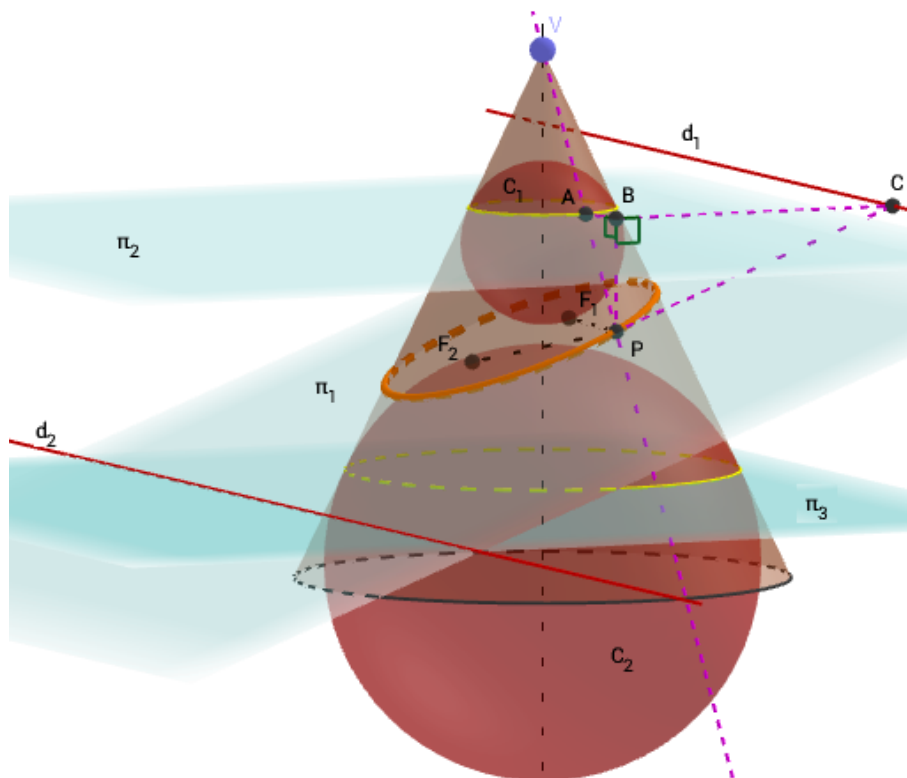


Figura 4.3: Ilustração do 2º Teorema de Dandelin-Quetelet para elipses.

O segmento \overline{PB} é ortogonal ao plano π_2 visto que é paralelo ao eixo do cone. Logo, os ângulos \widehat{PBA} e \widehat{PBC} são retos. Tem-se ainda que o ângulo \widehat{APB} é alterno interno com o ângulo formado entre a geratriz \overline{VP} e o eixo do cone. Segue que $\widehat{APB} = \alpha$ (sendo o ângulo α conforme definição 3.1). Portanto, no triângulo retângulo PBA tem-se:

$$PB = PA \cdot \cos \alpha \tag{4.1}$$

O ângulo \widehat{BPC} é o ângulo formado entre o eixo do cone e o plano de formação da elipse. Então $\widehat{BPC} = \beta$ (sendo o ângulo β conforme definição 3.1). Portanto, no triângulo retângulo PBC tem-se:

$$PB = PC \cdot \cos \beta \tag{4.2}$$

Da igualdade de 4.1 e 4.2, segue que:

$$PA \cdot \cos \alpha = PC \cdot \cos \beta \tag{4.3}$$

Como \overline{PA} e $\overline{PF_1}$ são segmentos tangentes à esfera C_1 , tem-se:

$$PA = PF_1 \tag{4.4}$$

Substituindo 4.4 em 4.3, resulta em:

$$\begin{aligned} PF_1 \cdot \cos \alpha &= PC \cdot \cos \beta \\ \Rightarrow \frac{PF_1}{PC} &= \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \\ \Rightarrow \frac{d(P, F_1)}{d(P, d_1)} &= \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = e. \end{aligned}$$

Analogamente, sendo d_2 a reta de interseção entre o plano de formação da elipse (plano π_1) e o plano de interseção entre a esfera de Dandelin C_2 e a superfície cônica (plano π_3), demonstra-se que:

$$\frac{d(P, F_2)}{d(P, d_2)} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = e.$$

□

As propriedades demonstradas nos teoremas 4.1 e 4.2 constituem as definições usuais para a curva plana denominada elipse:

Definição 4.1: “Uma elipse ε de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $d(F_1, F_2) = 2c$ ” [9]. Ver figura 4.4.

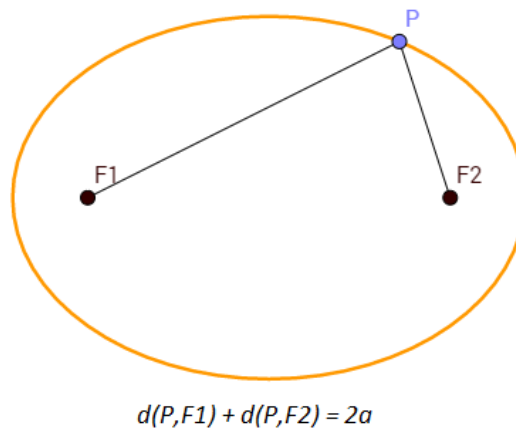


Figura 4.4: Definição usual de elipse.

Definição 4.2: “Dado o número $0 < e < 1$ e dados um ponto F_1 , uma reta d_1 em um plano, com $F_1 \notin d_1$, o conjunto de todos os pontos do plano cuja razão das distâncias a F_1 e a d_1 vale e , é chamado a elipse de excentricidade e , foco F_1 e diretriz d_1 ” [7]. Ademais, existem outro foco F_2 e outra diretriz d_2 (com d_1 e d_2 perpendiculares à reta que contém F_1 e F_2) tais que para todo ponto P da elipse vale e a razão entre $d(P, F_2)$ e $d(P, d_2)$. Ver figura 4.5.

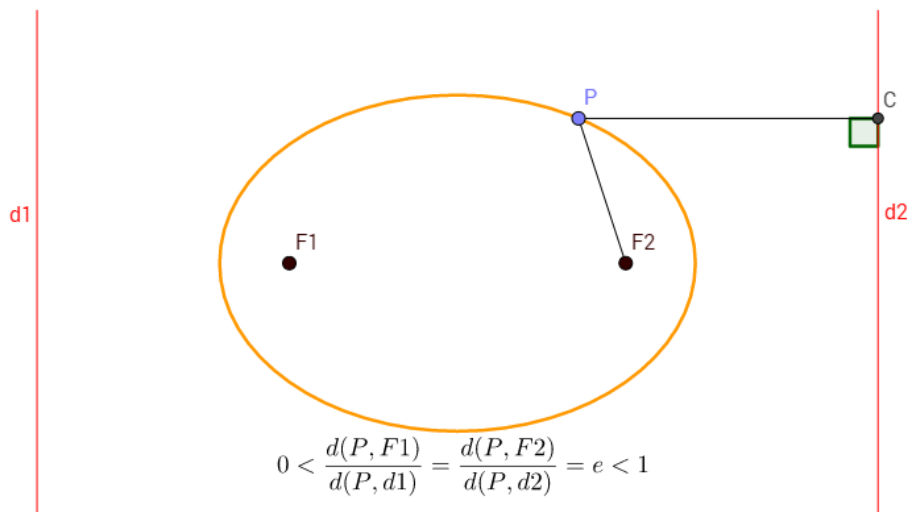


Figura 4.5: Definição usual de elipse 2.

4.1 Elementos da Elipse

Dada uma elipse ε de focos F_1 e F_2 , de acordo com [14] define-se (ver figura 4.6):

- O ponto médio dos pontos F_1 e F_2 , denominado O , é o centro da elipse.
- O segmento $\overline{F_1F_2}$, de comprimento $2c$, é o segmento focal da elipse.
- A reta r , que contém os pontos F_1 e F_2 , é a reta focal da elipse.
- Os pontos A_1 e A_2 são os pontos de interseção de ε e a reta focal r . Estes pontos são denominados vértices da elipse sobre a reta focal. O segmento $\overline{A_1A_2}$, de comprimento $2a$, é denominado eixo focal (ou eixo maior) da elipse. Os segmentos $\overline{OA_1}$ e $\overline{OA_2}$, de comprimento a , são os semi-eixos focais da elipse.
- A reta s , mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$, é a reta não focal da elipse.
- Os pontos B_1 e B_2 são os pontos de interseção de ε e a reta não focal s . Estes pontos são denominados vértices da elipse sobre a reta não focal. O segmento $\overline{B_1B_2}$, de comprimento $2b$, é denominado eixo não focal (ou eixo menor) da elipse. Os segmentos $\overline{OB_1}$ e $\overline{OB_2}$, de comprimento b , são os semi-eixos não focais da elipse.
- Qualquer segmento cujos extremos são pontos de ε é denominado corda da elipse.

- As duas cordas perpendiculares à reta focal da elipse e que contêm respectivamente os focos, são denominadas *latus rectum* da elipse.

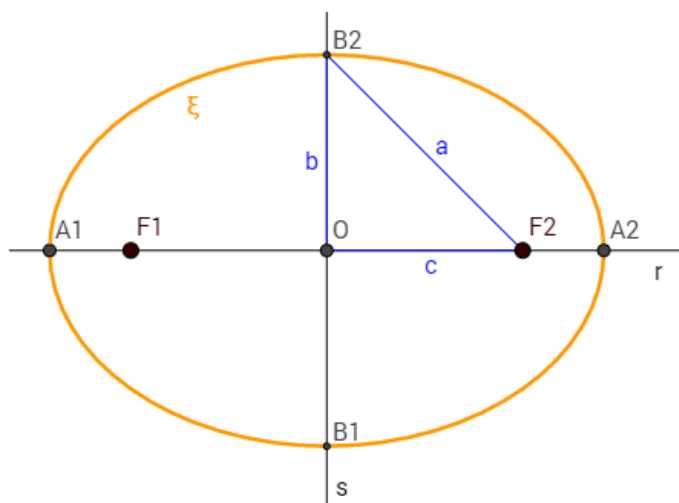


Figura 4.6: Elementos da elipse.

Observe que das definições apresentadas e do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo de vértices O , B_2 e F_2 , obtém-se uma relação entre os parâmetros a, b e c da elipse:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{4.5}$$

4.2 Tratamento Analítico da Elipse

Dados um sistema de eixos coordenados ortogonais XOY , as equações das elipses que possuem reta focal paralela a um dos eixos ortogonais são denominadas formas canônicas da elipse.

4.2.1 Elipse ε com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OX

Nesse caso, conforme figura 4.7, os focos e os vértices da elipse são os pontos $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer de ε . Como $P \in \varepsilon$ se, e somente se, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, segue que:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\ \implies & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \implies & (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ \implies & x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\ \implies & 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \implies & a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \implies & (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \\ \implies & a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\ \implies & (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

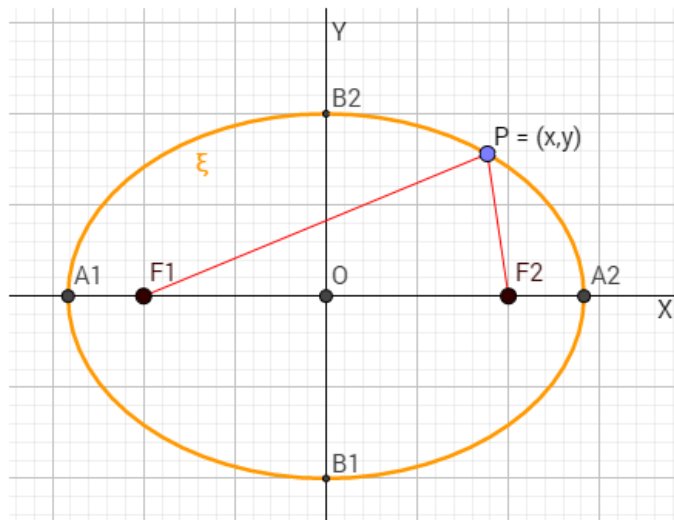


Figura 4.7: Elipse com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OX.

Como $a^2 = b^2 + c^2$ (ver 4.5), segue que $a^2 - c^2 = b^2$. Logo:

$$\begin{aligned}
 b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\
 \implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

A equação 4.6 é denominada a forma canônica da elipse com o centro na origem e eixo focal sobre o eixo OX.

4.2.2 Elipse ε com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OY

Nesse caso, conforme figura 4.8 os focos e os vértices da elipse são os pontos $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0,c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0,a)$, $B_1 = (-b,0)$ e $B_2 = (b,0)$. Desenvolvendo $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$ como em 4.2.1, resulta em:

$$\implies \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1
 \tag{4.7}$$

A equação 4.7 é denominada a forma canônica da elipse com o centro na origem e eixo focal sobre o eixo OY.

4.2.3 Formas canônicas da elipse com centro fora da origem: translação de eixos coordenados

Considere no sistema de eixos XOY, o ponto $O' = (x_0, y_0)$. Seja $X'O'Y'$ o sistema com centro em O' e eixos $O'X'$ e $O'Y'$ paralelos e com o mesmo sentido dos eixos OX e OY, respectivamente, conforme figura 4.9.

Dado um ponto P do plano, suas coordenadas (x,y) e (x',y') relativas aos sistemas de eixos XOY e $X'O'Y'$, respectivamente, relacionam-se pelas equações:

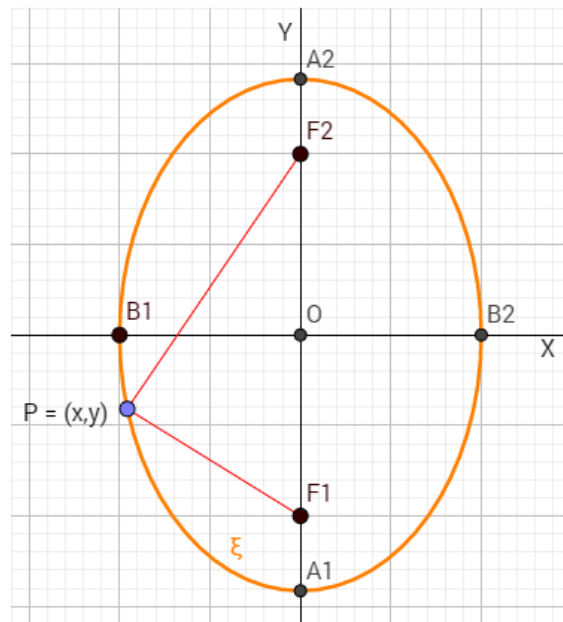


Figura 4.8: Elipse com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OY.

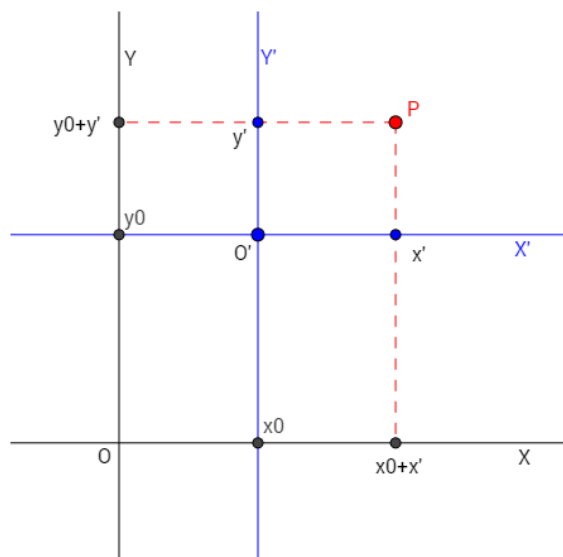


Figura 4.9: Translação de eixos coordenados.

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Dessa forma, considere uma elipse com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ do sistema XOY e eixo focal paralelo ao eixo OX. Relativamente ao sistema $O'X'Y'$, tem-se uma elipse centrada na origem O' e com eixo focal sobre o eixo $O'X'$. Portanto,

conforme 4.2.1, sua equação canônica no sistema $O'X'Y'$ é dada por:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \quad (4.9)$$

Substituindo 4.8 em 4.9, tem-se a equação canônica no sistema XOY da elipse com centro em $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo OX :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (4.10)$$

Analogamente, a equação canônica no sistema XOY da elipse com centro em $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo OY é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \quad (4.11)$$

4.2.4 A excentricidade da elipse

A excentricidade de uma cônica foi definida em 3.2 como sendo a razão entre os cossenos dos ângulos β e α , em que α é o ângulo formado entre uma geratriz qualquer do cone e seu eixo e β o ângulo que o plano de corte da seção cônica forma com o mesmo eixo. Analiticamente, é possível obter a excentricidade de uma elipse através de uma relação entre os comprimentos do segmento e do eixo focal, conforme proposição 4.1:

Proposição 4.1: A excentricidade da elipse e_{ELIPSE} , com segmento focal de medida $2c$ e eixo focal de medida $2a$ vale:

$$e_{ELIPSE} = \frac{c}{a} \quad (4.12)$$

Demonstração. De acordo com o teorema 4.2, dada uma elipse de focos F_1 e F_2 e excentricidade e , existem retas fixas d_1 e d_2 (diretrizes) contidas no plano da elipse, tais que para todo ponto P da curva vale:

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, d_1)} = \frac{d(P, F_2)}{d(P, d_2)} = e.$$

Adotando um sistema de eixos coordenados conveniente, considere a reta diretriz d_1 coincidente com o eixo OY e o foco $F_1 = (0, p)$ sobre o eixo OX , conforme a figura 4.10. O parâmetro p , que é a distância entre o foco e a diretriz mais próxima é usualmente denominado parâmetro focal da elipse. Como $\frac{d(P, F_1)}{d(P, d_1)} = e$, segue que:

$$\frac{\sqrt{(x - p)^2 + y^2}}{|x|} = e$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x - p)^2 + y^2 &= e^2 x^2 \\ \Rightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 - e^2 x^2 &= 0 \\ \Rightarrow x^2(1 - e^2) - 2px + p^2 + y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Como a excentricidade e da elipse é tal que $0 < e < 1$, tem-se $e^2 < 1$ e mais ainda $1 - e^2 > 0$. Dividindo os termos da última equação por $(1 - e^2)$ resulta em:

$$x^2 - \frac{2p}{(1 - e^2)}x + \frac{p^2}{(1 - e^2)} + \frac{y^2}{(1 - e^2)} = 0.$$

Completando o quadrado relativo à variável x , obtém-se:

$$\left(x - \frac{p}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{(1 - e^2)^2} = \left(\frac{pe}{1 - e^2}\right)^2.$$

Dividindo ambos os termos por $\left(\frac{pe}{1 - e^2}\right)^2 \neq 0$, tem-se:

$$\frac{\left(x - \frac{p}{1 - e^2}\right)^2}{\left(\frac{pe}{1 - e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{pe}{\sqrt{1 - e^2}}\right)^2} = 1.$$

Conforme demonstrado em 4.2.1 esta última equação representa, no sistema de eixos cartesianos adotado, uma elipse com centro $O' = \left(\frac{p}{1 - e^2}, 0\right)$, semi-eixo focal $a = \frac{pe}{1 - e^2}$ e semi-eixo não focal $b = \frac{pe}{\sqrt{1 - e^2}}$.

Fazendo a razão entre os comprimentos a e b , resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{\frac{pe}{1 - e^2}}{\frac{pe}{\sqrt{1 - e^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \\ \Rightarrow a^2(1 - e^2) &= b^2. \end{aligned}$$

De acordo com 4.5 substituindo nesta última equação a relação válida para elipses $b^2 = a^2 - c^2$, tem-se:

$$\begin{aligned} a^2(1 - e^2) &= a^2 - c^2 \\ \Rightarrow c^2 &= a^2 e^2. \end{aligned}$$

Como a excentricidade e deve ser um número positivo, tem-se:

$$e = \frac{c}{a} \tag{4.13}$$

□

A excentricidade e da elipse é um parâmetro indicativo do “achatamento” da curva. Para valores de e próximos de 1, tem-se c próximo de a , e a elipse possui um

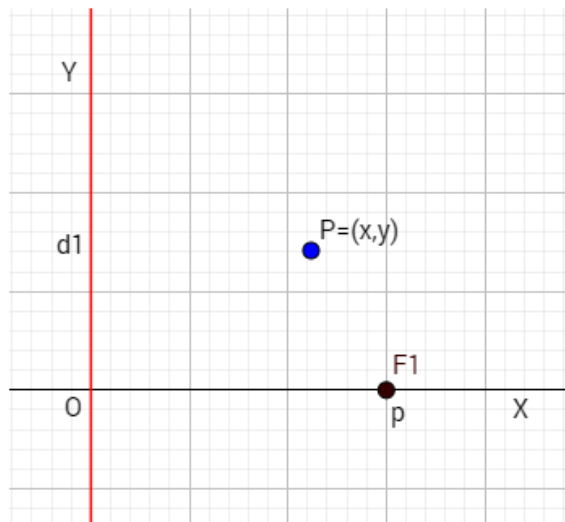


Figura 4.10: Diretriz d_1 coincidente com o eixo OY e foco $F_1 = (0,p)$.

aspecto mais “achatado”. Para valores de e próximos de 0, tem-se c muito menor do que a . Nesse caso, os focos F_1 e F_2 estarão próximos se comparados ao eixo focal de comprimento $2a$, e a elipse resultante possui um aspecto “arredondado”, conforme ilustra a figura 4.11.

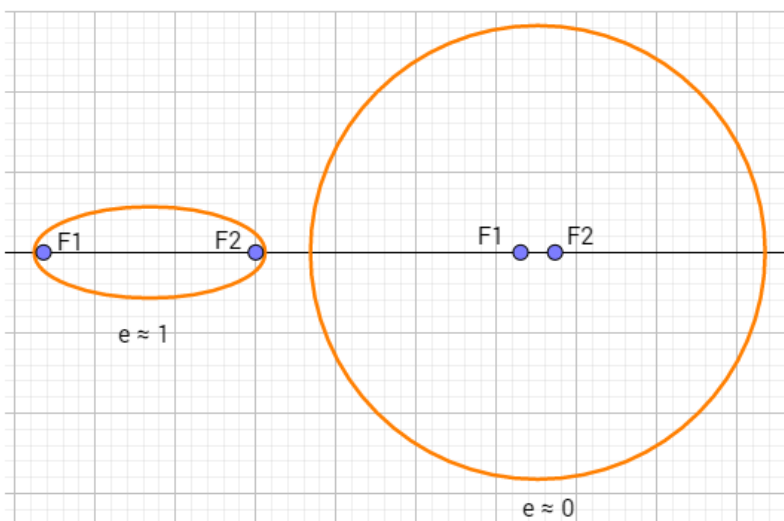


Figura 4.11: Elipses com excentricidades próximas de 1 e de 0.

4.2.5 As equações das retas diretrizes da elipse

Analicamente, é possível obter as equações das retas diretrizes da elipse associadas a um determinado sistema de eixos ortogonais, conforme proposição 4.2:

Proposição 4.2: Dada uma elipse ε , considere um sistema de eixos coordenados $X'O'Y'$ em que O' coincide com o centro de ε , e o eixo focal coincide com o eixo $O'X'$, isto é, sua equação no sistema $X'O'Y'$ é dada por:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Neste sistema, as coordenadas das retas diretrizes da elipse são:

$$x' = \pm \frac{a^2}{c}.$$

Demonstração. Considere, conforme a figura 4.12, um sistema de eixos XOY em que a reta diretriz d_1 coincide com o eixo OY e o foco $F_1 = (0,p)$ está sobre o eixo OX . Conforme demonstrado em 4.2.4, neste sistema a elipse possui centro $O' = \left(\frac{p}{1-e^2}, 0\right)$ e equação:

$$\frac{\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{pe}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{pe}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1.$$

Considere agora um sistema $X'O'Y'$ com centro em O' e eixo $O'X'$ coincidente com o eixo OX . No sistema $X'O'Y'$ a equação de ε é dada por:

$$\frac{(x')^2}{\left(\frac{pe}{1-e^2}\right)^2} + \frac{(y')^2}{\left(\frac{pe}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1.$$

E, ainda no sistema $X'O'Y'$, as equações das diretrizes d_1 e d_2 são:

$$x' = \pm \frac{p}{1-e^2}$$

Como o semi-eixo focal $a = \frac{pe}{1-e^2}$, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{x'}{a} &= \frac{\pm \frac{p}{1-e^2}}{\frac{pe}{1-e^2}} = \pm \frac{1}{e} = \pm \frac{1}{\frac{c}{a}} = \pm \frac{a}{c} \\ \Rightarrow x' &= \pm \frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

□

4.3 Tratamento geométrico da Elipse

4.3.1 *Lactus Rectum* da Elipse

O comprimento do *Lactus Rectum* da elipse (cordas que contém os focos e são perpendiculares à reta focal) pode ser determinado em função dos parâmetros a e c da elipse, conforme proposição 4.3:

Proposição 4.3: Seja ε uma elipse com segmento focal de medida $2c$, eixo não focal de medida $2b$ e eixo focal de medida $2a$. Então, o comprimento do *lactus rectum*

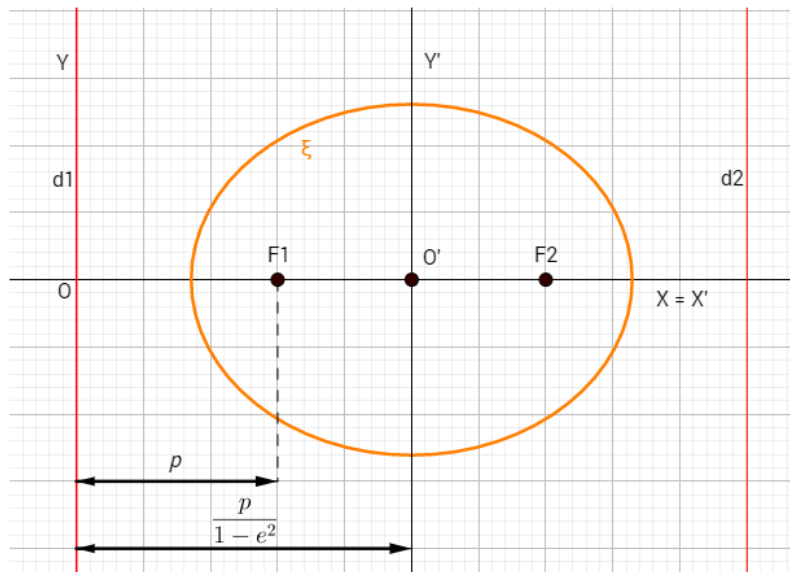


Figura 4.12: Equações das diretrizes da elipse.

l de ε vale:

$$l = \frac{2b^2}{a}.$$

Demonstração. Seja \overline{PQ} o *lactus rectum* de ε que passa pelo foco F_2 , conforme figura 4.13. Como $PQ = l$, segue que $PF_2 = \frac{l}{2}$. Como $PF_1 + PF_2 = 2a$, tem-se $PF_1 = 2a - \frac{l}{2}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔF_1PF_2 resulta em:

$$\left(2a - \frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (2c)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4a^2 - 2al + \frac{l^2}{4} &= \frac{l^2}{4} + 4c^2 \\ \Rightarrow 4(a^2 - c^2) &= 2al. \end{aligned}$$

Como $b^2 = a^2 - c^2$, resulta em:

$$l = \frac{2b^2}{a}.$$

□

4.3.2 Construção da elipse com fio inextensível

Geometricamente podemos construir uma elipse, isto é, desenhar o seu traçado, utilizando um fio inextensível, uma folha de papel, um lápis e dois suportes (tachinhas ou pregos). Chamando de $2a$ o comprimento do fio, prendemos suas extremidades com os suportes sobre a folha de papel em dois pontos distintos, F_1 e F_2 , tal que $d(F_1, F_2) = 2c < 2a$. Ao deslizar o lápis na folha de modo a manter o fio sempre esticado, conforme figura 4.14, a curva resultante traçada será uma elipse de eixo maior $2a$, segmento focal $2c$ e excentricidade $e = \frac{c}{a}$.

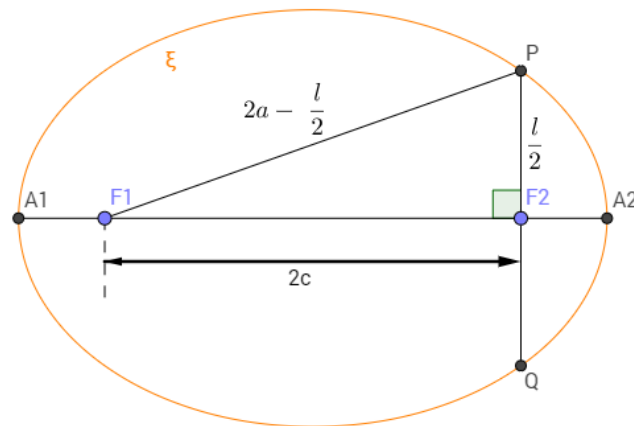


Figura 4.13: *Latus Rectum* da Elipse.

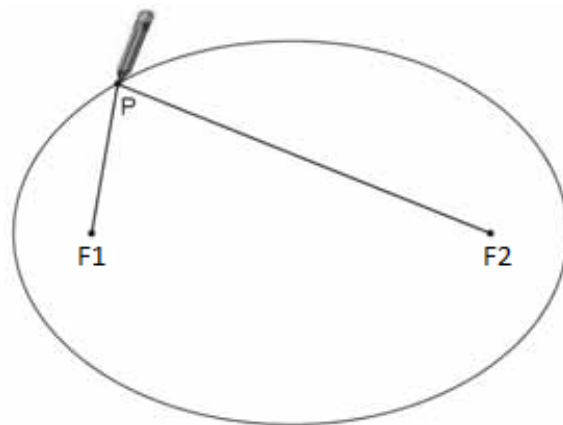


Figura 4.14: Construção geométrica da elipse. Fonte:[13]

A justificativa para tal construção consiste no fato de que, para todo ponto P da curva assim obtida, a soma das distâncias $d(F_1, P) + d(F_2, P)$ será constante e igual ao comprimento do fio $2a$.

4.3.3 Uma construção da Elipse com régua e compasso

Considere determinar pontos de uma elipse ε , dados o seu eixo maior $2a$ e os focos F_1 e F_2 , utilizando apenas régua e compasso. Podemos fazê-lo procedendo a seguinte construção, conforme a figura 4.15:

1. Trace a circunferência C , de centro F_1 e raio $2a$.
2. Tome um ponto D , qualquer, sobre C .
3. Trace a reta s , que passa pelos pontos F_1 e D .
4. Trace a reta t , mediatriz do segmento $\overline{DF_2}$.
5. O ponto P , interseção das retas s e t , será um ponto da elipse ε .

Fazendo variar o ponto D sobre a circunferência C , o lugar geométrico dos pontos P assim obtidos será a elipse ε , de focos F_1 e F_2 e eixo maior $2a$, conforme figura 4.16.

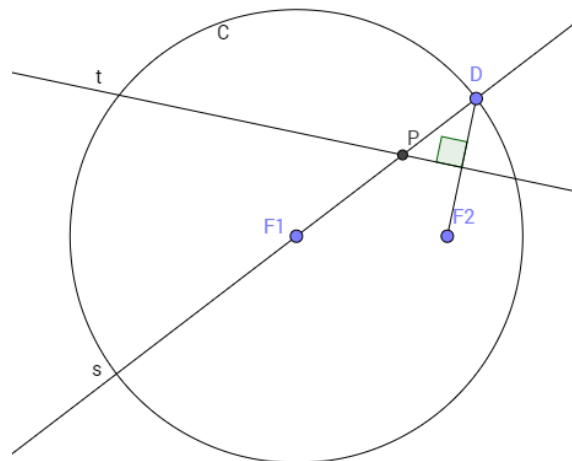


Figura 4.15: Construção da elipse com régua e compasso.

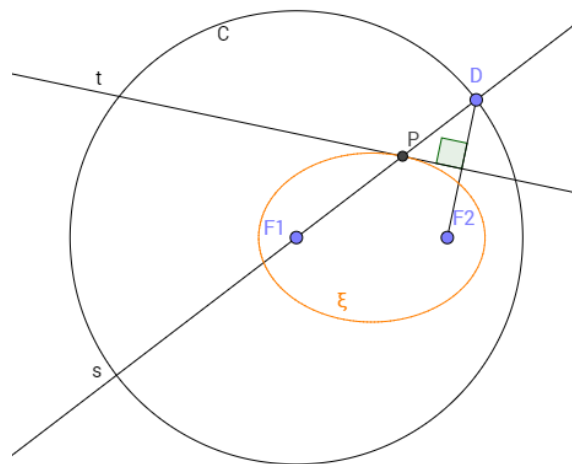


Figura 4.16: Ilustração da construção da elipse com régua e compasso.

Para justificar tal construção, observe que t é mediatriz do segmento $\overline{DF_2}$ e $P \in t$, portanto P é equidistante de D e de F_2 :

$$PD = PF_2 \tag{4.14}$$

O segmento $\overline{DF_1}$ é raio da circunferência C , então $DF_1 = 2a$. Como $P \in \overline{DF_1}$, tem-se:

$$DF_1 = F_1P + PD = 2a \tag{4.15}$$

Substituindo 4.14 em 4.15, resulta em:

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$

Portanto, o ponto P pertence à elipse ε , de focos F_1 e F_2 e eixo maior $2a$.

A circunferência C , da construção da elipse com régua e compasso, é definida como a circunferência diretora da elipse:

Definição 4.3: Dada uma elipse ε , de focos F_1 e F_2 e eixo maior $2a$, as circunferências de centros F_1 e F_2 e raio $2a$, são denominadas as circunferências diretoras da elipse.

4.3.4 Reta tangente e propriedade refletora da elipse

As seções cônicas apresentam propriedades que possuem diversas aplicações práticas. Destacam-se as chamadas propriedades refletoras, que no caso da elipse pode ser enunciada assim: se em uma elipse ε com a capacidade de refletir raios de luz, emitirmos um raio coplanar à ε , partindo de um dos focos e em qualquer direção, então esse raio refletirá na elipse em direção ao outro foco. Essa propriedade se baseia nos princípios físicos da reflexão da luz que dizem:

- i) O raio incidente, a reta normal e o raio refletido são coplanares.
- ii) O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Para demonstrar a propriedade refletora da elipse, necessitamos definir os conceitos de reta tangente e reta normal à elipse em um ponto P :

Definição 4.4: Dada uma elipse ε , e um ponto $P \in \varepsilon$, a reta tangente à elipse no ponto P , é a reta t que contém P e não contém nenhum outro ponto de ε .

Definição 4.5: Dada uma elipse ε , e um ponto $P \in \varepsilon$, a reta que é perpendicular a reta tangente à elipse no ponto P e contém este ponto é a reta n , normal à ε em P .

Proposição 4.4: Seja C a circunferência diretora de uma elipse ε de focos F_1 e F_2 , com centro em F_1 . Então, se o ponto $D \in C$, a reta t mediatriz do segmento $\overline{DF_2}$ é uma reta tangente a elipse.

Demonstração. A demonstração da proposição 4.4 é uma consequência da construção da elipse com régua e compasso. De fato, conforme demonstrado na seção 4.3.3, a reta t contém um ponto $P \in \varepsilon$. Para concluir que t é tangente à elipse, basta mostrar que nenhum outro ponto de t pertence à ε . Para tal, seja Q um ponto de t , com $P \neq Q$ (ver figura 4.17). Pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo $\triangle F_1 Q D$ tem-se:

$$QF_1 + QD > F_1 D = 2a \quad (4.16)$$

Como Q pertence a mediatriz do segmento $\overline{DF_2}$, tem-se:

$$QD = QF_2 \quad (4.17)$$

Substituindo 4.17 em 4.16, resulta em:

$$QF_1 + QF_2 > 2a.$$

Logo, nenhum ponto $Q \in t$, diferente de P , pertence a ε . Portanto, t é a reta tangente à ε em P . \square

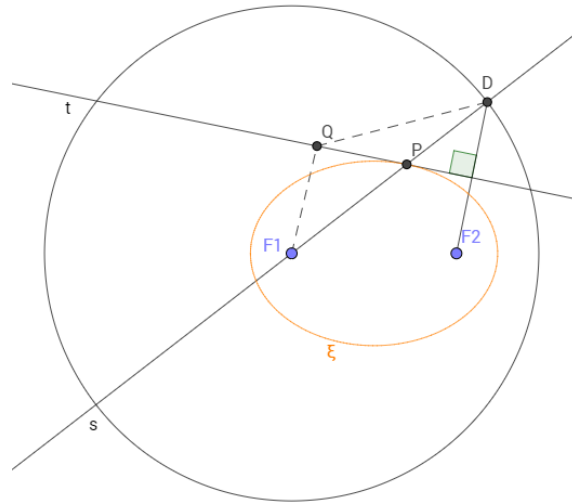


Figura 4.17: Retas tangente à elipse.

Proposição 4.5: (Propriedade refletora da Elipse) Seja ε uma elipse de focos F_1 e F_2 . Dado um ponto $P \in \varepsilon$, então a reta n , normal à ε em P é bissetriz do ângulo $\widehat{F_1PF_2}$.

Demonstração. Seja C a circunferência diretora de ε com centro em F_1 , $D \in C$ é tal que $P \in \overline{F_1D}$, M é o ponto médio do segmento $\overline{F_2D}$, $Q \in t$ (reta tangente à ε em P) é tal que $P \in \overline{MQ}$, ϕ é o ângulo formado entre o segmento $\overline{F_1P}$ e a reta n e θ é o ângulo formado entre o segmento $\overline{F_2P}$ e a reta n , conforme a figura 4.18. Como P pertence a reta mediatriz do segmento $\overline{F_2D}$ e $\widehat{MPF_2}$ é complementar à θ , tem-se:

$$\widehat{MPF_2} = \widehat{MPD} = 90^\circ - \theta$$

Os ângulos \widehat{MPD} e $\widehat{QPF_1}$ são opostos pelo vértice, portanto:

$$\widehat{MPD} = \widehat{QPF_1} = 90^\circ - \theta$$

Como o ângulo $\widehat{QPF_1}$ é complementar à ϕ , segue que:

$$\widehat{QPF_1} = 90^\circ - \theta = 90^\circ - \phi$$

$$\Rightarrow \theta = \phi$$

□

A proposição 4.5 juntamente com os princípios de reflexão da luz, comprovam a propriedade refletora da elipse.

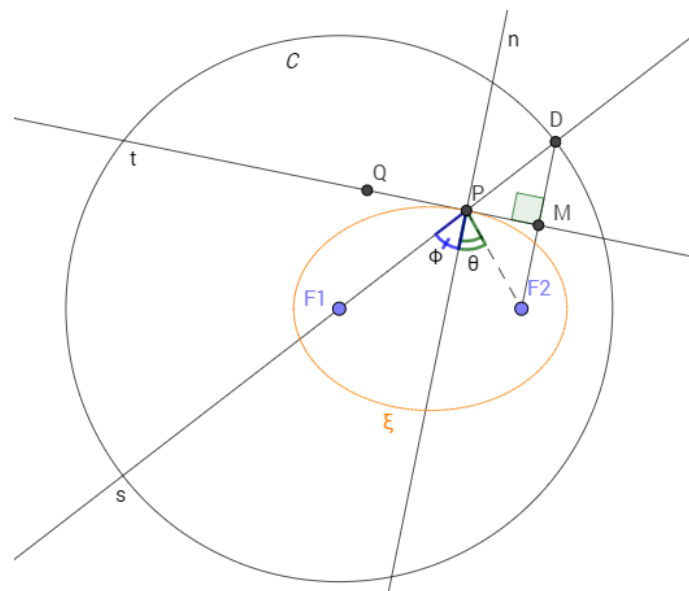


Figura 4.18: Propriedade refletora da elipse.

Hipérboles

Considere uma seção cônica com excentricidade e , tal que $e > 1$. Neste caso a seção é uma hipérbole e o plano secante intercepta as duas folhas da superfície cônica, formando uma curva de dois ramos. Sejam C_1 e C_2 as duas esferas inscritas ao cone e tangentes ao plano de interseção, conforme a figura 5.1. Estas esferas são denominadas “Esferas de Dandelin” para seções tipo hipérbole [20].

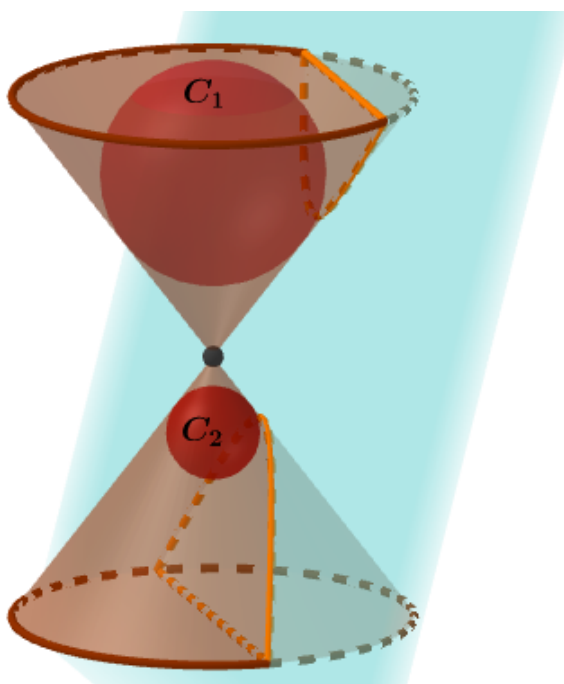


Figura 5.1: Esferas de Dandelin para seções tipo hipérbole.

Teorema 5.1: (1º Teorema de Dandelin-Queletelet para Hipérboles) Considere uma seção cônica do tipo hipérbole, P um ponto qualquer da curva e F_1 e F_2 os pontos de tangência das esferas de Dandelin com o plano da seção cônica. Os pontos F_1 e F_2 , denominados focos da hipérbole, são tais que:

$$|PF_1 - PF_2| = \text{constante}.$$

Demonstração. Sejam L_1 e L_2 as circunferências de interseção das esferas de Dandelin C_1 e C_2 , respectivamente, e a superfície cônica. Seja P um ponto qualquer da hipérbole. A geratriz da superfície cônica que contém P intersecta L_1 e L_2 nos pontos T_1 e T_2 , respectivamente, conforme a figura 5.2. Observe que, para qualquer ponto P da hipérbole o segmento $\overline{T_1T_2}$ tem comprimento constante, igual ao comprimento da geratriz da superfície cônica contida entre os planos que contém L_1 e L_2 . Como as esferas de Dandelin são tangentes ao cone, a geratriz que contém o ponto P será tangente às esferas em T_1 e T_2 . Dado que o plano de formação da hipérbole é tangente às esferas em F_1 e F_2 e, sendo P um ponto deste plano exterior às esferas, segue que $\overline{PT_1}$ e $\overline{PF_1}$ são segmentos tangentes à C_1 e $\overline{PT_2}$ e $\overline{PF_2}$ são segmentos tangentes à C_2 . Do lema 3.1 segue que $PT_1 = PF_1$ e $PT_2 = PF_2$. Portanto, $T_1T_2 = PT_2 - PT_1 = PF_2 - PF_1 = constante$.

Analogamente, se houvéssemos tomado o ponto P no outro ramo da hipérbole, obteríamos $T_1T_2 = PT_1 - PT_2 = PF_1 - PF_2 = constante$.

Portanto, para todo ponto P da hipérbole vale:

$$|PF_1 - PF_2| = constante.$$

□

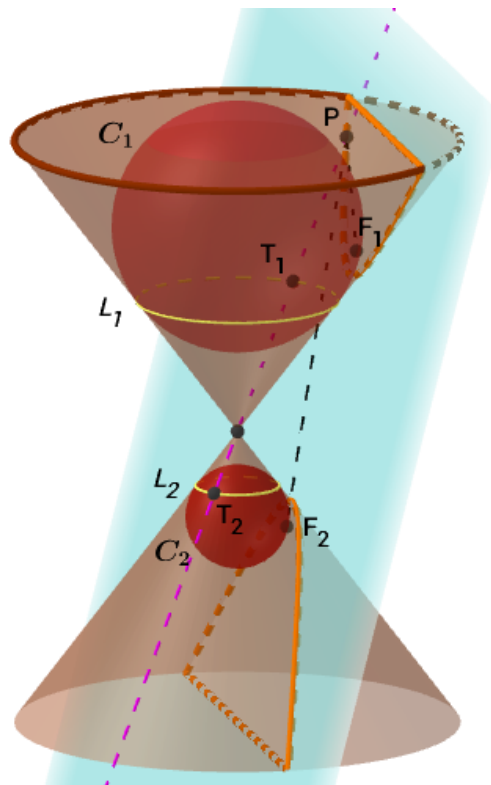


Figura 5.2: 1º Teorema de Dandelin-Quetelet para hipérboles.

Teorema 5.2: (2º Teorema de Dandelin-Quetelet para Hipérboles) Dada uma seção cônica do tipo hipérbole, com focos em F_1 e F_2 e excentricidade e , existem retas fixas

d_1 e d_2 (denominadas retas diretrizes da hipérbole) contidas no plano de formação da curva, tais que para todo ponto P da hipérbole vale:

$$\frac{d(P,F_1)}{d(P,d_1)} = \frac{d(P,F_2)}{d(P,d_2)} = e.$$

Demonstração. Considere os seguintes elementos conforme a figura 4.3:

- π_1 é o plano de formação da hipérbole;
- π_2 é o plano que contém a circunferência L_2 , interseção entre a esfera de Dandelin C_2 e o cone;
- d_2 é a reta de interseção entre os planos π_1 e π_2 .
- T_2 é o ponto de interseção entre a geratriz que contém o ponto P e o plano π_2 ;
- \overline{PB} é o segmento paralelo ao eixo do cone, tal que $B \in \pi_2$;
- $C \in d_2$ é o pé da distância $d(P,d_2)$.

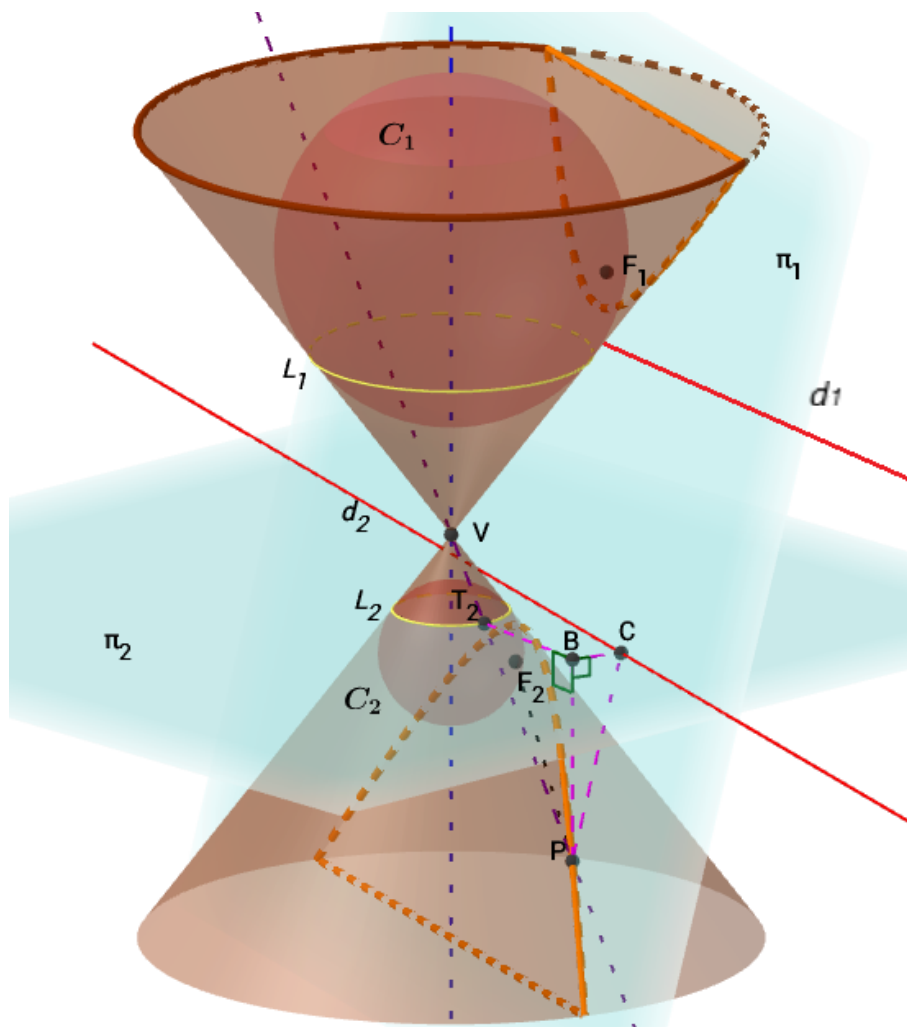


Figura 5.3: Ilustração do 2º Teorema de Dandelin-Quetelet para hipérboles.

O segmento \overline{PB} é ortogonal ao plano π_2 visto que é paralelo ao eixo do cone. Logo, os ângulos $\widehat{PBT_2}$ e \widehat{PBC} são retos. Tem-se ainda que o ângulo $\widehat{T_2PB}$ é alterno interno com o ângulo formado entre a geratriz $\overline{T_2P}$ e o eixo do cone. Segue que $\widehat{T_2PB} = \alpha$ (sendo o ângulo α conforme definição 3.1). Portanto, no triângulo retângulo PBT_2 tem-se:

$$PB = PT_2 \cdot \cos \alpha \quad (5.1)$$

O ângulo \widehat{BPC} é o ângulo formado entre o eixo do cone e o plano de formação da hipérbole. Então $\widehat{BPC} = \beta$ (sendo o ângulo β conforme definição 3.1). Portanto, no triângulo retângulo PBC tem-se:

$$PB = PC \cdot \cos \beta \quad (5.2)$$

Da igualdade de 5.1 e 5.2, segue que:

$$PT_2 \cdot \cos \alpha = PC \cdot \cos \beta \quad (5.3)$$

Como $\overline{PT_2}$ e $\overline{PF_2}$ são segmentos tangentes à esfera C_2 , tem-se:

$$PT_2 = PF_2 \quad (5.4)$$

Substituindo 5.4 em 5.3, resulta em:

$$\begin{aligned} PF_2 \cdot \cos \alpha &= PC \cdot \cos \beta \\ \Rightarrow \frac{PF_2}{PC} &= \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \\ \Rightarrow \frac{d(P, F_2)}{d(P, d_2)} &= \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = e. \end{aligned}$$

Analogamente, sendo d_1 a reta de interseção entre o plano π_1 de formação da hipérbole e o plano que contém L_1 , interseção entre a esfera de Dandelin C_1 e a superfície cônica, demonstra-se que:

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, d_1)} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = e.$$

□

As propriedades demonstradas nos teoremas 5.1 e 5.2 constituem as definições usuais para a curva plana denominada hipérbole:

Definição 5.1: “Uma hipérbole H de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $d(F_1, F_2) = 2c > 0$ ” [9]. Ver figura 4.4.

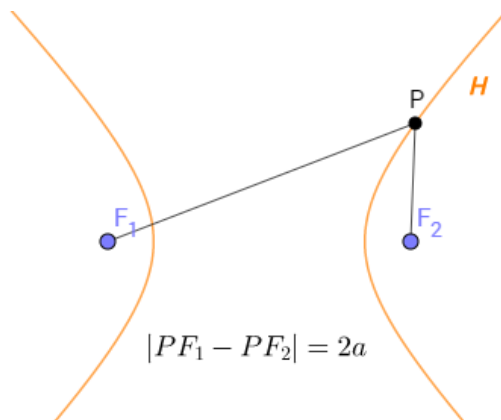


Figura 5.4: Definição usual de hipérbole 1.

Definição 5.2: “Dado o número $e > 1$, e dados um ponto F_1 , uma reta d_1 em um plano, com $F_1 \notin d_1$, o conjunto de todos os pontos do plano cuja razão das distâncias a F_1 e a d_1 vale e , é chamado a hipérbole de excentricidade e , foco F_1 e diretriz d_1 ” [7]. Ademais, existem outro foco F_2 e outra diretriz d_2 (com d_1 e d_2 perpendiculares à reta que contém F_1 e F_2) tais que para todo ponto P da hipérbole vale e a razão entre $d(P, F_2)$ e $d(P, d_2)$. Ver figura 4.5.

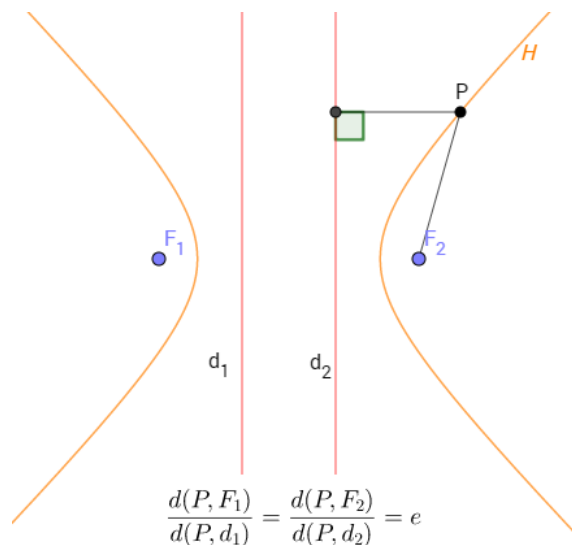


Figura 5.5: Definição usual de hipérbole 2.

5.1 Elementos da Hipérbole

Dada uma hipérbole H de focos F_1 e F_2 , de acordo com [14] define-se (ver figura 5.6):

- O ponto médio dos pontos F_1 e F_2 , denotado por O , é o centro da hipérbole.
- O segmento $\overline{F_1 F_2}$, de comprimento $2c$, é o segmento focal da hipérbole. $2c$ é a distância focal da hipérbole.

- A reta r , que contém os pontos F_1 e F_2 , é a reta focal da hipérbole.
- A interseção de H com r consiste de dois pontos, A_1 e A_2 . Estes pontos são denominados vértices da hipérbole sobre a reta focal. O segmento $\overline{A_1A_2}$, de comprimento $2a$, é denominado eixo transversal (ou eixo real) da hipérbole.
- O segmento $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$ (em que $c^2 = a^2 + b^2$), cujos extremos B_1 e B_2 estão simetricamente localizados em relação ao centro O da hipérbole sobre a reta s perpendicular a r por O , é denominado eixo conjugado (ou eixo imaginário) da hipérbole. Nos casos em que $a = b$, a hipérbole é dita equilátera.
- Qualquer segmento cujos extremos são pontos de H é denominado corda da hipérbole.
- Denomina-se amplitude focal da hipérbole o comprimento de uma corda que contenha um dos focos da hipérbole e que seja perpendicular à reta focal desta.
- As retas r_+ e r_- que passam pelo centro O e possuem inclinações $\frac{b}{a}$ e $-\frac{b}{a}$, respectivamente, são as assíntotas da hipérbole. Este fato será demonstrado na seção 5.2.6.

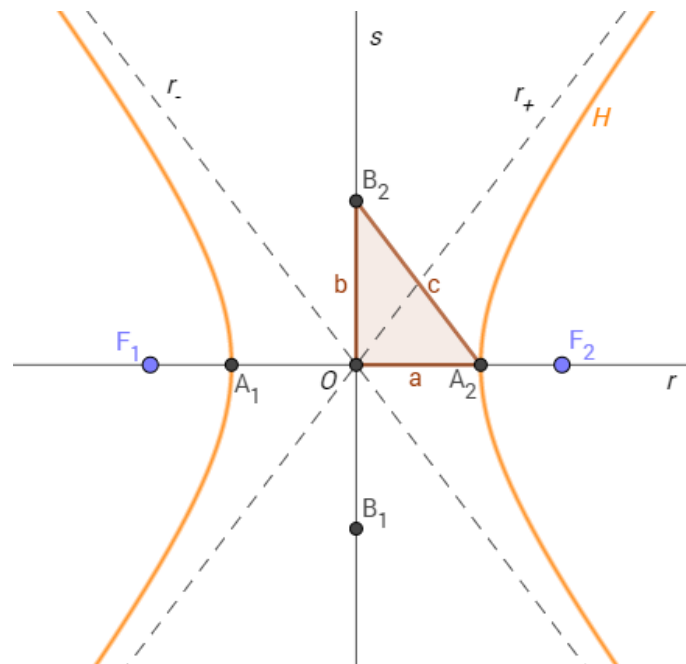


Figura 5.6: Elementos da hipérbole.

5.2 Tratamento Analítico da Hipérbole

Dados um sistema de eixos coordenados ortogonais XOY , as equações das hipérbolas que possuem reta focal paralela a um dos eixos ortogonais, são denominadas formas canônicas da hipérbole.

5.2.1 Hipérbole H com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OX

Nesse caso, conforme figura 5.7, os focos e os vértices da hipérbole são os pontos $F_1 = (-c,0)$, $F_2 = (c,0)$, $A_1 = (-a,0)$ e $A_2 = (a,0)$. Como o ponto $P \in H$ se, e somente se, $|PF_1 - PF_2| = 2a$, para um ponto $P = (x,y)$, pertencente ao ramo direito da hipérbole H , segue que:

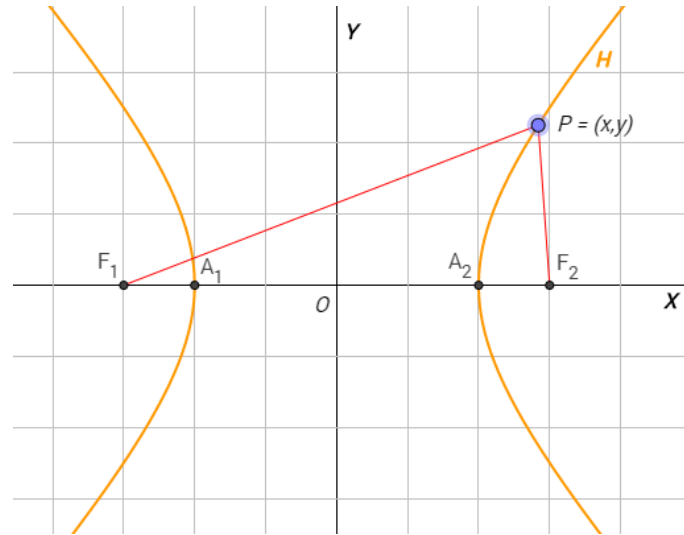


Figura 5.7: Hipérbole com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OX .

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\ \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ \Rightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\ \Rightarrow 4xc &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \Rightarrow xc - a^2 &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \Rightarrow (xc - a^2)^2 &= a^2((x-c)^2 + y^2) \\ \Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\ \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \end{aligned}$$

Como para a hipérbole vale $c^2 = a^2 + b^2$ (ver 5.1), segue que $c^2 - a^2 = b^2$. Logo:

$$\begin{aligned} b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \\ \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Caso o ponto P fosse tomado no ramo esquerdo da hipérbole, teríamos $PF_2 - PF_1 = 2a$ e, com o mesmo desenvolvimento do caso anterior, resultaria em 5.5. Portanto, tal equação é válida para todo ponto P da hipérbole.

A equação 5.5 é denominada a forma canônica da hipérbole com o centro na origem e reta focal sobre o eixo OX .

5.2.2 Hipérbole H com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OY

Nesse caso, conforme figura 5.8, os focos e os vértices da hipérbole são os pontos $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$ e $A_2 = (0, a)$. Desenvolvendo $|PF_1 - PF_2| = 2a$ como em 5.2.1, resulta em:

$$\Rightarrow \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{5.6}$$

A equação 5.6 é denominada a forma canônica da hipérbole com o centro na origem e reta focal sobre o eixo OY .

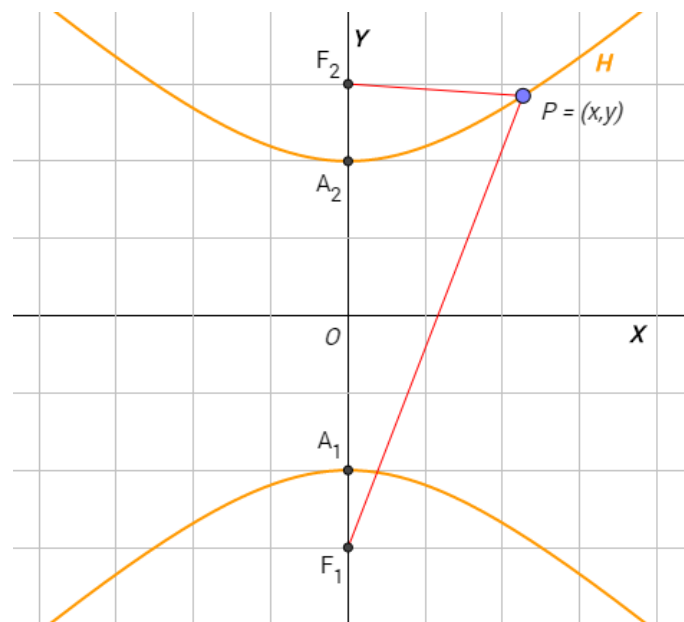


Figura 5.8: Hipérbole com centro na origem do sistema XOY e reta focal sobre o eixo OY .

5.2.3 Formas canônicas da hipérbole com centro fora da origem

Conforme demonstrado em 4.2.3, dado um ponto $O' = (x_0, y_0)$ num sistema de eixos ortogonais XOY e sendo $X'O'Y'$ o sistema com centro em O' e eixos ortogonais paralelos e com o mesmo sentido dos eixos do sistema XOY , então as coordenadas de um ponto qualquer do plano, em ambos os sistemas, se relacionam por:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

Dessa forma, considere uma hipérbole com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ do sistema XOY e reta focal paralela ao eixo OX . Relativamente ao sistema $O'X'Y'$, tem-se

uma hipérbole centrada na origem O' e com reta focal sobre o eixo $O'X'$. Portanto, conforme 5.2.1, sua equação canônica no sistema $O'X'Y'$ é dada por:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \quad (5.7)$$

Substituindo 4.8 em 5.7, tem-se a equação canônica, no sistema XOY , da hipérbole com centro em $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo OX :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (5.8)$$

Analogamente, a equação canônica no sistema XOY da hipérbole com centro em $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo OY é dada por:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1 \quad (5.9)$$

5.2.4 A excentricidade da hipérbole

A excentricidade de uma cônica foi definida em 3.2 como sendo a razão entre os cossenos dos ângulos β e α , em que α é o ângulo formado entre uma geratriz qualquer do cone e seu eixo e β o ângulo que o plano secante da seção cônica forma com o mesmo eixo. Analiticamente, é possível obter a excentricidade de uma hipérbole através de uma relação entre os comprimentos do segmento e do eixo focal, conforme proposição 5.1:

Proposição 5.1: A excentricidade da hipérbole $e_{HIPERBOLE}$, com segmento focal de medida $2c$ e eixo transverso de medida $2a$ vale:

$$e_{HIPERBOLE} = \frac{c}{a} \quad (5.10)$$

Demonstração. De acordo com o teorema 5.2, dada uma hipérbole de focos F_1 e F_2 e excentricidade e , existem retas fixas d_1 e d_2 (diretrizes) contidas no plano da hipérbole, tais que para todo ponto P da curva vale:

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, d_1)} = \frac{d(P, F_2)}{d(P, d_2)} = e.$$

Adotando um sistema de eixos coordenados conveniente, considere a reta diretriz d_1 coincidente com o eixo OY e o foco $F_1 = (0, p)$ sobre o eixo OX , conforme a figura 4.10. O parâmetro p , que é a distância entre o foco e a diretriz mais próxima é usualmente denominado parâmetro focal da hipérbole. Como $\frac{d(P, F_1)}{d(P, d_1)} = e$, segue

que:

$$\frac{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}}{|x|} = e.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x-p)^2 + y^2 &= e^2 x^2 \\ \Rightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 - e^2 x^2 &= 0 \\ \Rightarrow x^2(e^2 - 1) + 2px - p^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Como a excentricidade e da hipérbole é tal que $e > 1$, tem-se $e^2 > 1$ e mais ainda $e^2 - 1 > 0$. Dividindo os termos da última equação por $(e^2 - 1)$ resulta em:

$$x^2 + \frac{2p}{(e^2 - 1)}x - \frac{p^2}{(e^2 - 1)} - \frac{y^2}{(e^2 - 1)} = 0.$$

Completando o quadrado relativo à variável x , obtém-se:

$$\left(x + \frac{p}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{y^2}{(e^2 - 1)} = \left(\frac{pe}{e^2 - 1}\right)^2.$$

Dividindo ambos os termos por $\left(\frac{pe}{e^2 - 1}\right)^2 \neq 0$, tem-se:

$$\frac{\left(x + \frac{p}{e^2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{pe}{e^2 - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{pe}{\sqrt{e^2 - 1}}\right)^2} = 1.$$

Conforme demonstrado em 5.2.3 esta última equação representa, no sistema de eixos cartesianos adotado, uma hipérbole com centro $O' = \left(-\frac{p}{e^2 - 1}, 0\right)$, semi-eixo transverso $a = \frac{pe}{e^2 - 1}$ e semi-eixo conjugado $b = \frac{pe}{\sqrt{e^2 - 1}}$.

Fazendo a razão entre os comprimentos a e b , resulta em:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{pe}{e^2 - 1}}{\frac{pe}{\sqrt{e^2 - 1}}} = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow a^2(e^2 - 1) = b^2.$$

Substituindo nesta última equação a relação válida para hipérboles $b^2 = c^2 - a^2$ (ver 5.1), tem-se:

$$a^2(e^2 - 1) = c^2 - a^2$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 e^2$$

$$\Rightarrow e = \pm \frac{c}{a}.$$

Como a excentricidade e deve ser um número positivo, tem-se:

$$e = \frac{c}{a}.$$

□

De fato, a expressão da excentricidade da hipérbole é igual à expressão da excentricidade obtida para a elipse. No entanto, como para a hipérbole tem-se $c > a$ a excentricidade da hipérbole é maior que 1. Assim como no caso da elipse, a excentricidade de uma hipérbole é um parâmetro indicativo do aspecto da curva. A medida que construímos hipérboles com excentricidades cada vez maiores, as curvas resultantes se aproximarão de duas retas paralelas, conforme ilustra a figura 5.9, em que há duas hipérboles com a mesma distância focal, e com excentricidades distintas ($e = 1,2$ e $e = 6,5$).

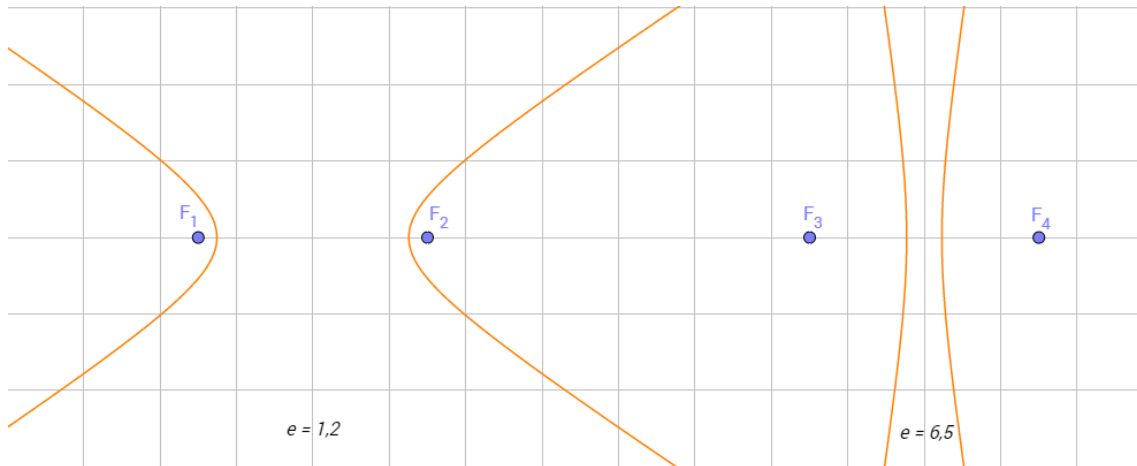


Figura 5.9: Hipérboles com excentricidades $e = 1,2$ e $e = 6,5$.

5.2.5 As equações das retas diretrizes da hipérbole

Analicamente, é possível obter as equações das retas diretrizes da hipérbole associadas a um determinado sistema de eixos ortogonais, conforme proposição 5.2:

Proposição 5.2: Dada uma hipérbole H , considere um sistema de eixos coordenados $X'O'Y'$ em que O' coincide com o centro de H , e a reta focal coincide com o eixo $O'X'$, isto é, sua equação no sistema $X'O'Y'$ é dada por:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Neste sistema, as coordenadas das retas diretrizes da hipérbole são:

$$x' = \pm \frac{a^2}{c}.$$

Demonstração. Considere, conforme a figura 5.10, um sistema de eixos XOY em que a reta diretriz d_2 coincide com o eixo OY e o foco $F_2 = (0,p)$ está sobre o eixo OX . De acordo com 5.1, neste sistema a hipérbole possui centro $O' = (\frac{-p}{e^2-1}, 0)$ e equação:

$$\frac{\left(x + \frac{p}{e^2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{pe}{e^2 - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{pe}{\sqrt{e^2 - 1}}\right)^2} = 1.$$

Considere agora um sistema $X'O'Y'$ com centro em O' e eixo $O'X'$ coincidente com o eixo OX . No sistema $X'O'Y'$ a equação de H é dada por:

$$\frac{(x')^2}{\left(\frac{pe}{e^2 - 1}\right)^2} - \frac{(y')^2}{\left(\frac{pe}{\sqrt{e^2 - 1}}\right)^2} = 1.$$

E, ainda no sistema $X'O'Y'$, as equações das diretrizes d_1 e d_2 são:

$$x' = \pm \frac{p}{e^2 - 1}.$$

Como o semi-eixo transverso $a = \frac{pe}{e^2 - 1}$, segue que:

$$\frac{x'}{a} = \frac{\pm \frac{p}{e^2 - 1}}{\frac{pe}{e^2 - 1}} = \pm \frac{1}{e} = \pm \frac{1}{\frac{c}{a}} = \pm \frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow x' = \pm \frac{a^2}{c}.$$

□

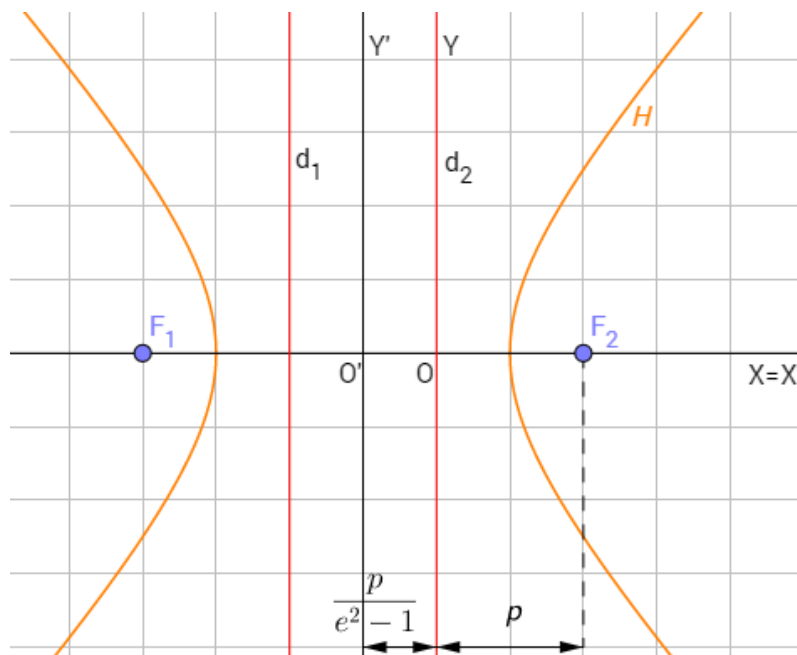


Figura 5.10: Equações das diretrizes da hipérbole.

5.2.6 Assíntotas da hipérbole

Algumas curvas possuem assíntotas oblíquas, isto é, que não são nem horizontais e nem verticais. Na prática, isso significa que os pontos da curva se aproximam de uma dada reta inclinada à medida que $x \rightarrow \pm\infty$. Este é o caso da Hipérbole. Do Cálculo Diferencial, dada uma curva $y = f(x)$ e uma reta $y = mx + n$, se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 \quad (5.11)$$

então a reta $y = mx + n$ é uma assíntota inclinada da curva. Este fato será utilizado para demonstrar a proposição 5.3:

Proposição 5.3: Dada uma hipérbole com centro na origem do sistema cartesiano e equação canônica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, então as retas de equações $y = \pm \frac{b}{a}x$ são assíntotas inclinadas da hipérbole.

Demonstração. Da equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, isolando o termo em y obtém-se:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

com $x \geq a$ ou $x \leq -a$.

Os ramos da hipérbole acima e abaixo do eixo x representam os gráficos dessas curvas conforme se tome o sinal positivo ou negativo, respectivamente. Sem perdas de generalidade, considere o ramo superior da hipérbole dado por $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ com $x \geq a$. Os outros casos são tratados de forma análoga. Calculando-se o limite 5.11, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x)$$

Multiplicando numerador e denominador por $\sqrt{x^2 - a^2} + x$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-ba}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a reta $y = \frac{b}{a}x$ é uma assíntota da hipérbole. \square

5.3 Tratamento geométrico da Hipérbole

5.3.1 Construção da hipérbole com uma haste e um fio inextensível

Geometricamente podemos construir uma hipérbole, isto é, desenhar um trecho de seu traçado, utilizando uma haste, um fio inextensível, uma folha de papel, um

lápiz e suportes (tachinhas ou pregos). A construção segue os seguintes passos:

1. Marque sobre a folha dois pontos, F_1 e F_2 (focos da hipérbole), de modo que a $d(F_1, F_2) > h - l$, em que h é o comprimento da haste e l é o comprimento do fio inextensível, com $h > l$.
2. Fixe uma extremidade da haste em um dos pontos marcados, digamos F_2 , de modo que a haste possa rotacionar livremente em torno deste ponto.
3. Prenda uma das extremidades do fio na extremidade livre da haste e prenda a outra extremidade do fio no outro ponto marcado (F_1).
4. Utilizando a ponta do lápis, mantenha o fio esticado e sempre junto a haste (ver figura 5.11).
5. Rotacionando a haste e deixando o fio sempre esticado, conforme posição indicada no item 4, o traçado descrito pela ponta do lápis será um dos ramos da hipérbole de focos F_1 e F_2 e eixo transverso de medida $h - l$. O outro ramo da hipérbole pode ser obtido invertendo-se os pontos de fixação da haste e da extremidade do fio.

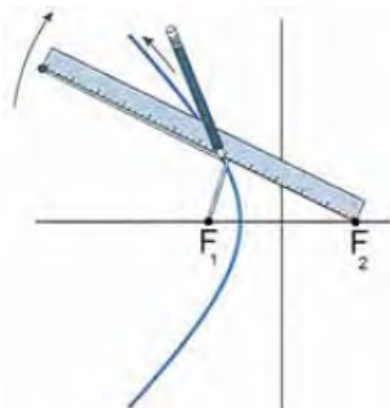


Figura 5.11: Construção geométrica da hipérbole. Fonte:[13]

Para justificar tal construção, vamos mostrar que para todo ponto P da curva assim obtida, tem-se $|PF_1 - PF_2| = constante < d(F_1, F_2)$. De fato, conforme figura 5.12, seja x a distância entre a extremidade A do barbante e o ponto P da curva. Logo, sendo l o comprimento do fio e h o comprimento da haste, tem-se $d(P, F_1) = l - x$ e $d(P, F_2) = h - x$. Portanto, $PF_2 - PF_1 = h - x - (l - x) = h - l = constante < d(F_1, F_2)$.

5.3.2 Uma construção da Hipérbole com régua e compasso

Considere determinar pontos de uma hipérbole H , dados o seu eixo transverso $2a$ e os focos F_1 e F_2 , utilizando apenas régua e compasso. Podemos fazê-lo procedendo a seguinte construção, conforme a figura 5.13:

1. Trace a circunferência C , de centro F_1 e raio $2a$.

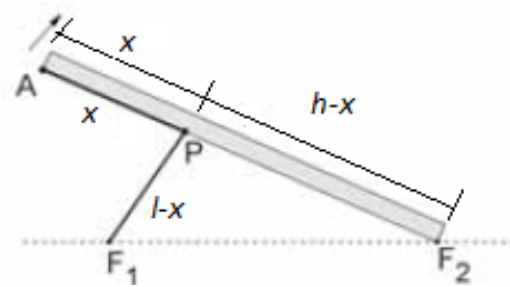


Figura 5.12: Justificativa da construção geométrica da hipérbole. Fonte:[13], adaptado.

2. Tome um ponto D , qualquer*, sobre C .
3. Trace a reta s , que passa pelos pontos F_1 e D .
4. Trace a reta t , mediatriz do segmento $\overline{DF_2}$.
5. O ponto P , interseção das retas s e t , será um ponto da hipérbole H .

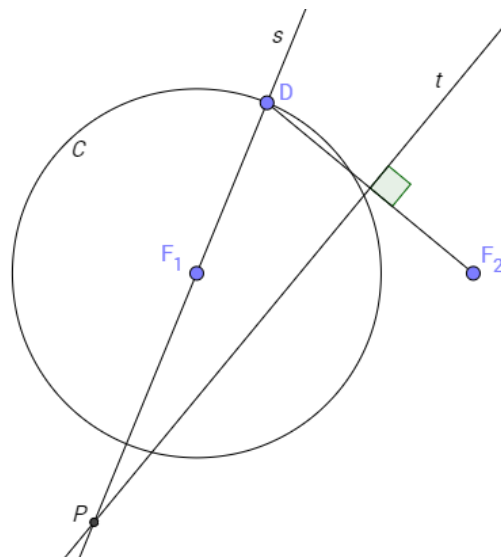


Figura 5.13: Construção da hipérbole com régua e compasso.

* Observa-se que há dois pontos de C tais que $\widehat{F_1DF_2} = 90^\circ$ (os pontos de interseção de C com a circunferência de diâmetro F_1 e F_2). Nestes casos as retas s e t são paralelas, possuem a mesma direção das assíntotas da hipérbole e não formam nenhum ponto de H .

Excetuando os casos mencionados e fazendo variar o ponto D sobre a circunferência C , o lugar geométrico dos pontos P assim obtidos será a hipérbole H , de focos F_1 e F_2 e eixo transversal $2a$, conforme ilustra a figura 5.14.

Para justificar tal construção, vamos mostrar que para todo ponto P da curva assim obtida, tem-se $|PF_1 - PF_2| = 2a$. De fato, como P pertence à mediatriz do segmento $\overline{DF_2}$ tem-se que P é equidistante de D e de F_2 . Logo,

$$PD = PF_2 \tag{5.12}$$

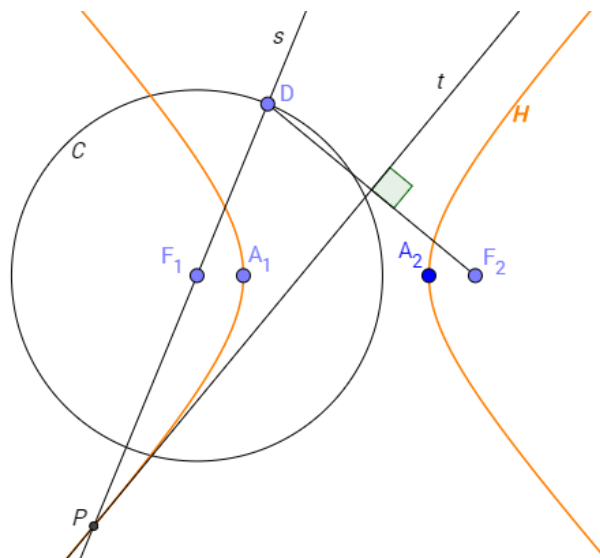


Figura 5.14: Construção da hipérbole com régua e compasso 2.

O segmento $\overline{F_1D}$ é raio da circunferência C , então $F_1D = 2a$. Como $F_1 \in \overline{PD}$, tem-se:

$$PD = PF_1 + F_1D = PF_1 + 2a \tag{5.13}$$

Substituindo 5.12 em 5.13, resulta em:

$$PF_2 - PF_1 = 2a.$$

Portanto, o ponto P pertence à hipérbole H , de focos F_1 e F_2 e eixo transversal $2a$.

A circunferência C , da construção da hipérbole com régua e compasso, é definida como a circunferência diretora da hipérbole:

Definição 5.3: Dada uma hipérbole H , de focos F_1 e F_2 e eixo transversal $2a$, as circunferências de centros F_1 e F_2 e raio $2a$, são denominadas as circunferências diretoras da hipérbole.

5.3.3 Reta tangente e propriedade refletora da hipérbole

Assim como as elipses (ver 4.3.4), as hipérboles possuem propriedade refletora que pode ser enunciada assim: se em uma hipérbole H com a capacidade de refletir raios de luz, emitirmos um raio coplanar à H , partindo de um dos focos e de modo que este atinja o ramo mais próximo de H , esse raio refletirá na hipérbole na direção do outro foco.

Para demonstrar a propriedade refletora da hipérbole, necessitamos definir os conceitos de reta tangente e reta normal à hipérbole em um ponto P :

Definição 5.4: Dada uma hipérbole H e um ponto $P \in H$, a reta tangente à hipérbole no ponto P é a reta t que contém P e não contém nenhum outro ponto de H .

Definição 5.5: Dada uma hipérbole H e um ponto $P \in H$, a reta que é perpendicular à reta tangente à hipérbole no ponto P e contém este ponto é a reta n , normal à H em P .

Proposição 5.4: Seja C a circunferência diretora de uma hipérbole H de focos F_1 e F_2 , com centro em F_1 . Se o ponto $D \in C$ e $\widehat{F_1DF_2} \neq 90^\circ$, então a reta t mediatriz do segmento $\overline{DF_2}$ é uma reta tangente da hipérbole.

Demonstração. A demonstração da proposição 5.4 é uma consequência da construção da hipérbole com régua e compasso. De fato, conforme demonstrado na seção 5.3.2, a reta t contém um ponto $P \in H$. Para concluir que t é tangente à hipérbole, basta mostrar que nenhum outro ponto de t pertence à H . Para tal, seja Q um ponto de t , com $P \neq Q$ (ver figura 5.15). Pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo $\triangle F_1QD$ tem-se:

$$F_1D + QD > QF_1 \tag{5.14}$$

Como Q pertence a mediatriz do segmento $\overline{DF_2}$, tem-se:

$$QD = QF_2 \tag{5.15}$$

Substituindo $F_1D = 2a$ e 5.15 em 5.14, resulta em:

$$QF_1 - QF_2 < 2a.$$

Como $|QF_1 - QF_2| \neq 2a$, nenhum ponto $Q \in t$, diferente de P , pertence à H . Portanto, t é a reta tangente à H em P . \square

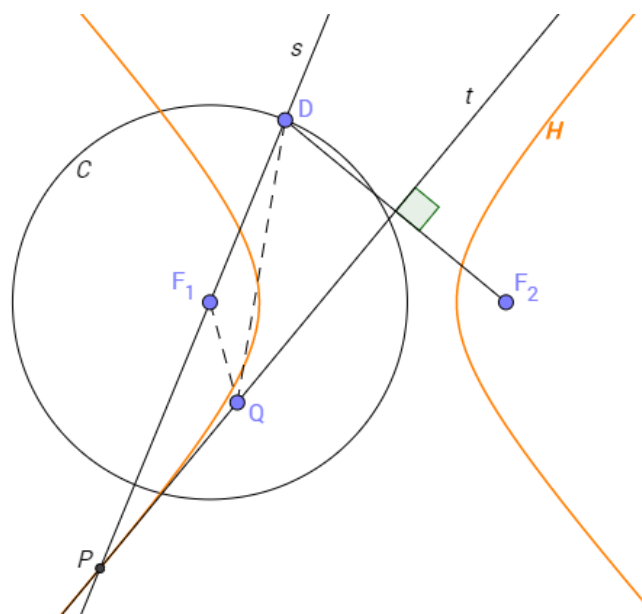


Figura 5.15: Reta tangente à hipérbole.

Proposição 5.5: (Propriedade refletora da Hipérbole) Seja H uma hipérbole de focos F_1 e F_2 . Dado um ponto $P \in H$, então a reta t , tangente à H em P é bissetriz do ângulo $\widehat{F_1PF_2}$.

Demonstração. Seja C a circunferência diretora de H com centro em F_1 . Conforme demonstrado em 5.3.2, o ponto D , simétrico de F_2 em relação à t , pertence à C e é tal que os pontos F_1, P e D são colineares (ver figura 5.16). Como $P \in t$ e t é mediatriz do segmento $\overline{F_2D}$ segue que $PD = PF_2$. Chamando de E o ponto médio do segmento $\overline{F_2D}$ segue, da congruência dos triângulos $\triangle PDE$ e $\triangle PF_2E$ (caso LLL), que $\widehat{DPE} = \widehat{EPF_2}$. Portanto t é bissetriz do ângulo $\widehat{F_1PF_2}$. \square

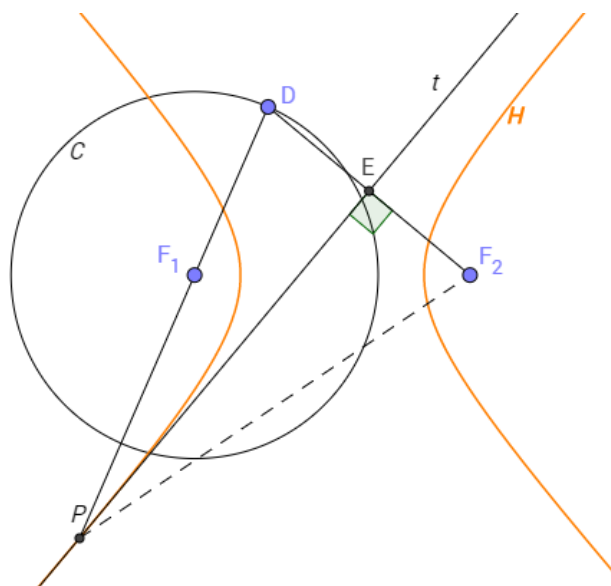


Figura 5.16: Propriedade refletora da hipérbole.

Seja G um ponto qualquer do prolongamento do segmento $\overline{F_2P}$ (ver figura 5.17), segue que o ângulo formado entre \overline{PG} e a reta t , tangente à hipérbole em P , é igual ao ângulo formado entre esta tangente e o segmento $\overline{F_2P}$ (pois são opostos pelo vértice). Seja θ este ângulo comum. Da proposição 5.5, tem-se que o ângulo formado entre t e o segmento $\overline{F_1P}$ vale também θ . Portanto, a reta n , normal à H em P , é bissetriz do ângulo $\widehat{F_1PG}$. Este fato, juntamente com os princípios de reflexão da luz, comprovam a propriedade refletora da hipérbole.

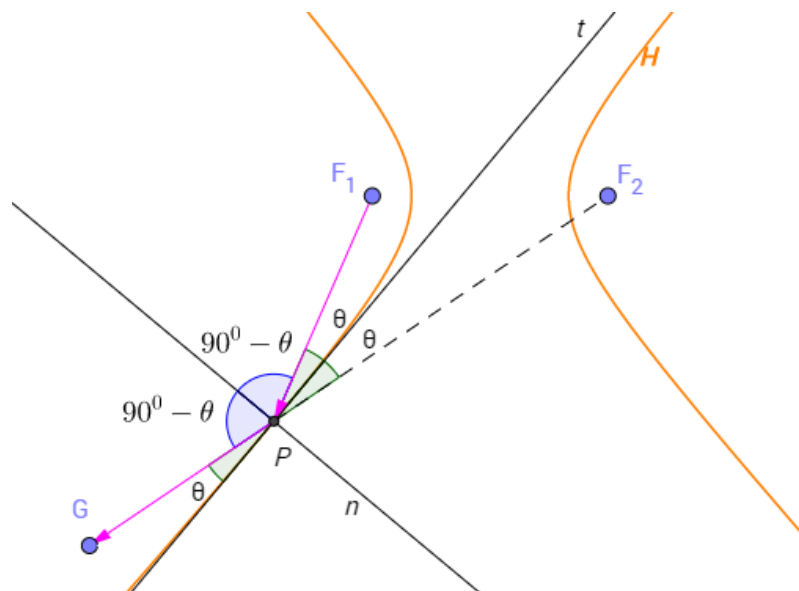


Figura 5.17: Propriedade refletora da hipérbole parte 2.

Parábolas

Considere uma seção cônica com excentricidade e , tal que $e = 1$. Neste caso a seção é uma parábola e o plano secante intercepta apenas uma folha da superfície cônica. Seja C_1 a esfera inscrita ao cone e tangente ao plano de interseção, conforme a figura 6.1. Esta esfera é denominada “Esfera de Dandelin” para seções tipo parábola [20].

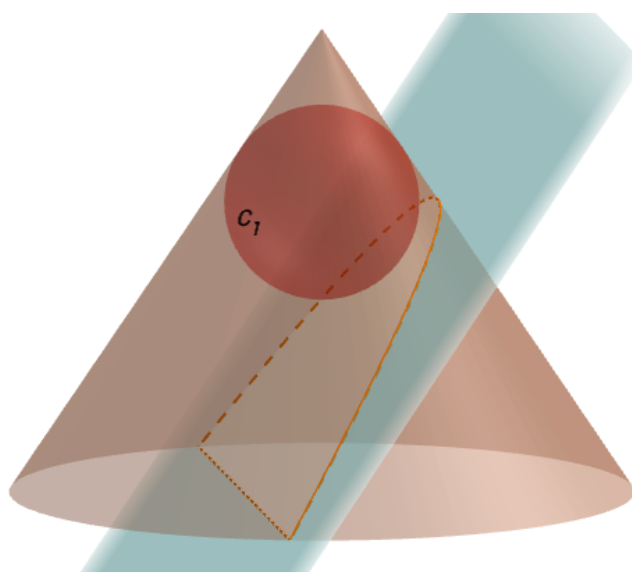


Figura 6.1: Esfera de Dandelin para seções tipo parábola.

Teorema 6.1: (2º Teorema de Dandelin-Quetelet para Parábolas) Considere uma seção cônica do tipo parábola. Sendo F o ponto de tangência da Esfera de Dandelin com o plano secante, então existe uma reta d , contida no plano de formação da curva, tais que para todo ponto P da parábola vale:

$$\frac{d(P,F)}{d(P,d)} = e = 1.$$

Demonstração. Considere os seguintes elementos conforme a figura 6.2:

- π é o plano secante de formação da parábola;

- π_1 é o plano que contém a circunferência l_1 , interseção entre a esfera de Dandelin C_1 e o cone;
- d é a reta de interseção entre os planos π e π_1 .
- T é o ponto de interseção entre a geratriz \overline{VP} e a circunferência l_1 ;
- \overline{PB} é o segmento paralelo ao eixo do cone, tal que $B \in \pi_1$;
- $C \in d$ é o pé da distância $d(P,d)$.

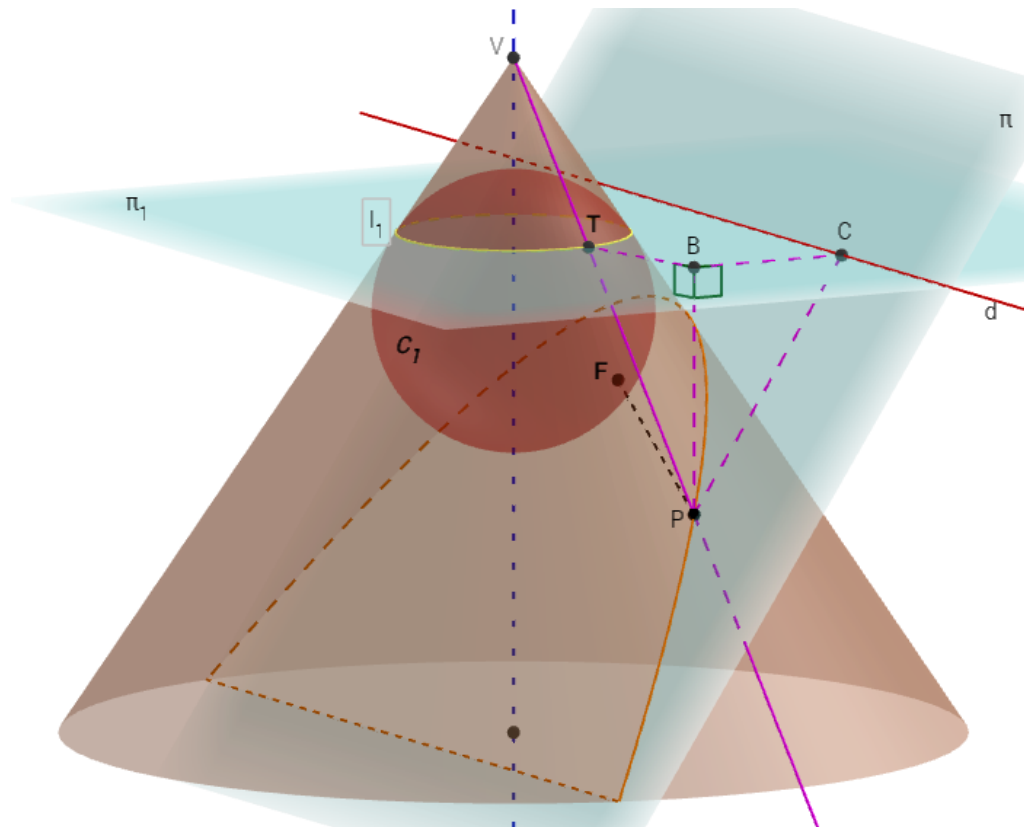


Figura 6.2: Ilustração do 2º Teorema de Dandelin-Quetelet para parábolas.

O segmento \overline{PB} é ortogonal ao plano π_1 visto que é paralelo ao eixo do cone. Logo, os ângulos \widehat{PBT} e \widehat{PBC} são retos. Tem-se ainda que o ângulo \widehat{TPB} é alterno interno com o ângulo formado entre a geratriz \overline{VP} e o eixo do cone. Segue que $\widehat{TPB} = \alpha$ (sendo o ângulo α conforme definido em 3.1). Portanto, no triângulo retângulo PBT tem-se:

$$PB = PT \cdot \cos \alpha \tag{6.1}$$

O ângulo \widehat{BPC} é o ângulo formado entre o eixo do cone e o plano de formação da parábola. Então $\widehat{BPC} = \beta$ (sendo o ângulo β conforme definição 3.1). Portanto, no triângulo retângulo PBC tem-se:

$$PB = PC \cdot \cos \beta \tag{6.2}$$

Da igualdade de 6.1 e 6.2, segue que:

$$PT.\cos\alpha = PC.\cos\beta \tag{6.3}$$

Como \overline{PT} e \overline{PF} são segmentos tangentes à esfera C_1 , pelo lema 3.1, tem-se:

$$PT = PF \tag{6.4}$$

Substituindo 6.4 em 6.3, resulta em:

$$\begin{aligned} PF.\cos\alpha &= PC.\cos\beta \\ \Rightarrow \frac{PF}{PC} &= \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \\ \Rightarrow \frac{d(P,F)}{d(P,d)} &= \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = e = 1 \end{aligned}$$

(pois na Parábola tem-se $\alpha = \beta$) □

O ponto F e a reta d do teorema 6.1 são denominados o foco e a diretriz da parábola, respectivamente.

A propriedade demonstrada no teorema 6.1 constitui a definição usual para a curva plana denominada parábola:

Definição 6.1: “Seja d uma reta e F um ponto do plano não pertencente a d . A parábola λ de foco F e diretriz d é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a d ”[9]. Ver figura 6.3.

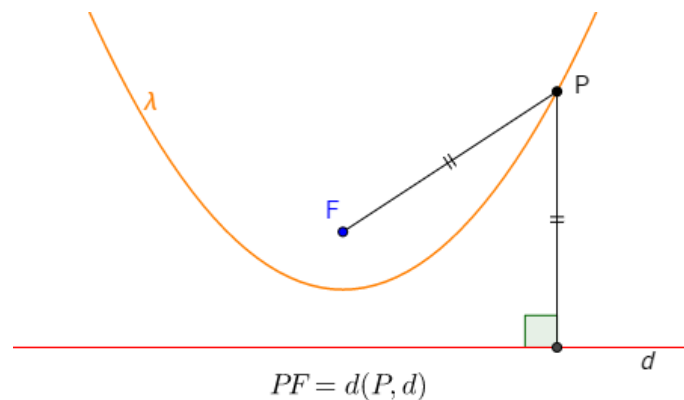


Figura 6.3: Definição usual de parábola.

6.1 Elementos da Parábola

Dada uma parábola λ de foco F e diretriz d , de acordo com [14] define-se (ver figura 6.4):

- A distância $2p$ entre o foco F e a diretriz d da parábola é chamado parâmetro da parábola.

- O ponto V , interseção da perpendicular à d por F com a parábola, é o vértice da parábola.
- A reta s , perpendicular a d por F é o eixo de simetria da parábola.
- Qualquer segmento cujos extremos estão sobre λ é denominado corda da parábola.
- Tomando A e B os extremos da corda que contém F e é paralela à diretriz d , obtém-se o triângulo ΔVAB denominado triângulo fundamental da parábola.

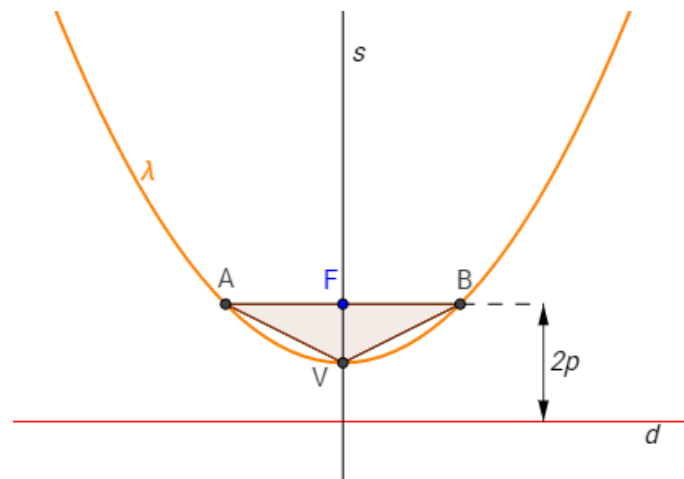


Figura 6.4: Elementos da parábola.

6.2 Tratamento Analítico da Parábola

Dados um sistema de eixos coordenados ortogonais XOY , as equações das parábolas que possuem reta diretriz d paralela a um dos eixos ortogonais, são denominadas formas canônicas da parábola.

6.2.1 Parábola λ com vértice na origem do sistema XOY e eixo de simetria coincidente com o eixo OY

Considere primeiramente (conforme figura 6.5) o foco da parábola pertencente à parte positiva do eixo OY . Nesse caso o ponto $F = (0,p)$ e a diretriz é a reta d de equação $y = -p$. Como o ponto $P = (x,y) \in \lambda$ se, e somente se, $d(P,F) = d(P,d)$, segue que:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + (y - p)^2} &= |y + p| \\
 \Rightarrow x^2 + (y - p)^2 &= (y + p)^2 \\
 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\
 \Rightarrow 4py &= x^2
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

A equação 6.5 é denominada a forma canônica da parábola de parâmetro $2p$, com vértice na origem, diretriz paralela ao eixo OX e foco pertencente à parte positiva do eixo OY .

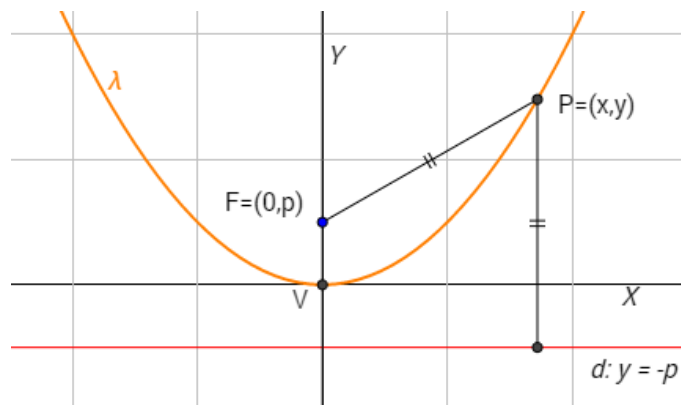


Figura 6.5: Parábola com vértice na origem do sistema XOY e foco na parte positiva do eixo OY .

Caso o foco da parábola seja pertencente à parte negativa do eixo OY , conforme figura 6.6, tem-se $F = (0, -p)$ e diretriz d com equação $y = p$. Desenvolvendo $d(P,F) = d(P,d)$ como no caso anterior, resulta em:

$$-4py = x^2 \tag{6.6}$$

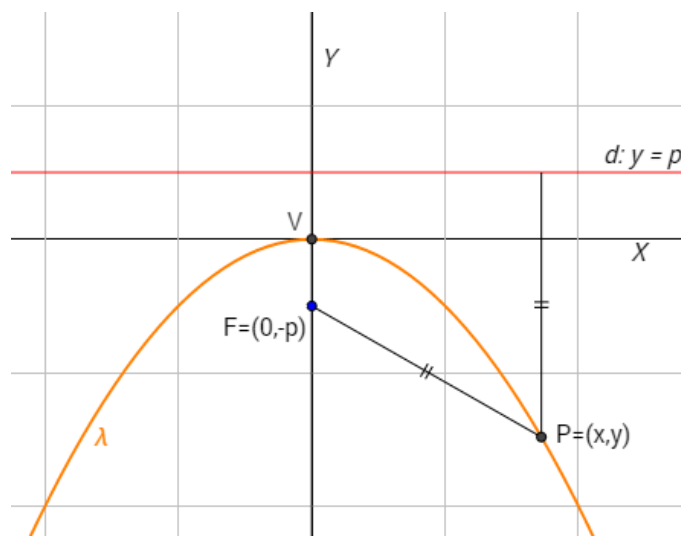


Figura 6.6: Parábola com vértice na origem do sistema XOY e foco na parte negativa do eixo OY .

A equação 6.6 é denominada a forma canônica da parábola de parâmetro $2p$, com vértice na origem, diretriz paralela ao eixo OX e foco pertencente à parte negativa do eixo OY .

6.2.2 Parábola λ com vértice na origem do sistema XOY e eixo de simetria coincidente com o eixo OX

Considere primeiramente (conforme figura 6.7) o foco da parábola pertencente à parte positiva do eixo OX . Nesse caso o ponto $F = (p,0)$ é o foco e sua diretriz é a reta d de equação $x = -p$. Desenvolvendo $d(P,F) = d(P,d)$ como em 6.2.1, resulta em:

$$4px = y^2 \quad (6.7)$$

A equação 6.7 é denominada a forma canônica da parábola de parâmetro $2p$, com

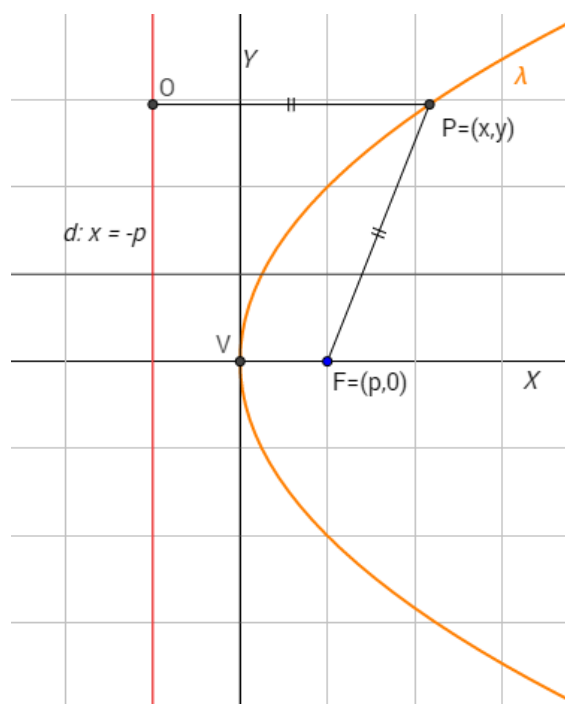


Figura 6.7: Parábola com vértice na origem do sistema XOY e foco na parte positiva do eixo OX .

vértice na origem, diretriz paralela ao eixo OY e foco pertencente à parte positiva do eixo OX .

Caso o foco da parábola seja pertencente à parte negativa do eixo OX , conforme figura 6.8, tem-se $F = (-p,0)$ e diretriz d com equação $x = p$. Desenvolvendo $d(P,F) = d(P,d)$ como no caso anterior, resulta em:

$$-4px = y^2 \quad (6.8)$$

A equação 6.8 é denominada a forma canônica da parábola de parâmetro $2p$, com vértice na origem, diretriz paralela ao eixo OY e foco pertencente à parte negativa do eixo OX .

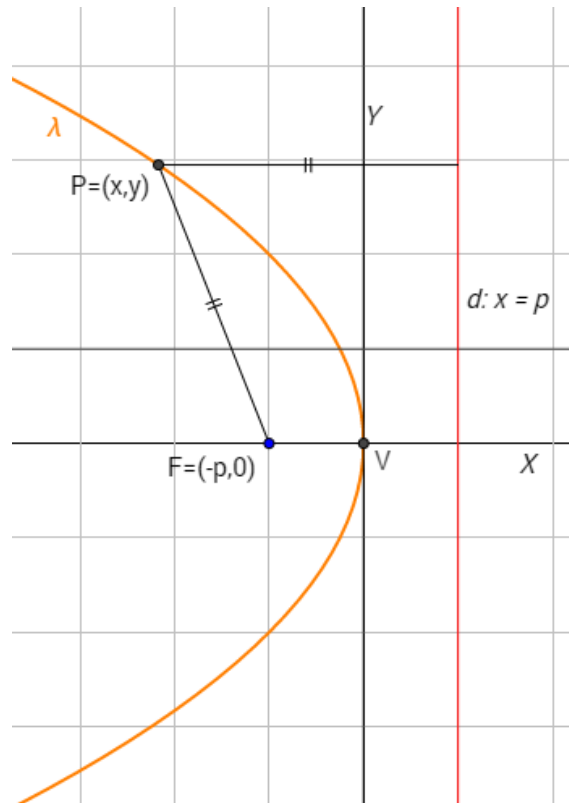


Figura 6.8: Parábola com vértice na origem do sistema XOY e foco na parte negativa do eixo OX .

6.2.3 Formas canônicas da parábola com centro fora da origem

Conforme demonstrado em 4.2.3, dado um ponto $O' = (x_0, y_0)$ num sistema de eixos ortogonais XOY e sendo $X'O'Y'$ o sistema com centro em O' e eixos ortogonais paralelos e com o mesmo sentido dos eixos do sistema XOY , então as coordenadas de um ponto qualquer do plano, em ambos os sistemas, se relacionam por:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad (6.9)$$

Dessa forma, considere uma parábola com vértice no ponto $O' = (x_0, y_0)$ do sistema XOY e eixo de simetria paralelo ao eixo OY . Relativamente ao sistema $O'X'Y'$, tem-se uma parábola centrada na origem O' e com eixo de simetria coincidente com o eixo $O'Y'$. Portanto, conforme 6.2.1, sua equação canônica no sistema $O'X'Y'$ quando o foco F pertence a parte positiva do eixo $O'Y'$ é dada por:

$$4p(y') = (x')^2 \quad (6.10)$$

Substituindo 6.9 em 6.10, tem-se a equação canônica, no sistema XOY , da parábola com vértice em $O' = (x_0, y_0)$ e eixo de simetria paralelo ao eixo OY :

$$4p(y - y_0) = (x - x_0)^2 \quad (6.11)$$

No caso em que o foco F da parábola pertence à parte negativa do eixo $O'Y'$, sua equação canônica no sistema XOY será dada por:

$$-4p(y - y_0) = (x - x_0)^2 \quad (6.12)$$

Analogamente, a equação canônica no sistema XOY da parábola com vértice em $O' = (x_0, y_0)$, eixo de simetria paralelo ao eixo OX e foco F pertencente à parte positiva do eixo $O'X'$ é dada por:

$$4p(x - x_0) = (y - y_0)^2 \quad (6.13)$$

No caso em que o foco F da parábola pertence a parte negativa do eixo $O'X'$, sua equação canônica no sistema XOY será dada por:

$$-4p(x - x_0) = (y - y_0)^2 \quad (6.14)$$

6.3 Tratamento geométrico da Parábola

6.3.1 Construção da parábola com esquadro e fio inextensível

Geometricamente podemos construir uma parábola, isto é, desenhar um trecho de seu traçado, utilizando um esquadro, um fio inextensível, uma folha de papel, um lápis e suportes (tachinhas ou pregos). A construção segue os seguintes passos:

1. Na folha de papel, trace uma reta d e marque um ponto F não pertencente a d .
2. Designando por A , B e C os vértices do esquadro, sendo A o vértice do ângulo reto, prenda uma extremidade do fio no vértice B . O comprimento do fio deverá coincidir com o tamanho do cateto AB . Fixe a outra extremidade do fio no ponto F .
3. Posicione o cateto AC sobre a reta d .
4. Utilizando a ponta do lápis, mantenha o fio esticado e sempre junto ao cateto AB do esquadro (ver figura 6.9).
5. Deslizando o esquadro na folha mantendo o cateto AC sobre a reta d e deixando o fio sempre esticado, conforme posição indicada no item 4, o traçado descrito pela ponta do lápis será uma parábola de foco F e diretriz d .

Para justificar tal construção, vamos mostrar que para todo ponto P da curva assim obtida, tem-se $d(P, F) = d(P, d)$. De fato, sendo l o comprimento do cateto AB do esquadro e x o comprimento variável do segmento \overline{PB} , tem-se que $\overline{PA} = d(P, d) = l - x$. Mas, como o comprimento do fio também vale l , a distância $d(P, F)$ também vale $l - x$.

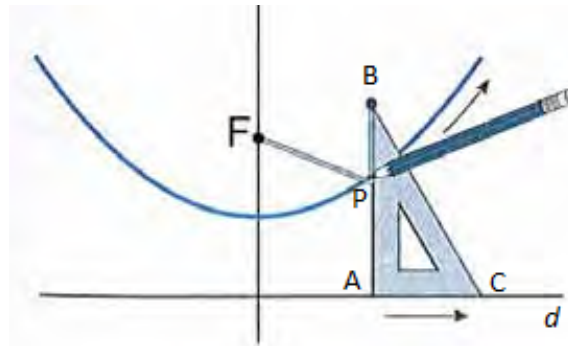


Figura 6.9: Construção geométrica da parábola. Fonte:[13]

6.3.2 Uma construção da Parábola com régua e compasso

Considere determinar pontos de uma parábola λ , dados a sua diretriz d e o seu foco F , utilizando apenas régua e compasso. Podemos fazê-lo procedendo a seguinte construção, conforme a figura 6.10:

1. Tome um ponto D , qualquer, sobre d .
2. Trace a reta r , perpendicular à d e passando por D .
3. Trace a reta t , mediatriz do segmento \overline{DF} .
4. O ponto P , interseção das retas r e t , será um ponto da parábola λ .

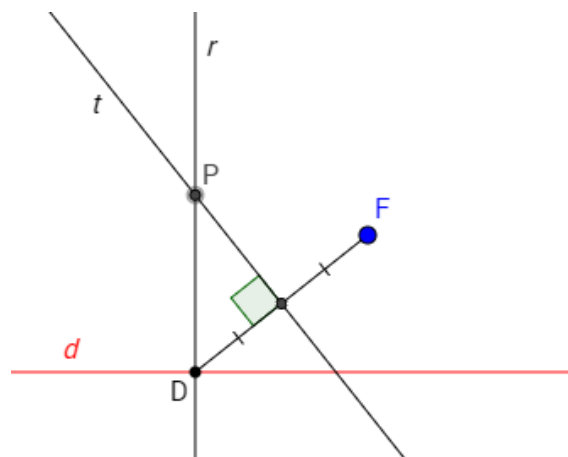


Figura 6.10: Construção da parábola com régua e compasso.

Fazendo variar o ponto D sobre a reta d , o lugar geométrico dos pontos P assim obtidos será a parábola λ , de foco F e diretriz d , conforme ilustra a figura 6.11.

Para justificar tal construção, vamos mostrar que para todo ponto P da curva assim obtida, tem-se $d(P,F) = d(P,d)$. De fato, como r é perpendicular à d tem-se que $d(P,d) = PD$. Uma vez que P pertence à mediatriz do segmento \overline{DF} , tem-se que P é equidistante de D e de F . Logo, $PD = d(P,d) = d(P,F)$. Portanto, o ponto P pertence à parábola λ , de foco F e diretriz d .

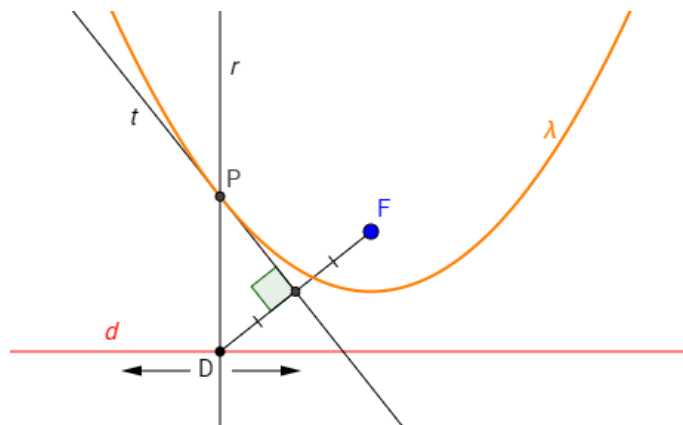


Figura 6.11: Construção da parábola com régua e compasso 2.

6.3.3 Retta tangente e propriedade refletora da parábola

Assim como as elipses (ver 4.3.4) e as hipérbolas (ver 5.3.3), as parábolas possuem propriedade refletora que pode ser enunciada assim: se em uma parábola λ com a capacidade de refletir raios de luz, emitirmos um raio coplanar à λ partindo do foco, esse raio refletirá na parábola paralelamente ao seu eixo de simetria.

Para demonstrar a propriedade refletora da parábola, necessitamos definir os conceitos de reta tangente e reta normal à parábola em um ponto P :

Definição 6.2: Dada uma parábola λ e um ponto $P \in \lambda$, a reta tangente à parábola no ponto P , é a reta t que contém P , concorre com o eixo de simetria da parábola e não contém nenhum outro ponto de λ .

Definição 6.3: Dada uma parábola λ , e um ponto $P \in \lambda$, a reta que é perpendicular a reta tangente à parábola no ponto P e contém este ponto é a reta n , normal à λ em P .

Proposição 6.1: Seja P um ponto da parábola λ de foco F e diretriz d . Se $D \in d$ é o pé da distância $d(P,d)$, então a reta t , mediatriz do segmento \overline{DF} , é tangente à λ em P .

Demonstração. A demonstração da proposição 6.1 é uma consequência da construção da parábola com régua e compasso. De fato, conforme demonstrado na seção 6.3.2, a reta t contém um ponto $P \in \lambda$. Para concluir que t é tangente à parábola, basta mostrar que nenhum outro ponto de t pertence à λ . Para tal, seja Q um ponto de t , $Q \neq P$, e Q' o pé da distância $d(Q,d)$ (ver figura 6.12). Como $Q \in t$ tem-se $QF = QD$. Mas QD é hipotenusa do triângulo $\Delta QQ'D$, de modo que $QD = QF > QQ' = d(Q,d)$. Portanto, como $d(Q,F) \neq d(Q,d)$, tem-se que $Q \notin \lambda$. \square

Proposição 6.2: (Propriedade refletora da Parábola) Seja P um ponto da parábola λ de foco F e diretriz d . Se $D \in d$ é o pé da distância $d(P,d)$, então a reta t , tangente à λ em P , é bissetriz do ângulo \widehat{DPF} .

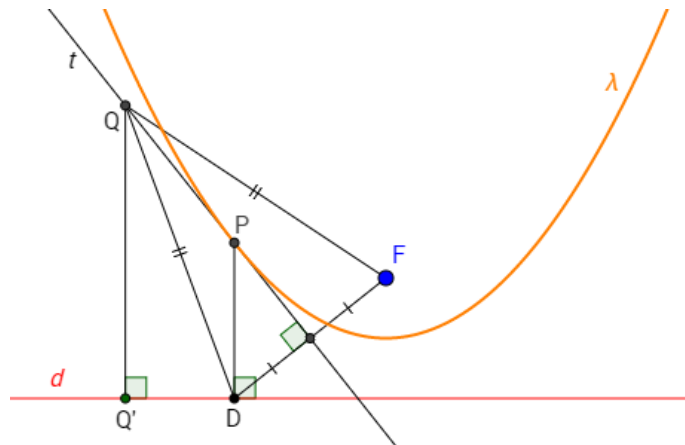


Figura 6.12: Reta tangente à parábola.

Demonstração. Seja M o ponto médio do segmento \overline{DF} (ver figura 6.13). Como $P \in \lambda$ tem-se $PF = PD$. Logo, segue da congruência dos triângulos $\triangle PMD$ e $\triangle PMF$ (caso LLL) que $\widehat{DPM} = \widehat{MPF}$. \square

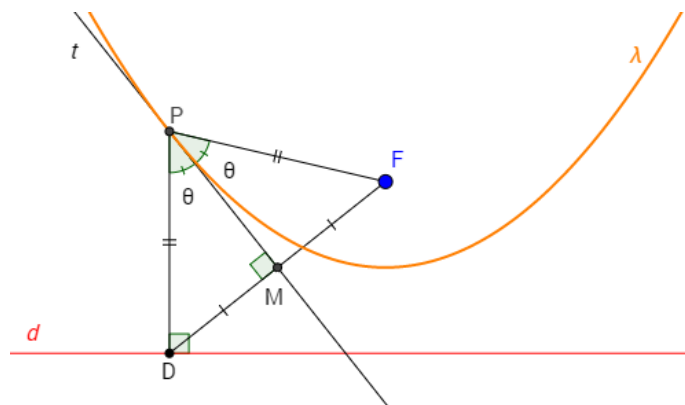


Figura 6.13: Propriedade refletora da parábola.

Seja G um ponto qualquer do prolongamento do segmento \overline{DP} (ver figura 6.14), segue que o ângulo formado entre \overline{PG} e a reta t , tangente à parábola em P , é igual ao ângulo formado entre esta tangente e o segmento \overline{DP} (pois são opostos pelo vértice). Seja θ este ângulo comum. Da proposição 6.2, tem-se que o ângulo formado entre t e o segmento \overline{FP} vale também θ . Portanto, a reta n , normal à λ em P , é bissetriz do ângulo \widehat{FPG} . Este fato, juntamente com os princípios de reflexão da luz, comprovam a propriedade refletora da parábola.

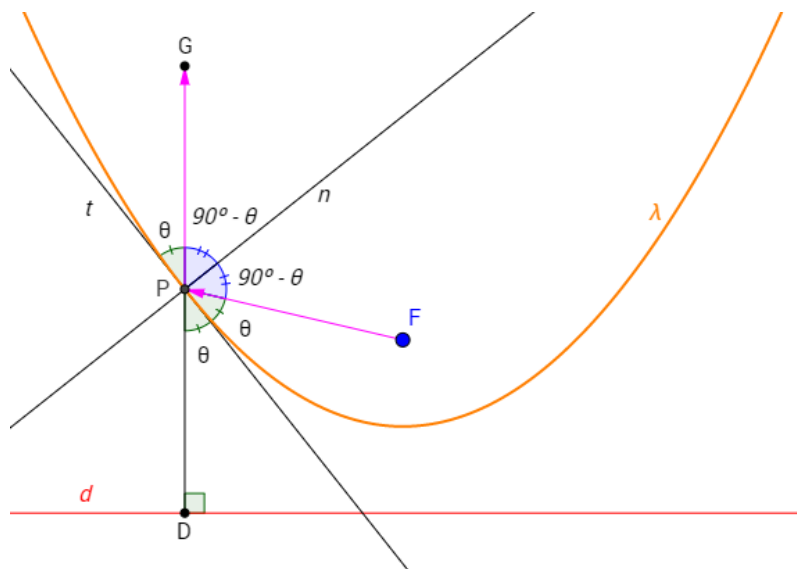


Figura 6.14: Propriedade refletora da parábola parte 2.

Fenômenos Naturais e Aplicações

7.1 As seções cônicas em fenômenos naturais

As seções cônicas estão presentes na natureza, em especial, estão intimamente relacionadas aos fenômenos regidos pela gravitação universal. Kepler, Galileu e Newton são os personagens principais relacionados a essas descobertas, que serão relatadas nas seções [7.1.1](#), [7.1.2](#) e [7.1.3](#).

7.1.1 Kepler e a trajetória dos planetas

Johannes Kepler (1571-1630) nasceu no sudoeste da Alemanha, na pequena cidade de Weil-der-Stadt. Embora tenha sido de família humilde, sua inteligência revelou-se precocemente levando-o primeiramente ao seminário e posteriormente à universidade. Aos 23 anos de idade, ainda estudante de teologia, foi convidado a lecionar Astronomia e Matemática em uma universidade Austríaca. Sua carreira como docente não prosperou, no entanto, seu contato com a Astronomia lhe deixou profundos questionamentos que influenciaram seus trabalhos pelo resto da vida. Sua principal indagação era o por quê de haver exatamente seis planetas no sistema solar (em 1595 apenas eram conhecidos os planetas Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno). Esse foi o tema central de sua obra intitulada *Mysterium Cosmographicum* publicada em 1596.

As descobertas de Kepler relacionadas às trajetórias dos planetas, teve início quando um importante astrônomo da época, Tycho Brahe (1545-1601), conheceu o *Mysterium Cosmographicum* e percebeu o talento matemático do seu autor. Brahe foi um aficcionado por entender como funcionava o sistema planetário e por mais de 20 anos coletou dados sobre as posições de estrelas e planetas, utilizando-se dos melhores instrumentos existentes à época (antes do advento do telescópio). Dessa forma, após um período de dois anos trocando correspondências, Kepler tornou-se assistente de Brahe em 1600. Com a morte de Brahe em 1601, Kepler assume o seu posto e utilizando-se dos preciosos dados coletados pelo primeiro e inicia um árduo trabalho matemático até obter os resultados denominados "As três leis de Kepler". O desafio de Kepler era desenvolver um modelo que se ajustasse as observações astronômicas existentes e para isso foi necessário um rompimento com o pensamento aristotélico,

que acreditava que os corpos celestes, devido sua perfeição, só podiam se mover em círculo e com velocidade constante. Após muitos cálculos e muitas tentativas frustradas, Kepler descobre um modelo que se adequava aos dados observados e os publica em 1609 na obra denominada *Astronomia Nova*, que contém suas duas primeiras leis[28]:

1ª Lei de Kepler: a órbita de cada planeta é uma elipse, com o Sol em um dos focos. Como consequência da orbita ser elíptica, a distância do Sol ao planeta varia ao longo de sua órbita.

2ª Lei de Kepler: a reta unindo o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais. Geometricamente, conforme a figura 7.1, tem-se que, se para deslocar de *A* até *B* o planeta leva o mesmo tempo para se deslocar de *C* até *D*, então as áreas destacadas são iguais. O significado físico dessa lei é que a velocidade orbital do planeta não é constante, sendo maior nos pontos da trajetória mais próximos do sol [24].

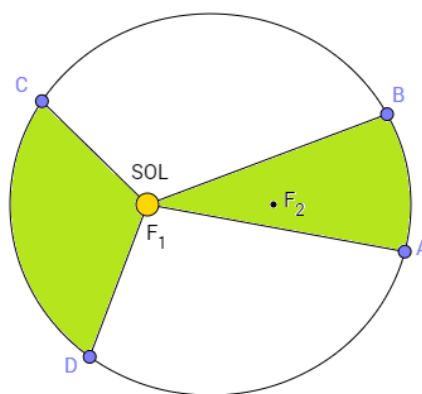


Figura 7.1: 2ª Lei de Kepler.

Vale ressaltar a grandiosidade do feito de Kepler: o estudo das trajetórias dos planetas se iniciou com Marte, que possui uma trajetória elíptica com excentricidade $e = 0,09341$ [4]. Isto significa que o comprimento do eixo menor da trajetória é aproximadamente 99,6% do comprimento do eixo maior! Portanto, a trajetória é praticamente circular.

A terceira lei de Kepler foi publicada anos mais tarde, em 1619, no livro intitulado *Harmonice Mundi*, e diz:

3ª Lei de Kepler: o quadrado do período orbital dos planetas é diretamente proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol. Em termos matemáticos, se P é o período sideral do planeta e a o semi-eixo maior da órbita elíptica, então:

$$\frac{P^2}{a^3} = \text{constante}.$$

7.1.2 Galileu e as trajetórias parabólicas

Galileu Galilei (1564-1642) nasceu em Pisa, na região da Toscana, Itália. Considerado por muitos como o pai da ciência moderna, Galileu foi um grande gênio determinado a entender como o mundo funciona. Acreditava na teoria Copernicana do heliocentrismo (os planetas orbitando em torno do sol) em contraposição da visão Aristotélica do geocentrismo (a terra como o centro do universo) que era o grande modelo aceito e difundido em sua época. Inventou diversos objetos dentre eles o telescópio que, segundo [16], possibilitou a descoberta de mais de 500 estrelas desconhecidas, revelou as irregularidades do solo lunar derrubando a ideia vigente de que a superfície da lua era uma esfera perfeita, permitiu a visualização dos anéis de Saturno, das fases de Vênus e de manchas no Sol. Pôde observar também quatro luas que orbitam Júpiter, fato que desmistificou a ideia Aristotélica da terra como o centro do universo e todos os corpos celestes girando em torno dela.

De acordo com [10], após descobrir evidências suficientes a favor da teoria de Copérnico, Galileu começou a defendê-la escrevendo em italiano (não no Latim acadêmico, como de costume). Não tardou para que suas ideias fossem amplamente apoiadas fora das universidades, irritando os professores Aristotélicos e sobretudo a Igreja Católica, que as considerou como heresia. Em 1633, com 70 anos de idade, após publicar o livro *Diálogo sobre os dois principais sistemas do mundo*, Galileu foi condenado pelos tribunais da inquisição da Igreja Católica, impondo-lhe como pena a renúncia pública do copernicanismo e a prisão domiciliar pelo resto de sua vida.

Mesmo preso e já quase cego, Galileu conclui sua segunda grande obra, publicada clandestinamente em 1638, denominada *Discurso das duas novas ciências: Mecânica e Dinâmica*, que trata das oscilações pendulares e suas leis, da coesão dos sólidos, do movimento uniforme, acelerado e uniformemente acelerado. Utilizando o princípio da independência dos movimentos em diversas direções e mais uma vez derrubando os preceitos Aristotélicos sobre o movimento, Galileu demonstra nessa obra que, desprezando a resistência do ar, a trajetória descrita por um projétil lançado obliquamente é uma parábola [24], conforme ilustra a figura 7.2.

7.1.3 Newton e o *Principia*

Isaac Newton (1642-1727) nasceu em Woolsthorpe-by-Colsterworth, na Inglaterra. É, certamente, uma das mais geniais mentes que já existiu. Seus trabalhos deixaram um legado imensurável para a humanidade nas mais diversas áreas do conhecimento. Sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada em 1687, revolucionou a visão de mundo e, segundo [10], trata-se do livro mais influente já escrito na física!

Após Kepler ter determinado que a trajetória dos planetas eram elípticas, restava ainda determinar o porquê. Grandes cientistas como Robert Hooke e Edmund Halley tentaram responder a pergunta, mas não obtiveram êxito. Ao ser consultado sobre o assunto por Halley, Newton afirmou ter a resposta e tempos mais tarde escreveu um manuscrito ao primeiro, que reconhecendo a relevância do que havia recebido, incentivou Newton a publicar suas descobertas. Assim nasceu o *Principia*.



Figura 7.2: Trajetória parabólica. Fonte:[9]

Nessa obra, Newton mostra que todos os movimentos observados na natureza podem ser compreendidos em termos de leis expressas pela matemática. Partindo de três axiomas (denominados as três Leis), Newton demonstra que, devido a forma como age a gravidade, as órbitas descritas por corpos celestes serão elipses, hipérbolas ou parábolas, a depender da energia do sistema. Dessa forma, Newton prova que as soluções do problema gravitacional são dadas por seções cônicas, generalizando as descobertas de Kepler e Galileu e dando bases sólidas para o desenvolvimento da física clássica, ou também denominada física Newtoniana.

7.2 Aplicações das Seções Cônicas

Nas seções 4.3.4, 5.3.3 e 6.3.3 foram demonstradas as propriedades refletoras das seções cônicas que, sinteticamente, dizem que um raio de luz emitido a partir de um foco da elipse ou da hipérbole, reflete-se na curva na direção do outro foco. Para a parábola vale que um raio de luz emitido a partir de seu foco, reflete-se na curva paralelamente ao seu eixo de simetria. Naturalmente o caminho inverso é verdadeiro, isto é, se raios de luz são incididos na parábola paralelamente ao seu eixo de simetria, então estes raios serão refletidos em direção ao seu foco.

A revolução de uma elipse em torno de sua reta focal gera uma superfície denominada elipsoide. Analogamente, a revolução de uma hipérbole em torno de sua reta focal gera uma superfície denominada hiperboloide (de uma ou duas folhas) e na parábola, sua revolução em torno de seu eixo de simetria gera uma superfície denominada paraboloides. Essas superfícies são denominadas quádricas, e estão ilustradas na figura 7.3.

As quádricas são superfícies que apresentam as propriedades refletoras das seções cônicas em todas as direções do espaço. Esta propriedade é utilizada em vários campos do conhecimento pelo homem.

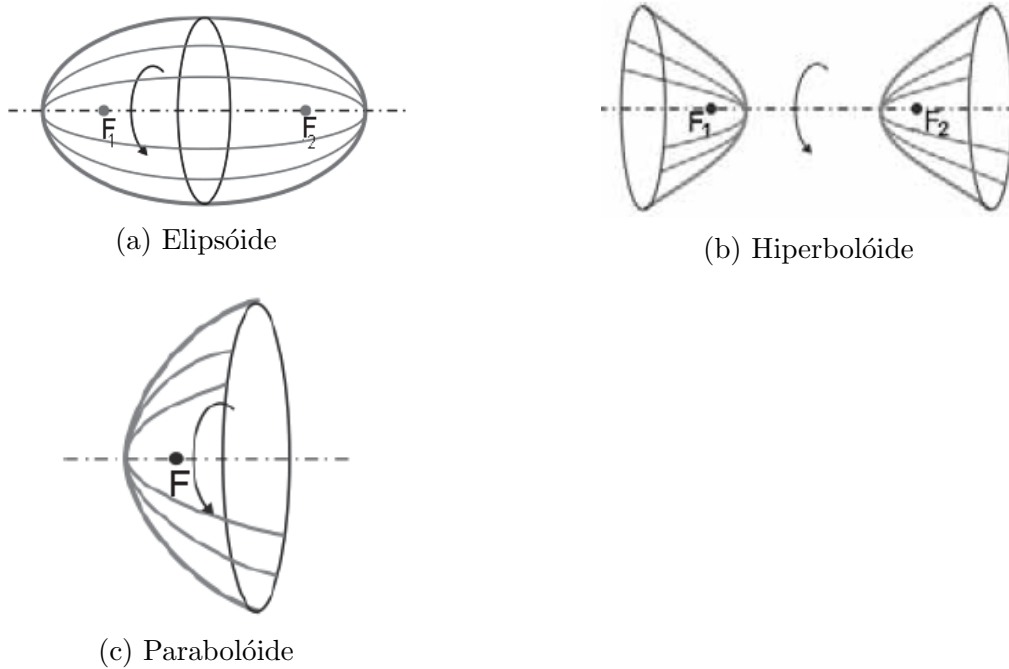


Figura 7.3: Quádricas: em (a), (b) e (c) tem-se um elipsóide, hipérbolóide e parabolóide, respectivamente. Fonte: [13]

7.2.1 Luminárias de Dentistas

As luminárias utilizadas pelos dentistas para iluminar a boca de seus pacientes são constituídas, de modo geral, por uma lâmpada, um anteparo fosco, um espelho em formato de parte de um elipsóide e braços articulados que lhe permitem o direcionamento do equipamento. Conforme figura 7.4, a lâmpada é fixa e encontra-se em um dos focos do elipsóide(espelho). Com os braços articulados, o dentista posiciona o equipamento de forma que o outro foco esteja localizado na boca do paciente. Devido a propriedade refletora da elipse, todos os raios de luz que partem da lâmpada e refletem no espelho são direcionados à boca do paciente. Com um anteparo fosco entre a lâmpada e o paciente, a luz não atinge os olhos deste e assim reduz o desconforto durante o atendimento.

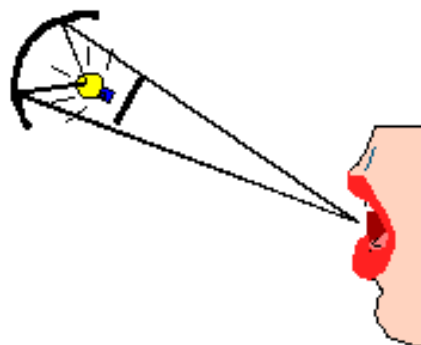


Figura 7.4: Luminária de Dentistas. Fonte:[25]

O mesmo princípio utilizado nas luminárias de dentistas também são utilizados em

certos equipamentos de radioterapia, em que ondas eletromagnéticas são direcionadas com alta precisão para atingir um tecido doente, não devendo atingir os tecidos vizinhos sadios.

7.2.2 Sala dos Sussurros

A propriedade refletora da elipse é válida para a luz e também para outras formas de energia, como as ondas sonoras. Existem salas acústicas ou galerias, também denominadas “sala dos sussurros”, construídas em forma de elipsóide que apresentam uma curiosa propriedade: duas pessoas localizadas nos focos do elipsóide podem se comunicar através de sussurros de modo que nenhuma outra pessoa da sala escute a conversa. O princípio dessas salas é que toda onda sonora que atinge as paredes desta são refletidos (e portanto concentrados) na direção do outro foco (ver figura 7.5).

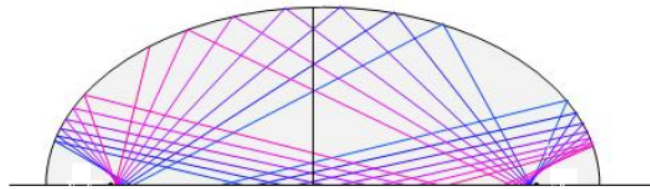


Figura 7.5: Sala dos Sussurros. Fonte:[23]

Tais salas podem ser encontradas em alguns museus e edifícios públicos construídos nos Estados Unidos e na Europa.

7.2.3 Sistema LORAN (Long Range Navigation)

Antes do advento do sistema GPS de localização (em que são utilizados satélites em órbita ao redor da terra), o sistema terrestre de radionavegação LORAN era utilizado para a permitir a localização de navios e aviões.

O princípio do sistema consiste na emissão concomitante de ondas de rádio a partir de três pontos fixos e conhecidos F_1 , F_2 e F_3 . Sendo v a velocidade de propagação das ondas de rádio emitidas e t_1 , t_2 e t_3 o tempo que os sinais levam para alcançar o navio (ou avião) localizado em um ponto P desconhecido, determina-se a diferença entre a posição P com relação às duas primeiras estações:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = v(t_1 - t_2).$$

Portanto, P situa-se em um dos ramos da hipérbole de focos F_1 e F_2 e parâmetro $2a = v(t_1 - t_2)$.

Analogamente, tem-se que:

$$d(P, F_2) - d(P, F_3) = v(t_2 - t_3).$$

Portanto, P situa-se em um dos ramos da hipérbole de focos F_2 e F_3 e parâmetro $2a = v(t_2 - t_3)$.

Fazendo a interseção entre os referidos ramos de hipérbole, tem-se a localização do ponto P [20], conforme ilustra a figura 7.6.

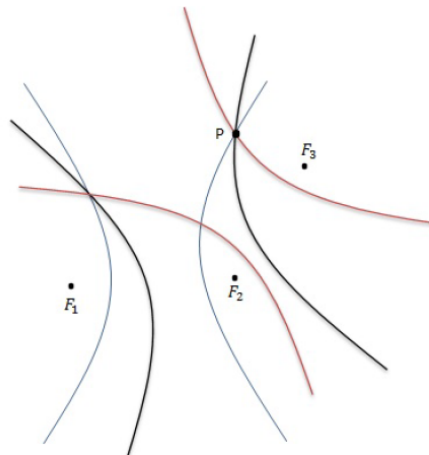


Figura 7.6: Sistema LORAN. Fonte:[8]

7.2.4 Antenas Parabólicas

Um importante instrumento receptor de sinais é a antena parabólica, que possui o formato de um parabolóide de revolução. Com aplicações na rádio-astronomia, bem como em sistemas de aparelhos de televisão, essa antena tem como princípio a propriedade refletora da parábola. Dada a grande distância que os satélites de transmissão desses sinais encontram-se da terra, tem-se que os fracos sinais recebidos pela antena são praticamente paralelos. Posicionando a antena de forma que seu eixo de simetria esteja na direção preferencial desses sinais, estes refletem-se na antena e são concentrados em seu foco, onde se posiciona o receptor [12], conforme ilustra a figura 7.7.



Figura 7.7: Antena Parabólica.

7.2.5 Forno Solar

Analogamente ao princípio de funcionamento das antenas parabólicas, os fornos solares consistem de superfície espelhada em formato de parabolóide. Dada a grande distância que o Sol se encontra, os raios solares chegam à Terra praticamente paralelos.

Posicionando o espelho de forma que seu eixo de simetria esteja na direção dos raios solares, estes serão refletidos na direção do foco, onde se posiciona o forno. A figura 7.8 mostra o forno solar localizado na cidade de Odelilo, sul da França. Sua superfície espelhada é composta de 9500 espelhos convenientemente posicionados em formato de parabolóide. Com intensa incidência de luz solar no local, a temperatura deste forno pode atingir até 3800°C.



Figura 7.8: Forno Solar de Odelilo.

Há uma lenda que envolve o princípio do forno solar e o matemático grego Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C., aproximadamente). Este teria incendiado frotas de navios que sitiavam Siracusa utilizando como arma de guerra espelhos em forma de parabolóide. Embora o princípio funcione, é pouco provável que houvesse a tecnologia para a construção de tais espelhos a época[12].

7.2.6 Telescópios Refletores

Galileu Galilei (1564-1642) inventou o primeiro telescópio em 1609. Para ampliação das imagens foram utilizadas lentes e o princípio de refração da luz. Esse modelo de telescópio é denominado refrator. Apesar de revolucionário, o telescópio refrator apresenta algumas deficiências: além de deformarem imagens as lentes também funcionam como prisma, decompondo a cor branca e criando um efeito denominado aberração cromática [29].

Anos mais tarde, Isaac Newton (1642-1727) criou o telescópio refletor que, utilizando espelhos não apresentavam os problemas de seu antecessor. O telescópio de Newton utilizava um espelho em forma de parabolóide que convergia os raios luminosos para o foco F . Na impossibilidade de se observar a imagem formada no foco (pois este ponto localiza-se dentro do tubo do telescópio), Newton utilizou um espelho plano E para desviar os raios refletidos e formar a imagem fora do telescópio, no ponto C , conforme ilustra a figura 7.9.

O telescópio de Newton tinha o inconveniente de que o tamanho do espelho plano utilizado para desviar os raios luminosos do foco não poderia ser pequeno, caso contrário a formação da imagem ainda ocorreria dentro do tubo do telescópio. Dessa forma, o espelho plano bloqueava grande parte dos raios de luz incidentes no telescópio, prejudicando assim sua eficiência. Tal problema foi contornado em 1672, pelo francês

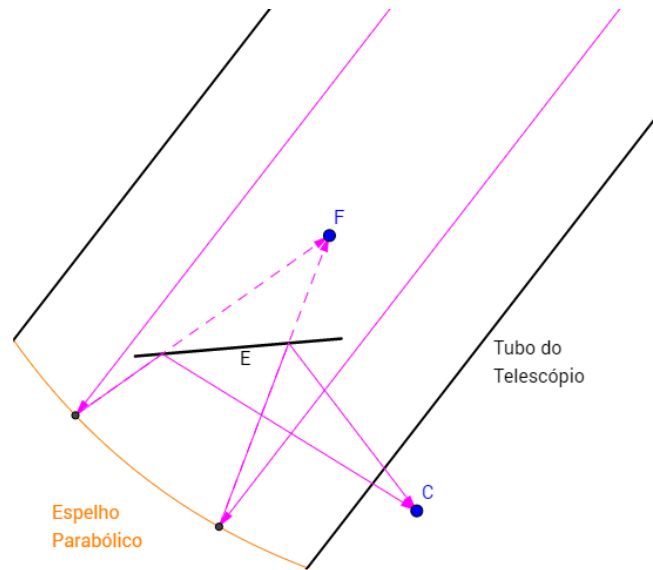


Figura 7.9: Telescópio refletor de Newton.

Laurent Giovanni Cassegrain, que propôs a utilização de um espelho hiperbólico ao invés do espelho plano de Newton. Conforme a figura 7.10, a configuração de Cassegrain consiste na utilização de espelhos parabólicos e hiperbólicos com o foco do parabolóide F coincidindo com um dos focos da hiperbole. Devido a propriedade refletora dessas duas seções cônicas, o espelho hiperbólico poderia ser pequeno, bastando construí-lo suficientemente próximo do foco F e a imagem resultante é obtida no outro foco F' da hipérbole.

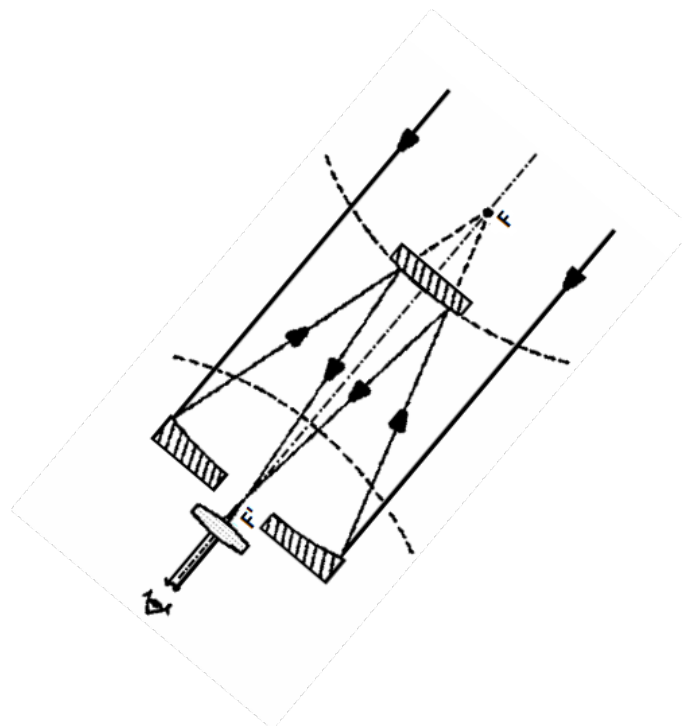


Figura 7.10: Telescópio refletor de Cassegrain. Fonte:[23]

Seções Cônicas no Ensino Básico

No Brasil, as cônicas estão contempladas já no ensino básico. Segundo[1], documento produzido pelo Governo Federal que tem por objetivo nortear a prática docente no país, o assunto cônicas é considerado um tema complementar aos tópicos essenciais à formação matemática dos estudantes. Além disso, os livros didáticos do último ano do ensino médio geralmente dedicam um de seus capítulos às cônicas. Em contrapartida, de acordo com Neto (2008), o ensino de cônicas está longe do ideal, pois as parábolas são estudadas no último ano do ensino fundamental e primeiro ano do ensino médio, mas com uma abordagem limitada aos gráficos de funções quadráticas. Já no terceiro ano, quando deveria ocorrer o estudo das cônicas, por uma série de razões, esse tópico sequer chega a ser ensinado pelos professores e, quando é feito, resume-se a um curto período de tempo com uma abordagem superficial das equações analíticas das curvas.

Como uma das ações de fortalecimento do Ensino Básico, o Governo Federal desenvolveu o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Este programa tem por objetivo avaliar e disponibilizar às escolas públicas brasileiras, deste nível de ensino, obras didáticas, pedagógicas, literárias e outros materiais de apoio à prática educativa. O programa contempla, em ciclos, quatro segmentos da educação: infantil, anos iniciais do ensino fundamental, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. O Ensino Médio foi o segmento atendido no PNLD do ano de 2015 que avaliou e distribuiu obras que foram utilizadas no triênio 2015, 2016 e 2017 pelas escolas públicas cadastradas. A definição de quais obras serão utilizadas é feita em duas etapas. Primeiro, tem-se uma concorrência pública em que os detentores dos direitos autorais das obras se inscrevem para participar do programa. Conforme critérios estabelecidos em edital, essas obras são avaliadas por um grupo de especialistas de diferentes áreas do conhecimento e se aprovadas irão compor o guia do PNLD relativo àquele ciclo. A segunda etapa ocorre individualmente em cada uma das escolas cadastradas e consiste na avaliação e escolha da obra a ser adquirida, dentre aquelas selecionadas na primeira etapa para compor o PNLD.

Mesmo não tendo a função de definir quais tópicos devem ser estudados em sala de aula, o livro didático ainda hoje é o grande norteador do trabalho do professor. Segundo [1], na ausência de orientações curriculares mais consolidadas e acessíveis a

todos os professores, o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de referência sobre os conteúdos a serem ensinados. Nesse sentido, acredita-se que a forma como um conteúdo é abordado nas obras didáticas é um indicativo de como esse assunto é tratado nas salas de aula. Nas seções 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 e 8.5 serão apresentadas uma análise crítica sobre a abordagem do assunto cônicas, em cinco das seis obras aprovadas e distribuídas às escolas públicas pelo PNLD-2015.

8.1 Análise da obra *Matemática Paiva* (ver [17])

O tópico das seções cônicas é contemplado no 3º volume de [17]. Este volume é dividido em nove capítulos e o capítulo 6 intitulado *As cônicas: elipse, hipérbole e parábola* é composto de 36 páginas dedicadas ao assunto.

Na abertura do capítulo o autor apresenta uma aplicação das seções cônicas, o forno solar de Odeillo (ver 7.2.5), explica o seu funcionamento, mas sem explicitar a propriedade refletora da parábola e apresenta questões para reflexão do aluno, como "Você conhece outros dispositivos tecnológicos que tenham formato parabólico? Para que servem?".

Na sequência são definidas superfície cônica circular reta de duas folhas e as curvas elipse, hipérbole e parábola. Estas últimas são obtidas como a interseção de um plano secante e a superfície cônica, porém, a distinção entre a elipse e a hipérbole não é dada pelo ângulo relativo do plano secante, mas sim pelo fato do plano intersectar ou não todas as geratrizes do cone. A parábola é obtida quando o plano secante é paralelo a uma geratriz do cone. O autor mostra como as cônicas podem ser visualizadas a partir da sombra projetada por uma lanterna em uma parede, através da variação da posição da lanterna. Antes de adentrar especificamente em cada curva, Paiva apresenta uma curta nota histórica destacando a obra de Apolônio de Perga e cita diversas aplicações das seções cônicas, sem explicar os seus funcionamentos.

As seções dos capítulos que tratam da elipse, hipérbole e parábola possuem basicamente a mesma estrutura. Com o intuito de introduzir o estudo analítico das curvas, estas são definidas como um lugar geométrico dos pontos do plano, como em 4.1, 5.1 e 6.1. Em seguida são definidos os elementos de cada curva, com a excentricidade dada pela razão entre os parâmetros c e a nos casos da elipse e da hipérbole. São também apresentadas duas construções para cada curva: uma com objetos físicos como em 4.3.2, 5.3.1 e 6.3.1 e outra utilizando dobraduras em folha de papel. Na sequência tem-se alguns exercícios resolvidos e propostos, ainda sem a utilização da geometria analítica. Após essa abordagem inicial, o autor introduz o tratamento analítico das curvas. A dedução das equações canônicas é feita através



Figura 8.1: Obra Matemática Paiva.

de um caso particular e a generalização é apresentada justificada como repetição dos passos seguidos nos casos particulares. Tem-se então uma nova série de exercícios resolvidos e propostos, com abordagem exclusivamente analítica.

Após tratar das três curvas, no fim do capítulo tem-se uma seção denominada *Roteiro de Trabalho* contendo questões conceituais sobre as definições de cônicas e estimulando o aluno a perceber como a excentricidade afeta a forma da curva. Segundo o autor, o propósito dessas questões é explorar a habilidade de argumentação e síntese do discente. Na sequência tem-se uma seção com quinze exercícios complementares com enfoque predominante no tratamento analítico. O capítulo é finalizado com a seção *Matemática sem Fronteiras* que traz um texto tratando da aplicação das cônicas em telescópios. O princípio refletor não é explicitado e não é tratado o telescópio com a configuração de Cassegrain.

Os aspectos positivos observados na obra são a preocupação com a contextualização prática do assunto, relacionou as curvas com interseções de cones e planos, apresentou construções das curvas através de dois métodos, apresentou exercícios com aplicações e também teóricos, em quantidades (25 propostos e 15 complementares) adequadas.

Como contribuição para a complementação da obra analisada sugere-se a inserção de uma abordagem espacial das cônicas e explicitar as propriedades refletoras das curvas.

Como conclusão, acredita-se que esta obra apresentou as cônicas com uma abordagem adequada para o último ano do ensino básico. Os inúmeros exemplos com aplicações das curvas tem o potencial de despertar o interesse dos alunos e suas diferentes abordagens permitem o aluno praticar a geometria plana e a geometria analítica.

8.2 Análise da obra *Matemática: Contexto e Aplicações* (ver [3])

As seções cônicas são abordadas no volume 3 da obra [3]. Esse volume é composto de 4 unidades divididas em dois capítulos cada. A unidade 3 é intitulada Cônicas e Números Complexos e contempla o quinto capítulo do livro denominado Geometria Analítica-Seções Cônicas. Este capítulo possui 24 páginas divididas em quatro seções denominadas Reconhecendo Formas, Parábola, Elipse e Hipérbolas. O capítulo contempla 20 exercícios resolvidos, 37 propostos, uma atividade a ser desenvolvida com o auxílio do *software* Geogebra e uma atividade complementar utilizando como contexto as leis de Kepler.

A unidade 3 inicia-se com duas páginas denominadas Abertura de Unidade. Nelas, o autor justifica o nome seções cônicas pelo fato de as curvas serem obtidas pela interseção de um plano com uma superfície cônica. As diferentes seções são obtidas variando o ângulo em que o plano secante intersecta o cone. Ainda na abertura, constam três aplicações das superfícies cônicas: as luminárias de dentistas, o forno solar de Odeillo e os telescópios refletores. O autor cita que essas aplicações são devidas às propriedades de reflexão das curvas, porém não explica o seu funcionamento.

O capítulo 5 é introduzido com uma nota histórica citando a obra de Apolônio de Perga e relatando como esta influenciou a obra de diversos pensadores, tais como Copérnico, Kepler e Halley. Na sequência, tem-se uma série de figuras familiares ao aluno em que estão presentes as seções cônicas.

Após a introdução, o autor inicia as seções dedicadas especificamente a cada curva. A forma como se estruturam essas seções são análogas. Inicialmente, as cônicas novamente são apresentadas como a interseção entre um plano e um cone, porém aqui a diferenciação entre elipse e hipérbole é dada pelo fato de o plano secante intersectar ou não todas as geratrizes do cone. Na sequência, o autor define as curvas como lugares geométricos, comenta, sem detalhar, a construção da curva com objetos físicos e define seus elementos. A excentricidade é definida pela razão entre os parâmetros c e a nos casos da elipse e da hipérbole. Segue então, o tratamento analítico das cônicas através da dedução genérica de suas equações canônicas. As seções se encerram com uma série de exercícios resolvidos e propostos. Após a seção dedicada às elipses, a obra contempla uma atividade computacional explorando a parábola e a elipse com o auxílio do *software* Geogebra. O capítulo encerra com uma atividade extra contextualizada pelas leis de Kepler. Nessa atividade são indicados links para leituras complementares.

Os aspectos positivos observados na obra são a relação das curvas com a interseção entre planos e cones, o bom número de exercícios resolvidos e a inserção de atividades computacionais.

Como contribuição para a complementação da obra analisada sugere-se a inserção de uma abordagem espacial e plana sobre as cônicas, o detalhamento da construção das curvas com objetos físicos, contemplar exercícios contextualizados sobre o assunto, explicitar as propriedades refletoras e contemplar atividades computacionais.

Como conclusão, acredita-se que a obra apresentou as cônicas de forma limitada, pois explorou apenas a abordagem analítica das curvas. Embora a atividade extra no fim do capítulo tenha apresentado uma contextualização do assunto, os exercícios propostos no desenvolvimento do capítulo são todos de cunho teórico. A obra poderia ter explorado (apenas citou na abertura) as propriedades refletoras das cônicas.



Figura 8.2: Obra Matemática: Contexto e Aplicações.

8.3 Análise da obra *Novo Olhar Matemática* (ver [22])

As seções cônicas são abordadas no volume 3 da obra [22]. Esse volume é composto de 8 capítulos divididos em 5 unidades. O capítulo 6 é denominado A Circunferência e as Cônicas, contém duas seções e a segunda é dedicada às cônicas. Esta seção possui 24 páginas, 9 exercícios resolvidos, 57 propostos e uma atividade complementar utilizando como contexto as leis de Kepler.

A seção se inicia com notas históricas citando a obra de Apolônio de Perga e Kepler e suas descobertas. Na sequência iniciam-se os tópicos dedicados especificamente a cada curva. A forma como se estruturam esses tópicos são análogas. Primeiramente, as cônicas são apresentadas como a interseção entre um plano e um cone e a diferenciação entre elipse e hipérbole é dada pelo fato de o plano secante intersectar ou não todas as geratrizes do cone. Prosseguindo, tem-se a construção da curva com objetos físicos e sua justificativa, a definição de seus elementos e da curva como um lugar geométrico do plano. Segue então, o tratamento analítico das cônicas através da apresentação de suas equações canônicas. Estas não são deduzidas, apenas há a indicação do caminho a ser seguido para obter os resultados apresentados. Os tópicos se encerram com uma série de exercícios resolvidos e propostos. O último exercício proposto dos tópicos relativos à elipse e à hipérbole são mais elaborados. Eles contemplam textos informativos sobre as previsões de Halley acerca do cometa que leva seu nome e sobre o sistema de navegação *LORAN*, respectivamente, seguidos de uma série de perguntas interpretativas e que utilizam a geometria analítica. O capítulo se encerra com uma atividade complementar composta por texto e questões contextualizadas pelas leis de Kepler.

O aspecto positivo observado na obra é a relação das curvas com a interseção entre planos e cones.

Como contribuição para a complementação da obra analisada sugere-se a inserção de uma abordagem espacial e plana sobre as cônicas, a dedução das equações canônicas das curvas, contemplar exercícios contextualizados sobre o assunto, ampliar o número de exercícios resolvidos, tratar das propriedades refletoras e suas aplicações e contemplar atividades computacionais.

Como conclusão, acredita-se que a obra apresentou as cônicas de forma limitada, pois explorou apenas a abordagem analítica das curvas de forma superficial. Embora a atividade extra no fim do capítulo tenha apresentado uma contextualização do assunto, os exercícios propostos no desenvolvimento do capítulo são quase todos de cunho teórico. A obra poderia ter explorado as propriedades refletoras das cônicas contribuindo para a percepção de aplicabilidade da matemática no cotidiano.

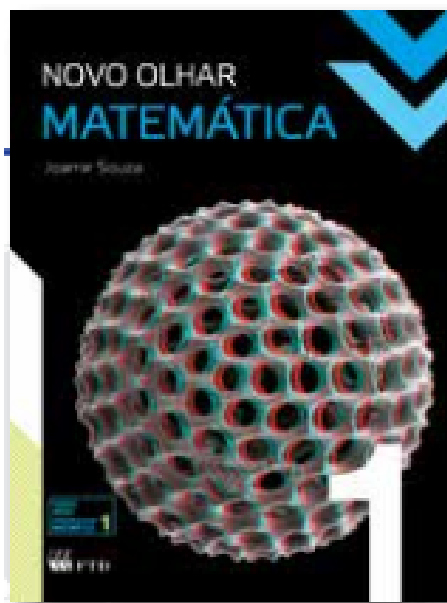


Figura 8.3: Obra Novo Olhar Matemática.

8.4 Análise da obra *Matemática ciência e aplicações*(ver [11])

As seções cônicas são abordadas no volume 3 da obra [11]. Esse volume é composto de 9 capítulos. O capítulo 4 é denominado As Cônicas, possui 24 páginas, 13 exemplos resolvidos, 8 outros exercícios com resolução, 59 propostos e duas páginas tratando da aplicação de cônicas às órbitas elípticas dos planetas.

O capítulo é iniciado com a definição de superfície cônica de duas folhas e a obtenção das curvas é dada pela interseção de um plano com a superfície. A diferenciação entre elipse e hipérbole é dada pelo fato de o plano intersectar uma ou as duas folhas do cone, respectivamente. Na sequência iniciam-se os tópicos dedicados especificamente a cada curva. A forma como se estruturam esses tópicos são análogas. Primeiramente, são apresentadas ilustrações em que podem ser percebidas as cônicas. Em seguida o autor define as curvas como lugares geométricos do plano, apresenta a construção das curvas com objetos físicos sem a justificá-la, seus elementos e a excentricidade como a razão entre os parâmetros c e a para elipses e hipérbolés. Segue então o tratamento analítico das cônicas através da dedução genérica de suas equações canônicas, alguns exemplos resolvidos e uma série de exercícios teóricos propostos. Após o tópico dedicado às elipses tem-se um texto tratando das órbitas elípticas dos planetas e suas excentricidades. O capítulo é finalizado com uma curta seção abordando a interseção de cônicas através da resolução do sistema formado por suas equações. Aqui tem-se um exemplo resolvido e alguns exercícios propostos.

Os aspectos positivos observados na obra são a relação das curvas com a interseção entre planos e cones, a presença de várias ilustrações em que aparecem as cônicas no cotidiano e a abordagem das interseções entre cônicas.

Como contribuição para a complementação da obra analisada sugere-se a inserção de uma abordagem espacial e plana sobre as cônicas, contemplar exercícios contextualizados sobre o assunto, tratar das propriedades refletoras e suas aplicações e contemplar atividades computacionais.

Como conclusão, acredita-se que a obra apresentou as cônicas de forma limitada, pois explorou apenas a abordagem analítica das curvas. As contextualizações são dadas na forma de figuras. A obra poderia ter explorado as propriedades refletoras das cônicas e suas aplicações.



Figura 8.4: Obra Matemática ciência e aplicações.

8.5 Análise da obra *Conexões com a Matemática* (ver [18])

As seções cônicas são abordadas no volume 3 da obra [18]. Esse volume é composto de 8 capítulos. O capítulo 6 é denominado Cônicas, possui 20 páginas, 10 exercícios resolvidos, 23 exercícios propostos e outros 23 complementares, uma seção denominada Autoavaliação com 7 exercícios conceituais e uma seção denominada Compreensão de Texto em que é ensinado a construção de um fogão solar.

Na abertura do capítulo o autor mostra como as cônicas podem ser visualizadas a partir da sombra projetada por uma bola quando iluminada por uma lanterna em diferentes posições, define os elementos de uma superfície cônica, define as curvas utilizando o conceito de interseção entre plano e cone e cita a obra de Apolônio de Perga.

Na sequência tem-se os tópicos dedicados especificamente a cada curva. A forma como se estruturam esses tópicos são análogas. Inicialmente apresenta-se a construção da cônica com objetos físicos e a sua justificativa, define-se a curva como um lugar geométrico do plano e são definidos também os seus elementos e a excentricidade como a razão entre os parâmetros c e a . Inicia-se então o tratamento analítico das cônicas através da dedução das equações canônicas das curvas. É tratado apenas o caso em que o centro da cônica coincide com a origem do sistema cartesiano (vértice, no caso da parábola). Segue, então, uma série de exercícios teóricos resolvidos e propostos. O capítulo é finalizado com uma série de exercícios complementares e as seções Autoavaliação e Compreensão de Texto.

Os aspectos positivos observados na obra são a relação das curvas com a interseção entre planos e cones e a presença de várias ilustrações em que aparecem as cônicas no cotidiano.

Como contribuição para a complementação da obra analisada sugere-se a inserção de uma abordagem espacial e plana sobre as cônicas, tratar os casos das cônicas com centro fora da origem do sistema cartesiano, contemplar exercícios contextualizados sobre o assunto, tratar das propriedades refletoras e suas aplicações e contemplar atividades computacionais.

Como conclusão, acredita-se que a obra apresentou as cônicas de forma limitada, pois explorou apenas a abordagem analítica das curvas e tratando apenas do caso em que o centro coincide com a origem do sistema cartesiano. As contextualizações são dadas na forma de figuras. A obra poderia ter explorado as propriedades refletoras das cônicas e suas aplicações.

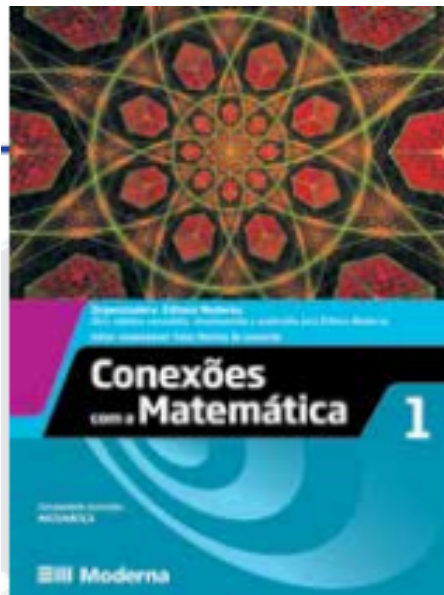


Figura 8.5: Obra *Conexões com a Matemática*.

Considerações Finais

A matemática não é uma ciência fim em si. Trata-se de um instrumento que permite descrever, quantificar, modelar e prever fenômenos nas mais diversas áreas do conhecimento. A incansável busca do ser humano pelo entendimento de como funciona o mundo a sua volta possibilitou que evoluíssemos de uma espécie pré-histórica para a sociedade globalizada que somos hoje. A matemática exerceu um papel fundamental nesse desenvolvimento.

A Grécia Antiga foi um terreno fértil de grandes filósofos e inúmeras descobertas. Esse período histórico representa o auge de uma área fundamental da matemática: a geometria euclidiana. Três pensadores são notoriamente conhecidos como os grandes geômetras da antiguidade: Euclides, Arquimedes e Apolônio. Este último desenvolveu o mais importante trabalho já escrito sobre as seções cônicas. *As cônicas* de Apolônio serviu de base para diversos trabalhos desenvolvidos posteriormente. É um caso clássico em Matemática no qual a aplicabilidade de um estudo essencialmente teórico leva tempo para ser percebida.

As três curvas estudadas neste trabalho possuem propriedades de reflexão com aplicabilidade em diversas áreas. A utilização dessas propriedades foram sendo colocadas em prática à medida em que o homem dispôs de tecnologia suficiente para a construção dos aparatos idealizados. Alguns desses instrumentos tem papel fundamental na sociedade atual, em especial aqueles relacionados à recepção de sinais, que afetam a forma como nos comunicamos e nos localizamos na superfície da terra.

As seções cônicas também estão presentes nas ciências naturais, em especial nos fenômenos regidos pela gravitação universal. O desenvolvimento da astronomia foi profundamente influenciado pela obra de Apolônio, pois foi fundamental para as descobertas de Kepler e Galileu nos séculos XVI e XVII. Estas por sua vez abriram os caminhos para que Newton produzisse sua obra prima *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Nela, Newton colocou em bases matemáticas sólidas a forma como se dá o movimento de qualquer corpo, proporcionando a previsibilidade das leis físicas. Este trabalho contém os fundamentos que permitiu ao homem ir à Lua, bem como avançar na conquista espacial.

No que se refere ao ensino, embora estejam contempladas no currículo da educação

básica, as cônicas tem cada vez mais sido relegadas a um segundo plano, sendo o assunto tratado como tópico complementar nas orientações curriculares do Governo Federal. Outro sintoma desse fenômeno são os conteúdos cobrados nos exames de acesso às instituições públicas de ensino superior que exercem forte influência naquilo que é ensinado nas escolas de nível básico. Atualmente, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é a principal forma de ingresso nas universidades federais e o tópico seções cônicas não é contemplado no seu programa de conteúdos de matemática. Acredita-se que a tendência de extinção desse assunto no ensino básico seja uma grande perda. O estudo das cônicas permite que o aluno articule os conhecimentos adquiridos em geometria plana, espacial e analítica em torno de um mesmo assunto. Além disso, trabalhar as propriedades refletoras das cônicas é possível, pelo menos em um nível conceitual, e explorar suas aplicações constitui um excelente instrumento para motivar os alunos e exemplificar a importância da matemática. Por fim, destaca-se que a abordagem do tema nas obras distribuídas às escolas públicas brasileiras, de modo geral, é limitada. O tratamento analítico das equações canônicas das curvas é o elemento central nesses textos. A abordagem das cônicas através da geometria plana é insuficiente e a abordagem através da geometria espacial é praticamente inexistente. A contextualização histórica é resumida em algumas notas. Parte das obras analisadas não contemplam as propriedades refletoras das cônicas e aquelas que abordaram o tema não explicitaram nem demonstraram tais propriedades.

Bibliografia

- [1] *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*, volume 2. Brasil, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.
- [2] Boyer, Carl B.: *História da Matemática*. Edgard Blucher, São Paulo, 3ª edição, 2012.
- [3] Dante, Luiz Roberto: *MATEMÁTICA: CONTEXTO & APLICAÇÕES*, volume 3. Ática, 2ª edição, 2013.
- [4] Esquef, Paulo Antonio e Sérgio Armando P. Ribeiro: *Elipses e as Órbitas dos Planetas*. RPM-Revista do Professor de Matemática, 77, 2012.
- [5] Eves, Howard: *Introdução à História da Matemática*. Editora da Unicamp, Campinas, SP, 5ª edição, 2011.
- [6] Frensel, Katia e Jorge Delgado: *Geometria Analítica*. NEAD-Núcleo de Educação à Distância, UFMA, 2011.
- [7] Garcia, João Calixto: *Explorando as definições de cônicas*. Tese de Mestrado, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2013.
- [8] Gaspar, Antonio Simões: *As Cônicas, Quádricas e suas Aplicações*. Tese de Mestrado, Universidade de Brasília, 2014.
- [9] Gomez, Jorge Joaquín Delgado, Katia Rosenthal Frensel e Lhaylla dos Santos Crissaf: *Geometria Analítica*. Editora SBM, Rio de Janeiro, 2ª edição, 2017.
- [10] Hawking, Stephen: *Uma Breve História do Tempo*. Editora Intrínseca, 2015.
- [11] Iezzi, Gelson, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périco e Nilze de Almeida: *Matemática ciência e aplicações*, volume 3. Saraiva, 7ª edição, 2013.
- [12] Lima, Elon Lages: *Números e Funções Reais*. SBM, 2014.
- [13] Lopes, Juracélio Ferreira: *Cônicas e Aplicações*. Tese de Mestrado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP, 2011.
- [14] Miranda, Daniel, Rafael Grisi e Sinuê Lodovic: *Geometria Analítica e Vetorial, Versão 9*. Universidade Federal do ABC, 2015.
- [15] Mol, Rogério S.: *Introdução à História da Matemática*. CAED-UFMG, Belo Horizonte MG, 2013.
- [16] Neto, Humberto Ferreira Rodas: *A importância da Matemática no desenvolvimento da Astronomia*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Alagoas, 2016.
- [17] Paiva, Manoel: *Matemática Paiva*, volume 3. Moderna, 2ª edição, 2013.
- [18] responsável), Fábio Martins de Leonardo (editor: *Conexões com a Matemática*, volume 3. Moderna, 2ª edição, 2013.
- [19] Roque, Tatiana e João Bosco Pitombeira de Carvalho: *Tópicos de História da Matemática*. SBM, Rio de Janeiro, 2012.
- [20] Santos Guimarães, Caio dos: *Matemática em Nível IME/ITA: Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*, volume 2. Editora Vestseller, Fortaleza, CE, 1ª edição, 2013.

-
- [21] Sato, Jocelino: *As cônicas e suas Aplicações*. Faculdade de Matemática-FAMAT, 2004.
- [22] Souza, Joamir Roberto de: *Novo Olhar Matemática*, volume 3. FTD, 2ª edição, 2013.
- [23] Souza, Lindomar Duarte de: *Cônicas e Suas Propriedades Notáveis*. Tese de Mestrado, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis SC, 2014.
- [24] Souza Oliveira Filho, Kepler de e Maria de Fátima Oliveira Saraiva: *Astronomia e Astrofísica*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Departamento de Astronomia, Instituto de Física, 2014.
- [25] Valladares, Renato J.C.: *Elipses, Sorrisos e Sussurros*. RPM-Revista do Professor de Matemática, 36, 2011.
- [26] Venturi, Jacir J.: *Cônicas e Quádricas*. Editora Autores Paranaenses, Curitiba,PR, 2003.
- [27] Vidal, Francisco Aureliano e Givaldo Oliveira dos Santos: *A Evolução Histórica das Seções Cônicas*. XI Seminário Nacional de História da Matemática, Natal, RN, 2015.
- [28] Ávila, Geraldo: *Kepler e a órbita elíptica*. RPM-Revista do Professor de Matemática, 15, 2010.
- [29] Ávila, Geraldo: *A Hipérbole e os Telescópios*. RPM-Revista do Professor de Matemática, 34, 2011.