



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ESTUDO DOS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

VITOR RIOS DE JESUS

Salvador - Bahia
JUNHO DE 2018

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ESTUDO DOS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

VITOR RIOS DE JESUS

Dissertação de Mestrado apresentada à
Comissão Acadêmica Institucional do
PROFMAT-UFBA como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Rita de Cássia de
Jesus Silva

Salvador - Bahia
JUNHO DE 2018

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Rios de Jesus, Vitor

A utilização do software GeoGebra no estudo dos
pontos notáveis do triângulo / Vitor Rios de Jesus. --
Salvador, 2018.

92 f. : il

Orientadora: Prof^a Dr^a Rita de Cássia de Jesus
Silva.

Dissertação (Mestrado - Programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional) --
Universidade Federal da Bahia, UFBA, 2018.

1. Pontos Notáveis do Triângulo. 2. GeoGebra. 3.
Recurso didático . I. de Jesus Silva, Prof^a Dr^a Rita
de Cássia. II. Título.

A utilização do software GeoGebra no estudo dos pontos notáveis do triângulo

Vitor Rios de Jesus

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 08/06/2018.

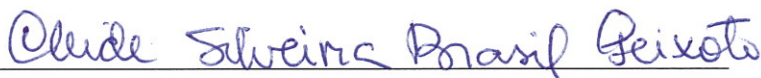
Banca Examinadora:



Prof.^a. Dr.^a. Rita de Cássia de Jesus Silva (orientadora)
UFBA



Prof. Dr. Vinicius Moreira Mello
UFBA



Prof.^a. Dr.^a. Cleide Silveira Brasil Peixoto
UFBA

À minha família

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus por ter me dado forças para enfrentar todas as dificuldades.

Agradeço aos meus pais pelo apoio durante esses dois anos.

Aos colegas da turma de 2016 do PROFMAT pela convivência, muitos tornaram-se amigos.

Agradeço à Profa Dra Rita de Cássia de Jesus Silva por ter aceitado me orientar neste trabalho.

Aos meus colegas do IFBA Campus de Salvador e aos amigos pelo incentivo dado durante esse período.

*“A mente que se abre para uma nova
ideia, jamais voltará ao seu tamanho
original”.*
Albert Einstein

Resumo

Este trabalho propõe estudar os principais pontos notáveis do triângulo (baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro), por meio do uso do software GeoGebra. Deste modo, algumas atividades foram escolhidas e resolvidas com o uso do GeoGebra. Sugere-se que estas atividades sejam aplicadas por professores da educação básica em turmas do ensino médio. Vale ressaltar que as atividades foram aplicadas em duas turmas do 2º ano do ensino médio integrado à educação profissional, no IFBA / Campus de Salvador. Foram aplicados questionários aos 39 estudantes que participaram da pesquisa, bem como a 2 docentes do Departamento de Matemática do IFBA / Campus de Salvador que avaliaram o capítulo de Aplicações desta dissertação. Os resultados obtidos com a metodologia aplicada foram satisfatórios e foi possível comprovar que o uso do software GeoGebra como recurso didático propicia a aprendizagem dos estudantes.

Palavras-chave: Pontos Notáveis do Triângulo; GeoGebra; Recurso Didático.

Abstract

This paper proposes to study the main notable points of the triangle (barycenter, incenter, orthocenter and circumcenter), through the use of GeoGebra software. So, some activities were chosen and solved with the use of GeoGebra. It is suggested that these activities be applied by teachers of basic education in high school classes. It is noteworthy that the activities were applied in two classes of the second year of high school integrated to vocational education, at IFBA / Campus of Salvador. Questionnaires were applied to 39 students who took place in the research, as well as 2 teachers from the Mathematics Department of IFBA / Campus of Salvador who evaluated the Applications chapter of this dissertation. The results obtained with the applied methodology were satisfactory and it was possible to prove that the use of GeoGebra software as a didactic resource facilitates students' learning.

Key Words: Notable Points of the Triangle; GeoGebra; Didactic Resource.

Sumário

Introdução	11
1 O GeoGebra	13
1.1 Histórico	13
1.2 Conhecendo o GeoGebra	14
2 Preliminares	24
2.1 Lugares Geométricos e Conceitos Geométricos Básicos	24
2.2 Casos de congruência de triângulos	32
2.3 Quadriláteros Notáveis	38
3 Pontos notáveis de um triângulo	41
4 Aplicações	47
5 Resultados e Discussões	80
6 Considerações Finais	86
Referências Bibliográficas	88
A Questionário aplicado aos alunos	89
B Questionário aplicado aos docentes	91
C Atividades propostas do Capítulo de Aplicações	93

Introdução

Este trabalho utiliza o software de geometria dinâmica *GeoGebra* como recurso didático e tem como objetivo principal propor o estudo dos pontos notáveis do triângulo através do uso do software, por meio da resolução de algumas atividades.

A escolha do tema foi motivada pelas dificuldades apresentadas pelos alunos de duas turmas do 2º ano do ensino médio integrado à educação profissional, nos cursos de Edificações e Eletrotécnica, no Instituto Federal da Bahia / Campus de Salvador. Tais dificuldades surgiram ao avançarmos no estudo de alguns tópicos de Geometria Plana, merece destaque os pontos notáveis do triângulo, suas propriedades e aplicações.

Ao fazer as construções geométricas no quadro branco por meio de instrumentos, tais como: régua e compasso, notava que os alunos não demonstravam muito interesse. Daí, decidi utilizar nas aulas o GeoGebra, buscando estimular a participação dos alunos, tornar as aulas mais interessantes e interativas, tendo como objetivos melhorar a visualização das figuras, bem como o entendimento dos conteúdos apresentados.

Desta forma, fazendo uso da tecnologia como uma aliada no processo de ensino aprendizagem, conforme consta nos *Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN [5]* (Brasil, 1998, p. 140), o qual menciona que: “a tecnologia deve servir para enriquecer o ambiente educacional propiciando a construção de conhecimentos por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte de alunos e professores.”

Fazendo uso desta metodologia foram aplicadas algumas atividades nas turmas citadas, as quais foram resolvidas por meio do GeoGebra e os resultados obtidos foram satisfatórios. Para além da melhora observada no desempenho acadêmico dos alunos, foi aplicado um questionário para os mesmos, em que eles puderam opinar acerca do uso do software, destacando os aspectos positivos e negativos, dentre outros pontos e com a aplicação deste questionário foi possível coletar os dados necessários para validar esta pesquisa.

Com isso, proponho neste trabalho a aplicação de algumas atividades resolvidas com o uso do GeoGebra, as quais possam ser utilizadas por professores do ensino básico. A intenção é que nestas atividades, os alunos sejam motivados a construir as figuras geométricas através do software, a manipular e a explorar essas figuras e a traçar estratégias para a resolução dos problemas propostos, bem como promover o enriquecimento das metodologias utilizadas pelos professores.

Vale ressaltar que este trabalho não visa descaracterizar as aulas tradicionais, mas dentre outros fatores destaca os aspectos positivos e negativos do uso da tecnologia no

processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Este trabalho está dividido em 6 capítulos. O primeiro capítulo trata do GeoGebra e traz uma seção com o seu histórico e outra seção intitulada: *Conhecendo o GeoGebra*, a qual apresenta a interface do software, os comandos e funcionalidades.

No segundo capítulo (*Preliminares*) apresentamos algumas definições, propriedades e proposições utilizadas na construção de outros conceitos tratados no corpo deste trabalho. Este capítulo possui 3 seções, a saber: *Lugar Geométrico*, *Congruência de triângulos* e *Quadriláteros notáveis*.

O terceiro capítulo (*Pontos notáveis de um triângulo*) aborda as definições, proposições, corolários sobre os principais pontos notáveis do triângulo, a saber: baricentro, ortocentro, circuncentro e ortocentro. Embora de acordo com a *Encyclopedia of Triangle Centers* (ETC) [10] temos catalogados cerca de cinco mil quatrocentos e cinco pontos notáveis do triângulo, neste trabalho abordaremos apenas os principais pontos citados anteriormente.

No quarto capítulo (*Aplicações*) são propostas algumas atividades que tratam dos pontos notáveis do triângulo, bem como de alguns conceitos relevantes, tais atividades foram resolvidas com e sem o uso do GeoGebra, cabendo ao leitor observar as diferenças no que tange a resolução das atividades propostas. Para cada item resolvido com o uso do software foi elaborado um roteiro com todos os passos necessários descritos.

Já no quinto capítulo (*Resultados e discussões*) aborda os resultados obtidos com a aplicação dos questionários utilizados com os alunos das turmas citadas e com duas professoras do Departamento de Matemática do IFBA / Campus de Salvador que avaliaram o capítulo 4 desta dissertação, bem como aponta as sugestões ao trabalho dada pelas docentes.

Por fim, no sexto capítulo fazemos as considerações finais deste trabalho.

Capítulo 1

O GeoGebra

1.1 Histórico

A palavra **GeoGebra** tem origem na junção das palavras Geometria e Álgebra e refere-se a um aplicativo de matemática dinâmica que reúne recursos de Geometria, Álgebra, Estatística e Cálculo em um único ambiente. Este aplicativo foi escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas, bem como que a distribuição do mesmo é livre, nos termos da GNU General Public License.

O GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter em 2001 como tese de doutorado, na Universidade de Salzburgo, conforme é abordado por [8]. Atualmente, esse programa é utilizado em cerca de 190 países, foi traduzido para 55 idiomas e conta com mais de **300000** downloads mensais. O download do programa pode ser obtido no endereço <https://www.geogebra.org/download>. Vale ressaltar que foram criados 62 Institutos GeoGebra em 44 países, que são institutos regionais membros do IGI (International GeoGebra Institutes) cujo objetivo é agregar interessados no uso do GeoGebra como ferramenta de ensino e aprendizagem, criando uma comunidade aberta que compartilha seus conhecimentos no treinamento, suporte e desenvolvimento de materiais para alunos e professores.

No Brasil temos 3 institutos, a saber: o Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro que tem sede no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, maiores informações sobre o mesmo estão disponíveis e podem ser acessadas no endereço eletrônico <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>; o Instituto GeoGebra de São Paulo, com sede na Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC-SP e cujas informações sobre o mesmo podem ser obtidas pelo endereço eletrônico <http://www.pucsp.br/geogebra/sp/> e por último e o mais recente, criado em 2014, o Instituto GeoGebra UESB que tem sede na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia e integra as atividades do GPERCEM (Grupo de Pesquisa e Extensão em Recursos Computacionais no Ensino de Matemática), cujas informações estão disponíveis no endereço <http://www2.uesb.br/institutogeogebra/>.

Esse software tem algumas características relevantes, a saber: possui um interface amigável, com diversos recursos sofisticados; encontra-se disponível em vários idiomas o que o torna mais acessível; é gratuito e de código aberto; é uma ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas WEB.

O software também permite realizar construções geométricas por meio de pontos, retas, segmentos de retas, polígonos, dentre outros, bem como permite inserir funções e realizar alterações posteriores a todos os objetos de modo dinâmico. Este também tem a capacidade de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, além de calcular derivadas e integrais de funções. Dentre as muitas características e funcionalidades do GeoGebra, vale destacar que o software tem uma vantagem didática ao permitir simultaneamente a representação geométrica (Janela de Visualização) e algébrica (Janela de Álgebra) de um mesmo objeto, em um único ambiente visual. Por fim, destacamos que esse dinamismo permitem ao professor e ao aluno levantarem conjecturas e testarem hipóteses.

1.2 Conhecendo o GeoGebra

Nesta seção apresentaremos o software GeoGebra, cuja interface é composta basicamente por uma barra de menu, uma barra de ferramentas, a janela de álgebra, a janela de visualização e o campo de entrada, vide *figura 1.1*

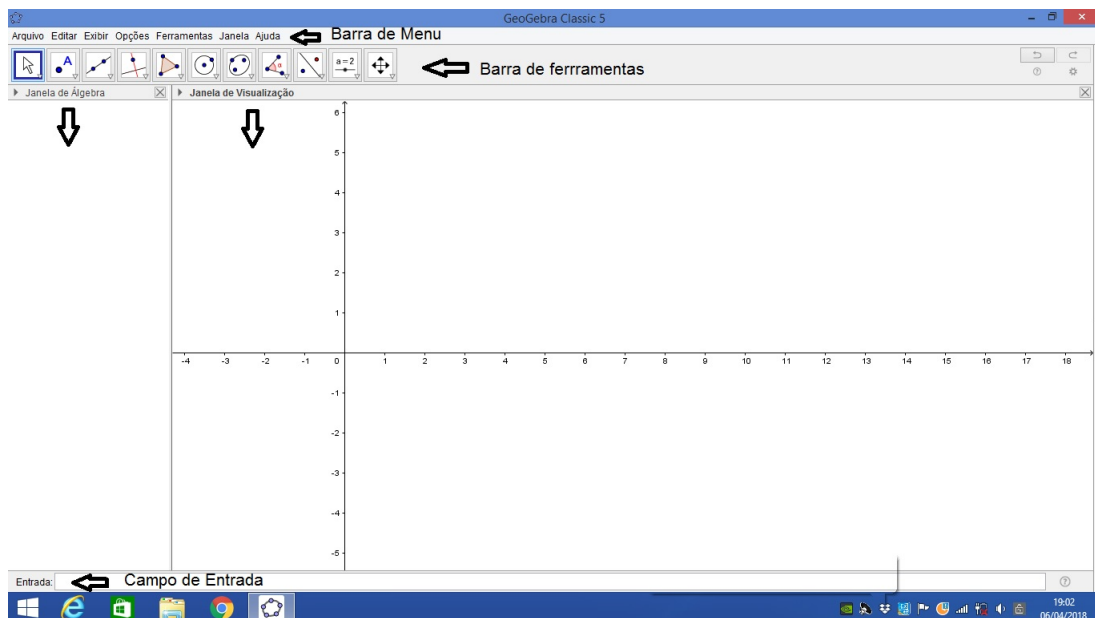


Figura 1.1: Interface do GeoGebra

Vale ressaltar que vamos nos ater nesta seção as ferramentas que serão utilizadas no capítulo 4 (Aplicações).

Na *barra de Menu* temos algumas opções, a saber: Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda.

Selecionando a guia *Arquivo*, cabe destacar a opção *Gravar e/ou Gravar Como*, que utilizamos com a finalidade de salvar o arquivo, como um arquivo do tipo GeoGebra Arquivos (.ggb), vide *figura 1.2*. Temos outras opções também estão disponíveis na guia Arquivo, a saber: Nova Janela; Novo; Abrir; Abrir do GeoGebra; Abrir Arquivo Recente; Compartilhar; Exportar; Visualizar Impressão e Fechar.

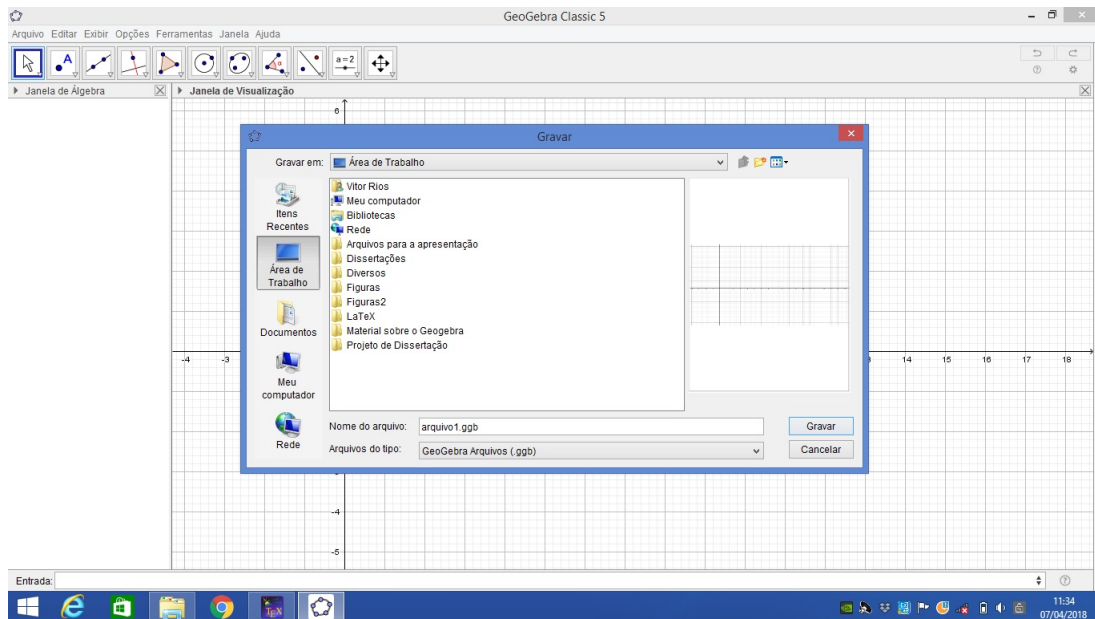


Figura 1.2: Captura de tela utilizando a opção *Gravar Como* no GeoGebra

Quanto ao campo de Entrada, sinalizado na *figura 1.1*, este corresponde ao local em que são inseridos os comandos, leis de formação, coordenadas de pontos através do teclado.

Quanto a janela de álgebra, nesta ficam exibidas todas as informações sobre os objetos construídos, tais como: coordenadas dos pontos e equações. Já a janela de visualização exhibe a representação gráfica dos pontos, vetores, retas, segmentos, polígonos, funções, cônicas no plano e no espaço, por meio de comandos no campo de entrada ou pela barra de ferramentas, a qual possui diversas ferramentas que podem ser utilizadas para construções geométricas, por exemplo.

Na figura abaixo destacamos a barra de ferramentas, representada por uma série de ícones. Nota-se que ao clicar no triângulo presente no canto inferior de cada ícone, obtemos uma lista de ícones ocultos. Destacamos neste trabalho os ícones (ferramentas) que serão utilizadas com maior frequência no desenvolvimento das atividades do capítulo de Aplicações, ver *figura 1.3*.

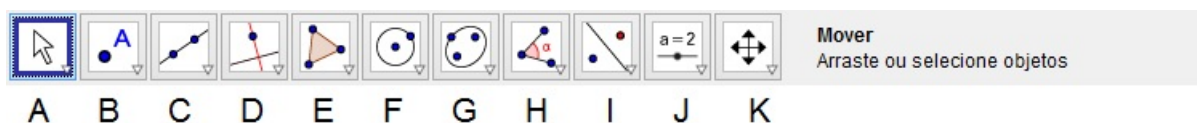


Figura 1.3: Barra de ferramentas no GeoGebra

Em **A** (ver *figura 1.3*) temos um conjunto de ícones, o qual denominamos de *ferramentas de manipulação*. A ferramenta mais usada é a *Mover*, a qual permite movimentar os objetos na área gráfica. Destacamos também a ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto*, a qual permite rotacionar um objeto em torno do ponto selecionado, vide *figura 1.4*.

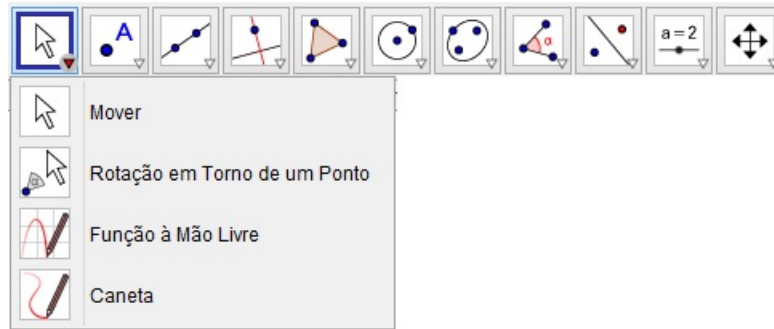


Figura 1.4: Conjunto de ferramentas de manipulação no GeoGebra

O conjunto de *ferramentas pontos*, o qual é representado por **B** (ver figura 1.3), englobam uma série de ferramentas, vale destacar as mais utilizadas neste trabalho são elas: a ferramenta *Ponto* que permite criar pontos; a *Interseção de dois objetos* que permite encontrar um ou mais pontos de interseção; a *Ponto médio ou Centro* que permite determinar o ponto médio de um segmento ou entre dois pontos, bem como permite encontrar o centro de uma cônica e por último, a ferramenta *Raízes* a qual é utilizada para encontrar os zeros ou raízes de uma função, ver *figura 1.5*.

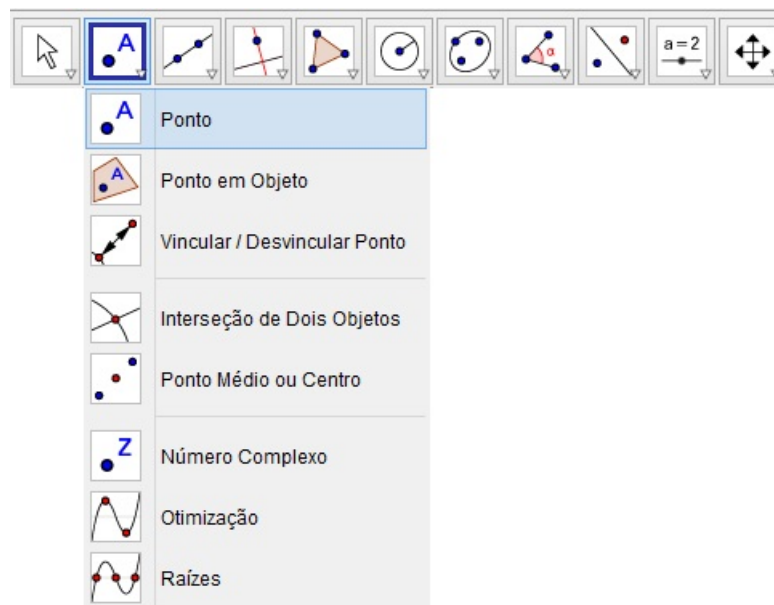


Figura 1.5: Conjunto de ferramentas Pontos no GeoGebra

Em **C** (ver figura 1.3) temos um conjunto de ícones que denominamos de *ferramentas Linhas e Retas*, o qual engloba ferramentas que possibilitam a construção de retas, segmentos, segmentos com comprimento fixo, semirretas, caminho poligonal, vetores definidos por dois pontos e vetores definidos a partir de um ponto, vide *figura 1.6*.



Figura 1.6: Conjunto de ferramentas Linhas e Retas no GeoGebra
 Fonte: Própria criada com auxílio do GeoGebra versão 5.0

Quanto ao conjunto de ícones representado por **D**, temos que trata-se de um conjunto de ferramentas a qual denominamos de *Retas*, e tais ferramentas permitem obtermos retas perpendiculares relativas a uma reta, ou a um segmento, ou a um vetor; retas paralelas a uma reta dada; a reta mediatriz de um segmento; a bissetriz de um ângulo; a reta tangente a uma cônica, ou um círculo, ou uma função; estas são algumas das ferramentas que compõem tal conjunto, vide *figura 1.7*.

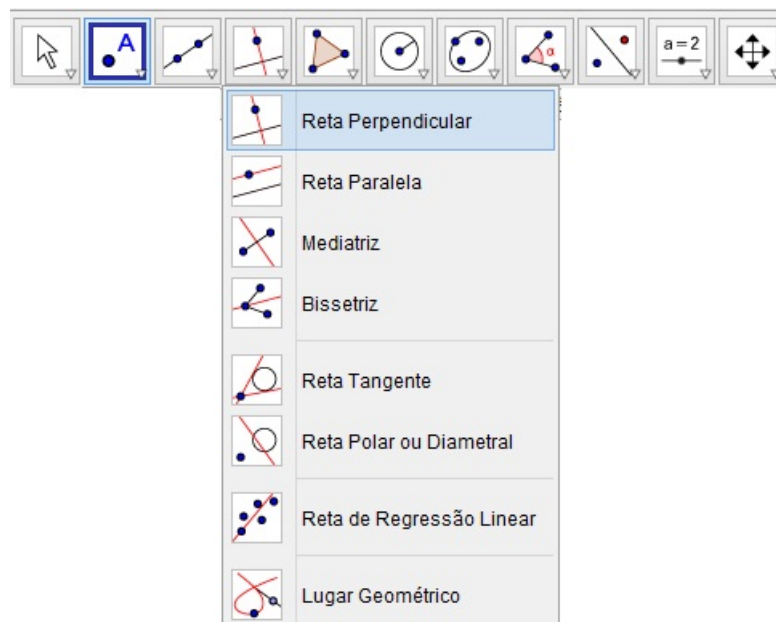


Figura 1.7: Conjunto de ferramentas Retas no GeoGebra
 Fonte: Própria criada com auxílio do GeoGebra versão 5.0

Em **E** (ver figura 1.3) temos um conjunto de ícones, o qual denominamos de Polígonos, destacam-se duas ferramentas, a saber: *Polígono* e *Polígono Regular*. Selecionando a primeira ferramenta pode-se construir um polígono irregular com a quantidade de lados desejada, já com a segunda ferramenta é possível construir um polígono regular a partir

de um lado, vide *figura 1.8*.

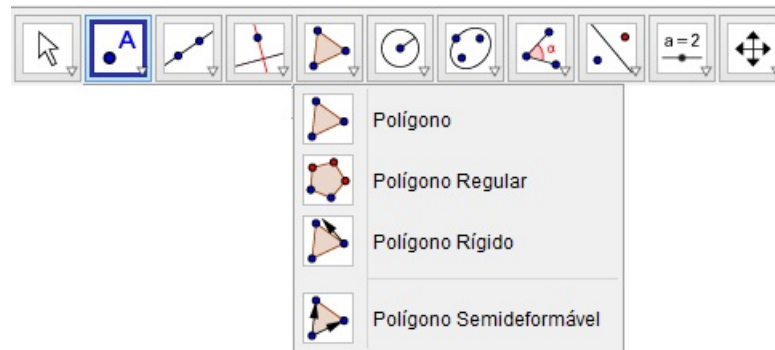


Figura 1.8: Conjunto de ferramentas Polígonos no GeoGebra

O conjunto de ícones representado por \mathbf{F} (ver figura 1.3) o qual denominamos de *formas circulares*, engloba ferramentas que possibilitam a construção de círculos dados o centro e um dos pontos sobre a circunferência, de círculos dados o centro e o raio, de círculos dados três pontos sobre a circunferência, de semicírculo definidos por dois pontos, de arcos circulares e circuncirculares e de setores circulares e circuncirculares, vide *figura 1.9*.

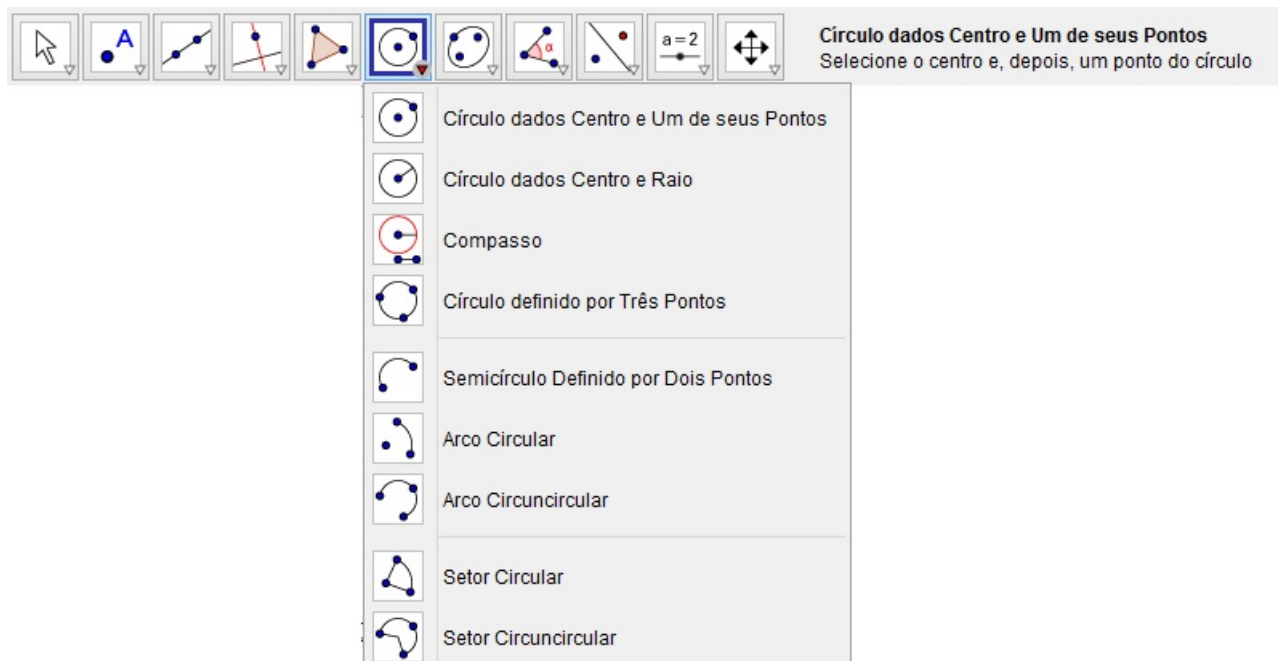


Figura 1.9: Conjunto de ferramentas Formas Circulares no GeoGebra

Já em \mathbf{G} (ver figura 1.3) temos um conjunto de ícones, o qual denominamos de *cônicas*, que possuem ferramentas que possibilitam a construção de elipses, hipérbolas, parábolas e cônicas definidas por cinco pontos, vide *figura 1.10*.

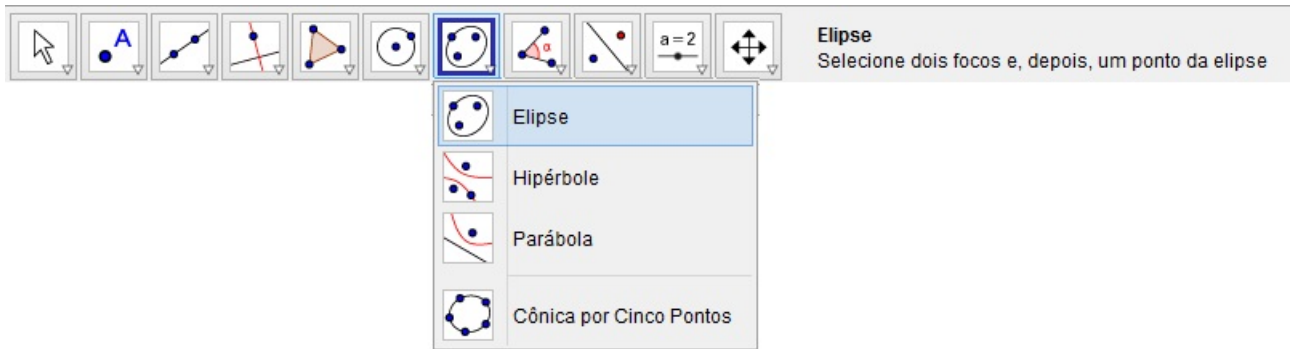


Figura 1.10: Conjunto de ferramentas Cônicas no GeoGebra

O conjunto de ícones representado por **H** (ver *figura 1.3*) denominamos de *ângulos*, englobam ferramentas que permitem a construção de ângulos, ângulos com amplitude fixa, além de outras que possibilitam determinar a área de figuras, a inclinação de uma reta e o comprimento de segmentos, perímetro de um polígono, circunferência ou elipse. Estas são as principais ferramentas disponíveis em **H**, ver *figura 1.11*.

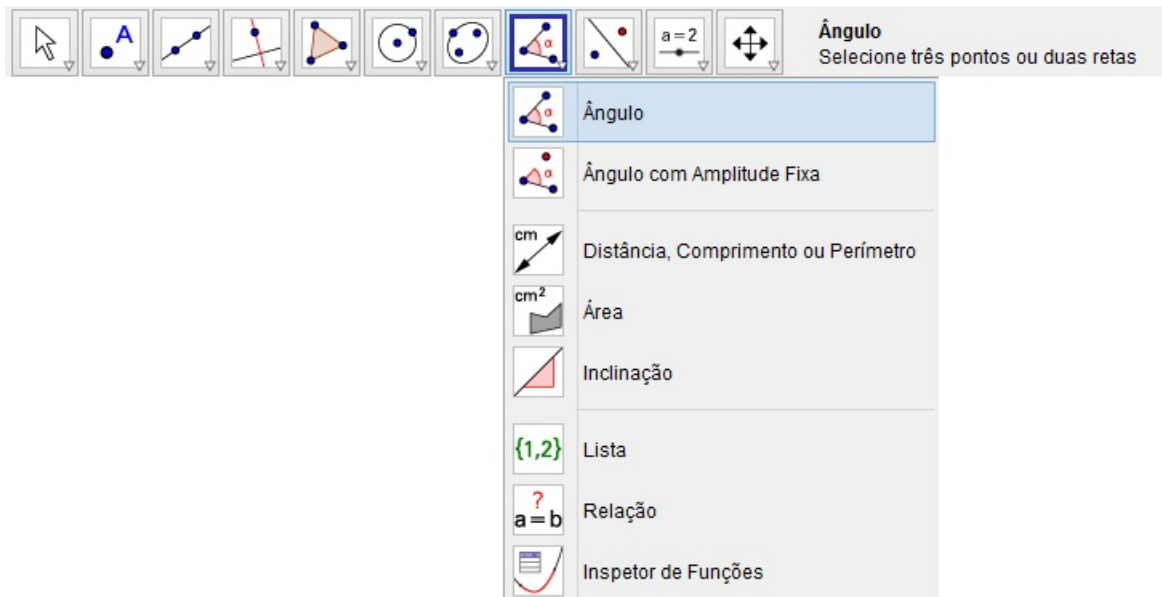


Figura 1.11: Conjunto de ferramentas Ângulos no GeoGebra

Chamamos de *transformações* ao conjunto de ícones, representado por **I** na *figura 1.3*, que englobam ferramentas, as quais permitem construir o reflexo de um objeto em relação a uma reta ou a um ponto, rotacionar um objeto em torno de um ponto e transladar um objeto para o mesmo lado que o sentido do vetor, vide *figura 1.12*.

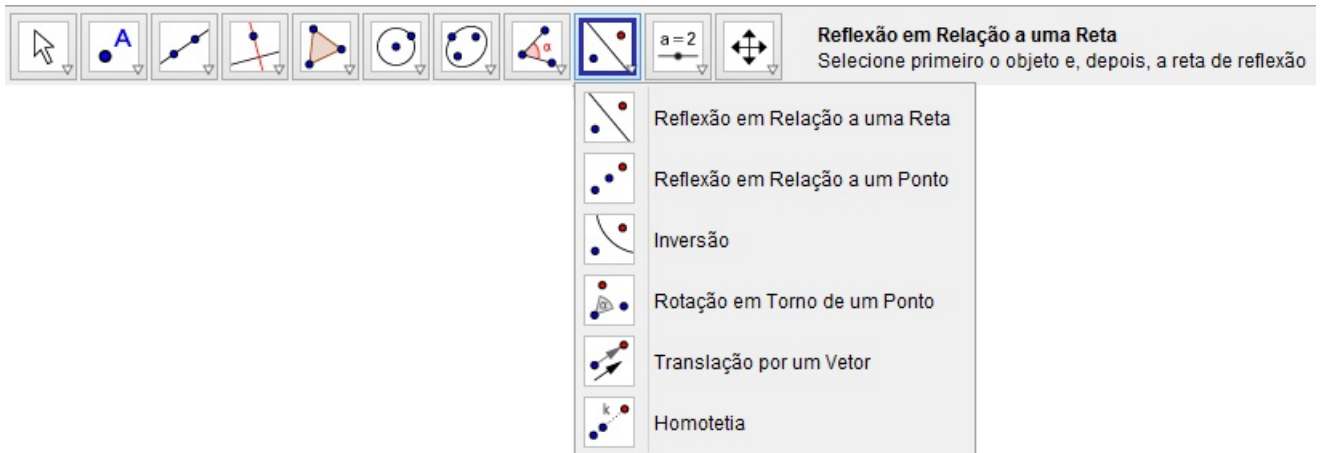


Figura 1.12: Conjunto de ferramentas Transformações no GeoGebra

Com relação ao conjunto de ícones, representado pela letra **J** (ver *figura 1.3*), o qual reúne ferramentas que denominamos de controle, temos que estas permitem a criação de controles deslizantes que possibilitam causar variações em objetos, bem como podem assumir a função de uma variável. Também permite criar uma caixa para exibir ou esconder objetos já construídos, inserir imagens e textos estáticos, dinâmicos ou em LaTeX, ver *figura 1.13*

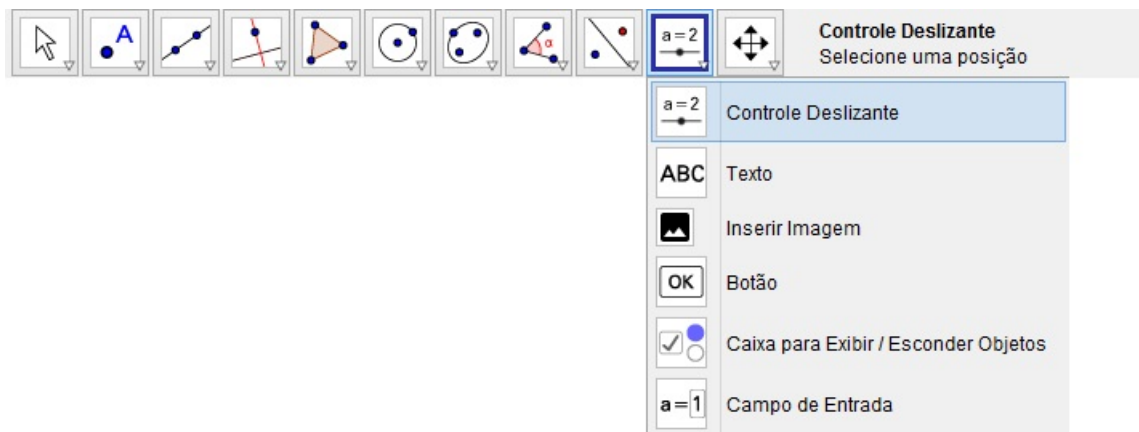


Figura 1.13: Conjunto de ferramentas Controles no GeoGebra

Em **K** (ver *figura 1.3*) temos o último conjunto de ícones da barra de ferramentas, o qual denominamos de ferramentas de exibição, as quais possibilitam mover o sistema de eixos, além de todos os objetos nele contidos, bem como é possível ampliar ou reduzir as construções feitas, exibir ou ocultar objetos e apagar as construções feitas que são visualizadas na janela de visualização, vide *figura 1.14*.

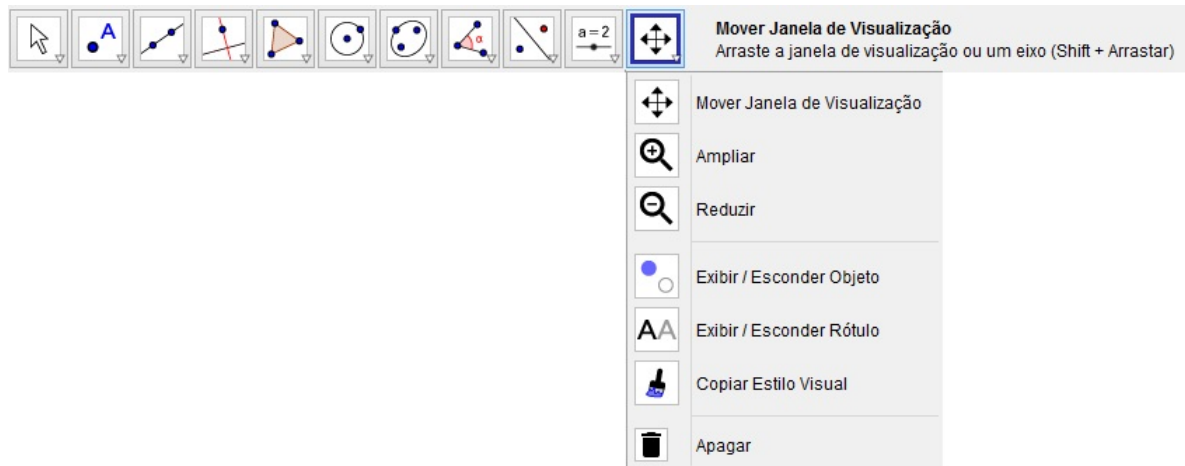


Figura 1.14: Conjunto de ferramentas Exibição no GeoGebra

Por meio da barra de menu, clicando em *Exibir* temos algumas janelas, a saber: janela de visualização, janela CAS, janela de visualização 3D e janela de álgebra. Além das opções planilha, protocolo de construção e calculadora de probabilidades.

Na janela CAS é possível obter soluções de equações e sistemas lineares, decompor um número em fatores primos, calcular a aproximação decimal e encontrar derivadas, bastando para isso digitar comandos numéricos ou algébricos para que haja um processamento interno no software, que realizará os cálculos e retornará com um resultado, ver *figura 1.15*.

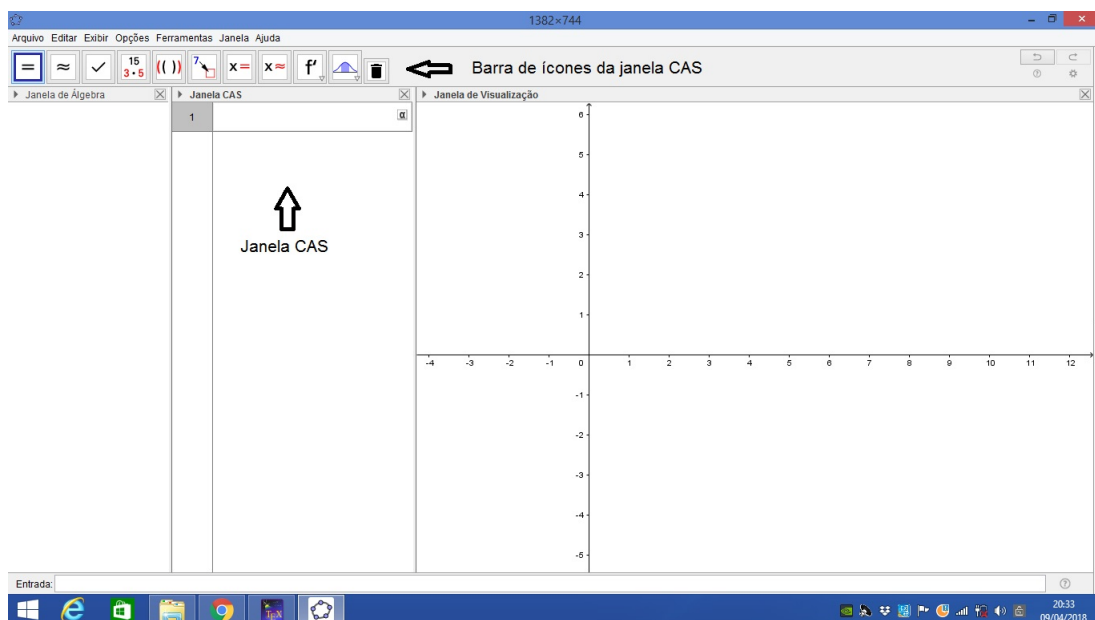


Figura 1.15: Janela CAS e barra de ícones da janela CAS

Quanto a planilha, trata-se de uma planilha de cálculos com ferramentas muito semelhantes as que são utilizadas no Excel. Nesta planilha pode-se inserir em cada célula valores números, coordenadas de pontos, funções, segmentos, polígonos, dentre outros. Note que ao clicar em Planilha, o GeoGebra exibirá uma barra de ícones com diversas ferramentas que permitem desde que haja inserção de dados numéricos obter soma, média, máximo, mínimo, dentre outros, ver *figura 1.16*.

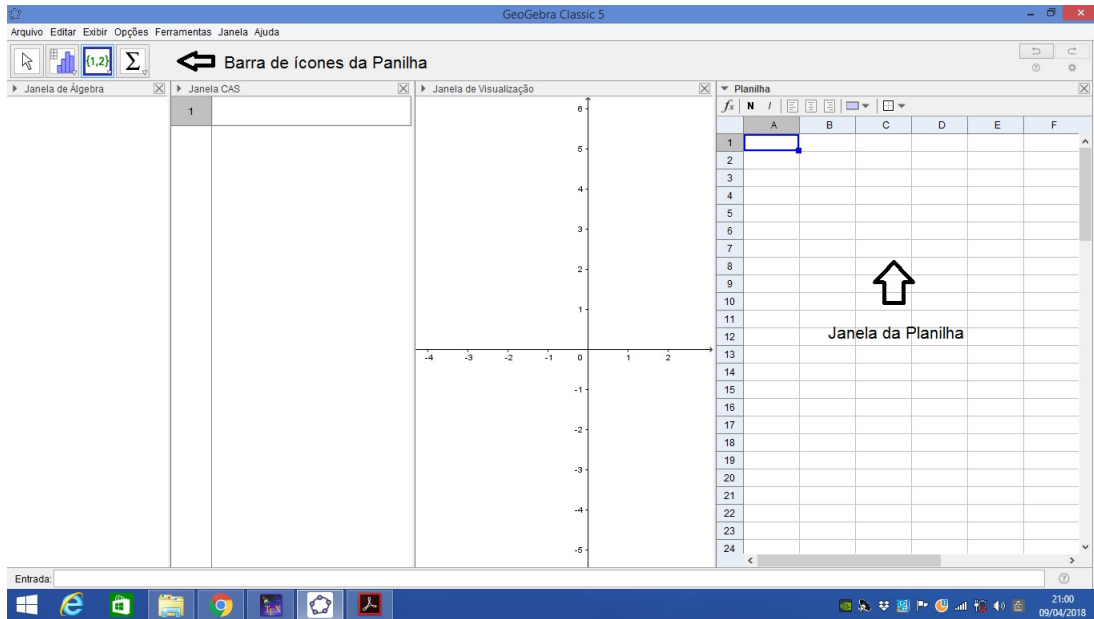


Figura 1.16: Janela da Planilha

Ao selecionar a janela de visualização 3D, é possível construir objetos e vê-los em três dimensões, conforme *figura 1.17*.

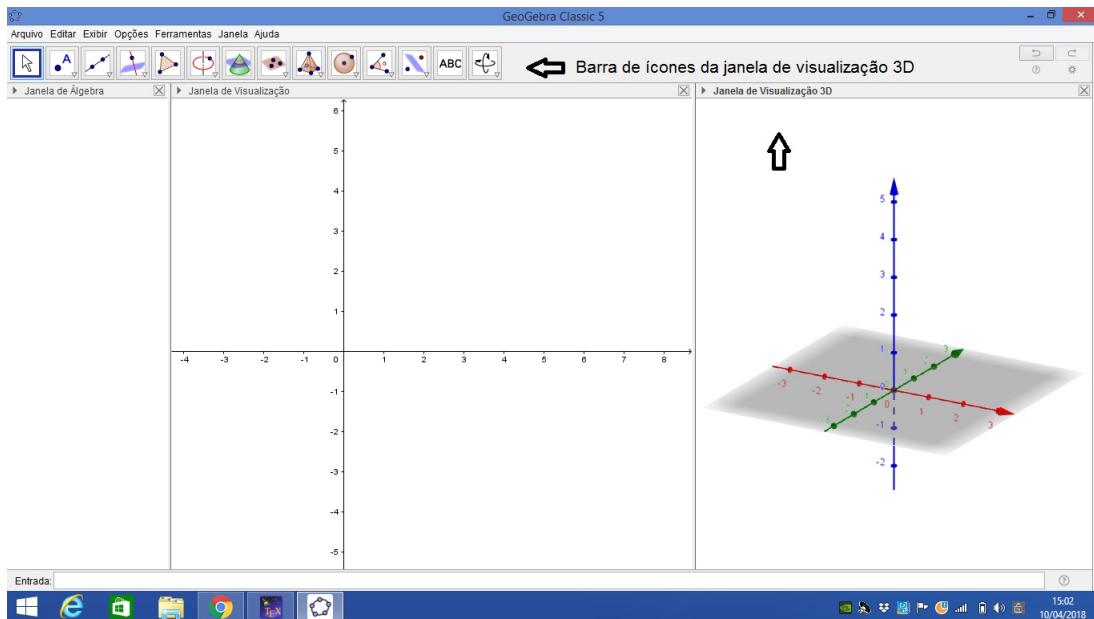


Figura 1.17: Janela de Visualização 3D

Na janela de visualização é possível ocultar ou mostrar os eixos e malhas, bastando para isso clicar com o botão direito do mouse na janela de visualização e marcar ou desmarcar as opções *Eixos* e *Malhas*, ver *figura 1.18*.

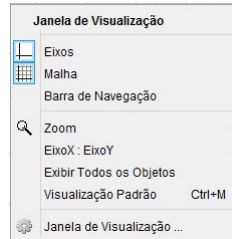
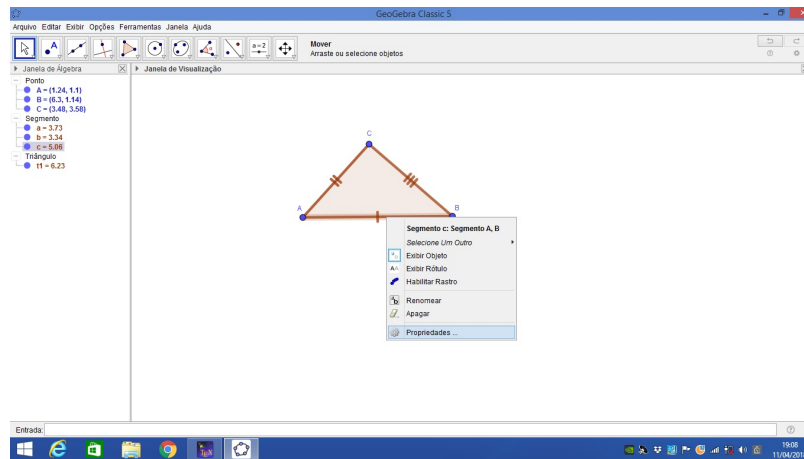
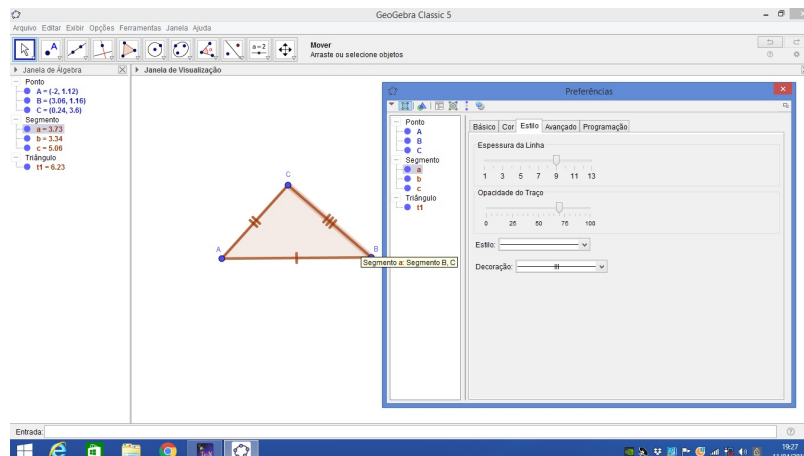


Figura 1.18: Captura de tela obtida - Eixos e Malhas

Uma vez construídos objetos na janela de visualização, como por exemplo, um triângulo, pode-se alterar a espessura das linhas, cor, estilo, decoração e opacidade do traço, além de ocultar/exibir rótulo ou objeto. Para isso basta clicar com o botão direito do mouse sobre o objeto, em seguida deve-se clicar em *Propriedades* e em *Preferências*, selecionando a guia para realizar a alteração desejada, ver *figuras 1.19(a) e 1.19(b)*.



(a) Dado $\triangle ABC$, deve-se clicar sobre um segmento e em seguida selecionar *Propriedades*



(b) Abrirá uma nova janela *Preferências*, na qual deve-se escolher a guia e fazer a alteração desejada

Figura 1.19: Capturas de telas obtidas

Por último ressaltamos que é possível renomear um objeto, por exemplo, um ponto. Para isso, basta clicar com o botão direito do mouse e em seguida deve-se selecionar **Renomear**.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições, propriedades e proposições que servirão como base para a construção de outros conceitos, que serão tratados no corpo do trabalho, para isso utilizamos como fonte alguns autores vistos em [1], [2] e [3].

Este capítulo está dividido em três seções: Lugares Geométricos e Conceitos Geométricos Básicos, Casos de congruência de triângulos e Quadriláteros notáveis.

2.1 Lugares Geométricos e Conceitos Geométricos Básicos

Definição 2.1 (Lugar Geométrico). Entendemos que o *lugar geométrico* (abreviamos *LG*) é o conjunto de pontos que possuem uma determinada propriedade.

Definição 2.2 (Mediana). Dado um $\triangle ABC$, a mediana relativa ao lado BC será o segmento que une o vértice A ao ponto médio do lado BC, seja M o ponto médio do lado BC, então teremos que AM é a mediana. De forma análoga, temos em ABC outras medianas relativas aos lados AC e AB, conforme vemos na *figura 2.1*.

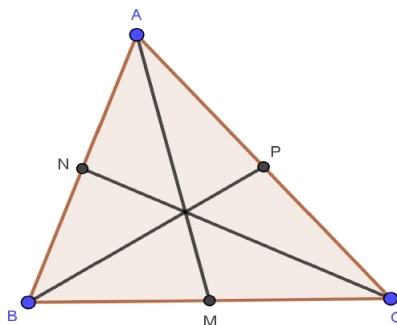


Figura 2.1: AM é mediana do $\triangle ABC$.

Antes de definirmos o que são as retas perpendiculares, daremos algumas definições, a saber: ângulo e semiplano, e em seguida enunciaremos o postulado do transporte de ângulos, estes conceitos serão utilizados em demonstrações posteriores.

Chama-se *ângulo* a reunião de duas semirretas de mesma origem. Seja O a origem e \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} as semirretas que correspondem aos lados do ângulo, conforme *figura 2.2*.

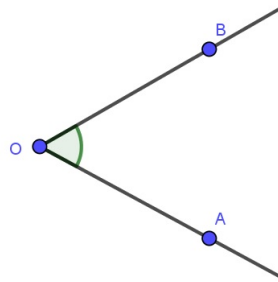


Figura 2.2: $\angle AOB$.

Temos que uma reta g divide um plano em duas regiões convexas, as quais serão chamadas de *semiplanos* delimitados por g . Dados dois pontos A e B , tais que cada um deles se localiza em um semiplano, logo $AB \cap g \neq \emptyset$.

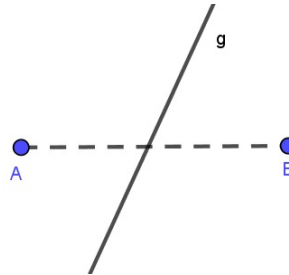


Figura 2.3: Semiplano determinado pela reta g .

A seguir, enunciaremos o *Postulado do transporte de ângulos*:

Dados um ângulo $A\hat{O}B$ e uma semirreta $\overrightarrow{O'A'}$ de um plano, existe sobre este plano, e em um dos semiplanos que podemos determinar com $\overrightarrow{O'A'}$, uma única semirreta $\overrightarrow{O'B'}$ que forma com $\overrightarrow{O'A'}$ um ângulo $A'\hat{O}'B'$ congruente ao ângulo $A\hat{O}B$.

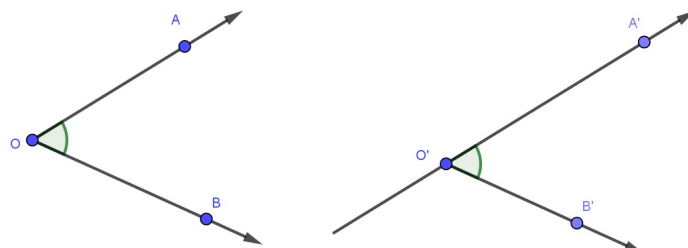


Figura 2.4: $A\hat{O}B \equiv A'\hat{O}'B'$.

Duas retas r e s são ditas *perpendiculares* se forem concorrentes a um único ponto e formam ângulos de 90° nesse ponto. Escrevemos $r \perp s$ para denotarmos que r e s são perpendiculares.

Para mostrarmos a existência e a unicidade da perpendicular dividiremos em 2 casos, a saber:

1º Caso: Num plano por um ponto P dado, tal que $P \in r$ existe uma única reta s perpendicular a r que passa por P .

Demonstração. Existência

Sejam r e s duas retas, tais que $B \in r$, $A \in s$ e $r \cap s = \{P\}$, conforme figura 2.5. Pelo postulado do transporte de ângulos, tomemos \overrightarrow{PB} uma semirreta de origem P e construamos num dos semiplanos determinados pela reta r , o ângulo \widehat{APB} congruente a um ângulo reto. Logo, a reta s que contém \overrightarrow{PA} é perpendicular a r , já que \widehat{BPA} é reto.

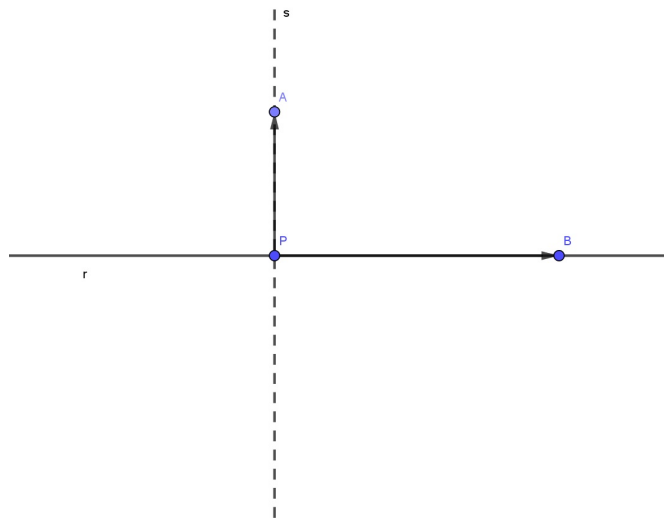


Figura 2.5: $s \perp r$.

Unicidade

Sejam s e t retas em um plano, tais que se s e t são retas distintas e passam por P , considerando r um outra reta do plano, em que $P \in r$, temos que se t são perpendiculares à reta r então teríamos o que segue, conforme figura 2.6.

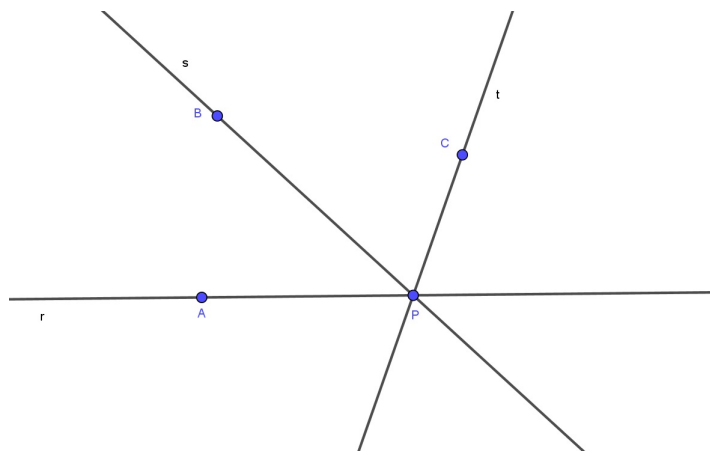


Figura 2.6: Unicidade das retas s e t .

Sejam A, B, C três pontos distintos tais que $A \in r$, $B \in s$ e $C \in t$. Com isso \overrightarrow{PB} e \overrightarrow{PC} são duas semirretas situadas no mesmo semiplano determinado por r e \overrightarrow{PA} uma semirreta de r , temos que:

- $s \perp r \Rightarrow \widehat{APB}$ é congruente a um ângulo reto.
- $t \perp r \Rightarrow \widehat{APC}$ é congruente a um ângulo reto.

Por outro lado, se \overrightarrow{PB} é uma semirreta distinta de \overrightarrow{PC} , logo o resultado é um absurdo, pois contraria o postulando do transporte de ângulos. Assim, a reta perpendicular a r passando por P é única. \square

2º Caso: Por P , sendo $P \notin r$, passa uma única reta s perpendicular a r .

Demonstração. **Existência**

Sejam r e t retas em um plano, $P \in t$ e $t \cap r = \{O\}$. No semiplano oposto ao de P , que é determinado pela reta r , obtemos o ponto Q , considere u outra reta do plano, onde $Q \in u$ e tal que: $\widehat{BOP} \equiv \widehat{BOQ}$ e $\overline{OP} = \overline{OQ}$, conforme *figura 2.7*.

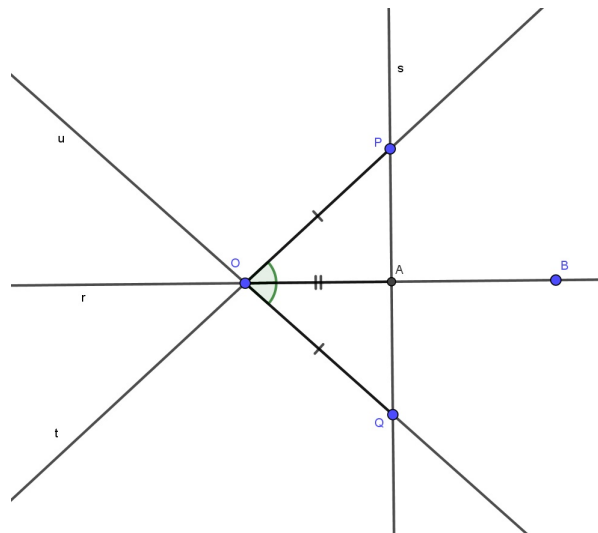


Figura 2.7: Existência de uma única reta $s \perp r$.

Seja $s = \overleftrightarrow{PQ}$ e sendo $PQ \cap r = \{A\}$, temos 2 casos a considerar:

- Se A coincide com O ($A=O$) então $\widehat{BAP} \equiv \widehat{BAQ}$ e $\overleftrightarrow{PQ} \perp r$, i.e., $s \perp r$.
- Se A não coincide com O então $\triangle OAP \equiv \triangle OAQ$ por LAL $\Rightarrow \widehat{OAP} \equiv \widehat{OAQ} \Rightarrow r \perp \overleftrightarrow{PQ} \Rightarrow r \perp s$.

Unicidade

Sejam r, s e t três retas em um plano. Se s e t são duas retas distintas, que passam por P e ambas são perpendiculares a r então teremos o que segue, conforme *figura 2.8*.

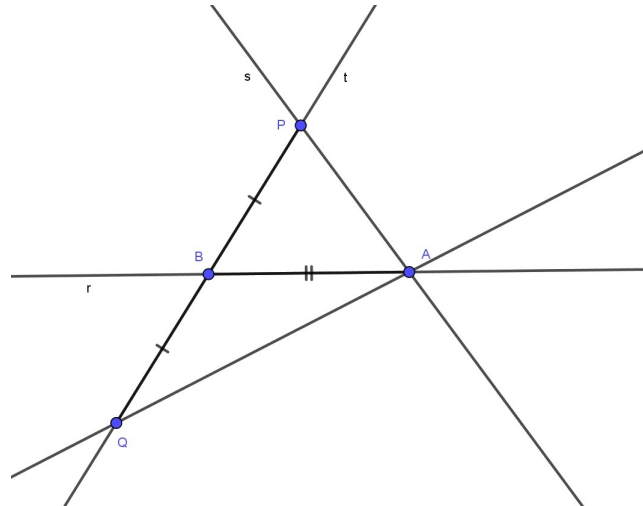


Figura 2.8: Dadas as retas r , s e t no plano.

Sejam A e B dois pontos, tais que $t \cap r = \{B\}$ e $s \cap r = \{A\}$ e tome Q um ponto da semirreta oposta a \overrightarrow{BP} e tal que: $\overline{QB} = \overline{BP}$ (1). Como $t \perp r \Rightarrow \widehat{PBA} \equiv \widehat{QBA}$ (2) e $s \perp r \Rightarrow \widehat{PAB}$ é um ângulo reto (3). Logo, por (1), (2), e sendo AB um lado comum ao $\triangle PBA$ e ao $\triangle QBA$, temos pelo caso de congruência LAL que: $\triangle PBA \equiv \triangle QBA$.

$\triangle PAB \equiv \triangle QAB \Rightarrow \widehat{PAB} \equiv \widehat{QAB} \Rightarrow^{(3)} \widehat{QAB}$ é reto $\Rightarrow \overleftrightarrow{QA} \perp r$, o que é um absurdo, já que pelo ponto A temos duas retas distintas \overleftrightarrow{QA} e s , em que ambas são perpendiculares a r , o que contraria a unicidade no 1º Caso. \square

Mais algumas definições serão necessárias, a saber: *mediatriz* de um segmento, *pé da perpendicular*, *altura* e *pé da altura*.

Definição 2.3. A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio.

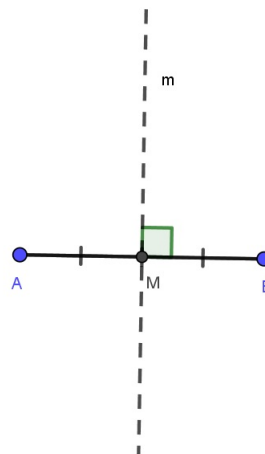


Figura 2.9: m é mediatriz de AB .

Seja $A \notin r$ então o ponto P de interseção da reta s , a qual é perpendicular a r e passa por A será denominado como *pé da perpendicular* baixada de A em relação à reta r .

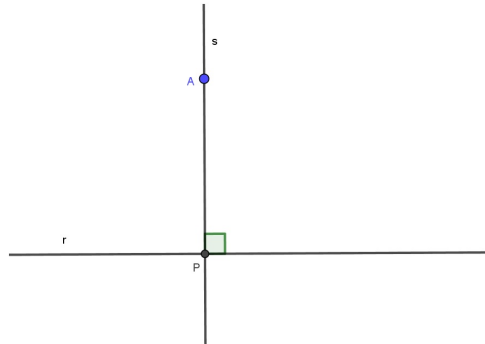


Figura 2.10: P é o pé da perpendicular.

Denominamos de *altura de um triângulo* ao segmento de reta que é perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado.

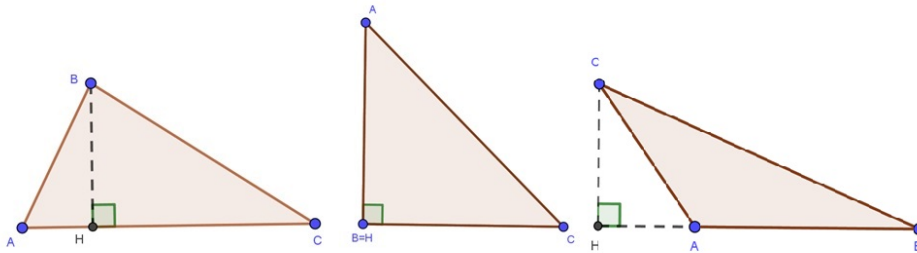


Figura 2.11: AH é altura relativa a BC e H é dito *pé da altura*.

Proposição 2.1. Dados os pontos A e B no plano, m é mediatriz do segmento AB se, e só se, é o LG dos pontos do plano que equidistam de A e de B.

Demonstração. \implies Sejam M e m , respectivamente, o ponto médio e a mediatriz de AB. Seja $P \in m$ temos que APB é um triângulo, sendo PM a mediana e a altura relativa ao lado AB. Por outro lado, como $\overline{AM} = \overline{MB}$, $\widehat{AMP} = \widehat{BMP} = 90^\circ$ e PM é um lado comum aos triângulos AMP e BMP, logo pelo caso de congruência LAL temos que $\triangle AMP \equiv \triangle BMP$. Portanto, $\overline{AP} = \overline{BP}$.

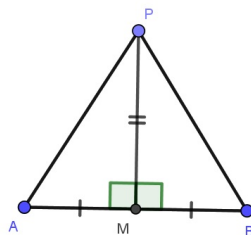


Figura 2.12: $\triangle AMP \equiv \triangle BMP$.

\Leftarrow Se P é um ponto do plano tal que $\overline{AP} = \overline{BP}$. Seja APB um triângulo de base AB , sendo M o ponto médio do lado AB temos que $\overline{AM} = \overline{MB}$. E sendo PM a mediana de APB relativa ao lado AB , bem como o lado comum aos triângulos APM e BPM , logo pelo caso de congruência LLL temos que $\triangle AMP \cong \triangle BMP$ e $\widehat{AMP} = \widehat{BMP}$. Por outro lado, como $\widehat{AMP} + \widehat{BMP} = 180^\circ \Rightarrow 2\widehat{AMP} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AMP} = 90^\circ$. Portanto, $PM \perp AM$, i.e, PM é altura de APB relativa a AB . Assim, podemos concluir que \overleftrightarrow{PM} é a mediatriz de AB .

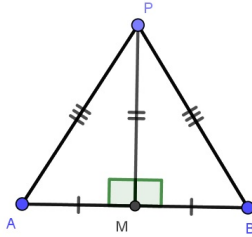


Figura 2.13: $\triangle AMP \cong \triangle BMP$.

□

Definição 2.4. Dado um ângulo $\angle AOB$, a bissetriz deste ângulo é a semirreta \overrightarrow{OC} que o divide em dois ângulos iguais. Dizemos ainda que \overrightarrow{OC} bisseta $\angle AOB$. Assim, $\angle AOB \Leftrightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOC}$. Assumiremos que a bissetriz interna de um ângulo, caso exista, é única.

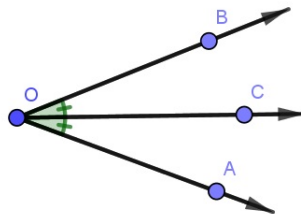


Figura 2.14: Bissetriz de \widehat{AOB} .

A seguir, enunciaremos e demonstraremos uma proposição que trata de um ponto pertencente a bissetriz de um ângulo dado, mostraremos que o referido ponto é equidistante aos lados do ângulo.

Proposição 2.2. Seja $\angle AOB$ um ângulo dado, em que C é um ponto de $\angle AOB$ e tal que é equidistante aos lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} se, e só se, $C \in$ bissetriz de $\angle AOB$.

Demonstração. \Rightarrow Seja C um ponto do interior de $\angle AOB$, tal que $\overline{PC} = \overline{CQ}$. Sejam P e Q os pés das perpendiculares baixadas de C em relação às retas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , respectivamente.

Logo, $\widehat{OPC} = \widehat{OQC} = 90^\circ$ e OC é a hipotenusa dos triângulos OPC e OQC . Assim, pelo caso de congruência CH (cateto-hipotenusa, conforme veremos na seção 2.2) temos que $\triangle OPC \cong \triangle OQC$. Portanto, $\widehat{COP} = \widehat{COQ}$, de forma que $C \in$ bissetriz de $\angle AOB$.

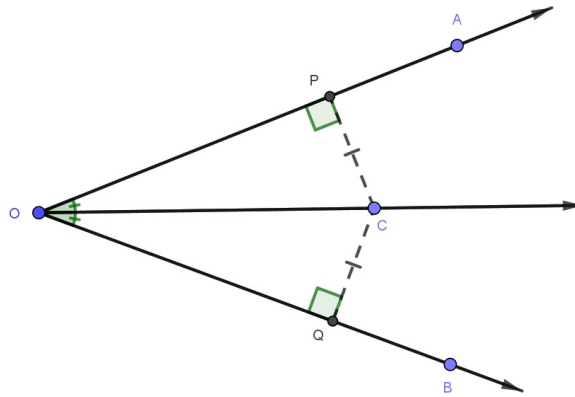


Figura 2.15: $C \in$ bissetriz de $\angle AOB$ e $\overline{PC} = \overline{QC}$.
 Fonte: Própria criada com auxílio do GeoGebra versão 5.0

\Leftarrow Suponha que $\widehat{QOC} = \widehat{POC}$ e sejam P e Q os pés das perpendiculares baixadas de C em relação às retas \overleftrightarrow{OA} e \overleftrightarrow{OB} , respectivamente. Sendo OC o lado comum entre os triângulos OPC e OQC. Logo, pelo caso de congruência LAA_o (conforme veremos na seção 2.2) temos que $\triangle OPC \cong \triangle OQC$ e portanto $\overline{PC} = \overline{QC}$, i.e, $d(C, \overleftrightarrow{OA}) = d(C, \overleftrightarrow{OB})$. \square

2.2 Casos de congruência de triângulos

Nesta seção estudaremos as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam considerados congruentes.

Os casos de congruência serão utilizados nas demonstrações de proposições e nos exercícios propostos em outros capítulos desta dissertação.

Definição 2.5. Dizemos que um triângulo é congruente a outro se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices, de modo que os ângulos internos sejam ordenadamente congruentes aos ângulos internos do outro triângulo, bem como que os lados opostos aos vértices correspondentes também sejam congruentes.

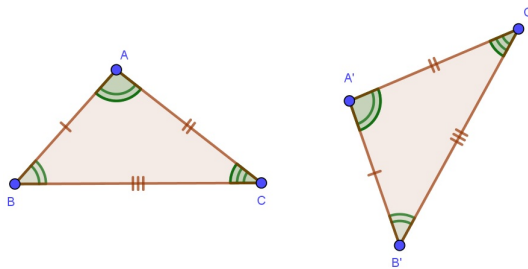


Figura 2.16: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

Conforme *figura 2.16*, a qual mostra que os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes temos que:

- $\widehat{A} = \widehat{A'}$; $\widehat{B} = \widehat{B'}$; $\widehat{C} = \widehat{C'}$
- $\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\overline{AC} = \overline{A'C'}$; $\overline{BC} = \overline{B'C'}$

Vale ressaltar que a congruência entre triângulos é reflexiva, simétrica e transitiva. Além disso, temos que existem condições para que dois triângulos sejam congruentes, estes são chamados de *casos de congruência de triângulos*, vejamos a seguir:

1º Caso - LAL - Postulado

Se dois lados de um triângulo e o ângulo compreendido entre eles forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo compreendido por esses dois lados, então os dois triângulos são ditos congruentes.

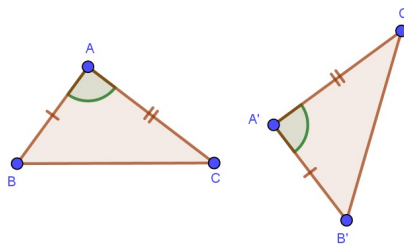


Figura 2.17: Caso de congruência LAL

Logo, temos que:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \end{cases} \implies \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \implies \begin{cases} \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$$

2º Caso - ALA

Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre eles forem respectivamente iguais a dois ângulos do outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então esses dois triângulos são congruentes.

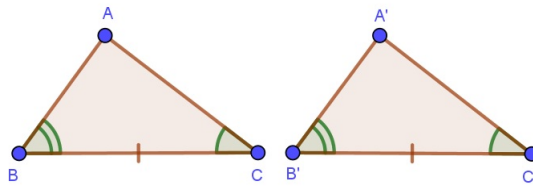


Figura 2.18: Caso de congruência ALA

$$\widehat{B} = \widehat{B'}; \overline{BC} = \overline{B'C'}; \widehat{C} = \widehat{C'} \implies \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \text{ (Hipótese } \implies \text{ Tese)}$$

Demonstração. Tome $X' \in \overline{B'A'}$ tal que $\overline{B'X'} = \overline{BA}$, ver *figura 2.19*

Logo, dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle X'B'C'$, e por LAL temos que: $\overline{BA} = \overline{B'X'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'} \implies \triangle ABC \cong \triangle X'B'C' \implies \widehat{BCA} = \widehat{B'C'X'}$ (1)

Por hipótese temos que $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$ e por (1), conclui-se que $\widehat{B'C'X'} = \widehat{B'C'A'}$ e usando o postulado do transporte de ângulos (visto na *seção 2.1*), temos que $\overleftrightarrow{C'X'} = \overleftrightarrow{C'A'}$ e se intersecta com $\overleftrightarrow{B'A'}$ em um único ponto, logo conclui-se que $A' \equiv X'$. Consequentemente $\overline{BA} = \overline{B'A'}$.

Assim, temos que $\overline{BA} = \overline{B'A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'} \implies \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

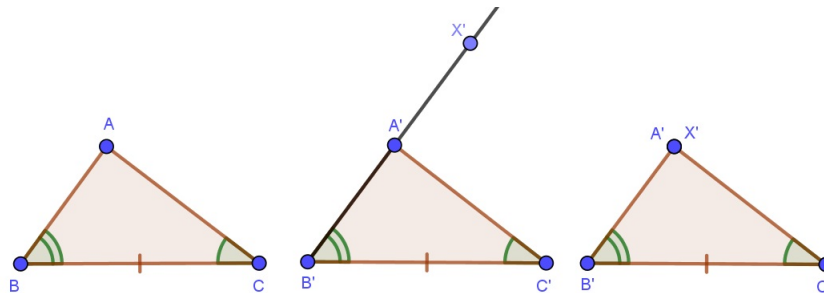


Figura 2.19: Caso de congruência ALA.

□

A seguir apresentaremos mais dois casos de congruência (**LLL** e **LAA_o**) e o teorema do ângulo externo.

3º Caso - LLL

Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

$$\overline{BC} = \overline{B'C'}; \overline{AC} = \overline{A'C'} \text{ e } \overline{AB} = \overline{A'B'} \implies \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \text{ (Hipótese } \implies \text{ Tese)}$$

Demonstração. Crie um ponto X tal que este ponto seja simétrico em relação a \overleftrightarrow{AB} , i.e., X esteja no semiplano oposto ao de C' e de forma que $X\hat{A}'B' = C\hat{A}B$ e $\overline{A'X} = \overline{AC}$, conforme figura 2.20.

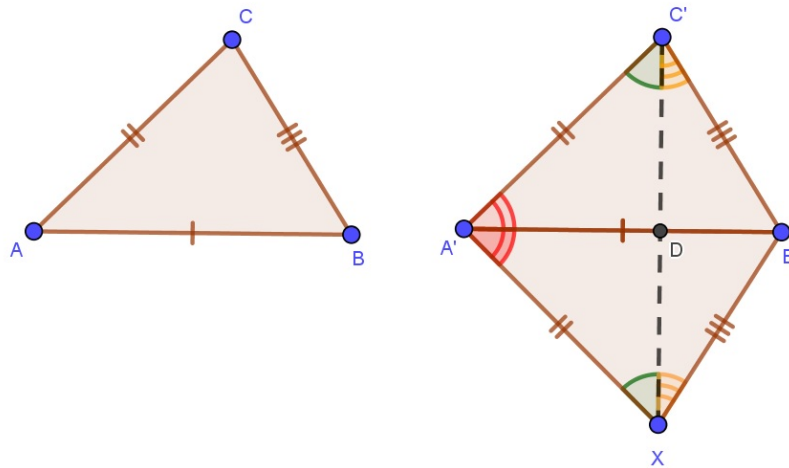


Figura 2.20: Caso de congruência LLL

Fonte: Própria criada com auxílio do GeoGebra versão 5.0

Temos por hipótese que $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e por construção que $\overline{A'X} = \overline{AC}$. Logo, $\overline{A'X} = \overline{A'C'}$.

Assim, como $\overline{A'X} = \overline{AC}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ (por hipótese) e $X\hat{A}'B' = C\hat{A}B$ (pelo postulado do transporte de ângulos), então podemos concluir que por LAL que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'X \implies \overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'X}$ e $\overline{BC} = \overline{B'X}$ (1)

Resta provar que $\triangle A'B'X \equiv \triangle A'B'C'$ e por transitividade temos que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. Seja D o ponto de interseção entre $\overleftrightarrow{A'B'}$ e $C'X$, ver figura 2.20.

Por (1) temos $\overline{A'X} = \overline{AC}$ e por hipótese $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, logo $\overline{A'X} = \overline{A'C'}$ (2). Portanto, temos $A'C'X$ é isósceles de base $C'X \implies A'\hat{C}'X = A'\hat{X}C'$ (3).

Analogamente, por (1) temos $\overline{B'X} = \overline{BC}$ e por hipótese $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, logo concluímos que $\overline{B'X} = \overline{B'C'}$ (4). Portanto, $B'C'X$ é isósceles de base $C'X \implies B'\hat{C}'X = B'\hat{X}C'$ (5)

Como $A'\hat{C}'B' = A'\hat{C}'X + B'\hat{C}'X \stackrel{(3),(5)}{=} A'\hat{X}C' + B'\hat{X}C' = A'\hat{X}B'$ e considerando os resultados obtidos em (2) e em (4), temos por LAL que $\triangle A'B'X \equiv \triangle A'B'C' \therefore \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. \square

Teorema 2.2.1. (Teorema do ângulo externo do triângulo)

Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

Demonstração. Seja $M \in \overline{AC}$, logo $\overline{AM} = \overline{MC}$. Tome $P \in \overrightarrow{BM}$ e tal que $\overline{BM} = \overline{MP}$, conforme figura 2.21.

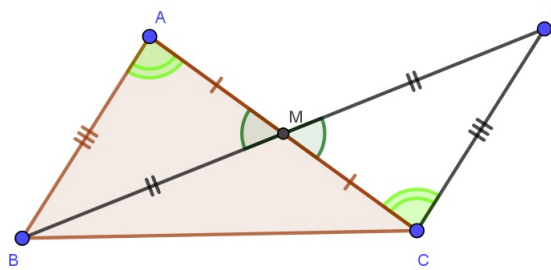


Figura 2.21: Teorema do ângulo externo.

Como $\widehat{AMB} \equiv \widehat{CMP}$ (o.p.v.) temos por LAL que $\triangle AMB \equiv \triangle CMP \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CP}$ e $\widehat{BAM} = \widehat{PCM}$.

Considerando $\widehat{ACD} = \beta$ então $\beta > \widehat{PCM}$. Logo, $\beta > \widehat{BAM}$ ($\beta > \widehat{A}$), vide figura 2.22.

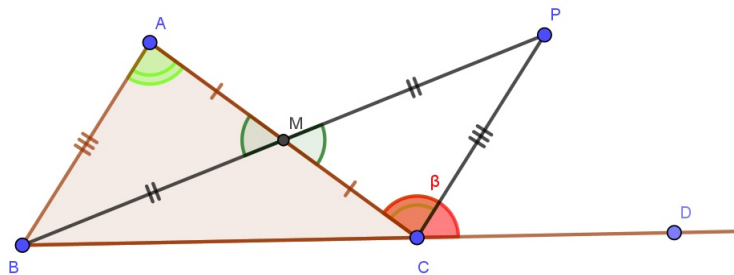


Figura 2.22: Teorema do ângulo externo.

□

Por fim, utilizaremos o *teorema 2.2.1* na demonstração do 4º Caso de congruência.

4º Caso - LAA_o

Se dois triângulos possuem um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes, então eles são congruentes.

$$\overline{BC} = \overline{B'C'}, \widehat{A} = \widehat{A'} \text{ e } \widehat{B} = \widehat{B'} \implies \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \text{ (Hipótese } \implies \text{ Tese)}$$

Demonstração. Temos três possibilidades: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ ou $\overline{AB} > \overline{A'B'}$.

Suponha que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e por hipótese temos que $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$, então por LAL temos $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Suponha agora que $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ se verifica, tome um ponto $D \in \overrightarrow{BA'}$, tal que $\overline{BD} = \overline{B'A'}$, ver *figura 2.23*.

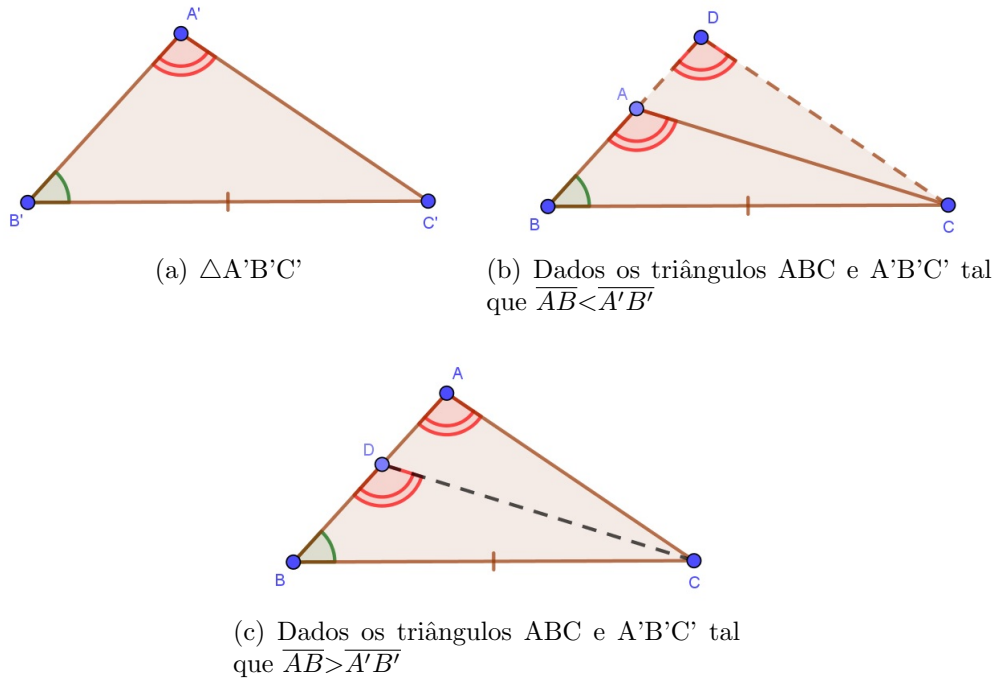


Figura 2.23: 4º Caso de congruência de triângulos - LAA_o

Logo, temos: $\overline{BD} = \overline{B'A'}$ e, por hipótese, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$ \xrightarrow{LAL} $\triangle DBC \cong \triangle A'B'C'$ $\implies \widehat{D} = \widehat{A'}$ e por hipótese $\widehat{A'} = \widehat{A} \implies \widehat{D} = \widehat{A}$, o que é um absurdo já que pelo teorema do ângulo externo (*Teorema 2.2.1*) no triângulo ADC temos que $\widehat{A} > \widehat{D}$. Assim, concluímos que \overline{AB} não pode ser menor do que $\overline{A'B'}$.

Analogamente ao que foi feito anteriormente, temos que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ não se verifica, a única diferença é que $D \in AB$, conforme *figura 2.23(c)*.

Portanto, concluímos que só a 1ª possibilidade ($\overline{AB} = \overline{A'B'}$) é válida. □

Caso especial de congruência de triângulos retângulos (Cateto-Hipotenusa)

Se dois triângulos retângulos têm um cateto e a hipotenusa respectivamente congruentes, então esses triângulos são congruentes.

$\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ $\implies \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (Hipótese \implies Tese)

Demonstração. Tome um ponto X sobre $\overrightarrow{C'A'}$ tal que $\overline{AC} = \overline{A'X}$, vide *figura 2.24*.

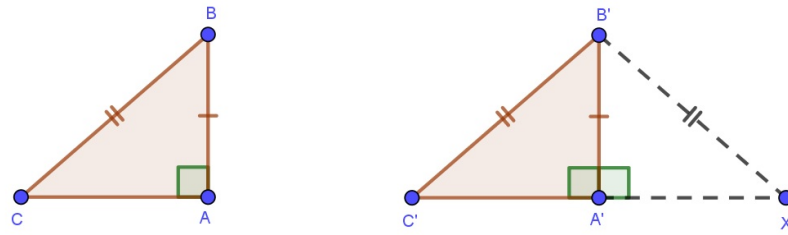


Figura 2.24: Caso especial de congruência de triângulos retângulos (Cateto-Hipotenusa)

Como por hipótese $\widehat{A} = \widehat{A}'$ e $\widehat{A} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A}' = 90^\circ$. Logo, temos:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \widehat{A} = \widehat{A}' \text{ e } \overline{AC} = \overline{A'X} \xrightarrow{\text{por LAL}} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'X \Rightarrow \overline{BC} = \overline{B'X} \text{ (1) e } \widehat{C} = \widehat{X} \text{ (2)}.$$

Por hipótese temos que $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e por (1) obtemos que $\overline{B'C'} = \overline{B'X}$, i.e, $\triangle B'C'X$ é isósceles de base $C'X$. Portanto, $\widehat{X} = \widehat{C'}$. (3)

E por (2) e (3) temos $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Como $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ e $\widehat{A} = \widehat{A}' \xrightarrow{\text{por LAA}_o} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. \square

2.3 Quadriláteros Notáveis

Nesta seção trabalharemos com os quadriláteros, em particular, com os paralelogramos. As propriedades apresentadas serão utilizadas na resolução das atividades propostas no capítulo 4 desta dissertação.

Definição 2.6. Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.

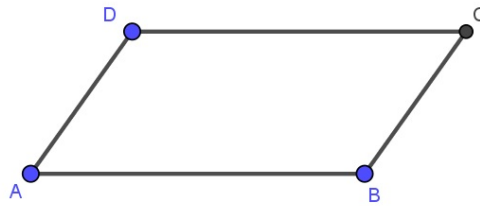


Figura 2.25: ABCD paralelogramo.

Proposição 2.3. Todo quadrilátero convexo que tem lados opostos congruentes é paralelogramo.

Demonstração. Seja ABCD um quadrilátero convexo. Se $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ e sendo AC um lado comum aos $\triangle ABC$ e $\triangle CDA$, então pelo caso de congruência LLL temos que $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

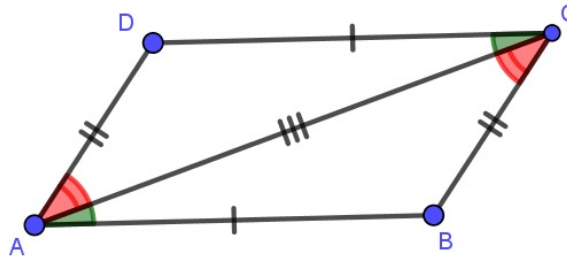


Figura 2.26: ABCD paralelogramo.

Logo, temos que: $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} \Rightarrow AB \parallel CD$ (i) e $\widehat{BCA} = \widehat{DAC} \Rightarrow AD \parallel BC$ (ii). Por (i) e (ii), podemos concluir que ABCD é um paralelogramo. \square

Proposição 2.4. Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, suas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.

Demonstração. \Rightarrow Considerando que ABCD um paralelogramo e M o ponto de interseção das diagonais do mesmo. Temos que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, AC e BD são as diagonais do do paralelogramo, tais que $AC \cap BD = \{M\}$. Segue-se que $\widehat{BAM} = \widehat{DCM}$, $\widehat{ABM} = \widehat{CDM}$ e como ABCD é um paralelogramo temos que $\overline{AB} = \overline{CD}$. Logo, pelo caso de congruência ALA temos $\triangle AMB = \triangle CMD$. Assim, $\overline{AM} = \overline{MC}$ e $\overline{DM} = \overline{MB}$.

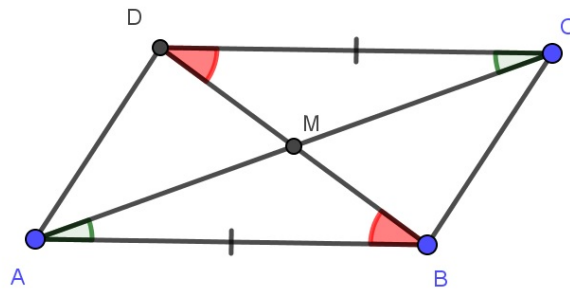


Figura 2.27: $ABCD$ paralelogramo $\Rightarrow \overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$.

\Leftarrow Seja $ABCD$ um quadrilátero, AC e BD as suas diagonais tais que $AC \cap BD = \{M\}$ e M é o ponto médio de ambas, conseqüentemente $\overline{AM} = \overline{MC}$ e $\overline{DM} = \overline{MB}$. Sendo $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$, pois tais ângulos são opostos pelo vértice, pelo caso de congruência LAL temos que $\triangle AMB = \triangle CMD$. Analogamente, obtemos que $\triangle AMD = \triangle BMC$. Assim, concluímos que $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ e portanto $ABCD$ é paralelogramo. \square

Proposição 2.5. Todo quadrilátero convexo que tem dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.

Demonstração. Se $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ e \overleftrightarrow{AC} uma transversal (diagonal de $ABCD$), então $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$.

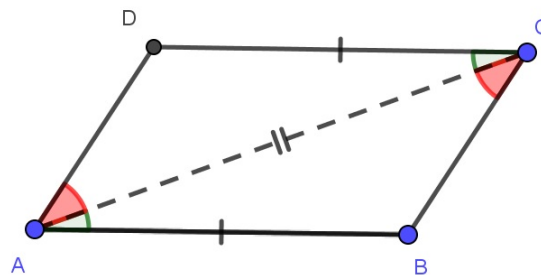


Figura 2.28: $AB \parallel CD$ e $AB = CD \Rightarrow ABCD$ é um paralelogramo.

Como $\overline{AB} = \overline{CD}$ (por hipótese) e seja AC um lado comum entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CDA$, conseqüentemente temos pelo caso de congruência LAL que $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, conseqüentemente $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $\widehat{CAD} = \widehat{ACB}$.

Portanto, se $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$ então, pela *proposição 2.3*, temos que $ABCD$ é um paralelogramo. \square

Definiremos como base média de um triângulo, o segmento de reta cujas extremidades são os pontos médios de dois de seus lados. Dizemos ainda que todo triângulo possui três bases médias.

A seguir a partir dos resultados obtidos pelas propriedades dos paralelogramos enunciaremos e demonstraremos o teorema da base média.

Teorema 2.3.1. (Teorema da base média)

Seja ABC um triângulo qualquer e M, N os pontos médio dos lados AB e AC , respectivamente. Se MN é a base média de ABC relativa a BC então $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e $\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC}$. Reciprocamente, se pelo ponto médio M do lado AB traçarmos a paralela ao lado BC então tal reta intersecta o lado AC em seu ponto médio N .

Demonstração. Seja r uma reta paralela à \overleftrightarrow{AB} e tal que $\overleftrightarrow{MN} \cap r = \{D\}$. Logo, temos que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ e seja \overleftrightarrow{AC} uma transversal $\implies \widehat{MAN} = \widehat{DCN}$ (*)

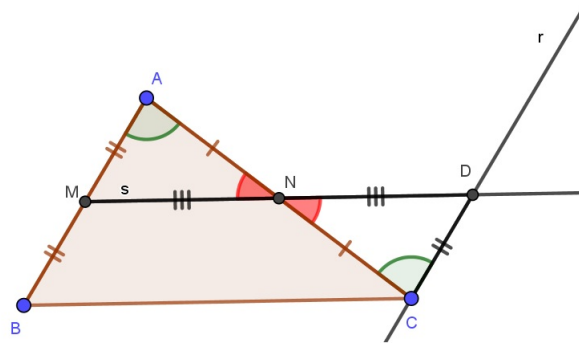


Figura 2.29: Teorema da base média do triângulo.

Como $\widehat{MAN} = \widehat{DCN}$ (o.p.v.), $\overline{AN} = \overline{CN}$ e por (*). Assim, por ALA, temos que $\triangle MAN \cong \triangle DCN \implies \overline{AM} = \overline{CD} \implies \overline{BM} = \overline{CD}$.

Temos que $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{BM}$ e $\overline{CD} = \overline{BM} \xrightarrow{\text{prop.2.5}}$ $MBCD$ é paralelogramo $\implies \overleftrightarrow{MD} \parallel \overleftrightarrow{BC} \implies \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

E como $\triangle MAN \cong \triangle DCN \implies \overline{MN} = \overline{DN}$ (**). Por outro lado, $MBCD$ é paralelogramo $\implies \overline{MD} = \overline{BC} \implies \overline{MN} + \overline{ND} = \overline{BC} \xrightarrow{\text{por(**)}} 2\overline{MN} = \overline{BC} \implies \overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$

Reciprocamente, seja N_1 o ponto médio de AC . Utilizando o resultado anterior temos que se MN_1 é base média relativa à BC então $\overleftrightarrow{MN_1} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

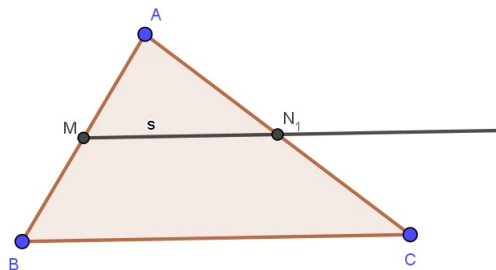


Figura 2.30: Teorema da base média do triângulo.

Utilizando o 5º postulado de Euclides, temos que seja $M \notin \overleftrightarrow{BC}$, então existe uma única reta que passa por M e é paralela à \overleftrightarrow{BC} . Logo, $\overleftrightarrow{MN_1} \equiv \overleftrightarrow{MN}$.

Como $\overleftrightarrow{MN_1}$ e \overleftrightarrow{MN} intersectam AC em N_1 e N , respectivamente, temos que $N_1 = N$. Assim, $\overline{AN} = \overline{NC}$. \square

Capítulo 3

Pontos notáveis de um triângulo

Neste capítulo abordaremos os principais pontos notáveis do triângulo, a saber: baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro, definindo cada um deles, além de enunciar e demonstrar algumas proposições, que tal como as definições serão bastante úteis no desenvolvimento do capítulo de Aplicações. Utilizamos como fonte alguns autores vistos em [1], [2], [3] e [11].

Definição 3.1. O ponto de interseção entre as mediatrizes dos lados de um triângulo é chamado de circuncentro.

Proposição 3.1. As mediatrizes de um triângulo intersectam-se num mesmo ponto, o qual está a mesma distância dos vértices do triângulo.

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ um triângulo qualquer, m , n e t as mediatrizes dos lados AB , AC e BC , respectivamente.

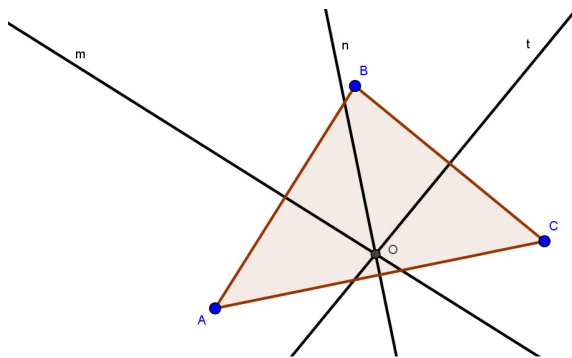


Figura 3.1: O circuncentro de um triângulo.

Se n e t fossem paralelas então os pontos A , B e C seriam colineares.

Se n e t fossem coincidentes então pelo ponto C passariam duas retas perpendiculares a uma mesma reta, contrariando o que fora visto em 2.1. Portanto, n e t intersectam-se no ponto O .

Pela *proposição 2.1* temos que $\overline{BO} = \overline{CO}$, já que $O \in t$, e $\overline{CO} = \overline{AO}$, pois $O \in n$. Portanto, $\overline{AO} = \overline{BO}$. Utilizando novamente a *proposição 2.1* temos que $O \in m$.

Assim, $m \cap n \cap t = \{O\}$ e $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$. \square

Definição 3.2. O ponto de encontro das retas suportes das alturas de um triângulo qualquer é chamado de ortocentro do triângulo.

Proposição 3.2. Dado um triângulo qualquer, as três alturas deste triângulo intersectam-se num mesmo ponto.

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ um triângulo qualquer, temos 3 casos a considerar, a saber:

1º Caso - Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo. Suponha que $\angle B=90^\circ$. Seja B o pé das alturas relativas aos lados BC e AB. Como a altura relativa ao lado AC passa por B (por definição) então podemos concluir que B é o ponto de encontro das alturas do triângulo ABC.

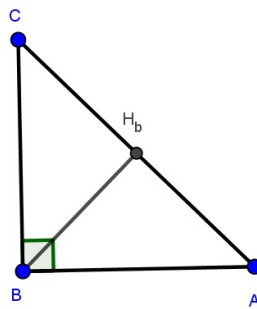


Figura 3.2: B é o ortocentro do triângulo retângulo.

2º Caso - Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo. Por A, B e C trace as retas r , s e t paralelas, respectivamente, aos lados BC, AC e AB.

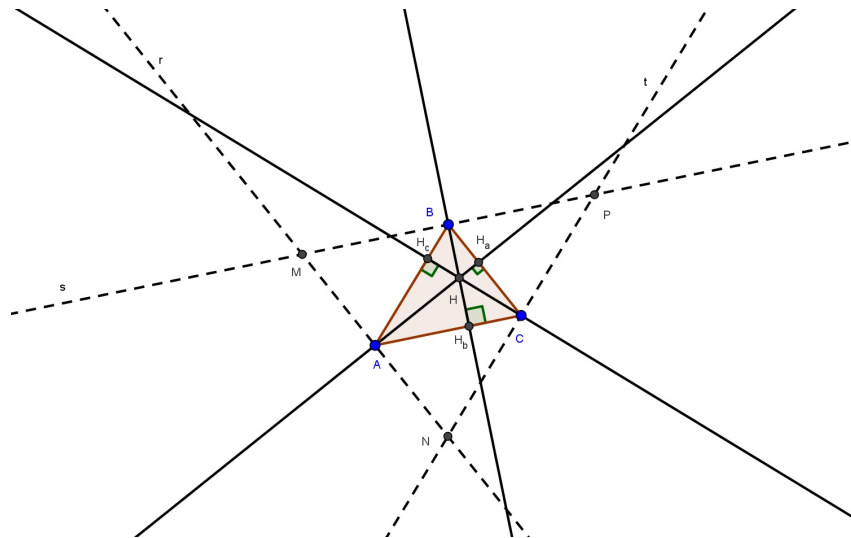


Figura 3.3: H é o ortocentro do triângulo acutângulo ABC.

Dessa forma, temos que $r \cap s = \{M\}$, $r \cap t = \{N\}$, $s \cap t = \{P\}$ e obtemos o $\triangle MNP$. Seja $A \in MN$ e $MN \parallel BC$; $B \in MP$ e $MP \parallel AC$; $C \in NP$ e $NP \parallel AB$. (1)
Por 1) temos que: $AN \parallel BC$ e $AM \parallel BC$; $BP \parallel AC$ e $MB \parallel AC$; $NC \parallel AB$ e $CP \parallel AB$. (2)

Pela *definição 2.6*, um quadrilátero é um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.

Desse modo, pela *proposição 2.3* teremos:

- $ABCN$ é paralelogramo $\Rightarrow \overline{AN} = \overline{BC}$.
- $ACBM$ é paralelogramo $\Rightarrow \overline{BC} = \overline{AM}$.

Logo, $\overline{AN} = \overline{BC} = \overline{AM}$ e portanto A é ponto médio de MN. (3)

Analogamente, mostramos que C é ponto médio de NP e que B é ponto médio de MP.

$\overleftrightarrow{AH_a} \perp BC$ e $MN \parallel BC \Rightarrow AH_a \perp MN$ (4). Por (3) e (4), concluímos que a reta $\overleftrightarrow{AH_a}$ é a mediatriz de MN.

Analogamente, mostramos que a reta $\overleftrightarrow{BH_b}$ é mediatriz de MP e que a reta $\overleftrightarrow{CH_c}$ é mediatriz de NP. Já provamos que as mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam em um único ponto, i.e, são retas concorrentes. Como as alturas do $\triangle ABC$ coincidem com as mediatrizes do $\triangle MNP$, logo temos que as alturas do $\triangle ABC$ devem ser concorrentes e concorrem a um único ponto, i.e, $\overleftrightarrow{AH_a} \cap \overleftrightarrow{BH_b} \cap \overleftrightarrow{CH_c} = \{H\}$.

3º Caso - Seja $\triangle ABC$ um triângulo obtusângulo. Trace, por A, B e C, as retas m , k , n paralelas, respectivamente, aos lados BC, AC e AB.

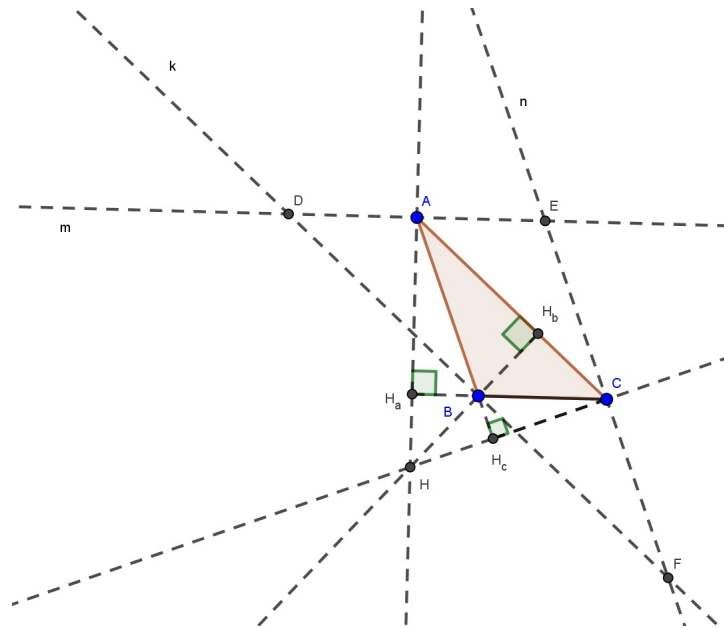


Figura 3.4: H é o ortocentro de um triângulo obtusângulo.

Dessa forma, temos que $m \cap k = \{D\}$, $m \cap n = \{E\}$, $n \cap k = \{F\}$ e obtemos o $\triangle DEF$. Seja $A \in DE$ e $DE \parallel BC$; $B \in DF$ e $DF \parallel AC$; $C \in EF$ e $EF \parallel AB$. **(a)**

Por **(a)** temos que: $AE \parallel BC$ e $DA \parallel BC$; $DB \parallel AC$ e $BF \parallel AC$; $EC \parallel AB$ e $CF \parallel AB$. **(b)**

Pela *definição 2.6*, um quadrilátero é um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.

Desse modo, pela *proposição 2.3* temos:

- $ABCE$ é paralelogramo $\Rightarrow \overline{AE} = \overline{BC}$.
- $ACBD$ é paralelogramo $\Rightarrow \overline{BC} = \overline{AD}$.

Logo, $\overline{AE} = \overline{BC} = \overline{AD}$ e portanto A é ponto médio de MN.(c)

Analogamente, mostramos que C é ponto médio de EF e B é ponto médio de DF.

$\overrightarrow{AH_a} \perp BC$ e $DE \parallel BC \Rightarrow AH_a \perp DE$ (d). Por (c) e (d), concluímos que a reta $\overrightarrow{AH_a}$ é mediatriz de DE.

Da mesma forma, mostramos que a reta $\overrightarrow{BH_b}$ é mediatriz de DF e que a reta $\overrightarrow{CH_c}$ é mediatriz de EF. Já provamos que as mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam em um único ponto, i.e, são retas concorrentes. Como as alturas do $\triangle ABC$ coincidem com as mediatrizes do $\triangle DEF$, logo temos que as alturas $\triangle ABC$ devem ser concorrentes e concorrem a um único ponto, i.e, $\overrightarrow{AH_a} \cap \overrightarrow{BH_b} \cap \overrightarrow{CH_c} = \{H\}$. \square

Considerando que o *triângulo medial* de um $\triangle ABC$ é aquele cujos vértices são os pontos médios dos lados de $\triangle ABC$. E sejam Q, R e S os pontos médios de AB, AC e BC, respectivamente. Logo, $\triangle QRS$ é o triângulo medial do $\triangle ABC$, cujos lados são as bases médias do referido $\triangle ABC$. Assim, teremos uma consequência que será expressa no corolário a seguir.

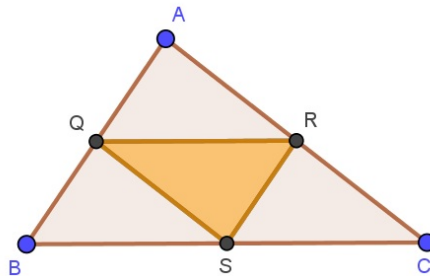


Figura 3.5: $\triangle QRS$ é o triângulo medial do $\triangle ABC$

Corolário 3.1. O circuncentro de um triângulo é o ortocentro de seu triângulo medial.

Demonstração. Com base na proposição 3.2 e seja ABC um triângulo acutângulo, temos que QRS é o triângulo medial de ABC e as mediatrizes de ABC coincidem com as alturas de QRS .

Portanto, o ponto de interseção entre as mediatrizes de ABC (circuncentro) coincidirá com o ponto de interseção entre as alturas de QRS (ortocentro). Para os demais casos, em que ABC será retângulo ou obtusângulo, as demonstrações são análogas. \square

Definição 3.3. O ponto de encontro das bissetrizes internas de um triângulo qualquer é chamado de *incentro*.

Proposição 3.3. As três bissetrizes internas de um triângulo qualquer intersectam-se num mesmo ponto, o qual está a igual distância dos lados do triângulo.

Demonstração. Dado ABC , um triângulo qualquer e sejam r , s e t , respectivamente, as bissetrizes internas dos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$.

Entende-se que bissetriz do ângulo é o LG dos pontos do plano que equidistam dos lados de um ângulo desse plano. Seja $r \cap s = \{I\}$, então como $I \in r$ temos que I tem a mesma distância em relação aos lados AB e AC (i).

Analogamente, como $I \in s$ então I tem a mesma distância em relação aos lados AB e BC (ii).

Por (i) e (ii), concluímos que I equidista dos lados AC e BC . Logo, concluímos que I pertence a bissetriz do ângulo $\angle C$, isto é, $I \in t$. Dessa forma, temos que as retas r , s e t são retas concorrentes e concorrem num mesmo ponto.

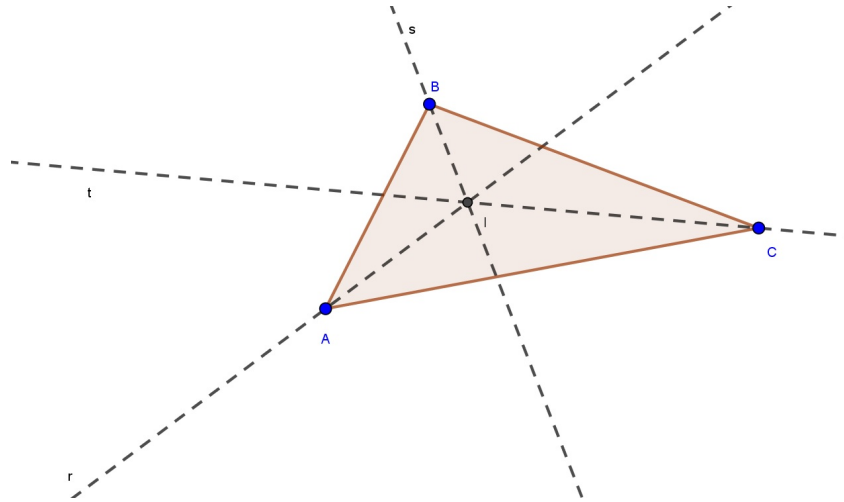


Figura 3.6: I é o incentro de um triângulo.

□

Definição 3.4. O ponto de encontro das medianas de um triângulo qualquer é chamado de *baricentro*.

Proposição 3.4. As três medianas de um triângulo qualquer intersectam-se num mesmo ponto, o qual divide cada mediana em duas partes, tais que a que contém o vértice é o dobro da outra parte.

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer, M_1, M_2 e M_3 , respectivamente, os pontos médios dos lados BC, AC, AB . Considerando AM_1, BM_2 e CM_3 as medianas deste triângulo, temos que $AM_1 \cap CM_3 = \{G_1\}$. Sejam P e Q os pontos médios de AG_1 e CG_1 .

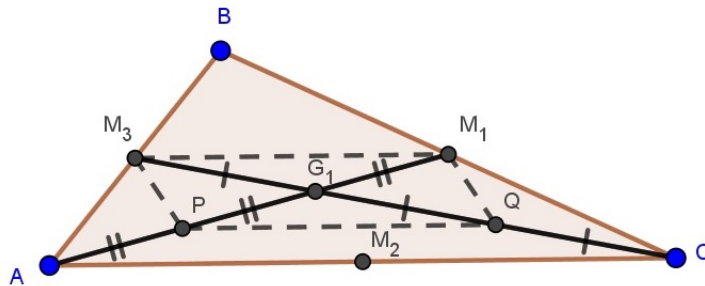


Figura 3.7: G_1 é o ponto de encontro das medianas AM_1 e CM_3 .

Temos que M_3M_1 será a base média do $\triangle ABC$ relativa ao lado AC e PQ a base média do $\triangle AG_1C$, pelo Teorema 2.3.1 (*Teorema da base média*) temos que $\overline{M_3M_1} \parallel \overline{AC}$, $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$, $\overline{PQ} = \frac{\overline{AC}}{2}$ e $\overline{M_3M_1} = \frac{\overline{AC}}{2}$. Logo, concluímos que $\overline{PQ} = \overline{M_3M_1}$, $\overline{M_3M_1} \parallel \overline{PQ}$ e pela proposição 2.5 temos que o quadrilátero M_3M_1QP é um paralelogramo.

Pela proposição 2.4, temos que as diagonais do paralelogramo se intersectam nos seus pontos médios. Seja G_1 o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo M_3M_1QP (ver figura 3.7), logo temos: $\overline{PG_1} = \overline{G_1M_1}$, $\overline{M_3G_1} = \overline{G_1Q}$. No entanto, P e Q são pontos médios de $\overline{AG_1}$ e $\overline{CG_1}$, respectivamente. Dessa forma, $\overline{AP} = \overline{PG_1} = \overline{G_1M_1}$ e $\overline{CQ} = \overline{QG_1} = \overline{G_1M_3}$. Logo, $\overline{AG_1} = 2\overline{G_1M_1}$ e $\overline{CG_1} = 2\overline{G_1M_3}$. (a)

Seja M_2 o ponto médio de AC e $BM_2 \cap CM_3 = \{G_2\}$, ou seja, G_2 é o ponto de interseção entre as medianas BM_2 e CM_3 .

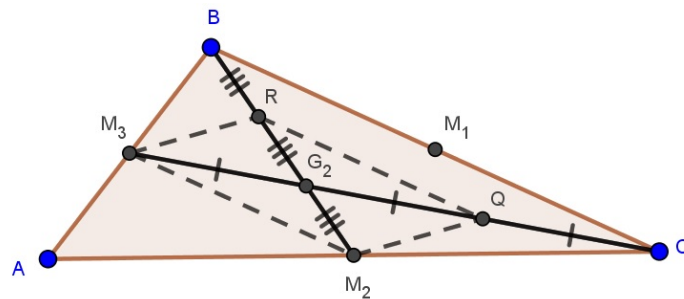


Figura 3.8: G_2 é o ponto de encontro entre as medianas BM_2 e CM_3 .

De modo análogo, mostraremos que $\overline{BR} = \overline{RG_2} = \overline{G_2M_2}$ e $\overline{CQ} = \overline{QG_2} = \overline{G_2M_3}$, conseqüentemente $\overline{BG_2} = 2\overline{G_2M_2}$ e $\overline{CG_2} = 2\overline{G_2M_3}$. (b)

Dessa forma, por (a) temos $\overline{CG_1} = 2\overline{G_1M_3}$ e por (b) obtemos que $\overline{CG_2} = 2\overline{G_2M_3}$, o que mostra que $G_1 \equiv G_2$. Assim, denotemos por G o ponto $G_1 \equiv G_2$ e teremos que as medianas AM_1 , BM_2 e CM_3 concorrem no mesmo ponto G , o qual divide cada mediana em duas partes, tais que a que contém o vértice é o dobro da outra parte.

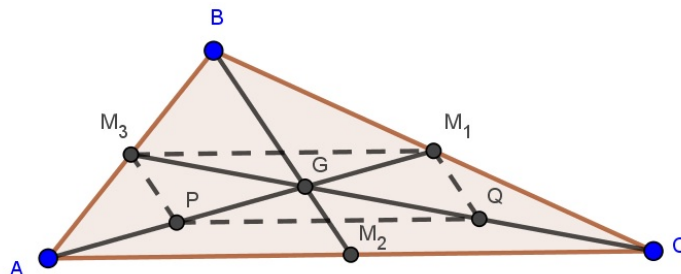


Figura 3.9: G é o baricentro do triângulo ABC .

□

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo propusemos algumas atividades que tratam dos pontos notáveis do triângulo, bem como de alguns conceitos relevantes, tais como: altura, mediana, pé da altura, perpendicular, dentre outros. Todas as atividades foram resolvidas com e sem o uso do GeoGebra.

O objetivo deste trabalho é propor o uso do GeoGebra como recurso didático no estudo dos pontos notáveis do triângulo. Desta forma, essa ferramenta auxiliará os alunos, que de posse de conhecimentos prévios adquiridos, serão estimulados a construir as figuras, explorar as mesmas, usar as hipóteses e por fim obter os resultados dos problemas propostos.

Nas resoluções feitas com o uso do GeoGebra foram elaborados roteiros para as atividades, os quais trazem todos os passos necessários descritos, para isso utilizamos alguns recursos vistos em [4].

Na atividade a seguir, faremos a demonstração da proposição adotando os procedimentos citados anteriormente.

1) Sejam ABC um triângulo e P , M e H respectivamente os pés da bissetriz interna, mediana e altura relativas ao lado BC . Se P e H ou M e H coincidirem, prove que ABC é isósceles de base BC .

Demonstração. Suponha que P e H coincidam, conforme figura abaixo.

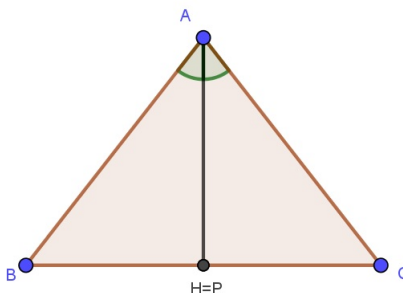


Figura 4.1: $\triangle ABC$ dado que P e H coincidem.

Sendo $\widehat{BAP} \equiv \widehat{CAP}$, $\widehat{CHA} = \widehat{BHA} = 90^\circ$ e seja AH um lado comum aos triângulos BAH e CAH . Logo, pelo caso de congruência ALA temos que $\triangle BAH \equiv \triangle CAH$. Portanto, $\overline{BA} = \overline{CA}$ e assim temos que $\triangle ABC$ é isósceles de base BC .

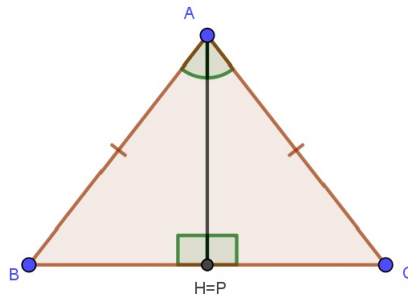


Figura 4.2: $\triangle ABC$ é isósceles de base BC.

Por outro lado, suponhamos agora que M e H coincidam.

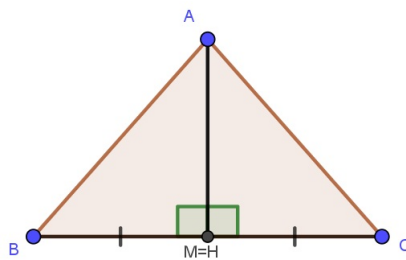


Figura 4.3: $\triangle ABC$ dado que M e H coincidem.

Seja $\overline{BM} = \overline{CM}$, $\widehat{BMA} = \widehat{CMA} = 90^\circ$ e sendo AM um lado comum, temos pelo caso de congruência LAL que $\triangle BAM \cong \triangle CAM$. Portanto, $\overline{BA} = \overline{CA}$ e assim temos que ABC é isósceles de base BC.

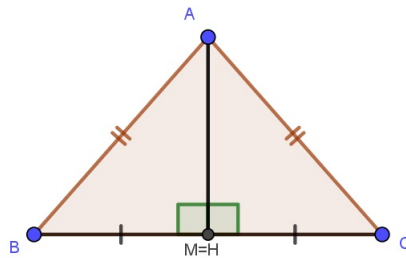


Figura 4.4: $\triangle ABC$ é isósceles de base BC.

□

Utilizando o *GeoGebra*, o primeiro passo seria desenharmos um triângulo ABC qualquer, para isso utilizaremos a ferramenta *Polígono*. Em seguida, determine o ponto P que corresponde ao pé da bissetriz interna, para obtermos esse ponto basta através da ferramenta *Bissetriz*, identificarmos a bissetriz do ângulo \widehat{BAC} e com o uso da ferramenta *Interseção entre dois objetos* obtemos o ponto P, gerado pela interseção da bissetriz do ângulo citado com o segmento de reta BC, conforme indicado na *figura 4.5*. Caso não seja P o ponto fornecido pelo GeoGebra, basta renomeá-lo clicando com o botão direito do mouse sobre o ponto dado.

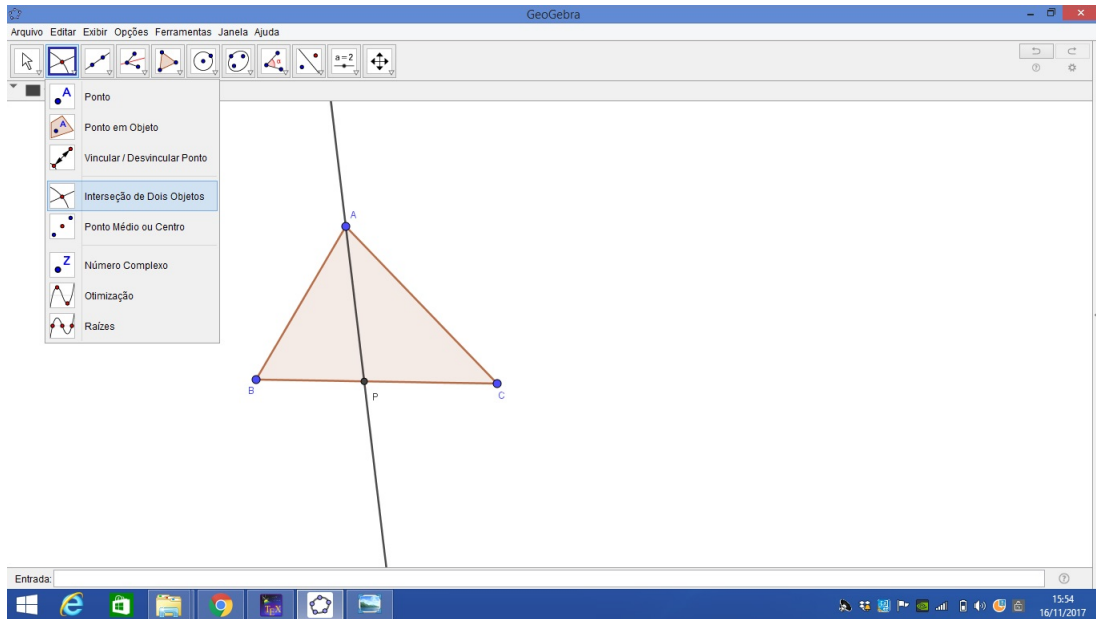


Figura 4.5: $\triangle ABC$ qualquer, em que P é o pé da bissetriz de \widehat{BAC} .

Para obtermos o ponto H que é o pé da altura, na barra de ferramentas selecionamos *Reta perpendicular*, em seguida clicamos no vértice A e no lado oposto a este vértice (Segmento BC). Feito isto, selecionamos a ferramenta *Interseção entre dois objetos*, clicando na reta perpendicular que fora obtida e no lado BC, daí teremos o ponto H, conforme figura 4.6.

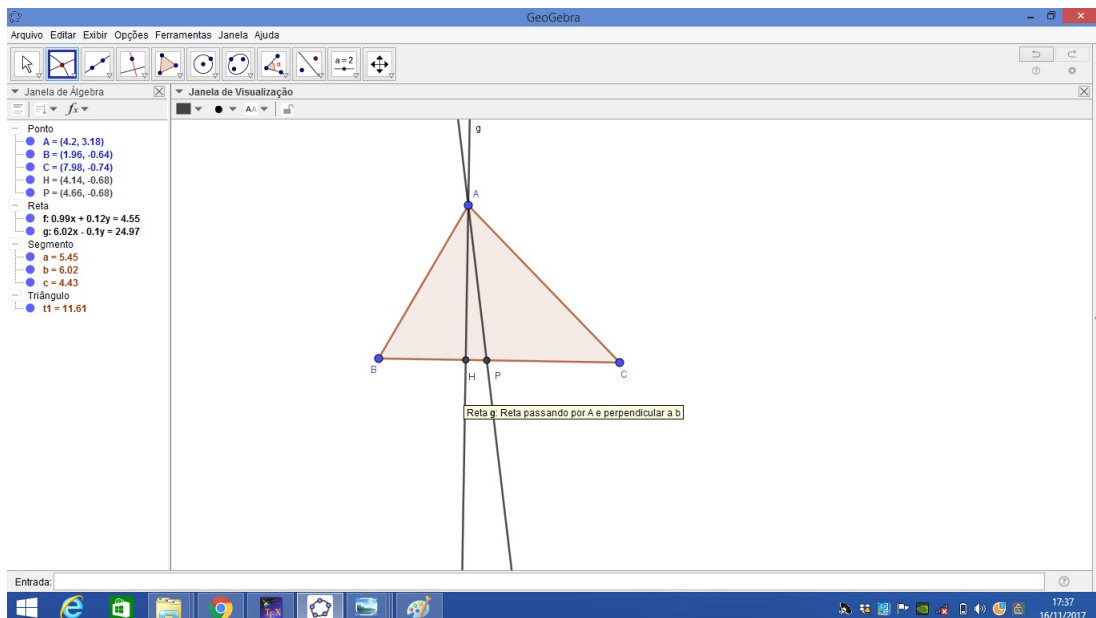


Figura 4.6: $\triangle ABC$ qualquer, em P é o pé da bissetriz de \widehat{BAC} e H é o pé da altura do triângulo em relação ao vértice A.

Por hipótese temos que ***P e H coincidem***, para obtermos $P=H$ no GeoGebra, na barra de ferramentas selecionamos a ferramenta *Mover ponto*, selecionando agora um dos vértices do triângulo e o movendo faremos com que o ponto P coincida com H.

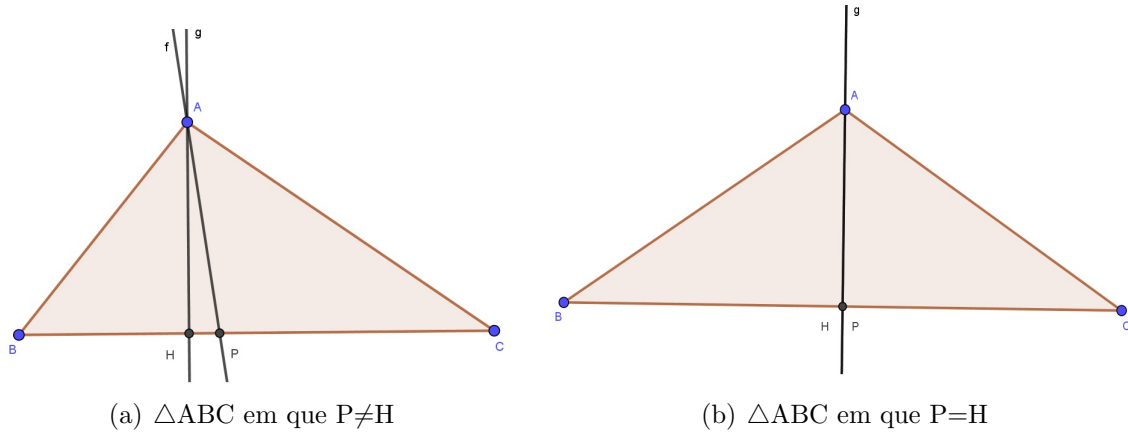


Figura 4.7: Movemos um dos vértices até que os pontos P e H coincidam.

Desta forma teremos que: $\widehat{BAP} = \widehat{CAP}$ (1) e $\overline{BA} = \overline{CA}$ (2)

Para verificarmos o resultado obtido em (1), basta selecionarmos a ferramenta *Ângulo* e em seguida os pontos B, A e P, obtemos dessa forma o ângulo \widehat{BAP} , repetimos o procedimento selecionando agora os pontos C, A e P, obtendo assim o ângulo \widehat{CAP} . Analogamente, selecionamos a mesma ferramenta e adotamos o mesmo procedimento selecionando os pontos A, P, B e em seguida os pontos C, P e A. E como \overline{AP} é bissetriz do \widehat{BAC} , então temos que $\widehat{BAP} = \widehat{CAP}$ e $\widehat{APB} = \widehat{CPA} = 90^\circ$, conforme a *figura 4.8*.

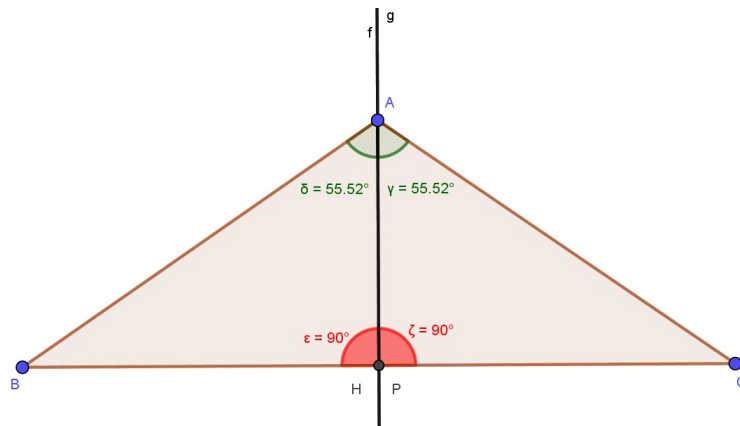


Figura 4.8: Por ALA temos que $\widehat{BAP} \cong \widehat{CAP} \Rightarrow \overline{BA} = \overline{CA}$.

Pela figura 4.8, temos que $\widehat{BAP} = \widehat{CAP}$, $\widehat{APB} = \widehat{CPA} = 90^\circ$ e que AP é um lado comum aos triângulos BAP e CAP. Logo, pelo caso de congruência ALA temos que $\triangle BAP \cong \triangle CAP \Rightarrow \overline{BA} = \overline{CA}$.

No GeoGebra podemos digitar no campo *Entrada* o comando $\text{Segmento}[B,A]$, em seguida utilizamos o mesmo comando para $\text{Segmento}[C,A]$, o software calculará a distância entre os pontos, isto é, as medidas dos segmentos BA e CA. Assim, concluímos que $\overline{BA}=\overline{CA}$ e que o triângulo é isósceles e de base BC.

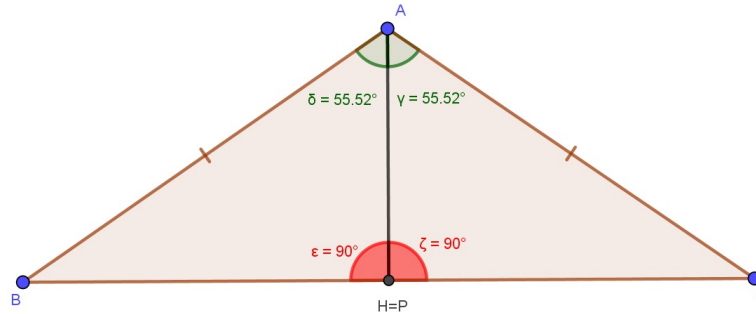


Figura 4.9: $\triangle ABC$ é isósceles de base BC.

Analogamente, ao que foi feito para o 1º caso, no qual se P e H coincidem então obtemos um triângulo ABC isósceles e de base BC. Desenharemos um triângulo ABC qualquer e utilizaremos as mesmas ferramentas utilizadas no caso anterior, a saber: *Polígono* (para desenhar o triângulo), *Reta perpendicular* passando pelo vértice A e perpendicular ao lado BC e por último *Interseção entre dois objetos* obtendo desta forma o ponto H, que corresponde ao pé da altura em relação ao lado BC. Seleccionamos *Ângulo* na barra de ferramentas e clicamos sobre os pontos C, H, A e A, H e B, desta forma obtemos as medidas dos ângulos \widehat{CHA} e \widehat{AHB} , respectivamente.

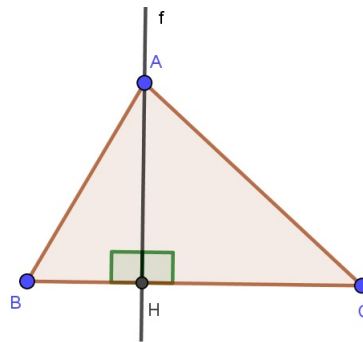


Figura 4.10: $\triangle ABC$ dado que H é o pé da altura em relação ao lado BC.

Com o uso da ferramenta *Ponto Médio ou Centro* e clicando nos pontos B e C, encontramos o ponto D (ponto médio de BC) e em seguida renomeamos o mesmo para M. Seleccionando *Segmento*, bem como os pontos A e M, obtemos o segmento AM.

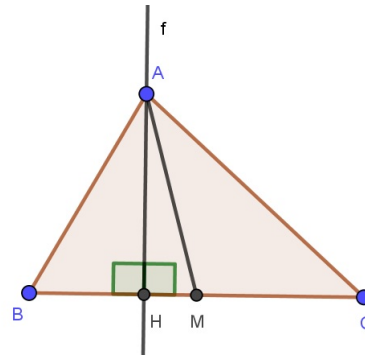


Figura 4.11: $\triangle ABC$ dado que H é o pé da altura em relação ao lado BC e M é o ponto médio de BC.

Analogamente ao que foi feito no 1º caso, temos que para obtermos $M=H$ no GeoGebra, na barra de ferramentas selecionamos a ferramenta *Mover ponto*, selecionando agora um dos vértices do triângulo e o movendo faremos com que o ponto M coincida com H.

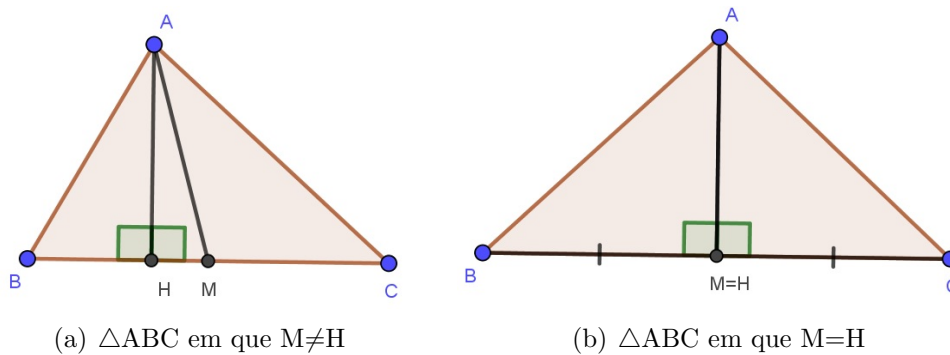


Figura 4.12: Movemos um dos vértices até que os pontos M e H coincidam.

Pela figura 4.12(b), temos que $\overline{BM} = \overline{MC}$, $\widehat{BMA} = \widehat{CMA} = 90^\circ$ e AM é um lado comum aos triângulos BAM e CAM. Logo, pelo caso de congruência LAL, podemos concluir que $\triangle BAM \equiv \triangle CAM$.

No GeoGebra podemos digitar no campo *Entrada* o comando `Segmento[B,A]`, em seguida utilizamos o mesmo comando para `Segmento[C,A]`, o software calculará a distância entre os pontos, isto é, as medidas dos segmentos BA e CA. Assim, concluímos que $\overline{BA} = \overline{CA}$ e que o triângulo é isósceles e de base BC.

A seguir, propomos o teorema que fala sobre a *Reta de Euler*, que é a reta que passa pelo Ortocentro (H), Baricentro (G) e pelo Circuncentro (O). Demonstraremos o teorema com e sem o uso do GeoGebra, mostrando o quão interessante pode se tornar o uso deste software em sala de aula para favorecer a aprendizagem dos alunos.

2) Mostre que em um triângulo ABC qualquer, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro são colineares. O baricentro está entre o ortocentro e o circuncentro e sua distância ao ortocentro é o dobro de sua distância ao circuncentro.

Demonstração. Podemos classificar um triângulo quanto aos lados em: equilátero, isósceles e escaleno. Logo, teremos três casos a considerar.

1º Caso Seja ABC um triângulo equilátero, conforme figura 4.13. Temos que as medianas, as alturas e as mediatrizes coincidem, o que nos leva a concluir que o baricentro, o ortocentro e o circuncentro também coincidem. No entanto para traçarmos uma reta precisamos de dois pontos distintos, desta forma podemos afirmar que não será possível construir a Reta de Euler para um triângulo equilátero.

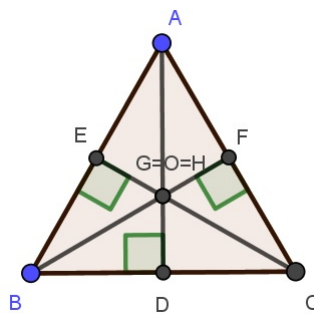


Figura 4.13: $\triangle ABC$ equilátero dado que G, H e O coincidem.

2º Caso Seja ABC um triângulo isósceles de base BC, temos que a mediana, a mediatriz e a altura relativas a base BC coincidem. Desta forma, temos que o baricentro, o ortocentro e o circuncentro deste triângulo pertencem a um mesmo segmento, conforme figura 4.14. Assim, a reta que contém esse segmento é denominada *Reta de Euler*.

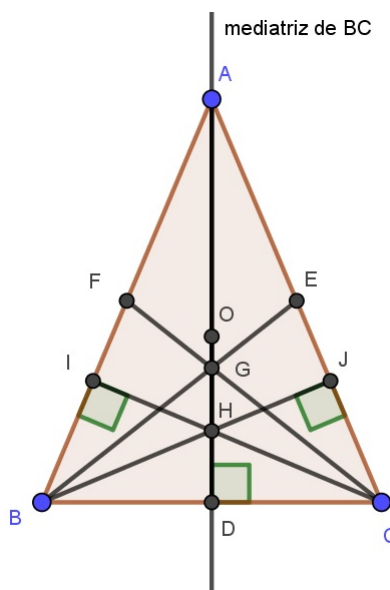


Figura 4.14: $\triangle ABC$ isósceles dado que G, H e O pertencem a mesma reta.

Vale ressaltar que podemos classificar quanto aos ângulos, um triângulo isósceles e de base BC como o proposto neste caso em: acutângulo, retângulo ou obtusângulo. E em seguida, verificar por construção que os pontos G, H e O são colineares.

3° Caso Dado um triângulo ABC escaleno. Tal como no caso anterior podemos classificar este triângulo, quanto aos ângulos em: acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

Considere ABC um triângulo escaleno, de base BC e tal que esse triângulo seja acutângulo. Sejam A' e o ponto médio do lado BC, G o baricentro e O o circuncentro do triângulo obtidos por construção. Seja AA' a mediana relativa ao lado BC, $G \in AA'$. Sendo D o ponto de interseção entre a mediatriz relativa ao lado BC e o lado AC, isto é, $\overleftrightarrow{A'D} \cap AC = D$ e seja $O \in \overleftrightarrow{A'D}$, já que O é o circuncentro do triângulo ABC. Sendo a mediana e a mediatriz relativas ao lado BC distintas, logo temos que G e O também são pontos distintos, conforme *figura 4.15*.

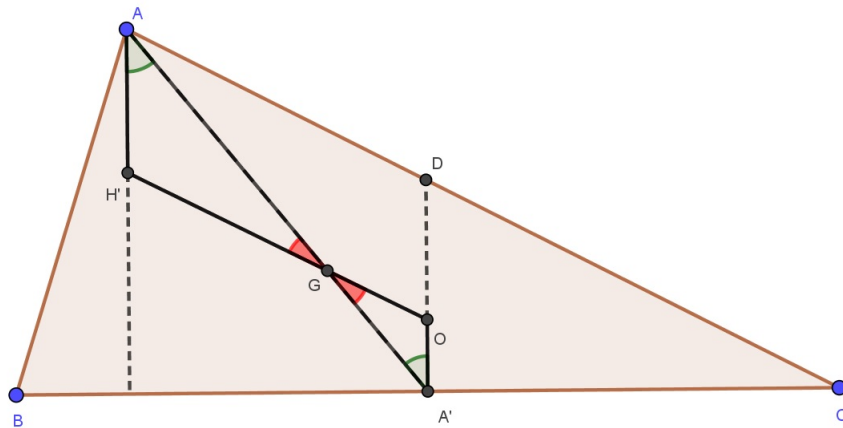


Figura 4.15: $\triangle ABC$ escaleno dado que G, H e O pertencem a mesma reta.

Consideremos r a reta que passa pelos pontos O e G. Seja H' um ponto pertencente a semirreta OG tal que $\overline{GH'} = 2\overline{GO}$. Trace por A uma reta que passe por H'.

Como $\overline{GH'} = 2\overline{GO}$ (por construção), $\widehat{AGH'} = \widehat{A'GO}$ (o.p.v.) e $\overline{AG} = 2\overline{GA'}$ (propriedade do baricentro), logo pelo caso de semelhança LAL temos que $\triangle GH'A$ e $\triangle GOA'$ são semelhantes. Portanto, $\widehat{GAH'} = \widehat{GA'O}$. Assim, a reta que contém o segmento AH' e $\overleftrightarrow{A'D}$ são paralelas e H' é um ponto que pertence a altura relativa ao lado BC.

Analogamente, tomaremos a mediana e a mediatriz relativas ao lado AC. Sendo B' o ponto médio de AC, BB' e $\overleftrightarrow{B'O}$, respectivamente, a mediana e a mediatriz relativas ao lado AC. Considere H' um ponto pertencente a semirreta OG tal que $\overline{GH'} = 2\overline{GO}$ (por construção), $\widehat{BGH'} = \widehat{B'GO}$ (o.p.v.) e $\overline{BG} = 2\overline{GB'}$ (propriedade do baricentro), vide *figura 4.16*.

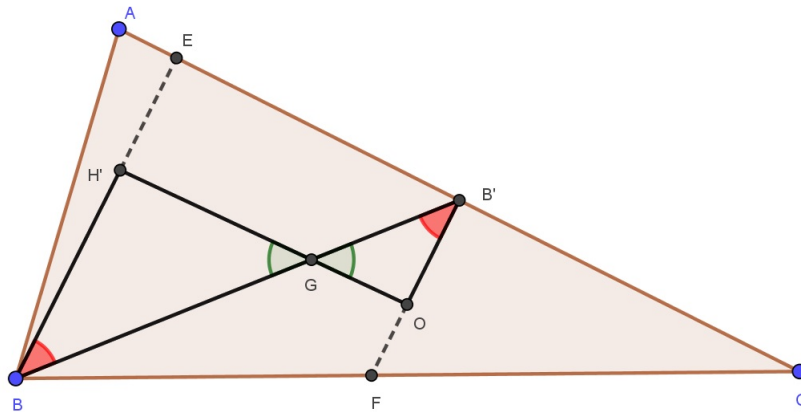


Figura 4.16: $\triangle ABC$ escaleno dado que G, H e O pertencem a mesma reta.

Logo, pelo caso de semelhança LAL temos que $\triangle GH'B$ e $\triangle GOB'$ são semelhantes. Portanto, $\widehat{GBH'} = \widehat{GB'O}$. Assim, a reta que contém o segmento BH' e $\overleftrightarrow{B'O}$ são paralelas e H' é o ponto pertencente a altura relativa ao lado de AC.

Como H' é o ponto que corresponde a interseção de duas alturas do $\triangle ABC$, logo temos que $H' = H$, que é denominado de ortocentro. Desta forma, podemos concluir que o circuncentro, o ortocentro e o baricentro são colineares e que a reta que passa por esses pontos é denominada *Reta de Euler*.

Por outro lado, considerando a unicidade do ortocentro (por construção) temos que o baricentro está entre o ortocentro e o circuncentro e que $\overline{GH} = 2\overline{GO}$. Vale ressaltar que as demonstrações para os triângulos escalenos obtusângulos ou triângulos escalenos retângulos são análogas a esta. \square

Utilizando o *GeoGebra* para verificar a validade de tal teorema faremos alguns passos. O primeiro deles é desenhar um triângulo qualquer, clicando na Barra de ferramentas em *Polígono*, obtendo desta forma o triângulo ABC de base BC. Em seguida, utilizando a ferramenta *Ponto Médio ou Centro*, clique nas extremidades de cada segmento, a saber: AB, AC e BC, assim determinamos os pontos médios dos lados do referido triângulo. O próximo passo é ligar os vértices aos pontos médios dos lados opostos a estes vértices, para isso fazemos uso da ferramenta *Segmento*. Assim, obtemos as medianas do $\triangle ABC$ e usando a ferramenta *Interseção de dois objetos* determinamos o ponto G (Baricentro de $\triangle ABC$), conforme *figura 4.17*.

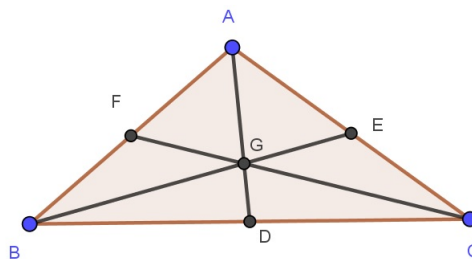


Figura 4.17: $\triangle ABC$ qualquer dado que G é o baricentro.

Deve-se clicar na ferramenta *Mediatriz* e em seguida nas extremidades de cada lado do triângulo. Feito isso clicamos em *Interseção de dois objetos* e em duas mediatrizes quaisquer para obtermos o ponto O , que é o circuncentro do triângulo, ver figura 4.18. Caso o ponto obtido não seja o ponto O , é necessário renomear, para isto basta clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto e selecionar *Renomear*, digitando a letra desejada.

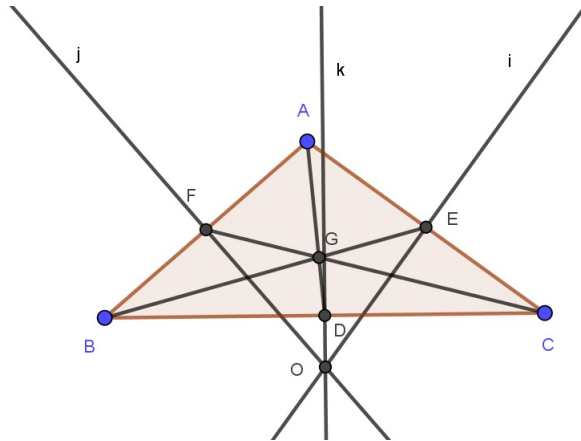


Figura 4.18: $\triangle ABC$ qualquer dado que G é o baricentro e O é circuncentro.

Selecionamos *Reta perpendicular* e clicamos nos vértices do triângulo e em cada um dos lados opostos a estes vértices. Por fim, deve-se clicar na ferramenta *Interseção de dois objetos* e em seguida em duas das retas perpendiculares e obtenha o ponto H .

Para uma melhor visualização ocultaremos a mediana AD e no campo *Entrada* digitaremos o comando $\text{Reta}(O,H)$, o GeoGebra desenhará a reta e notaremos que a mesma passa pelo ponto G . Logo, temos que O , G e H são colineares, conforme figura 4.19.

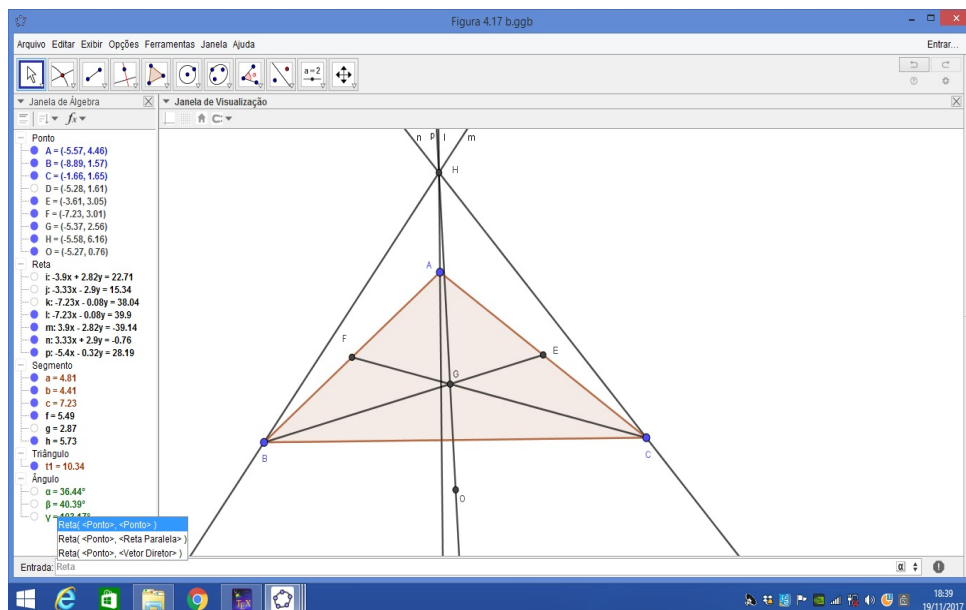


Figura 4.19: $\triangle ABC$ qualquer dado que G é o baricentro, O é circuncentro e H é o ortocentro.

No campo *Entrada* digitaremos o comando $\text{Segmento}(G,H)$ para determinarmos a distância dos pontos G ao H, faremos o mesmo procedimento para determinar a distância entre os pontos G e O, digitando o comando $\text{Segmento}(G,O)$. Assim, obtemos $\overline{GH} = 2\overline{GO}$.

Sabemos que um triângulo pode ser classificado quanto aos lados em: equilátero, isósceles ou escaleno. Sendo assim temos duas alternativas para obtermos um triângulo ABC equilátero, a saber: podemos construir um triângulo equilátero utilizando as ferramentas já apresentadas ou utilizando a ferramenta *Mover*, selecionamos os vértices, movendo-os até que tenhamos um triângulo equilátero, conforme *figura 4.20*.

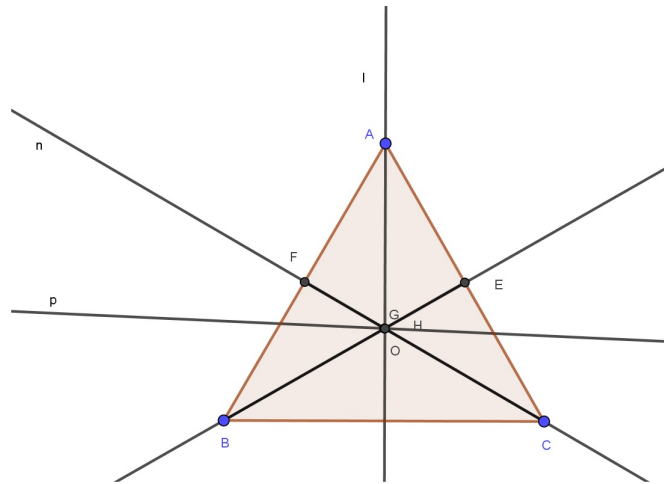


Figura 4.20: $\triangle ABC$ é equilátero.

Note que neste caso, os pontos G, H e O coincidem e portanto temos que não há formação da Reta de Euler em um triângulo equilátero, pois para termos uma reta é necessário pelo menos 2 pontos distintos.

Para obtermos um triângulo isósceles, os procedimentos são os mesmos adotados no primeiro caso, citado anteriormente. Vale ressaltar que dado ABC um triângulo isósceles, este pode ser classificado quanto aos ângulos em: acutângulo, obtusângulo ou retângulo, e continuam válidas a colinearidade entre os pontos G, O e H, bem como a relação $\overline{GH} = 2\overline{GO}$. Veja a seguir as *figuras 4.21 e 4.22*.

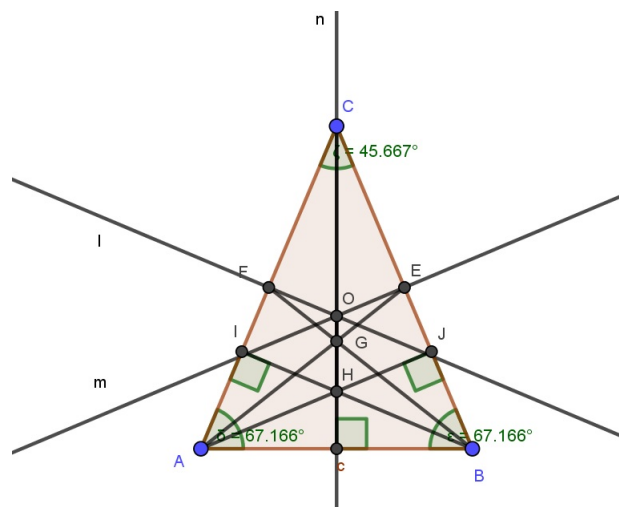


Figura 4.21: $\triangle ABC$ dado que é isósceles e acutângulo.

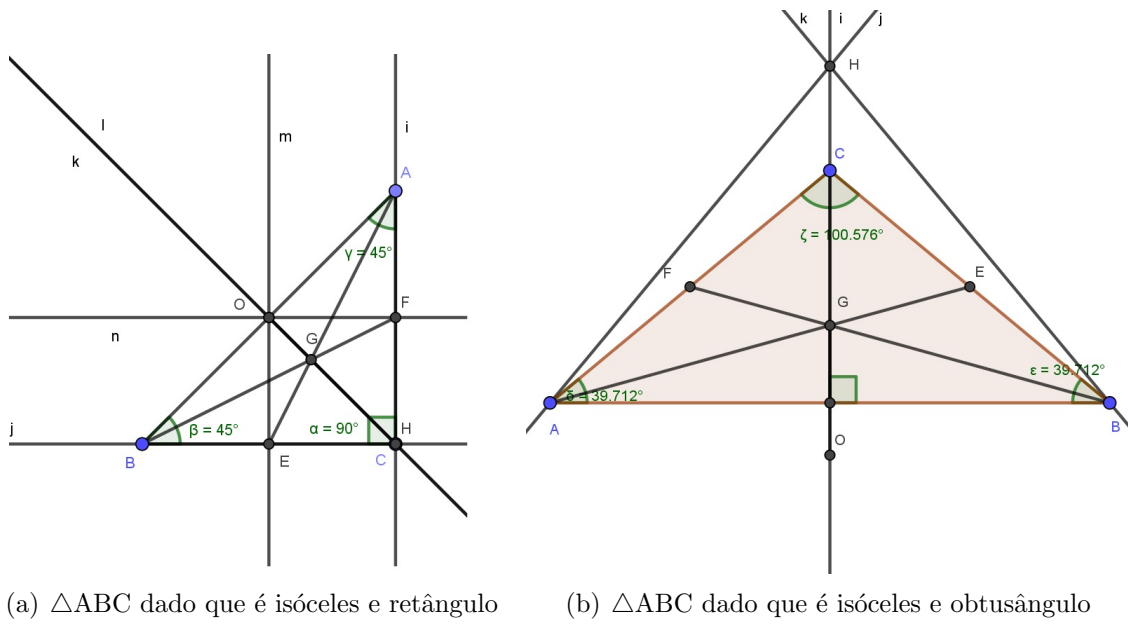


Figura 4.22

Para obtermos um triângulo escaleno, os procedimentos também são os mesmos adotados no primeiro caso, citado anteriormente. Também vale ressaltar que dado ABC um triângulo escaleno, este pode ser classificado quanto aos ângulos em: acutângulo, obtusângulo ou retângulo, e continuam válidas a colinearidade entre os pontos G , O e H , bem como a relação $\overline{GH} = 2\overline{GO}$. Veja a seguir as *figuras 4.23 e 4.24*.

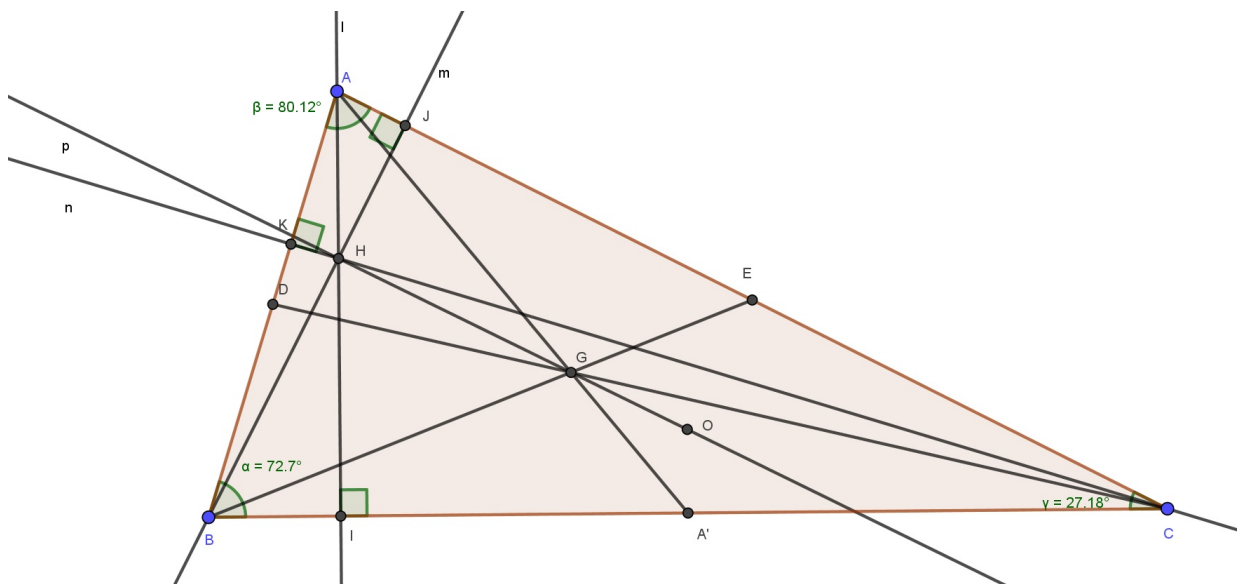


Figura 4.23: $\triangle ABC$ dado que é escaleno e acutângulo.

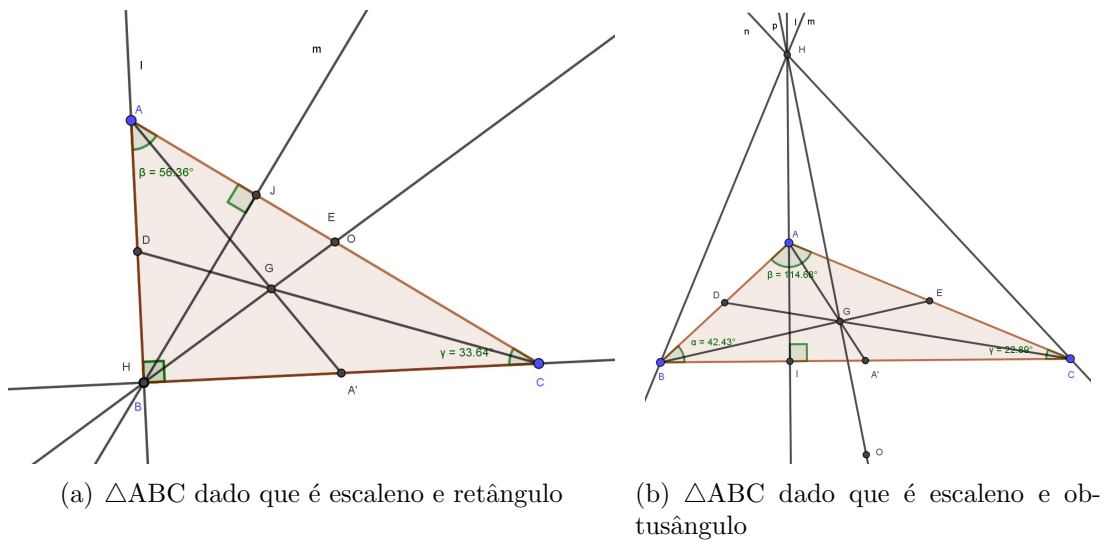


Figura 4.24

Na atividade abaixo, utilizaremos os mesmos procedimentos adotados nas atividades anteriores, demonstrando a proposição **com** e **sem** o uso do GeoGebra.

3) Uma reta r passa pelo baricentro de um triângulo ABC deixando o vértice A em um semiplano e os vértices B e C no outro semiplano determinado por r . As projeções de A , B e C sobre a reta r são M , N e P , respectivamente. Prove que $\overline{AM} = \overline{BN} + \overline{CP}$.

Demonstração. Por meio do uso de régua e compasso, determinamos o baricentro do triângulo ABC e as projeções relativas aos vértices A , B e C sobre a reta r , representadas pelos pontos M , N e P , respectivamente, conforme *figura 4.25*.

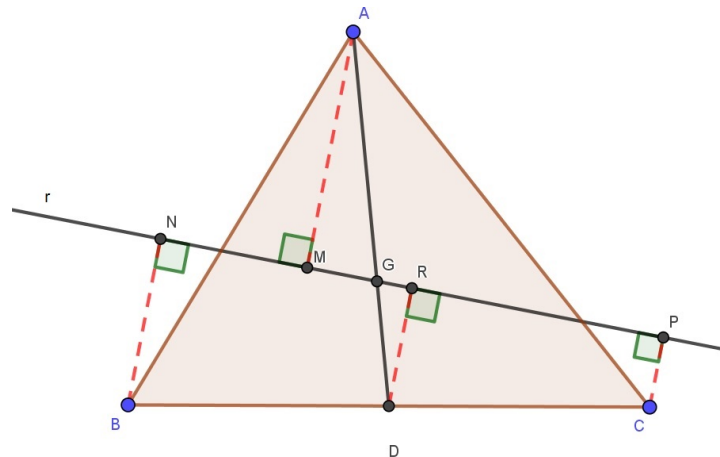


Figura 4.25: Ilustração da atividade 3

Como $BN \perp r$ e $CP \perp r$ então temos que $BN \parallel CP$. Por outro lado, $NP \parallel BC$. Logo, podemos concluir que $BNPC$ é um trapézio.

Seja D o ponto médio de BC , determinamos o ponto médio de NP e denotamos o mesmo por R . Dessa forma, temos que DR é base média de $BNPC$ e utilizando o teorema da base média temos: $\overline{DR} = \frac{\overline{BN} + \overline{CP}}{2}$ (a).

Nota-se que $\triangle MAG \sim \triangle RDG$, pelo caso AA de semelhança, já que $\widehat{AMG} = \widehat{DRG} = 90^\circ$ e $\widehat{AGM} = \widehat{DGR}$ (o.p.v.). Como AD é mediana do $\triangle ABC$, sendo $G \in AD$ e tal que G é o baricentro de $\triangle ABC$. Logo, $\overline{AG} = 2\overline{GD}$, i.e., a razão de semelhança dada por: $\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = \frac{2\overline{GD}}{\overline{GD}} = 2$.

Assim, $\frac{\overline{AM}}{\overline{DR}} = 2 \Rightarrow \overline{AM} = 2\overline{DR}$ (b). Por (a) temos que $\overline{BN} + \overline{CP} = 2\overline{DR}$ e por (b) $\overline{AM} = 2\overline{DR}$. Logo, $\overline{BN} + \overline{CP} = 2\overline{DR} = \overline{AM}$. □

Para verificarmos a validade de tal proposição através do uso do *GeoGebra* faremos alguns passos. Primeiro desenharemos um triângulo qualquer, clicando na barra de ferramentas em *Polígono*, assim obtemos um triângulo ABC de base BC. Em seguida, utilizaremos os mesmos procedimentos adotados na atividade anterior, para determinarmos as três medianas do triângulo ABC e conseqüentemente o *baricentro* (G).

Feito isso devemos clicar na barra de ferramentas em *Reta*, selecionarmos o ponto G e um outro ponto qualquer, de modo que assim seja possível obtermos uma reta que passa pelo baricentro do triângulo ABC. Essa reta deverá ser representada pela letra *r*, caso o software tenha representado tal reta por outra letra, é possível alterarmos clicando sobre a reta com o botão direito do mouse e em seguida selecionar a opção *Renomear*.

Dessa forma, teremos os dois semiplanos, a saber: um deles determinado pela reta *r* e pelo vértice A e o outro por *r* e pelos vértices B e C. Vale ressaltar que devemos ocultar as medianas que partem dos vértices B e C, bem como os pontos médios dos lados opostos a tais vértices, conforme *figura 4.26*.

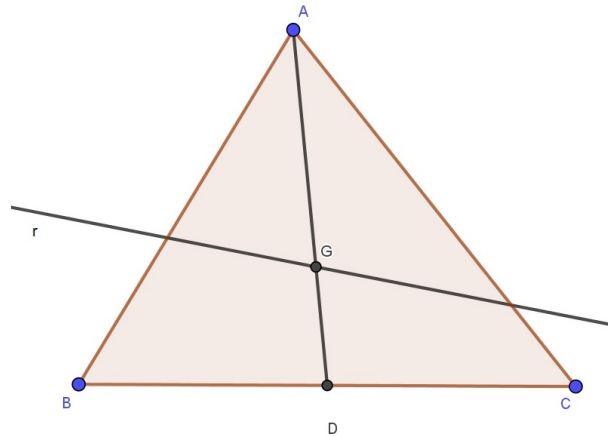


Figura 4.26: Ilustração da atividade 3

Para obter as projeções de A, B e C sobre a reta *r*, basta selecionar a ferramenta *Reta perpendicular* e clicar em todos os vértices do triângulo ABC. Em seguida, deve-se selecionar a ferramenta *Interseção de dois objetos*, clicar em cada reta perpendicular a um vértice do triângulo e por último sobre a reta *r*, obtendo dessa forma os pontos M, N e P, conforme *figura 4.27*.

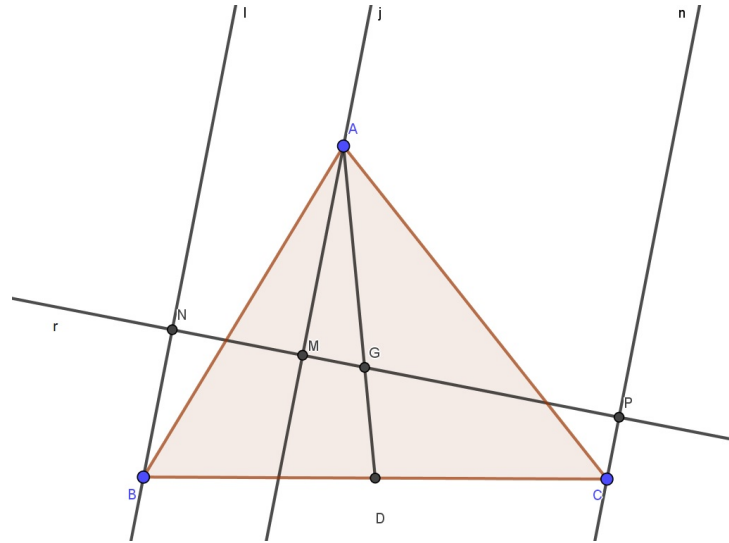


Figura 4.27: Ilustração da atividade 3

Obtidos tais pontos ocultaremos as retas perpendiculares à reta r e que passam por A , B e C . No campo *Entrada* digitaremos o comando $\text{Segmento}(A,M)$, clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento AM e selecionando *Propriedades, Estilo*, para efetuar a alteração para linha tracejada. O mesmo procedimento deverá ser adotado para obter os segmentos BN e CP . Há também a possibilidade de alterar a cor, o que pode ser feito ao clicar sobre o segmento desejado, selecionando *Propriedades*, em seguida na aba *Cor* e clicando na cor desejada, conforme figura 4.28.

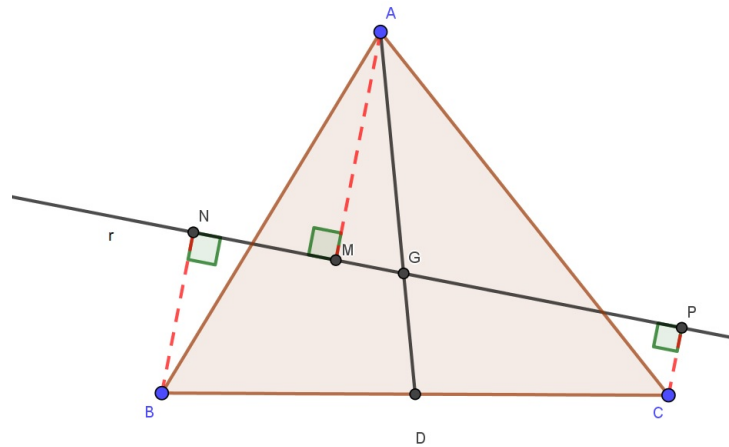


Figura 4.28: Ilustração da atividade 3

No campo *Entrada* digitaremos o comando $\text{Dist\~{a}ncia}(A,M)$ para obtermos o comprimento do segmento AM , analogamente utilizando o mesmo comando obtemos os comprimentos dos segmentos BN e CP . Assim, mostramos que $\overline{AM} = \overline{BN} + \overline{CP}$.

Para a próxima atividade proposta, de modo análogo as atividades anteriores, com e sem o uso do GeoGebra, mostraremos que a proposição é válida.

4) Seja ABC um triângulo de ortocentro H , incentro I e circuncentro O . Mostre que ABC é equilátero se, e só se, dois quaisquer dos pontos H , I e O coincidirem.

Demonstração. \Leftarrow Suponha que H e I coincidam e sejam D , E e F , os pés das alturas relativas aos vértices A , B e C , respectivamente, conforme *figura 4.29*.

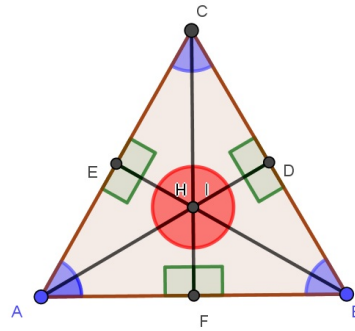


Figura 4.29: Dado $\triangle ABC$ em que H e I coincidem

Note que $D \in BC$, $E \in AC$ e $F \in AB$. Logo, com relação aos triângulos ADB , ADC e BEC temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ \\ \frac{1}{2}\hat{A} + \hat{C} = 90^\circ \\ \frac{1}{2}\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \frac{1}{2}\hat{B} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.1) \\ (4.2) \\ (4.3) \end{array}$$

Substituindo o resultado obtido em (4.3) na equação (4.2) temos:
 $\frac{1}{2}\hat{A} + 90^\circ - \frac{1}{2}\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} + 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$.

Logo, usando o resultado anterior ($\hat{A} = \hat{B}$) em (4.1) temos que $\frac{1}{2}\hat{A} + \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} + 2\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow 3\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$. Sendo $\hat{B} = \hat{A} = 60^\circ$ e de (4.3) temos: $\hat{C} = 90^\circ - \frac{1}{2}\hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot 60^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Assim, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ e ABC é um triângulo equilátero, conforme *figura 4.30*.

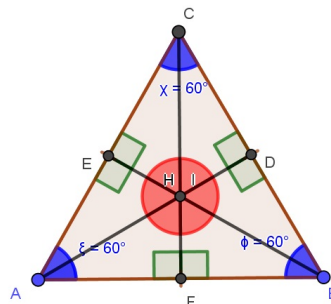


Figura 4.30: Dado $\triangle ABC$ em que H e I coincidem

Suponha agora que H e O coincidam. Temos que \overleftrightarrow{AO} é mediatriz de BC, logo $\overleftrightarrow{AO} \perp \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AO} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{D\}$, em que D é ponto médio de BC ($\overline{BD} = \overline{CD}$).

Seja AD a altura de ABC relativa ao vértice A, sendo AD um lado comum aos triângulos ACD e ABD, $\overline{CD} = \overline{BD}$ e $\widehat{ADC} = \widehat{ADB} = 90^\circ$, conforme figura 4.31. Temos que $\triangle ACD \cong \triangle ABD$ e portanto podemos concluir que $\overline{AC} = \overline{AB}$ (*).

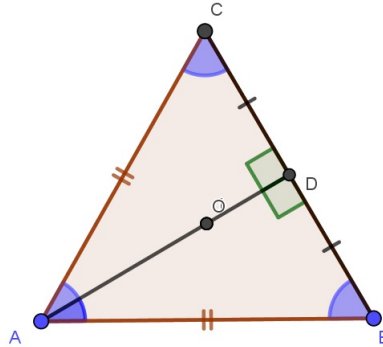


Figura 4.31: Dado $\triangle ABC$ em que H e O coincidem

Analogamente, seja \overleftrightarrow{BO} uma mediatriz, logo $\overleftrightarrow{BO} \perp \overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BO} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{E\}$, em que E é o ponto médio de AC ($\overline{AE} = \overline{EC}$). Seja BE a altura relativa ao vértice B, sendo BE um lado comum aos triângulos ABE e CBE, com $\widehat{CEB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$

Por LAL temos que $\triangle ABE \cong \triangle CBE$ (conforme figura 4.32) e portanto $\overline{AB} = \overline{CB}$. (**)

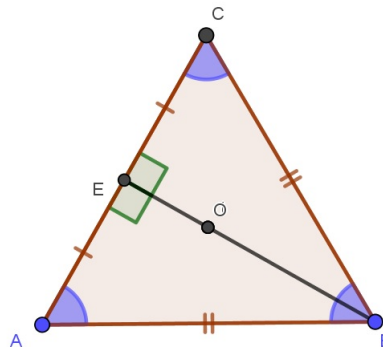


Figura 4.32: Dado $\triangle ABC$ em que H e O coincidem

De (*) e (**) temos que $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{CB}$. $\therefore \triangle ABC$ é equilátero, conforme figura 4.33.

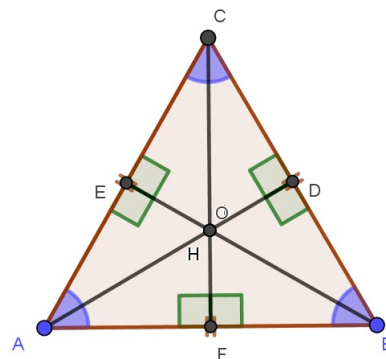


Figura 4.33: Dado $\triangle ABC$ em que H e O coincidem

Por último, suponha que I e O coincidam. Sendo O o circuncentro de ABC temos que $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}=r$, como por hipótese I coincide com O. Logo, temos: $\overline{AI}=\overline{BI}=\overline{CI}$, conforme *figura 4.34*.

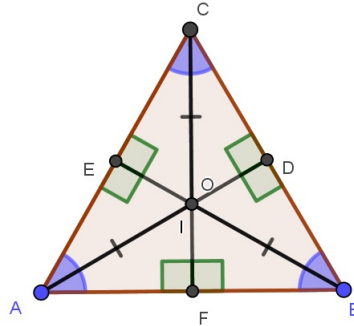


Figura 4.34: Dado $\triangle ABC$ em que I e O coincidem

Por AIB, como \overrightarrow{AI} é a bissetriz de \hat{A} e $\overline{AI}=\overline{BI}$, i.e, $\triangle AIB$ é isósceles, logo podemos concluir que $\frac{1}{2}\hat{A}=\frac{1}{2}\hat{B} \Rightarrow \hat{A}=\hat{B}$.(*)

Analogamente, pelo triângulo AIC, como \overrightarrow{CI} a bissetriz de \hat{C} e $\overline{AI}=\overline{CI}$, i.e, AIC é isósceles, logo concluímos que $\frac{1}{2}\hat{A}=\frac{1}{2}\hat{C} \Rightarrow \hat{A}=\hat{C}$.(**)

Por(*) e (**) podemos concluir que $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$, logo o $\triangle ABC$ é equilátero.

\Rightarrow Como por hipótese temos que $\triangle ABC$ é equilátero, i.e, $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$ e $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60^\circ$. Por meio do uso de régua e compasso determinamos as bissetrizes dos ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} e com isso obtemos o incentro, representado por I, conforme *figura 4.35*.

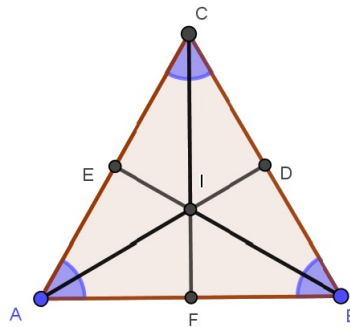


Figura 4.35: Dado $\triangle ABC$ em que I e O coincidem

Considerando os triângulos AIC, AIB e BIC e sendo \overrightarrow{AI} , \overrightarrow{BI} , \overrightarrow{CI} , as bissetrizes dos ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , respectivamente, podemos concluir que $\hat{IAC} = \hat{IAB} = \hat{IBA} = \hat{IBC} = \hat{ICB} = \hat{ICA} = 30^\circ$. Logo, por ALA podemos concluir que os triângulos AIC, AIB e BIC são congruentes. Portanto, temos que $\overline{AI}=\overline{BI}=\overline{CI}$ (a), conforme *figura 4.36*.

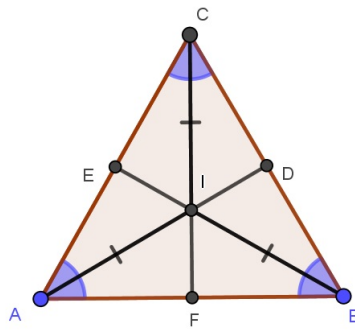


Figura 4.36: Dado $\triangle ABC$ em que I e O coincidem

Por meio de régua e compasso traçamos as três mediatrizes do $\triangle ABC$ (\overleftrightarrow{AO} , \overleftrightarrow{BO} e \overleftrightarrow{CO}), com a interseção de tais mediatrizes obtemos o circuncentro, representado por O. Sejam D, E e F os pontos médios dos segmentos BC, AC e AB. Como $\overline{AF} = \overline{FB}$, OF é lado comum e $\widehat{AFO} = \widehat{BFO} = 90^\circ$, por LAL podemos concluir que $\triangle AFO \equiv \triangle BFO \Rightarrow \overline{AO} = \overline{BO}$. Analogamente, como $\overline{BD} = \overline{DC}$, OD é lado comum e $\widehat{BDO} = \widehat{CDO} = 90^\circ$. Por LAL temos que $\triangle BDO \equiv \triangle CDO \Rightarrow \overline{BO} = \overline{CO}$. Assim, obtemos que $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$ (b), conforme *figura 4.37*.

Por (a) e (b), podemos concluir que **I=O**.

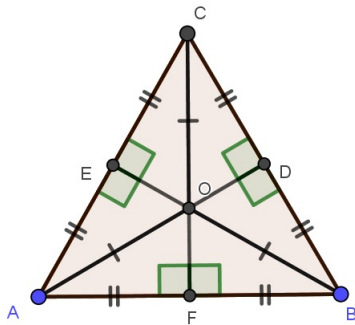


Figura 4.37: Dado $\triangle ABC$ em que I e O coincidem

A seguir, mostraremos que o incentro coincide com o ortocentro. Considerando que já obtemos anteriormente o incentro de ABC, e sendo este triângulo equilátero, seja \overleftrightarrow{AI} a bissetriz de \widehat{A} e $\overleftrightarrow{AI} \cap BC = \{D\}$, conforme *figura 4.38(a)*.

Por ALA temos que $\triangle ACD \equiv \triangle ABD$ e portanto $\widehat{ADC} = \widehat{ADB} = 90^\circ$. De maneira análoga, considerando \overleftrightarrow{CI} a bissetriz do ângulo \widehat{C} , sendo $\overline{AC} = \overline{BC}$ e $\overleftrightarrow{CI} \cap AB = \{F\}$, por ALA temos que $\triangle ACF \equiv \triangle BCF$ e $\widehat{AFC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$. Da mesma forma temos $\triangle ABE \equiv \triangle CBE$ e $\widehat{BEA} = \widehat{BEC} = 90^\circ$, conforme *figura 4.38(b)*.

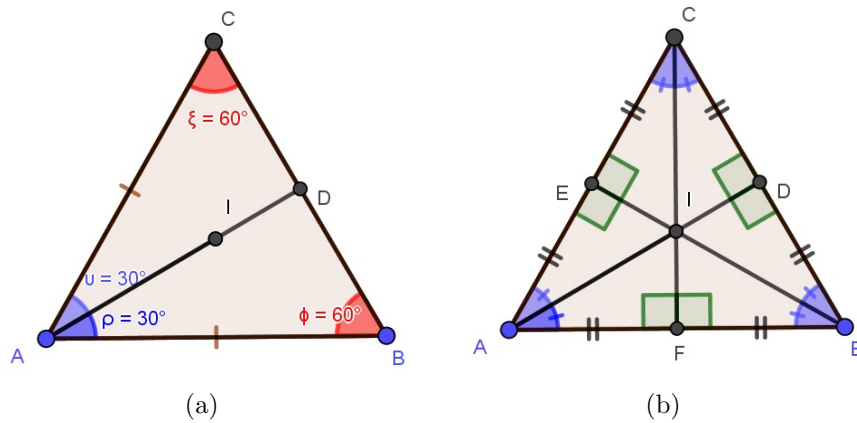


Figura 4.38: Dado $\triangle ABC$ em que H e I coincidem

Considerando AD, BE e CF as alturas do triângulo ABC e $s AD \cap CF \cap BE = \{H\}$, onde H que é o ortocentro, i.e, o ponto de encontro das alturas do $\triangle ABC$, conforme figura 4.39.

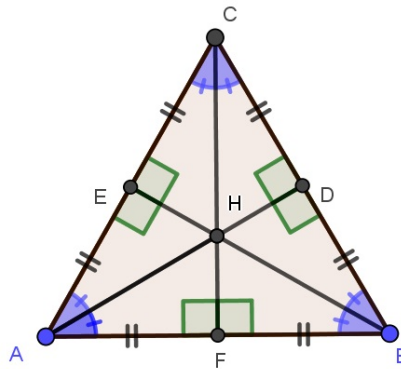


Figura 4.39: Dado $\triangle ABC$ em que H e I coincidem

Logo, como $\widehat{HAB} = \widehat{HBA}$ temos que AHB é isósceles e portanto $\overline{AH} = \overline{BH}$. Analogamente, $\widehat{HBC} = \widehat{HCB}$, $\triangle BHC$ é isósceles e portanto $\overline{BH} = \overline{CH}$. Assim, $\overline{AH} = \overline{BH} = \overline{CH}$ e como $\overline{AI} = \overline{BI} = \overline{CI}$, conforme fora visto anteriormente, concluímos que $\mathbf{I} = \mathbf{H}$, i.e, que o incentro do $\triangle ABC$ coincide com o ortocentro deste triângulo.

Por fim, mostraremos que o ortocentro do triângulo equilátero ABC coincide com o circuncentro, conforme já visto no caso anterior em que determinamos o ortocentro, representado por H (figura 4.39), onde mostramos que $\triangle ACF \equiv \triangle BCF$ (1), $\triangle ACD \equiv \triangle ABD$ (2) e $\triangle ABE \equiv \triangle CBE$ (3).

De (1) temos que $\overline{AF} = \overline{BF}$ e $\widehat{AFC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$, por (2) temos $\overline{CD} = \overline{BD}$ e $\widehat{ADC} = \widehat{ADB} = 90^\circ$, e por (3) temos $\overline{AE} = \overline{CE}$ e $\widehat{BEA} = \widehat{BEC} = 90^\circ$. Logo, podemos concluir diante de tais resultados que \overleftrightarrow{CF} , \overleftrightarrow{AD} , \overleftrightarrow{BE} são mediatrizes relativas aos lados AB, BC e AC, respectivamente. Assim, temos que $\overleftrightarrow{CF} \cap \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BE} = \{O\}$, em que O é o circuncentro do $\triangle ABC$, i.e, o ponto de encontro das mediatrizes, conforme figura 4.40.

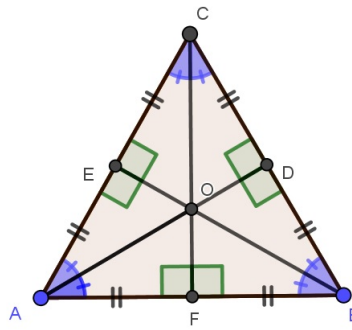


Figura 4.40: Dado $\triangle ABC$ em que H e O coincidem

Como $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ e $\overline{AB} = \overline{BC}$, logo utilizando o caso de congruência ALA temos que $\triangle AOB \cong \triangle BOC \Rightarrow \overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$. (4)

Portanto, como fora obtido anteriormente que $\overline{AH} = \overline{BH} = \overline{CH}$ e por (4), concluímos que $H = O$.

Assim, podemos afirmar que dado ABC um triângulo equilátero então dois quaisquer dos pontos (H, I e O) coincidem.

□

Para verificarmos a validade da proposição usando o *GeoGebra* dividiremos em dois momentos. No primeiro desenharemos um triângulo ABC equilátero e mostraremos que dado este triângulo, dois quaisquer dos pontos H (ortocentro), I (incentro) e O (circuncentro) coincidem. Já no segundo momento, mostraremos que se dois quaisquer dos pontos H, I e O de um triângulo ABC coincidirem então temos que ABC é equilátero.

\implies Primeiro desenharemos um triângulo equilátero, para isso selecionamos a ferramenta *Polígono Regular* e em seguida digitamos o número de vértices do polígono, assim obtemos o triângulo ABC de base AB.

Como ABC é equilátero, logo os seus ângulos são congruentes e medem 60° . Para determinarmos o *incentro* de ABC, selecionamos a ferramenta *Bissetriz*, clicando sobre C, A e B para obtermos a bissetriz de \widehat{A} . Analogamente, clicando sobre A, B e C para encontrarmos a bissetriz de \widehat{B} , fazendo o mesmo procedimento clicando sobre B, C e A obtemos a bissetriz de \widehat{C} .

Em seguida, na Barra de Ferramentas clicamos sobre a ferramenta *Interseção de dois objetos* e sobre duas das bissetrizes encontradas, obtendo dessa forma o incentro, caso seja necessário, pode-se clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto encontrado e em seguida selecionar *Renomear*. Vale ressaltar, que o ponto encontrado (incentro) é representado pela letra **I**.

Deve-se selecionar a ferramenta *Ângulo*, clicando sobre os pontos: I, A e C determinando \widehat{IAC} ; B, A e I determinando \widehat{BAI} ; I, B e A determinando \widehat{IBA} ; C, B e I determinando \widehat{CBI} ; I, C e B determinando \widehat{ICB} ; A, C e I determinando \widehat{ACI} . Após obter tais ângulos, clicamos com o botão direito do mouse sobre cada ângulo e em seguida em *Propriedades*, depois selecionamos a aba *Estilo* e fazemos a alteração selecionando outro ícone no item *Decoração*, conforme figura 4.41.

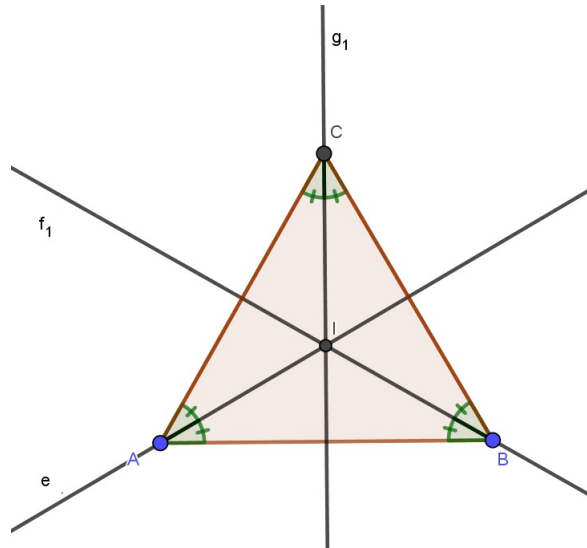


Figura 4.41: Dado $\triangle ABC$ em que I é o incentro

Temos que $\overrightarrow{AI} \cap BC = \{D\}$, $\overrightarrow{BI} \cap AC = \{E\}$, $\overrightarrow{CI} \cap AB = \{F\}$, para obtermos tais pontos no GeoGebra, basta selecionarmos a ferramenta *Interseção de dois objetos* e clicarmos sobre cada bissetriz, bem como sobre o segmento de reta (lado do triângulo), o qual a bissetriz intersecta obtemos os pontos citados, adotados esses procedimentos devemos ocultar as bissetrizes clicando sobre cada uma delas e selecionando *Exibir Objeto*, conforme figura 4.42.

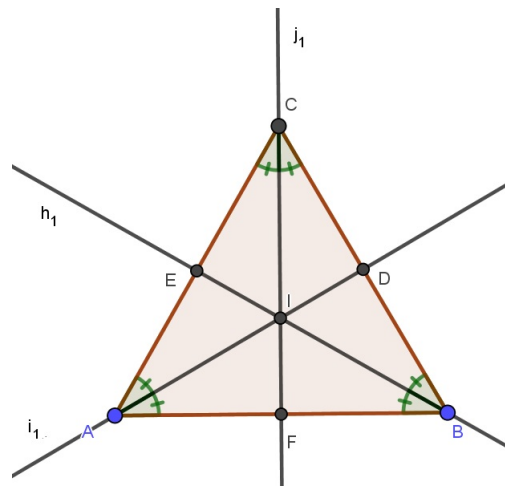


Figura 4.42: Dado $\triangle ABC$ em que I é o incentro

Em seguida, utilizamos a ferramenta *Reta Perpendicular* clicando sobre cada lado do triângulo e o vértice oposto ao mesmo. Após obtidas tais retas, podemos traçar as alturas do triângulo ABC , deve-se clicar sobre cada vértice do $\triangle ABC$ e sobre os pontos obtidos pela interseção de tais retas com os respectivos lados do triângulo ABC , a saber: os pontos D , E e F . Feito isso, ocultamos as retas perpendiculares, clicando com o botão direito do mouse sobre cada reta e selecionando *Exibir Objeto*. Para obter a interseção das alturas de ABC , utilizamos a ferramenta *Interseção de dois objetos* e clicamos sobre as alturas de ABC , obtendo dessa forma o ponto H (ortocentro), já para obter os ângulos retos, basta selecionar *Ângulo* e clicar sobre os vértices correspondentes nos triângulos ACF , BCF , ACD , ABD , ABE e CBE , conforme figura 4.43.

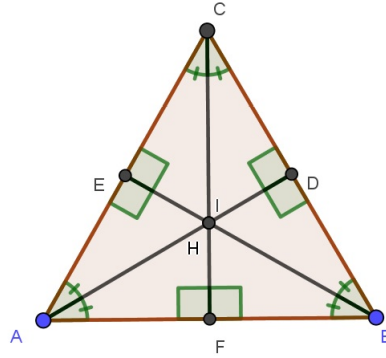


Figura 4.43: Dado $\triangle ABC$ em que H e I coincidem

Logo, seja $\triangle ABC$ equilátero temos que o ortocentro e o incentro coincidem ($H=I$), conforme figura 4.43.

Para encontrarmos o circuncentro de ABC utilizando o GeoGebra adotaremos os alguns procedimentos, primeiro deve-se calcular os comprimentos dos segmentos AF, FB, BD, DC, AE, EC, para isso basta digitarmos no campo *Entrada*: Segmento(A,F), faremos o mesmo procedimento apenas alterando os pontos (extremos) de cada segmento para obtermos os demais comprimentos. Após finalizarmos essa etapa, notaremos que $\overline{AF}=\overline{FB}=\overline{BD}=\overline{DC}=\overline{AE}=\overline{EC}$. Em seguida, clicando com o botão direito do mouse sobre cada segmento, selecionamos a guia *Estilo* e em *Decoração* escolhemos uma das opções para sinalizar a congruência entre os segmentos, conforme figura 4.44.

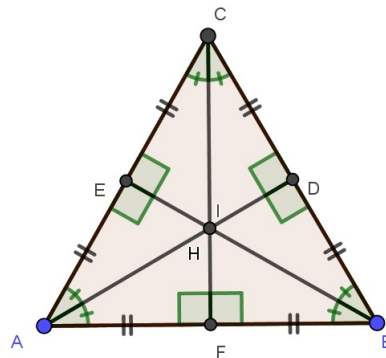


Figura 4.44: Dado $\triangle ABC$ em que H e I coincidem

Como $\overline{AF}=\overline{FB}$ podemos concluir que F é ponto médio de AB, analogamente concluiremos que D e E são pontos médios de BC e AC, respectivamente. Sendo AD, BE e CF as alturas de ABC e H o ortocentro, logo $\overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{AC}$. Assim, como $\overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{AB}$ e $\overline{AF}=\overline{FB}$, podemos afirmar que \overrightarrow{CF} é mediatriz de AB, analogamente temos que \overrightarrow{BE} e \overrightarrow{AD} são as mediatrizes de AC e BC, respectivamente. Para obtermos a interseção das mediatrizes, basta selecionar na barra de ferramentas *Interseção de dois objetos* e clicar sobre as mediatrizes, obtendo assim o circuncentro, que deverá ser representado por O, para isso clicamos sobre o ponto e selecionamos a opção *Renomear*, vide figura 4.45.

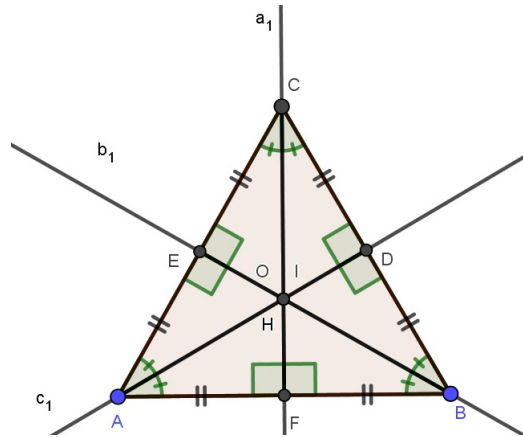


Figura 4.45: Dado $\triangle ABC$ em que H, I e O coincidem

Vale ressaltar que o circuncentro, representado por O, equidista dos vértices do triângulo ABC, o que pode ser mostrado no GeoGebra. No campo *Entrada*, digitaremos o comando Segmento(A,O), faremos o mesmo procedimento alterando apenas um dos extremos (vértices) para obtermos os comprimentos dos segmentos BO e CO. Feito isso mostramos que $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$, clicando com o botão direito do mouse sobre cada segmento que fora determinado, selecionamos a guia *Estilo* e em *Decoração* escolhemos uma das opções para sinalizar a congruência entre os segmentos. Para ocultarmos as retas \overleftrightarrow{CF} , \overleftrightarrow{AD} e \overleftrightarrow{BE} , basta clicarmos sobre elas com o botão direito do mouse e selecionarmos *Exibir Objeto*, conforme figura 4.46.

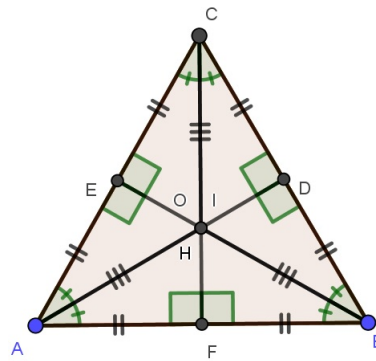


Figura 4.46: Dado $\triangle ABC$ em que H, I e O coincidem

Conforme figura 4.46, vemos que os pontos H, I e O coincidem. Se os três pontos citados coincidem então dois quaisquer destes pontos também coincidem.

\Leftarrow Utilizando o GeoGebra para mostrarmos que se dois pontos quaisquer dos pontos H, I e O de ABC coincidem então temos que ABC é equilátero. Dessa forma devemos dividir em três casos para mostrarmos a validade de tal proposição, a saber: mostraremos que se $H=I$, $H=O$ e $I=O$ então temos que $\triangle ABC$ é equilátero.

Para mostrarmos o 1º caso ($H=I$), devemos selecionar a ferramenta *Polígono* e desenhar um triângulo qualquer. Desenhado o triângulo, deve-se selecionar *Bissetriz* na barra de ferramentas e clicar sobre os vértices B, A e C, obtendo dessa forma a bissetriz do ângulo \hat{A} , o mesmo procedimento deverá ser adotado para obtermos as bissetrizes dos ângulos \hat{B} e \hat{C} e utilizaremos a ferramenta *Interseção de dois objetos* clicando sobre as bissetrizes dos ângulos do $\triangle ABC$ para obter o ponto **I (incentro)**, conforme figura 4.47.

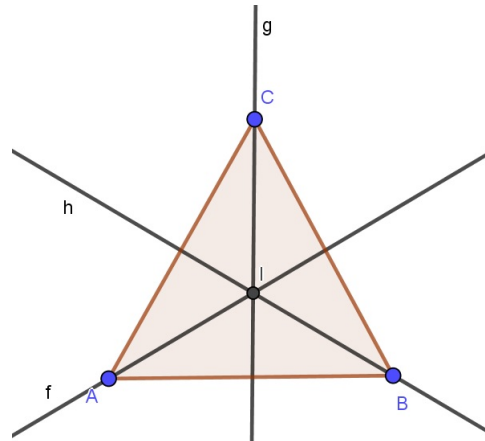


Figura 4.47: Dado $\triangle ABC$ em que I é o incentro.

Em seguida, deve-se obter o ortocentro do $\triangle ABC$, para isso basta selecionar a ferramenta *Reta perpendicular*, clicar sobre cada lado de ABC e o vértice oposto a este lado, por último selecionamos a ferramenta *Interseção de dois objetos*, clicando sobre cada reta perpendicular, dessa forma obtemos o ponto H (ortocentro). Vale ressaltar tal como fora feito nos itens anteriores que será necessário *Renomear* o ponto.

Selecionando *Mover* na barra de ferramentas, clicando sobre os vértices A, B ou C, deve-se mover tais pontos até que notemos na Janela de Álgebra que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$, portanto ABC é equilátero e com isso nota-se que o ortocentro coincide com o incentro ($H=I$), conforme *figura 4.48*.

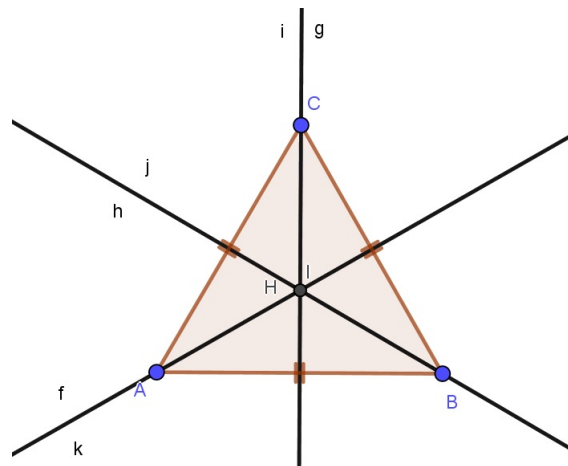


Figura 4.48: Dado $\triangle ABC$ em que H e I coincidem

Analogamente para mostrarmos o 2º caso ($H=O$), devemos selecionar a ferramenta *Polígono* e desenhar um triângulo qualquer. Desenhado o triângulo ABC, deve-se selecionar a ferramenta *Reta perpendicular*, clicando sobre cada lado de $\triangle ABC$ e o respectivo vértice oposto. Após obtidas tais retas, deve-se selecionar na barra de ferramentas *Interseção de dois objetos* e clicar sobre as retas de modo a obter o ortocentro (H), conforme *figura 4.49*.

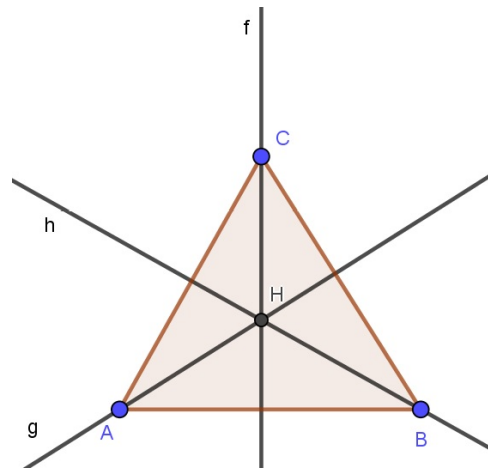


Figura 4.49: Dado $\triangle ABC$ em que H e O coincidem

Em seguida, para obtermos o circuncentro selecionamos a ferramenta *Mediatriz* e clicamos sobre cada lado de ABC. Após obtidas as mediatrizes, selecionamos *Interseção de dois objetos* e clicamos sobre as mediatrizes, de forma a obtermos o ponto O (circuncentro) de ABC.

De modo análogo, selecionando *Mover* na barra de ferramentas, clicando sobre os vértices A, B ou C, deve-se mover tais pontos até que notemos na Janela de Álgebra que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$, portanto $\triangle ABC$ é equilátero e com isso nota-se que o ortocentro coincide com o circuncentro ($H=O$), conforme *figura 4.50*.

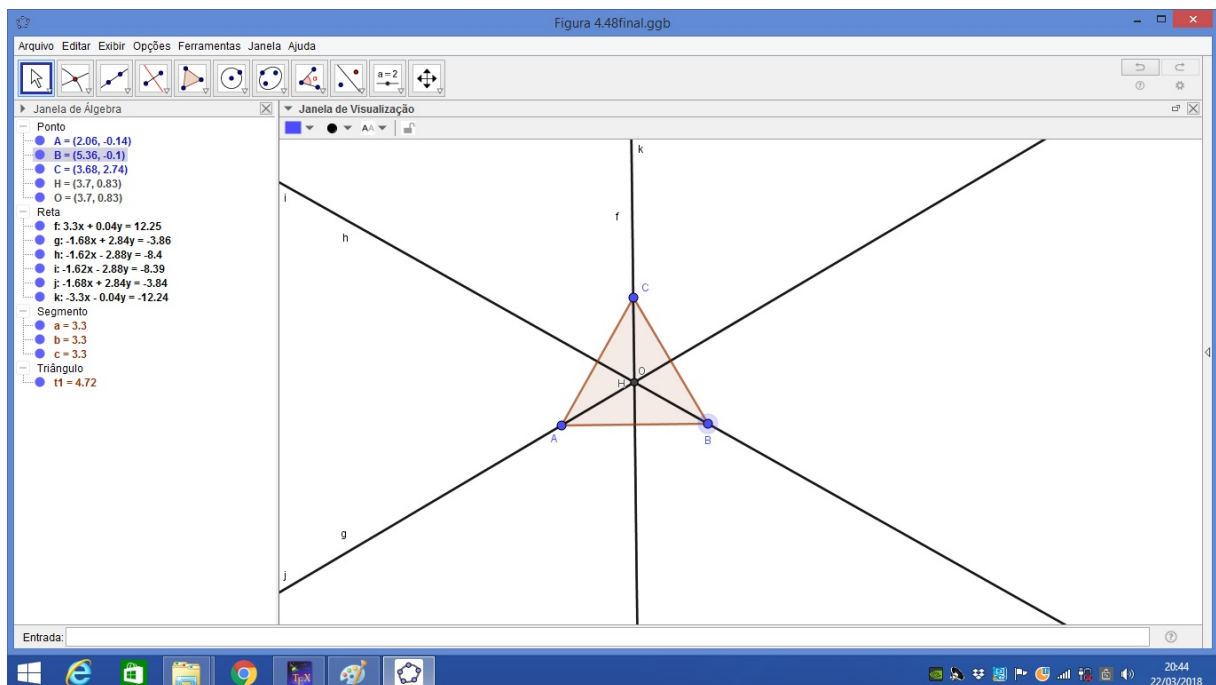


Figura 4.50: Dado $\triangle ABC$ em que H e O coincidem

Por último para mostrarmos o 3º caso ($I=O$), devemos como nos outros casos selecionar a ferramenta *Polígono* e desenhar um triângulo qualquer. Adotando os mesmos procedimentos do 1º caso, para obtermos as bissetrizes dos ângulos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} e consequentemente o *incentro* (I), este último obtido selecionando a ferramenta *Interseção de dois objetos* e clicando sobre as bissetrizes encontradas, ver *figura 4.51*.

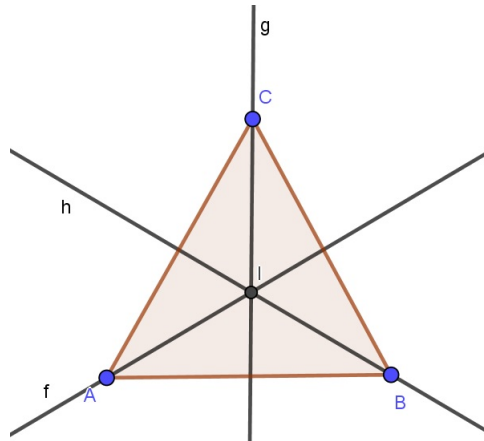


Figura 4.51: Dado $\triangle ABC$ em que I e O coincidem

Em seguida, para obtermos o circuncentro utilizaremos os mesmos procedimentos adotados no 2º caso de forma a obtermos o ponto O (*circuncentro*) de ABC .

De maneira análoga ao que fora feito nos casos anteriores, selecionamos *Mover* na barra de ferramentas, clicando sobre os vértices A , B ou C , movendo tais pontos até que notemos na Janela de Álgebra que $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$, portanto ABC é equilátero e com isso nota-se que o incentro coincide com o circuncentro ($I=O$), conforme *figura 4.52*.

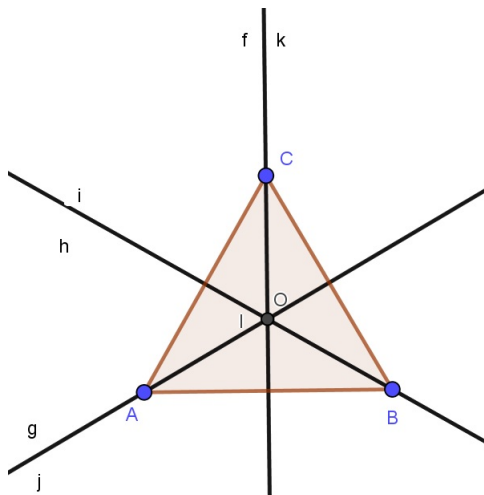


Figura 4.52: Dado $\triangle ABC$ em que I e O coincidem

Assim, podemos afirmar que se H , I e O são pontos notáveis de ABC e tais que $H=I$, $H=O$ e $I=O$ então $\triangle ABC$ é equilátero.

5) Seja H o ortocentro de um triângulo ABC , tal que $AC \neq BC$. O segmento que une os pontos médios de HC e AB intersecta a bissetriz de $\angle ACB$ no ponto N . Sabendo que o circuncentro do triângulo ABC pertence à reta que passa pelos pontos H e N , determine a medida de $\angle ACB$.

Para determinarmos a medida de $\angle ACB$ faremos uso de instrumentos como régua e compasso para a solução deste problema extraído de [9]. Dado um triângulo ABC tal que $AC \neq BC$, determinamos o *ortocentro* (H), bem como o *circuncentro* (O), logo pela *proposição 3.1* temos que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$, onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC . E sejam D e E os pontos médios de HC e AB , respectivamente.

Seja \overleftrightarrow{OE} a mediatriz de AB e $\overleftrightarrow{CH} \perp AB$. Logo, temos que $\overleftrightarrow{OE} \perp AB$ e $\overleftrightarrow{CH} \perp AB \therefore \overleftrightarrow{OE} \parallel \overleftrightarrow{CH}$ (1), conforme *figura 4.53*.

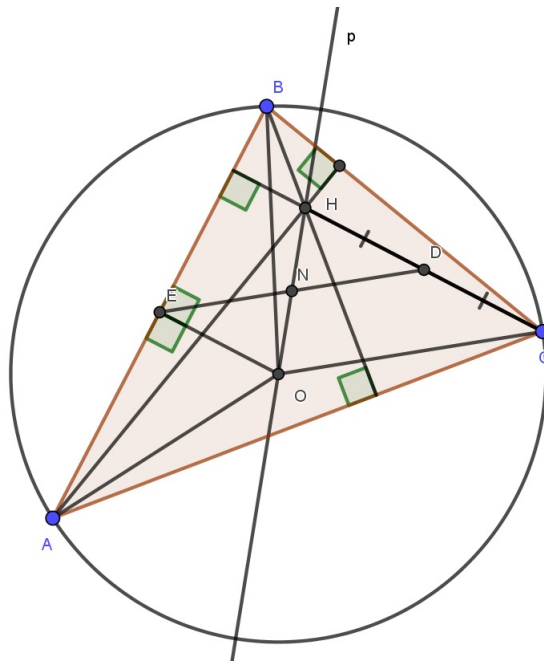


Figura 4.53: Dado $\triangle ABC$ em que H , N e O são colineares.

Seja DE o segmento que une os pontos médios de AB e HC , e tal que $DE \cap$ bissetriz do $\angle ACB = \{N\}$.

Ainda com uso de régua e compasso determinemos a bissetriz do $\angle ACB$, veremos por construção que essa coincide com a bissetriz do $\angle OCH$.

Sendo \overleftrightarrow{CN} a bissetriz do $\angle ACB$ temos que $\widehat{ACN} = \widehat{BCN}$. Por outro lado \overleftrightarrow{CN} é bissetriz de \widehat{OCH} , logo $\widehat{OCN} = \widehat{HCN}$. Assim, dado o triângulo HCO , com $\widehat{HNO} = 180^\circ$ e tal que $\widehat{HNO} = \widehat{HCN} + \widehat{OHC}$. Como \overleftrightarrow{CN} é bissetriz então podemos afirmar que $\widehat{HCN} = \widehat{OHC} = 90^\circ$, conforme *figura 4.54*.

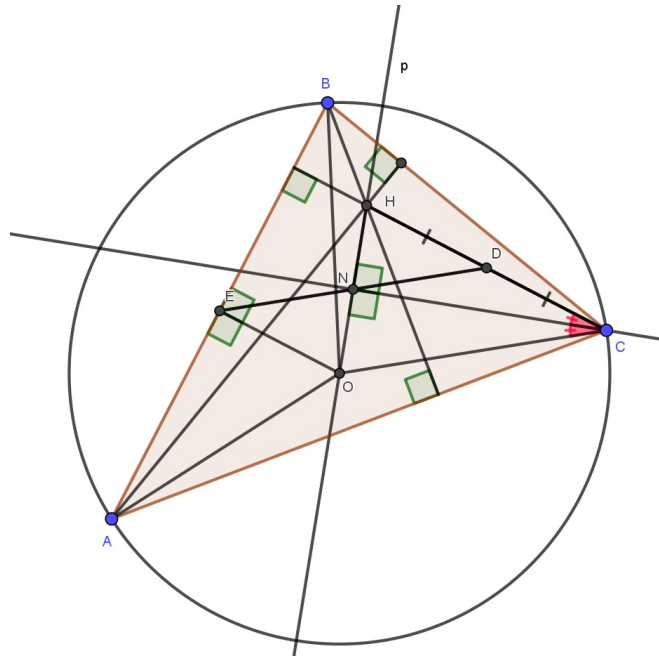


Figura 4.54: Dado $\triangle ABC$ em que H, N e O são colineares.

Sendo CN o lado comum entre os triângulos HCN e OCN, logo por ALA temos que $\triangle HCN \equiv \triangle OCN \Rightarrow \overline{HC} = \overline{OC}$ e $\overline{HN} = \overline{ON}$ (2).

Como $\overrightarrow{OE} \parallel \overrightarrow{CH}$, sejam \overrightarrow{OH} e \overrightarrow{DE} duas transversais, assim temos que $\widehat{DHN} = \widehat{EON}$ e $\widehat{ONE} = \widehat{HND}$. Portanto, por ALA temos que $\triangle HND \equiv \triangle ONE \Rightarrow \overline{HD} = \overline{OE}$ e $\overline{ND} = \overline{NE}$ (3).

Por (1) e por (3), e sendo D o ponto médio de HC ($\overline{HD} = \overline{DC}$), temos que $OE \parallel DC$ e $\overline{OE} = \overline{DC}$. Logo, pela proposição 2.5 temos que OCDE é paralelogramo, conforme figura 4.55.

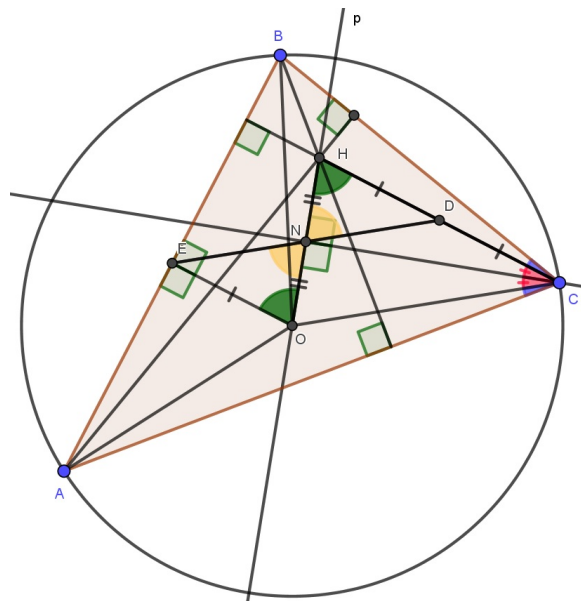


Figura 4.55: Dado $\triangle ABC$ em que H, N e O são colineares.

Como OCDE é paralelogramo, assim temos que $\overleftrightarrow{OC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$ e seja \overleftrightarrow{CN} uma transversal temos $\widehat{DNC} = \widehat{NCO}$ (4). Sendo \overleftrightarrow{CN} bissetriz, logo $\widehat{NCO} = \widehat{DCN}$ (5). De (4) e (5) temos $\widehat{DNC} = \widehat{DCN}$, portanto podemos concluir que $\triangle DNC$ é isósceles, i.e, $\overline{ND} = \overline{DC}$ (6).

Sendo $\overline{HD} = \overline{DC}$ e por (6) temos que $\overline{HD} = \overline{ND}$, portanto $\triangle HND$ é isósceles e $\widehat{HND} = \widehat{DNH}$. Por (3) e considerando que $\overline{HD} = \overline{ND}$, conforme fora obtido anteriormente, temos que $\overline{OE} = \overline{NE}$. Logo, $\triangle ONE$ é isósceles de base ON e com $\widehat{EON} = \widehat{ENO}$, conforme figura 4.56.

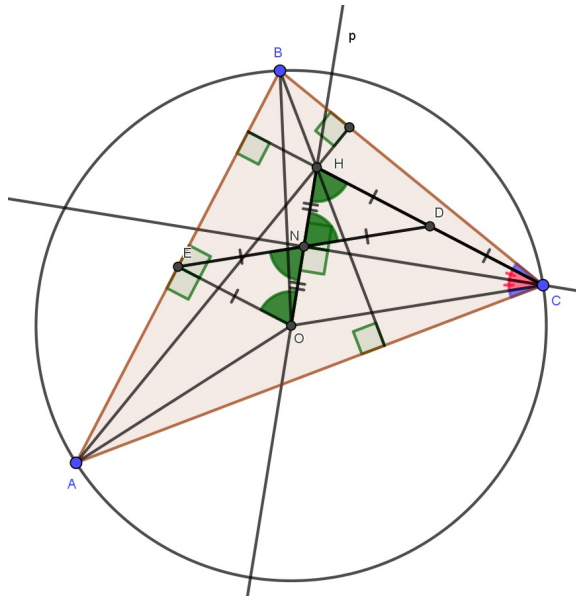


Figura 4.56: Dado $\triangle ABC$ em que H, N e O são colineares.

Como \overleftrightarrow{OE} é mediatriz temos que $\overline{AE} = \overline{BE}$ e $\widehat{AEO} = \widehat{BEO} = 90^\circ$. Considerando OE um lado comum aos triângulos AEO e BEO, logo por LAL temos $\triangle AEO \cong \triangle BEO$, dessa forma podemos afirmar que $\widehat{AOE} = \widehat{BOE} = \alpha$ e que $\widehat{OAE} = \widehat{OBE} = \beta$, conforme figura 4.57.

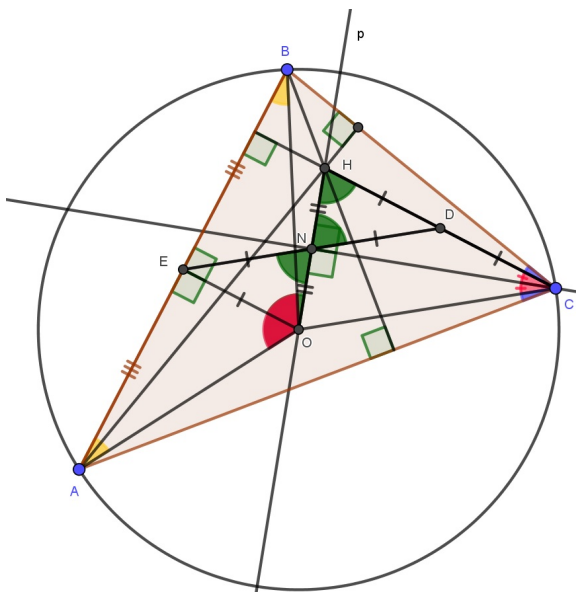


Figura 4.57: Dado $\triangle ABC$ em que H, N e O são colineares.

Como OCDE é paralelogramo, logo $\overline{OE}=\overline{DC}$ e $\overline{OC}=\overline{DE}$. No entanto em (2), vimos que $\overline{HC}=\overline{OC}$ e que $\overline{HC}=2\overline{DC}$, já que D é ponto médio de HC.

No triângulo AEO, tome $k=\overline{OE}=\overline{DC}$, portanto $\overline{OA}=\overline{OC}=2k$. Seja $\widehat{AOE}=\widehat{BOE}=\alpha$, logo $\cos \alpha=\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}=\frac{k}{2k}=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=60^\circ$. Sendo $\widehat{AOB}=\widehat{AOE}+\widehat{BOE} \Rightarrow \widehat{AOB}=2\alpha=120^\circ$.

Por outro lado, como $\angle ACB$ é o ângulo inscrito ao arco AB. Assim, temos $\widehat{ACB}=\frac{\widehat{AOB}}{2}=60^\circ$.

Utilizando o *GeoGebra* para determinarmos a medida de $\angle ACB$, considerando as condições do enunciado, adotaremos alguns passos para a resolução do problema.

O primeiro passo é desenharmos um triângulo ABC, tal que $AC \neq BC$. Em seguida, selecionamos a ferramenta *Reta perpendicular*, clicando sobre cada vértice do triângulo e o respectivo lado oposto a esse vértice. Após concluída essa etapa, selecionando a ferramenta *Interseção de dois objetos* e clicando sobre cada uma das retas perpendiculares obtemos um ponto, o qual denotaremos por H.

Por último, selecionando *Interseção de dois objetos*, clicando sobre cada reta perpendicular e o respectivo lado que a mesma intersecta obtemos os pés das perpendiculares, que serão também os pés das alturas de $\triangle ABC$. Logo, devemos ocultar as retas perpendiculares, clicando sobre as mesmas com o botão direito do mouse e selecionando a opção *Exibir Objeto*. Assim, selecionando a ferramenta *Segmento* e clicando sobre cada vértice e o respectivo pé da altura correspondente, obtemos as alturas de $\triangle ABC$ e ponto H encontrado anteriormente será o ortocentro de $\triangle ABC$, conforme *figura 4.58*.

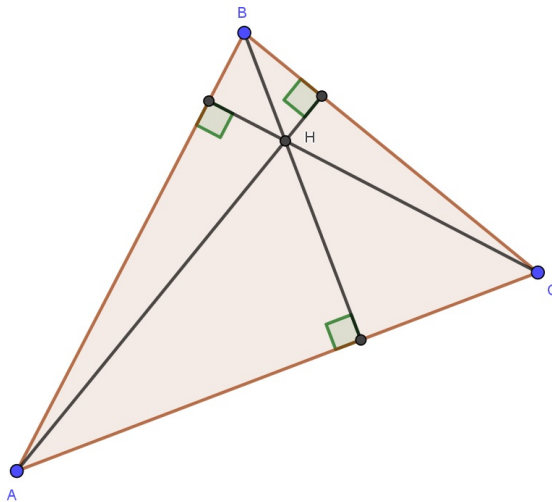


Figura 4.58: Dado $\triangle ABC$ com $AC \neq BC$, em que H é ortocentro

Para obtermos o circuncentro (O), selecionamos a ferramenta *Mediatriz* e clicamos sobre cada lado de $\triangle ABC$. Em seguida, selecionando a ferramenta *Interseção de dois objetos* e clicando sobre cada reta mediatriz obtemos o circuncentro (O). Após concluída essa etapa, selecionando a ferramenta *Segmento*, clicando sobre cada vértice do $\triangle ABC$ e sobre

o circuncentro, constaremos conforme demonstrado na *proposição 3.1* que $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$. Por fim, podemos ocultar as mediatrizes, clicando sobre as mesmas e selecionando a opção *Exibir Objeto*. Como o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, então podemos selecionar a ferramenta *Círculo dados Centro e Raio*, sendo o centro O e o raio será a distância entre o ponto e qualquer um dos vértices do $\triangle ABC$, com isso obtemos tal circunferência, conforme *figura 4.59*.

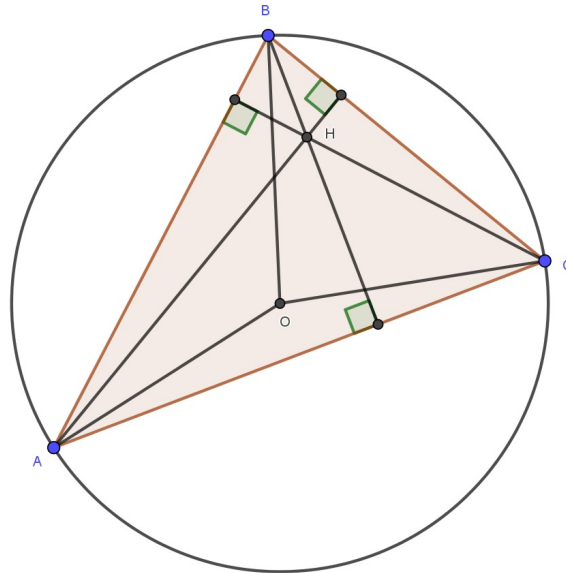


Figura 4.59: Dado $\triangle ABC$ com $AC \neq BC$, em que H é o ortocentro e O é o circuncentro

Ao selecionarmos *Ponto Médio ou Centro* na barra de ferramentas, devemos em seguida clicar nos pontos H, C, A e B, obtendo dessa forma os pontos D e E, respectivamente, que são os pontos médios dos segmentos HC e AB. Através da ferramenta *Segmento* e clicando sobre os pontos D, E e O, obtemos os segmentos DE e OE. Em seguida, devemos selecionar *Bissetriz* na barra de ferramentas e clicar sobre os vértices A, C e B, assim obtemos a bissetriz do $\angle ACB$, conforme *figura 4.60*.

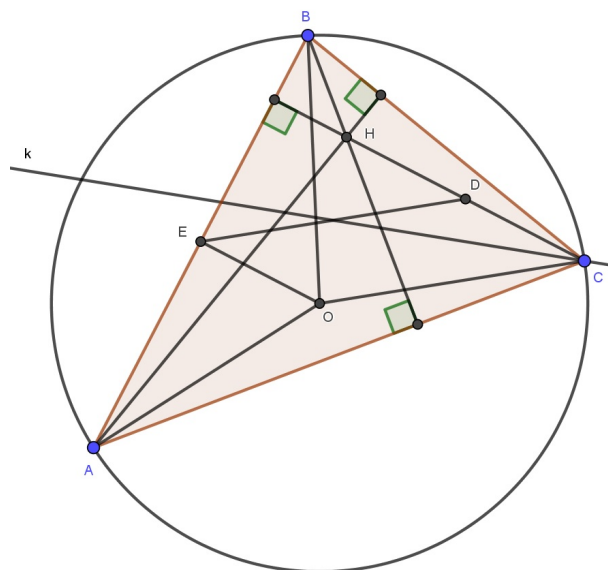


Figura 4.60: Dado $\triangle ABC$ com $AC \neq BC$, em que H é o ortocentro e O é o circuncentro

Para obtermos o ponto N basta selecionar *Interseção de dois objetos* na barra de ferramentas e clicar sobre a bissetriz do $\angle ACB$ e sobre o segmento DE . E através das ferramentas *Mover Ponto*, a ser utilizada com os vértices de ABC , e por *Segmento* (ou *Reta*) entre os pontos H , N e O , devemos mover tal(is) vértice(s) de modo que H , N e O sejam colineares, i.e, tais pontos pertençam a mesma reta. Por último, utilizando a ferramenta *Ângulo* e clicando sobre o vértices B , C e A , obtemos o $\widehat{ACB}=60^\circ$, conforme *figura 4.61*.

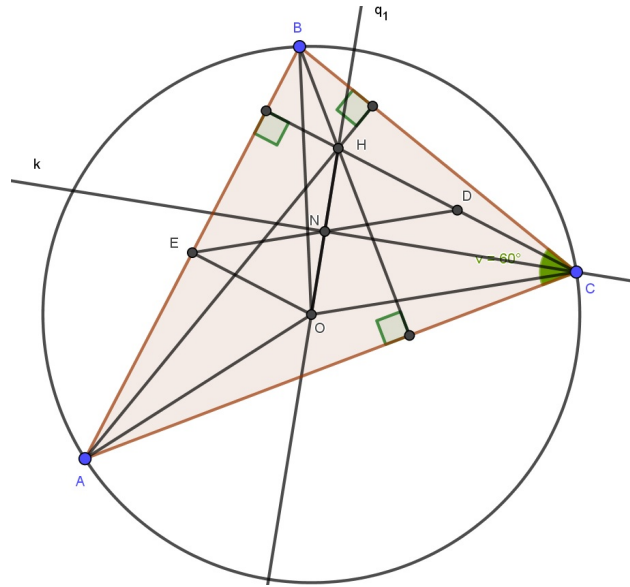


Figura 4.61: Dado $\triangle ABC$ em que H , N e O são colineares

Capítulo 5

Resultados e Discussões

Neste capítulo faremos a análise dos resultados obtidos por meio dos questionários, os quais foram submetidos aos alunos e professores que fizeram parte desta pesquisa.

O questionário aplicado com os alunos constava de 5 questões objetivas e 2 questões subjetivas. Além de dois itens que solicitavam o nome e a idade dos alunos. Optou-se por utilizar questões objetivas com a finalidade de uniformizar e padronizar os dados coletados. Já com as questões subjetivas o objetivo foi reunir opiniões acerca do uso do software GeoGebra nas aulas de Geometria Plana.

Este questionário foi aplicado em duas turmas do 2º ano do ensino médio integrado à educação profissional nos cursos de Edificações e Eletrotécnica, no ano letivo de 2016 após terem sido abordados tópicos de Geometria Plana. A turma do curso de Edificações possuía 22 alunos matriculados, enquanto que a turma do curso de Eletrotécnica possuía 23 alunos. Do total de 45 alunos, 39 participaram desta pesquisa. Cerca de 20 estudantes são do gênero feminino, o que corresponde a cerca de 51% dos participantes, enquanto que cerca de 49% são do gênero masculino. Ainda sobre o perfil dos estudantes participantes desta pesquisa no que se refere a idade, temos que a faixa etária do grupo foi de 17 a 20 anos.

A seguir analisaremos os dados coletados com as questões objetivas.

Na pesquisa, quando questionados se consideram relevante o uso de recursos computacionais para o ensino de Matemática, em sua totalidade os estudantes responderam que sim.

Vale ressaltar que o uso da tecnologia nas escolas faz com que o professor rompa algumas barreiras, especialmente para os docentes que estão acostumados a ministrar aulas tradicionais, onde se tem um maior controle, em razão da previsibilidade das situações que possam surgir. Isso não ocorre quando fazemos uso de um software, como por exemplo, o GeoGebra, poderão surgir dúvidas e/ou questionamentos durante o uso do software em sala de aula e o professor pode não estar apto a responder, para isso se faz necessário uma boa preparação.

A esse respeito, Borba e Penteado [6](2001, p.55) esclarecem que:

“Por mais que o professor seja experiente é sempre possível que uma combinação de teclas e comandos leve a uma situação nova que, por vezes, requer um tempo mais longo de análise e compreensão. Muitas dessas situações necessitam de exploração cuidadosa ou até mesmo de discussão com outras pessoas.”

No questionário foram feitas indagações sobre o uso do software GeoGebra nas aulas de matemática. Pode-se verificar (*ver gráfico 01*) que $84,6\%$ dos estudantes consideraram que as aulas sobre tópicos de Geometria Plana (Pontos notáveis do triângulo) tornaram-se mais proveitosas com o uso do GeoGebra. Quando questionados se consideravam que o uso do GeoGebra nas aulas de matemática promoveu uma melhora no entendimento dos conteúdos apresentados, tivemos um resultado expressivo (*ver gráfico 02*), cerca de $87,2\%$ dos estudantes responderam que consideram, o que significa que o uso do software atuou como um facilitador, propiciando a aprendizagem dos estudantes.

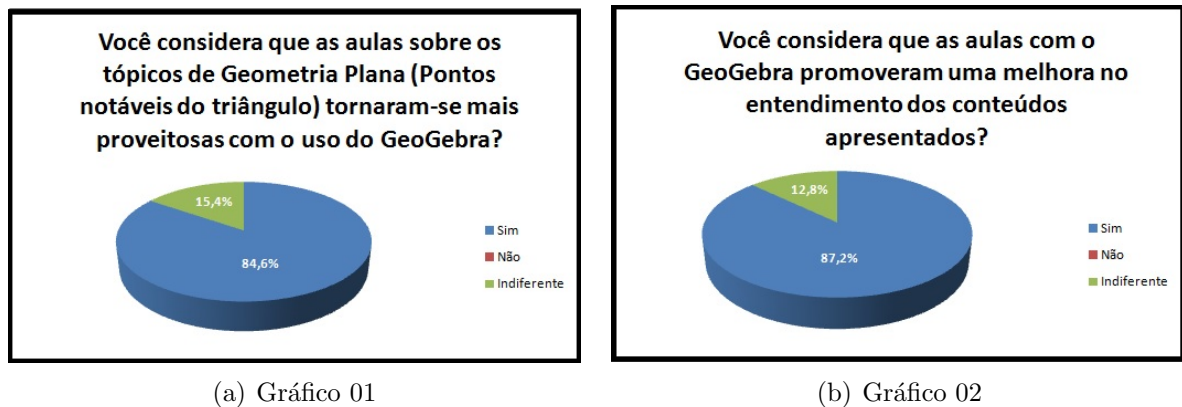


Figura 5.1

Uma outra indagação trata sobre o uso do software GeoGebra no que concerne a motivação, quanto a participação do aluno nas atividades propostas pelo professor em sala de aula, o resultado indagação é considerado satisfatório (*ver gráfico 03*).

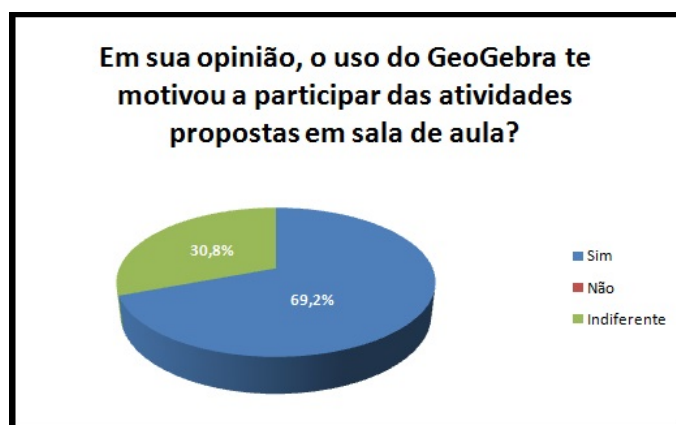


Figura 5.2: Gráfico 03

Ao responderem o item do questionário, o qual solicitava que os alunos indicassem dentre as opções apresentadas, quais motivos eles destacariam como relevantes no que tange ao ensino dos tópicos de Geometria Plana (Pontos notáveis do triângulo) por meio do software GeoGebra nas aulas de matemática, estes sinalizaram três motivos, são eles:

- Estimula a participação dos alunos nas aulas;
- Facilita a construção e a visualização das figuras;
- Torna as aulas mais dinâmicas e criativas.

Os resultados em porcentagem são expressos no gráfico abaixo (*ver gráfico 04*).

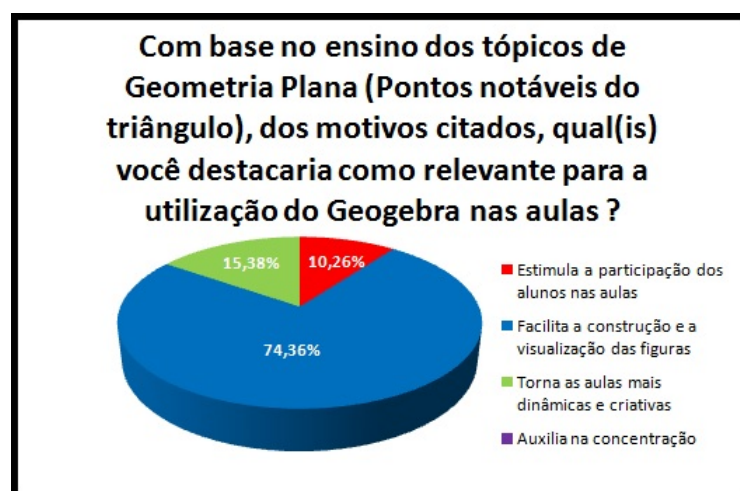


Figura 5.3: Gráfico 04

De acordo com o *gráfico 04*, nota-se que a maioria dos estudantes considera que o uso do software GeoGebra nas aulas de matemática facilita a construção e a visualização das figuras. O uso do software como recurso didático nas aulas promoveu uma maior interação entre os alunos e o professor, conseqüentemente isso trouxe benefícios no processo de ensino e aprendizagem. Por outro lado, o processo de construção é fundamental para o aluno, já que oportuniza ao mesmo a criação de conceitos e definições a partir do que ele constrói, fazendo com que os conteúdos fiquem mais compreensíveis e garantam a aprendizagem do corpo discente.

Quanto as questões subjetivas do questionário aplicado aos alunos, foram solicitados aos mesmos que eles sinalizassem quais eram os pontos positivos quanto ao uso do software GeoGebra nas aulas dos tópicos de Geometria Plana (Pontos notáveis do triângulo), bem como caso houvesse que destacassem também os pontos negativos.

Em resposta ao questionamento no que se refere aos aspectos positivos, a maioria dos estudantes afirmaram que o uso do software GeoGebra nas aulas promoveu uma melhor visualização das figuras, bem como que seu uso tornaram as aulas mais dinâmicas e compreensíveis.

Cabe relatar que era nítido o interesse dos estudantes em participar das atividades propostas com o uso do GeoGebra, eles estavam de fato mais motivados e isso gerou uma maior aproximação entre alunos x professor, colaborando de modo positivo no processo de ensino e aprendizagem.

Abaixo apresentaremos alguns pontos positivos levantados pelos alunos, os quais estão dispostos na Tabela 01.

Aluno 1	"Promove o ensino do conteúdo de forma mais dinâmica para o aluno; com o uso do software o aprendizado fica mais motivador; além, é claro, da maior facilidade de visualizar claramente as figuras que o assunto exige observar. "
Aluno 2	"Ajuda na melhor visualização das figuras, além de otimizar o tempo da aula"
Aluno 3	"Ajuda no entendimento do assunto, pois possibilita uma melhor visualização do que é passado, além de tornar a aula mais atrativa por apresentar uma variação no modelo de ensino já estabelecido. "
Aluno 4	"Torna as aulas mais dinâmicas e estimulantes para a participação efetiva do aluno. "
Aluno 5	"Faz com que os alunos possam visualizar com mais precisão as figuras formadas, além de trazer um modelo diferente de aprendizado para a sala de aula, o que pode desenvolver uma futura curiosidade do aluno e o fazer procurar mais coisas relacionadas a isso, já que o computador é uma ferramenta de uso costumeiro de grande parte dos adolescentes."

Figura 5.4: Tabela 01 - Respostas de alunos ao questionário aplicado

É importante salientar que apenas o uso do software não garantirá aprendizagem, mas certamente promoverá avanços significativos. Como fora exposto, é necessário haver uma interação entre alunos, professores e os conteúdos, pois o software por si só não faz matemática.

Quanto aos aspectos negativos, grande parte dos participantes não sinalizaram nenhum ponto negativo, outros destacaram que o uso do software ocorreu em poucas aulas. Por outro lado, outros destacaram que o uso do software deve ser dosado pelo professor para que não ocorra dispersão do grupo.

Dentre os aspectos levantados, corroboro com os estudantes no que concerne a ampliação do número de aulas com o uso do software, já no que tange a dispersão do grupo sugeriria aos professores que pretendem fazer uso desta metodologia, que se possível utilizem um monitor/estagiário para auxiliar no controle do grupo, pois reconheço que é difícil ter o controle absoluto da turma num laboratório, haja vista que o mesmo possui computadores conectados a internet, onde os alunos poderão desenvolver outras atividades não relacionadas ao objeto de estudo proposto pelo professor.

Analogamente apresentaremos uma tabela abaixo com as respostas dos alunos sobre a questão que solicita aos mesmos que apresentem, caso haja, os pontos negativos referentes ao uso do software nas aulas de Geometria Plana.

Aluno 1	"Na minha experiência, infelizmente, o uso foi um pouco limitado, tendo poucas aulas usando tal software. Mais aulas com essa abordagem seriam bastante interessantes. "
Aluno 2	"Não vejo pontos negativos, pois eu acho que implementar a tecnologia na educação proporciona um processo educativo bem mais rico."

Figura 5.5: Tabela 02 - Respostas de alunos ao questionário aplicado

Por fim, temos aqueles que defendem as aulas tradicionais, veja a seguir a resposta do Aluno 3 referente a última indagação feita no questionário: "Sim. Um ponto importante é que, como ferramenta auxiliar, ela não deve substituir os desenhos manuais que o professor deve realizar. Mesmo a ferramenta sendo uma ótima ajuda, é importante que os desenhos com os seus respectivos pontos traçados no plano sejam feitos a mão também, para dar ainda mais peso a elucidação e desenvolvimento do assunto".

Apresentaremos a seguir os resultados obtidos com a aplicação do questionário a duas docentes do Departamento de Matemática do IFBA Campus de Salvador, as quais analisaram o capítulo 4 (Aplicações) desta dissertação.

A primeira pergunta refere-se a formação e ao tempo de atuação como docente. Em resposta a esta pergunta, uma delas revelou que é Licenciada em Matemática, Mestre em Educação Matemática e atua há mais de 26 anos como docente. Já a outra docente também é Licenciada em Matemática, Mestre em Ensino de Matemática e possui 10 anos de experiência como docente.

Ainda sobre o perfil docente, ambas revelaram ter uma carga horária semanal de 40h e que possuem experiência no Ensino Fundamental II (do 6º ao 9º ano), no ensino médio (do 1º ao 3º ano) e em algumas disciplinas do ensino superior.

Quando consultadas sobre as metodologias usadas em sala de aula. Uma das professoras consultadas revelou que usa vídeos, contextos da História da Matemática, TICs, materiais manipuláveis, leitura e construção de textos (cordel e quadrinhos), dentre outros. Já a outra professora faz uso de aulas tradicionais, bem como também utiliza materiais manipuláveis e quanto as TICs, destacou o uso do GeoGebra, Excel e o aplicativo Math-pix para celulares.

Na pesquisa, tal como os estudantes, as duas professoras responderam que consideram relevante o uso de recursos computacionais para o ensino de Matemática. Segundo Hespagnol e outros[7]:

"...a tecnologia e a informática estão intrinsecamente ligadas ao ensino e aprendizagem dos jovens estudantes e esta é uma realidade que deve ser alcançada e desenvolvida pelo/para professor que almeja uma sociedade com seres pensantes, atuantes, capazes de interpretar de forma crítica os problemas no meio

que os rodeiam, sugerindo assim soluções e ou propostas para os problemas que enfrentam. ”

Quando questionadas se o uso do GeoGebra como recurso didático pode tornar as aulas de Geometria Plana (Pontos notáveis do triângulo) mais proveitosas, ambas afirmaram que sim.

Por fim, foi solicitado as docentes participantes desta pesquisa, que com base na análise feita no capítulo 4 (Aplicações) desta dissertação apontassem quais foram as suas impressões sobre o mesmo, bem como que destacassem os aspectos positivos e negativos.

Apresentaremos a tabela abaixo com as respostas das docentes a este questionamento, onde elas destacam as suas impressões, bem como fazem sugestões ao trabalho.

Docente 1	"Considero de suma importância a proposta trazida. Com toda a certeza a utilização do GeoGebra dá uma dinamicidade para a compreensão das particularidades que os elementos de um triângulo possui. Como sugestão só faria uma reorganização do que é exposto no capítulo. Colocaria na forma de quadro (ou tabela como queira chamar) as informações por etapas de cada construção. Por exemplo, como você se propõe a tratar dos pontos notáveis do triângulo, cada quadro se referiria a um ponto notável. Daí traria etapa por etapa dessa construção. Ficaria algo mais didático para o professor que enxergaria melhor os processos de construção de cada ponto notável. No mais, o trabalho traz riqueza para este espaço ainda carente, em especial nas salas de aula. Parabéns!"
Docente 2	"Achei muito interessante a proposta de trabalho e visualizo sua aplicação nas aulas de matemática do ensino médio. Porém achei o problema 5 muito trabalhoso e não sei se os estudantes acompanhariam tal raciocínio. Tentaria substituí-lo por um problema mais simples e colocaria este em uma seção de aprofundamento e/ou desafio."

Figura 5.6: Tabela 03 - Respostas das docentes ao questionário aplicado

Capítulo 6

Considerações Finais

Diante dos resultados obtidos após a aplicação do questionário aos alunos e considerando os avanços obtidos no desempenho acadêmico dos mesmos, podemos concluir que os objetivos desta pesquisa foram alcançados. Com relação ao questionário aplicado, cabe destacar que os alunos afirmaram que o uso do software GeoGebra nas aulas de Geometria Plana, em especial no estudo dos pontos notáveis do triângulo, propiciou a construção de figuras geométricas, facilitando a visualização das mesmas, além de ter promovido dinamismo nas aulas e com isso os alunos ficaram mais estimulados a participarem das atividades propostas, bem como atestaram que após o uso desta metodologia houve uma melhora no entendimento dos conteúdos apresentados.

Desta forma, temos a comprovação com base na análise dos resultados apresentados pelos questionários aplicados aos estudantes, de que o uso do software GeoGebra no estudo dos pontos notáveis do triângulo facilita a aprendizagem dos discentes. Quanto as professoras que participaram desta pesquisa, estas sinalizaram por meio do questionário a que foram submetidas a importância da proposta trazida e visualizaram a sua aplicação nas aulas de matemática, bem como fizeram algumas sugestões.

Este trabalho tem como proposta estudar os pontos notáveis do triângulo por meio do GeoGebra, no capítulo de Aplicações propomos a resolução das atividades com o uso do software e deixamos tais atividades como um produto, cujo intuito é que estas possam ser utilizadas por professores do ensino básico, a fim de que estes docentes venham a obter resultados satisfatórios tais como os que foram obtidos por mim, quando da aplicação das atividades nas minhas turmas.

Aos professores que pretendam aplicar tais atividades, sugiro que após trabalhados os conceitos fundamentais, proposições e/ou propriedades inerentes ao tema estudado e que foram devidamente trabalhados no corpo desta dissertação, que estes apresentem a interface do GeoGebra e suas funcionalidades em uma aula expositiva, deixando a cargo dos estudantes experimentarem os comandos, bem como escolherem os mais apropriados para cada atividade, não cometendo o erro de fornecer um passo a passo de como resolver as atividades propostas. Vale ressaltar que a descrição dos passos no capítulo 4 tinha como propósito apenas orientar o professor e mostrar as diferenças entre a resolução de dado problema com e sem o uso do GeoGebra.

Portanto, espera-se que este trabalho possa estimular professores da educação básica a fazerem uso desta metodologia em suas respectivas salas de aula, de modo que eles possam melhorar a qualidade do ensino e que garantam a aprendizagem dos seus alunos, não apenas no estudo dos pontos notáveis do triângulo, mas que possam utilizar o GeoGebra em outros conteúdos.

Referências Bibliográficas

- [1] MUNIZ NETO, A. C.. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana** - 2.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [2] BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana** - 11.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [3] DOLCE, OSVALDO; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar** - 8.ed. - São Paulo: Atual, 2005.
- [4] ARAUJO, L. C. L; NÓBRIGA, J. C. C. **Aprendendo matemática com o GeoGebra** - 1.ed. - São Paulo: Exata, 2010.
- [5] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- [6] BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática** - 4.ed. - Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- [7] HESPANHOL, L. L.; NICOLA, L.; BARPP, C. R.; FERREIRA, C. M.; RIBEIRO, E. M. P. **A utilização do software GeoGebra para o ensino da Geometria**. Disponível em http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6276_4233_ID.pdf. Acesso em 01 de maio de 2018.
- [8] BITTENCOURT, P. M. **Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014, 65p. Dissertação de mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
- [9] **POLOS OLIMPICOS DE TREINAMENTO INTENSIVO - POTI, IMPA**. Disponível em http://poti.impa.br/uploads/material_teorico/4z89m01ufn4sk.pdf. Acesso em 01 de maio de 2018.
- [10] Enciclopédia de Centros de Triângulos (ETC). Disponível em <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>. Acesso em 08 de junho de 2018.
- [11] REZENDE, E. Q. F; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas** - 2.ed. - São Paulo: Unicamp, 2008.

Apêndice A

Questionário aplicado aos alunos

Este questionário é parte integrante da pesquisa para uma dissertação de Mestrado, a qual tem como temática a utilização do software GeoGebra no estudo dos pontos notáveis do triângulo (Geometria Plana).

Considerando as aulas de matemática desenvolvidas no ano letivo de 2016, nas quais o professor de Matemática fez uso frequente do software GeoGebra, responda os itens a seguir:

1) Nome completo: _____

2) Idade: _____

3) **Você considera relevante o uso de recursos computacionais para o ensino de Matemática?**

- a) Sim
- b) Não
- c) Indiferente

4) **Você considera que as aulas sobre os tópicos de Geometria Plana (Pontos notáveis do triângulo) tornaram-se mais proveitosas com o uso do GeoGebra?**

- a) Sim
- b) Não
- c) Indiferente

5) **Você considera que as aulas com o GeoGebra promoveram uma melhora no entendimento dos conteúdos apresentados?**

- a) Sim
- b) Não
- c) Indiferente

6) Com base no ensino dos tópicos de Geometria Plana (Pontos notáveis do triângulo), dos motivos citados, qual(is) você destacaria como relevante para a utilização do GeoGebra nas aulas?

- a) Estimula a participação dos alunos nas aulas
- b) Facilita a construção e a visualização das figuras
- c) Torna as aulas mais dinâmicas e criativas
- d) Auxilia na concentração

7) Em sua opinião, o uso do GeoGebra te motivou a participar das atividades propostas pelo professor em sala de aula?

- a) Sim
- b) Não
- c) Indiferente

8) Qual(is) ponto(s) positivo(s) você pode destacar no que se refere ao uso do software nas aulas de Geometria Plana (Pontos notáveis do triângulo)?

9) Você destacaria algum(ns) ponto(s) negativo(s) no que se refere ao uso do software nas aulas de Geometria Plana (Pontos notáveis do triângulo)? Em caso afirmativo, favor listar o(s) ponto(s) negativo(s).

Apêndice B

Questionário aplicado aos docentes

Caro professor(a), este instrumento é parte de uma pesquisa para uma dissertação de Mestrado, a qual tem como temática a utilização do software GeoGebra no estudo dos pontos notáveis do triângulo.

Como fora enviado para cada professor participante desta pesquisa um dos capítulos (Capítulo Aplicações) desta dissertação, o qual engloba um conjunto de atividades desenvolvidas com e sem o uso do GeoGebra.

Logo após a leitura e análise do material, buscamos com tal instrumento coletar algumas informações sobre o perfil do docente, bem como sobre as suas impressões com relação ao trabalho, sugestões, além dos aspectos positivos e negativos do mesmo.

1) Qual a sua formação e o tempo de atuação como docente?

2) Você leciona ou já lecionou em qual(is) série(s)?

3) Qual é a sua carga horária semanal?

4) Quais as metodologias que você utiliza em sala de aula?

5) Você considera relevante o uso de recursos computacionais para o ensino de Matemática?

- a) Sim
- b) Não
- c) Indiferente

6) Você considera que o uso do GeoGebra como recurso didático pode tornar as aulas de Geometria Plana (Pontos notáveis do triângulo) mais proveitosas?

7) Com base no trabalho apresentado no capítulo Aplicações desta dissertação, relate quais foram as suas impressões sobre o mesmo, bem como destaque os seus aspectos positivos e negativos.

Apêndice C

Atividades propostas do Capítulo de Aplicações

Estas questões foram selecionadas para serem resolvidas com o uso do software GeoGebra, tais questões foram extraídas do capítulo 4 desta dissertação e o objetivo é que sejam aplicadas por professores de matemática da educação básica em turmas do ensino médio.

1) Sejam ABC um triângulo e P , M e H respectivamente os pés da bissetriz interna, mediana e altura relativas ao lado BC . Se P e H ou M e H coincidirem, prove que ABC é isósceles de base BC .

2) Mostre que em um triângulo ABC qualquer, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro são colineares. O baricentro está entre o ortocentro e o circuncentro e sua distância ao ortocentro é o dobro de sua distância ao circuncentro.

3) Uma reta r passa pelo baricentro de um triângulo ABC deixando o vértice A em um semiplano e os vértices B e C no outro semiplano determinado por r . As projeções de A , B e C sobre a reta r são M , N e P , respectivamente. Prove que $\overline{AM} = \overline{BN} + \overline{CP}$.

4) Seja ABC um triângulo de ortocentro H , incentro I e circuncentro O . Mostre que ABC é equilátero se, e só se, dois quaisquer dos pontos H , I e O coincidirem.

5) Seja H o ortocentro de um triângulo ABC , tal que $AC \neq BC$. O segmento que une os pontos médios de HC e AB intersecta a bissetriz de $\angle ACB$ no ponto N . Sabendo que o circuncentro do triângulo ABC pertence à reta que passa pelos pontos H e N , determine a medida de $\angle ACB$.