Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

Francisco de Assis de Albuquerque

Visualizando e Dinamizando Temas no Ensino Básico

Orientador:
Sebastião Marcos Antunes Firmo

NITERÓI
OUTUBRO / 2017

Francisco de Assis de Albuquerque

Visualizando e Dinamizando Temas no Ensino Básico

Dissertação apresentada por **Francisco de Assis de Albuquerque** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador:
Sebastião Marcos Antunes Firmo

NITERÓI
2017

Copyright © 2017 - Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, do orientador e da universidade.

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

XXXX Albuquerque, Francisco de Assis de

Visualizando e Dinamizando Temas no Ensino básico / Francisco de Assis de Albuquerque. - Niterói: [s.n.] , 2017.

85f.

Orientador: Sebastião Marcos Antunes Firmo

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal Fluminense, 2017.

1. Geometria Dinâmica 2. Ensino de Matemática. 3. Provas Visuais. 4. Geometria. 5. Álgebra. I. Título.

XXX XXX.XX

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Rua Professor Marcos Waldemar de Freitas Reis, s/n, Blocos G e H,
Campus do Gragoatá. São Domingos. Niterói - RJ. 24210-201

Ata dos trabalhos finais da Comissão Examinadora da monografia apresentada por Francisco de Assis de Albuquerque.

Aos dezessete dias do mês de novembro de dois mil e dezessete, reuniram-se sala 302 do Bloco G, Campus do Gragoatá, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, os membros da Comissão Examinadora constituída pelos professores Sebastião Marcos Antunes Firmo da Universidade Federal Fluminense; Sinésio Pesco da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Jaime Velasco Câmara da Silva da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Dinamérico Pereira Pombo Júnior da Universidade Federal Fluminense e Begoña Alarcón Cotillas da Universidade Federal Fluminense, sob a presidência do primeiro, para prova pública de defesa da dissertação intitulada **"Visualizando e Dinamizando Temas no Ensino Básico"**, apresentada pelo mestrando Francisco de Assis de Albuquerque. A defesa da dissertação atende às exigências contidas no Regulamento Específico do Curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT - da Universidade Federal Fluminense. A dissertação foi elaborada sob a orientação do professor Sebastião Marcos Antunes Firmo. O mestrando Francisco de Assis de Albuquerque fez a exposição de seu trabalho durante 50 minutos, iniciando às 10:00h e concluindo às 10:50h. A seguir, respondeu as questões formuladas pelos integrantes da Comissão Examinadora. Terminada a arguição, realizou-se a reunião da Comissão Examinadora, que apresentou parecer no sentido da aprovação do mestrando Francisco de Assis de Albuquerque, considerando-se o trabalho apresentado e a forma com que se houve na apresentação na defesa do mesmo. Para constar, foi lavrada a presente ata que vai assinada pela Secretária Administrativa do Mestrado Profissional em Matemática, pelos membros da Banca Examinadora e pelo mestrando.

Niterói, 17 de novembro de 2017.

Prof. Sebastião Marcos Antunes Firmo

Prof. Sinésio Pesco

Prof. Jaime Velasco Câmara da Silva

Prof. Dinamérico Pereira Pombo Júnior

Profª. Begoña Alarcón Cotillas

Francisco de Assis de Albuquerque (mestrando)

Mariana Lattanzi (secretária)

Dedico este trabalho

A *DEUS*, por me conceder a oportunidade de realizá-lo ;

aos meus pais *Manoel* (in memorian) e *Edite* (in memorian) por me motivarem a trilhar o caminho que me conduziu a este trabalho ;

à minha esposa *Zenilde* e aos meus filhos *Brenda* e *Michel* por percorrerem comigo este caminho, dando-me força para concluí-lo da melhor forma possível.

ao coautor deste trabalho, *Prof. Sebastião Firmo*, pela dedicação e cumplicidade na elaboração do mesmo.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Sebastião Firmo, por seu comprometimento, dedicação e pela forma como orientou-me na elaboração deste trabalho, preocupando-se com a forma simples de elaborar um conteúdo de qualidade. A sua paciência em me ouvir, a sua forma de responder aos meus quationamentos e as minhas dúvidas, além do carinho com que me atendeu, nos inúmeros encontros, foram fatores determinantes na elaboração deste trabalho. Muito obrigado!

Ao revisor, Prof. Márcio Gomes, por sua dedicação e pelas valiosas sugestões que contribuíram para a qualidade deste trabalho.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa, peça importante para a realização deste trabalho.

A todos os professores e funcionários da UFF, envolvidos no PROFMAT, por contribuírem de forma brilhante e se preocuparem de fato com a formação do professor do Ensino Básico.

A meus colegas do PROFMAT pelo legado destinado ao Ensino da Matemática. Os primeiros frutos colhidos mostram-se ricos em conhecimento. Parabéns a todos!

A todos os professores e funcionários da Escola Municipal Maestro Heitor Villa-Lobos pelos incentivos e por acreditarem em mim.

Aos funcionários da FME - Niterói (Fundação Municipal de Educação de Niterói), em especial a Prof.ª Nice Oliveira, coordenadora de Matemática, por incentivarem e promoverem a busca por melhorias no Ensino da Matemática.

A meus colegas de profissão Carlos Gomide, Rogério Wanis, Márcio Gomes e tantos outros que direta ou indiretamente contribuíram com este trabalho.

A meus alunos que tantas vezes me ensinaram enquanto aprendiam. Muito obrigado!

À professora Norma Sueli, por me incentivar a fazer o PROFMAT. Muito obrigado!

À minha esposa Zenilde e aos meus filhos Brenda e Michel, por me incentivarem, incondicionalmente, a realizar os meus sonhos. Muito obrigado, meus amores.

Resumo

Ver e *refletir* sobre o que temos à nossa frente é o que faremos neste trabalho com alguns resultados da Matemática. Vamos associar a esses resultados imagens e/ou diagramas que, visualmente, os revelam. Além disso, tanto as imagens quanto os diagramas tomam vida ao serem animados, favorecendo assim a reflexão e a abrangência dos resultados matemáticos os quais se pretende revelar. Em alguns casos, é necessário um conhecimento prévio acerca dos assuntos envolvidos na *prova visual* e, para tal , de forma clara e objetiva, desenvolvemos a teoria necessária para entendê-los. Os temas aqui abordados visualmente, dinamicamente e formalmente são: *Médias* e *Progressões*, *Aritméticas* e *Geométricas*. Essas imagens, muitas delas engenhosas, são didaticamente perfeitas e nos ajudam à compreender e refletir sobre os mais variados resultados apresentados no ensino da Matemática, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Apesar de *não serem provas*, no sentido estrito do termo, as *provas visuais* servem para *modelar* e *refinar* nossa intuição matemática e, muitas vezes, nos permitem mergulhar nosso tema de estudo em nosso cotidiano. Mas elas podem ir mais longe, dando-nos através dessas visualizações a arquitetura de uma *trilha* que nos conduzirá a uma prova matemática do resultado em questão.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Provas visuais; Dinamizando temas na Matemática.

Abstract

To see and think about what we have ahead of us is what we are going to do with some results in mathematics. We are going to associate this results to images and/or diagrams that visually reveal themselves. Besides that, both pictures and diagrams come to life by being animated, favoring the reflection and comprehensiveness of mathematic's results that intends to reveal. In some cases, it is necessary a previous knowledge about the subjects envolved in the visual proof and, for this, clearly and objectively, we develop a necessary theory to understant it. The themes approached here visually, dinamically and formally are the Geometric Mean and the Arithmetic Progression. The pictures, many of them ingenious, are didactically perfect and help us understand and reflect about a great variety of results presented in the mathematics teaching, both in first and second level of education, before the university education. A visual proof is not a proof in the real sense but it serves to modeling and refining our intuition in mathematic, and sometimes allow us to detect in our daily lives the ideas that we are studying. But they can go further, giving us through the visualizations, the trail architecture that will lead us to a mathematical proof of the result in question.

Keywords: Mathematic Teach; Visual proofs; Dynamizing themes in mathematics.

Dicas para melhor aproveitamento da leitura

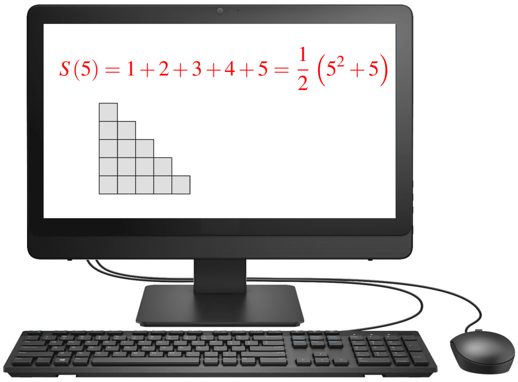


Figura 0.1 : Leitura em meio digital .
Fonte: Elaborada pelo autor, 2017 .

Este trabalho foi produzido em LaTeX e compilado no formato *pdf* . Tanto para uma leitura interativa na qual o leitor explora dinamicamente as imagens como para observar algumas animações inseridas neste trabalho , devemos utilizar um equipamento eletrônico com leitor de pdf e acesso à *internet*. Sugerimos que a leitura deste material seja feita através do arquivo no formato pdf, salvo em um equipamento eletrônico, o qual encontra-se em *https://www.chiquinho.org/dissertacao/uff/dissertacao_chiquinho_uff_38.pdf*. Seguem informações importantes que garantem estas funcionalidades:

☞ Quando a leitura for feita através de um link de internet onde este trabalho encontra-se hospedado, ou seja, a leitura é feita através da internet, é indicado o uso dos navegadores de internet Firefox ou Edge , por serem os únicos, entre os testados, em que as funcionalidades deste trabalho, salvo as animações, fluem dentro do esperado.

☞ Ao clicar sobre uma imagem, acompanhada do símbolo , abrirá uma uma janela com a animação desta imagem. Algumas dessas imagens, dependendo da velocidade da internet, podem demorar um pouco para abrirem.

☞ Ainda, quando a leitura é feita através da internet e utilizamos um dos navegadores indicados, após explorar a animação de uma figura, para retornar ao texto, exatamente no ponto onde realizava a leitura, basta clicar no botão que se encontra abaixo desta figura.

Retornar ao texto

Quando utilizamos, por exemplo, o navegador Google Chrome , ao clicar no botão acima ou ao aproximar o cursor do canto esquerdo/superior e clicar em , retornamos para o início do trabalho e não para o ponto onde realizávamos a leitura.

☞ Quando a leitura for feita através de um arquivo deste trabalho, salvo em um equipamento eletrônico, após explorar a animação da imagem, para retornar ao texto basta aproximar o cursor do canto direito/superior e clicar em ☒ para fechar a tela.

☞ Nas duas formas de leitura, após utilizar um link interno, ou seja, um link que remete a um outro ponto do texto, para retornar ao ponto anterior basta manter o botão Alt pressionado e em seguida clicar no botão ◄ no teclado do seu equipamento eletrônico.

Sumário

Introdução

A ideia aqui é mostrar aos leitores a importância das formas geométricas na representação de alguns resultados da Matemática, favorecendo a sua compreensão. Para tal, baseamo-nos , principalmente, nas obras de Roger B. Nelsen, intituladas *Proofs Without Words* (Provas Sem Palavras). Nesta coleção, as imagens e/ou diagramas revelam a veracidade de identidades algébricas, podendo servir como ponto de partida para se determinar a prova formal dessas identidades.

O uso do recurso tecnológico partiu da intensão de dar vida a essas *provas visuais*, isto é, dinamizá-las. Com isso, pretende-se que o observador, ao explorar essas imagens e/ou diagramas, perceba pequenos detalhes envolvidos nessas provas, o que muitas vezes não é possível quando não se utilizam estes recursos. Para tal, utilizamos o software GeoGebra, uma ferramenta de geometria dinâmica.

Uma *Prova Sem Palavra* pode exigir do observador um conhecimento prévio acerca do tema em questão e, nesses casos, antecedendo às provas, desenvolvemos os conteúdos necessários à sua compreensão, de forma clara e concisa, mas sem perder o rigor e o formalismo exigido num texto matemático. Agregados aos conteúdos, disponibilizamos um aparato de imagens e/ou diagramas dinamizados que facilitam o entendimento dos mesmos.

Nessa linha, nos atemos a desenvolver os seguintes temas: *Médias* e *Progressões*, *Aritméticas* e *Geométricas*.

O primeiro capítulo discorre sobre as *médias aritmética e geométrica*. Nele, além das definições, exploramos as propriedades dessas médias e estabelecemos uma importante relação: a desigualdade entre elas. Diferentes temas da *geometria euclidiana plana* são desenvolvidos para justificar esta desigualdade.

Já o segundo capítulo começa com exemplos que nos ajudam a compreender o conceito de *progressão aritmética*. A partir daí, desenvolvemos as teorias que justificam os resultados por trás das diferentes *provas visuais* da soma dos n termos de uma *progressão aritmética*. Dentre essas somas, por exemplo, temos a soma dos n primeiros números pares , dos n primeiros números ímpares e também dos n primeiros números inteiros.

Por fim, o terceiro capítulo trata da *progressão geométrica* e o seu desenvolvimento segue nos moldes do capítulo anterior, isto é, por exemplo, justificando o resultado por trás da *prova visual* da soma das n primeiras potências de base 3 e, também das diferentes somas dos infinitos termos de uma *progressão geométrica*.

Este trabalho foi elaborado pensando num elemento motivador que contribuísse de fato com o processo de ensino-aprendizagem. Isto porque, na associação entre as identidades algébricas e suas respectivas *provas visuais*, o professor estimula o aluno a observar, a explorar e a criar , como sugere a atividade proposta no Apêndice A.

1 Médias Aritmética e Geométrica

Começamos estudando, neste capítulo, após as suas definições, as propriedades e as aplicabilidades das *médias aritmética e geométrica*. Muitas dessas propriedades são acompanhadas por aplicativos que nos ajudam a compreendê-las e a visualizá-las. Por fim, estudamos e visualizamos, de diferentes modos, a desigualdade entre essas médias. Esta importante relação é utilizada, por exemplo, em problemas que envolvem máximo e mínimo, como nos exemplos que seguem a teoria.

1.1 Média Aritmética

1.1.1 Definição e exemplos

Denotamos o conjunto dos números *inteiros positivos* por $\mathbb{Z}^+$, isto é, $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Definição 1.1. Considere a lista ordenada finita $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de números reais, onde $n \in \mathbb{Z}^+$. Definimos e denotamos sua *média aritmética* por:

$$\boxed{MA := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.}$$

Vale ressaltar que esta definição fala em média aritmética de uma lista ordenada finita de números reais, não necessariamente positivos. Essa *média* depende de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, mas independe da ordem na qual esses números estão dispostos na lista, pois a operação de adição goza da propriedade comutativa.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.1. (UERJ - Vestibular - 1999) Seis caixas d'água cilíndricas iguais estão assentadas no mesmo piso plano e ligadas por registros (R) situados nas suas bases, como sugere a figura a seguir.

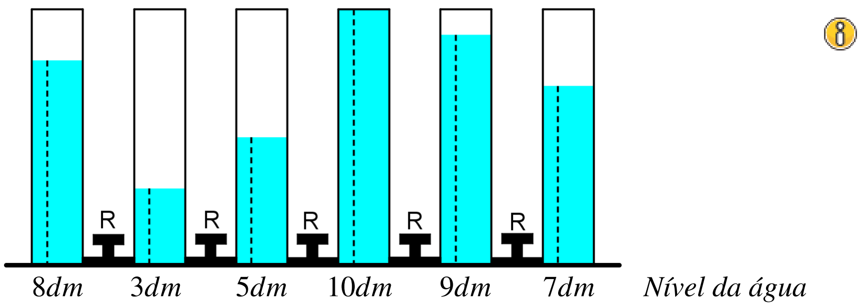


Figura 1.1: Vestibular UERJ - 99 .
Fonte: Página do Vestibular da UERJ na internet, (2014) [34].

Após a abertura de todos os registros, as caixas ficaram com os níveis de água num mesmo plano. A altura desses níveis, em dm, será:

(A) 6,0
(B) 6,5
(C) 7,0
(D) 7,5

Resolução: Se $b > 0$ é a área da base de cada cilindro, em dm^2, segue que o volume de água em cada cilindro é dado, em dm^3, pelo produto da área da base pela altura do nível de água no mesmo. Como os cilindros estão interligados, então, após a abertura dos registros, o volume total de água é distribuído entre eles até atingir o equilíbrio, momento em que a altura do nível da água é a mesma nos cilindros. Desprezando o volume contido nas ligações entre os cilindros e lembrando que o volume total foi preservado, temos:

$$8b + 3b + 5b + 10b + 9b + 7b = 6 \times (b \times h),$$

onde h é a altura resultante do nível da água depois de abertos os registros. Logo,

$$h = \frac{8+3+5+10+9+7}{6} = 7dm.$$

Mostramos assim que a altura final vale $7dm$ e, de fato, é dada pela *média aritmética* das alturas iniciais dos níveis dos cilindros. Ou seja, abertos os registros, o sistema evoluiu para um estado onde as alturas dos níveis de água são iguais e valem, exatamente, a *média aritmética* das alturas iniciais.

Neste exemplo, a *média* em questão é igual a um dos elementos da lista.

Exemplo 1.2. (ENEM - 2011) A participação dos estudantes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) aumenta a cada ano. O quadro indica o percentual de medalhistas de ouro, por região, nas edições da OBMEP de 2005 a 2009:

Região	2005	2006	2007	2008	2009
Norte	2%	2%	1%	2%	1%
Nordeste	18%	19%	21%	15%	19%
Centro-Oeste	5%	6%	7%	8%	9%
Sudeste	55%	61%	58%	66%	60%
Sul	21%	12%	13%	9%	11%

Figura 1.2: ENEM - 2011 - MT - 2º dia | Caderno 5 - AMARELO - Página 23.
Fonte: Página do INEP na internet, (2014) [11].

Em relação às edições de 2005 a 2009 da OBMEP, qual o percentual médio de medalhistas de ouro da região Nordeste?

(A) 14,6%
(B) 18,2%
(C) 18,4%
(D) 19,0%
(E) 21,0%

Resolução: Das informações da tabela, relativas ao Nordeste, obtemos a MA dos percentuais ou o percentual médio desta região, do seguinte modo:

$$MA = \frac{18+19+21+15+19}{5} = 18,4.$$

Assim, o percentual médio de medalhistas de ouro da região Nordeste, no período de 2005 a 2009, é de 18,4% ao ano.

Neste caso, a *média* não é igual a nenhum elemento da lista. Sendo assim, podemos afirmar que a MA pode ser ou não um elemento da lista.

Exemplo 1.3. (PROFMAT - ENA - 2012 - [27]) Considere três números reais a, b e c. A média aritmética entre a e b é 17 e a média aritmética entre a, b e c é 15. O valor de c é:

(A) 9
(B) 10
(C) 11
(D) 12
(E) 15

Resolução: Sendo a MA entre a e b igual a 17, então:

$$\frac{a+b}{2} = 17 \iff a+b = 34\,. \tag{1}$$

Do mesmo modo, segue que:

$$\frac{a+b+c}{3} = 15 \iff a+b+c = 45\,. \tag{2}$$

Portanto, substituindo (1) em (2), temos:

$$34 + c = 45 \iff c = 11\,.$$

Com isso, finalizamos o exemplo.

1.1.2 Propriedades

A partir de agora a expressão "lista" será subentendida como "lista ordenada finita", a menos que seja dito explicitamente o contrário.

Vamos estabelecer algumas propriedades da *média aritmética*.

Propriedade 1.1. Considere as listas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ de números reais, com $n \in \mathbb{Z}^+$. A MA de $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$:

(i) *coincide* com a MA de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se, e somente se, a_{n+1} é *igual* a MA de $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

(ii) é *maior* do que a MA de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se, e somente se, a_{n+1} é *maior* do que a MA de $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

(iii) é *menor* do que a MA de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se, e somente se, a_{n+1} é *menor* do que a MA de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Esta propriedade mostra como se comporta uma *média aritmética* quando a perturbamos, introduzindo um novo elemento na lista.

Prova da Propriedade 1.1. A diferença entre essas médias nos permite compará-las entre si. Calculando esta diferença, obtemos:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \tag{3}$$

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})n - (a_1+a_2+\cdots+a_n)(n+1)}{n(n+1)} =$$

$$\frac{na_{n+1} - (a_1+a_2+\cdots+a_n)}{n(n+1)}$$

onde $n \geq 1$.

Logo, a expressão (3) se anula quando e somente quando

$$n\,a_{n+1} = a_1+a_2+\cdots+a_n \;\; \text{, isto é ,} \;\; a_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \, .$$

o que prova o item (i).

Por outro lado, lembrando que $n(n+1) > 0$, então a expressão (3) é maior que zero se, e somente se,

$$n\,a_{n+1} > a_1+a_2+\cdots+a_n \;\; \text{, isto é ,} \;\; a_{n+1} > \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \, .$$

e assim fica provado o item (ii).

A demonstração do item (iii) é similar àquela do item (ii). □

Propriedade 1.2. Dada a lista $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de números reais, com $n \in \mathbb{Z}^+$, temos:

(i) se *todos* os seus elementos forem *iguais*, então são *iguais* a *MA* da lista;

(ii) se *nem todos* os seus elementos forem *iguais*, então *ao menos um* estará *abaixo* da *MA* e ao menos um estará *acima* da *MA* da lista.

Esta propriedade mostra que a *média aritmética* é uma medida de posição e indica que a mesma encontra-se entre o menor e o maior valor da lista.

Prova da Propriedade 1.2. Sendo $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, temos : $MA = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a_1$, pois $a_1+a_2+\cdots+a_n = n\,a_1$. E isto demonstra o item (i).

Agora, suponhamos que nem todos os números da lista são iguais. Neste caso, a lista tem pelo menos dois elementos. A propriedade comutativa da adição nos garante, como já observamos, que a *média aritmética* não depende da ordem em que a lista é apresentada. Logo, reordenando a lista, se necessário, podemos assumir, sem perda de generalidade, que:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \;\; , \;\; \text{onde } n \geq 2 \, .$$

Como nem todos os elementos são iguais, concluímos que $a_1 < a_n$ e temos:

$$n a_1 < a_1 + a_2 + \cdots + a_n < n a_n$$

$$a_1 < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} < a_n$$

$$a_1 < MA < a_n\,.$$

Assim, demonstramos o item (ii). □

Alertamos que, dada uma lista, o primeiro elemento não é necessariamente menor do que a sua *média aritmética* . Na prova acima, nós alteramos a lista, colocando-a em ordem não-decrescente, e tal alteração não modifica a MA da mesma.

No exemplo que segue, vamos utilizar a propriedade acima.

Exemplo 1.4. (UFRJ - Vestibular - 2005 - Adaptada - [38]) A altura média de um grupo de quinhentos e três recrutas é de 1,81m. Sabe-se também que nem todos os recrutas do grupo têm a mesma altura. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa. Em cada caso, justifique sua resposta.

(a) “Há, no grupo em questão, pelo menos um recruta que mede mais de 1,81m e pelo menos um que mede menos de 1,81m.”
(b) “Há, no grupo em questão, mais de um recruta que mede mais de 1,81m e mais de um que mede menos de 1,81m.”

Resolução: O item (ii), da *Propriedade 2*, nos garante a veracidade do item (a). O item (b) é falso. Como contraexemplo, consideremos o caso em que no grupo de recrutas há 501 com 1,81m e os outros dois, um com 1,80m e o outro com 1,82m. Isto resulta numa MA de 1,81m, o que contradiz a afirmação.

Operando e explorando o aplicativo da figura abaixo, verificamos as *Propriedades* 1.1 e 1.2.

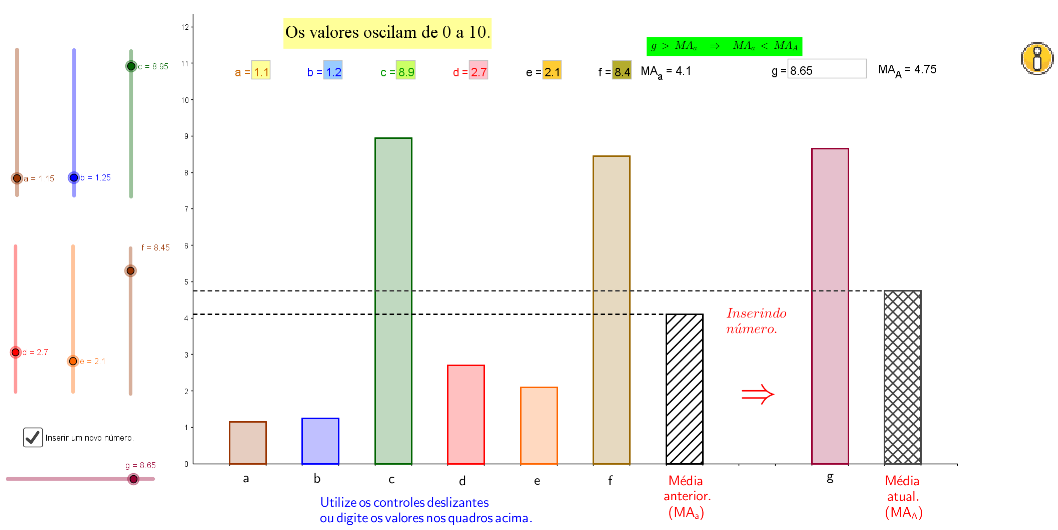


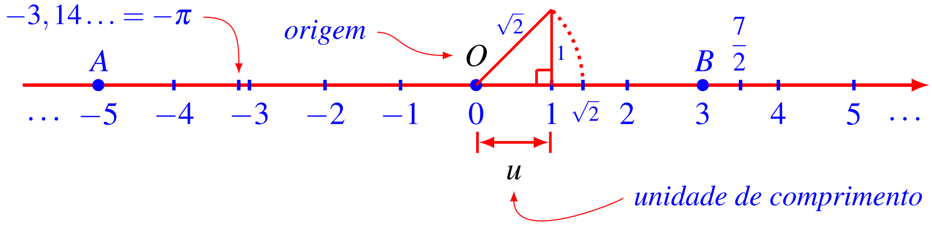
Figura 1.3: Explorando o comportamento da Média Aritmética .
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015 .

1.1.3 Ponto médio

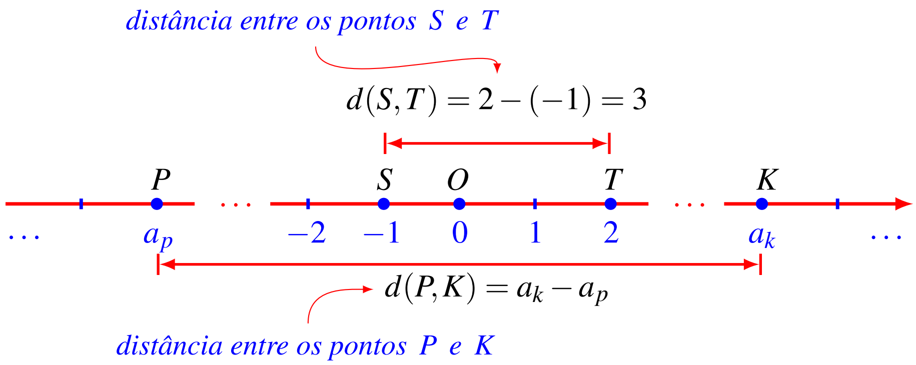
Consideremos uma reta orientada, na qual fixamos o ponto O como a *origem* e o segmento u como a *unidade de comprimento* da mesma, como na figura abaixo.

Assumiremos os números reais como as abscissas dos pontos da reta. A origem será o ponto de abscissa 0, os pontos à sua esquerda terão abscissas negativas e os pontos à sua direita terão abscissas positivas.

Todo ponto da reta terá uma única abscissa. Além disso, cada abscissa será exclusiva de um dado ponto.

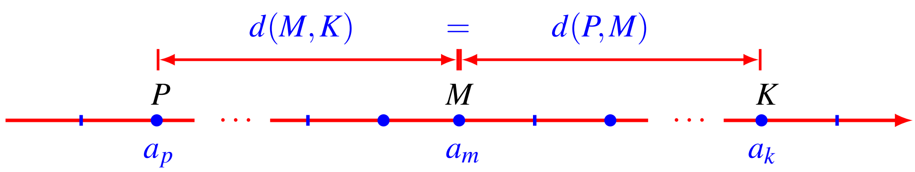


Comparando-se as abscissas de dois pontos localizados na reta, a maior encontra-se à direita. A *distância* entre dois pontos quaisquer da reta é dada pela *diferença* entre as suas abscissas, sendo sempre a *maior* menos a *menor* delas.



De posse dessas informações, determinemos a abscissa do *ponto médio* M do segmento de reta de extremos nos pontos P e K.

Entendemos que o *ponto médio* associado ao segmento de reta de P a K é o ponto M da reta que está entre os pontos P e K a igual distância entre eles.



Sejam P e K pontos da reta de abscissas a_p e a_k, respectivamente, com $a_k > a_p$. E, seja a_m a abscissa do ponto M .

Como o ponto M encontra-se entre os pontos P e K de tal modo que $d(P,M) = d(M,K)$, então sendo $a_p < a_m < a_k$, temos:

$$\begin{aligned} d(P,M) = d(M,K) &\iff a_m - a_p = a_k - a_m \\ &\iff \quad 2a_m = a_p + a_k \\ &\iff \quad a_m = \frac{a_p + a_k}{2} \end{aligned}$$

Assim, mostramos que a abscissa do ponto médio de um segmento é igual à *média aritmética* das abscissas dos pontos extremos desse segmento. Fica como exercício, mostrar que as coordenadas do ponto médio de um segmento é igual à *média aritmética* das coordenadas dos pontos extremos desse segmento, tanto no plano como no espaço. Indo um pouco além, mostre que as cooredenadas do baricentro de um triângulo qualquer é igual à *média aritmética* das coordenadas dos vértices desse triângulo.

1.2 Média Geométrica

Deste ponto em diante, apenas para facilitar a escrita, entenderemos que $a_1 a_2 \ldots a_n$ representa o produto dos n termos de uma lista $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de números reais.

1.2.1 Definição e exemplos

Os exemplos que antecedem a definição de *média geométrica* são resultados geométricos que favorecem a sua compreensão.

Exemplo 1.5. Se um retângulo e um quadrado têm a mesma área, então o lado do quadrado é a média geométrica dos lados do retângulo.

Análise da afirmativa: Sendo a e b as medidas dos lados do retângulo e c a medida do lado do quadrado, então o resultado algébrico da afirmação acima, dado que as áreas desses polígonos são iguais, é:

$$ab = c^2 \iff \sqrt{ab} = c\,. \tag{4}$$

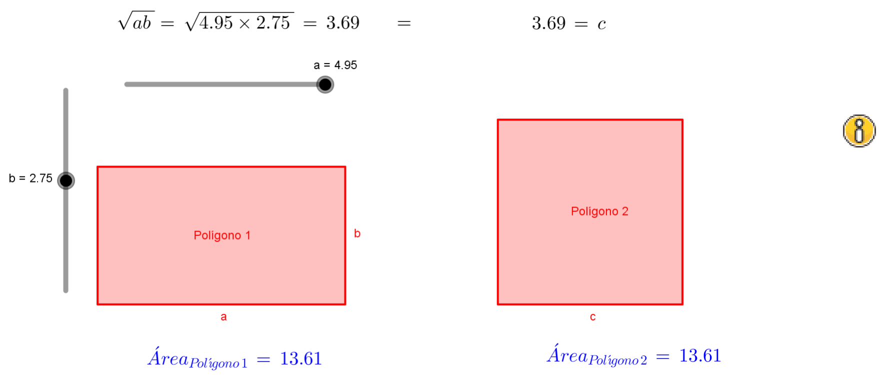


Figura 1.4: Relação entre os lados de um retângulo e de um quadrado de mesma área.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Exemplo 1.6. Se um paralelepípedo e um cubo têm o mesmo volume, então a aresta do cubo é a média geométrica das arestas do paralelepípedo.

Análise da afirmativa: Sendo a, b e c as medidas das arestas do paralelepípedo e d a medida da aresta do cubo, então o resultado algébrico da afirmação acima, dado que os volumes desses sólidos são iguais, é:

$$abc = d^3 \iff \sqrt[3]{abc} = d\,. \tag{5}$$

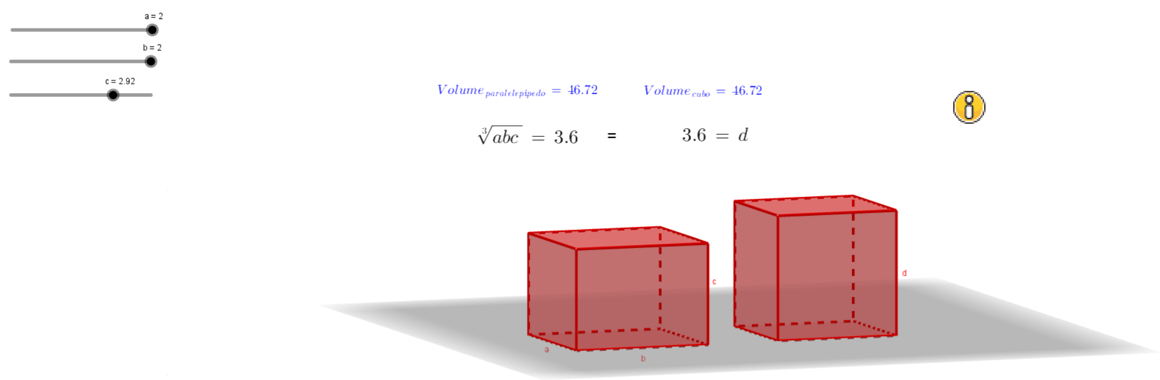


Figura 1.5: Relação entre as arestas de um paralelepípedo e de um cubo de mesmo volume.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Os resultados apresentados nas equações (4) e (5) nos dão uma ideia sobre a *média geométrica*. Vamos à definição.

Definição 1.2. Considere uma lista de números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, onde $n \in \mathbb{Z}^+$. Definimos e denotamos sua *média geométrica* por:

$$MG := \sqrt[n]{a_1\, a_2 \ldots a_n}\,.$$

A *média geométrica*, como a *média aritmética*, depende de $a_1, a_2, , \ldots, a_n$, mas independe da ordem na qual esses números estão dispostos na lista, pois a operação de multiplicação goza da propriedade comutativa.

Na *Definição 1.2*, resolvemos não inserir o *zero* como um dos elementos da lista, dado que as *visualizações geométricas* dos resultados ficam degeneradas quando o utilizamos. Num outro contexto, a *média geométrica* de uma lista de números reais em que o *zero* encontra-se inserido é igual a zero, independentemente de quais e de quantos sejam os outros elementos da lista. E, quanto à exclusão dos números negativos é porque corre-se o risco da *raiz n-ésima* do produto de n termos, sendo n um número par, não ser um número real, bastando que o produto seja negativo.
Vamos aos exemplos:

Exemplo 1.7. Determine a média geométrica dos números:

(a) 2, 3, 8 e 27.
(b) 1, 2 e 4.

Resolução: Da definição segue que

(a) $MG = \sqrt[4]{2 \times 3 \times 8 \times 27} = \sqrt[4]{1296} = 6.$

(b) $MG = \sqrt[3]{1 \times 2 \times 4} = \sqrt[3]{8} = 2.$

Este exemplo nos mostra que a *média geométrica* pode ser ou não um elemento da lista.

Exemplo 1.8. (Vestibular Insper-SP - 2016/2 - [13]) Em um concurso público, o critério de classificação é obter nota final maior do que ou igual a 10, em uma escala de 0 a 16. A nota final é calculada como a média geométrica entre duas notas: a da prova de conhecimentos gerais e a da prova de conhecimentos específicos, ambas na mesma escala de 0 a 16. As provas são aplicadas em dias diferentes, sendo a primeira de conhecimentos gerais. De acordo com o critério descrito, existe uma nota mínima a ser atingida nessa prova, caso contrário o candidato estará automaticamente desclassificado, independentemente da nota que venha a tirar na prova de conhecimentos específicos. O valor dessa nota mínima é :

(A) 0.
(B) 5,75.
(C) 6,00.
(D) 6,25.
(E) 10,00.

Resolução: Para se determinar o valor da *nota mínima* a ser atingida na prova de conhecimentos gerais, devemos considerar o valor da *nota máxima* na prova de conhecimentos específicos. Sendo assim, considerando x como a *nota mínima* citada e lembrando que a *nota máxima* é 16, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{16x} &= 10\\ 16x &= 100\\ x &= 6,25\end{aligned}$$

Portanto, a nota mínima a ser considerada na prova de conhecimentos gerais é $6,25$ e isso finaliza o exemplo.

1.2.2 Propriedades

Vamos às propriedades da *média geométrica*.

Propriedade 1.3. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ listas de números reais positivos, com $n \in \mathbb{Z}^+$. A MG de $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$:

(i) *coincide* com a MG de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se, e somente se, a_{n+1} é *igual* a MG de $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

(ii) é *maior* do que a MG de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se, e somente se, a_{n+1} é *maior* do que a MG de $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

(iii) é *menor* do que a MG de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se, e somente se, a_{n+1} é *menor* do que a MG de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Da mesma forma que na *média aritmética*, esta propriedade mostra como se comporta uma *média geométrica* quando a perturbamos, introduzindo um novo elemento na lista.

Prova da Propriedade 1.3. Estabelecendo a diferença entre as médias, podemos compará-las entre si. Deste modo, vamos manipular a diferença que segue:

$$\sqrt[n+1]{a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\, a_{n+1}} \;-\; \sqrt[n]{a_1\, a_2\, \ldots\, a_n} \tag{6}$$

$$\|$$

$$(\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\, a_{n+1}\,)^{\frac{1}{n+1}} \;-\; (\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\,)^{\frac{1}{n}}$$

$$\|$$

$$(\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\,)^{\frac{1}{n+1}}\,(\, a_{n+1}\,)^{\frac{1}{n+1}} \;-\; (\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\,)^{\frac{n+1}{n(n+1)}}$$

$$\|$$

$$(\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\,)^{\frac{1}{n+1}}\,(\, a_{n+1}\,)^{\frac{1}{n+1}} \;-\; (\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\,)^{\frac{1}{(n+1)}}\,(\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\,)^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$\|$$

$$(\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\,)^{\frac{1}{n+1}}\,\left[\,(\, a_{n+1}\,)^{\frac{1}{n+1}} \;-\; (\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\,)^{\frac{1}{n(n+1)}}\,\right]\;,$$

onde $n \geq 1$.

Posto que $(\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\,)^{\frac{1}{n+1}} > 0$, então a expressão (6) se anula quando e somente quando

$$(\, a_{n+1}\,)^{\frac{1}{n+1}} \;-\; (\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\,)^{\frac{1}{n(n+1)}} = 0\,,\ \text{isto é}\,,\ a_{n+1} = \sqrt[n]{a_1\, a_2\, \ldots\, a_n}$$

e assim, provamos o item (i).

Outrossim, a expressão (6) é maior do que zero se, e somente se,

$$(\, a_{n+1}\,)^{\frac{1}{n+1}} \;-\; (\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\,)^{\frac{1}{n(n+1)}} > 0\,,\ \text{isto é}\,,\ a_{n+1} > \sqrt[n]{a_1\, a_2\, \ldots\, a_n}\;,$$

o que prova o item (ii).

A prova do item (iii) é similar à do item (ii). □

Prosseguindo com as propriedades, temos:

Propriedade 1.4. Dada a lista $a_1\,, a_2\,, \ldots\,, a_n$ de números reais positivos, onde $n \in \mathbb{Z}^+$, temos que:

(i) se *todos* os seus elementos forem *iguais*, então são *iguais* a MG desta lista;

(ii) se *nem todos* os seus elementos forem *iguais*, então *ao menos um* estará *abaixo* da MG e *ao menos um* estará *acima* da MG desta lista.

A *média geométrica*, como a *média aritmética*, é uma medida de posição e encontra-se entre o menor e o maior valor da lista.

Prova da Propriedade 1.4. Sendo $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, temos :

$$a_1\,a_2\ldots a_n = {a_1}^n \text{ , isto é , } a_1 = \sqrt[n]{a_1\,a_2\,\ldots\,a_n} = MG\,.$$

O que prova o item (i).

Agora, suponhamos que nem todos os números da lista são iguais. Neste caso, a lista tem pelo menos dois elementos. A propriedade comutativa da multiplicação nos garante que a *média geométrica* não depende da ordem em que a lista é apresentada. Logo, reordenando a lista, se necessário, podemos assumir, sem perda de generalidade, que:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n\,, \quad \text{onde } \ a_1 < a_n \ \text{ e } \ n \geq 2\,.$$

E daí segue que:

$$a_1^n < a_1\,a_2\,\ldots\,a_n < a_n^n\,.$$

Logo,

$$a_1 < \sqrt[n]{a_1\,a_2\ldots a_n} < a_n \quad \text{e obtemos} \quad a_1 < MG < a_n\,.$$

Com isso, demonstramos (ii). □

Reforçamos que dada uma lista(ordenada), o primeiro elemento não é necessariamente menor do que a sua *média geométrica*. Na prova acima nós alteramos a lista, colocando-a em ordem não-decrescente, e tal alteração não modifica a MG desta lista .

Manipulando e investigando o aplicativo da figura abaixo, verificamos as *Propriedades* 1.3 e 1.4.

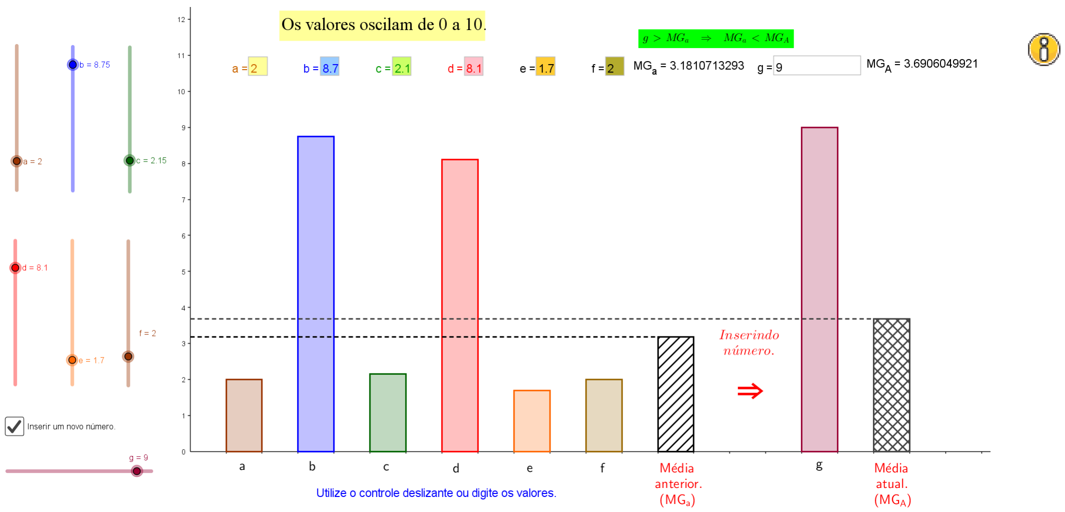


Figura 1.6: Explorando o comportamento da Média Geométrica .
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015 .

Vamos à definição de uma das mais importantes desigualdades, a desigualdade entre as *médias aritmética* e *geométrica*, principalmente na resolução de problemas em Geometria.

1.3 Desigualdade entre as médias

Teorema 1.1 (da Desigualdade entre as médias). *Seja* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *uma lista de números reais positivos, onde* $n \in \mathbb{Z}^+$. *A MA desta lista é* ***maior do que*** *ou* ***igual*** *a sua MG. Isto é,*

$$\boxed{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\,.}$$

A ***igualdade*** *ocorre se, e somente se,* $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

$$\boxed{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\,.}$$

Encontramos, em MUNIZ NETO [20] e OLIVEIRA [26], a demonstração deste resultado, para um $n \in \mathbb{Z}^+$ qualquer. Aqui apresentaremos a prova para o caso $n = 2$.

Prova do Teorema 1.1. Sendo x e y números reais positivos, temos :

$$\begin{aligned} MA - MG &= \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \\ &= \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2} \geq 0\,. \end{aligned}$$

Logo, $MA \geq MG$. Além disso, temos que:

$$MA = MG \iff \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}\right)^2 = 0 \iff \sqrt{x}-\sqrt{y} = 0 \iff x = y\,.$$

O que prova o teorema quando $n = 2$. □

Comprovamos este teorema operando o aplicativo abaixo:

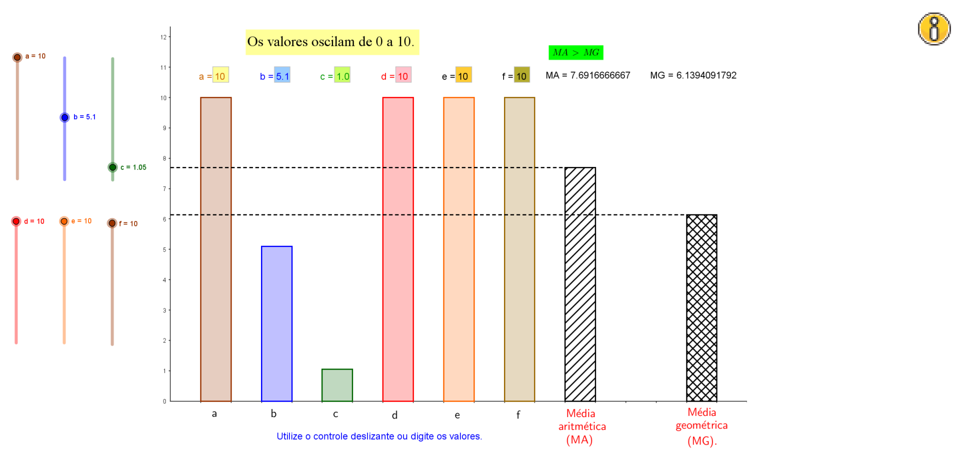


Figura 1.7: Comparando MA com MG.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Vamos a um exemplo de aplicação do teorema acima.

Exemplo 1.9. (OBM - 3ª fase - Nível 3 - 2001 - [23]) Prove que

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

para quaisquer números reais positivos a, b e c.

Resolução: Desenvolvendo o primeiro membro da desigualdade, temos:

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) &= a^2+ac+ab+bc \\ &= a(a+c+b)+bc.\end{aligned}$$

Usando o teorema da desigualdade entre as médias, para os números $a(a+c+b)$ e bc, podemos escrever:

$$\frac{a(a+c+b)+bc}{2} \geq \sqrt{a(a+c+b)bc}\,.$$

Agora, reescrevendo esta inequação, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)(a+c)}{2} &\geq \sqrt{abc(a+b+c)} \\ (a+b)(a+c) &\geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}\,.\end{aligned}$$

E assim, provamos o que queríamos.

1.3.1 Problemas de Otimização

Esta desigualdade é muito utilizada em problemas de otimização, ou seja, em problemas que buscam valores *máximos* ou *mínimos*. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.10. (UFF - Vestibular - 2º fase - 2002 - [37]) Um muro, com 6 metros de comprimento, será aproveitado como parte de um dos lados do cercado retangular que certo criador precisa construir. Para completar o contorno desse cercado, o criador usará 34 metros de cerca. Determine as dimensões do cercado retangular de maior área possível que o criador poderá construir.

Resolução: A figura abaixo é um esboço da situação problema:

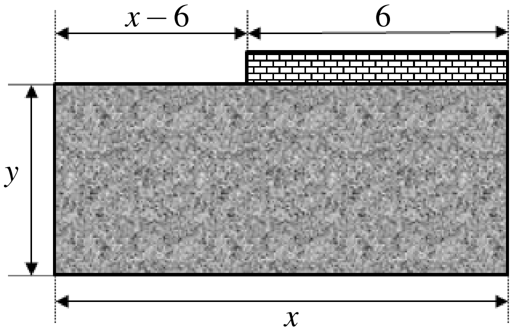


Figura 1.8: Problema de otimização - Vestibular UFF.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Consideremos x e y como sendo as dimensões do retângulo. Sendo assim, $2y+x+(x-6)$ representa o comprimento da cerca a ser utilizada, isto é, $2y+2x-6=34$, por conseguinte $x+y=20$. Como desejamos o valor máximo de xy, então, usando a desigualdade entre as médias, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{xy} &\leq \frac{x+y}{2} \\
xy &\leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{20}{2}\right)^2 = 100 \\
xy &\leq 100 \\
xy_{máx} &= 100\,.
\end{aligned}$$

A igualdade acima ocorre somente quando $x=y$, isto é, $xy=x^2=100$, o que acarreta $x=y=10\,m$. Sendo assim, o cercado de maior área possível é um quadrado com $10\,m$ de lado.

Exemplo 1.11. (PROFMAT - MA12 – 2011) Uma caixa retangular sem tampa tem arestas medindo x, y e z (veja figura, onde as linhas tracejadas indicam segmentos de arestas obstruídos por alguma face).

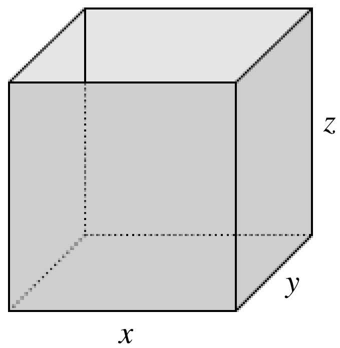


Figura 1.9: Problema de otimização - PROFMAT.
Fonte: Página do PROFMAT na internet, 2015 [28] .

(a) Expresse a área e o volume da caixa em função de x, y e z.

(b) Use a desigualdade das médias para mostrar que, se o volume da caixa é igual a 32, então sua área é maior do que ou igual a 48.

(c) Determine as medidas das arestas da caixa de área mínima com volume igual a 32.

Resolução: A área e o volume da caixa são, respectivamente, iguais a $2xz+2yz+xy$ e xyz, e isso responde o item (a) da questão.

(b) Sendo $xyz=32$ e aplicando a desigualdade entre as médias dos números $2xz$, $2yz$ e xy, obtemos:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2xz2yzxy} &\leq \frac{2xz+2yz+xy}{3} \\ \sqrt[3]{4x^2y^2z^2} &\leq \frac{2xz+2yz+xy}{3} \\ \sqrt[3]{4(xyz)^2} = \sqrt[3]{4(32)^2} = 16 &\leq \frac{2xz+2yz+xy}{3} \\ 48 &\leq 2xz+2yz+xy\,. \end{aligned}$$

(c) Como, no resultado acima, a igualdade ocorre quando $2xz = 2yz = xy$, isto é, quando $x = y$ e $z = \dfrac{x}{2}$, então a área mínima ocorre quando:

$$\begin{aligned} 2xz+2yz+xy = 2x\frac{x}{2}+2x\frac{x}{2}+x^2 &= 48 \\ 3x^2 &= 48 \\ x &= 4\,. \end{aligned}$$

Portanto, a área é mínima quando as dimensões do sólido forem iguais a 4, 4 e 2.

A partir de agora, vamos dar um tratamento informal, no entanto expressivo, para a desigualdade entre as médias. Quando necessário, recordaremos tanto as definições quanto as proposições ou teoremas que nos permitem escrever as expressões algébricas associadas às *provas visuais*, isto é, às *provas sem palavras*.

1.4 Provas Sem Palavras

O objetivo desta seção é apresentar várias “provas sem palavras” (*PSPs*) para a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Para isso, precisamos relembrar e visualizar importantes resultados da *geometria euclidiana plana* que serão cruciais para o entendimento dessas *PSPs*. Para visualizar tais provas estaremos inserindo a desigualdade entre as médias em diferentes contextos geométricos. E, para isso, algumas vezes vamos modificar a forma de apresentar tal desigualdade.

Começamos definindo círculo e disco, visto que há controvérsias sobre estes conceitos.

Definição 1.3. Sejam $r > 0$ um número real e O um ponto do plano cartesiano. Definimos:

- ☞ *círculo* como sendo o conjunto dos pontos do plano que distam r do ponto O;
- ☞ *disco fechado* como sendo o conjunto dos pontos do plano cujas distâncias ao ponto O são menores do que ou iguais a r.

Nesse contexto, r e O são, respectivamente, o *raio* e o *centro* do *círculo* e do *disco fechado*.

Na figura a seguir esboçamos tais objetos.

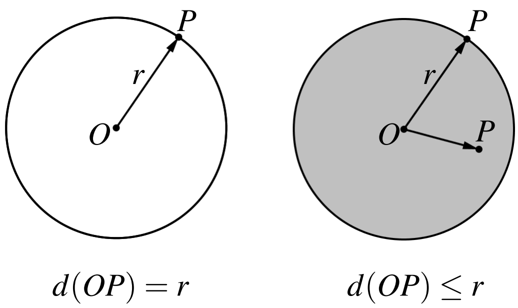


Figura 1.10: Círculo e disco fechado .
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015 .

Dados três pontos distintos A , B e C do plano e escolhido um dos dois *ângulos* determinados pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, usaremos as notações $\angle ABC$ e $\measuredangle ABC$, respectivamente, para identificá-lo e para denotar a sua medida. Neste caso, dizemos que B é o vértice associado a este ângulo. A escolha do ângulo será feita sombreando a região do plano ou dando um arco que o caracteriza, como na figura abaixo.

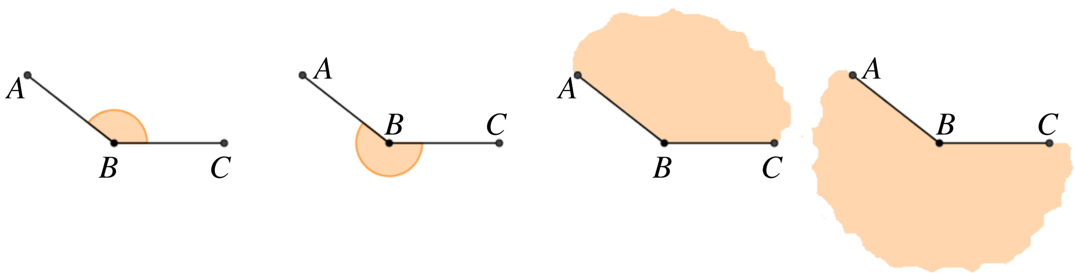
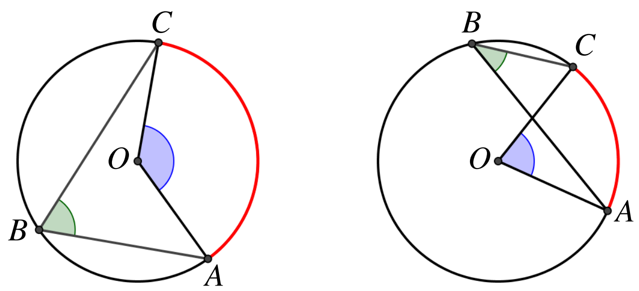


Figura 1.11: Ângulo ABC .
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015 .

Comecemos com o belíssimo resultado da Geometria.

Proposição 1.1. Sejam A , B e C três pontos distintos de um círculo de centro O e raio qualquer. Se os ângulos $\angle ABC$ e $\angle AOC$ determinam o mesmo arco $\widehat{AC}$ sobre o círculo, então $\measuredangle AOC = 2\measuredangle ABC$. Aqui, o arco $\widehat{AC}$ é aquele que vai de A até C, sem passar por B.

Repare que $\measuredangle ABC$ na proposição acima varia sempre entre 0° e 180°. No entanto, $\measuredangle AOC$, que subentende a medida do arco $\widehat{AC}$, pode assumir qualquer valor positivo, inferior a 360°.



$$\boxed{\measuredangle AOC = 2\measuredangle ABC}$$

Figura 1.12: Relação entre os ângulos $\angle AOC$ e $\angle ABC$.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015 .

Prova da Proposição 1.1. Vamos provar o primeiro caso, da esquerda para a direita. As outras provas seguem o mesmo raciocínio.

Na figura abaixo, os triângulos ΔABO e ΔBCO são isósceles, com $\measuredangle OBC = \measuredangle OCB = \alpha$ e $\measuredangle OBA = \measuredangle OAB = \beta$. Além disso, $\measuredangle BOC$ e $\measuredangle AOB$ são, respectivamente, iguais a $180^\circ - 2\alpha$ e $180^\circ - 2\beta$, dado que a soma das medidas dos ângulos internos de todo triângulo vale 180° .

Como os ângulos $\angle BOC$ e $\angle COD$ possuem um lado em comum, mas não possuem pontos internos comuns e, juntos, cobrem a metade do disco fechado, então:

$$\measuredangle BOC + \measuredangle COD = 180^\circ \iff 180^\circ - 2\alpha + \measuredangle COD = 180^\circ \iff \measuredangle COD = 2\alpha .$$

Da mesma forma, utilizando os ângulos $\angle AOB$ e $\angle AOD$, mostramos que $\measuredangle AOD = 2\beta$. E, de posse desses resultados, temos:

$$\measuredangle AOC = \measuredangle COD + \measuredangle AOD = 2(\alpha + \beta) = 2\measuredangle ABC$$

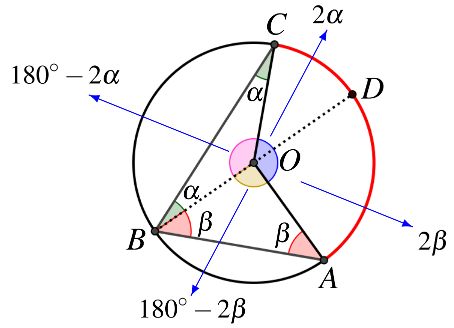


Figura 1.13: Prova da Proposição 1.1 .
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015 .

□

Os ângulos $\angle AOC$ e $\angle ABC$ são conhecidos como *ângulo central* e *ângulo inscrito*, respectivamente.

Segue a prova visual da Proposição 1.1.

PSPs 1.1. Visualização geométrica da relação entre os ângulos inscrito e central.

"Uma imagem vale mais que mil palavras" **Confúcio**

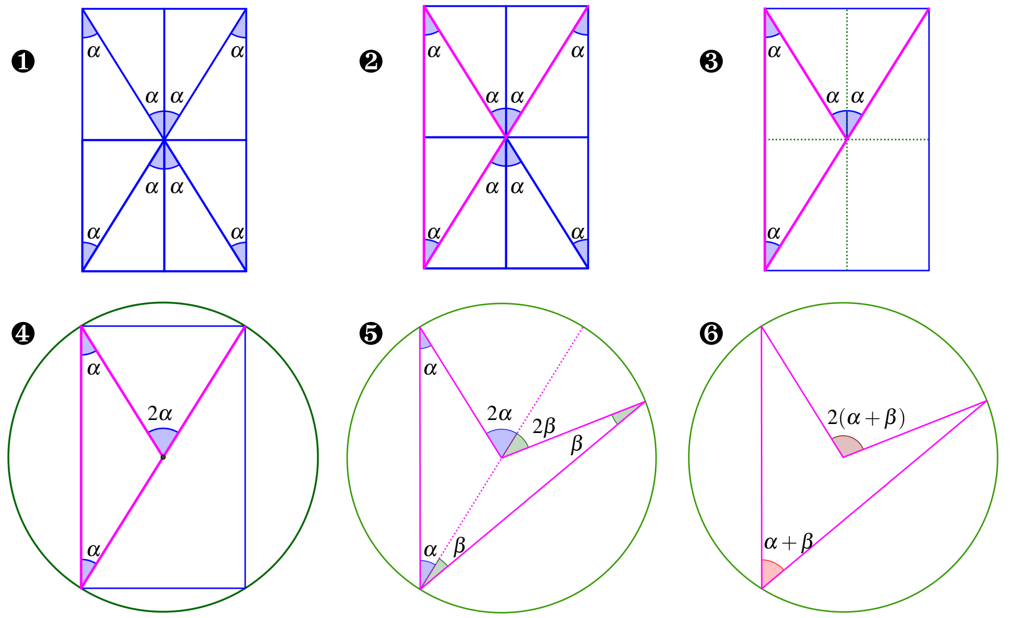


Figura 1.14: Relação entre os ângulos central e inscrito.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Como consequência da proposição anterior, temos o seguinte corolário:

Corolário 1.1. *Todo triângulo inscrito num círculo, tendo um dos seus lados como diâmetro do mesmo, é um triângulo retângulo.*

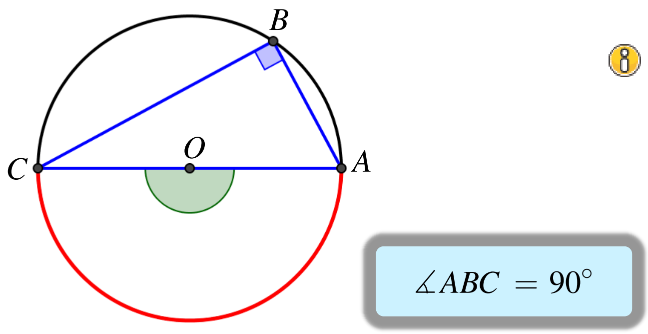


Figura 1.15: Triângulo inscrito num semicírculo
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Recorreremos também às relações métricas no triângulo retângulo. Na proposição seguinte, fica estabelecido que onde se leem os nomes dos lados, da altura ou de um outro segmento qualquer do triângulo leiam-se as suas respectivas medidas.

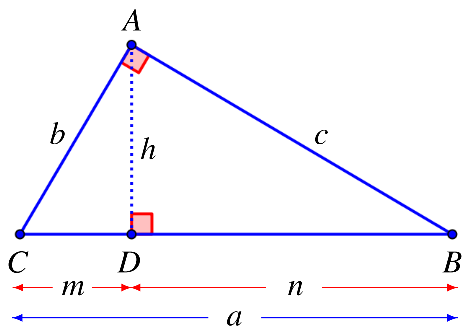


Figura 1.16: Relações métricas no triângulo retângulo I.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Proposição 1.2. Em todo triângulo retângulo, valem as seguintes relações métricas:

(i) Qualquer cateto é média geométrica entre a hipotenusa e a projeção deste cateto sobre a mesma.

$$\boxed{b^2 = am \quad e \quad c^2 = an}$$

(ii) A altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre os segmentos que a mesma determina sobre a hipotenusa.

$$\boxed{h^2 = mn}$$

(iii) O produto entre os catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à mesma.

$$\boxed{bc = ah}$$

(iv) **Teorema de Pitágoras**. A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Vamos às provas desses resultados.

Prova da Proposição 1.2. Seja um triângulo retângulo ΔABC, com ângulo reto no vértice A. Além disso, a , b e c são as medidas dos lados desse triângulo, h é a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ e, m e n são, respectivamente, as medidas das projeções dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ sobre o lado $\overline{BC}$.

Dado que $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares entre si, então ΔACD e ΔABD são triângulos retângulos. Como,

$\measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 90^\circ$, $\measuredangle ABD + \measuredangle BAD = 90^\circ$ e $\measuredangle ABC = \measuredangle ABD$, então $\measuredangle ACB = \measuredangle BAD$.

Do mesmo modo, provamos que $\measuredangle ABC = \measuredangle CAD$. Daí, segue que os triângulos ΔABC, ΔACD e ΔABD são semelhantes entre si, pois os seus ângulos internos são congruentes (caso AA) e, consequentemente, os lados correspondentes desses triângulos são proporcionais. Então,

(i) $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ (correspondência de vértices $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow A$ e $C \leftrightarrow C$)

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{b} \iff b^2 = am. \tag{7}$$

$\Delta ABC \sim \Delta ABD$ (correspondência de vértices $A \leftrightarrow D$, $C \leftrightarrow A$ e $B \leftrightarrow B$)

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \iff c^2 = an. \tag{8}$$

(ii) $\Delta ACD \sim \Delta ABD$ (correspondência de vértices $A \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow A$ e $D \leftrightarrow D$)

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \iff h^2 = mn.$$

(iii) $\Delta ABC \sim \Delta ABD$ (correspondência de vértices $A \leftrightarrow D$, $C \leftrightarrow A$ e $B \leftrightarrow B$)

$$\frac{b}{a} = \frac{h}{c} \iff bc = ah.$$

(iv) Adicioando, membro a membro, as equações (7) e (8), temos:

$$b^2 + c^2 = am + an$$
$$b^2 + c^2 = a(m+n)$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$

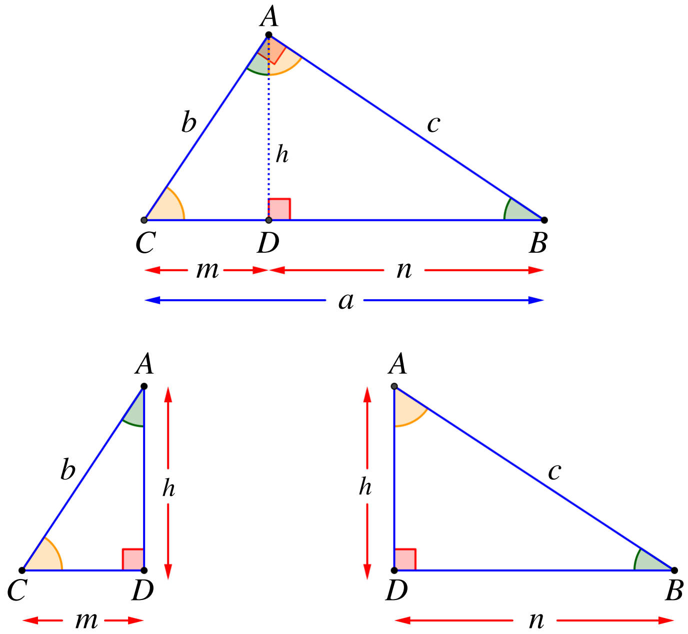


Figura 1.17: Prova da Proposição 2 .
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015 .

Assim, provamos o que queríamos. □

Agora, vamos às **PSPs** da Proposição 1.2.

PSPs 1.2. Prova visual da relação métrica $bc = ah$.

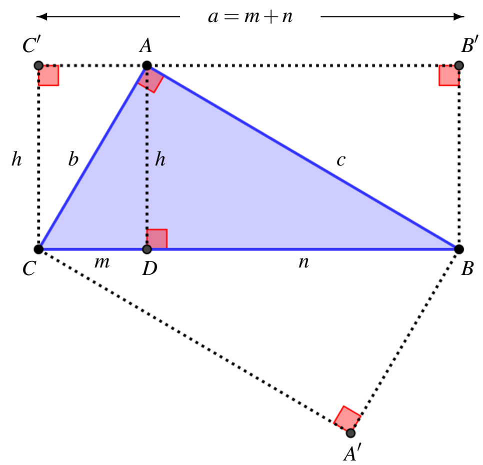


Figura 1.18: Relações métricas no triângulo retângulo II .
Fonte: Elaborada pelo autor, 2016 .

PSPs 1.3. Visualização geométrica da relação métrica $h^2 = mn$.

Aprecie sem moderação.

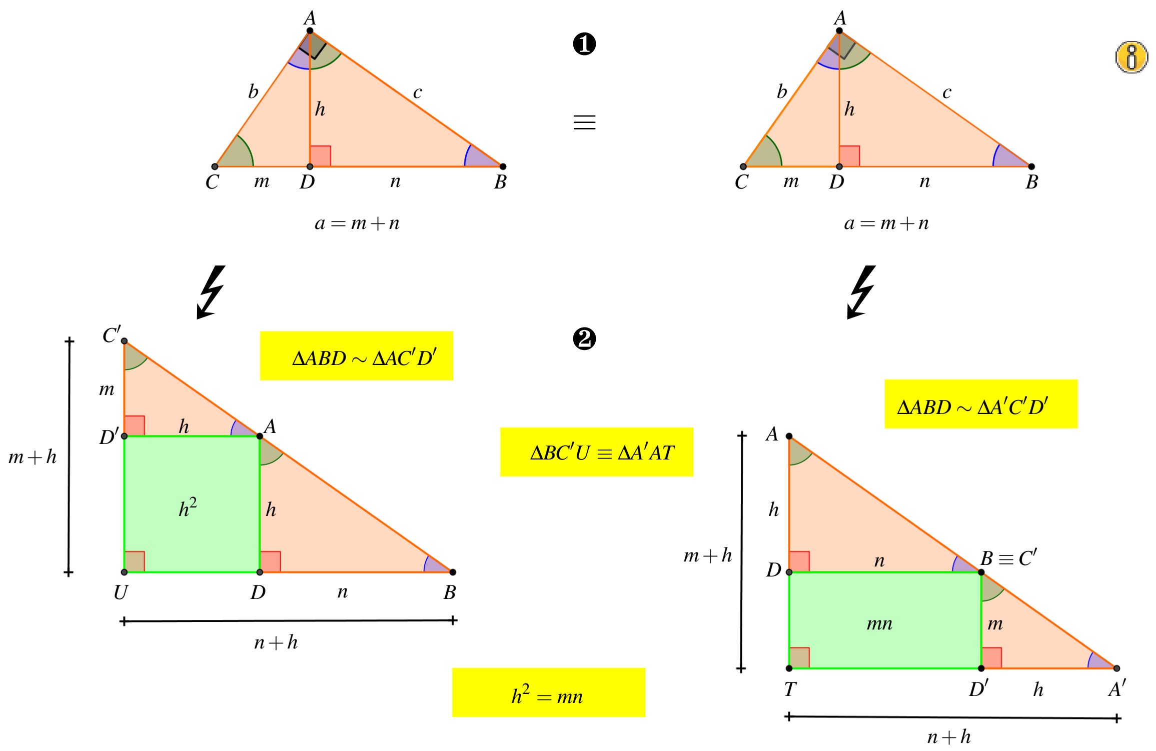


Figura 1.19: Relações métricas no triângulo retângulo III.
Fonte: Página SFZ na internet, 2016 [31].

Sugestão: Observe os movimentos de rotação, em torno do ponto A, e de translação do triângulo retângulo ΔACD.

Agora, vamos visualizar, numa mesma figura, as duas relações métricas restantes, dentre elas o famoso *Teorema de Pitágoras*.

PSPs 1.4. **Prova visual** das relações métricas $b^2 = am$, $c^2 = an$ e $a^2 = b^2 + c^2$.

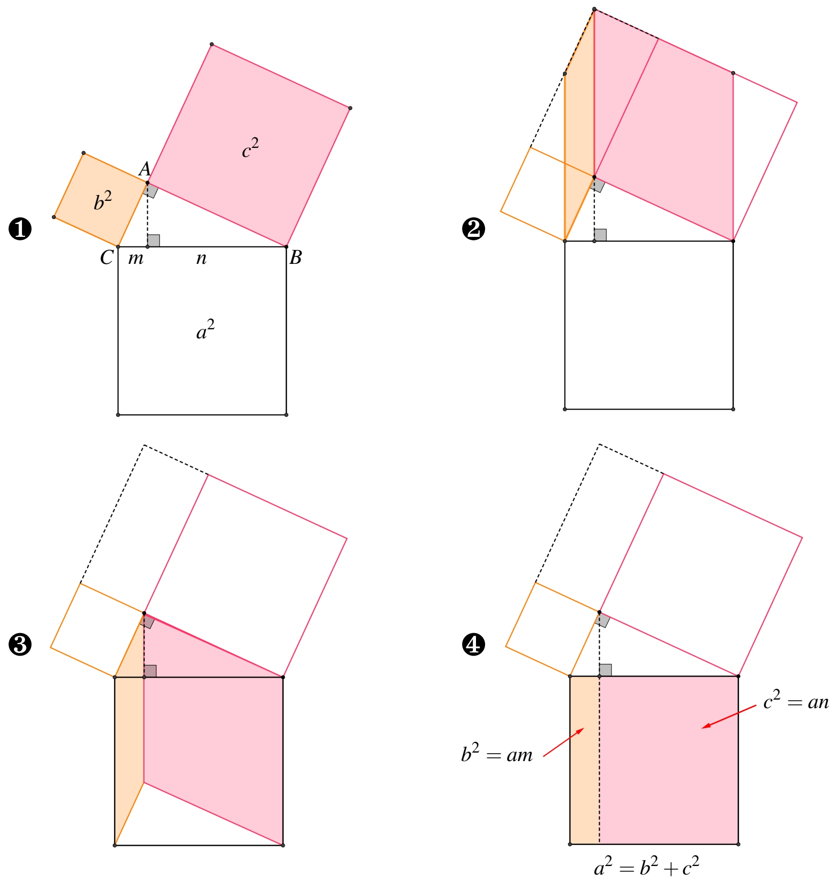


Figura 1.20: Relações métricas no triângulo retângulo IV .
Fontes: ROTH, 2015 [30] ;
NELSEN, 2015 (Baseado na prova de Euclides (1980)) [21] .

Sugestão: Lembre-se de que, mantendo-se os comprimentos de dois lados paralelos do paralelogramo e a distância entre eles, a área do polígono é preservada quando o deformamos . **Confira!**

Além da prova visual do Teorema de Pitágoras que acabamos de apresentar, baseada na prova feita por **Euclides**, como afirma NELSEN [21], sugerimos também as provas:

☞ segundo os **Pitagóricos** ;
☞ segundo **Henry Perigal** ;
☞ segundo **H. E. Dudeney** ;
☞ um tanto **criativa** .

De posse dos resultados acima, vamos às diferentes *provas visuais* da *desigualdade entre as médias aritmética e geométrica*.

PSPs 1.5. Visualização geométrica da desigualdade $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

“Quantas coisas cabem em um olhar! É tão expressivo, é como falar.”
Clarice Lispector

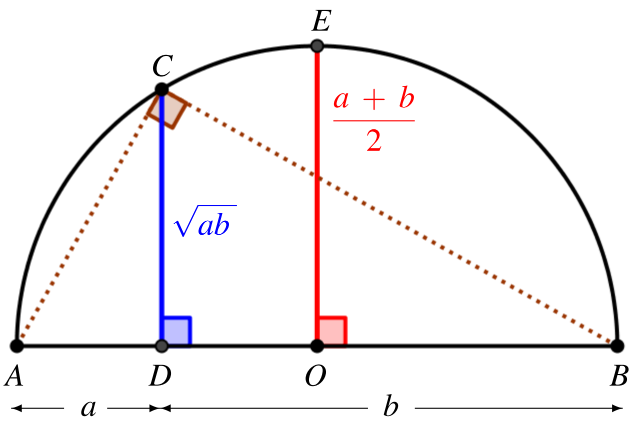


Figura 1.21: Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica I .
Fonte: NELSEN, 2014 [21] (Prova de Charles D. Gallant (1977)) .

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ .$$

A figura também mostra que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$.

Sugestão: O Corolário 1.1 garante que o triângulo $\Delta\, ABC$ é retângulo. Além disso, o raio do círculo e o item **(ii)**, da Proposição 1.2, justificam as medidas na figura.

Para melhor compreensão da *prova sem palavras* que segue, vamos colocar a desigualdade acima sob outra forma. Para $a, b > 0$ temos que:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff (a+b)^2 \geq 4ab.$$

PSPs 1.6. Prova visual da desigualdade $(a+b)^2 \geq 4ab$.

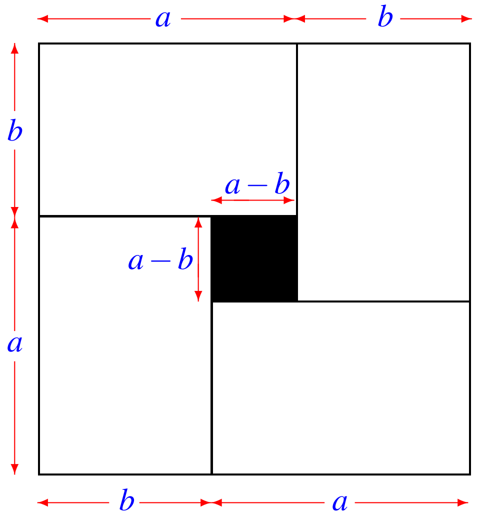


Figura 1.22: Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica II
Fonte: NELSEN, 2014 [21] (Prova de Doris Schattschneide (1986))

$$(a+b)^2 \geq 4ab.$$

Esta figura também mostra que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$.

Sugestão: Compare as áreas dos quatro retângulos de dimensões a e b com a área do quadrado de lado $a+b$.

A próxima prova visual segue o mesmo padrão da que acabamos de apresentar.

PSPs 1.7. Prova visual da desigualdade $(a+b)^2 \geq 4ab$.

“Não basta ver para ver, é necessário olhar para o que se vê.”
Pe. Antônio Vieira

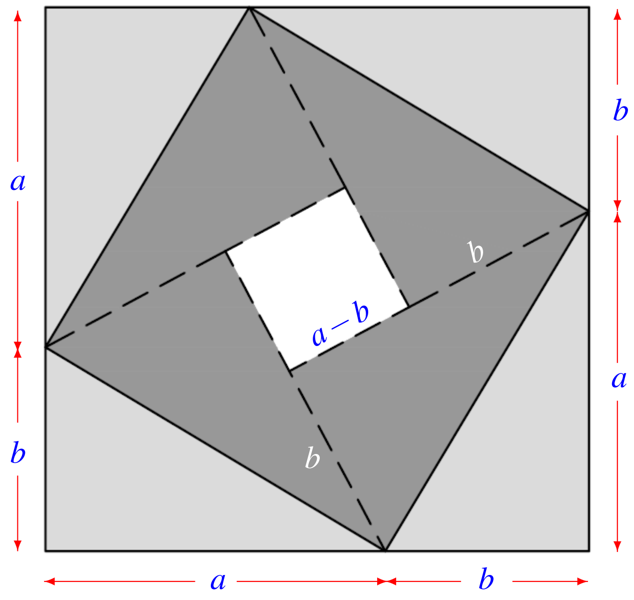


Figura 1.23: Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica III
Fonte: NELSEN, 2014 [22] (Prova de Ayoub B. Ayoub (1997)) .

$$(a+b)^2 \geq 4ab\,.$$

Como as anteriores, a figura mostra que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$.

Sugestão: Compare as áreas dos oito triângulos retângulos congruentes, de catetos a e b, com a área do quadrado de lado $a+b$. Cada par desses triângulos forma um retângulo de dimensões a e b, assim podemos pensar como na prova anterior.

Em seguida, também para melhor compreensão da *prova visual* que segue, vamos escrever a desigualdade em questão sob outra forma.

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geq 4\sqrt{a}\,\sqrt{b} \iff a+b+2\sqrt{a}\,\sqrt{b} \geq 4\sqrt{a}\,\sqrt{b} \iff$$
$$a+b \geq 2\sqrt{a}\,\sqrt{b} \iff \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

PSPs 1.8. Visualização geométrica da desigualdade $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geq 4\sqrt{a}\,\sqrt{b}$.

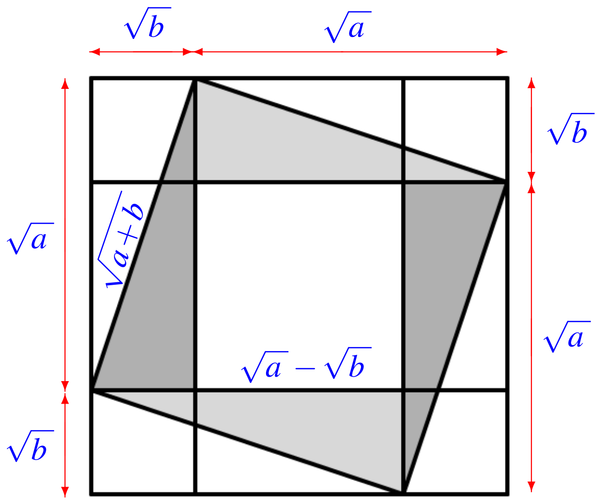


Figura 1.24: Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica IV .
Fonte: NELSEN, 2014 [21] (Prova de Roger B. Nelsen (1989)) .

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geq 4\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,.$$

Note na figura que a igualdade ocorre se, e somente se, $a=b$.

Uma outra forma de escrever esta desiguladade é apresentada abaixo.

$$\frac{(a+b)^2}{4} = ab + \frac{(a-b)^2}{4} \geq ab \iff \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,.$$

Sendo assim, continuamos com as provas visuais desta belíssima desigualdade.

PSPs 1.9. Visualização geométrica da desigualdade $\dfrac{(a+b)^2}{4} \geq ab$.

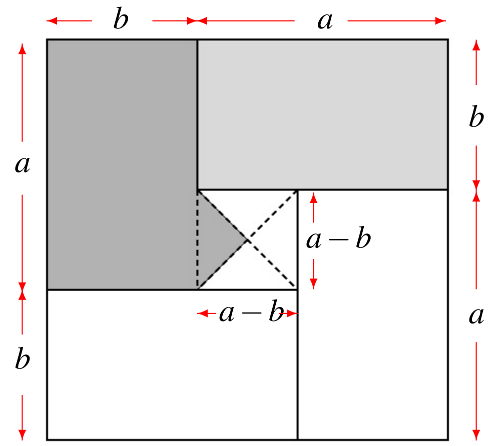


Figura 1.25: Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica V
Fonte: Página Art of Problem Solving na internet, 2016 [2] .

A figura mostra que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$.

PSPs 1.10. Prova visual da desigualdade $\dfrac{(a+b)^2}{4} \geq ab$.

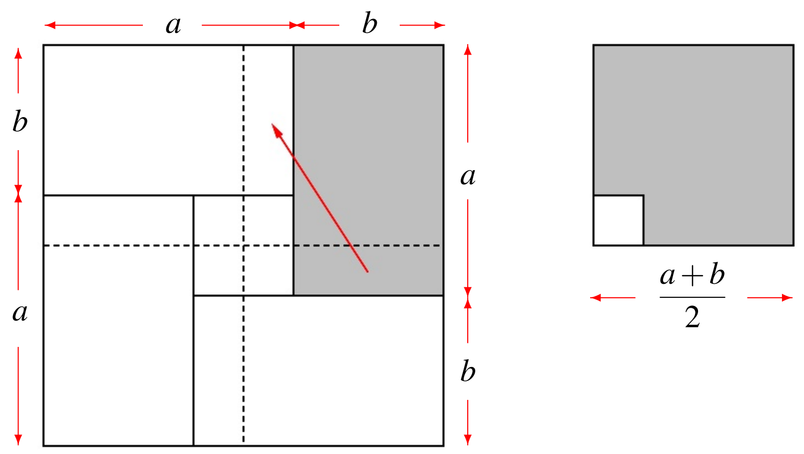


Figura 1.26: Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica VI
Fonte: Página Math and Multimedia na internet, 2015 [18].

Observando a figura, concluímos que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$.

Dando continuidade, apresentamos novos resultados da Geometria para visualizar a desigualdade entre as *médias aritmética e geométrica.*

Abaixo, entende-se como *reta tangente* ao círculo toda reta que o intersecta num único ponto. Tal ponto é dito *ponto de tangência* da respectiva reta com o círculo.

Proposição 1.3. Seja C o círculo de centro O e raio r. Se P está sobre C, então a reta tangente a C, no ponto P, é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OP}$.

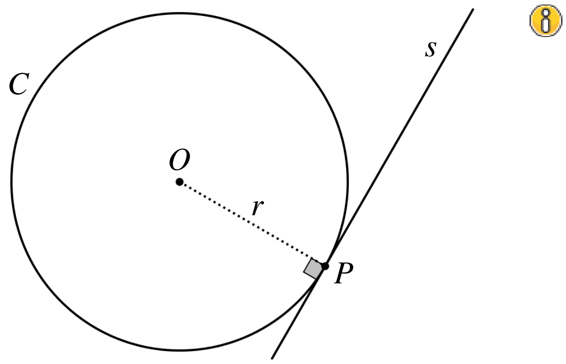


Figura 1.27: Reta $\overleftrightarrow{OP}$ perpendicular à reta tangente.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Prova da Proposição 1.3. Dados uma reta r e um ponto O fora dela, por tal ponto passa uma e uma única reta perpendicular à reta dada. Além disso, segue do Teorema de Pitágoras que $\overline{OQ} > \overline{OP}$ onde O, P e Q são exibidos na figura ao lado.

Podemos dizer que, ao longo desta perpendicular, *minimizamos* a distância do ponto O a pontos da reta dada, isto é, $\overline{OQ} > \overline{OP}$ para todo ponto Q sobre tal reta, distinto de P.

No plano, dados uma reta e um círculo que se intersectam, temos apenas duas possibilidades:

- ou eles se intersectam em um único ponto, e nesse caso a reta é tangente ao círculo em tal ponto (figura 2);
- ou eles se intersectam em dois pontos distintos, e nesse caso a reta é dita reta secante ao círculo (figura 3).

No primeiro caso, todos os pontos da reta, exceto o ponto de tangência, estão fora do disco fechado associado ao círculo, ou seja, $\overline{OQ} > \overline{OP}$ para todo ponto Q da reta, distinto de P, como mostrado na figura 2.

Agora, considere um círculo de centro O e uma reta tangente a esse círculo num ponto P, como sugere a figura 4. A reta que *minimiza* a distância entre o ponto O e pontos da reta tangente é a reta que passa por O e P, pela observação anterior. Mas a reta que *minimiza* a distância é a reta passando por O e perpendicular à reta tangente, como descrito na primeira observação.
Logo, a reta passando pelo centro do círculo e pelo ponto de tangência P é perpendicular à reta tangente ao círculo em P.

□

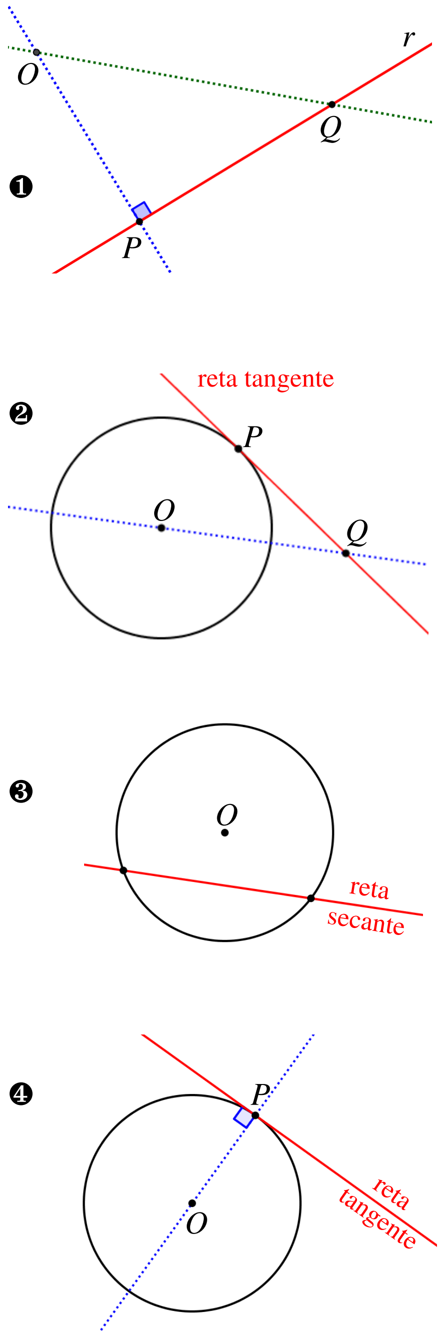


Figura 1.28: Minimizando a distância do ponto O a pontos da reta.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2015 .

O teorema que segue é uma consequência desta proposição.

Teorema 1.2. *Sejam C_1 e C_2 dois círculos distintos contidos em um mesmo plano. Se C_1 e C_2 são tangentes num ponto P, então eles se intersectam em P e possuem reta tangente comum neste ponto.*

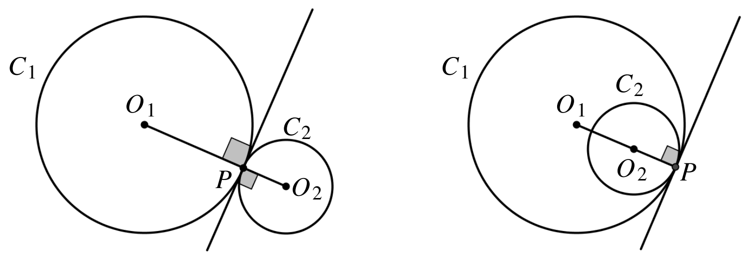


Figura 1.29: Círculos tangentes
Fonte: Elaborada pelo autor, 2016 .

Prova do Teorema 1.2. Sejam O_1 e O_2 os centros de dois círculos distintos e tangentes num ponto P. Da Proposição 1.3 segue que a reta tangente a esses círculos no ponto P é única, dado que a mesma é perpendicular às retas $\overleftrightarrow{O_1P}$ e $\overleftrightarrow{O_2P}$, no ponto P, sendo este o ponto de intersecção entre os círculos, como mostra a Figura 28.

□

Segue uma nova prova visual da desigualdade entre as *médias aritmética e geométrica*.

PSPs 1.11. Visualização geométrica da desigualdade $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

“ A relação entre a capacidade intuitiva e habilidades formais pode explicar por que algumas pessoas têm mais dificuldade para aprender essa matéria na escola.”
Thinkstock

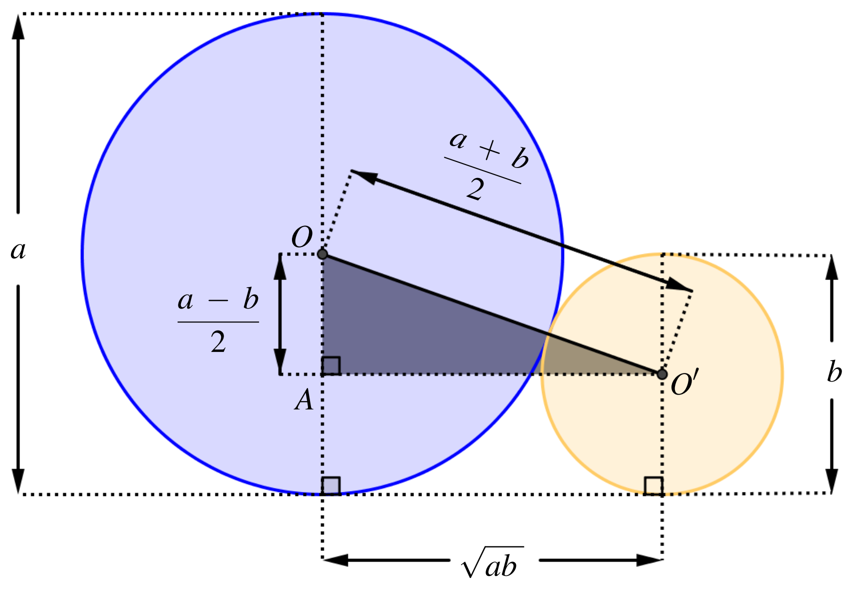


Figura 1.30: Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica VII .
Fonte: NELSEN, 2014 [21] (Prova de Roland H. Eddy (1985)) .

Esta é mais uma prova visual na qual a figura mostra que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$.

Sugestão: Por construção, o triângulo $\Delta AOO'$ é retângulo e as suas medidas são justificadas pelo Teorema de Pitágoras, pelo Teorema 1.2 e pela própria construção.

Finalmente, complementamos a teoria com mais um resultado da Geometria, sempre com o intuito de justificar a prova visual que segue.

Aqui, entende-se AB como o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

Proposição 1.4. Sejam A, B e C pontos distintos de um círculo. Seja P um ponto exterior ao disco fechado, como mostrado na figura ao lado. Se $B \in \overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PC}$ é tangente ao círculo, em C, então $PC^2 = PA \times PB$.

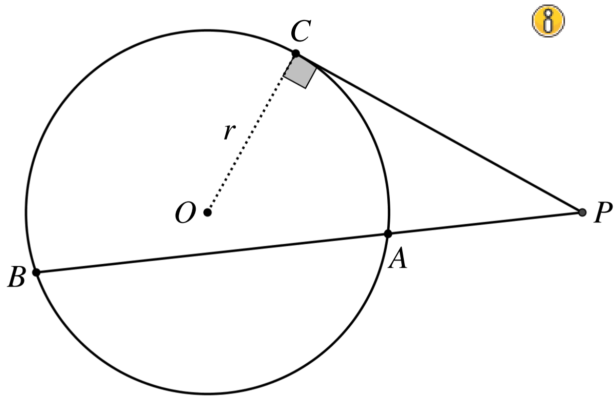


Figura 1.31: Potência de um ponto.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2016.

Prova da Proposição 1.4. Nos triângulos ΔBPC e ΔAPC, respectivamente, os ângulos $\angle PBC$ e $\angle ACP$ são congruentes, isto é, $\measuredangle PBC = \measuredangle ACP$, onde $\angle ACP$ chama-se *ângulo de segmento* que é o caso limite da Proposição 1.1. Além disso, o ângulo $\angle BPC$ é comum a esses triângulos. Portanto, os triângulos ΔBPC e ΔAPC são semelhantes (caso AA) e, sendo assim, os seus lados são proporcionais.

$\Delta BPC \sim \Delta APC$ (correspondência de vértices $C \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $P \leftrightarrow P$)

$$\frac{PB}{PC} = \frac{PC}{PA} \iff PC^2 = PA \times PB.$$

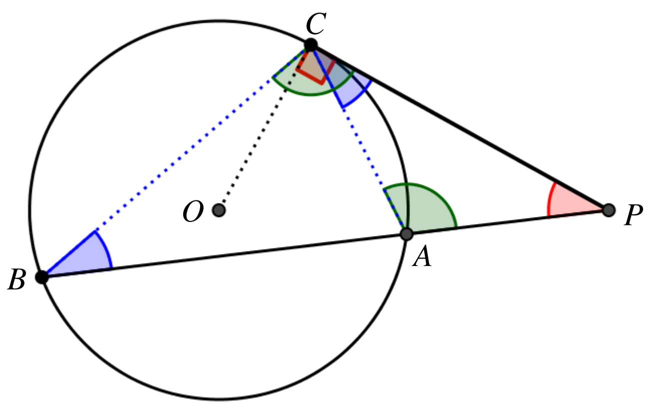


Figura 1.32: Prova da Proposição 1.4.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2016.

Vamos encerrar este capítulo com outra belíssima prova visual da *desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.*

□

PSPs 1.12. **Prova visual** da desigualdade $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

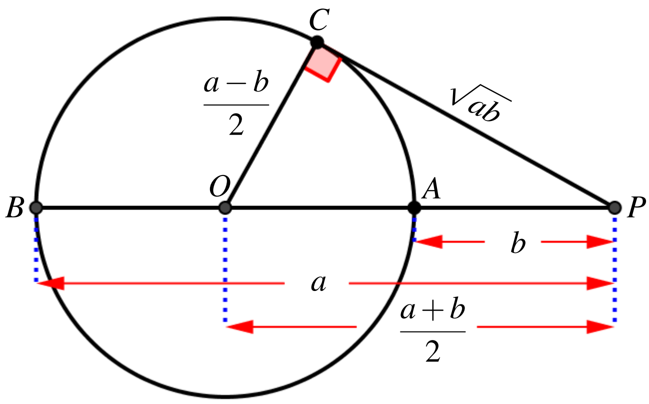


Figura 1.33: Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica VIII.
Fonte: NELSEN, 2014 [21] (Prova de Roger B. Nelsen - adaptado (1987)) .

Na figura acima, $PB = a$, $PA = b$ e $a > b > 0$.
Note que a configuração acima só faz sentido quando a e b são distintos.

Sugestão: A Proposição 1.3 garante que o ΔCOP é retângulo. O Teorema de Pitágoras ou a Proposição 1.4 justificam a medida do segmento $\overline{PC}$.

2 Progressão Aritmética

Vamos desenvolver o estudo das *progressões aritméticas* (abreviamos *PA*) a partir de dois exemplos. A ideia é extrair informações desses exemplos que nos permitam evoluir neste tema. Para tal, inserimos neste contexto, aplicativos que facilitam o entendimento dessa teoria e nos ajudam a reconher padrões e a revelar as tramas por trás das *provas visuais* que acompanham essa teoria. Aqui, focamos nas *provas visuais* das diferentes somas dos n primeiros números inteiros, como por exemplo, na soma dos n primeiros números ímpares.

2.1 Exemplos e Definição

Exemplo 2.1. (ENEM - 2011 - [11]) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

(A) 38 000
(B) 40 500
(C) 41 000
(D) 42 000
(E) 48 000

Resolução: O gráfico abaixo mostra que, a partir de fevereiro, o aumento mensal do número de passagens vendidas por essa empresa foi de 1500 passagens. Sendo assim, o número de passagens vendidas em julho foi de 42000, pois $33000 + (6 \times 1500) = 42000$.

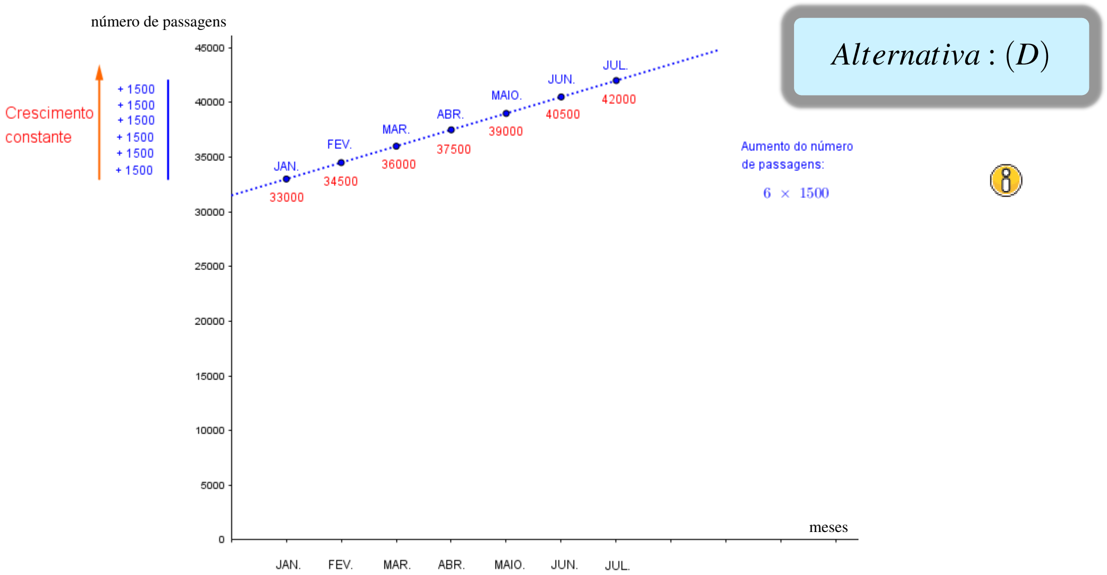


Figura 2.1: ENEM 2011 .
Fonte: Elaborada pelo autor, 2016 .

Vamos ao segundo exemplo.

Exemplo 2.2. (UNIRIO - Vestibular - 2008 - adaptada - [40]) A figura abaixo foi publicada em jornal de grande circulação, terça-feira, 25 de setembro. Trata da previsão da altura das ondas no Rio de Janeiro para os três próximos dias. Analisando esta figura, um surfista ficou imaginando a possibilidade de ocorrência de ondas gigantescas. Se isso fosse possível, considerando esta mesma progressão, qual teria sido a altura das ondas no dia 01 de setembro do mesmo ano?

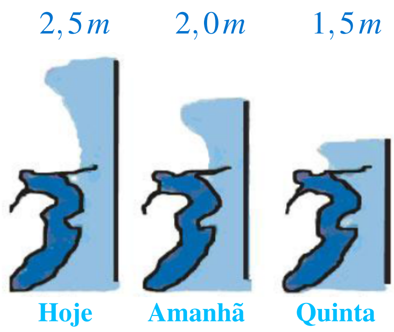


Figura 2.2: VESTIBULAR UNIRIO 2008 . Fonte: Página do vestibular da UNIRIO na internet

(A) $14,5m$
(B) $15,0m$
(C) $15,5m$
(D) $16,0m$
(E) $16,5m$

Resolução: A partir do dia 2, como mostra o gráfico abaixo, a altura das ondas teria diminuído $0,5m$ por dia, seguindo a mesma progressão entre as alturas das ondas publicadas no jornal. Consequentemente, a altura das ondas no dia 01 de setembro teria sido de $14,5m$, pois $14,5m - (24 \times 0,5) = 2,5m$ foi o tamanho das ondas no dia 25 do mesmo mês.

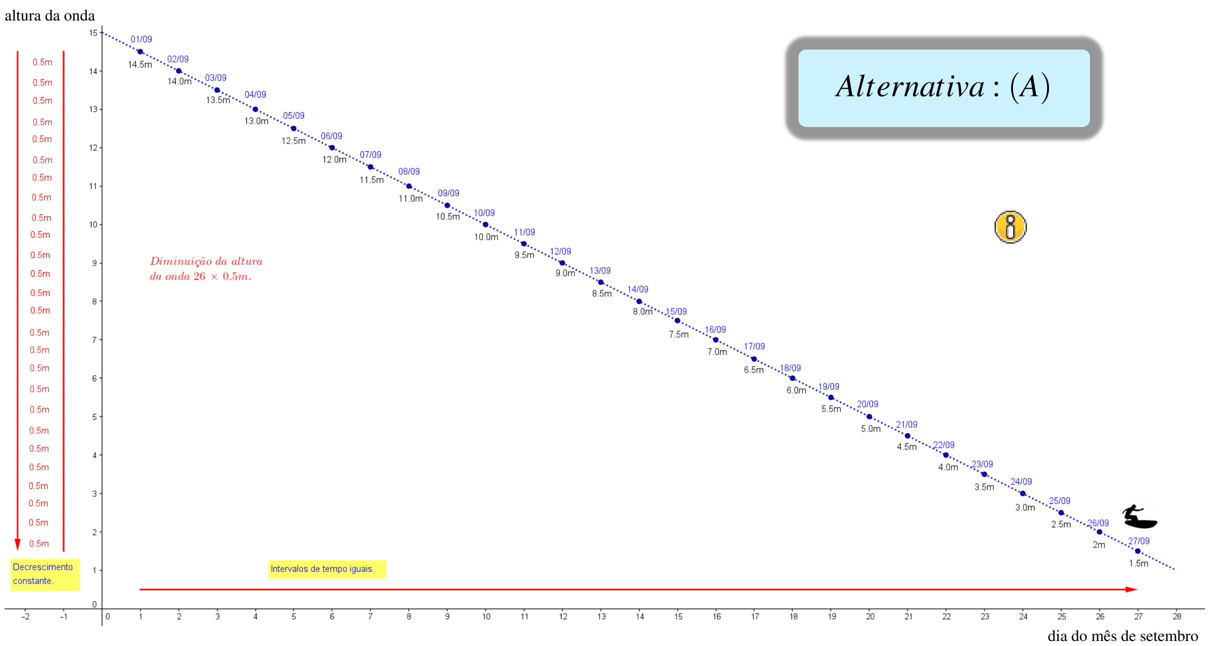


Figura 2.3: VESTIBULAR UNIRIO 2008 Fonte: Elaborada pelo autor, 2016 .

Após analisarmos estes dois exemplos, percebemos que tanto o aumento mensal no número de passagens quanto a diminuição diária no tamanho das ondas ocorrem de forma *constante*. Isso caracteriza uma *progressão aritmética*. Formalmente, colocamos a definição.

Definição 2.1. Uma *progressão aritmética* é uma lista de números reais do tipo:

$$b \; ; \; b+r \; ; \; b+2r \; ; \; b+3r \; ; \; \ldots \; ; \; b+(n-1)r \; ; \; b+nr \; ; \; b+(n+1)r \; ; \; \ldots$$

onde r é sua *razão*, b é seu *primeiro termo*, $b+r$ o *segundo termo*, $b+2r$ o *terceiro termo*, $b+3r$ o *quarto termo* e assim sucessivamente , com $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ressaltamos que, nesta definição, r e b são números reais quaisquer.

A fim de facilitar a escrita, sempre que necessário, usaremos a notação:

T_1 para o *1º termo*;
T_2 para o *2º termo*;
T_3 para o *3º termo*;
$\vdots$
T_n *para o n-ésimo termo*.

Visto desta maneira, podemos dizer que n é a *variável ordinal*, isto é, indica a ordem dos termos na *progressão aritmética*. Sendo assim, numa *PA* não faz sentido falar nos termos T_0 , T_{-1} , T_{-2} e assim por diante. Sempre que nos referirmos a um termo T_n de uma *PA* estamos assumindo $n \geq 1$.

Exemplo 2.3. As listas $33\,000; 34\,500; 36\,000; \ldots; 42\,000; \ldots$ e $14,5; 14,0; 13,5; \ldots; 1,5; \ldots$ são as *progressões aritméticas* que representam, respectivamente, o crescimento do número de passagens e a diminuição do tamanho das ondas nos exemplos anteriores. Os números 1500 e $-0,5$ são, respectivamente, as razões dessas progressões. Veja:

$$\underset{T_1}{33\,000} \; ; \; \underset{T_2}{34\,500} \; ; \; \underset{T_3}{36\,000} \; ; \; \ldots \; ; \; \underset{T_7}{42\,000} \; ; \; \ldots \qquad (+1\,500)$$

$$\underset{T_1}{14,5} \; ; \; \underset{T_2}{14,0} \; ; \; \underset{T_3}{13,5} \; ; \; \ldots \; ; \; \underset{T_{27}}{1,5} \; ; \; \ldots \qquad (-0,5)$$

Por definição, numa *progressão aritmética* de *razão* r, cada termo, a partir do segundo, é a *soma* entre o termo anterior e a *razão* r, isto é:

$$\ldots \; ; \; T_n \xrightarrow{+r} T_{n+1} = T_n + r \; ; \; \ldots$$

$$\boxed{T_{n+1} = T_n + r}$$

para todo $n \geq 1$.

Reciprocamente, se numa lista de números reais a *diferença* entre cada termo e o termo anterior, nesta ordem, é *constante* e igual a r, então esta lista é uma *progressão aritmética* de razão r . Isto é, dada uma lista de números reais:

$$a_1 \; ; \; a_2 \; ; \; a_3 \; ; \; a_4 \; ; \; \ldots \; ; \; a_{n-1} \; ; \; a_n \; ; \; a_{n+1} \; ; \; \ldots$$

se

$$\boxed{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_{n+1} - a_n = \cdots = r}$$

então a lista é uma *progressão aritmética* de razão r, pois $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_2 + r$, $a_4 = a_3 + r$ e assim por diante, como na Definição 2.1 .

Exemplo 2.4. Na lista $7\,;12\,;17\,;22\,;\ldots$ temos:

$$r = 5 = 12 - 7 = 17 - 12 = 22 - 17 = \cdots$$

Logo, a lista é uma *PA*.

Exemplo 2.5. A lista $3\,;5\,;7\,;\ldots;60\,;68\,;70\,;\ldots$ é uma progressão aritmética ?

Repare que:

$$5 - 3 = 7 - 5 = 2 \neq 68 - 60 = 8\,.$$

Sendo assim, a diferença entre um dado termo e o termo anterior não é constante. Logo, a lista *não* é uma *PA*.

2.2 Classificação de uma *PA*

Como no Exemplo 2.3, verificamos que se a *razão* da progressão é um *número positivo*, então cada termo é *menor* que o termo seguinte. Se a *razão* da progressão é um *número negativo*, então cada termo é *maior* que o termo seguinte. E, se a *razão* é igual a zero, cada termo é igual ao termo seguinte, como na progressão que segue:

$$\underset{T_1}{10} \overset{+0}{\curvearrowright} ;\ \underset{T_2}{10} \overset{+0}{\curvearrowright} ;\ \underset{T_3}{10}\ ;\ \ldots\ ;\ \underset{T_n}{10}\ ;\ \ldots$$

Isto posto, introduzimos os seguintes conceitos:

- ☞ Uma *progressão aritmética* é dita *crescente* quando $r > 0$;
- ☞ Uma *progressão aritmética* é dita *decrescente* quando $r < 0$;
- ☞ Uma *progressão aritmética* é dita *constante* quando $r = 0$.

Exemplo 2.6. Observe as seguintes progressões e as suas respectivas classificações:

(a) A *PA* $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -2, \ldots$ é *decrescente*, pois $r = -2 - \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{4} < 0$.

(b) $-7\,, -7\,, -7\,, \ldots$ é uma *PA* *constante*, pois $r = 0$.

(c) A *PA* $-1\,, 6\,, 13\,, \ldots$ é *crescente*, pois $r = 6 - (-1) = 7 > 0$.

2.3 Termo geral de uma progressão aritmética

Quando conhecemos o primeiro termo e a *razão* de uma PA, dizemos que a mesma está completamente determinada, isto é, podemos determinar todos os seus termos.

Exemplo 2.7. Escreva os seis primeiros termos de uma *progressão aritmética* sendo -15 e 4, respectivamente, o primeiro termo e a razão desta progressão.

$$-15\ ;\ -15+1\times 4\ ;\ -15+2\times 4\ ;\ -15+3\times 4\ ;\ -15+4\times 4\ ;\ -15+5\times 4\ ;\ \ldots$$

$$-15\ ;\ -11\ ;\ -7\ ;\ -3\ ;\ 1\ ;\ 5\ ;\ \ldots$$

Esta ideia é decorrente da definição de *progressão aritmética*. Se b e r representam, respectivamente, o primeiro termo e a razão de uma *progressão aritmética*, então descrevemos todos os seus termos do seguinte modo:

$$b\ ;\ b+r\ ;\ b+2r\ ;\ b+3r\ ;\ \ldots\ ;\ b+(n-2)r\ ;\ b+(n-1)r\ ;\ b+nr\ ;\ \ldots$$

Diante disto e com o intuito de determinarmos um dado termo, nestas condições, vamos reescrever, sutilmente, cada um dos termos desta lista:

$$\boxed{\begin{array}{rll}
1^{\text{o}}\ \text{termo}: & T_1 := b & = b+(1-1)r \\
2^{\text{o}}\ \text{termo}: & T_2 := b+r & = b+(2-1)r \\
3^{\text{o}}\ \text{termo}: & T_3 := b+2r & = b+(3-1)r \\
\vdots & \vdots & \\
\textbf{\textit{n-ésimo}}\ \text{termo} & & \\
\text{ou termo geral}: & T_n := b+(n-1)r &
\end{array}}$$

Isto significa que, dado o primeiro termo da *PA*, se desejamos avançar *um termo*, então devemos *adicionar* r, para avançarmos *dois termos* devemos *adicionar* $2r$, para avançarmos *três termos* devemos *adicionar* $3r$, e assim sucessivamente. Por exemplo, sendo $T_1 = b$ o *primeiro termo* de uma PA, então, avançando *quatro termos*, encontramos o seu *quinto termo* $T_5 = b+(5-1)r = b+4r$. Deste modo, deduzimos que avançando $n-1$ *termos*, a partir do *primeiro termo*, encontramos o *n-ésimo termo* ou *termo geral* desta PA :

$$\boxed{T_n = b+(n-1)r}$$

$$+4r$$

$$\underbrace{b}_{1^0\ termo}\ ;\ \underbrace{b+r}_{2^0\ termo}\ ;\ \underbrace{b+2r}_{3^0\ termo}\ ;\ \underbrace{b+3r}_{4^0\ termo}\ ;\ \underbrace{b+4r}_{5^0\ termo}\ ;\ \ldots\ ;\ \underbrace{b+(n-1)r}_{n\text{-ésimo termo}}\ ;\ \underbrace{b+nr}_{(n+1)\text{-ésimo termo}}\ ;\ \ldots$$

$$+(n-1)r$$

Retornando ao Exemplo 2.7, se desejamos o *vigésimo termo* da progressão aritmética

$$-15\ ;\ -11\ ;\ -7\ ;\ -3\ ;\ 1\ ;\ 5\ ;\ \ldots$$

então procedemos do seguinte modo:

$$\begin{aligned}T_n &= T_1 + (n-1)r\\ T_{20} &= T_1 + (20-1)r\\ T_{20} &= -15 + 19 \times 4\\ T_{20} &= 61\end{aligned}$$

Encontramos o vigésimo termo em função do primeiro termo e da razão da progressão. No entanto, podemos determinar qualquer termo em função da razão e de um outro termo qualquer desta progressão. Podemos escrever o *n-ésimo termo* em função do *k-ésimo termo* de uma *progressão aritmética*, do seguinte modo:

$$T_n = b + (n-1)r = \overbrace{b + (k-1)r}^{T_k} + (n-k)r = T_k + (n-k)r\,, \tag{6}$$

sendo n e k números inteiros positivos. Por exemplo, podemos escrever o *décimo primeiro termo* em função de termos anteriores a ele:

$$T_{11} = b + (11-1)r = b + (1-1)r + (11-1)r = \overbrace{b + 0r}^{T_1} + 10r = T_1 + 10r\ ;$$

$$T_{11} = b + (11-1)r = b + (5-1)r + (11-5)r = \overbrace{b + 4r}^{T_5} + 6r = T_5 + 6r;$$

ou ainda, em função dos termos posteriores a ele:

$$T_{11} = b + (11-1)r = b + (15-1)r + (11-15)r = \overbrace{b + 14r}^{T_{15}} - 4r = T_{15} - 4r\ ;$$

$$T_{11} = b + (11-1)r = b + (13-1)r + (11-13)r = \overbrace{b + 12r}^{T_{13}} - 2r = T_{13} - 2r\,.$$

Ainda no Exemplo 2.7, utilizando-se desta técnica, vamos determinar, por exemplo, o sexto termo em função do quarto termo e da razão desta progressão :

$$\begin{aligned}T_6 &= T_4 + (6-4)r\\ T_6 &= -3 + 2 \times 4\\ T_6 &= 5\end{aligned}$$

Exemplo 2.8. (PUC - SP - Vestibular) Quantos números ímpares existem entre 14 e 192 ?

Resolução: Sabe-se que uma lista de números ímpares representa uma *progressão aritmética* de razão $r = 2$. Sendo assim, vamos determinar o primeiro e o último termos ímpares entre 14 e 192. O primeiro termo é $T_1 = 15$ e o último termo é $T_n = T_1 + (n-1)r = 191$, supondo que avançamos $(n-1)$ termos a partir de T_1. De posse desses dados, para determinar o valor de

n, temos:

$$T_1 + (n-1)r = T_n$$
$$15 + (n-1)2 = 191$$
$$n = 89 \ termos.$$

Exemplo 2.9. Em uma progressão aritmética de razão $r = -6$, o terceiro termo vale 9. Determine:

(a) o primeiro termo;
(b) o sexto termo, em função do 3º termo e da razão da *progressão aritmética*;
(c) o *n-ésimo termo*.

Resolução: (a) A partir do primeiro termo, para se alcançar o *terceiro termo*, devemos avançar 2 *termos*. Sendo assim, o *primeiro termo* é

$$T_1 + 2r = T_3$$
$$T_1 + 2(-6) = 9$$
$$T_1 = 21 \ .$$

(b) Como treino, vamos usar a igualdade (6) para determinar o *sexto termo*:

$$T_6 = T_3 + (6-3)r$$
$$T_6 = 9 + 3(-6)$$
$$T_6 = -9 \ .$$

(c) A partir do primeiro termo, para se alcançar o *n-ésimo termo*, devemos avançar $(n-1)$ *termos*. Sendo assim, o *n-ésimo termo* é

$$T_1 + (n-1)r = T_n$$
$$T_n = 21 + (n-1)(-6)$$
$$T_n = 21 - 6n + 6$$
$$T_n = 27 - 6n \ , \text{ onde } n \geq 1 \ .$$

Exemplo 2.10. Determine o décimo segundo termo da *progressão aritmética*:

$$\frac{3}{5} \ ; \ \frac{1}{10} \ ; \ -\frac{4}{10} \ ; \ldots$$

Resolução: Temos a razão $r = -\frac{4}{10} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{2}$ e o primeiro termo $b = \frac{3}{5}$ desta *PA*. Devemos avançar 11 termos, a partir do primeiro, para determinarmos o décimo segundo termo. Sendo assim, o termo desejado é $b + 11r = \frac{3}{5} + 11\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{49}{10}$.

Exemplo 2.11. (UENF - Vestibular - 2000 - [33]) Um incêndio no Parque Nacional da Serra dos Órgãos, que durou exatamente 6 dias, devastou 60 hectares nos três primeiros dias. Suponha que, a partir do segundo dia, o fogo tenha destruído sempre 8 hectares a mais do que no dia anterior. A partir desses dados, calcule, em hectares, a área que foi destruída pelo incêndio:

a) no primeiro dia;
b) nos seis dias.

Resolução: a) A destruição provocada pelo incêndio, em termos de hectares destruídos, evolui diariamente segundo uma *progressão aritmética* de razão 8. Vamos supor que, no *primeiro dia*, o fogo consumiu b hectares. Sendo assim, podemos escrever a progressão cujos elementos expressam essa destruição diária, do seguinte modo:

$$\underbrace{b \;;\; b+8 \;;\; b+16 \;;\; b+24 \;;\; b+32 \;;\; b+40}_{+(5\times 8)}\ .$$

Segundo o enunciado, o fogo devastou 60 hectares nos três primeiros dias. Diante disto, adicionando os três primeiros termos, determinamos a área destruída no primeiro dia:

$$b+(b+8)+(b+16)=60.\ \text{Logo, } b=12 \text{ hectares.}$$

b) Do mesmo modo, adicionando os seis termos desta PA, determinamos a área destruída nos seis dias, vejam:

$$\begin{aligned} b+(b+8)+(b+16)+(b+24)+(b+32)+(b+40) &= 6b+120 \\ &= 6\cdot 12+120 \\ &= 192\ hectares. \end{aligned}$$

Adiante, determinaremos a soma dos n primeiros termos de uma *progressão aritmética*, sem precisarmos, explicitamente, adicionar um a um os seus termos.

A seguir apresentaremos três propriedades das progressões aritméticas.

Antes, vamos entender o que são termos equidistantes de um dado termo da PA. As distâncias a que nos referimos aqui estão relacionadas com as posições desses termos na progressão e não com os valores numéricos que os representam. Para entendermos melhor, vamos considerar a seguinte progressão:

$$T_1 \;;\; \underset{T_3-r}{T_2} \;;\; T_3 \;;\; \underset{T_3+r}{T_4} \;;\; T_5 \;;\; \underset{T_9-3r}{T_6} \;;\; T_7 \;;\; T_8 \;;\; T_9 \;;\; T_{10} \;;\; T_{11} \;;\; \underset{T_9+3r}{T_{12}} \;;\; T_{13} \;;\; \ldots$$

No esquema acima, T_2 e T_4 são termos equidistantes de T_3, pois a partir deste, recuando um termo, determinamos $T_2=T_3-r$ e avançando um termo determinamos $T_4=T_3+r$. Do mesmo modo, a partir de T_9, recuando três termos, determinamos $T_6=T_9-3r$ e avançando três termos determinamos $T_{12}=T_9+3r$, assim T_6 e T_{12} são termos equidistantes de T_9.

Generalizando, os termos T_{n-k} e T_{n+k} são equidistantes de T_n, pois , respectivamente, recuando e avançando k termos a partir de T_n, determinamos esses termos.

$$T_{n-k}=T_n-kr \xleftarrow{\;-kr\;} T_n \xrightarrow{\;+kr\;} T_{n+k}=T_n+kr$$

2.4 Propriedades de uma progressão aritmética

Inicialmente, apresentamos uma importante propriedade que relaciona os termos equidistantes de um dado termo de uma PA com o próprio termo.

Propriedade 2.1. Todo termo de uma *progressão aritmética*, distinto do primeiro, é *média aritmética* entre dois termos que dele *equidistam*.

$$T_1 \ ; \ T_2 \ ; \ T_3 \ ; \ \ldots \ ; T_{n-k} \ ; \ \ldots \ ; \ T_{n-1} \ ; \ T_n \ ; \ T_{n+1} \ ; \ \ldots \ ; \ T_{n+k} \ ; \ \ldots$$

$$\boxed{T_n = \frac{T_{n-k} + T_{n+k}}{2}}$$

Prova da Propriedade 2.1. Seja T_n termo de uma *progressão aritmética* de razão r, distinto do primeiro termo. Assim, os termos que dele equidistam são:

$$T_{n-k} = T_n - kr \tag{7}$$

e

$$T_{n+k} = T_n + kr\,. \tag{8}$$

Adicionando, membro a membro, as igualdades (7) e (8) encontramos

$$\frac{T_{n-k} + T_{n+k}}{2} = T_n\,.$$

Assim, provamos o que queríamos. □

Exemplo 2.12. Na *progressão aritmética* $-15; -8; -1; 6; 13; 20; 27; 34; \ldots$, temos:

$$-8 = \frac{-15+(-1)}{2} \ ; \ -1 = \frac{-8+6}{2} \ ; \ 6 = \frac{-1+13}{2} \ ; \ 13 = \frac{6+20}{2} \ ; \ \ldots$$

como caso particular desta propriedade, onde verificamos que todo termo de uma *progressão aritmética* é *média aritmética* entre o termo anterior e o posterior a ele.

Da mesma forma, temos: $-1 = \dfrac{-15+13}{2}$; $6 = \dfrac{-8+20}{2}$ e $13 = \dfrac{(-8)+34}{2}$, onde constatamos que todo termo de uma *progressão aritmética* é *média aritmética* entre outros dois termos desta progressão, equidistantes dele.

Propriedade 2.2. Se $a_1 \ ; a_2 \ ; a_3 \ ; \ \ldots \ ; a_{n-k} \ ; \ \ldots \ ; \ a_{n-1} \ ; \ a_n \ ; \ a_{n+1} \ ; \ ; \ldots \ ; \ a_{n+k} \ ; \ \ldots$ é uma lista ordenada de números reais onde todo termo, distinto do primeiro, é média aritmética entre dois termos equidistantes dele,

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}}$$

então esta lista é uma *progressão aritmética*.

Estamos falando na recíproca da Propriedade 2.1. Especificamente, na prova que segue, vamos utilizar o termo anterior e o posterior a um dado termo, como os termos equidistantes dele.

Prova da Propriedade 2.2. Se

$$a_1 \ ; \ a_2 \ ; \ a_3 \ ; \ a_4 \ ; \ \ldots \ ; \ a_{n-1} \ ; \ a_n \ ; \ a_{n+1} \ ; \ \ldots$$

é uma lista de números reais tal que $r = a_2 - a_1$ e todos os termos, salvo o primeiro termo, é a média aritmética entre o termo anterior e o posterior a ele, então:

✓ $r = a_2 - a_1 \iff a_2 = a_1 + r\,;$

✓ $$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \iff 2a_2 = a_1 + a_3 \iff \begin{aligned} \overbrace{a_2 - a_1}^{r} &= a_3 - a_2 \\ r &= a_3 - a_2 \\ a_3 &= a_2 + r\,; \end{aligned}$$

✓ $$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} \iff 2a_3 = a_2 + a_4 \iff \begin{aligned} \overbrace{a_3 - a_2}^{r} &= a_4 - a_3 \\ r &= a_4 - a_3 \\ a_4 &= a_3 + r\,; \end{aligned}$$

e, assim por diante. Nestas condições, cada termo é a soma entre o termo anterior e a constante r. Portanto, segundo a Definição 2.1 , concluímos que a lista é uma *progressão aritmética* . □

Vejamos um exemplo que fala na Propriedade 2.2 .

Exemplo 2.13. (UFRJ - Vestibular - 2000 - [39]) *Mister MM*, o Mágico da Matemática, apresentou-se diante de uma plateia com 50 fichas, cada uma contendo um número. Ele pediu a uma espectadora que ordenasse as fichas de forma que o número de cada uma, excetuando-se a primeira e a última, fosse a *média aritmética* entre os números da anterior e da posterior. *Mister MM* solicitou a seguir à espectadora que lhe informasse o valor da *décima sexta* e da *trigésima primeira* fichas obtendo como resposta 103 e 58 respectivamente. Para delírio da plateia, *Mister MM* adivinhou então o valor da *última ficha*. *Determine você também este valor*.

Resolução: Como as fichas foram ordenadas de tal modo que o número de cada uma delas é a *média aritmética* entre os números da anterior e da posterior, então estas fichas estão em *PA*. Considerando o valor da primeira ficha como o primeiro termo da *PA* , o da segunda como o segundo termo, e assim por diante, vamos determinar a *razão* desta *PA*, escrevendo o trigésimo primeiro termo em função do décimo sexto. Para tal, devemos avançar 15 termos, a partir do décimo sexto, para alcançarmos o trigésimo primeiro. Vejamos:

$$\begin{aligned} T_{31} &= T_{16} + (31-16)r \\ 58 &= 103 + 15r \\ r &= -3 \end{aligned}$$

Agora, escolhendo qualquer um dos termos acima e procedendo da mesma forma, determinamos o valor do quinquagésimo termo. Escolhendo o décimo sexto termo, temos:

$$\begin{aligned} T_{50} &= T_{16} + (50-16)r \\ T_{50} &= 103 + 34 \cdot (-3) \\ T_{50} &= 1 \end{aligned}$$

Propriedade 2.3. Sejam $k, w \geq 1$ números inteiros. Se T_k e T_w são termos de uma *progressão aritmética*, então:

$$T_1 \; ; \; T_2 \; ; \; \ldots \; ; \; T_{k-n} \; ; \; \ldots \; ; \; T_k \; ; \; \ldots \; ; \; T_{k+n} \; ; \; \ldots \; ; \; T_{w-n} \; ; \; \ldots \; ; \; T_w \; ; \; \ldots \; ; \; T_{w+n} \; ; \; \ldots$$

$$\boxed{T_k + T_w = T_{k-n} + T_{w+n} \quad , \text{ quando } k-n \geq 1}$$

e

$$\boxed{T_k + T_w = T_{k+n} + T_{w-n} \quad , \text{ quando } w-n \geq 1}$$

Esta propriedade mostra que dados dois termos T_k e T_w de uma *progressão aritmética*, com no mínimo quatro termos, existem outros dois termos desta progressão, tais que a distância de um deles a T_k é igual à distância do outro a T_w e que a soma desses dois termos é igual à soma entre T_k e T_w .

Prova da Propriedade 2.3. Sejam T_k e T_w termos de uma *progressão aritmética* de razão r. Assim, dados dois termos desta progressão tais que a distância de um deles a T_k é igual a distância do outro a T_w, temos:

$$T_{k-n} = T_k - nr \tag{9}$$

e

$$T_{w+n} = T_w + nr\,. \tag{10}$$

Adicionando, membro a membro, as igualdades (9) e (10), encontramos

$$T_{k-n} + T_{w+n} = T_k + T_w\,.$$

Do mesmo modo, provamos que

$$T_{k+n} + T_{w-n} = T_k + T_w\,.$$

Assim, provamos o que queríamos. □

Exemplo 2.14. Na *progressão aritmética* $1\,;4\,;7\,;10\,;13\,;16\,;19\,;22\,;25\,;28\,;\ldots$, temos:

$$1+13 = 4+10\,,$$

$$16+22 = 13+25 = 10+28$$

e

$$1+28 = 4+25 = 7+22 = 10+19 = 13+16\,.$$

Propriedade 2.4. Sejam $k,w \geq 1$ números inteiros. Se T_k e T_w são termos de uma *progressão aritmética* e $\dfrac{k+w}{2} \in \mathbb{Z}^+$, então:

$$T_1 \;;\; T_2 \;;\; \ldots \;;\; T_k - r \;;\; T_k \;;\; T_k + r \;;\; \ldots \;;\; T_w - r \;;\; T_w \;;\; T_w + r \;;\; \ldots$$

$$\boxed{T_k \;+\; T_w \;=\; 2\,T_{\frac{k+w}{2}}}$$

Esta propriedade mostra que a soma de dois termos de uma *progressão aritmética*, ambos com índice par ou com índice ímpar, é o dobro do termo equidistante deles.

Vamos provar esta propriedade apenas para os termos com índices pares. Deixamos como treino a prova para os termos com índices ímpares.

Prova da Propriedade 2.4. Sejam T_k e T_w termos distintos de uma *progressão aritmética* de razão r, com $k = 2n$ e $w = 2m$. Assim,

$$T_k \;=\; T_{2n} \;=\; T_1 \;+\; (2n-1)r \tag{11}$$

e

$$T_w \;=\; T_{2m} \;=\; T_1 \;+\; (2m-1)r\,. \tag{12}$$

Adicionando, membro a membro, as igualdades (11) e (12), encontramos

$$\begin{aligned} T_k \;+\; T_w \;&=\; 2T_1 \;+\; (2n+2m-2)r \\ T_k \;+\; T_w \;&=\; 2(T_1 \;+\; (m+n-1)r) \\ T_k \;+\; T_w \;&=\; 2T_{m+n} \end{aligned}$$

que é equivalente à igualdade

$$T_k \;+\; T_w \;=\; 2T_{\frac{k+w}{2}}\,.$$

Assim, finda a prova quando os índices são pares. □

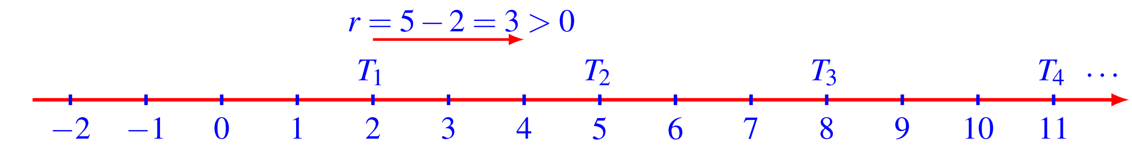
Retornando ao Exemplo 2.14, temos a identidade abaixo como aplicação desta propriedade:

$$2 \times 7 = 1 + 13 = 4 + 10 \;\;,$$

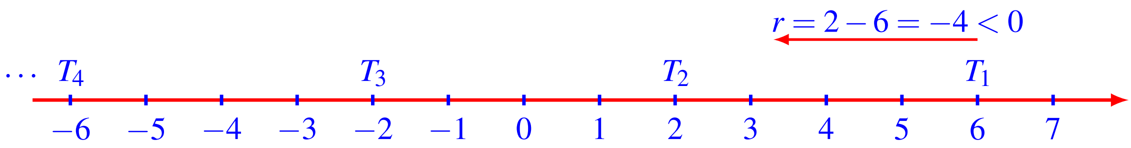
pois $T_3 = T_{\frac{1+5}{2}} = T_{\frac{2+4}{2}}$ e, sendo assim, $2 \times T_3 = T_1 + T_5 = T_2 + T_4\,.$

Dados dois termos, um de índice ímpar e o outro de índice par, não há termo equidistante deles na PA, como podemos constatar ao manipular e explorar o aplicativo abaixo. Neste aplicativo, representamos os termos de uma *progressão aritmética* na reta orientada, localizando os seus valores numéricos na mesma, como mostramos abaixo.

$$2\,;5\,;8\,;11\,;\ldots$$



$$6\,;2\,;-2\,;-6\,;\ldots$$



Segue o aplicativo onde exploramos as Propriedades 2.1 , 2.3 e 2.4 .

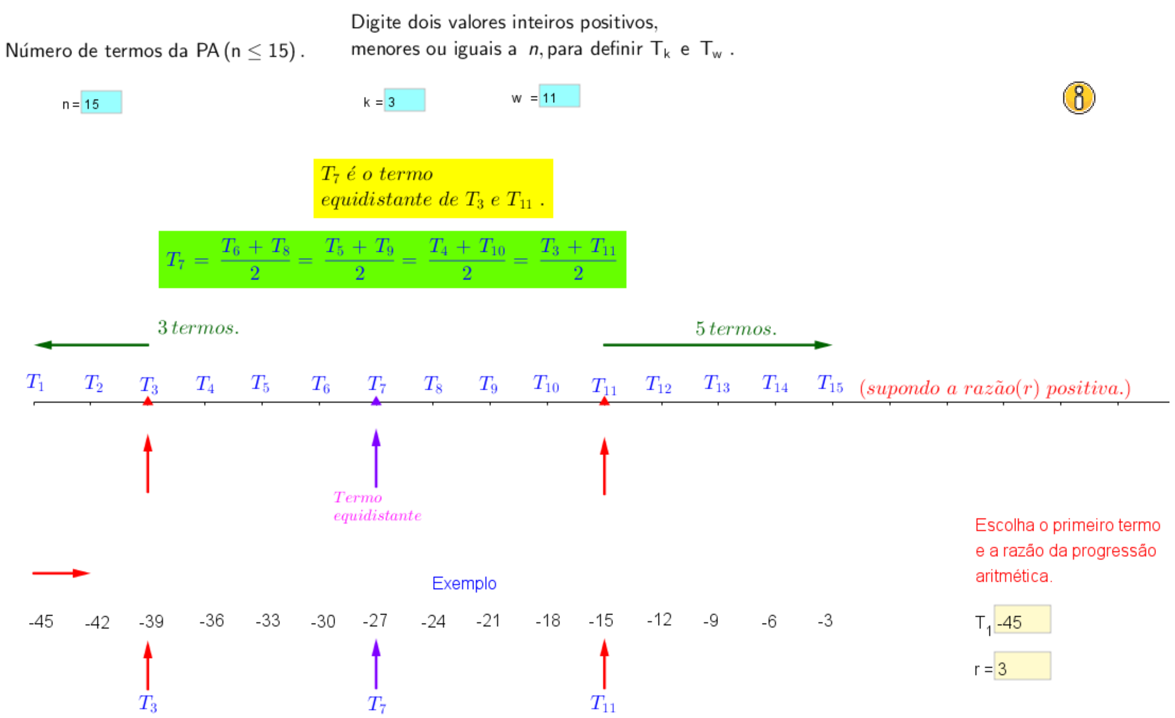


Figura 2.4: Termo equidistante de dois termos dados da PA .
Fonte: Elaborada pelo autor, 2016 .

E, a *prova visual* abaixo nos faz *enxergar* as Propriedades 2.1 , 2.3 e 2.4 .

PSPs 2.1. Dada a progressão $1;4;7;10;13\ ;\ldots$, mostre de forma figurada que

$$2\times 7 = 1+13 = 4+10$$

.

“Uma imagem vale mais que mil palavras” **Confúcio**

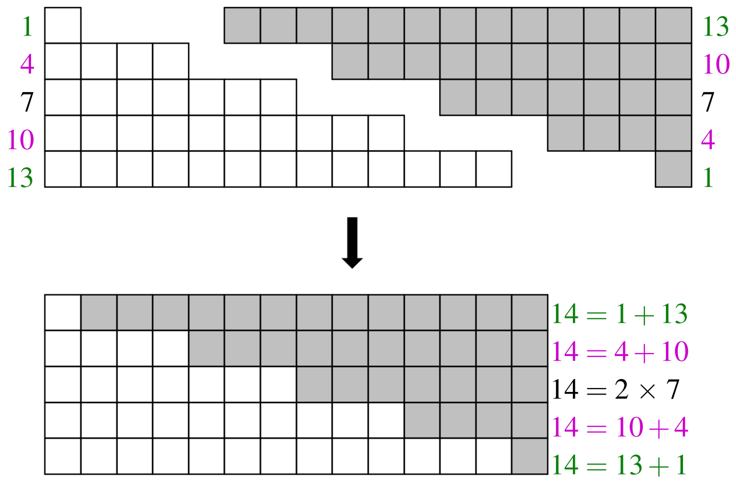


Figura 2.5: Propriedades 2.1 , 2.3 e 2.4 .
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015 .

Sugestão: Nas partes claras ou escuras da figura, a quantidade de quadradinhos em cada linha expressa um termo da *progressão aritmética* em questão. A propriedade comutativa da adição justifica o agrupamento das partes claras e escuras.

Podemos reescrever a identidade

$$2\times 7 = 1+13 = 4+10$$

como

$$7 = \frac{1+13}{2} = \frac{4+10}{2}$$

mostrando, através da Propriedade 2.1 , que o termo T_3 é equidistante dos termos T_1 e T_5 como também dos termos T_2 e T_4 .

Exemplo 2.15. (UFF - Vestibular - 1996 - [36]) Numa progressão aritmética com 51 termos, o *vigésimo sexto* é 2. A soma dos termos dessa progressão é:

(A) 13
(B) 52
(C) 102
(D) 104
(E) 112

Resolução: Se T_1 e T_{51} são, respectivamente, o primeiro e o último termos da *progressão*, como $\dfrac{1+51}{2} = 26 \in \mathbb{Z}^+$, então segue das Propriedades 2.3 e 2.4 que

$$T_1 + T_{51} = T_2 + T_{50} = T_3 + T_{49} = \cdots = 2 \times T_{26} = 2 \times 2 = 4\,.$$

$$\overbrace{b\ ;\ b+r\ ;\ b+2r\ ;\cdots;}^{25\ termos}\ \overbrace{\underbrace{b+25r}_{26^0\ termo}}^{T_{26}\ =\ 2}\ \overbrace{;\cdots;\ b+48r\ ;\ b+49r\ ;\ b+50r}^{25\ termos}\ .$$

$$(b+r)+(b+49r) = 2b+50r = 2(b+25r) = 2\times 2 = 4$$

$$b+(b+50r) = 2b+50r = 2(b+25r) = 2\times 2 = 4$$

Conforme o esquema acima, a progressão é constituída por 25 pares de termos, cada um dos quais com a soma dos termos igual a 4, além do termo central, cujo valor é 2. Portanto a soma dos termos desta progressão é dada por: $25 \times 4 + 2 = 102$.

Deste ponto em diante, sempre que nos referirmos aos n primeiros números inteiros, falamos nos números inteiros positivos e consecutivos. Do mesmo modo, quando nos referirmos aos n primeiros números pares ou aos n primeiros números ímpares, falamos nos n primeiros números inteiros positivos e consecutivos , pares ou ímpares, respectivamente.

2.5 Soma dos n primeiros termos de uma *PA*

De posse dos conceitos adquiridos, como um *exercício mental*, isto é, sem somar um a um os seus termos, vamos determinar o valor da soma:

$$1+2+3+4+5+6.$$

Aos que conseguiram, parabéns. Aos que não conseguiram, vamos à dica: em se tratando de uma *progressão aritmética*, utilize a Propriedade 2.3 e/ou construa uma figura como a PSPs 2.1.

Terminou?

Vamos conferir a sua resposta:

A Propriedade 2.3 garante que $1+6 = 2+5 = 3+4 = 7$, portanto a soma dos termos da progressão é igual a $3 \times 7 = 21$.

E, pensando como a PSPs 2.1, temos o seguinte resultado *visual*:

PSPs 2.2. Visualização geométrica da soma $1+2+3+4+5+6$.

"Se podes olhar, vê. Se podes ver, repara." **José Saramago**

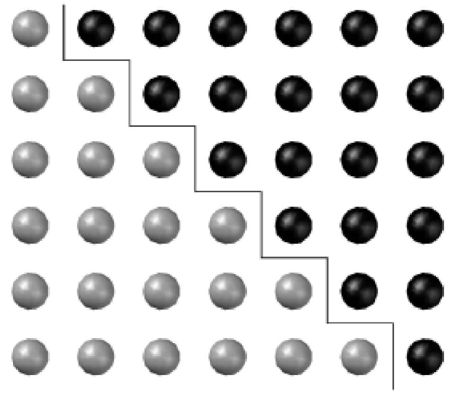


Figura 2.6: Soma de inteiros I
Fonte: NELSEN, 2014 [21] ("Os Antigos Gregos")
(conforme citado por Martin Gardner (1973)) .

Sugestão: Temos um retângulo constituído por seis linhas horizontais, com sete bolinhas cada, isto é, um retângulo com $7\times 6=42$ bolinhas. A linha poligonal que aparece na figura divide este retângulo em duas partes iguais, onde se vê, em cada uma delas, a representação geométrica e ordenada dos seis primeiros números inteiros, ora na ordem crescente ora na ordem decrescente. Além disso, a adição preserva a propriedade comutativa.

$$1+2+3+4+5+6=6+5+4+3+2+1=\frac{1}{2}\times 6\times 7=21$$

Deste modo, utilizando um retângulo de dimensões $(n+1)\times n$, deduzimos que a soma dos n primeiros números inteiros é determinada por:

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=n+(n-1)+\cdots+3+2+1=\frac{1}{2}\times(n+1)\times n$$

Vamos colocar a soma dos n primeiros números inteiros sob outra forma.

PSPs 2.3. Prova visual da soma $1+2+3+4+5+6+7$.

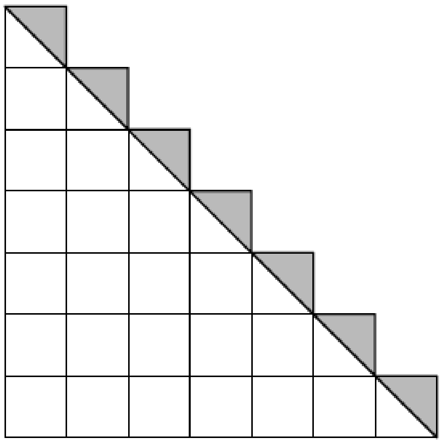


Figura 2.7: Soma de inteiros II
Fonte: NELSEN, 2014 [21] (Prova de Ian Richards (1984)) .

$$1 + 2 + \cdots + 7 = \frac{7^2}{2} + \frac{7}{2} = 28$$

Sugestão: Vemos a representação geométrica e ordenada dos sete primeiros números inteiros. Usando um segmento de reta, de extremos específicos, dividimos a figura em duas *regiões*: *clara* e *escura*. A *região clara* representa a metade de um quadrado de lado 7, enquanto a *região escura* é constituída por sete triângulos retângulos que representam, cada um deles, a metade de um quadrado de lado 1.

Em geral, para todo inteiro $n \geq 1$,tem-se

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}\,.$$

Vejamos mais um belo exemplo de como podemos *visualizar geometricamnte* a soma dos n primeiros números inteiros.

PSPs 2.4. Visualização geométrica da soma $1+2+3+4+5+6$.

“As mais belas descobertas ocorrem quando as mesmas coisas são vistas com um novo olhar.” Malu Schneider

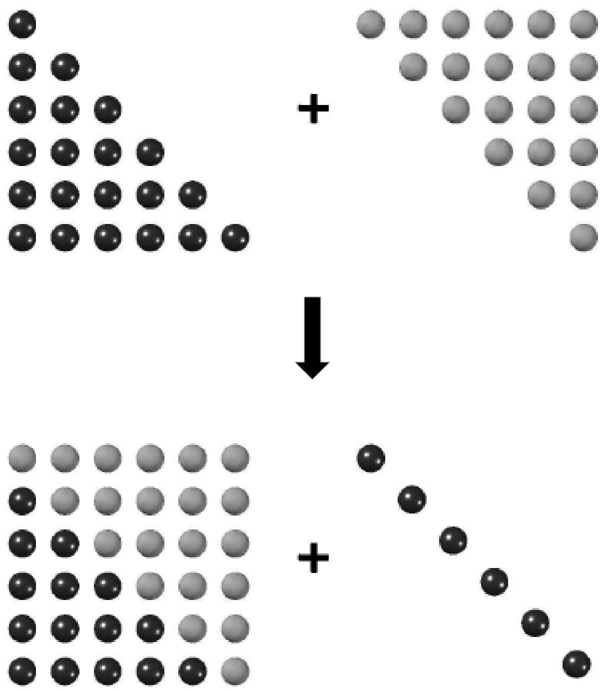


Figura 2.8: Soma de inteiros III
Fonte: NELSEN, 2014 [22] (Prova de S. J. Farlow (1995)) .

$$1+2+\cdots+6=\frac{1}{2}\left(6^2+6\right)=21$$

Sugestão: A junção dos dois triângulos retângulos congruentes, que expressam a soma desses números, forma um quadrado de lado 6 e as 6 bolinhas que compõem as hipotenusas desses triângulos se sobrepõem na diagonal desse quadrado. Deslocando para o lado um desses grupos de seis bolinhas que se sobrepõem, formamos a prova visual.

Deste modo, determinamos a soma dos n primeiros números inteiros utilizando a igualdade:

$$1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{1}{2}\left(n^2+n\right).$$

Acredita-se que, aos 10 anos de idade, *Gauss* (1777 - 1855) visualizava a soma de números inteiros deste modo. Consta em EVES [7] que o seu professor teria passado à classe, para mantê-la ocupada, a tarefa de somar os números inteiros de 1 a 100. Quase que imediatamente, *Gauss* colocou sobre a escrivaninha do professor a resposta, 5050, sem cálculo algum, sendo o único a acertá-la. A imagem abaixo mostra como, possivelmente, *Gauss* visualizou esta soma.

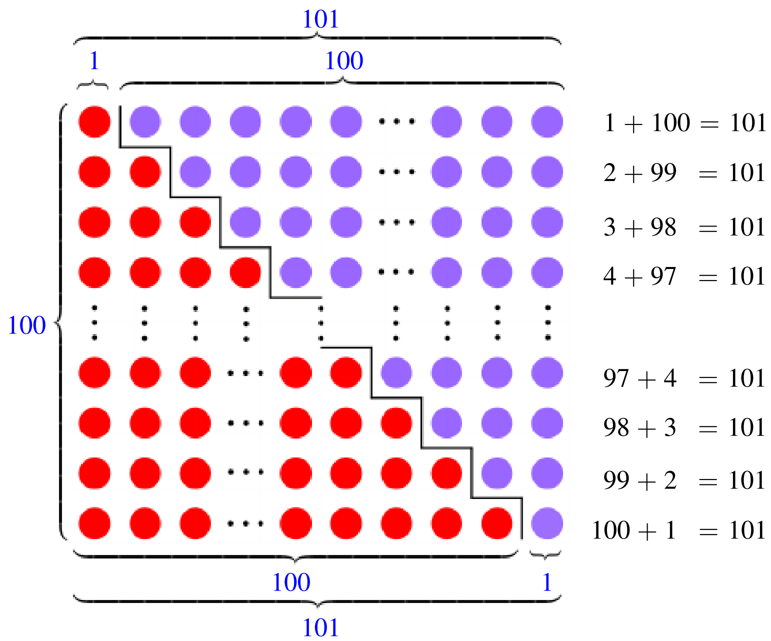


Figura 2.9: Soma de inteiros consecutivos segundo Gauss.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2016.

$$1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100=\frac{100\times 101}{2}=5050.$$

Motivados por este feito e utilizando a mesma técnica, vamos deduzir a fórmula da soma dos n primeiros termos da *PA*:

$$T_1\,;\,T_2\,;\,T_3\,;\,\ldots\,;\,T_{n-2}\,;\,T_{n-1}\,;\,T_n\,.$$

Denotando S_n como a soma dos n primeiros termos desta *PA*, temos:

$$S_n=T_1+T_2+T_3+\cdots+T_{n-2}+T_{n-1}+T_n\,. \tag{13}$$

Reescrevendo o segundo membro da igualdade de trás para frente, obtemos:

$$S_n=T_n+T_{n-1}+T_{n-2}+\cdots+T_3+T_2+T_1\,. \tag{14}$$

Adicionando as identidades (13) e (14), termo a termo, temos:

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & S_n & = & T_1 & + & T_2 & + & T_3 & + & \cdots & + & T_{n-2} & + & T_{n-1} & + & T_n \\
+ & S_n & = & T_n & + & T_{n-1} & + & T_{n-2} & + & \cdots & + & T_3 & + & T_2 & + & T_1 \\
\hline
 & 2S_n & = & T_1+T_n & + & T_2+T_{n-1} & + & T_3+T_{n-2} & + & \cdots & + & T_{n-2}+T_3 & + & T_{n-1}+T_2 & + & T_n+T_1 \; .
\end{array}
$$

Ainda, da Propriedade 2.3, segue que :

$$T_1 + T_n = T_2 + T_{n-1} = T_3 + T_{n-2} = \cdots = T_{n-2} + T_3 = T_{n-1} + T_2 = T_n + T_1 \, .$$

Portanto, sendo n somas iguais a $(T_1 + T_n)$, podemos reescrever a identidade

$$2S_n = (T_1+T_n)+(T_2+T_{n-1})+(T_3+T_{n-2}) + \cdots + (T_{n-2}+T_3)+(T_{n-1}+T_2)+(T_n+T_1)$$

em função de T_1 e de T_n do seguinte modo:

$$2S_n = (T_1+T_n)+(T_1+T_n)+(T_1+T_n) + \cdots + (T_1+T_n)+(T_1+T_n)+(T_1+T_n)$$

o que implica em

$$2S_n = n(T_1 + T_n)$$

$$S_n = \frac{n(T_1 + T_n)}{2}$$

onde n indica a quantidade de termos de T_1 a T_n.

Vamos determinar a soma dos números inteiros consecutivos de 1 a 100, usando a equação acima.

Exemplo 2.16. Determine o valor da soma $1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100$.

Resolução: Inicialmente, determinamos a quantidade de termos da progressão:

$$T_n = T_1 + (n-1)r \iff 100 = 1 + (n-1)1 \iff n = 100 \, .$$

Em sequência, determinamos a soma dos n primeiros termos da progressão:

$$S_{100} = \frac{100(T_1 + T_{100})}{2} = \frac{100(1+100)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050 \, .$$

Prosseguindo, apresentamos uma aplicação desta equação.

Exemplo 2.17. (ENEM - 2013)As projeções para a produção de arroz no período de 2012 - 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

Figura 2.10: ENEM - 2013 - MT - 2º dia | Caderno 5 - AMARELO - Página 24 .
Fonte: Página do INEP na internet, 2015 [12] .

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de

(A) 497,25.
(B) 500,85.
(C) 502,87.
(D) 558,75.
(E) 563,25.

Resolução: Com base na projeção da produção, a quantidade total de arroz que deverá ser produzida, para o período estipulado, é igual à soma dos dez primeiros termos da progressão (de 2012 a 2021 são 10 anos)

$$50,25\ ;\ 51,50\ ;\ 52,75\ ;\ 54,00\ ;\ \ldots\ ,$$

onde cada termo representa a quantidade de arroz produzida, em toneladas, anualmente.
Em vista disso, vamos determinar o décimo termo desta progressão, isto é, a quantidade de arroz que deverá ser produzida em 2021.

$$\begin{aligned} T_n &= T_1 + (n-1)r \\ T_{10} &= 50,25 + (10-1) \times 1,25 \\ T_{10} &= 61,5 \ \ toneladas \end{aligned}$$

Agora, determinamos a quantidade total de arroz que deverá ser produzida neste período

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(T_1 + T_n)}{2} \\ S_{10} &= \frac{10(50,25 + 61,5)}{2} \\ S_{10} &= 558,75 \ \ toneladas \end{aligned}$$

Seguindo com os exemplos, vamos a uma questão que explora, visualmente, a soma dos números inteiros ímpares. Esta questão foi proposta aos alunos do ensino fundamental, os quais ainda não estudaram as progressões aritméticas. Diante disto, vamos resolvê-la baseando-nos apenas sobre o que observamos nas figuras.

Exemplo 2.18. (OBMEP - 2014) Pedro constrói uma sequência de pilhas com cubinhos de tamanhos iguais.Ele começa com um único cubinho. As pilhas são construídas sempre de forma triangular, a partir da anterior, aumentando-se dois cubinhos em cada camada e colocando-se um cubinho no topo. Na figura, estão representadas as três primeiras pilhas da sequência. Observe que na primeira camada da terceira pilha há cinco cubinhos.

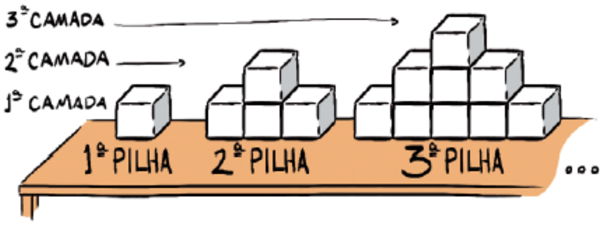


Figura 2.11: Representação geométrica da soma dos números inteiros positivos, ímpares e consecutivos .
Fonte: OBMEP, 2015 [25] (Prova da OBMEP 2014) .

(a) Quantos cubinhos deverá ter a primeira camada da quinta pilha?
(b) Quantos cubinhos deverá ter a primeira camada da 2014ª pilha?
(c) Pedro observou que podia transformar qualquer pilha triangular em uma pilha quadrada, reorganizando os cubinhos dessa pilha. Observe na figura como ele fez isso com a quarta pilha.

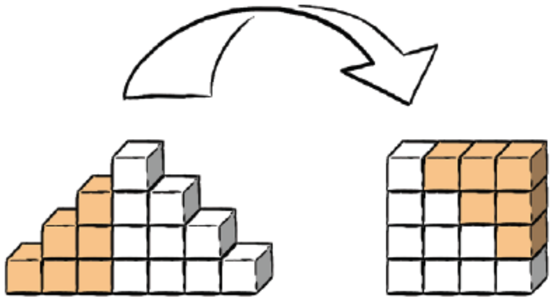


Figura 2.12: Prova visual da soma dos 4 primeiros números inteiros positivos, ímpares e consecutivos .
Fonte: OBMEP, 2015 [25] (Prova da OBMEP 2014) .

Ele usou essa ideia para calcular quantos cubinhos são necessários para construir uma pilha triangular com 99 cubinhos em sua primeira camada. Que resultado ele obteve?

Resolução: Observando a figura, percebe-se que o número de cubinhos na primeira camada de cada pilha é um número ímpar e que este número está associado ao número da pilha à qual este(s) cubinho(s) pertence(m). Vejamos:

$$
\begin{aligned}
1^a\, Pilha &: 1+2\times(1-1) = 1\, cubinho\\
2^a\, Pilha &: 1+2\times(2-1) = 3\, cubinhos\\
3^a\, Pilha &: 1+2\times(3-1) = 5\, cubinhos\\
4^a\, Pilha &: 1+2\times(4-1) = 7\, cubinhos\\
5^a\, Pilha &: 1+2\times(5-1) = 9\, cubinhos\\
\vdots \quad & \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots\\
n\text{-ésima}\, Pilha &: 1+2\times(n-1) = 2n-1\, cubinhos\,.
\end{aligned}
$$

Assim,
(a) mostramos que há 9 cubinhos na primeira camada da 5^a pilha .

(b) tomando $n = 2014$, temos $2n-1 = 2\times 2014 - 1 = 4027$ cubinhos na primeira camada da 2014^a pilha.
(c) Pedro percebeu que a quantidade de cubinhos na primeira camada de todas as pilhas $2n-1$ pode ser dividida em dois grupos, um com $n-1$ e o outro com n cubinhos. Assim, a pilha original é vista como duas novas pilhas que expressam, geometricamente, as somas dos números inteiros consecutivos: $1+2+3+\cdots+(n-1)$ e $1+2+3+\cdots+n$. Justapondo-se essas duas novas pilhas, de forma adequada, formamos um paralelepípedo, que visto de frente é um quadrado de lado n. Desta forma, a área deste quadrado é igual à quantidade de cubinhos da pilha original.
No exemplo dado, na primeira camada há 7 cubinhos, os quais são divididos em dois grupos, um com $((7-1)/2)=3$ e o outro com $((7+1)/2)=4$ cubinhos. Então, com as duas novas pilhas, uma com 3 e a outra com 4 cubinhos na primeira camada, formamos um paralelepípedo, que visto de frente é um quadrado de lado 4. Assim, o total de cubinhos da pilha é $4^2=16$.
Pensando como Pedro, da pilha com 99 cubinhos na primeira camada, podemos formar duas novas pilhas, uma com $((99-1)/2)=49$ e a outra com $((99+1)/2)=50$ cubinhos na primeira camada. Justapondo-se essas pilhas formamos um paralelepípedo que, visto de frente, é um quadrado de lado 50. Assim, o total de cubinhos da pilha original é $50^2=2500$ cubinhos.

Neste contexto, apresentamos novas *provas sem palavras* da soma dos n primeiros números ímpares.

PSPs 2.5. Visualização geométrica da soma $1+3+5+7+9+11+13+15$.

" A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la. " **Johannes Kepler**

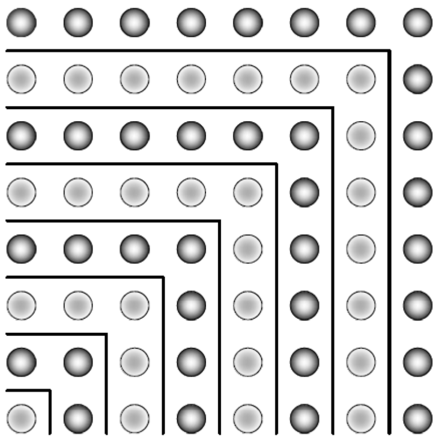


Figura 2.13: Soma de inteiros ímpares I.
Fonte: NELSEN, 2014 [21] (Prova de Nicomachus de Gerasa (Cerca de 100 d.C.)).

$$1+3+5+7+9+11+13+15 = (2\times 1-1)+(2\times 2-1)+\cdots+(2\times 8-1) = 8^2$$

Em geral, determinamos a soma dos n primeiros números ímpares do seguinte modo:

$$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1) = n^2$$

Sugestão: A partir da primeira bolinha representando o número 1, no canto inferior esquerdo, agrupam-se as bolinhas que representam o número seguinte compondo uma camada no formato de um L e assim sucessivamente. O conjunto de todas as bolinhas é um quadrado de lado n, onde n é a quantidade de termos da adição.

Seguimos com outra *prova visual* da soma dos n primeiros números ímpares.

PSPs 2.6. Prova visual da soma $1+3+5+7$.

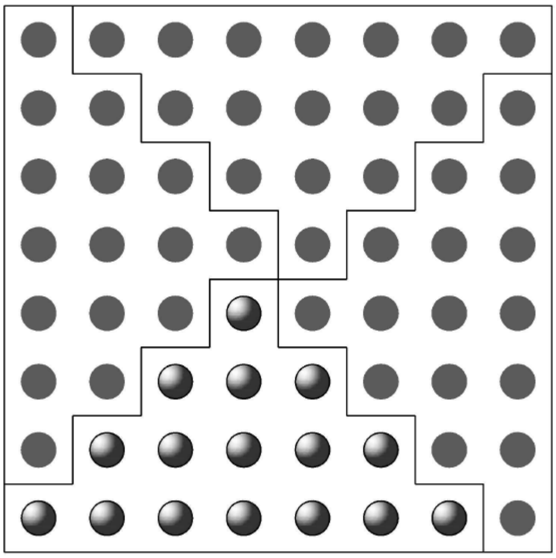


Figura 2.14: Soma de inteiros ímpares II.
Fonte: NELSEN, 2014 [21].

$$1+3+5+7=(2\times 1-1)+(2\times 2-1)+\cdots+(2\times 4-1)=\frac{1}{4}(2\times 4)^2=4^2$$

Diante do exposto, tanto na igualdade quanto na sua *prova visual*, concluímos que a soma dos n primeiros números ímpares determina-se do seguinte modo:

$$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=\frac{1}{4}(2\times n)^2=n^2$$

Sugestão: Agrupando 4 pilhas triangulares idênticas, onde cada pilha expressa a soma dos números inteiros positivos, ímpares e consecutivos, formamos um quadrado de lado $2n$, com n igual à quantidade de parcelas da adição representada em cada pilha.

Vamos a outro exemplo, no qual aproveitaremos o seu contexto para introduzirmos uma nova *prova visual*.

Exemplo 2.19. (Banco de questões da OBMEP - 2016) **Somando pecinhas** .
Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho.

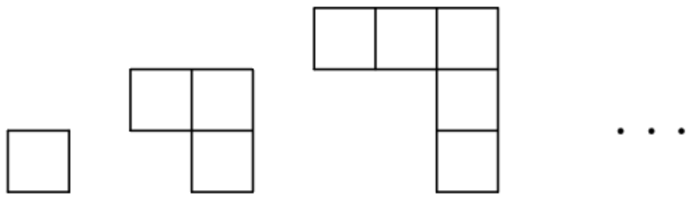


Figura 2.15: Representação geométrica dos números ímpares .
Fonte: OBMEP, 2017 [24] (Banco de questões da OBMEP 2016) .

(a) Quantos quadradinhos formam a pecinha de número 50?
(b) Quantos quadradinhos existem na união das pecinhas de número 1 a 50?
(c) Observando o resultado do item b , calcule

$$2+4+6+\cdots+96+98+100\,.$$

(d) Calcule

$$1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100\,.$$

Resolução: (a) Neste item, vamos proceder como no item (b) do *Exemplo 2.18* : adotando $n=50$, temos $2n-1=2\times 50-1=99$ quadradinhos. Outra forma elegante de resolver este problema é olhar para a figura e associá-la à diferença entre os quadrados de dois números inteiros. Pense nisso.
(b) Observando a figura, percebemos que quando unimos as duas primeiras pecinhas, da esquerda para a direita, formando um quadrado de lado 2 , e o total de quadradinhos é $2^2=4$ quadradinhos. Do mesmo modo, quando unimos as três primeiras pecinhas, formamos um quadrado de lado 3 , com $3^2=9$ quadradinhos. Assim, a união das 50 pecinhas forma um quadrado de lado 50 , com $50^2=2500$ quadradinhos.
(c) Acabamos de mostrar que

$$1+3+5+\cdots+95+97+99=2500\,.$$

Além disso, usando artifícios, podemos escrever uma igualdade equivalente a esta , a partir da qual determinamos a soma desejada:

$$(1+1)+(3+1)+(5+1)+\cdots+(95+1)+(97+1)+(99+1)=2500+50$$

$$2+4+6+\cdots+96+98+100=2550.$$

(d) Dos itens anteriores, temos a soma dos 50 primeiros números pares e dos 50 primeiros números ímpares, assim a adição das somas desses dois grupos é igual à soma dos 100 primeiros números inteiros:

$$1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100=2500+2550=5050\,.$$

Nestas circunstâncias, apresentamos a *prova visual* da soma dos n primeiros números pares.

PSPs 2.7. Prova sem palavras da soma $2+4+6+8+10+12+14$.

“As coisas valem pelas ideias que nos sugerem.” **Machado de Assis**

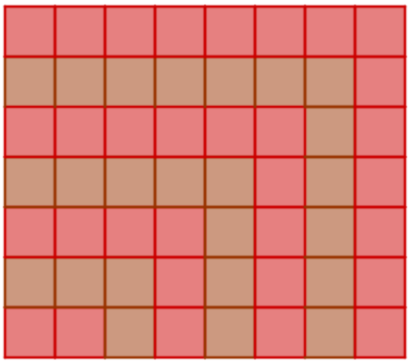


Figura 2.16: Soma de inteiros pares .
Fonte: Elaborada pelo autor, 2016 .

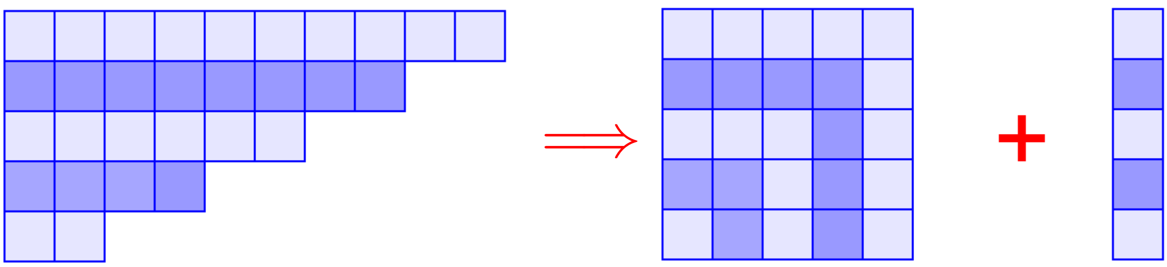
$$2+4+6+\cdots+12+14=(2\times 1)+(2\times 2)+(2\times 3)+\cdots+(2\times 6)+(2\times 7)=7\times 8.$$

Em geral, a soma dos n primeiros números pares é igual a:

$$2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n=2\,[1+2+3+\cdots+(n-1)+n]=2\,\frac{n\,(n+1)}{2}=n\,(n+1)\,.$$

Sugestão: Segue a sugestão da PSPs 2.5 , sendo que o conjunto de todos os quadradinhos forma um retângulo de dimensões n e $n+1$, onde n é a quantidade de parcelas da adição.

Aproveitamos o ensejo para complementarmos os itens (c) e (d) , do *Exemplo 2.19* . Em relação ao item (c), vamos associar a soma dos n primeiros números pares à soma dos n primeiros números ímpares, na forma figurada:



$$2+4+6+8+10 \quad = \quad (1+3+5+7+9) \quad + \quad 5$$

Figura 2.17: Soma dos números inteiros pares em termos
da soma dos números inteiros ímpares .
Fonte: Elaborada pelo autor, 2016 .

Em geral, temos:

$$2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n = (1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1))+n$$
$$2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n = n^2+n = n(n+1).$$

e, em relação ao item (d), apresentamos a forma figurada da soma dos 10 primeiros números inteiros como a soma dos 5 primeiros números pares com os 5 primeiros números ímpares, veja:

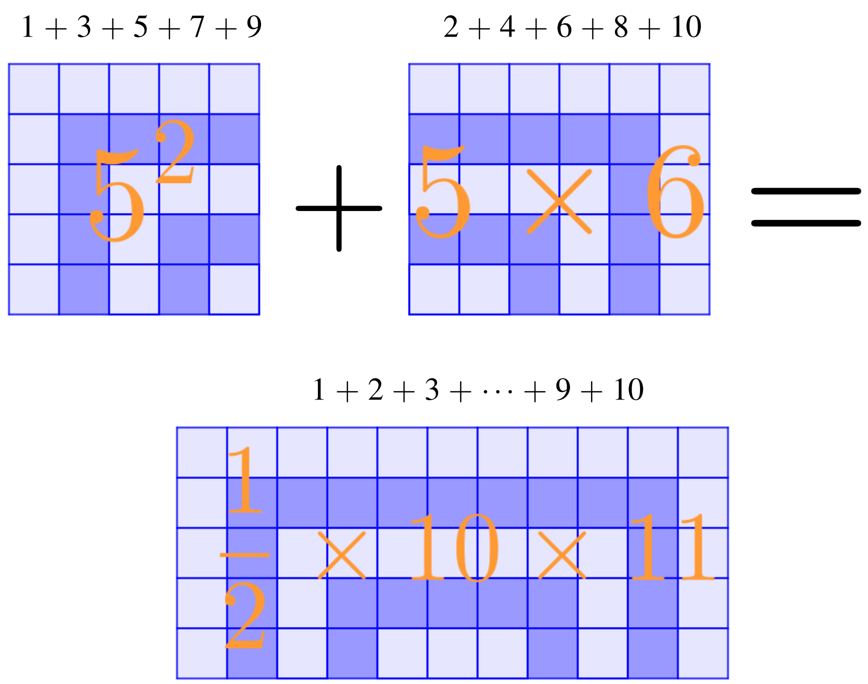


Figura 2.18: Soma dos números inteiros em termos da soma dos números pares com os números ímpares.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2016.

$$1+2+3+\cdots+9+10 = (2+4+6+8+10)+(1+3+5+7+9)$$
$$1+2+3+\cdots+9+10 = 5^2+(5\times 6)$$
$$1+2+3+\cdots+9+10 = 5\times(5+6) = \frac{1}{2}\times 10\times 11\,.$$

É importante ressaltar que falamos na soma dos números pares e dos números ímpares com a mesma quantidade de parcelas.

3 Progressão Geométrica

O exemplo que segue é uma forma figurada de uma *progressão geométrica* (abreviamos PG). Vamos utilizá-lo para extrair informações que nos permitam evoluir neste tema. Como no capítulo anterior, o desenvolvimento da teoria é acompanhado por aplicativos que nos ajudam a visualizá-la de modo a compreendê-la com mais propriedades. Por fim, vamos perceber como foram arquitetados os padrões que definem, geometricamente, algumas somas de PG, isto é, associar as *provas visuais* aos resultados dessas somas.

3.1 Exemplos e Definição

Exemplo 3.1. (ENEM -2008) A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais (objetos geométricos formados por repetições de padrões similares).
O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

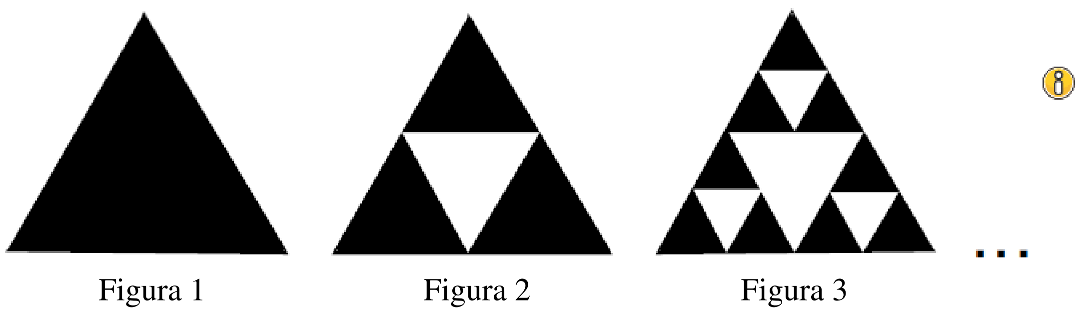
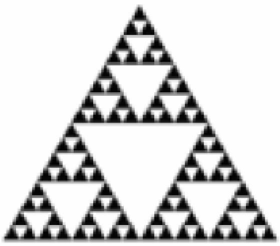
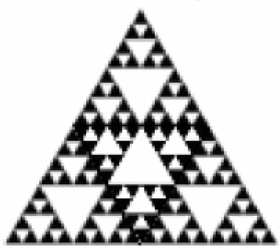


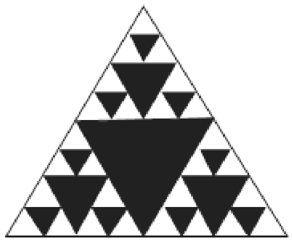
Figura 3.1: Compondo o Triângulo de Sierpinski - ENEM 2008.
Fonte: Página do INEP na internet, 2014 [10].

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada acima é

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

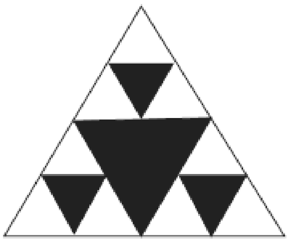
(E) 

Figura 3.2: ENEM 2008 .
Fonte: Página do INEP na internet, 2014 [10] .

Resolução: Para resolver este problema, não precisamos de conhecimentos prévios da matemática, podemos usar a nossa intuição.

A Figura 3.1 nos revela o seguinte padrão de formação: um triângulo preto (Figura 1) é transformado em quatro triângulos semelhantes a ele e congruentes entre si (Figura 2), sendo um triângulo branco no centro, com um dos lados paralelos ao triângulo primitivo e três triângulos pretos com um dos vértices comum ao triângulo primitivo e os outros dois comuns ao triângulo branco.

De imediato, descartamos as alternativas (D) e (E) , pois transformam um triângulo branco em quatro triângulos, um preto e três brancos. Descartamos também a alternativa (B), pois não atende a nenhum dos quesitos do padrão em questão.

As alternativas (A) e (C) atendem ao padrão. Observando a Figura 3, percebemos que cada um dos 9 triângulos pretos é transformado em três triângulos pretos e um branco, determinando a Figura 4. A imagem da alternativa (C) revela a Figura 4 , onde a quantidade de triângulos pretos é igual a $9 \times 3 = 27$ triângulos. E a alternativa (A) ? Ah! É a imagem da Figura 5.

Agora, vamos construir um modelo matemático para a questão.

Observando a Figura 3.1 , percebe-se que o número de triângulos pretos em cada uma das figuras $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ está associado ao número destas figuras. Vejamos:

$$\begin{aligned}
&Figura\ 1 : 3^{1-1} = 1\,\text{triângulo}\\
&Figura\ 2 : 3^{2-1} = 3\,\text{triângulos}\\
&Figura\ 3 : 3^{3-1} = 9\,\text{triângulos}\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&n\text{-ésima}\ Figura : 3^{n-1}\ \text{triângulos}
\end{aligned}$$

Assim, a alternativa correta é a (C), dado que a figura 4 da sequência é formada por $3^{4-1} = 27$ triângulos pretos.

Analisando este exemplo, percebemos que o número de triângulos pretos em cada figura, salvo a primeira , é igual ao produto do número de triângulos da figura anterior por uma *constante*, a saber, 3.

$$1\,\text{triângulo} \xrightarrow{\times 3} 3\,\text{triângulos} \xrightarrow{\times 3} 9\,\text{triângulos}\ ;\ \ldots\ ;\ 3^{n-1}\,\text{triângulos}\ ;\ \ldots$$

Este padrão caracteriza uma *progressão geométrica*. Formalmente, colocamos a definição.

Definição 3.1. Uma *progressão geométrica* é uma lista de números reais do tipo:

$$b \xrightarrow{\times q} bq \xrightarrow{\times q} bq^2 \xrightarrow{\times q} bq^3\ ;\ \ldots\ ;\ bq^{n-2} \xrightarrow{\times q} bq^{n-1} \xrightarrow{\times q} bq^n\ ;\ \ldots$$

onde q é sua *razão*, b é seu *primeiro termo*, bq o *segundo termo*, bq^2 o *terceiro termo*, bq^3 o *quarto termo* e assim sucessivamente , com $n \in \mathbb{Z}^+$.

Lembramos que, nesta definição, q e b são números reais quaisquer.

Ressaltamos que, como na PA, a fim de facilitar a escrita, vamos escrever os termos da PG na forma $T_n\,(n \geq 1)$, sendo n a *variável ordinal*, isto é, indica a ordem dos termos nesta progressão. Além disso, como na PA, numa PG não faz sentido falar nos termos T_0, T_{-1}, T_{-2} e assim por diante.

Exemplo 3.2. As listas $-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; -1; -2; \ldots$ e $81; -27; 9; -3; \ldots$ são *progressões geométricas*. Os números 2 e $-\frac{1}{3}$ são, respectivamente, as razões dessas progressões. Veja:

$$\underset{T_1}{-\frac{1}{4}} \xrightarrow{\times 2} \underset{T_2}{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\times 2} \underset{T_3}{-1}\ ;\ \underset{T_4}{-2}\ ;\ \ldots$$

$$\underset{T_1}{81} \xrightarrow{\times\left(-\frac{1}{3}\right)} \underset{T_2}{-27} \xrightarrow{\times\left(-\frac{1}{3}\right)} \underset{T_3}{9}\ ;\ \underset{T_4}{-3}\ ;\ \ldots$$

Numa *progressão geométrica* de *razão q*, por definição, cada termo, a partir do segundo, é o *produto* do termo anterior por esta *razão*, isto é:

$$\ldots\ ;\ T_n\ ;\ T_{n+1} = T_n \times q\ ;\ \ldots$$

$$\boxed{T_{n+1} = T_n \times q}$$

para todo $n \geq 1$.

Reciprocamente, se numa lista de números reais o *quociente* entre cada termo e o termo anterior a ele, nesta ordem, é *constante* e igual a q, então esta lista é uma *progressão geométrica* de *razão* q. Isto é, dada uma lista de números reais:

$$a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\ a_4\ ;\ \ldots\ ;\ a_{n-1}\ ;\ a_n\ ;\ a_{n+1}\ ;\ \ldots$$

se

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots = q}$$

então a lista é uma *progressão geométrica* de razão q, pois $a_2 = a_1 \times q$, $a_3 = a_2 \times q$, $a_4 = a_3 \times q$ e assim por diante, como na Definição 3.1 .

Nesta igualdade, se $a_1 = 0$, então o valor de q é indefinido. O mesmo acontece quando $a_1 \neq 0$ e os demais termos iguais a zero.

Exemplo 3.3. Na lista $5; 15; 45; 135; \ldots$ temos:

$$r = 3 = \frac{15}{5} = \frac{45}{15} = \frac{135}{45} = \cdots$$

Logo, a lista é uma PG.

Exemplo 3.4. Será a lista $-3; -6; -12; \ldots; -48; -80; -100; \ldots$ uma PG?

Repare que:

$$\frac{-6}{-3} = \frac{-12}{-6} = 2 \neq \frac{-80}{-48}\ , \quad \text{pois } -48 \times 2 \neq -80.$$

Sendo assim, o quociente entre cada termo e o termo anterior a ele não é *constante*. Logo, a lista *não* é uma *progressão geométrica*.

3.2 Classificação de uma PG

Diferentemente do que acontece numa *progressão aritmética*, numa *progressão geométrica* não basta conhecer o sinal da *razão* para classificá-la. Observe que no Exemplo 3.2 , na primeira progressão, cada termo é *maior* que o termo seguinte, enquanto no Exemplo 3.3 cada termo é *menor* que o termo seguinte e, em ambas as progressões, a *razão* é *positiva*.

Isto posto, vamos às classificações e às suas respectivas condições.

☞ Uma *progressão geométrica* é dita *crescente* quando
$T_1 > 0$ e $q > 1$ ou $T_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

☞ Uma *progressão geométrica* é dita *decrescente* quando
$T_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $T_1 < 0$ e $q > 1$.

☞ Uma *progressão geométrica* é dita *constante* quando
$T_1 = 0$ ou $q = 1$.

☞ Uma *progressão geométrica* é dita *oscilante* quando
$T_1 \neq 0$ e $q < 0$.

Chamamos a atenção para o caso em que a PG tem *razão igual a zero* $(q = 0)$ e *primero termo diferente de zero* $(T_1 \neq 0)$. Neste caso, a *progressão geométrica* não possui classificação.

Exemplo 3.5. Observe as seguintes progressões e as suas respectivas classificações:

(a) Por exemplo, como a PG $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$ é *crescente*, temos $0 < q = \left(-\frac{1}{4}\right) \div \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} < 1$ e
$T_1 = -\frac{1}{2} < 0$.

(b) $\sqrt[3]{5}\,,\ \sqrt[3]{5}\,,\ \sqrt[3]{5}\,,\ \ldots$ é uma PG *constante*, pois $q = 1$.

(c) Por exemplo, como a PG $5, -10, 20, -40; \ldots$ é *oscilante*, temos $T_1 = 5 \neq 0$ e $q = \dfrac{-10}{5} = -2 < 0$.

(d) $-8; -16; -32; \ldots$ é uma PG *decrescente*, pois $q = \dfrac{-16}{-8} = 2 > 1$ e $T_1 = -8 < 0$.

Comparando os termos consecutivos de uma *progressão geométrica*, podemos afirmar:

☞ Se uma *progressão geométrica* é *crescente*, então cada termo é *menor* que o termo seguinte.
Por exemplo, como a PG $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$ é *crescente*, temos $-\frac{1}{2} = -\frac{4}{8} < -\frac{1}{4} = -\frac{2}{8} < -\frac{1}{8} < \ldots$

☞ Se uma *progressão geométrica* é *constante*, então cada termo é *igual* ao termo seguinte.
$\sqrt[3]{5}\,,\ \sqrt[3]{5}\,,\ \sqrt[3]{5}\,,\ \ldots$ é uma PG *constante*, pois $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5} = \ldots$

☞ Se uma *progressão geométrica* é *oscilante*, então seus termos alternam entre negativos e positivos .
$5, -10, 20, -40; \ldots$ é uma PG *oscilante*, pois $5 > -10\,;\ -10 < 20\,;\ 20 > -40\,;\ \ldots$

☞ Se uma *progressão geométrica* é *decrescente*, então cada termo é *maior* que o termo seguinte.
Por exemplo, como a PG $-8, -16, -32, \ldots$ é *decrescente*, temos $-8 > -16 > -32 > \ldots$

3.3 Termo geral de uma progressão geométrica

Do mesmo modo que numa *progressão aritmética*, quando conhecemos o primeiro termo e a *razão* de uma *progressão geométrica*, dizemos que a mesma está completamente determinada, isto é, podemos determinar todos os seus termos.

Exemplo 3.6. Escreva os quatro primeiros termos de uma *progressão geométrica* sendo 5 e -3, respectivamente, o primeiro termo e a razão desta progressão.

$$5\ ;\ 5\times(-3)^1\ ;\ 5\times(-3)^2\ ;\ 5\times(-3)^3\ ;\ \ldots$$

$$5\ ;\ -15\ ;\ 45\ ;\ -135\ ;\ \ldots$$

Esta concepção é decorrente da definição de *progressão geométrica*. Sendo assim, descrevemos os termos de uma *progressão geométrica*, com primeiro termo igual a b e a *razão* igual q do seguinte modo:

$$b\ ;\ bq\ ;\ bq^2\ ;\ bq^3\ ;\ \ldots\ ;\ bq^{n-2}\ ;\ bq^{n-1}\ ;\ bq^n\ ;\ \ldots$$

Em face do exposto e com o intuito de determinarmos um dado termo, nestas condições, vamos reescrever, sutilmente, cada um dos termos desta lista:

$$\begin{array}{rll}
1^{\text{o}}\text{ termo}: & T_1 := b & = bq^{1-1} \\
2^{\text{o}}\text{ termo}: & T_2 := bq & = bq^{2-1} \\
3^{\text{o}}\text{ termo}: & T_3 := bq^2 & = bq^{3-1} \\
\vdots & \vdots & \\
\textit{n-ésimo}\text{ termo} & & \\
\text{ou termo geral}: & T_n := bq^{n-1} &
\end{array}$$

Isto indica que, dado o primeiro termo da *PG*, se desejamos avançar *um termo*, então devemos *multiplicar* por q, para avançarmos *dois termos* devemos *multiplicar* por q^2, para avançarmos *três termos* devemos *multiplicar* por q^3, e assim sucessivamente. Por exemplo, sendo $T_1 = b$ o *primeiro termo* de uma *PG*, então, avançando *três termos*, encontramos o seu *quarto termo* $T_4 = bq^{(4-1)} = bq^3$. Deste modo, deduzimos que, avançando $n-1$ *termos*, a partir do *primeiro termo*, encontramos o *n-ésimo termo* ou *termo geral* desta *PG* :

$$\boxed{T_n = bq^{n-1}}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\underbrace{b}_{1^0\ \textit{termo}}\ ; \arrow[rrr, bend left, "\times q^3"] \arrow[rrrrrr, bend right, "\times q^{n-1}"'] & \underbrace{bq}_{2^0\ \textit{termo}}\ ; & \underbrace{bq^2}_{3^0\ \textit{termo}}\ ; & \underbrace{bq^3}_{4^0\ \textit{termo}}\ ; & \underbrace{bq^4}_{5^0\ \textit{termo}}\ ; & \ldots\ ; & \underbrace{bq^{n-1}}_{\textit{n-ésimo termo}}\ ; & \underbrace{bq^n}_{(n+1)\textit{-ésimo termo}}\ ; & \ldots
\end{tikzcd}$$

Exemplo 3.7. (UFF - Vestibular - 2ª Fase) Almeida, dono de um depósito de bebidas, vendeu ao primeiro freguês a metade das garrafas de cerveja do seu estoque; ao segundo, a metade das restantes, ao terceiro, a metade das que sobraram — e assim por diante, até o oitavo freguês. Depois da oitava venda, ele , satisfeito , reparou que restava apenas uma garrafa, que ele bebeu para comemorar.

Diga quantas garrafas estavam inicialmente no depósito, justificando sua resposta.

Resolução: Considerando x como o número de garrafas que estavam inicialmente no depósito e sabendo que todo freguês comprava a metade das garrafas de cerveja deste depósito, escrevemos a progressão em termos do número de garrafas que ficavam no depósito após as vendas, do seguinte modo:

$$\underset{T_1}{\frac{x}{2}} \;\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}\; ; \;\underset{T_2}{\frac{x}{4}} \;\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}\; ; \;\underset{T_3}{\frac{x}{8}} \;;\; \ldots \;;\; \underset{T_8}{1} \;;\; \ldots$$

Portanto, utilizando a equação do termo geral, obtemos:

$$\begin{aligned} T_n &= T_1\,q^{n-1} \\ T_8 &= T_1\,q^{8-1} \\ 1 &= \frac{x}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^7 \\ 1 &= \frac{x}{256} \\ x &= 256 \end{aligned}$$

Neste exemplo, escrevemos o oitavo termo em função do primeiro termo e da razão da progressão. No entanto, podemos determinar qualquer termo em função da razão e de um outro termo qualquer desta progressão. Podemos escrever o *n-ésimo termo* em função do *k-ésimo termo* de uma *progressão geométrica*, do seguinte modo:

$$T_n = bq^{n-1} = \overbrace{bq^{k-1}}^{T_k} \times q^{n-k} = T_k\,q^{n-k}\,, \tag{15}$$

sendo n e k números inteiros positivos. Por exemplo, podemos escrever o *nono termo* em função de termos anteriores a ele:

$$T_9 = bq^{9-1} = bq^{4-1}\times q^{9-4} = \overbrace{bq^3}^{T_4}\times q^5 = T_4\,q^5\,;$$

$$T_9 = bq^{9-1} = bq^{7-1}\times q^{9-7} = \overbrace{bq^6}^{T_7}\times q^2 = T_7\,q^2\,;$$

ou, ainda, em função dos termos posteriores a ele:

$$T_9 = bq^{9-1} = bq^{14-1} \times q^{9-14} = \overbrace{bq^{13}}^{T_{14}} \times q^{-5} = T_{14}\, q^{-5}\,;$$

$$T_9 = bq^{9-1} = bq^{20-1} \times q^{9-20} = \overbrace{bq^{19}}^{T_{20}} \times q^{-11} = T_{20}\, q^{-11}\,;$$

Vamos a um exemplo de aplicação desta técnica.

Exemplo 3.8. Determine o valor do segundo termo de uma *progressão geométrica* sabendo que a razão e o sexto termo desta progressão são -3 e -1458, respectivamente.

Resolução: Utilizando a equação (15), temos:

$$\begin{aligned}
T_n &= T_k\, q^{n-k} \\
T_2 &= T_6\, q^{2-6} \\
T_2 &= -1458 \times (-3)^{-4} \\
T_2 &= \frac{-1458}{81} \\
T_2 &= -18
\end{aligned}$$

3.4 Propriedades de uma progressão geométrica

Apresentamos uma importante propriedade que relaciona os termos equidistantes de um dado termo de uma PG com o próprio termo.

Propriedade 3.1. O *quadrado* de todo termo de uma *progressão geométrica*, distinto do primeiro, é igual ao *produto* de dois termos que dele equidistam.

$$T_1\ ;\ T_2\ ;\ T_3\ ;\ \ldots\ ; T_{n-k}\ ;\ \ldots\ ;\ T_{n-1}\ ;\ T_n\ ;\ T_{n+1}\ ;\ \ldots\ ;\ T_{n+k}\ ;\ \ldots$$

$$\boxed{T_n^{\ 2} = T_{n-k} \times T_{n+k}}$$

Se todos os termos da progressão forem positivos, então T_n é a *média geométrica* entre T_{n-k} e T_{n+k}.

Prova da Propriedade 3.1. Seja T_k termo de uma *progressão geométrica* de razão q, distinto do primeiro termo. Assim, os termos que dele equidistam são:

$$T_{n-k} = T_n\, q^{-k} \tag{16}$$

e

$$T_{n+k} = T_n\, q^{k}\,. \tag{17}$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades (16) e (17) encontramos

$$T_{n-k} \times T_{n+k} = T_n^{2}\,.$$

Assim, provamos o que queríamos. □

Exemplo 3.9. Na *progressão geométrica* $-1\,;5\,;-25\,;125\,;-625\,;3125\,;-15625\,;\ldots$, temos:

$$5^2 = -1\times(-25)\ ;\ (-25)^2 = 5\times 125\ ;\ 125^2 = -25\times(-625)\ ;\ \ldots$$

como caso específico desta propriedade, onde utilizamos um dado termo e, como os termos equidistantes, o anterior e o posterior a ele .

E, em geral, por exemplo, temos: $(-625)^2 = -25\times(-15625)$ e $125^2 = -1\times(-15625)$, onde constatamos que o quadrado de todo termo de uma *progressão geométrica*, distinto do primeiro, é igual ao produto de dois termos que dele equidistam.

Exemplo 3.10. (FUVEST - SP) O quinto e o sétimo termos de uma PG de razão positiva valem respectivamente 10 e 16. O sexto termo dessa PG é:

(A) 13
(B) $10\sqrt{6}$
(C) 4
(D) $4\sqrt{10}$
(F) 10

Resolução: Sabe-se que o quinto e o sétimo termos são equidistantes ao sexto termo desta *progressão*. Segue da Propriedade 3.1 que:

$$T_6^2 = T_5\times T_7\ .$$

Então,

$$\begin{aligned} T_6^2 &= 10\times 16 \\ T_6 &= \sqrt{160} \\ T_6 &= 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

Propriedade 3.2. Se $a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\ \ldots\ ;a_{n-k}\ ;\ \ldots\ ;\ a_{n-1}\ ;\ a_n\ ;\ a_{n+1}\ ;\ldots\ ;\ a_{n+k}\ ;\ \ldots$ é uma lista ordenada de números reais tal que

$$\boxed{{a_n}^2 = a_{n-1}\times a_{n+1}}$$

para todo $n\geq 2$. Então esta lista é uma *progressão geométrica*.

Estamos falando na recíproca da Propriedade 3.1.

Prova da Propriedade 3.2. Sendo

$$a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\ a_4\ ;\ \ldots\ ;\ a_{n-1}\ ;\ a_n\ ;\ a_{n+1}\ ;\ \ldots$$

uma lista de números reais tal que $q = \dfrac{a_2}{a_1}$ e o *quadrado* de todo termo, salvo o primeiro termo, é igual ao *produto* do termo anterior com o posterior a ele, então:

✓ $q = \dfrac{a_2}{a_1} \iff a_2 = a_1\, q\,;$

✓ $a_2{}^2 = a_1\, a_3 \iff a_2 \times \overbrace{\dfrac{a_2}{a_1}}^{q} = a_3 \iff a_2\, q = a_3$

✓ $a_3{}^2 = a_2\, a_4 \iff a_3 \times \overbrace{\dfrac{a_3}{a_2}}^{q} = a_4 \iff a_3\, q = a_4$

e assim por diante. Nestas condições, cada termo é o produto do termo anterior pela constante q. Portanto, segundo a Definição 3.1 , concluímos que a lista é uma *progressão geométrica*. □

Não podemos deixar de considerar o caso em que q é indefinido, isto é, quando todos os termos da progressão são nulos.

Ressaltamos que todo par de termos equidistantes de a_n satisfaz a relação que acabamos de provar.

Propriedade 3.3. Sejam $k, w \geq 1$ números inteiros. Se T_k e T_w são termos de uma *progressão geométrica*, então:

$$T_1 \;;\; T_2 \;;\; \ldots \;;\; T_{k-n} \;;\; \ldots \;;\; T_k \;;\; \ldots \;;\; T_{k+n} \;;\; \ldots \;;\; T_{w-n} \;;\; \ldots \;;\; T_w \;;\; \ldots \;;\; T_{w+n} \;;\; \ldots$$

$$\boxed{T_k \times T_w = T_{k-n} \times T_{w+n} \quad , \text{ quando } k-n \geq 1}$$

e

$$\boxed{T_k \times T_w = T_{k+n} \times T_{w-n} \quad , \text{ quando } w-n \geq 1\,.}$$

Como, na *progressão aritmética*, esta propriedade mostra que dados dois termos T_k e T_w de uma *progressão geométrica*, com no mínimo quatro termos, existem outros dois termos desta progressão, tais que a distância de um deles a T_k é igual a distância do outro a T_w e que o produto desses dois termos é igual ao produto entre T_k e T_w .

Prova da Propriedade 3.3. Sejam T_k e T_w termos de uma *progressão geométrica* de razão q. Assim, dados dois termos desta progressão tais que a distância de um deles a T_k é igual a distância do outro a T_w, temos:

$$T_{k-n} = T_k\, q^{-n} \tag{18}$$

e

$$T_{w+n} = T_w\, q^n\,. \tag{19}$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades (18) e (19) encontramos

$$T_{k-n} \times T_{w+n} = T_k \times T_w\,.$$

Do mesmo modo provamos que

$$T_{k+n} \times T_{w-n} = T_k \times T_w\,.$$

Assim, provamos o que queríamos. □

Exemplo 3.11. Determine o produto dos vinte primeiros termos da *progressão geométrica* $1\,;2\,;4\,;\ldots$.

Resolução: Segue da propriedade anterior que

$$T_1 \times T_{20} = T_2 \times T_{19} = \cdots = T_{10} \times T_{11}\,.$$

Como

$$T_1 \times T_2 \times T_3 \times \cdots \times T_{19} \times T_{20} = (T_1 \times T_{20}) \times (T_2 \times T_{19}) \times \cdots \times (T_{10} \times T_{11})\,,$$

reescrevendo o segundo membro da igualdade em termos de um dos dez pares de termos que o constitui, visto que apresentam o mesmo produto, temos

$$T_1 \times T_2 \times T_3 \times \cdots \times T_{19} \times T_{20} = (T_1 \times T_{20})^{10}\,.$$

Desenvolvendo o segundo membro encontramos

$$T_1 \times T_2 \times T_3 \times \cdots \times T_{19} \times T_{20} = (T_1 \times T_1\, q^{19})^{10}$$
$$T_1 \times T_2 \times T_3 \times \cdots \times T_{19} \times T_{20} = ({T_1}^2\, q^{19})^{10} = {T_1}^{20}\, q^{190}\,.$$

Como $T_1 = 1$ e $q = \dfrac{2}{1} = 2$, segue que

$$T_1 \times T_2 \times T_3 \times \cdots \times T_{19} \times T_{20} = 1^{20}\, 2^{190} = 2^{190}\,.$$

A fim de relacionar as duas progressões, *aritmética* e *geométrica*, ressaltamos que podemos pensar no produto dos termos de uma *progressão geométrica* utilizando a soma dos termos de uma *progressão aritmética*. Deste modo, vamos pensar no exemplo que acabamos de apresentar.

$$\begin{aligned} T_1 \times T_2 \times T_3 \times \cdots \times T_{19} \times T_{20} &= 1 \times 2 \times 4 \times \cdots \times 2^{19} \\ &= 2^0 \times 2^1 \times 2^2 \times \cdots \times 2^{19} \\ &= 2^{0+1+2+\cdots+19}\,. \end{aligned}$$

Como $0 + 1 + 2 + \cdots + 19$ indica a soma dos termos de uma *progressão aritmética*, então

$$\begin{aligned} T_1 \times T_2 \times T_3 \times \cdots \times T_{19} \times T_{20} &= 2^{0+1+2+\cdots+19}\,. \\ &= 2^{\frac{20(0+19)}{2}} = 2^{190}\,. \end{aligned}$$

Exemplo 3.12. (FUVEST-SP - 1ª Fase) Uma *progressão geométrica* tem primeiro termo igual a 1 e *razão* igual a $\sqrt{2}$. Se o produto dos termos dessa progressão é 2^{39} , então o número de termos é igual a:

(A) 12
(B) 13
(C) 14
(D) 15
(E) 16

Resolução: Inicialmente, vamos escrever a progressão

$$1\,;\sqrt{2}\,;\left(\sqrt{2}\right)^2;\ldots;\left(\sqrt{2}\right)^{n-2};\left(\sqrt{2}\right)^{n-1};\ldots$$

Podemos reescrever esta progressão como

$$2^0\,;2^{\frac{1}{2}}\,;2^1\,;\ldots;2^{\frac{n-2}{2}}\,;2^{\frac{n-1}{2}}\,;\ldots$$

Como visto no exemplo anterior, supondo n a quantidade de termos desta progressão que vamos multiplicar, então:

$$\begin{aligned} 2^0\times 2^{\frac{1}{2}}\times 2^1\times\ldots\times 2^{\frac{n-2}{2}}\times 2^{\frac{n-1}{2}} &= 2^{0+\frac{1}{2}+1+\cdots+\left(\frac{n-1}{2}\right)}\\ &= 2^{\frac{n\left(0+\frac{n-1}{2}\right)}{2}}\\ &= 2^{\frac{n^2-n}{4}}\,. \end{aligned}$$

Sendo este produto igual a 2^{39}, segue que

$$2^{\frac{n^2-n}{4}}=2^{39}\iff\frac{n^2-n}{4}=39\iff n=13$$

Propriedade 3.4. Sejam $k,w\geq 1$ números inteiros. Se T_k e T_w são termos de uma *progressão geométrica* e $\dfrac{k+w}{2}\in\mathbb{Z}^+$, então:

$$T_1\ ;\ T_2\ ;\ \ldots\ ;\ T_k-r\ ;\ T_k\ ;\ T_k+r\ ;\ \ldots\ ;\ T_w-r\ ;\ T_w\ ;\ T_w+r\ ;\ \ldots$$

$$\boxed{T_k\times T_w=\left(T_{\frac{k+w}{2}}\right)^2.}$$

Esta propriedade mostra que o produto de dois termos de uma *progressão geométrica*, ambos com índice par ou com índice ímpar, é o quadrado do termo equidistante deles.

Vamos provar esta propriedade apenas para os termos com índices pares. Deixamos como treino a prova para os termos com índices ímpares.

Prova da Propriedade 3.4. Sejam T_k e T_w termos de uma *progressão geométrica* de razão q, com $k=2n$ e $w=2m$. Assim,

$$T_k=T_{2n}=T_1\,q^{2n-1}\tag{20}$$

e

$$T_w=T_{2m}=T_1\,q^{2m-1}\,.\tag{21}$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades (20) e (21) encontramos

$$T_k\times T_w={T_1}^2\,q^{2n+2m-2}$$

$$T_k \times T_w = (T_1\, q^{n+m-1})^2$$
$$T_k \times T_w = (T_{n+m})^2 \,,$$

que é equivalente à igualdade

$$T_k \times T_w = \left(T_{\frac{k+w}{2}}\right)^2$$

e finaliza a prova.

$\square$

Exemplo 3.13. Na *progressão geométrica* $3\ ;\ 12\ ;\ 48\ ;\ 192\ ;\ 768\ ;\ \ldots$, temos $T_3 = T_{\frac{1+5}{2}} = T_{\frac{2+4}{2}}$ e, sendo assim, ${T_3}^2 = T_1 \times T_5 = T_2 \times T_4$. Veja:

$$48^2 = 3 \times 768 = 12 \times 192\,.$$

Como na *PA* , dados dois termos, um de índice ímpar e o outro de índice par, não há termo equidistante deles na *PG* .

Manipulando e explorando o aplicativo abaixo, constatamos que, numa *progressão geométrica crescente* ou *decrescente* , os termos apresentam um comportamento em *exponencial* , enquanto na *progressão geométrica oscilante* os termos apresentam um comportamento *não definido*. E, no caso da *progressão geométrica constante*, os termos apresentam um comportamento *linear* . Além disso, podemos constatar a veracidade das Propriedades 3.1 , 3.3 e 3.4 .

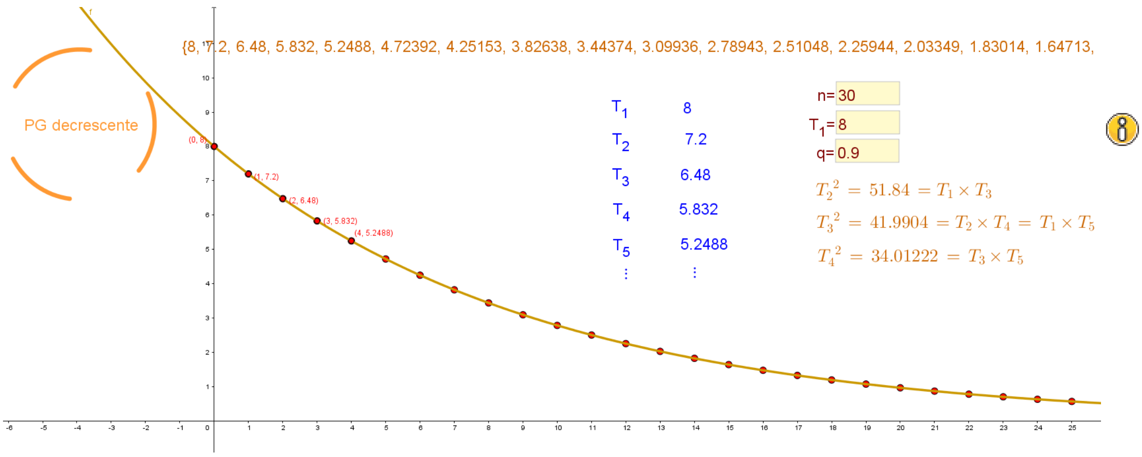


Figura 3.3: Estudo da *PG* .
Fonte: Elaborada pelo autor, 2016 .

3.5 Soma dos termos de uma *PG*

Numa *progressão aritmética*, com $r \neq 0$, o módulo da soma dos seus termos pode ser tão grande quanto se deseje, bastando para isso adicionar um certo número de termos consecutivos. Isto indica que não se pode pensar num *limite* para a soma dos termos de uma *progressão aritmética*, quando se adiciona uma grande quantidade de termos consecutivos.

Será que acontece o mesmo com a soma dos termos de uma *progressão geométrica* ?

Vamos tirar nossas conclusões manipulando e explorando o aplicativo abaixo. Nele, atribuímos valores para o primeiro termo, para a razão e também definimos a quantidade de termos que se deseja adicionar.

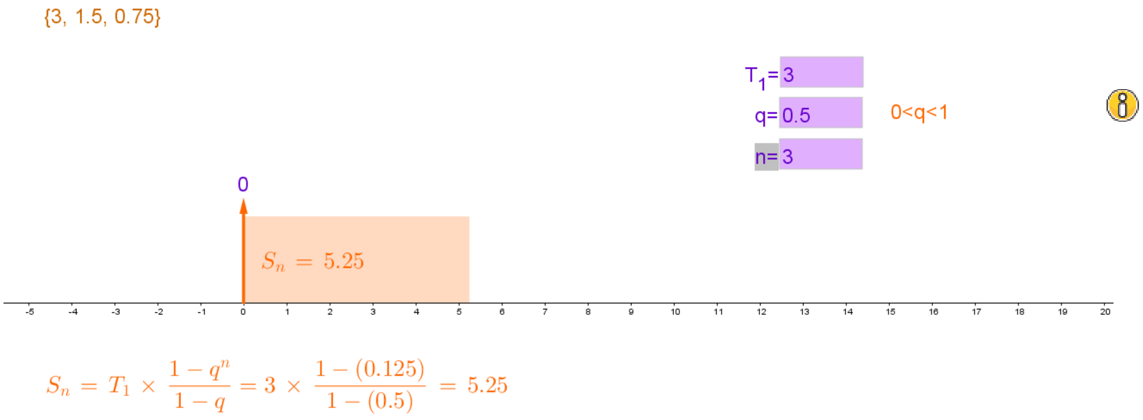


Figura 3.4: Soma dos n primeiros termos de uma *PG*.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2016.

Ainda assim, se, após a utilização da ferramenta, você tem dúvidas, vamos a um exemplo que nos ajudará a pensar no assunto.

Exemplo 3.14. Vamos considerar a *progressão geométrica* do Exemplo 3.1, onde os seus termos representam o número de triângulos pretos em cada figura, isto é, a progressão em que $T_1 = 1$ e $q = 3$. Utilizando o aplicativo, atribuindo esses valores a T_1 e a q, constatamos que adicionando sucessivos termos, isto é, aumentando consideravelmente o valor de n, a soma desses termos *explode*, ou seja, fica tão grande o quanto se deseja, como acontece numa *PA*. Então, concluímos que soma dos termos da *PG* $1\ ; 3\ ; 9\ ; \ldots$ não tem um *limite*.

Agora, vamos considerar a *progressão geométrica* representada na imagem do aplicativo, isto é, a progressão com $T_1 = 3$ e $q = 0,5$. Constatamos que, adicionando uma quantidade considerável de termos dessa progressão, o valor da soma *não ultrapassa* o número 6. Assim, a soma dos termos da *PG* tem um *limite*.

Então, concluímos que há *progressões geométricas* em que a soma dos seus termos não apresenta um *limite*, mas há também aquelas em que a soma dos seus termos se aproxima cada vez mais de um número, à medida que inserimos cada vez mais termos na adição, ou seja, este tipo de progressão apresenta um *limite*.

Isto posto, vamos deduzir a soma dos n primeiros termos de uma *progressão geométrica*.

3.5.1 Soma dos n primeiros termos de uma *PG*

Vamos à dedução da fórmula da soma dos n primeiros termos da *PG*, de razão q:

$$T_1\, ; T_2\, ; T_3\, ; \ldots\, ; T_{n-2}\, ; T_{n-1}\, ; T_n\, ; T_{n+1}\, ; \ldots$$

Denotando S_n como a soma dos n primeiros termos desta *PG*, temos:

$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-2} + T_{n-1} + T_n\,. \tag{22}$$

Na intenção de substituir cada um dos termos, no segundo membro da igualdade, pelo termo posterior a ele, vamos multiplicar a equação (22) pela razão q:

$$qS_n = T_1\,q + T_2\,q + T_3\,q + \cdots + T_{n-2}\,q + T_{n-1}\,q + T_n\,q\,. \tag{23}$$

Reescrevendo o segundo membro da equação (23), temos:

$$qS_n = T_2 + T_3 + T_4 + \cdots + T_{n-1} + T_n + T_{n+1}\,. \tag{24}$$

Fazendo a diferença entre as equações (22) e (24), encontramos

$$\begin{array}{rl} & S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-2} + T_{n-1} + T_n \\ - & \\ & qS_n = T_2 + T_3 + T_4 + \cdots + T_{n-1} + T_n + T_{n+1} \\ \hline & S_n - qS_n = T_1 - T_{n+1} \end{array}$$

onde, substituindo T_{n+1} por $T_1\,q^n$, escrevemos a equação em termos do primeiro termo e da razão da progressão:

$$S_n - qS_n = T_1 - T_1\,q^n$$

$$\boxed{S_n = T_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}} \tag{25}$$

se $q \neq 1$.
Quando $q = 1$, então

$$\boxed{S_n = n \times T_1}$$

Vamos aos exemplos de aplicação da equação (25).

Exemplo 3.15. (Fatec - SP) Num certo jogo de azar, apostando-se uma quantia X, tem-se uma das duas possibilidades seguintes:

❶ perde-se a quantia X apostada;
❷ recebe-se a quantia $2X$.

Uma pessoa jogou 21 vezes da seguinte maneira: na primeira vez, apostou 1 centavo; na segunda vez, apostou 2 centavos, na terceira vez, apostou 4 centavos e assim por diante, apostando em cada vez o dobro do que havia apostado na vez anterior. Nas 20 primeiras vezes, ela perdeu. Na 21^a vez, ela ganhou. Comparando-se a quantia total T por ela desembolsada e a quantia Q recebida na 21^a jogada, tem-se que Q é igual a

(A) $T/2$
(B) T
(C) $2T$
(D) $T-1$
(E) $T+1$

Resolução: Cada elemento na progressão abaixo expressa o valor em cada uma das apostas:

$$\times 2$$

$$\underbrace{1}_{1^{\text{a}}\ aposta} \;;\; \underbrace{2}_{2^{\text{a}}\ aposta} \;;\; \underbrace{4}_{3^{\text{a}}\ aposta} \;;\; \underbrace{8}_{4^{\text{a}}\ aposta} \;;\; \underbrace{16}_{5^{\text{a}}\ aposta} \;;\; \dots \;;\; \underbrace{T_{21}}_{21^{\text{a}}\ aposta} \;;\; \dots$$

$$\times 2^{20}$$

Vamos determinar o valor da 21^a aposta.

$$T_n = T_1\, q^{n-1}$$
$$T_{21} = 1 \times 2^{21-1} = 2^{20}$$

Como a pessoa ganhou apenas na 21^a aposta e o valor recebido Q corresponde ao dobro do que ela apostou, então $Q = 2 \times 2^{20} = 2^{21}$.
Agora, vamos determinar a quantia total T por ela desembolsada. Lembramos que T representa a soma dos 21 primeiros termos desta progressão:

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^{20}\,.$$

Utilizando a equação da soma dos n primeiros termos de uma PG, temos:

$$T = S_{21} = 1 \times \frac{2^{21} - 1}{2 - 1} = 2^{21} - 1$$

Portanto,

$$T = 2^{21} - 1 = Q - 1 \iff Q = T + 1\,.$$

Exemplo 3.16. (UERJ - Vestibular 2017 - 2ª fase - [35] Em uma atividade nas olimpíadas de matemática de uma escola, os alunos largaram, no sentido do solo, uma pequena bola de uma altura de $12m$. Eles observaram que, cada vez que a bola toca o solo, ela sobe e atinge 50% da altura máxima da queda imediatamente anterior. Calcule a distância total, em metros, percorrida na vertical pela bola ao tocar o solo pela oitava vez.

Resolução: Inicialmente, vamos escrever a progressão geométrica onde cada termo representa a soma das distâncias percorridas pela bola ao subir e descer, após tocar o solo pela primeira vez:

$$\times \frac{1}{2}$$

$$6+6\,;\,3+3\,;\,\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\,;\,\dots\,;\,T_7\,;\,\dots = 12\,;\,6\,;\,3\,;\,\dots\,;\,T_7\,;\,\dots$$

$$\times\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

Agora, vamos determinar a soma dos sete primeiros termos dessa progressão, indicando a distância percorrida pela bola até a oitava vez em que a mesma tocou o solo.

$$S_n = T_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_7 = 12 \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -24 \times \left(-\frac{127}{128}\right) \cong 24\,m\,.$$

Portanto, a distância total, em metros, percorrida pela bola é igual à soma entre 12 (distância percorrida na descida, antes de tocar o solo pela primeira vez) e 24 (soma das distâncias seguintes, percorridas pela bola, até tocar pela oitava vez o solo), isto é, $12\,m + 24\,m \cong 36\,m$.

Abaixo apresentamos a *animação* da situação problema descrita no exemplo anterior.

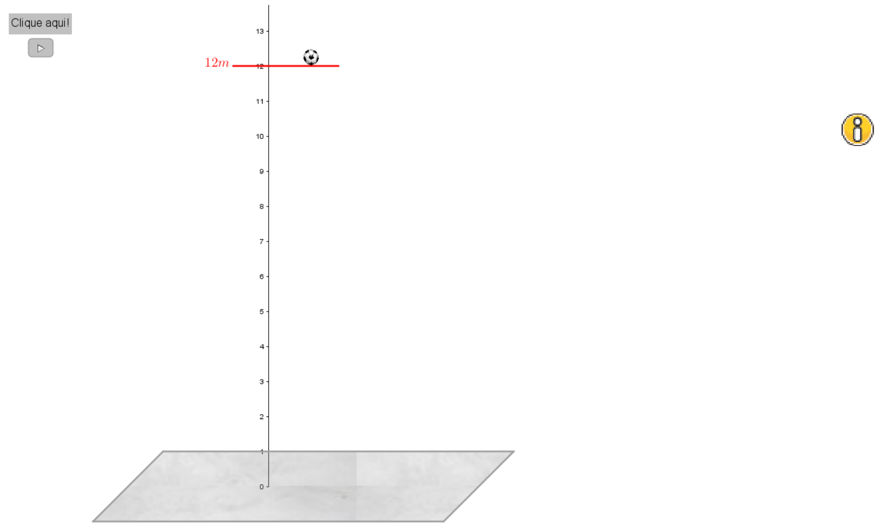


Figura 3.5: Soma dos n primeiros termos de uma *PG*.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Agora, vamos determinar a soma de uma certa quantidade de *potências de base* 3, consecutivas e com expoentes inteiros não negativos. Estamos falando da *PG* do Exemplo 3.1, onde cada potência indica as quantidades de triângulos pretos em cada uma das figuras . Em seguida, apresentaremos uma *prova visual* para este tipo de progressão.

Exemplo 3.17. Determinar a soma dos vinte primeiros termos da *PG* $1 \;;\; 3 \;;\; 9 \;;\; 27 \;;\; \ldots$

Resolução: Abaixo expressamos os termos da progressão na forma de *potências de base* 3

$$\underbrace{3^0}_{1^0\ termo} \overset{\times 3}{\longrightarrow} ; \underbrace{3^1}_{2^0\ termo} ; \underbrace{3^2}_{3^0\ termo} ; \ldots ; \underbrace{3^{19}}_{20^0\ termo} ; \ldots \qquad (3^0 \xrightarrow{\times 3^{19}} 3^{19})$$

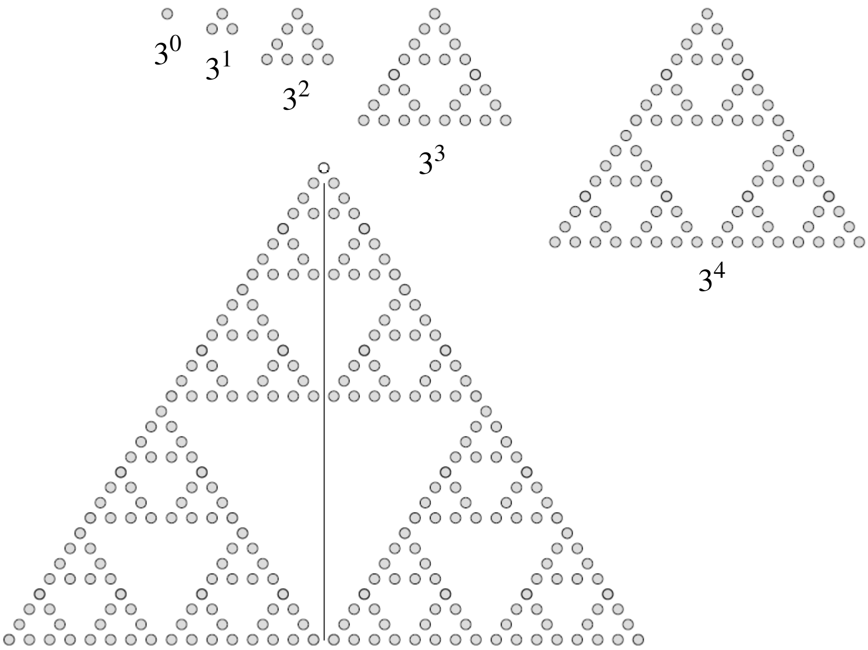
Utilizando a equação (25), temos:

$$S_n = T_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_{20} = 1 \times \frac{3^{20} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{20} - 1}{2}$$

PSPs 3.1. Prova sem palavras da soma $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4$.

“Muitas palavras não indicam necessariamente muita sabedoria.”
Tales de Mileto



$$\frac{3^5 - 1}{2} = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4$$

Figura 3.6: Soma de potências de base 3 .
Fonte: NELSEN, 2014 [22] (Prova de David B. Sher (1997)).

Sendo assim, determinamos a soma das n primeiras *potências de base* 3 do seguinte modo:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{n-2} + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2} .$$

Sugestão: Observe que a junção de três figuras idênticas, que representam um dado termo da progressão, seguindo o padrão estabelecido, determina a figura que representa o termo seguinte desta progressão.

3.5.2 Soma infinita

Aqui, vamos estudar as *progressões geométricas* em que as somas dos seus termos tende a um número real, isto é, apresenta um *limite*, sempre que adicionamos indefinidamente esses termos. Utilizando o aplicativo da Figura 3.4 , percebemos que estas progressões possuem uma *razão* q, com $-1 < q < 1$.

Vamos determinar uma equação para a soma infinita S, isto é, para a soma de todos os termos de uma *progressão geométrica* com $-1 < q < 1$, a partir da equação da soma dos n primeiros termos desta progressão:

$$S_n = T_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}\,. \tag{26}$$

Observe na equação (26), onde $-1 < q < 1$, que q^n é o *único* fator que se altera à medida que o número n de termos da progressão aumenta indefinidamente. Vejamos, por exemplo, como se comporta q^n quando $q = \dfrac{1}{3}$ e n aumenta indefinidamente:

$$\begin{array}{ccc}
n = 1 & \Longrightarrow & q = \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cong 0,33333 \\
n = 2 & \Longrightarrow & q = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cong 0,11111 \\
n = 3 & \Longrightarrow & q = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cong 0,03704 \\
n = 4 & \Longrightarrow & q = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cong 0,01235 \\
n = 5 & \Longrightarrow & q = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cong 0,00412 \\
\vdots & & \vdots \\
n = 10 & \Longrightarrow & q = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cong 0,00002 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Nessas condições, constatamos que os valores de q^n aproximam-se cada vez mais de *zero*. Deste modo, a expressão

$$T_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = T_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{T_1}{1 - q} \times (1 - q^n)$$

se aproxima de $\dfrac{T_1}{1-q}$, pois $1 - q^n$ se aproxima de 1 à medida que n aumenta acima de qualquer valor (dizemos que n está *tendendo a infinito*). Assim, a soma infinita S é dada por:

$$\boxed{S = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \cdots = \frac{T_1}{1 - q}\,.}$$

Esse tipo de *soma infinita* também é conhecida como *série geométrica*. E, por apresentar um *limite*, dizemos que a *série geométrica* é *convergente* .

Abaixo, apresentamos a *prova visual* da equação de uma *série geométrica convergente*, com $T_1 > 0$ e $0 < q < 1$.

PSPs 3.2. **Visualização geométrica** da soma $S = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots = \dfrac{T_1}{1-q}$, com $T_1 > 0$ e $0 < q < 1$.

"Uma imagem vale mais que mil palavras" **Confúcio**

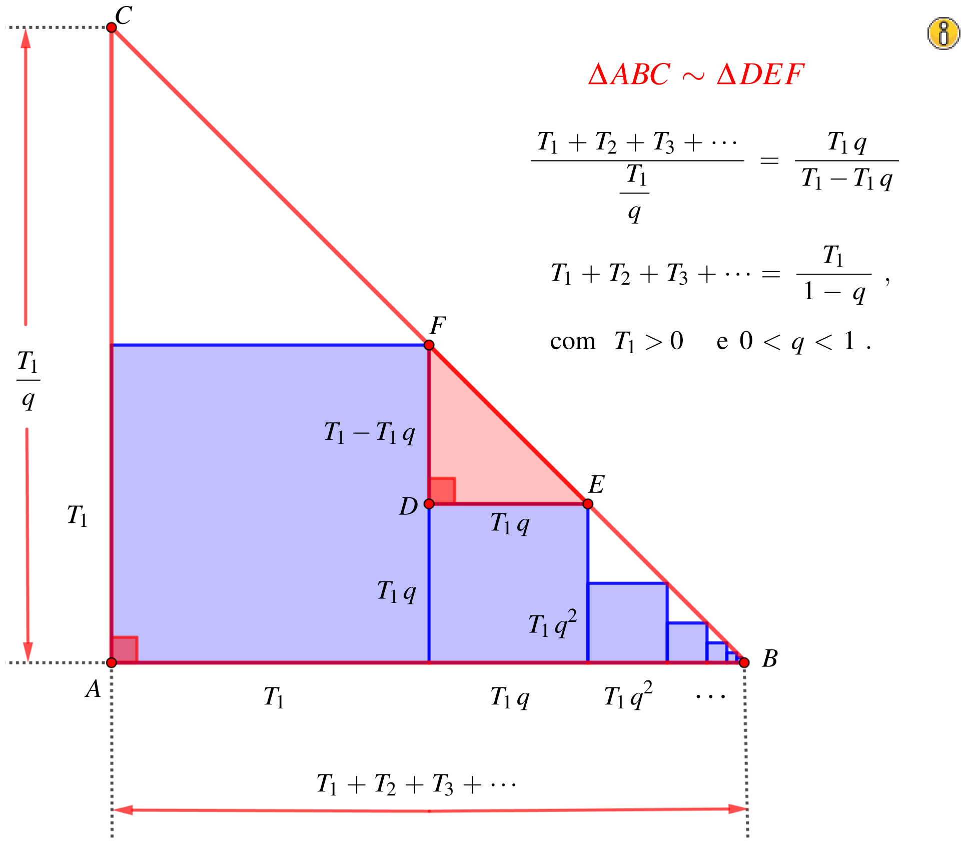


Figura 3.7: Soma infinita .
Fonte: NELSEN, 2014 [21] (Prova de J. H. Webb (1987) - Adaptada.)
NELSEN, 2014 [21] (Prova de Benjamin G. Klein e Irl C. Bivens (1988) - Adaptada.)

Sugestão: Tomamos *infinitos quadrados*, sendo T_1 a medida do lado do *maior* . A *constante de proporcionalidade* entre as medidas dos lados de dois quadrados vizinhos é igual a q , com $0 < q < 1$.

Vamos a um exemplo no qual a área de um *triângulo equilátero* é expressa, seguindo um padrão de construção, como a soma infinita de áreas de triângulos equiláteros semelhantes.

Exemplo 3.18. Considere A como sendo a medida da área da *Figura 1* . Determine a medida da área ocupada pelos *triângulos brancos* na *Figura n* quando n *tende a infinito*.

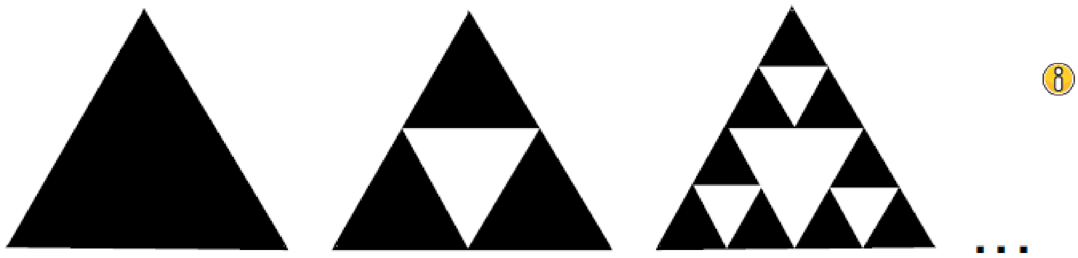


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Figura 3.8: Compondo o Triângulo de Sierpinski
Fonte: Página do INEP na internet, 2014 [10].

Resolução: Observando a figura acima, percebemos que a área ocupada pelos *triângulos brancos* aumenta à medida que o número n da figura aumenta. Por exemplo, utilizando o aplicativo associado à imagem acima, encontramos uma imagem esbranquiçada para a *Figura 8*:

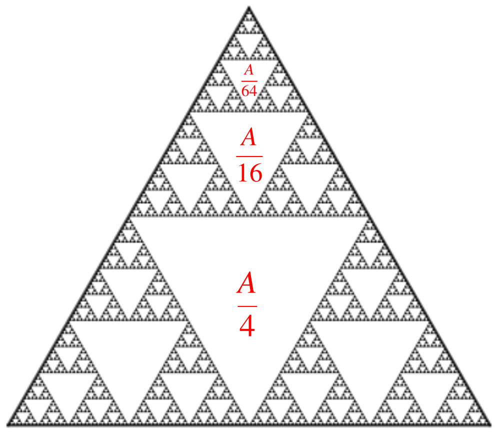


Figura 3.9: Figura 8 da sequência.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Isto significa que a área ocupada pelos *triângulos brancos tende* à área da *Figura 1*, ou seja, a medida da área ocupada pelos *triângulos brancos tende* a A, quando n *tende a infinito*. Então, vamos às contas para comprovar os fatos.
Começamos escrevendo a *progressão geométrica* onde os seus termos indicam a área ocupada pelos *triângulos brancos*, de diferentes tamanhos, que aparecem na *Figura n* quando n *tende a infinito*:

$$\frac{A}{4} + \left(3 \times \frac{A}{16}\right) + \left(9 \times \frac{A}{64}\right) + \cdots$$

Portanto, a soma infinita S é igual a

$$S = \frac{T_1}{1-q} = \frac{\frac{A}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = A\,.$$

E, assim, comprovamos algebricamente o que haviamos concluído com base nas imagens fornecidas pelo aplicativo.

As *provas visuais* que seguem falam por si só, pois suas imagens revelam com clareza o que se pretende dizer.

Inicialmente, vamos apresentar uma *prova sem palavras* para uma *soma infinita* em que os sinais dos seus termos oscilam.

PSPs 3.3. Prova sem palavras da soma

$$S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1}{3}\,.$$

"Não basta ver para ver, é necessário olhar para o que se vê."
Pe. Antônio Vieira

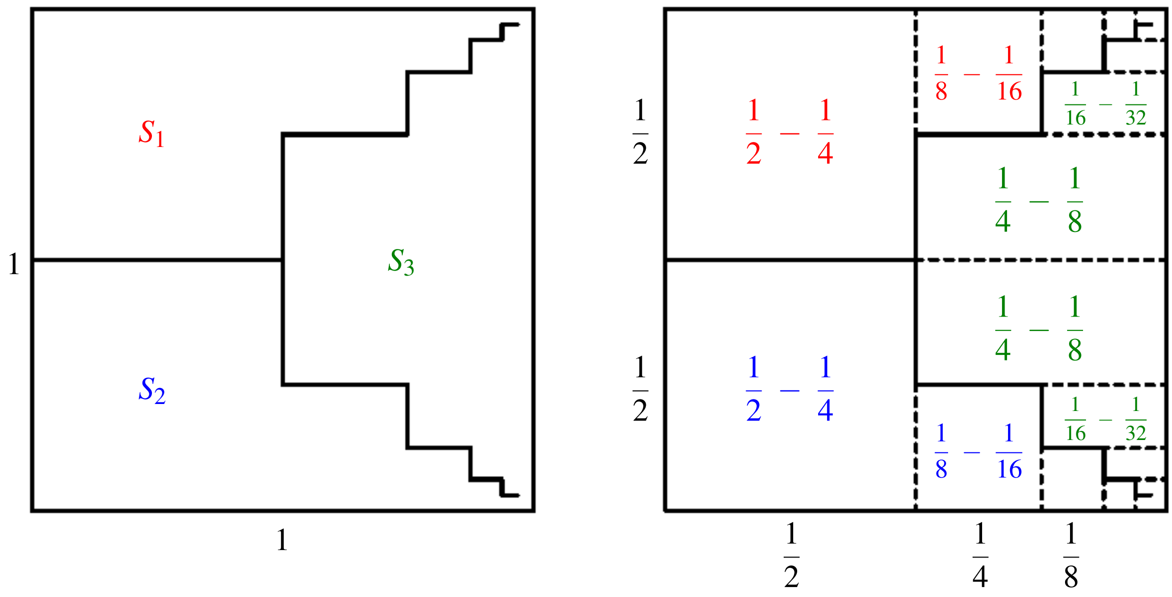


Figura 3.10: Uma Série Alternada
Fonte: NELSEN, 2014 [22] (Prova de James O. Chilaka (1996)) .

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \cdots\,,\\
S_1 &= S_2 = S_3\,,\\
S_1 &+ S_2 + S_3 = 1\\
\therefore\ S_1 &= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

A prova visual que segue mostra a área de um *quadrado* de lado 1 como a *soma infinita* de áreas de *triângulos retângulos*, seguindo um padrão de construção.

PSPs 3.4. Prova visual da soma

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = 1\,.$$

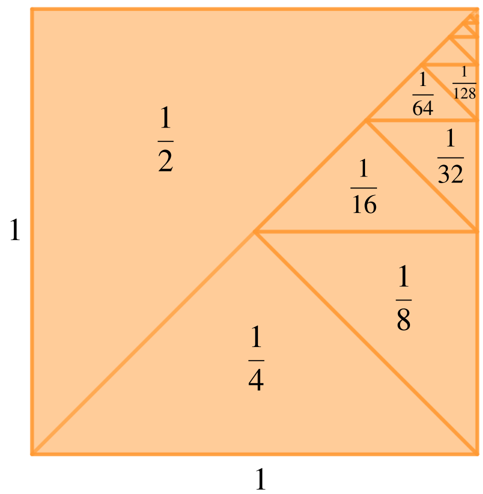


Figura 3.11: Soma infinita I - Adaptada
Fonte: ÁVILA, 2015 [3] .

A área de um *quadrado* de lado 1 também pode ser vista como a *soma infinita* de áreas de *retângulos* , como podemos comprovar na próxima *prova visual*.

PSPs 3.5. Prova sem palavras da soma

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = 1\,.$$

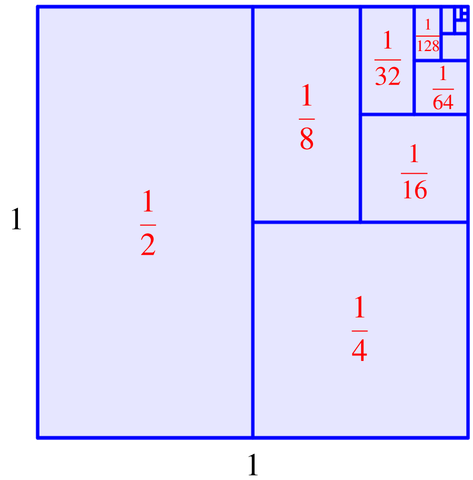


Figura 3.12: Soma infinita II
Fonte: NELSEN, 2014 [21] (Prova de Warren Page (1981)) .

A *soma infinita* que segue expressa uma região cuja medida de sua área é igual à metade da área de um *quadrado* de lado 1 .

PSPs 3.6. Visualização geométrica da soma

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \cdots = \frac{1}{2}\,.$$

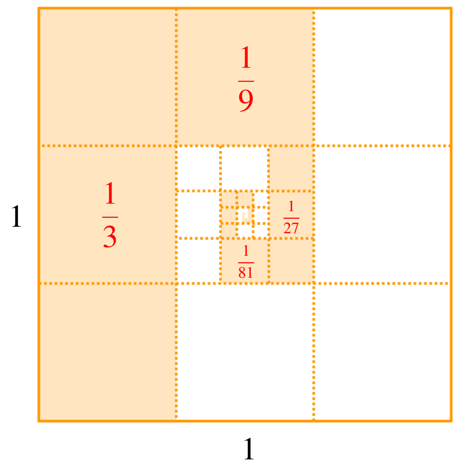


Figura 3.13: Soma infinita III
Fonte: Página Art of Problem Solving na internet, 2016 [2] .

A *soma infinita* abaixo expressa uma região cuja medida de sua área é igual à terça parte da área de um *quadrado* de lado 1 .

PSPs 3.7. Prova visual da soma

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \cdots = \frac{1}{3}\,.$$

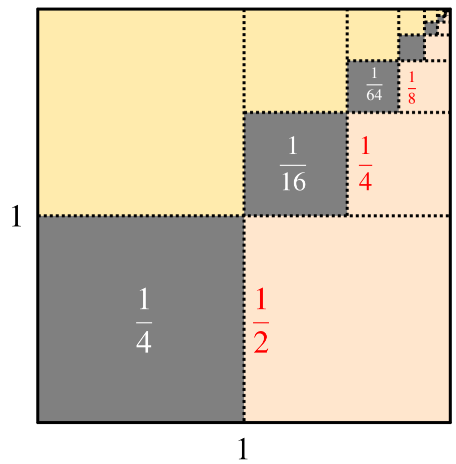


Figura 3.14: Soma infinita IV
Fonte: NELSEN, 2014 [21] (Prova de Sunday A. Ajose) .

Agora, a *soma infinita* da prova anterior é expressa como uma região cuja medida de sua área é igual à terça parte da área de um triângulo equilátero.

PSPs 3.8. Prova sem palavras da soma

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \cdots = \frac{1}{3}\,.$$

“Uma imagem vale mais que mil palavras” **Confúcio**

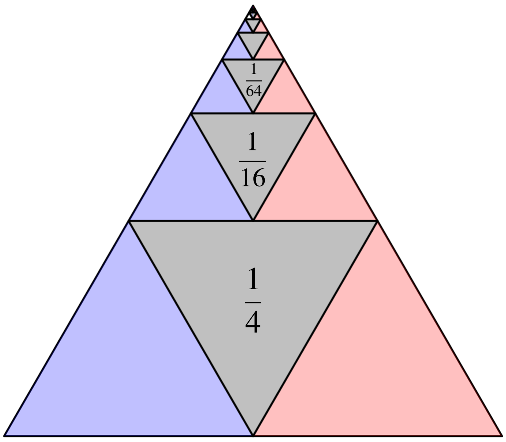


Figura 3.15: Soma infinita V
Fonte: NELSEN, 2014 [21] (Prova de Rick Mabry) .

Conclusão

O objetivo deste trabalho é contribuir para um ensino que valorize a visualização e a interatividade sobre resultados da Matemática, permitindo desvendar e revelar o que há por trás deles. Para tal, fizemos uma analogia entre os resultados da Matemática apresentados no texto e imagens a eles associadas. Ao explorarmos essas imagens, visualizamos e compreendemos de forma mais natural o significado desses resultados, *comprovando-os visualmente*.

A nossa ideia é fazer o aluno compreender os resultados da Matemática, entendendo como e por que esses resultados funcionam. Isso torna o aluno um sujeito ativo no processo de ensino-aprendizagem, pois o mesmo é incentivado e induzido a explorar e a investigar os resultados da Matemática a ele apresentados, dando a esse aluno condições de tirar suas próprias conclusões acerca do que ele observa.

Apêndice A

Oficina de Aprendizagem

Prof. Francisco de Assis de Albuquerque

Título

Desvendando importantes somas através das provas sem palavras.

Objetivo

Estimular e desenvolver a capacidade visual do aluno, permitindo-lhe fazer associações, argumentar e criar a partir das imagens que expressam as somas de sequências específicas de números inteiros.

Material

Pequenos quadrados coloridos, com lados medindo $5\,cm$, em papel cartão.

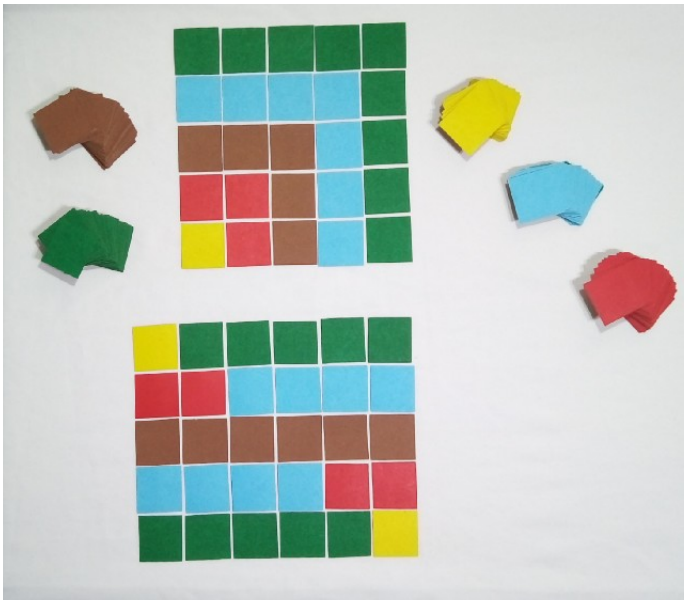


Figura A.1: Material para a atividade.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2016.

Estratégia

Os alunos serão divididos em pequenos grupos de, no máximo, 5 alunos. Cada membro receberá esta atividade e os grupos receberão pequenos quadrados coloridos. Os grupos, em média, terão 20 minutos para responder cada uma das atividades (uma média de 5 tempos de aulas de 50 minutos). Ao término de cada atividade, como mediador, o professor pedirá a cada grupo que exponha seus resultados.

Um pouco de história

Um importante episódio na história da Matemática ocorreu na Alemanha, em 1787. Para a surpresa do seu professor, aos 10 anos de idade, Carl-Friedrich Gauss (1777 - 1855), de forma muito rápida, determinou a soma dos cem primeiros números inteiros positivos.

Ao final das atividades que seguem, acreditamos que você será capaz de repetir a proeza realizada por *Gauss* .

Atividades

☞ **Atividade 1.** *A figura abaixo nos remete à adição de números inteiros consecutivos. Expresse esta adição.*

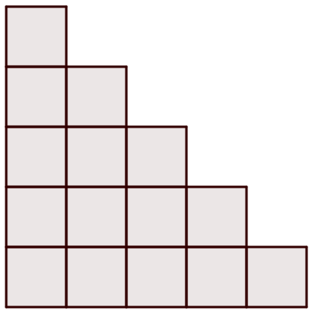


Figura A.2: Adição de números inteiros consecutivos.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2016 .

☞ **Atividade 2.** *Combinando figuras como a anterior, você será capaz de determinar a soma , sem a necessidade de adicionar uma a uma as parcelas. Faça isso.*

☞ **Atividade 3.** *Como Gauss, determine o valor da soma:*

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 + 100\,.$$

☞ **Atividade 4.** *Determine a soma dos* n *primeiros números inteiros positivos.*

☞ **Atividade 5.** *Utilizando-se das informações anteriores, determine o valor da soma*

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 198 + 200\,.$$

☞ **Atividade 6.** *A partir da adição dos números inteiros positivos e consecutivos, você foi capaz de determinar a soma dos números pares positivos e consecutivos. Agora, vamos estabelecer uma outra maneira de se obter esta soma. Para tal, expresse geometricamente as adições abaixo, de forma que se possa estabelecer relações e tirar conclusões sobre o que se vê:*

$(a)\ 2+4$ $\qquad$ $(b)\ 2+4+6$ $\qquad$ $(c)\ 2+4+6+8\,.$

Levando em conta o que se observou, determine a soma dos 60 *primeiros números pares positivos.*

☞ **Atividade 7.** *Determine a soma dos* n *primeiros números pares positivos.*

☞ **Atividade 8.** *As figuras abaixo nos remetem à adição de um grupo específico de números inteiros. Explore-as e descubra que grupo é esse. Além disso, determine a soma dos seus elementos.*

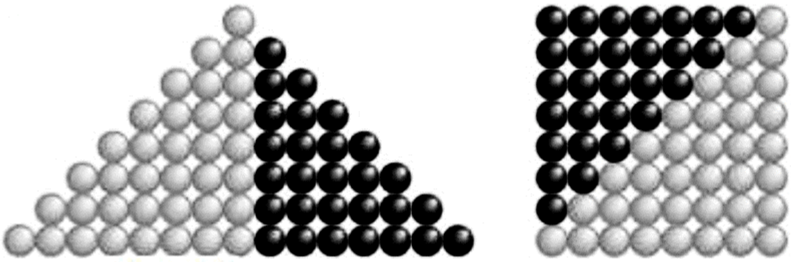


Figura A.3: Adição de um grupo específico de números inteiros.
Fonte: ALSINA, 2015 [1].

☞ **Atividade 9.** *Determine a soma dos* n *primeiros números ímpares positivos.*

☞ **Atividade 10.** *Determine o valor da soma*

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1\,.$$

☞ **Atividade 11.** *Determine a soma dos* n *primeiros múltiplos positivos de* 3.

☞ **Atividade 12.** *Agora, usando os conhecimentos adquiridos, crie uma adição e apresente a sua soma como nas abordagens apresentadas.*

Questionário

Prof. Francisco de Assis de Albuquerque

1. Indique seu grau de satisfação com relação à oficina que acaba de participar:

( ) Insatisfatório.
( ) Satisfatório.
( ) Bom.
( ) Regular.
( ) Ótimo.
( ) Excelente.

2. Sobre o material disponibilizado para a realização das atividades, pode-se dizer que

( ) não era necessário;
( ) foi parcialmente utilizado;
( ) foi muito utilizado, mas não ajudou muito;
( ) foi muito utilizado e fundamental para concluir as tarefas.

3. Sobre os enunciados das atividades, pode-se afirmar que:

( ) eram de fácil entendimento;
( ) eram de médio entendimento;
( ) eram de difícil entendimento;
( ) eram impossíveis de se entender.

4. Você considera que, na prática, as atividades fazem jus ao título da oficina?

( ) de forma alguma;
( ) superficialmente;
( ) totalmente.

5. O que você achou da atividade?

( ) comum e não me acrescentou nada;
( ) comum, mas adquiri um pouco de conhecimento;
( ) diferente e exigiu muito de mim;
( ) diferente, mas sem importância.

6. Qual das atividades exigiu mais do seu grupo? Vocês conseguiram realizá-la?

7. O seu grupo foi capaz de repetir a proeza de Gauss? Se sim, você concorda que as provas sem palavras nos permitem tirar conclusões acerca de determinado assunto, sem um conhecimento prévio do mesmo?

8. Que outro assunto da Matemática você gostaria de aprender? Existe um motivo?

Referências

[1] ALSINA, Claudi ; NELSEN, Roger B. *An Invitation to Proofs Without Words*. Disponível em:<https://32c1e096-a-c216d891-s-sites.googlegroups.com/a/lclark.edu/nelsen/invitation.pdf?attachauth=ANoY7croqiE7Gzzs8aii5XJemTO5q5HOmNrali_NmhdbJkM83Evzyju-d9oRN98-glEVV8jhW3Ak71UzuzVQ5D1xoGeJuXf3MAvHGJZli86rrbm2mKIcxhzny9tuZ7LzVQxKv6Ag73t7OBVCAMSXjnm9o-HB9E-q6EwPVTJwuTcY5N6Hf8lPSdcFAeJMk-14su-hYfvl6ZflJnLu5nua9rgxR7BkZEaXTA%3D%3D&attredirects=0>. Acesso em: 2 mar. 2015.

[2] ART OF PROBLEM SOLVING. *Proofs without words*. Disponível em:<https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Proofs_without_words>. Acesso em: 30 jul. 2016.

[3] ÁVILA, Geraldo. *As Séries Infinitas*. Revista do Professor de Matemática (RPM), n. 30, p. 10-17. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

[4] ÁVILA, Geraldo. *Ainda as Séries Infinitas*. Revista do Professor de Matemática (RPM), n. 31, p. 6-11. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

[5] BARBOSA, João L. M. Geometria Euclidiana Plana. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[6] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. Trad. de Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Editora Blucher , 2012.

[7] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Trad. de Hygino H. Domingues. 5. ed. São Paulo: Editora Unicamp, 2011.

[8] FIRMO, Sebastião. *Lições de Matemática Básica*. Disponível em: < https://www.chiquinho.org/dissertacao/Firmo2012.pdf>. Acesso em: 02 mar. 2014.

[9] GARBI, Gilberto. *A Surpreendente Série Harmônica*. Revista do Professor de Matemática (RPM), n. 42, p. 32-39. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

[10] INEP. *ENEM 2008*. Disponível em:<http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2008/2008_amarela.pdf>. Acesso em: 8 ago. 2014.

[11] INEP. *ENEM 2011*. Disponível em:<http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/05_AMARELO_GAB.pdf>. Acesso em: 5 abr. 2014.

[12] INEP. *ENEM 2013*. Disponível em:<http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/caderno_enem2013_dom_amarelo.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2014.

[13] INSPER. *Vestibular Insper - 2016/2 - Administração e Economia - Prova A - Testes 1 a 35*. Disponível em:<https://www.insper.edu.br/vestibular/wp-content/uploads/2016/03/AdmEco_AQL_2016_2_Modelo_A.pdf>. Acesso em: 7 out. 2016.

[14] LAMAS, Rita C. P.; MAURI, Juliana. *O Teorema de Pitágoras e as Relações Métricas no Triângulo Retângulo com Material Emborrachado*. Disponível em:<https://www.ime.usp.br/~iole/oteoremadepitagoras.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2016.

[15] LIMA, Elon L. , et al. *A Matemática do Ensino Médio*: Volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM , 2006.

[16] LIMA, Elon L. , et al. *A Matemática do Ensino Médio*: Volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM , 2006.

[17] LIMA, Elon L. *Uma Construção Geométrica e a Progressão Geométrica*. Revista do Professor de Matemática (RPM), n. 14, p. 43-44. Rio de Janeiro: SBM, 1989.

[18] MATH AND MULTIMEDIA. *Using Area to Prove the Arithmetic-Geometric Mean Inequality*. Posted by Guillermo Bautista. Disponível em:<http://mathandmultimedia.com/2012/02/16/arithmetic-geometric-mean-inequality-proof-using-area>. Acesso em: 15 nov. 2015.

[19] MUNIZ NETO, Antonio C. *Tópicos de Matemática Elementar*: Números reais. Volume 1. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM , 2012.

[20] MUNIZ NETO, Antonio C. *Tópicos de Matemática Elementar*: Geometria Euclidiana Plana. Volume 2. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM , 2012.

[21] NELSEN, Roger B. *Proofs Without Words*: Exercises in Visual Thinking. Washington, DC: USA, The Mathematical Association of America, 1993.

[22] NELSEN, Roger B. *Proofs Without Words II*: More Exercises in Visual Thinking. Washington, DC: USA, The Mathematical Association of America, 2000.

[23] OBM. *XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática - Terceira Fase – Nível 3 (Ensino Médio)*. Disponível em: < https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/02/obm20013fase-N3.pdf>. Acesso em: 07 jun. 2014.

[24] OBMEP. *Banco de Questões 2016*. Disponível em: < http://www.obmep.org.br/bq/bq2016.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2017.

[25] OBMEP. *10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas — OBMEP 2014 - Segunda Fase – Nível 2 (Ensino Fundamental)*. Disponível em: < http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n2-2014.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2015.

[26] OLIVEIRA, Krerley I. M.; FERNÁNDEZ, Adán J. C. *Iniciação à Matemática*: Um curso com problemas e soluções. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM , 2010.

[27] PROFMAT. *Exame de acesso 2012*. Disponível em:<http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/Exame_de_Acesso_2012_Objetivas.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2014.

[28] PROFMAT. *MA12 – Matemática Discreta – Prova 2 – 2011*. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/AV2_MA12_2011.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2015.

[29] RAMPAZZO, Luciano. *Progressão Aritmética na 6ª Série?*. Revista do Professor de Matemática (RPM), n. 13, p. 51-54. Rio de Janeiro: SBM, 1988.

[30] ROTH, Jürgen. *Modul 5: Fachdidaktische Bereiche*. Didaktik der Geometrie. Disponível em: <http://www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/did_geometrie/did_geometrie_4_argumentieren_beweisen.pdf>. Acesso em: 4 mar. 2015.

[31] SFZ. *Arbeitsblatt, Satz des Pythagoras*. Disponível em:<https://sfz-bw-fn.de/mathe/Mathe1415/MatheSFZ_AB04_Pythagoras.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2016.

[32] STURM, Thomas F. *tcolorbox*. Manual for version 3.61. Disponível em:<http://debian.man.ac.uk/.f/pub/tex/latex2e/contrib/tcolorbox/tcolorbox.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2016.

[33] UENF-RJ. *Vestibular 2000*. Disponível em:<http://www.vestibular.uerj.br/portal_vestibular_uerj/arquivos/arquivos2000/2000_UENFmat.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2014.

[34] UERJ. *Vestibular 1999 - 1ª Fase*. Disponível em:<http://www.vestibular.uerj.br/portal_vestibular_uerj/arquivos/arquivos1999/1999_f1d2_mat.pdf>. Acesso em: 2 fev. 2014.

[35] UERJ. *Vestibular 2017 - 2ª Fase*. Disponível em:<http://www.vestibular.uerj.br/portal_vestibular_uerj/arquivos/arquivos2017/provas_e_gabaritos/ed/provas/2017_ED_Matematica.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2017.

[36] UFF. *Vestibular 1996 - 1ª Fase*. Disponível em:<http://www.coseac.uff.br/vest96/provas96.htm>. Acesso em: 15 dez. 2016.

[37] UFF. *Vestibular 2002 - 2ª Fase - Grupo G*. Disponível em:<http://www.coseac.uff.br/vest2002/index.htm>. Acesso em: 15 mar. 2014.

[38] UFRJ. *Prova 1 - Vestibular 2005*. Disponível em:<http://acessograduacao.ufrj.br/index.php/acesso-a-ufrj-2005>. Acesso em: 8 mar. 2014.

[39] UFRJ. *Prova 1 - Vestibular 2000*. Disponível em:<http://acessograduacao.ufrj.br/index.php/acesso-a-ufrj-2000>. Acesso em: 20 mar. 2014.

[40] UNIRIO. *Vestibular 2008 - 1ª Fase*. Disponível em:<http://download.uol.com.br/vestibular/provas/2008/unirio.pdf>. Acesso em: 5 maio. 2015.

[41] VALADARES, Eduardo C.; WAGNER, Eduardo. *Usando Geometria para Somar*. Revista do Professor de Matemática (RPM), n. 39, p. 1-8. Rio de Janeiro: SBM, 1999.