Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

**Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**
**Coordenação do PROFMAT**

**PEDRO JOLY PARANHOS**

# *INFINITOS ENUMERÁVEIS E NÃO ENUMERÁVEIS*

**Orientador: Mário Olivero**

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

**NITERÓI**
**Maio/2013**

PEDRO JOLY PARANHOS

# INFINITOS ENUMERÁVEIS E NÃO ENUMERÁVEIS

Dissertação apresentada por **Pedro Joly Paranhos** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

**Orientador: Mário Olivero**

Niterói
2013

**PEDRO JOLY PARANHOS**

**INFINITOS ENUMERÁVEIS E NÃO ENUMERÁVEIS**

Dissertação apresentada por **PEDRO JOLY PARANHOS** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Teoria de Conjuntos e Ensino da Matemática.

**Aprovada em: 15/04/2013**

**Banca Examinadora**

Prof. Mário Olivero Marques da Silva - Orientador

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof. Jaime Velasco Câmara da Silva - Membro

Doutor – Universidade Estadual do Rio de Janeiro

Prof. Nancy de Souza Cardim - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof. Luiz Manoel Figueiredo - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

**NITERÓI**

**2013**

## DEDICATÓRIAS

Dedico ao meu pai, José Luis Paranhos Moraes, por passar os valores morais que fazem parte do homem que sou hoje.

## AGRADECIMENTOS

A minha mãe, Maria Cristina Joly, a minha irmã, Daniela Joly Paranhos, pelo apoio e paciência.

A minha noiva, Vivian Leite de Paiva, pelas caronas e pelos momentos de lazer que me deram o ânimo necessário para seguir com meus estudos.

Aos colegas de turma, que estavam sempre dispostos a ajudar.

Ao Orientador, Mário Olivero, pela dedicação e ajuda durante toda a elaboração deste trabalho.

A todos os professores do PROFMAT-UFF pela atenção e os ensinamentos. Em especial a Professora Miriam Abdón que, diversas vezes, tirou dúvidas dos alunos, mesmo forma do horário de suas aulas.

Aos parentes, amigos e demais pessoas que de alguma forma participaram da minha vida durante o curso de Mestrado.

**RESUMO:**

Este trabalho de conclusão de curso, em sua introdução, faz uma breve abordagem sobre o que é a ciência matemática e a diferencia das demais ciências. Visto isso, algumas definições e exemplos de teor matemático são apresentados, no capitulo seguinte, para dar início ao tema central, que é trabalhar com a noção de infinito. Paradoxos e noções de limite irão introduzir o assunto até chegarmos a George Cantor e a Enumerabilidade. Nesta parte final, os conjuntos trabalhados no ensino básico serão o foco principal.

**ABSTRACT:**

The main subject of this dissertation is the notion of infinite sets. We start making some remarks on few aspects of mathematics, like models and proofs, and what makes mathematics so different from other sciences. Then, we present some definitions and examples that will establish the main subject. Paradoxes and limits are presented and some historical aspects are discussed. Special attention is given to the contribution of Georg Cantor on non-countable sets. We also give special attention to the mathematical sets that are presented at the secondary and high school.

**SUMÁRIO**

# Introdução

Na introdução deste trabalho, apresentaremos alguns aspectos de matemática, mostrando suas particularidades e ressaltando suas diferenças frente as outras ciências.

A matemática é uma ciência abstrata e por essa condição acaba sendo uma das matéria mais temidas do ensino básico. Por se tratar de uma matéria abstrata, exige muito do desenvolvimento do raciocínio lógico e é exatamente isso que um professor deve buscar desenvolver em seus alunos. A matemática deveria ser ensinada como se fosse um jogo, onde a cada série avançada, novas regras são acrescentadas.

Essa abstração inerente a matemática acaba delegando muito “poder” ao professor e cabe a este perceber o quão rigoroso ele está sendo em sua cobrança. Por vezes esse poder é usado de forma indevida, protegendo o seu próprio ego. O professor deve ser cuidadoso, fazendo com que a matemática continue a ser desafiadora para os alunos, porém sem tornar-se *impossível*.

Quando discutimos o abstrato, em matemática, fatalmente acabamos chegando ao conceito de infinito. Por muitos anos o infinito desafiou os matemáticos, e muitos de seus aspectos continuam apresentando grandes questões para a sociedade matemática, preservando muitos de seus mistérios. Por se tratar de um assunto tão delicado e repleto de histórias, esse será um dos assuntos principais deste trabalho. Apresentaremos a matemática enquanto ciência e chegaremos ao limite da abstração, tratando de temas que envolvem o conceito de infinito.

Nas próximas seções, ressaltaremos alguns aspectos típicos de Matemática, desenvolvendo algumas ideias e mostrando algumas práticas que a caracterizam.

É importante ressaltar que este trabalho de conclusão de curso apresenta uma parte em comum com o trabalho “A Utilização da História da Matemática como Meio Facilitador da Compreensão do Infinito ” , de Alessandro Brazil Camara da Costa.

2

# Modelo Matemático

Apesar de suas características de abstração e independência das outras ciências, e talvez exatamente por isso, a Matemática serve para estudar e expressar fenômenos em geral. Desta forma, a parte de modelagem matemática tem uma grande importância tanto prática como histórica para a própria Matemática e certamente para as outras ciências. Essa é a oportunidade em que a matemática aproveita para deixar um pouco de ser algo substancialmente abstrato para então interagir com a natureza e o mundo.

Um modelo matemático é uma versão simplificada de parte do mundo que é estudado, na qual os cálculos são possíveis. Ou seja, é uma forma de descrever matematicamente uma situação usando as informações necessárias para chegar a uma resposta, de modo mais fiel possível. Lembrando que, quanto mais dados temos, melhor será nossa resposta. Porém, maiores serão as dificuldades de calculá-la e em muitos casos, a diferença dessa resposta para a outra, calculada com menos dados, é tão desprezível que não compensa o esforço.

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 1:** ( Atirando uma Pedra ) Vamos considerar a questão de como lançar uma pedra para que a distância que ela cobrirá no solo seja a mais longa possível.

Se atirarmos a pedra horizontalmente, ela terá bastante velocidade, porém não ficará muito tempo no ar, devido a ação da gravidade, e não alcançará uma longa distância.

Se a atirarmos na direção vertical, ela ficará mais tempo no ar, mas não percorrerá quase nada, uma vez que estamos interessados na distância percorrida no solo.

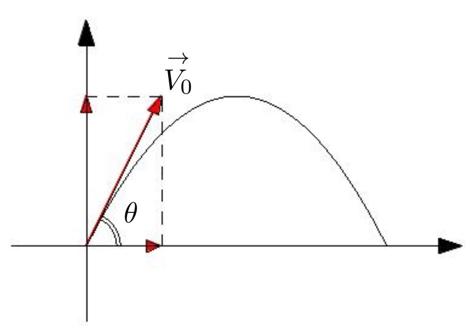


Figura $A_1$ - Lançamento de uma Pedra

Portanto, há de haver um equilíbrio entre os ângulos de lançamento para que a velocidade, o tempo no ar e a distância percorrida no solo sejam maximizadas. Isso se dá entre os dois ângulos avaliados $0^o$ e $90^o$ , ou seja, $45^o$.

Realmente, veja como isso acontece, segundo o modelo mtemático.

Lembramos o "Princípio da Independência dos Movimentos ", proposto por Galileu. Este princípio afirma que o movimento da pedra é composto de dois movimentos que ocorrem independentemente, um na direção de $x$, que queremos maximizar, e outro na direção de $y$.

O movimento na direção de $y$ é do tipo uniformemente variado, pois sofre a ação da gravidade.

Se representarmos por $\vec{V_y}$ a componente da velocidade na direção $y$, temos

$$\vec{V_y} = \vec{V_0}\ y \ - \ g\,t \ = \ \| \vec{V_0} \| \operatorname{sen}(\theta) \ - \ g\,t,$$

onde $\theta$ é o ângulo de lançamento, $g$ a constante gravitacional e $t$ representa o tempo.

Integrando esta equação, obtemos a equação do movimento na direção $y$ :

$$y \ = \ \| \vec{V_0} \| \operatorname{sen}(\theta)\, t \ - \ \frac{g\,t^2}{2}.$$

A altura máxima ocerrerá se $\vec{V_y} = \ 0$. Isto determina o tempo:

$$t \ = \ \frac{\| \vec{V_0} \| \operatorname{sen}(\theta)}{g}.$$

No modelo, consideramos que a pedra demorará o mesmo tempo para atingir o ponto de altura máxima e voltar à terra, desprezando, por exemplo, a interferência do ar. Assim, o tempo total gasto no movimento será

$$\frac{2 \| \vec{V_0} \| \operatorname{sen}(\theta)}{g}.$$

Consideremos agora o movimento horizontal, que queremos otimizar. No modelo, este movimento será do tipo uniforme:

$$x \ = \vec{V_x}\ t \ = \ \| \vec{V_0} \| \ \cos(\theta)\, t.$$

A distância percorrida será

$$x \ = \ \frac{2 \| \vec{V_0} \|^2 \ \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)}{g} \ = \ \frac{\| \vec{V_0} \|^2 \ \operatorname{sen}(2\,\theta)}{g}.$$

Note que esta distância depende de $\theta$.

O máximo $x$ ocorrerá no valor máximo de $f$, para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Como $f'(\theta) = 2\,cos(2\,\theta)$, $x$ assumirá seu maior valor se $\theta = \frac{\pi}{4}$, pois $f'(\pi/4) = 2\,\cos(\pi/2) = 0$.

**Exemplo 2:**

Imagine que seja necessário elaborar os horários para um curso que é dividido em módulos. Os números dos possíveis horários para palestras são limitados, então, alguns módulos podem ter horário coincidentes com outros. Há uma lista com os alunos de cada módulo e é necessário escolher os horários de forma que dois módulos só ocupem o mesmo horário se não houver coincidência de alunos inscritos nos mesmos.

Numa outra situação, suponha que está sendo desenhando um mapa, dividido em regiões, usando-se cores diferentes para as regiões adjacentes. Note que a adjacência significa fronteira com mais do que um ponto comum. O problema é encontrar uma forma de colorir o mapa usando o menor número de cores.

Essas duas situações-problema parecem ser muito diferentes, mas uma escolha apropriada de um modelo mostra que, do ponto de vista matemático, elas são equivalentes. Em ambos os casos, temos objetos (países, módulos) aos quais algo deve ser atribuído (cores, horários). Alguns pares desses objetos são incompatíveis (módulos com horários distintos, regiões adjacentes) no sentido que não se pode lhes fazer a mesma atribuição. Em nenhum dos dois problemas, nós nos preocupamos com o que os objetos são ou o que está lhes sendo atribuído. Então, nós os representamos como pontos. As relações entre eles é representada por linhas que os conectam. Esse tipo de estrutura matemática é conhecida por grafo. Os pontos são chamados de vértices do grafo e os segmentos que eventualmente unem pares de pontos são as arestas.

Uma vez que apresentamos o problema dessa forma, nossa tarefa, em ambos os casos, é dividir os vértices em um pequeno número de grupos de tal maneira que nenhum grupo contenha dois vértices ligados por uma aresta. Essa é outra razão para se utilizar modelos o mais simples possível.

Vejamos um exemplo que ilustrará essa questão. Queremos pintar um mapa com cinco regiões usando o menor número de cores diferentes. Veja o mapa na figura a seguir.

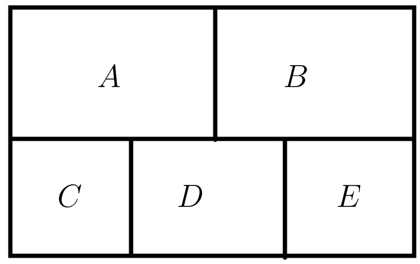


Figura $A_2$ - Mapa

Na construção do grafo correspondente ao mapa, a cada região corresponderá um vértice denominado pela mesma letra - $A$, $B$, $C$, $D$, e $E$.

As fronteiras comuns determinarão as arestas do grafo. Note que o vértice correspondente a região $A$, por exemplo, estará conectada aos vértices $B$, $C$ e $D$. No entanto, não estará conectado ao vértice $E$, correspondente à região que não é adjacente a $A$.

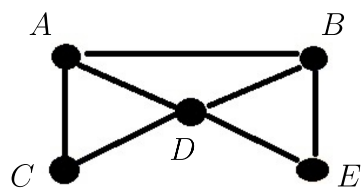


Figura $A_3$ - Grafo

O problema de colorir o mapa passa a ser uma questão de colorir vértices do grafo com a condição de se usar cores diferentes para pares de vértices conectados por arestas.

Ao escolhermos uma cor para $A$, o único vértice que poderá ser colorio com essa mesma cor é o vértice $E$. Como queremos minimizar o número de cores, isto determina essa escolha. Analogamente, a escolha do vértice $B$ determina a escolha da cor do vértice $C$. Finalmente, o vértice $D$ deverá ser colorido com uma nova cor, uma vez que ele está conectado a todos os demais vértices.

Neste caso, o número mínimo de cores é três.

O ganho ao se fazer essa modelagem é dispor de toda a informação conhecida a respeito de grafos.

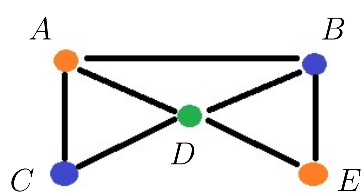


Figura $A_4$ - Grafo

O problema de colorir mapas com um número mínimo de cores, sem que regiões adjacentes tenham cores iguais, ficou conhecido como “Problema de Guthrie”quando o matemático Frederick Guthrie o conjecturou em 1852. Somente em 1977, Kenneth Ira Appel e Wolfgang Haken, com o uso de computadores, provaram que era possível colorir qualquer mapa, segundo as regras já especificadas, usando apenas 4 cores. Essa prova foi importante, pois mostrou que a tecnologia poderia ser usado como uma ferramenta para provas matemáticas.

## A matemática e as outras ciências

Normalmente a ciência estuda os fatos e baseia suas teorias de acordo com as experiências. Se um determinado evento acontece inúmeras vezes, isso basta para comprovar uma teoria sobre aquele evento. Já na matemática isso não é válido. Por mais que um evento aconteça 10.000 vezes em 10.000 tentativas, esse experimento ainda não é válido para comprovar uma teoria.

A matemática acontece no “mundo das ideias” e para uma teoria ser válida precisa ser também verdadeira no “mundo das ideias”. Sendo assim, é preciso testar todos os casos, esgotar até mesmo as infinitas possibilidades de um evento para que só então ele seja reconhecido como uma teoria válida. Pois, testando 10.000 vezes ainda é possível crer que na 10.001 algo não daria mais certo, e por essa razão a matemática esgota todas as possibilidades. O “mundo das ideias” nos traz a vantagem de podermos varrer uma infinidade de possibilidades e não apenas um número finito. Essa abstração que a matemática nos permite é o que fascina tantos os matemáticos. Para fazer isso, a Matemática faz uso da lógica para estabelecer suas verdades científicas.

### Prova matemática

Como mencionamos anteriormente, na matemática não há espaço para a dúvida. Os fatos devem ser provados para terem validade. É preciso mostrar que em momento algum o que queremos demonstrar irá se desviar do resultado que esperamos. Para isso existem algumas formas de provar uma teoria.

#### Redução ao Absurdo

*“Prova por contradição (ou redução ao absurdo, do latim reductio ad absurdum) é um método de prova matemática indireta, não-construtiva. Este tipo de prova é feito assumindo-se como verdade o contrário do que queremos provar e então chegando-se a uma contradição.*

*A prova por contradição é muito usada em teoremas de existência. Neste caso, é usada para provar a existência de um elemento com determinada característica, sem no entanto mostrar tal elemento. Por esta razão, alguns matemáticos a evitam quando possível, preferindo métodos de prova construtivos. O fato é que existem teoremas para os quais só se conhece prova por contradição, como o argumento de diagonalização de Cantor para demonstrar a não-enumerabilidade dos números reais."*

( Site: pt.wikipedia.org/wiki/prova$_{p}or_{c}ontradicao$)

**Exemplo 3:**

Demonstração por Redução ao Absurdo.

Para demonstrarmos que $\sqrt{2}$ é irracional, iremos supor que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Sendo $\sqrt{2}$ um número racional, é cabível admitir que este possa ser escrito da forma $\frac{p}{q}$ de maneira irredutível, isto é, onde $p$ e $q$ são primos entre si, ou seja, $(mdc(p,q) = 1)$, e $q \neq 0$.

Seja $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ onde $mdc(p,q) = 1$ e $q \neq 0$.

Então, elevando ambos os lados a segunda potência, teremos que:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \ \therefore \ 2q^2 = p^2$$

como $p^2$ é múltiplo de 2 , podemos afirmar que $p$ é par.

Seja $p = 2k$, então substituindo na equação anterior teremos:

$$2q^2 = (2k)^2 \ \therefore \ 2q^2 = 4k^2 \ \therefore \ q^2 = 2k^2$$

Note que, como $q^2$ é igual a $2k^2$, $q^2$ é múltiplo de 2 e portanto, um número par. Sendo $p$ e $q$ números pares, chegamos aqui a um absurdo, pois se $p$ e $q$ são números pares então a fração $\frac{p}{q}$ não estava na forma irredutível, o que contradiz a hipótese. Logo conclui-se que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como um número da forma $\frac{p}{q}$ com $p$ e $q$ inteiros, ou seja, $\sqrt{2}$ é irracional.

$\square$

**Método de Indução**

Outro método de demonstração matemática é o método de indução. Este método consiste em mostrar a veracidade para o primeiro caso, assumir verdade para o caso $n$ e provar que também será válido para o caso $n+1$. Dessa forma provaremos que a teoria é válida para o primeiro caso e para os próximos, podendo com isso varrer uma infinidade de casos. Tomaremos como exemplo um fato a muito conhecido na matemática. A soma parcial da sequência dos números ímpares é sempre um quadrado perfeito.

**Exemplo 4:** Queremos provar que a soma, ordenada, dos números ímpares resulta em um quadrado perfeito, ou seja,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

**Demonstração:**

- Se $k = 1$, então $S_1 = 1 = 1^2$. A afirmação é verdadeira para o caso $k = 1$.
- Se $k = 2$, então $S_2 = 1 + 3 = 2^2$. A afirmação é verdadeira para o caso $k = 2$.
- Assumimos verdade para o caso $k = n$, então $S_n = n^2$
- Queremos provar que é válido para $k = n + 1$ , logo:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= [1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1] + 2(n + 1) - 1 \\
S_{n+1} &= [1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1] + 2n + 2 - 1 \\
S_{n+1} &= [1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1] + 2n + 1 \\
S_{n+1} &= n^2 + 2n + 1 \\
S_{n+1} &= (n + 1)^2.
\end{aligned}$$

$\square$

Podemos também demonstrar geometricamente, usando figuras e argumentos geométricos para embasar nossas ideias. Trabalhando com o mesmo exemplo, temos que:

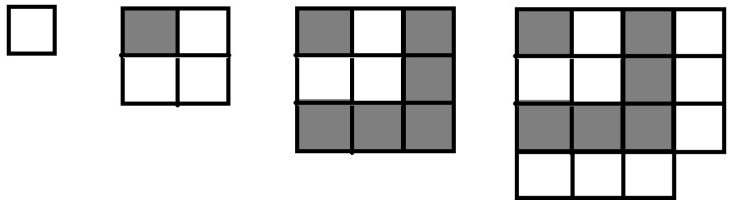

Figura $A_5$ - quadrados

Ou seja, sempre que aumentamos em uma unidade o lado do quadrado $(n+1)$ temos que acrescentar $n$ unidades em dois lados adjacentes e um quadrado comum aos dois lados. Assim teremos sempre o acréscimo de $2n+1$ unidades ao passarmos um quadrado de área $n^2$ para um quadrado de área $(n+1)^2$.

Este exemplo fica como uma sugestão de oficina. Seria interessante trabalharmos essas duas formas de demonstração nas séries do ensino médio onde trabalhamos com progressões. Poderíamos apresentar, em salas distintas, a forma "literal" e a forma "figurativa" dessa demonstração e avaliar qual delas é melhor compreendida pelos alunos. Seria válido também utilizarmos notações como o símbolo de somatório, etc.

# Definições e Notações Matemáticas

Neste capítulo, estabeleceremos algumas notações e definições matemáticas que serão usadas posteriormente. Apresentaremos também alguns exemplos.

**Definição 1** (Função Injetora)**.** *Dizemos que a função $f : A \longrightarrow B$ é* injetora *se, para quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) \neq f(x_2) \in B$. Ou seja, $f$ aplica elementos distinto de $A$ em elementos distintos em $B$.*

**Exemplo** (Função Injetora) No diagrama a seguir, vemos uma função injetora.

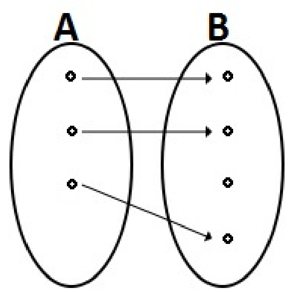


Figura $A_6$ - Função Injetora

A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \arctan(x)$ é uma função injetora. Realmente, se $x_1 \neq x_2$, então

$$\arctan(x_1) \neq \arctan(x_2).$$

Veja o gráfico de $f$ a seguir.

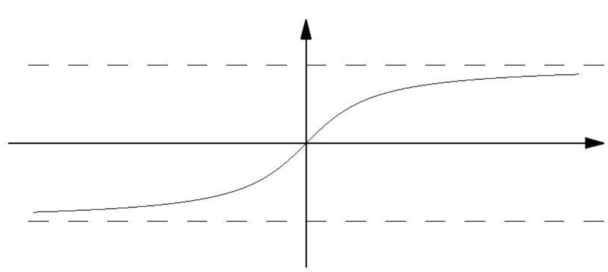

Figura $A_7$ - Função Arco Tangente

**Definição 2** (Função Sobrejetora)**.** *Dizemos que a função* $f : A \longrightarrow B$ *é* sobrejetora *se, para todo* $b \in B$*, existe* $a \in A$ *tal que* $f(a) = b$*. Isto é,* $B = \mathrm{Im}(f)$*.*

**Exemplo** (Função Sobrejetora) No diagrama a seguir, vemos uma função sobrejetora.

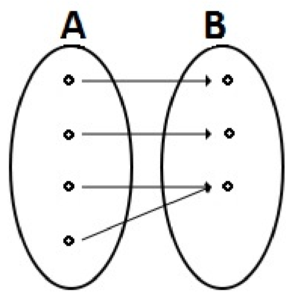


Figura $A_8$ - Função Sobrejetora

Consideremos também a seguinte situação: Vamos identificar $\mathbb{R}^2$ com o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, estabelecendo

$$(x, y) \mapsto x + i\,y.$$

Lembremos a forma polar de $z = x + i\,y$:

$$z = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = r\,e^{i\,\theta}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $p_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ a função definida por $p_n(z) = z^n = r^n\,e^{i\,n\theta}$.

Seja $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C};\ \|z\| = 1\}$, o círculo de centro na origem e raio 1.

Este conjunto é formado pelos números complexos de norma 1, que têm a forma polar $e^{i\,\theta}$.

A função $p_n$ restrita a $S^1$, tomando valores em $S^1$, define uma aplicação de $S^1$ em $S^1$, de grau $n$. Veja a ilustração de $p_n$ para $n = 3$.

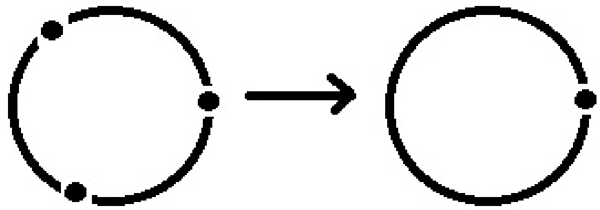

Figura $A_9$ - Aplicação de $S^1$ em $S^1$, de grau 3

Cada setor de abertura $2\pi/3$ recobre $S^1$ uma vez. Esta é chamada uma aplicação de recobrimento e é um exemplo de uma função sobrejetora, localmente injetora, porém não injetora.

**Definição 3** (Função Bijetora)**.** *Dizemos que a função $f : A \longrightarrow B$ é* bijetora *se é injetora e sobrejetora.*

**Exemplo** (Função Bijetora) Veja um exemplo de função bijetora no diagrama a seguir.

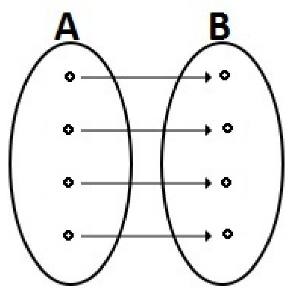


Figura $A_{10}$ - Função Bijetora

A projeção estereográfica é um outro exemplo de função bijetora.

**Exemplo** (Projeção Estereográfica)

$$S^2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

$$N = (0,0,1) \in S^2.$$

Vamos identificar $\mathbb{R}^2$ com o subespaço

$$\{ (x,y,0) \in \mathbb{R}^3; x,y \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3.$$

Dado um ponto $(x,y,z) \in S^2 \setminus \{N\}$ , vamos considerar $f(x,y,z) \in \mathbb{R}^2$ o ponto obtido pela interseção da reta $r$ , que contem $(x,y,z)$ e $N$ , com $\mathbb{R}^2$ :

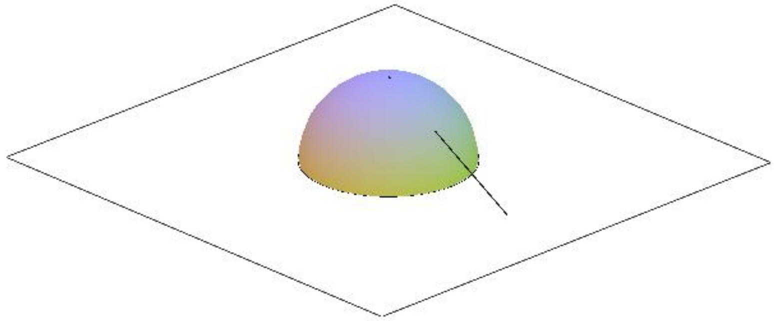

Figura $A_{11}$ - Bijeção entre uma Esfera sem o polo norte e o Plano

Para calcular as coordenadas de $f(x,y,z)$ , consideramos uma parametrização da reta $r$ :

$$t(x,y,z) \ + \ (1-t)N \ = \ (x\,t, y\,t, z\,t) \ + \ (1-t)\,(0,0,1) \ = \ (x\,t, y\,t, z\,t+1-t)$$

O ponto $f(x,y,z)$ tem a terceira coordenada igual a zero: $z\,t+1-t=0$. Calculando o valor de t, temos $t \ = \ \dfrac{1}{1-z}$

Portanto,

$$f(x,y,z) \ = \ \left(\frac{x}{1-z}\,,\frac{y}{1-z}\right).$$

Para verificar que $f$ é uma função bijetora, vamos construir sua inversa:

$$g \ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}.$$

Seja $s$ a reta que contem o ponto $(x,y,0)$ e $(0,0,1)$ , com parametrização

$$(t\,x, t\,y, 0) + (0,0,1-t) \ = \ (t\,x, t\,y, 1-t).$$

Para calcular a interseção de $s$ com a Esfera $S^2$ , fazemos

$$t^2\,x^2 + t^2\,y^2 + (1-t)^2 \ = \ 1$$

Resolvendo esta equação em $t$ , obtemos

$$t \ = \ \frac{2}{x^2+y^2+1}\,.$$

Assim,

$$g(x,y) \;=\; \left(\frac{2\,x}{x^2+y^2+1}\;,\frac{2\,y}{x^2+y^2+1}\;,\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\;.$$

Para mostrar que $f \circ g \;=\; I_{\mathbb{R}^2}$, observe que:

$$\frac{\dfrac{2\,x}{x^2+y^2+1}}{1-\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}} \;=\; \frac{2\,x}{x^2+y^2+1-x^2-y^2+1} \;=\; x.$$

Portanto,

$$f \circ g(x,y) = \left(\frac{\dfrac{2\,x}{x^2+y^2+1}}{1-\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}}, \frac{\dfrac{2\,y}{x^2+y^2+1}}{1-\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}}\right) = (x,y).$$

Um cálculo similar mostra que a composição $g \circ f$ é igual a $I_{S^2 \setminus \{N\}}$.

## Conjunto Infinito

Apresentamos aqui a definição de conjunto infinito, conceito central deste trabalho de conclusão de curso.

**Definição 4** (Conjunto Infinito)**.** *Um conjunto $S \neq \varnothing$ é dito* infinito *se existe uma aplicação bijetora $f : S \longrightarrow T$, de $S$ em um subconjunto próprio $T$ de $S$ $(T \subsetneq S)$.*

**Exemplo** (Conjunto dos Números Naturais) O conjunto dos números naturais é infinito, pois podemos considerar $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$, a função definida por $f(n) = 2n$, de $\mathbb{N}$ em $2\mathbb{N} = \{p \in \mathbb{N};\; p = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, o conjunto dos números pares. É claro que $2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$.

**Exemplo** (Intervalos da Reta) Cada intervalo da reta do tipo $[a,\, b]$ , com $a \neq b$ , é um conjunto infinito. Realmente, vamos construir uma função bijetora de $[a, b]$ em $[a,\, \frac{a+b}{2}]$. Para tanto, observe a figura a seguir.

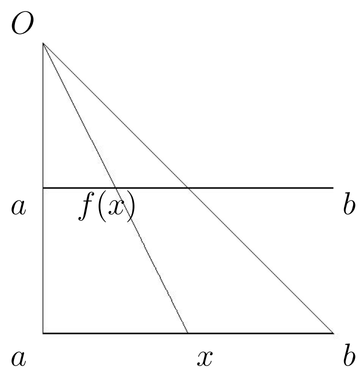


Figura $A_{12}$ - Função Bijetora

A função $f : [a,\, b] \longrightarrow [a,\, \frac{a+b}{2}]$, definida a partir da figura, é uma bijeção. A definição de $f$ é

$$f(x) \;=\; \frac{x}{2} + \frac{a}{2}.$$

Note também que a função arcotangente, sendo uma função bijetora de $\mathbb{R}$ em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, garante que $\mathbb{R}$ é um conjunto infinito.

**Proposição 1.** *Se $N$ é um conjunto infinito e $N \subset M$, então $M$ é um conjunto infinito.*

**Demonstração:** Como $N$ é um conjunto infinito, existe $f : N \longrightarrow L$ uma função bijetora que leva $N$ em um subconjunto próprio $L \subsetneq N$. Podemos estender essa função $f$ para uma função $F : M \longrightarrow L \sqcup (M \setminus N)$, colocando

$$F(x) \;=\; \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x \in N, \\ x, & \text{se} \quad x \in L \sqcup (M \setminus N). \end{cases}$$

A função $F$ é uma aplicação bijetora de $M$ em $L \sqcup (M \setminus N) \subsetneq M$ e isso prova que $M$ é infinito.

$\square$

# Alguns mistérios do Infinito

Neste capítulo trataremos de alguns aspectos históricos do infinito.

## Os paradoxos de Zenão

Zenão de Eleia nasceu por volta do ano de 489 a.C., era discípulo de Parmênides e defensor árduo de seu pensamento.

Segundo Aristóteles, Zenão foi o fundador da Dialética como arte de provar ou refutar a verdade de um argumento, partindo de princípios admitidos por seu interlocutor. Platão disse que ele nada mais fez do que fundamentar a tese de seu mestre, mas não provando que o *ser* é *um* e sim demonstrando que o *multiplo* é impensável.

Para mostrar aos seus adversários no que consistia a unidade ou repouso do ser, evidenciando que o movimento ou pluralidade é impossível, Zenão propôs alguns paradoxos (para = contra; doxa = opinião), com os quais refutava teses apresentadas como meras opiniões, vias do não ser, características das confusões causadas pela percepção humana.

Esses pardoxos eram usados como argumentos para provar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade, divisibilidade e movimento. Partindo das premissas de seus oponentes, as reduzia ao absurdo e com isso sustentava o ponto de fé dos eleásticos e de seu mestre Parmênides, que ia contra as ideias pitagóricas. Como em outros pré-socráticos, não possuímos na atualidade nenhuma obra completa de Zenão, sendo as fontes principais para os seus paradoxos as citações na obra de Aristóteles e do comentador aristotélico Simplício.

*"O que se move deve sempre alcançar o ponto médio antes do ponto final"* (Zenão de Eleia - Os Pensadores)

## Argumentos contra o movimento

Aristóteles escreve na Física que Zenão enunciou quatro argumentos contra o movimento, conhecidos como os paradoxos do estádio, de Aquiles e a tartaruga, da flecha voando e das filas em movimento.

*"a impossibilidade do movimento é deduzida do fato de que o móvel transportado deve chegar primeiro à metade antes de alcançar o termo."*

*"o mais lento na corrida jamais será alcançado pelo mais rápido; pois o que persegue deve sempre começar por atingir o ponto donde partiu o que foge."* (Os Pré-Socráticos, 1985)

*"Se existe o menor segmento que mede uma mônada, então podemos tomar dois desses segmentos, apoiados numa mesma reta e muito próximos um do outro; tão próximo quanto se queira, porém que não se toquem e deixe entre si um pequeno intervalo. Ora, como o segmento que mede uma mônada é o menor que existe, então nesse intervalo cabe um deles (pelo menos) e não esgota o intervalo todo, porque ele é o menor; e deixa então dois outros intervalos bem pequeninos, nos quais certamente caberão dois segmentos que medem uma mônada cada (pois a mônada é o menor segmento); neste caso, essas duas mônadas intercaladas vão deixar quatro intervalos, nos quais caberão quatro mônadas que, pelo fato de não esgotarem cada intervalo, deixarão a seguir oito intervalos... e assim por diante..."* (PIERRO NETO, 1995)

Apresentaremos aqui o paradoxo de Aquiles e a tartaruga.

## Aquiles e a tartaruga

Neste paradoxo, Zenão considera a questão do movimento relativo de dois corpos. Desta vez o argumento é o seguinte:

Aquiles, o herói grego, e a tartaruga decidem apostar uma corrida. Como Aquiles é muito mais veloz do que a tartaruga, esta recebe uma vantagem, começando a corrida em um ponto mais a frente do ponto de largada de Aquiles.

Zenão argumenta que Aquiles nunca ultrapassará a tartaruga, pois ao chegar à posição inicial A de largada da tartaruga, esta encontra-se mais a frente, numa outra posição B. Quando Aquiles chegar a B, a tartaruga não está mais lá, pois já avançou para uma nova posição C, e assim sucessivamente.

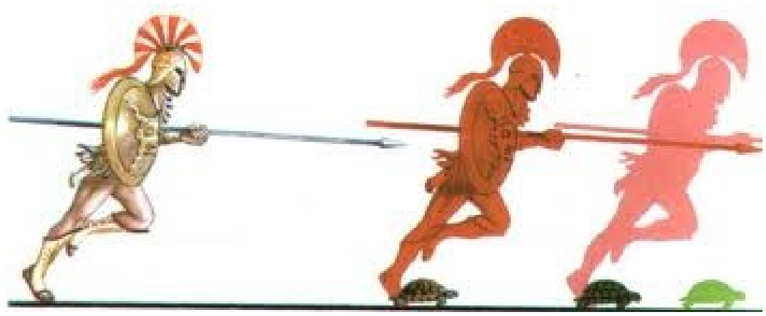

Figura $A_{13}$ - Aquiles e a tartaruga

O paradoxo se coloca quando supomos que a soma de infinitos intervalos de tempo é infinta, de tal forma que seria necessário um tempo infinito para Aquiles alcançar a linha de chegada.

A contradição desaparece se admitirmos que a soma de uma infinidade pode resultar em algo finito. Isso pode ser conseguido usando o conceito de limite.

## Incoerências do paradoxo

A questão central dos paradoxos de Zenão reside na impossibilidade de considerar segmentos de espaço e de tempo como sendo formados por uma infinidade de elementos individuais e, não obstante, separados uns dos outros, isto é, descontínuos.

Zenão sabia, evidentemente, que Aquiles podia alcançar a tartaruga, que um corredor pode percorrer o estádio, e que uma seta em voo se move. Pretendia simplesmente demonstrar as consequências paradoxais de encarar o tempo e o espaço como constituídos por uma sucessão infinita de pontos e instantes individuais consecutivos como as contas de um colar.

Concluímos que uma solução para esse paradoxo utiliza o conceito de limite e convergência de séries numéricas. O paradoxo surge ao supor intuitivamente que a soma de infinitos intervalos de tempo é infinita, de tal forma que seria necessário passar um tempo infinito para Aquiles alcançar a tartaruga. No entanto, os infinitos intervalos de tempo descritos no paradoxo formam uma progressão geométrica e sua soma converge para um valor finito, em que Aquiles encontra a tartaruga.

Por exemplo, sabemos que a soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $a$ e de razão $r$, é

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a\,r^i \;=\; a + a\,r + a\,r^2 + \ldots a\,r^{n-1} \;=\; a\,\frac{r^n - 1}{r - 1} \;=\; a\,\frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Se $0 < r < 1$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - r^n}{1 - r} = \dfrac{1}{1 - r}$ e podemos dizer que a soma dos infinitos termos da progressão geométrica é

$$S_\infty \;=\; \frac{a}{1 - r}.$$

## Paradoxo de Galileu

Durante o Renascimento, o cientista Galileu Galilei (1564 -1642), foi o primeiro a dedicar seus estudos ao infinito na obra "Diálogo Referente às Novas Ciências" , de 1636, onde apresentou um paradoxo estabelecendo uma bijeção entre os números naturais e seus quadrados.

Não menos impressionante é o Paradoxo de Galileu, que aparentemente afirma coisas contraditórias sobre o conjunto dos números naturais. Alguns naturais são quadrados perfeitos, isto é, o quadrado de um natural, enquanto outros não.

Portanto "há mais números naturais do que quadrados perfeitos" . Observe, no entanto, que os dois conjuntos são infinitos e que a função $f(n) = n^2$ estabelece uma função bijetora entre eles. Assim, a conclusão "intuitiva" de que há mais naturais do que quadrados perfeitos precisa ser "ajustada" a esta situação, e esse ajuste foi uma das conquistas da matemática no início do século XX.

A resolução exposta por Galilei é que ao compararmos dois ou mais conjuntos infinitos é incoerente dizer que um conjunto é maior ou menor que outro. E, podemos dizer que a quantidade de elementos do conjunto dos números naturais e o conjunto com todos os quadrados são iguais, pois podemos fazer uma bijeção entre os dois conjuntos infinitos. Seria isto que Cantor utilizaria para desenvolver a teoria dos conjuntos infinitos.

Em 1820, quase 200 anos depois dos *Diálogos de Galilei*, surge um tratado do alemão Benhard Bolzano (1781 -1848) intitulado *Os paradoxos do infinito*, que também ficou esquecido. Entretanto, temos que creditar a Bolzano a criação do conceito potência de um conjunto, que é o seguinte: dois conjuntos têm a mesma potência se existe uma bijeção entre eles. Após *Os Paradoxos de Bolzano*,em 1878, J.W.R. Dedekind (1831 -1916) foi o primeiro a ver nos paradoxos não uma anomalia, mas uma propriedade universal dos conjuntos infinitos que tomou-a como uma definição precisa, onde constava:

"um sistema S é infinito quando é semelhante a uma parte própria dele mesmo, caso contrário S se diz um sistema finito".

## George Cantor

George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu em São Pertersburgo, na Rússia, em 1845 e se dedicou a inteiramente ao estudo do infinito.

Devido a dificuldade de se trabalhar com infinitos, Cantor decidiu compará-los, estabelecendo bijeções entre os conjuntos. Ele utilizou uma estratégia que poderia ser usada por qualquer pessoa que não soubesse contar. Partindo do princípio que, dadas duas caixas com bolas, a questão de saber qual delas teria mais bolas poderia ser facilmente respondida tirando simultaneamente uma bola de cada caixa: caso uma caixa ficasse vazia antes da outra, essa caixa teria menos bolas; se ambas as caixas ficassem vazias ao mesmo tempo, elas teriam a mesma quantidade de bolas.

O Matemático utilizou o mesmo mecanismo, mas em vez de usar bolas usou números; em vez de usar caixas usou aquilo a que ele chamou conjuntos ou classes. Um conjunto ou classe é simplesmente uma coleção de coisas semelhantes, podem ser maçãs, bolas, pessoas, linhas, pontos, números, bem como qualquer outra coisa. Contudo o referido estudioso decidiu que os membros dos conjuntos com o qual trabalharia seriam todos números, tendo uma propriedade em comum. Assim, os membros de um conjunto seriam os números pares, de outro os ímpares, de outro os inteiros, e assim sucessivamente. George Ferdinand procedeu então à comparação do tamanho ou *cardinalidade* destes conjuntos, emparelhando os seus elementos. Se fosse possível estabelecer uma bijeção entre dois conjuntos, então eles teriam a mesma cardinalidade.

Tomando o conjunto dos números naturais, emparelhou os seus elementos com os do conjunto dos números pares, e descobriu que há tantos naturais quanto números pares. Essa mesma bijeção, entre $\mathbb{N}$ e um de seus subconjuntos próprios estabelece o fato de que $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito. Essa bijeção pode ser ilustrada na tabela a seguir:

| Natural | Natural par |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| 4 | 8 |
| 5 | 10 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $2n$ |

Cantor chegou à conclusão de que qualquer subconjunto infinito dos inteiros tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números inteiros. Por exemplo, há tantos quadrados quanto números inteiros negativos, há tantos cubos quanto números divisíveis por 100, há tantos ímpares quanto múltiplos de 2000.

Observe:

| Natural | Quadrado | Inteiro negativo | cubo | Divisiveis por 100 | Múltiplos de 2000 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -1 | 1 | 100 | 2000 |
| 2 | 4 | -2 | 8 | 200 | 4000 |
| 3 | 8 | -3 | 27 | 300 | 6000 |
| 4 | 16 | -4 | 256 | 400 | 8000 |
| 5 | 32 | -5 | 625 | 500 | 10000 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $n \times n$ | $-n$ | $n \times n \times n$ | $100n$ | $2000n$ |

Diante das observações analisadas Cantor representou esta *cardinalidade* por $\aleph_0$. Aleph é a primeira letra do alfabeto hebraico. Para distinguir este novo número dos número finitos, ele designou-o como transfinito.

Uma razão para chamar esse novo objeto matemático de número se deve ao fato de ser possível realizar operações com ele e com os outros números.

Por exemplo, mostra-se que $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ e $2\aleph_0 = \aleph_0$.

Realmente, podemos dizer que $2\aleph_0$ é a cardinalidade de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Assim, a igualdade $2\aleph_0 = \aleph_0$ quer dizer que os conjuntos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$ têm a mesma cardinalidade. Realmente, a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida pela equação

$$f(u, v) \;=\; \frac{(u+v)(u+v+1)}{2} + u$$

é bijetora. Isso fica evidente ao observarmos a tabela a seguir, na qual as antidiagonais mostram a sequência ordenada dos números naturais.

$$\begin{array}{cc|cccccccc}
 & & & & & v & & & & \\
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \dots \\
 & 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & 16 & 22 & \dots & \\
 & 2 & 5 & 8 & 12 & 17 & 23 & \dots & & \\
u & 3 & 9 & 13 & 18 & 24 & \dots & & & \\
 & 4 & 14 & 19 & 25 & \dots & & & & \\
 & 5 & 20 & 26 & \dots & & & & & \\
 & 6 & 27 & \dots & & & & & & \\
 & \vdots & \vdots & & & & & & &
\end{array}$$

Note que a soma $u + v$ é constante ao longo das antidiagonais. Por isso, o número $\frac{(u+v)(u+v+1)}{2}$ é constante ao longo das antidiagonais.

Dado um conjunto $A$, denotamos por $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ o conjunto dos subconjuntos de $A$, chamado o conjunto das partes de $A$. A cardinalidade de $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ é denotada por $2^{\aleph}$, onde $\aleph$ é a cardinalidade de $A$. Cantor mostrou o conjunto de partes sempre tem cardinalidade maior que o conjunto original: $2^{\aleph} > \aleph$. Em particular, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

**Demonstração:**

1. Seja $A$ um conjunto e $f$ uma função de $A$ para $P(A)$.

   O elemento $a$ pode pertencer ou não ao subconjunto $f(a)$. Considere o conjunto:

   $$X = \{a \in A : a \notin f(a)\}$$

   Note que $X$ é um subconjunto de $A$ , logo $X \in P(A)$ . Entretanto, $\forall a \in A$ , temos $f(a) \neq X$ , uma vez que:

   - se $a \in f(a)$ então $a \notin X$.
   - se $a \notin f(a)$ então $a \in X$.

   Sendo assim, $f$ não é sobrejetora em $P(A)$.

   Com isso, $f$ não pode ser uma bijeção de $A$ para $P(A)$.

2. Porém, existe uma bijeção do conjunto $A$ para o conjunto $A' = \{\{a\} : a \in A\}$ e $A' \subset P(A)$. Portanto, $\#A \leq \#P(A)$.

   Por 1 e 2, concluímos que $\#A < \#P(A)$.

$\square$

Isso mostra a existência de outros números transfinitos. É fato que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, cardinalidade dos números reais.

O desenvolvimento da Teoria de Conjuntos, proposta por Cantor, e da Lógica Formal, durante o século XIX, permitiu que as questões envolvendo infinito fossem adequadamente abordadas. A Teoria de Conjuntos permitiu que os conceitos envolvendo infinito fossem apresentados com grande clareza e se revelaram de enorme complexidade.

Essa teoria originalmente proposta por Cantor apresentou problemas que foram revelados na forma de paradoxos, como o Paradoxo de Russell: seja $R$ o conjunto dos conjuntos que não estão contidos em si mesmos. Ora, se $R$ não está contido em si mesmo, então ele deve pertencer a $R$, o que é uma contradição. Por outro lado, se $R$ está contido em si mesmo, então ele deve ser um conjunto que não está contido em si mesmo, o que leva, mais uma vez, a uma contradição.

Essa dificuldade somada com as pesadas críticas feitas principalmente por Leopold Kronecker acabaram prejudicando bastante a saúde de Cantor, que teve várias crises e dificuldades psiquiátricas. No entanto, como diria Hilbert, "Ninguém há de nos expulsar do paraíso que Cantor criou para nós."

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, em 1908, foi o primeiro a propor uma axiomatização da Teoria de Conjuntos. Muitos outros matemáticos também contribuiram. Entre eles Adolf Abraham Halevi Fraenkel e Kurt Gödel.

O objetivo de se criar um sistema axiomático para uma Teoria dos Conjuntos é definir o que são conjuntos. Uma vez definidos, espera-se que as regras usuais de operação entre conjuntos sigam como informalmente. Os axiomas servem para criar uma teoria consistente e evitar contradições como o Paradoxo de Russell.

# Limites e infinitos

Nos capítulos anteriores passamos por vários conceitos diferentes.

Quando olhamos para a fração $\frac{1}{3}$ podemos trabalhar com ela ou pensar no resultado da divisão 1 dividido por 3, que seria $0,333\ldots$ . Ao multiplicarmos $\frac{1}{3}$ por 3, temos como resultado 1, porém quando multiplicamos $0,333\ldots$ por 3 obtemos a resposta $0,999\ldots$. Seria isso suficiente para mostrarmos que $0,999\ldots = 1$ ? Qual seria o resultado da operação $1 - 0,999\ldots$ ? Seria um número com tantos zeros após a vírgula que nunca chegaríamos ao algarismo 1 que, intuitivamente, deveria ser o último algarismo desse resultado.

**Demonstração:**

Seja $x = 0,999\ldots$

então $10\,x = 9,999\ldots$

Logo $10\,x - x = 9,999\ldots - 0,999\ldots$

De onde se conclui que $x = 1$.

provamos então que $x = 0,999\ldots = 1$.

□

Sendo iguais, a subtração passa a ter como resultado o Zero.

Outra forma de entendermos um pouco a ideia de limite é pensarmos no exemplo citado em capítulos anteriores,o número $\sqrt{2}$ ou seja, pensar em $x$, quando $x^2 = 2$. Não temos como dar um resultado definitivo, mas temos como nos aproximarmos do resultado tanto quanto necessário.

**Exemplo:**

$$1,4^2 = 1,96$$
$$1,41^2 = 1,9881$$
$$1,414^2 = 1,999396$$
$$1,4142^2 = 1,99996164$$
$$1,41421^2 = 1,9999899241$$
$$1,414213^2 = 1,999998409469$$
$$1,4142135^2 = 1,99999982368225$$
$$1,41421356^2 = 1,9999999933878736$$

A impossibilidade de calcularmos com exatidão o valor decimal da $\sqrt{2}$ ocorre pelo fato deste ser um número Irracional.

## Calculando a área do circulo: ( limite - aproximação por áreas )

Quantos mais fatiarmos a circunferência em setores, mais parecidos com segmentos serão os arcos formados. Sabendo que o comprimento de uma circunferência é $2\pi r$, e que a figura abaixo forma um “retângulo” podemos calcular sua área multiplicando os lados que seriam $r$ e $\pi r$.

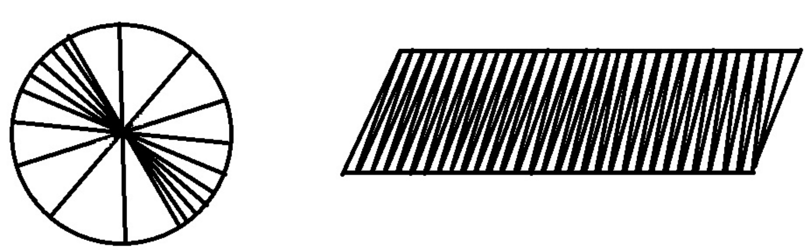

Figura $A_{14}$ - Soma de Setores Infinitesimais

Logo, a área do circulo é dada por $\pi\, r^2$. Note que a área da figura só se parece com um retângulo porque o circulo foi fatiado em uma infinidade de setores circulares, "transformando" assim os arcos em segmentos de reta. Mostramos que a área é $\pi\, r^2$, agora precisamos mostrar que quanto maior for a quantidade de setores, mais próximo estaremos da área do circulo. Basta tomarmos o quadrado, o pentágono e o hexágono inscritos.

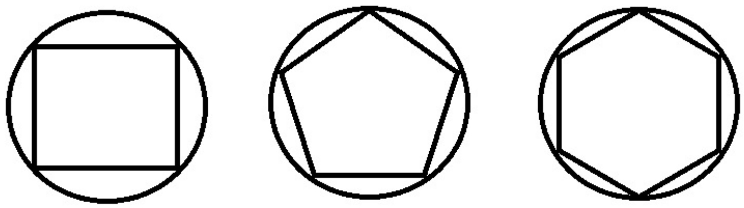

Figura $A_{15}$ - Quadrado, Pentágono e Hexágono Inscritos

Assim podemos perceber que quanto maior for o número de lados do polígono inscrito, melhor será sua aproximação a área do circulo.

Usando um argumento matemático mais sólido, temos:

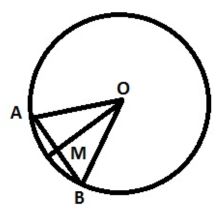


Figura $A_{16}$ - "n-ágono "

**Demonstração:**

Seja $\triangle AOB$ um setor de um n-ágono. A área de $\triangle AOB$ é dividida em $\triangle AOM$ e $\triangle MOB$, dois triângulos de mesma área. Calculando o dobro da área de $\triangle AOM$ teremos a área de $\triangle AOB$. Note que $OM \;=\; r\, \cos(\frac{\pi}{n})$ e $AM \;=\; r\, \mathrm{sen}(\frac{\pi}{n})$. Isto é, $2\, \triangle\, AOM \;=\; (r\, \cos(\frac{\pi}{n}))\,(\, r\, \mathrm{sen}(\frac{\pi}{n}))$. Desta forma a área do n-ágono é dada por :

$$A_n \;=\; n\,(r\, \cos(\tfrac{\pi}{n}))\,(\, r\, \mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{n}))$$

$$A_n \;=\; n\, r^2\, \cos(\tfrac{\pi}{n})\, \mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{n})$$

Quando n$\rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n\to\infty} A_n \;=\; \pi\, r^2\, \cos(\tfrac{\pi}{n})\, \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \cos(\tfrac{\pi}{n}) \;=\; 1 \;\text{ e }\; \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} \;=\; 1$$

então,

$$\lim_{n\to\infty} A_n \;=\; \pi\, r^2$$

$\square$

# Diferentes Tipos de Infinito

Neste capítulo, estabeleceremos a noção de cardinalidade e mostraremos que existem conjuntos infinitos de diferentes cardinalidades.

## Enumerabilidade

O matemático David Hilbert (1862-1943) nos deixou um enigma que ilustra com clareza a ideia de infinito enumerável.

Enigma:

O Hotel de Hilbert

Havia um Hotel em uma cidadezinha que possuía infinitos quartos e este se encontrava lotado. Por haver um congresso na cidade, outros infinitos hospedes chegaram a cidade e como este era o único hotel da região, todos se dirigiram ao mesmo local. Chegando ao Hotel o recepcionista comunicou as infinitas pessoas, que haviam chegado, sobre a lotação do mesmo. Ao ver a situação o gerente, pensando em não perder sua clientela e junto com ela o dinheiro das diárias, pediu que as pessoas aguardassem que logo ele solucionaria o impasse. Eis que o gerente chegou a seguinte solução:

R: O gerente pediu às pessoas que já estavam hospedadas que se deslocassem da seguinte forma: os hospedes do quarto 1 fossem para o quarto 2, os que estavam no quarto 2 fossem para o quarto 4, os que estavam no 3 fossem para o 6, e assim por diante. Com isso o gerente realocou todos os hospedes nos quartos de número par e deixou vago os quartos de número ímpar. Estão chamou todos que estavam aguardando hospedagem e acomodou nos quartos ímpares.

Está foi apenas uma ilustração do que iremos abordar daqui por diante, porém antes de trabalharmos algumas demonstrações de enumerabilidade e não enumerabilidade seria interessante definirmos o que vem a ser uma bijeção. Quando falamos em bijeção estamos falando de uma função que possui duas características. Uma função que é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Podemos então tratar das demonstrações de Enumerabilidade e Não Enumerabilidade dos conjuntos a seguir.

Como explicado anteriormente, demonstrar a Enumerabilidade de um conjunto nada mais é do que criar uma bijeção entre o conjunto dos números Naturais e o conjunto em questão.

**Conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:**

O produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é o conjunto representado por $(x, y)$, onde $x$ e $y \in \mathbb{N}$.

Queremos então provar que o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

**Demonstração:**

Podemos separar os elementos em grupo e diferenciar os grupos do seguinte modo:

Se $(x, y)$ e $(x'\ , y')$ pertencem a um mesmo grupo, então $x + y =\ x'\ + y'$.

$\{0, 3)(1, 2)(2, 1)(3, 0)\}$ pertence ao grupo onde $x + y =\ 3$

$\{0, 4)(1, 3)(2, 2)(3, 1)(4, 0)\}$ pertence ao grupo onde $x + y =\ 4$

Como cada um dos grupos possui um número finito de elementos, basta organizarmos os elemento na ordem crescente das somas correspondentes e enumerar os pares $(x, y)$ na ordem em que aparecem.

$(0, 0)(0, 1)(1, 0)(0, 2)(1, 1) \ldots$

Logo, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

$\square$

Podemos também ilustrar nossa demonstração anterior, deixando assim mais fácil a visualização da diagonal de Cantor para provarmos a enumerabilidade de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Basta tomarmos o mesmo caminho semelhante ao da figura $A_{18}$ da página 36 , quando Cantor prova a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$. Só devemos tomar o cuidado de tratar o numerador das frações, na demonstração referente a $\mathbb{Q}$, como sendo a coordenada $x$ do par ordenado e o denominador como a coordenada $y$.

**Exemplo:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (0,0) | (0,1) | (0,2) | (0,3) | (0,4) | (0,5) | .............. |
| (1,0) | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | .............. |
| (2,0) | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | .............. |
| (3,0) | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | .............. |
| (4,0) | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | .............. |
| (5,0) | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | .............. |
| . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . |

Figura $A_{17}$ - Tabela dos pontos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Os grupos citados anteriormente podem ser facilmente vistos nas diagonais da figura acima.

**Conjunto dos números inteiros ( $\mathbb{Z}$ )**

A união do conjunto $\mathbb{N}$ com os simétricos de $\mathbb{N}$, ou seja,

$$\mathbb{Z} \;=\; \{\, \ldots -3, -2, -1, 0\ , 1\ , 2\ , 3\ , \ldots \}$$

tem como resultado o conjunto dos Inteiros, que é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$. Queremos então provar que o conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável.

**Demonstração:**

Ao dividirmos o conjunto $\mathbb{N}$ em pares $(2n)$ e ímpares $(2n+1)$ podemos associar os números pares ao $\mathbb{Z}_+$ e associar os ímpares ao $\mathbb{Z}_-$. Basta criarmos funções $F$ e $G$, onde $F$ seja uma bijeção de $\mathbb{Z}_+$ em $2n$ e $G$ uma bijeção de $\mathbb{Z}_-$ em $2n+1$.

$F : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow 2n$ e $G : \mathbb{Z}_- \longrightarrow (2n+1)$

**Exemplo:**

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \text{-3,} & \text{-2,} & \text{-1,} & 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots \\ \ldots & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots \\ \ldots & 5, & 3, & 1, & 0, & 2, & 4, & 6, & \ldots \end{array}$$

Logo o conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável.

$\square$

Mostrando a enumerabilidade do produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

**Demonstração:**

Podemos particionar o conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ nos 4 seguintes conjuntos: $(-x,-y)(-x,y)(x,-y)(x,y)$, onde $x$ e $y \in \mathbb{N}$. Com isso reduzimos nossa demonstração a quatro casos semelhantes à $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ que, como vimos anteriormente, é enumerável. Para concluir temos de mostrar ainda ao juntarmos esses quatro conjuntos, agora enumeráveis, teremos um conjunto enumerável. Em termos matemáticos, queremos provar que a reunião finita de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Por ser uma reunião finita de conjuntos, denotaremos por n a quantidade de conjuntos a serem reunidos e listaremos os conjuntos da forma $X_1, X_2, \ldots X_n$. Podemos criar a seguinte relação

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & 0(mod\ n) \\ X_2 & \longrightarrow & 1(mod\ n) \\ X_3 & \longrightarrow & 2(mod\ n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n & \longrightarrow & n-1(mod\ n) \end{array}$$

Relacionando os elementos de $X_k$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq k \leq n$, aos elementos da classe $k-1(mod\ n)$. Logo, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é enumerável.

$\square$

Em verdade, todo produto carteziano $X \times Y$ será Enumerável se $X$ e $Y$ forem Enumeráveis, uma vez que estes poderão ser relacionados com $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

**Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)**

O conjunto dos Racionais, representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$, é formado por todos os números que podem ser escritos da forma $\frac{p}{q}$, onde $p$ e $q \in \mathbb{Z}$, sendo $q \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \{ \tfrac{p}{q} \; ; \; p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z} \; , \; q \neq 0 \; \}$$

A enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ é demonstrada usando o argumento diagonal de Cantor (Figura $A_{18}$). A figura mostra um caminho a ser percorrido em $\mathbb{Q}_+$ o que mostra uma ordenação dos elementos, fruto de uma bijeção de $\mathbb{Q}_+$ com $\mathbb{N}$.

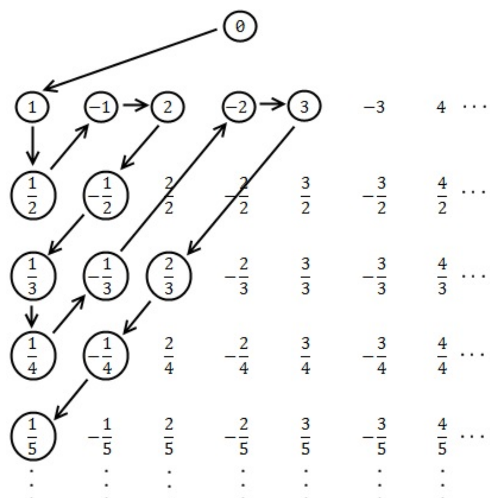

Figura $A_{18}$ - Argumento de Cantor

**Conjuntos dos números reais ($\mathbb{R}$)**

A união do conjunto dos números racionais com os números irracionais tem como resultado o conjunto dos números Reais, representado pelo símbolo $\mathbb{R}$.

Como bem sabemos, chamamos de números irracionais aqueles cuja representação decimal é infinita e não periódica.

**Exemplo:**

$0,10100100010000\ldots$

"O primeiro" conjunto não enumerável ($\mathbb{R}$).

**Demonstração:**

Iremos seguir com nossa demonstração apenas trabalhando com o conjunto $\mathbb{R}_+$ uma vez que a demonstração para $R_-$ segue de forma análoga.

Tomemos $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow ]0,1[$ uma função bijetora.

Analisando graficamente a bijeção na figura abaixo, vemos que o ponto $P$ está livre para variar por toda a semi-reta $\mathbb{R}_+$ . Para cada ponto $P$, traçaremos um segmento de extremidades $(P, 0)$ e $(0, 1)$, que intersectará o segmento de $(0, 0)$ até $(1, 1)$. A partir do ponto de intersecção iremos obter um segmento perpendicular à semi-reta $\mathbb{R}_+$ que intersectará esta em $P'$.

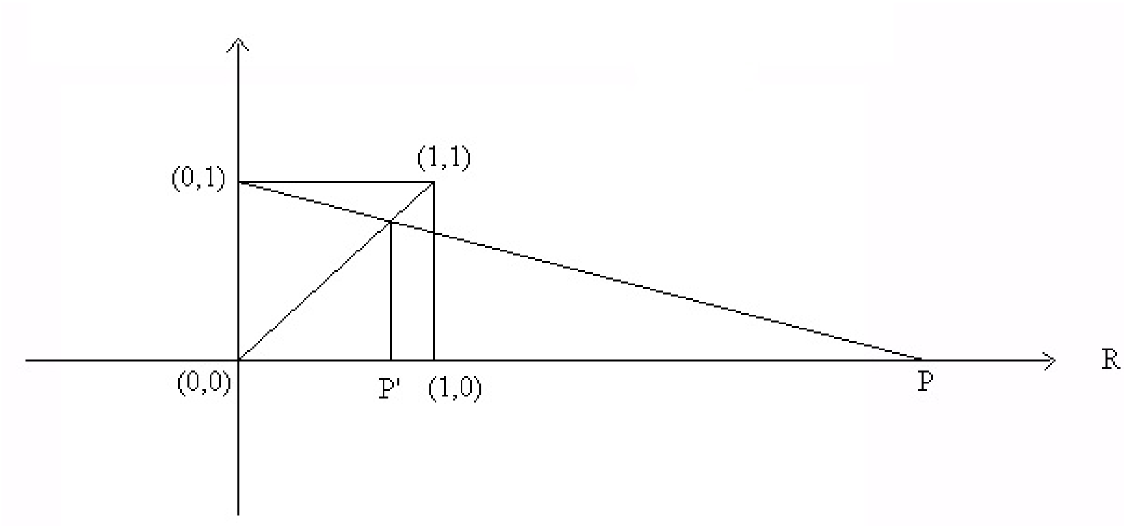


Figura $A_{19}$ - Gráfico de $F(x)$

Ou seja, todo ponto $P$ de $\mathbb{R}_+$ será relacionado a um ponto $P'$ pertencente ao intervalo $]0,1[$. Criando a bijeção; $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow ]0,1[$.

Agora basta provarmos que o intervalo $]0,1[$ é não enumerável, pois sendo $]0,1[$ não enumerável $\mathbb{R}_+$ também o será, uma vez que acabamos de demonstrar que a semi-reta $\mathbb{R}_+$ tem a mesma cardinalidade que o intervalo em questão.

Provando para $]0,1[$:

Neste momento é fundamental tomarmos o cuidado de tratar os elementos do intervalo $]0,1[$ usando sua representação decimal infinita.

**Exemplo:**

$0,3 \; = \; 0,2999\ldots; \; 0,016 \; = \; 0,01599\ldots$

**Demonstração por redução ao absurdo:**

(Hipótese) Suponha que $]0,1[$ é enumerável.

Então é possível criarmos uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $]0,1[$, ou seja, é possível listar, de forma ordenada, *todos* os números compreendidos no intervalo $]0,1[$.

Lista:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{N} & \longrightarrow & ]0,1[ \\
1^o & \longrightarrow & (0, A_{1,1}A_{1,2}A_{1,3}A_{1,4}A_{1,5}\dots) \\
2^o & \longrightarrow & (0, A_{2,1}A_{2,2}A_{2,3}A_{2,4}A_{2,5}\dots) \\
3^o & \longrightarrow & (0, A_{3,1}A_{3,2}A_{3,3}A_{3,4}A_{3,5}\dots) \\
4^o & \longrightarrow & (0, A_{4,1}A_{4,2}A_{4,3}A_{4,4}A_{4,5}\dots) \\
5^o & \longrightarrow & (0, A_{5,1}A_{5,2}A_{5,3}A_{5,4}A_{5,5}\dots) \\
\vdots & \longrightarrow & \vdots\vdots\vdots
\end{array}$$

Onde os $A_{i,j}$ são algarismos de 0 a 9. Temos então uma lista completa dos números que pertencem ao intervalo $]0,1[$

Porém se fizermos:

$$A_{1,1} \neq B_1, A_{2,2} \neq B_2, A_{3,3} \neq B_3, \dots$$

teremos um número $B$ que será diferente de todos os outros números da lista, pelo menos em uma casa decimal, da forma $0, B_1B_2B_3\dots$ e que deveria fazer parte da mesma. Chegamos assim a um absurdo, pois se a lista estava completa como pode o número B não estar relacionado nela? A existência de B entra em contradição com a hipótese de que *todos* os elementos do intervalo $]0,1[$ estavam relacionados na lista. Concluímos então que o erro estava em assumirmos que $\mathbb{R}$ é um conjunto enumerável, logo $\mathbb{R}$ é não enumerável.

$\square$

Corolário: O produto cartesiano infinito dos conjuntos $X_i$ , com $i$ variando de 1 à $\infty$ , onde $X_1, X_2, \dots, X_i$ são conjuntos enumeráveis, é não enumerável.

**Demonstração:**

Como os conjuntos enumeráveis possuem a mesma cardinalidade iremos assumir os conjuntos $X_i$ como sendo iguais a $\mathbb{N}$. Seja a lista abaixo uma lista contendo todos os elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots$

Lista:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \\
1^o & \longrightarrow & (A_{1,1}\ ,\ A_{1,2}\ ,\ A_{1,3}\ ,\ A_{1,4}\ ,\ A_{1,5}\dots) \\
2^o & \longrightarrow & (A_{2,1}\ ,\ A_{2,2}\ ,\ A_{2,3}\ ,\ A_{2,4}\ ,\ A_{2,5}\dots) \\
3^o & \longrightarrow & (A_{3,1}\ ,\ A_{3,2},\ A_{3,3}\ ,\ A_{3,4}\ ,\ A_{3,5}\dots) \\
4^o & \longrightarrow & (A_{4,1}\ ,\ A_{4,2}\ ,\ A_{4,3}\ ,\ A_{4,4}\ ,\ A_{4,5}\dots) \\
5^o & \longrightarrow & (A_{5,1}\ ,\ A_{5,2}\ ,\ A_{5,3}\ ,\ A_{5,4}\ ,\ A_{5,5}\dots) \\
\vdots & \longrightarrow & \vdots\vdots\vdots
\end{array}$$

Usando novamente o argumento diagonal de Cantor, podemos construir um número C de forma análoga a construção no número B da demonstração anterior.

A existência de C nos leva a uma contradição, pois por hipótese a lista estava completa. Com isso podemos afirmar que a reunião infinita de conjuntos enumeráveis é não enumerável.

□

**Conjunto dos números complexos ( $\mathbb{C}$ )**

Composto por elementos da forma $a + bi$ onde $a$ e $b \in \mathbb{R}$ e $i$ é um número imaginário representado por $\sqrt{-1}$ o conjunto dos números complexos é representado pelo símbolo $\mathbb{C}$.

O conjunto $\mathbb{C}$ é não enumerável.

**Demonstração:**

Como $\mathbb{R}$ está contido em $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ é não enumerável, podemos concluir que $\mathbb{C}$ também o será.

□

# Considerações finais:

Este trabalho tem por objetivo tentar explicar e diferenciar a matemática das outras ciências, trabalhar com a abstração e, com isso, explorar o infinito. Por ser uma ciência extremamente abstrata, a matemática traz consigo uma certa dificuldade de aprendizado e como consequência uma difícil aceitação por parte dos alunos do ensino básico.

Espero ter despertado no leitor o interesse pela abstração e principalmente pelo infinito que, ainda hoje, preserva muitos mistérios a seu respeito.

# Bibliografia:


GOWERS, Timothy. Mathematics: a very short introduction. Oxford Uk, 2002

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Campinas: Unicamp, 2004.

IFRAH, Georges. Os números: a história de uma invenção. 4. ed. São Paulo: Globo, 1992.

GUNDLACH, Bernard H. História dos números e numerais. São Paulo: Atual, 1992.

LIMA, Elon Lages. Curso de análise; v.1; 10. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. Análise Matemática para Licenciandos. 1. ed. São Paulo: EDGARD BLÜCHER ltda, 2001.

MILIES, Francisco César Polcino. Números: Uma Introdução à Matemática. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1997.

STILLWELL, J. Mathematics and Its History, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2010.

TAHAN, Malba. As Maravilhas da Matemática. 1. ed. Rio de Janeiro:

http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/cantor/paradzenao.htm

http://www.ic.unicamp.br/ anamaria/cursos/MC348/2010-2/livro-apost-07.pdf - (Anamaria Gomide)

http://www.mat.ufmg.br/ rsanchis/AxiomaEscolha.pdf (REMY DE PAIVA SANCHIS)