UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

*Polinômio Interpolador de Lagrange: uma proposta para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de funções polinomiais e polinômios na educação básica*

Arthur Silva Lopes

MANAUS
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Arthur Silva Lopes

# *Polinômio Interpolador de Lagrange: uma proposta para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de funções polinomiais e polinômios na educação básica*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata

MANAUS
2018

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Lopes, Arthur Silva

L864p Polinômio Interpolador de Lagrange: uma proposta para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de funções polinomiais e polinômios na educação básica / Arthur Silva Lopes. 2018

67 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Roberto Antonio Cordeiro Prata

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Função Polinomial. 2. Polinômio. 3. Interpolação. 4. Lagrange. I. Prata, Roberto Antonio Cordeiro II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

ARTHUR SILVA LOPES

# POLINÔMIO INTERPOLADOR DE LAGRANGE: UMA PROPOSTA PARA A MELHORIA DO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES POLINOMIAIS E POLINÔMIOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 25 de Maio de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata (Orientador)
Universidade Federal do Amazonas – UFAM

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira (Membro)
Universidade Federal do Amazonas – UFAM

Profª. Drª. Jeanne Moreira de Sousa (Membro Externo)
Instituto Federal do Amazonas - IFAM

# AGRADECIMENTOS

- A Deus, pelo fortalecimento e ajuda em todas as etapas da minha vida;
- Ao meu pai, Sidney Lopes, pelo incentivo para eu manter meus estudos;
- A minha mãe, Tânia Silva, que mesmo de longe sempre torce por mim;
- A minha mulher, Luciane Neres, pelo incentivo e suporte constantes;
- Ao professor Roberto Prata, pela orientação e estímulo constante;
- A todos os professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional (PROFMAT - UFAM) que contribuiram a minha formação acadêmica;
- Aos colegas do mestrado pelo apoio constante;
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

# RESUMO

Atualmente o ensino das funções polinomiais e dos polinômios é introduzido com problemas relacionados a áreas e perímetros de figuras planas, a volumes de sólidos geométricos e a menção de algumas aplicações em outras ciências, sem mostrar a função polinomial ali utilizada. Para uma contextualização histórica, o trabalho é desenvolvido a partir do estudo do aperfeiçoamento da Álgebra ao longo das sociedades. Em seguida, apresentaremos os conceitos de Polinômio em Anéis e Corpos, com algumas proposições, e dos determinantes, suas propriedades, e a matriz de Vandermonde e seu determinante. Prontamente, falaremos sobre a Interpolação, destacando a interpolação polinomial. Finalmente, apresentaremos o panorama da Matemática no Brasil e a proposta de utilização do Polinômio Interpolador de Lagrange no ensino de funções polinomiais e dos polinômios na educação básica.

Palavras-chave: Função Polinomial, Polinômio, Interpolação, Lagrange

# ABSTRACT

Nowadays, the teaching of polynomial functions and polynomials is introduced with problems related to areas and perimeters of flat figures, volumes of geometric solids and the mention of some applications in other sciences, without showing the polynomial function used there. For a historical contextualization, the work is developed from the study of the improvement of Algebra throughout the societies. Then we will present the concepts of Polynomial in Rings and Fields, with some propositions, and the determinants, their properties, and the matrix of Vandermonde and its determinant. Promptly, we will talk about Interpolation, highlighting the polynomial interpolation. Finally, we present the panorama of Mathematics in Brazil and the proposal to use the Lagrange Interpolator Polynomial in the teaching of polynomial functions and the polynomials in basic education.

Keywords: Polynomial Functions, Polynomials, Interpolation, Lagrange

# Lista de Figuras


1.1 Sistema de numeração babilônico . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
1.2 Sistema de numeração egípcio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

2.1 Interpolação de uma função $f(x)$ por outra função $g(x)$ . . . . . . . . . . . . . 34
2.2 Função interpoladora $f(x) = x$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35
2.3 Função interpoladora $f(x) = -6x^2 + 8x + 2$. . . . . . . . . . . . . . . . . 38

3.1 Evolução do desempenho dos estudantes no PISA nos últimos 15 anos . . . . . 41
3.2 Desempenho médio em Matemática no SAEB . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
3.3 Desempenho médio em Matemática no SAEB - Ensino Médio . . . . . . . . . 42

4.1 Exemplo utilizado por [12]. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
4.2 Exemplo utilizado por [6]. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
4.3 Apresentação do conteúdo aos alunos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
4.4 Pesquisa de problemas contextualizados para utilização nas aulas . . . . . . . . 51
4.5 Utilização de problemas associados às Ciências da Natureza e suas Tecnologias 51
4.6 Utilização de tecnologias digitais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
4.7 Utilização de tecnologias digitais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
4.8 Dificuldades percebidas nos alunos para aprendizagem de funções polinomiais . 53
4.9 Passo 1. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
4.10 Passo 2. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
4.11 Passo 3. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
4.12 Passo 4. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
4.13 Função polinomial interpoladora $p(x)$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59
4.14 Gráfico de $X(t)$ extendido. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
4.15 Gráfico de $X(t)$ entre 1 e 15 ut. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61
4.16 Gráfico da função interpoladora $g(x)$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
4.17 Gráfico do polinômio interpolador $y(x)$. . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
4.18 Gráfico do polinômio interpolador $y(x)$ expandido. . . . . . . . . . . . . . 63

# Sumário


**Introdução** **1**

**1 Um pouco da história da Álgebra** **3**

1.1 Álgebra: fase antiga ou elementar . . . . . . . . . . 4

1.1.1 A álgebra babilônica . . . . . . . . . . 4

1.1.2 A álgebra egípcia . . . . . . . . . . 6

1.1.3 A álgebra grega . . . . . . . . . . 8

1.1.4 A álgebra indiana e árabe . . . . . . . . . . 9

1.1.5 A álgebra européia . . . . . . . . . . 11

1.2 Álgebra: fase moderna ou abstrata . . . . . . . . . . 12

1.2.1 A Geometria Analítica de Descartes e Fermat . . . . . . . . . . 13

1.2.2 A álgebra de Leibnitz e Newton . . . . . . . . . . 14

1.2.3 A Álgebra Abstrata . . . . . . . . . . 15

**2 Fundamentação Teórica** **19**

2.1 Anéis . . . . . . . . . . 19

2.2 Sequências . . . . . . . . . . 22

2.3 Anel dos polinômios . . . . . . . . . . 24

2.4 Função determinante . . . . . . . . . . 28

2.4.1 Matriz de Vandermonde . . . . . . . . . . 32

2.5 Interpolação . . . . . . . . . . 34

2.5.1 Interpolação polinomial . . . . . . . . . . 35

**3 Panorama da Matemática no Brasil e a Metodologia de Resolução de Problemas** **40**

3.1 Panorama da Matemática no Brasil . . . . . . . . . . 40

3.2 A Metodologia da Resolução de Problemas . . . . . . . . . . 43

**4 O polinômio interpolador de Lagrange como instrumento motivador do ensino-aprendizagem de polinômios e funções polinomiais** **46**

4.1 Aspectos motivadores da proposta de utilização do Polinômio Interpolador de Lagrange no processo de ensino-aprendizagem de funções polinomiais e polinômios na educação básica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46
4.2 A proposta de utilização do Polinômio Interpolador de Lagrange . . . . . . . . 53

**Considerações Finais** **64**

# Introdução

Este trabalho de conclusão de curso teve início em uma discussão ocorrida em uma das aulas da disciplina de Álgebra Linear, do mestrado PROFMAT. Nesta aula, onde coube a cada aluno defender um tema da disciplina, fiz minha defesa sobre o Polinômio Interpolador de Lagrange e, logo após, o professor dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata teceu um comentário sobre a possibilidade de se utilizar os polinômios de Lagrange nas aulas relacionadas às funções polinomiais e a polinômios. Ocorrida a aula, e analisando os livros didáticos utilizados por mim para ministrar aulas nas escolas onde trabalho, percebi que boa parte deles inicia o conteúdo sobre funções polinomiais e polinômios de forma semelhante: utilizando exemplos relacionados a perímetros e áreas de figuras planas com arestas representadas por váriáveis, e/ou com exemplos relacionados à área superficial e volume de sólidos geométricos, com arestas da mesma forma apresentada nas figuras planas. Nesse contexto, surge a motivação de propor a utilização do Polinômio Interpolador de Lagrange como motivador do ensino e aprendizagem de funções polonomiais e polinômios.

Diante do que foi exposto, iniciaremos o primeiro capítulo falando sobre a história da Álgebra, a separando em dois momentos: fase antiga ou elementar, e fase moderna ou abstrata.

No segundo capítulo faremos um estudo sobre os polinômios sobre anéis e corpos, funções polinomiais e resultados importantes como raíz de polinômio, os teoremas de resto e do fator, algoritmo da divisão para polinômios, multiplicidade e quantidade de raízes. Para isso, relembraremos conceitos básicos de Álgebra como Anéis, Domínios e Corpos. Ainda no segundo capítulo, apresentaremos o conceito de Sequência e alguns resultados associados à ela, que serão utilizados na definição de polinômio.

No terceiro capítulo definiremos o determinante como função que associa uma matriz quadrada a um escalar, seguidos por alguns resultados oriundos desta definição. No mesmo capítulo apresentaremos a matriz de Vandermonde e seu determinante, utilizado na definição do polinômio interpolador.

No quarto capítulo trataremos da interpolação, apresentando o Problema Geral da Interpolação. Em seguida, definiremos interpolação polinomial e o Polinômio Interpolador de Lagrange e mostraremos alguns exemplos de aplicações destes resultados.

No quinto capítulo apresentaremos o panorama da Matemática no Brasil e algumas ideias relacionadas à Metodologia da Resolução de Problemas. Logo após, no mesmo capítulo, proporemos a utilização do polinômio interpolador de Lagrange, mediante uma metodologia a ser utilizada em sala de aula e de exemplos elaborados com base no que discorrem os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Base Nacional Comum Curricular e a Proposta Curricular do Ensino Médio de Matemática e suas Tecnologias, da Secretaria de Estado de Educação e Qualidade do Ensino do Estado do Amazonas.

Desta forma, este trabalho propõe-se a contribuir para a melhoria tanto do processo de ensino, pelo professor, quanto de aprendizagem, pelo aluno, dos conceitos de Polinômios e Funções Polinomiais, importantíssimos nas modelagens de situações reais, em diversos contextos.

# Capítulo 1

# Um pouco da história da Álgebra

A álgebra, da maneira que é ensinada no ensino básico e universitário, é compreendida como um ramo da Matemática responsável pelo estudo das equações e dos métodos de resolução destas, além do estudo de estruturas tais como grupos, anéis, corpos e outras que a compõe. Mas, ao analisarmos o desenvolvimento do conhecimento matemático, vemos que não foi sempre essa ideia a usada para definir álgebra, até porque o início da Matemática coincide com o da humanidade, uma vez que a necessidade de contar levou ao desenvolvimento dos sistemas numéricos dos povos antigos, do desenvolvimento das operações e da resolução de problemas envolvendo os números desses sistemas.

Segundo [7] , "estranha e intrigante é a origem da palavra álgebra". Diferente da palavra aritmética, que é derivado do grego *arithmos* (números), álgebra é uma variação da palavra *al-jabr*, que apareceu no título de um dos livros do matemático árabe Mohammed al-Khowarizmi: *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, traduzido literalmente como "ciência da reunião e redução". Nessa obra, al-Khowarizmi tratava da resolução de equações utilizando os métodos de transposição de termos subtraídos de um membro para o outro membro da equação e do cancelamento de termos semelhantes em membros opostos da equação.

Para entendermos a maneira que a álgebra surgiu e se consolidou, precisamos analisar o seu desenvolvimento ao longo do tempo, dividido em duas etapas: a álgebra antiga (ou álgebra elementar) e a moderna (ou álgebra abstrata).

> A passagem da álgebra clássica para a assim chamada álgebra abstrata foi um processo sumamente interessante. Representa não somente um progresso quanto aos conteúdos técnico-científicos da disciplina como amplia consideravelmente o seu campo de aplicação e, o que é mais importante, implica - num certo sentido - uma mudança na própria concepção do que a matemática é, da compreenção de sua condição de ciência independente e da evolução dos métodos de trabalho.( [27], p. 4)

## 1.1 Álgebra: fase antiga ou elementar

Abrange o período de 1700 a.C. a 1700 d.C., aproximadamente. É caracterizada pelo desenvolvimento de símbolos e da resolução de equações. Registros encontrados nas tabuletas de argila do povo sumério e no Papiro de Rhind, documento egípcio, datados entre 2000 a.C. e 1600 a.C., mostram que estes povos resolviam problemas relacionados à distribuição de mercadorias que resultavam em equações simples. Registros também mostraram que os babilônios sabiam resolver completamente problemas envolvendo equações de segundo grau. Esses povos usavam o método retórico - ou verbal - para apresentar as resoluções.

### 1.1.1 A álgebra babilônica

Os babilônios desenvolveram um sistema de numeração que os proporcionava realizar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, inclusive o cálculo de raízes quadradas e potências: o sistema sexagesimal - ou posicional de base sessenta. Na verdade, eles usavam uma combinação da base sessenta com a base dez para a representação de seus números, pois podemos ver na figura a seguir que os símbolos até cinquenta e nove eram contados de dez em dez.

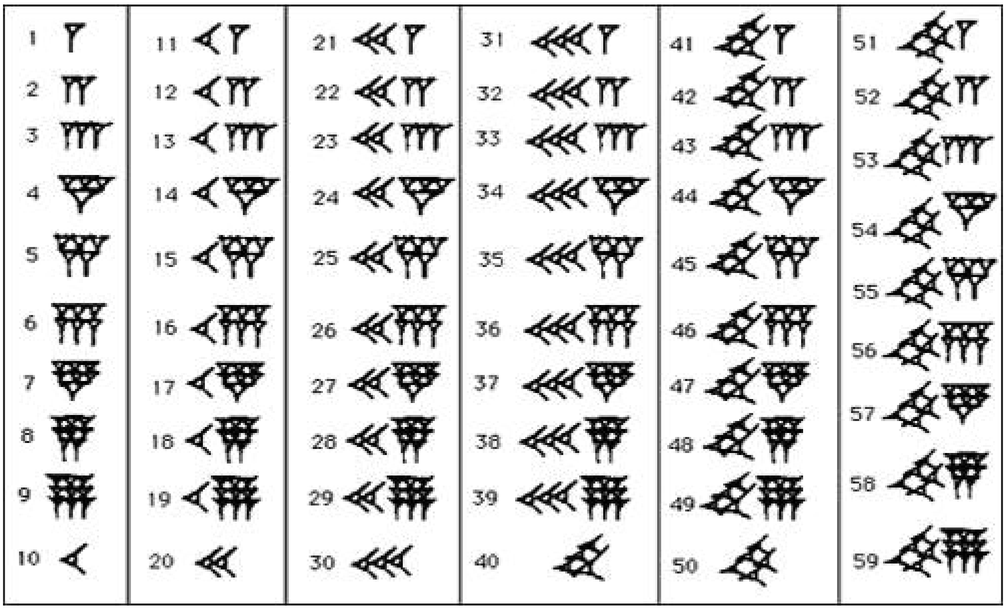


Figura 1.1: Sistema de numeração babilônico

Ao chegar no 60, representava este pelo mesmo símbolo do número 1, mas à esquerda da outra quantidade. A vantagem do sistema posicional é que este permite que com poucos símbolos seja possível escrever qualquer quantidade, pois seus números são obtidos através de processos aditivos e também permitir que sejam desenvolvidos processos eficientes para realizar as operações entre esses números. Assim, os babilônios, para realizar as operações que necessitavam, escreveram em tabuletas de argila uma espécie de tabuada, onde as operações que usavam rotineiramente lá estavam representadas.

Além das tabuletas de operações, existem outras onde eram anotados procedimentos para a resolução de problemas, como se fossem uma espécie de exercício resolvido; exercícios estes que hoje resolveríamos por meio de equações [28]; essas equações seriam equações quadráticas do tipo

$$ax^2 + bx = c \tag{1.1}$$

Um desses problemas é citado por [11], com a notação em língua portuguesa e utilizando os algarismos indo-arábicos: "Somei quatro vezes o lado do meu quadrado e uma vez a sua área, encontrei 21, quanto vale o lado?".

*Procedimento*

1) Multiplique 4 por 4, obtendo 16

2) Faça 4 vezes 21 e some com 16, obtendo 100

3) Extraia a raiz quadrada de 100, obtendo 10

4) Subtraia 4 de 10, obtendo 6

5) Retenha a metade de 6, obtendo 3

6) O lado do quadrado é 3

Na linguagem algébrica atual, este problema se resumiria a determinar a solução da equação quadrática

$$4x + x^2 = 21 \tag{1.2}$$

Esse método de resolução era empregado em vários problemas semelhantes. De forma geral, o procedimento pode ser descrito em termos de simbologia atual:

*Procedimento*

1) Multiplique $a$ por $c$, obtendo $ac$

2) Encontre a metade de $b$, obtendo $\dfrac{b}{2}$

3) Multiplique $\dfrac{b}{2}$ por $\dfrac{b}{2}$, obtendo $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$

4) Adicione $ac$ a $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$, obtendo $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + ac$

5) A raiz quadrada é $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac}$

6) Subtraia $\frac{b}{2}$ da raiz acima

7) Tome o recíproco de $a$, obtendo $\frac{1}{a}$

8) Multiplique $\frac{1}{a}$ pela raiz subtraída de $\frac{b}{2}$ para obter o lado do quadrado

9) O lado do quadrado é $\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac - \frac{b}{2}}\right) \cdot \frac{1}{a}$

Fica aqui evidenciado que os babilônios eram capazes de resolver vários problemas envolvendo esse tipo de equação, podendo assim serem considerados um dos precursores mais importantes da álgebra.

### 1.1.2 A álgebra egípcia

Ao mesmo tempo em que a álgebra ia surgindo na Babilônia, assim também aconteceu no Egito. Apesar do povo egípcio ter seu sistema de numeração em base dez, ele era apenas aditivo, não sendo posicional. Esse fato o tornava menos eficiente para realizar operações, visto que não era prático para escrever números grandes, levando os egípcios não conseguirem resolver problemas tão sofisticados como os babilônios.

Para a representação do número um, era utilizado um traço vertical e os números de dois até nove pela soma do número de barras. Para representar o número dez era utilizado um símbolo denominado alça, e em seguida, todos os outros símbolos eram múltiplos de dez: o cem era representado por uma espiral, o mil pela flor de lótus, o dez mil por um dedo, o cem mil por um sapo e o um milhão por um deus com as mãos levantadas.

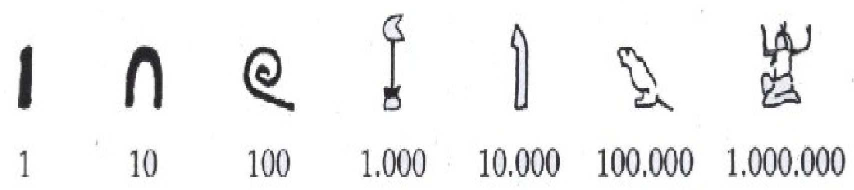


Figura 1.2: Sistema de numeração egípcio

Para representar as frações, os egípcios usavam uma elipse e embaixo dela escreviam os números que representam as partes em que o inteiro foi dividido. Apesar de eles trabalharem apenas com as frações do tipo $\frac{1}{n}$ (sendo apenas a fração $\frac{2}{3}$ a fugir da regra, pois tinha uma representação própria) a elipse não corresponde ao numerador 1, pois

> o símbolo oval colocado acima do número não possui o mesmo sentido daquilo que chamamos de numerador(...). Na designação egípcia, o símbolo oval, que exprime a palavra parte não possui um sentido cardinal, mas ordinal. Ou seja, ele indica que, em uma distribuição em $n$ partes iguais, tomamos a $n$-ésima parte, aquela que conclui a divisão em $n$ partes. [28]

Vejamos alguns exemplos de como os egípcios realizavam operações, destacando a multiplicação e a divisão. Na primeira, os egípcios consideravam rigorosamente a distinção entre multiplicador e multiplicando - hoje, devido a comutatividade, executar $7 \cdot 5$ é o mesmo que $5 \cdot 7$, evidentemente. Pelo processo egípcio, multiplicar 6 por 9, ou seja, *tome 9 vezes o número 6*, era feito da maneira que segue:

$1 \quad 6$
$\backslash 2 \quad 12$
$\backslash 3 \quad 18$
$\backslash 4 \quad 24$

O símbolo $\backslash$ era colocado ao lado dos valores da coluna da esquerda que, somados, dão 9. Assim, o resultado era obtido da soma dos números correspondentes na direita. No exemplo acima, 54.

Vejamos um exemplo para a divisão, que aparece no Papiro de Ahmes[1]: *Divida 19 por 8, ou seja, por quanto se deve multiplicar 8 a fim de obter 19?*

$1 \quad 8$
$\backslash 2 \quad 16$
$\backslash \frac{1}{2} \quad 4$
$\backslash \frac{1}{4} \quad 2$
$\backslash \frac{1}{8} \quad 1$

A resposta é $2 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}$. Percebe-se que para resolver problemas de divisão do tipo $A$ dividido por $B$, eles iam em busca de um número $x$ tal que $B \cdot x = A$.

A álgebra egípcia consistia em resolver problemas de equações lineares do tipo $Ax = B$. Para tal, utilizavam o método conhecido como *falsa posição*, que na prática consiste em escolher um valor arbitrário $x_0$ tal que $Ax_0 = B_0$. O valor $x_0$ era escolhido de modo que facilitasse a resolução da equação. Dessa forma, para que seja obtido $B$, basta multiplicarmos ambos os membros da equação por $\dfrac{B}{B_0}$:

$$A\left(x_0 \cdot \frac{B}{B_0}\right) = B \cdot \frac{B}{B_0} \tag{1.3}$$

Sendo assim, $x_0 \cdot \dfrac{B}{B_0}$ é a solução procurada.

[1] O papiro Ahmes ou Rhind mede 5,5 m de comprimento por 0,32 m de largura, datado aproximadamente no ano 1650 a.C. onde encontramos um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo.(Fonte: http://www.matematica.br/historia/prhind.html

Consideremos o problema 24 do Papiro de Ahmes: *Uma quantidade, com $\frac{1}{7}$ dela adicionado, torna-se 19.* A solução apresentada no Papiro é a seguinte:

$$(1)\quad \begin{array}{cc} 1 & 7 \\ \backslash\frac{1}{7} & 1 \end{array}$$

$$(2)\quad \begin{array}{cc} 1 & 8 \\ \backslash 2 & 16 \\ \backslash\frac{1}{2} & 4 \\ \backslash\frac{1}{4} & 2 \\ \backslash\frac{1}{8} & 1 \end{array}$$

$$(3)\quad \begin{array}{cc} \backslash 1 & 2\frac{1}{4}\frac{1}{8} \\ \backslash 2 & 4\frac{1}{2}\frac{1}{4} \\ \backslash 4 & 9\frac{1}{2} \end{array}$$

Em (1), temos $x_0 = 7$ e $x_0 + \dfrac{x_0}{7} = 8$. No item (2) temos 19 dividido por 8, resultando em $2 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{19}{8}$.

Em (3), é feita a multiplicação entre $\dfrac{19}{8}$ por 7:

$$2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 9 + \frac{1}{2} = \frac{133}{8}$$

.

O equivalente, nos dias atuais, seria resolver a equação $x + \dfrac{x}{7} = 19$. Pelo processo usual:

$$\begin{aligned} x + \frac{x}{7} = 19 \quad &\Rightarrow \quad 7x + x = 133 \\ &\Rightarrow \quad 8x = 133 \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{133}{8} \blacksquare \end{aligned}$$

### 1.1.3 A álgebra grega

Inicialmente, como trabalhado por Tales de Mileto, que foi um dos primeiros matemático gregos, e por Pitágoras (entre os séculos VII e VI a.C), e em seguida, por Euclides, a álgebra grega foi desenvolvida nas resoluções de problemas geométricos, utilizando o mesmo procedimento adotados pelos babilônios, descrevendo passo a passo a solução. Assim, os gregos utilizam grandezas comensuráveis para a resolução de seus problemas matemáticos mais importantes na época: a duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo. Estes três problemas de Geometria desempenharam um papel importante no desenvolvimento da Matemática; são problemas de construção e resistiram a todas as tentativas dos gregos para resolvê-los utilizando somente a régua sem graduação e o compasso, os únicos instrumentos empregados por Euclides nos Elementos.

Mas foi na sociedade grega, com sua organização política, a *polis*, permitindo à sociedade grega participar das decisões políticas, onde aquele que tivesse o maior poder persuasivo sempre poderia convencer os outros da veracidade da sua tese, que surgiu a necessidade de se usar uma matemática mais "forte", com bases mais sólidas e indo além dos problemas numéricos. Os gregos passaram a considerar o conhecimento matemático uma espécie de saber superior, que vai além da aplicação prática desse conhecimento, dando à Matemática da época um aspecto abstrato e teórico - bem presentes na obra *Elementos*, de Euclides, e nos trabalhos de Arquimedes sobre a quadratura da parábola e sua espiral - que permitiu resolver dois problemas clássico da geometria grega: a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo. De mesma forma pode-se citar o trabalho de Apolônio, sobre as cônicas, no seu tratado *Secções Cônicas*.

Séculos mais tarde, o matemático Diofanto, que viveu no século III d.C., introduziu uma nova maneira de representar valores desconhecidos em um problema. Essa maneira de pensar foi apresentada no seu livro *Arithmetica*, nessa obra foi reunido diversos problemas matemáticos importantes da época, onde Diofanto apresenta o que ele chamava de "desiguinações abreviadas", para designar diversos tipos de números [28]:

$\zeta$ - última letra da palavra *arithmos*, a quantidade desconhecida

$\Delta^Y$ - primeira letra de *dynamis*, o quadrado da quantidade desconhecida

$K^Y$ - primeira letra de *kybos*, o cubo

$\Delta^Y\Delta$ - o quadrado-quadrado (quarta potência)

$\Delta K^Y$ - o quadrado-cubo (quinta potência)

$K^Y K$ - o cubo-cubo (sexta potência)

Dessa forma pode-se perceber uma separação entre a aritmética diofantina e a geometria grega, pois uma potência maior que três para um número não correspondia a nenhuma grandeza. Essa maneira de representar tipos de número ficou conhecida como *álgebra sincopada*. Para Diofanto, o *arithmos* é uma quantidade indeterminada de unidade, diferente dos números, que tem quantidade determinada. Mas o *arithmos* é tratado tal qual um número, com relação às operações que podem ser realizadas com as designações abreviadas.

### 1.1.4 A álgebra indiana e árabe

Devido as diversas invasões sofridas pela Índia, foi possível o acesso ao conhecimento matemático desenvolvido pelos babilônios e gregos por parte do povo hindu. Entre seus representantes pode-se destacar *Brahmagupta* (598 - 668), que demonstrou a solução geral para as equações do segundo grau em números inteiros e desenvolveu métodos algébricos gerais para a aplicação na Astronomia, em sua obra *Brahmasphutasidanta*; e *Bháskara* (1114 - 1185), cujo principal trabalho foi o *Siddhanta Siromani*, dividido em quatro partes: *Lilavati*, *Bijaganita*, *Grahaganita* e *Goladhyaya*, dedicados à aritmética, álgebra, astronomia e trigonometria esférica, respectivamente. Ele representa o ápice da Matemática do século XII.

Os hindus resolviam equações quadráticas do tipo

$$ax^2 + bx = c \tag{1.4}$$

pelo método de completar quadrados, ou, como Bháskara denominava, eliminação do termo médio. Na época, os problemas que hoje escrevemos em forma de equações eram ditados em versos, como se pode ver no exemplo a seguir:

> ”De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?”

O método de resolução também era descrito através de palavras, e seguia o mesmo padrão de procedimentos, adotado pelos babilônios e gregos. Segue o texto de como Bháskara descrevia a maneira de se determinar a solução.

> ”Seja uma igualdade contendo a quantidade desconhecida, seu quadrado, etc. Se temos os quadrados da quantidade desconhecida, etc., em um dos membros, multiplicamos os dois membros por um fator conveniente e somamos o que é necessário para que o membro das quantidades desconhecidas tenha uma raiz; igualando em seguida esta raiz à do membro das quantidades conhecidas, obtemos o valor da quantidade desconhecida.
>
> E por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar”

Em termos de linguagem algébrica atual, temos o seguinte: dada uma equação do tipo (1.4):

1) multiplica-se ambos os lados por $4a$, obtendo $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$

2) adiciona-se $b^2$ a ambos os lados, obtendo $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$

3) toma-se a raiz quadrada de ambos os lados, obtendo $2ax + b = \sqrt{4ac + b^2}$

4) a solução é $x = \dfrac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$

Com o advento do islamismo, os árabes tiveram acesso aos trabalhos desenvolvidos pelos hindus e pelos gregos, sendo os algarismos hindus uma de suas mais importantes aquisições. De posse desses conhecimentos matemáticos, principalmente os dos gregos, os árabes os aperfeiçoaram, produzindo métodos sistemáticos a fim de generalizá-los. Um grande avanço proporcionado pelos árabes foi o rompimento com a relação número/grandeza, muito presente na álgebra geométrica euclidiana.

O maior expoente da matemática árabe foi Al-Khwarizmi, com sua obra *Al-Kitab al-fi mukhtasar Hisab al-jabr wa-l-muqabala*(Compêndio sobre Cálculo por Completude e Balanço), que se tornou um dos principais livros de matemática das universidades européias. É considerado o primeiro tratado dedicado à álgebra, e foi seu título que nos legou o termo álgebra (al-jabr). Apesar de sua álgebra ser retórica, ele utilizava termos próprios para cada maneira como o número aparecia nos problemas; em suas notações, o quadrado da quantidade desconhecida era designado pela palavra *mal*, que difere do quadrado geométrico (*murabba'a*). A quantidade desconhecida era designada pelo termos *Jidhr*, que signifca raiz, mas também poderia ser usado ao designação *coisa*; e o termo conhecido era designado por *adad*. Dessa forma, Al-Khwarizmi poderia trabalhar tanto com números quanto com grandezas geométricas nos seus cálculos.

Destaca-se no trabalho de Al-Khwarizmi o tratamento de equações quadráticas quaisquer, que diferem do caso (1.4). Como exemplo citado em [28], tomemos a equação

$$2x^2 + 100 - 20x = 58 \tag{1.5}$$

Por *al-jabr*, devemos adicionar $20x$ ao segundo membro da equação, devido ao excesso de mesmo valor no primeiro membro, obtendo

$$2x^2 + 100 = 20x + 58 \tag{1.6}$$

Em seguida, pelo processo de *al-muqabala*, equilibra-se a equação retirando 58 de ambos os membros, obtendo a equação

$$2x^2 + 42 = 20x \tag{1.7}$$

### 1.1.5 A álgebra européia

A partir do século XIII, os tratados matemático dos gregos começaram a ser traduzidos na Europa, e nesse mesmo período tiveram acesso aos tratados matemáticos dos árabes, mas apenas no século XV se desenvolveu, a partir do trabalho de Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, entitulado "Liber abaci" - Livro de Ábaco. Nessa época, a matemática era uma mistura de matemática comercial e algébrica.

A álgebra européia era essencialmente a mesma praticada pelo povo árabe, utilizando um simbolismo não unificado tanto para as incógnitas quanto para as operações. Os termos utilizados pelos árabes sofreram uma tradução para o latim, como, por exemplo, o quadrado ficou conhecido como *quadratus*, o cubo como *cubos*, o termo constante como *numerus* e o termo desconhecido como *radix*. Foi na Europa que se empregaram alguns símbolos operacionais que até hoje são utilizados, como o símbolos de (+) e (-), que eram usados na Alemanha; o símbolo de raiz quadrada, introduzido por Christoff Rudolff; e o símbolo (=) para representar igualdade, apresentado por Robert Recorde.

O desenvolvimento algébrico europeu mais importante deve-se ao tratamento das soluções das equações cúbicas por radicais. Na época, tais equações eram tratados em casos distintos, e para cada um destes exitia uma maneira de determinar as suas soluções. Nesse âmbito recebem destaques os trabalhos de Scipione Del Ferro, Niccolo Fontana, conhecido como Tartaglia, e Girolamo Cardano, trabalhando o tipo de equação que hoje escrevemos como

$$x^3 + mx^2 = n \tag{1.8}$$

No seu livro entitulado *Ars Magna*, Cardano fornece a resolução da equação *cub p 6 reb aequalis 20*. Em notação atual:

$$x^3 + 6x^2 = 20 \tag{1.9}$$

No mesmo livro, Cardano faz a primeira menção dos números complexos - na época chamados de fictícios - na resolução do problema que consistia em dividir 10 em duas partes tais que uma multiplicada pela outra resulte em 40, apresentando como solução as raízes $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$. Logo após Cardano, Rafael Bombelli, outro matemático italiano, também estudou os números fictícios, desenvolvendo uma álgebra opreacional para estes números; o francês Albert Girard, numa primeira versão do Teorema Fundamental da Álgebra, em 1629, disse que uma equação possui tantas soluções quanto o grau da maior quantidade, admitindo que os números impossíveis ou fictícios configurassem esse conjunto de soluções. Logo após, Reneé Descartes também admitiu que uma equação possui tantas soluções quantas as dimensões da quantidade desconhecida.

Destaca-se também o trabalho realizado por François Viète, em sua obra *In Artem Analyticam Isagoge* - Introdução à álgebra analítica. Nesse livro, Viète trata as equações sobre um novo ponto de vista, introduzindo uma representação padrão aos coeficientes da equação, que passam a ser representadas por consoantes e as incógnitas por vogais maiúsculas, e simbolizando as potências por uma mesma letra, por exemplo, como cita [28], se A é a incógnita, seu quadrado é chamado A *quadratum*, seu cubo A *cubum*, e assim por diante.

Essa notação introduzida por Viète permitiu tratar as equações anteriores como casos, e generalizou os métodos algébricos, chegando a uma ideia próxima da álgebra atual. Sob sua ótica, para resolver um problema onde duas grandezas com soma e produto dados, basta chamar tais grandezas de $x$ e $y$ e, por manipulações algébricas, determinar os valores reais de $x$ e $y$. Esse método era chamado por Viète de *analítico*, onde supõe-se que as soluções desconhecidas são conhecidas e, operando-as como tal, chegar nas soluções.

## 1.2 Álgebra: fase moderna ou abstrata

No século XVII ocorreram mudanças importantes na Matemática, em especial na Geometria, após o trabalho desenvolvido por François Viète e seu método analítico. Destacam-se os trabalhos de Reneé Descartes e Pierre de Fermat, que culminaram no que hoje chamamos de geometria analítica.

Um nova consciência surgiu nessa época, que o desenvolvimento técnico poderia melhorar a vida dos homens, o que acabou influenciando o desenvolvimento da Matemática nesse período, pois o

> (...)conhecimento geométrico devia servir a aplicações, desde as mais práticas, como as técnicas para construir mapas, até as mais abstratas, como a teoria da perspectiva, na pintura, e a astronomia.(...). Contra os saberes antigos, permeados por demonstrações estéreis, seria preciso fundar uma nova arte da invenção, que pudesse fornecer novos objetos capazes de servir à Matemática, assim como os objetos técnicos serviam à vida social. Para muitos pensadores, as demonstrações matemáticas não tinham somente o papel de convencer e estabelecer uma certeza, mas deviam, sobretudo, esclarecer a natureza do problema e propor métodos de invenção direta que permitissem resolvê-los. Por isso, eles rejeitavam, por exemplo, a demonstração por absurdo. Neste contexto, os objetos geométricos passavam a ser vistos com novos olhos, pois podiam ser úteis na resolução de problemas práticos.( [28],p. 191-2)

### 1.2.1 A Geometria Analítica de Descartes e Fermat

Para Descartes, o movimento e os fenômenos naturais poderiam ser descritos pela Matemática, através da geometria. Na sua obra *Regras para a direção do espírito* definiu a *Mathesis universalis*, a Matemática Universal, que permitiria reduzir a análise de um fenômeno à problemas relacionados à ordem, através de raciocínios dedutivos. Os problemas geométricos deveriam ser expressos por meio de equações, que permitiriam verificar as proproções nos objetos geométricos, visando resolver problemas de construção geométrica através de uma aplicação aritmética, na qual regras simples de composição levassem à outras mais complexas. Para tal, utilizava o método analítico de Viète.

Em sua obra *Geometria*, Descartes relaciona as cinco operações básicas da aritmética à construções simples com régua e compasso, concluindo que o produto de dois segmentos também pode ser representado por um segmento de reta, e em seguida, estudando as equações quadráticas

$$z^2 = az + b^2 \tag{1.10}$$

$$z^2 = az - b^2 \tag{1.11}$$

Determinando as seguintes soluções. Para (1.10):

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} \tag{1.12}$$

Para (1.11):

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} \tag{1.13}$$

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} \tag{1.14}$$

Em (1.10), a segunda raíz é ignorada por Descartes devido ser negativa.

Apesar de inovar na geometria com o uso utilizando as equações na resolução de problemas geométricos, Descartes ainda era muito ligado ao tradicionalismo matemático, pois não era suficiente a determinação das soluções, era necessário contruí-las geometricamente. Apesar disso, seu grande feito foi a introdução de um sistema de coordenadas para representar equações indeterminadas. Utilizando o método analítico, chamava dois segmentos de reta conhecidos por $x$ e $y$, criando assim um sistema de coordenadas de eixos $x$ e $y$, não necessariamente ortogonais, que solucionava o antigo problema de Pappus:

**Problema 1.1** (de Pappus)**.** *Encontrar o lugar geométrico de um ponto tal que, se segmentos de reta são traçados desde este ponto até três ou quatro retas dadas, formando com elas ângulos determinados, o produto de dois destes segmentos deve ser proporcional ao produto dos outros dois (se há quatro retas) ou ao quadrado do terceiro (se há três retas).*

Utilizando esse sistema de coordenadas, trazia a possibilidade de usar o método algébrico na solução de problemas de Geometria dos mais diversos níveis.

Pierre de Fermat foi fortemente influenciado pelos trabalhos de Apolônio, tanto que seu objetivo a princípio era representar os problemas geométricos tratados por Apolônio com a linguagem algébrica analítica de Viète. Enquanto Descartes considerou o caso de a partir de um lugar geométrico encontrar a equação que seus pontos satisfazem, Fermat fez o caminho oposto: a partir de uma equação, encontrar o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem. No seu livro *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introdução à lugares geométricos planos e sólidos), afirma que sempre quando duas quantidades desconhecidas são encontradas como soluções de uma equação, elas representam um lugar geométrico, descrevendo uma linha reta ou curva. Ele mostrou que uma equação de primeiro grau é satisfeita por pontos que estão sobre uma reta, em seguida mostra que as equações de segundo grau é satisfeita por pontos que estão ou em um círculo ou em uma cônica. Utilizou técnicas algébricas para definir cônicas e analisar suas intesecções,aplicando-as em problemas sólidos.

Com os trabalhos de Descartes e Fermat, a variedade de curvas estudadas aumentou consideravelmente em relação àquelas estudadas na fase antiga, fazendo reaparecer um estudo grego sobre as retas tangentes, como parte do desenvolvimento da geometria analítica, destacando-se Fermat que elaborou um método algébrico para determinar o máximo e mínimo de funções, com o auxílio das retas tangentes.

### 1.2.2 A álgebra de Leibnitz e Newton

A introdução dos símbolos algébricos como ferramenta de estudo da geometria das curvas contribuiu para o desenvolvimento do cálculo diferencial que, com o passar do tempo, foi se tornando mais algébrico do que geométrico, possibilitando a formação dos conceitos de função, derivada, integral e outros tópicos do Cálculo.

Galileu deu início ao estudo dos movimentos, de forma geométrica, influenciado pelos trabalhos de Apolônio e Euclides. Outros matemáticos também se dedicaram ao estudo do movimentos, como Evangelista Torricelli e Isaac Barrow.

Newton considerava os movimentos como base para o estudo das curvas. No seu tratado *O método de Fluxões e Séries Infinitas*, considera uma partícula que descreve uma curva com duas linhas que se movimentam e que representam um sistema de coordenadas. Ele chamava de *fluentes* as quantidades que variavam com o tempo, e a taxa de variação de uma quantidade com o tempo era chamado de *fluxão*. Dessa forma o problema era determinar, dada uma relação entre quantidades de fluentes, a relação entre seus fluxões.

Leibniz também desenvolveu seu cálculo diferencial, mas com bases bem diferentes das de Newton. Ele considerava as variáveis do problema como grandezas que variavam em quantidades infinitamente pequenas. Introduziu a notação $dx$ e $dy$ como a diferença entre esses valores sucessivos. Apesar de Leibniz não ter definido o conceito de derivada através dessa diferença, ele sabia que esta representava o coeficiente angular da reta tangente.

### 1.2.3 A Álgebra Abstrata

Em meados do século XVIII e no século XIX, a matemática passava por uma importante mudança, deixar de representar a quantidade, as grandezas, de estar atrelada aos conceitos geométricos - como é possível de perceber nos trabalhos de Fermat, Leibniz, Descartes e Newton - e passar a não depender do universo sensorial. Um dos trabalhos que contribuíram para essa separação foi o artigo *Sobre os princípios da Geometria*, de Nicolai Lobachevsky, apresentando ao mundo a geometria não-euclidiana - que ele chamava de ”geometria imaginária”. Em 1830, o matemático inglês George Peacock publicou um tratado em álgebra (*Treatise on Algebra*) que buscava dar à ela um tratamento lógico, assim como *Os Elementos*, de Euclides, davam à geometria; o tratado de Peacock tinha a intenção de fazer a álgebra ter o caráter de ciência demonstrativa, pois para ele existiam duas álgebras: a aritmética, que se ocupava dos números, e a simbólica, que se ocupava com a combinação de sinais e símbolos, independente dos valores dos símbolos.

Em 1849, De Morgan, que foi aluno de Peacock, em seu tratado *Trigonometry and double Algebra*, sabia da existência de álgebras diferentes da álgebra aritmética: partindo da álgebra simples dos sistemas numéricos era possível chegar na álgebra dupla dos números complexos, onde as regras de operação permaneciam as mesmas. Apesar de dar um tratamento abstrato à álgebra, fica evidente o uso dos axiomas extraídos da aritmética, o que limitou suas conclusões. Como cita [27]:

> Embora Peacock e De Morgan tenham de fato explicitado o ponto de vista abstrato em álgebra, sua apresentação tem ainda uma limitação. Os axiomas que eles utilizam são aqueles abstraídos

> da aritmética. Eles não perceberam que a escolha poderia ser feita livremente, tornando a álgebra independente da experiência aritmética, tal como a geometria não euclidiana tinha se tornado independente da experiência sensorial, com a adoção de axiomas que não são ”verdades evidente”. ( [27], p. 29)

O desenvolvimento dos números complexos teve um papel importante nesse processo, devido a resolução de equações, o estudo das curvas e o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, impulsionaram a ideia de a álgebra ultrapassar o conceito de quantidade. Nesse contexto, o matemático William Hamilton deu o fundamento definitivo para os números complexos no seu tratado *On Algebra as the Science of Time*, considerando-os como pares ordenados de números reais, aplicando essa definição a vetores e rotações no plano. Nesse mesmo tratado, Hamilton trata a Teoria das Ternas, para trabalhar os vetores no espaço.

Hamilton escrevia suas ternas na forma

$$a + bi + cj \tag{1.15}$$

com $a, b, c$ reais, semelhante ao que era feito com os números complexos no plano. Sua busca era em desenvolver o produto entre duas ternas e representá-lo na mesma forma e que o comprimento do produto de vetores fosse igual ao produto do comprimento dos mesmos, ou seja, tomando duas ternas $a + bi + cj$ e $a' + b'i + c'j$, com $a, a', b, b', c, c'$ reais, temos, respectivamente:

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = x + yi + zj \tag{1.16}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a')^2 + (b')^2 + (c')^2 \tag{1.17}$$

Após estudar por treze anos as ternas, visualizou que, para solucionar o problema, deveria ser inserido mais um termo imaginário, formando o quaterno

$$a + bi + cj + dk \tag{1.18}$$

onde $a, b, c, d$ são números reais e $i, j, k$ são unidades imaginárias tais que

$$ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j, i^2 = j^2 = k^2 = -1 \tag{1.19}$$

Dessa forma, Hamilton mostrou que todos os axiomas de corpo eram satisfeitos. Essa

> ”(...) descoberta teve um papel decisivo no desenvolvimento da Álgebra. Do ponto de vista da abstração crescente que estava então em desenvolvimento, teve a virtude de assinalar que as leis fundamentais sugeridas pelos sistemas até então conhecidos, não eram dados apriorísticos que deviam ser sempre assumidos, uma vez que o conjunto dos quatérnios é o primeiro exemplo conhecido onde a ordem dos fatores altera o produto, i.e., a primeira álgebra não comutativa. Mostrou também claramente a possibilidade de estender ainda mais o conjunto das álgebras conhecidas.” ( [27], p. 36-7)

Logo após dois meses, o matemático John Graves, com quem Hamilton mantinha correspondências sobre o estudo dos imaginários, desenvolveu uma álgebra de dimensão oito, os *octônios*. Independentemente, essa álgebra foi redescoberta por Arthur Cayley, que por esta razão são chamados de *números de Cayley*. O próprio Hamilton desenvolveu um sistema de $n - uplas$ reias: os *hipercomplexos*.

Em 1858, Arthur Cayley, motivado pelo estudo de sistemas não-comutativos, no seu artigo *A Memoir On The Theory of Matrices*, publicou o que hoje chamamos de álgebra matricial. As matrizes surgiram para Cayley das equações

$$X = ax + b \tag{1.20}$$

$$Y = cx + d \tag{1.21}$$

que representam a transformação linear que leva o ponto $(x, y)$ no ponto $(X, Y)$.

Cayley representou essa tranformação pela matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

Apesar de os quatérnios não obterem tanto destaque, pois se revelaram pouco práticos, deram origem ao cálculo vetorial, utilizando termos como *vetor*, *versor* e *escalar*.

Paralelamente a Hamilton, um outro matemático desenvolvia um sistema vetorial, era Herman Ghunter Grassmann, nascido em 1809 na cidade de Stettin, na época pertencente à Prussia, e faleceu na mesma cidade em 1877, mas já como Alemanha. Hoje essa cidade chama-se Szczecin e pertence à Polônia. Em sua obra *Die Lineale Ausdehnundslehre*, trabalhou uma teoria dos hipercomplexos mais geral que a de Hamilton. Mas devido à sua excessiva abstração marcada por expressões filosóficas, fizeram seu trabalho ter fraca representatividade entre os matemáticos da época, pouco contribuindo nos desenvolvimentos posteriores.

A criação da álgebra vetorial moderna é atribuída a Josiah Willard Gibbs e Oliver Heaviside, que de forma independente desenvolveram o sistema que é ensinado atualmente. Gibbs escreveu notas para seus alunos em Yale, que entitulou *Elements of Vector Analysis*, dividida em duas partes: na primeira faz uma simplificação dos quatérnios de Hamilton, destacando a parte escalar e vetorial do produto e trabalhando-as separadamente; a segunda parte é dedicada ao estudo de funções vetoriais lineares, ou seja, aquelas que a função da soma de dois vetores quaisquer é igual a soma das funções de cada vetor. Heaviside publicou em seu livro sobre teoria eletromagnética um capítulo entitulado *The Elements of Vectorial Algebra and Analysis*, desenvolvendo uma álgebra linear semelhante a de Gibbs, diferente em notação apenas. Apesar da semelhança com o trabalho de Gibbs, o fato de Heaviside ter associado sua álgebra vetorial ao eletromagnetismo ajudou a disseminar seu trabalho, uma vez que, na época, esta ciência estava em pleno desenvolvimento.

Analisar esse processo de construção e evolução histórica da Álgebra, desde sua fase verbal até moderna, com seus símbolos e seu tratamento abstrato, nos faz perceber que seu desenvolvimento se deu juntamente ao da humanidade, sendo este um dos desafios para a aprendizagem da Matemática na educação básica: proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história.

# Capítulo 2

# Fundamentação Teórica

Neste capítulo apresentamos os conceitos matemáticos imprescindíveis para o desenvolvimento da proposta deste trabalho de conclusão de curso. Começamos com elementos básicos da álgebra, tais como anéis, domínios e corpos e o teorema do Homomorfismo de anéis. Em seguida, falamos sobre sequências e é feito o estudo do anel dos polinômios, verificando alguns resultados importantes, como o algoritmo da divisão dos polinômios, teorema do resto e do fator e multiplicidade de raízes. Logo após, definimos a função determinante e suas propriedades, a fim de demonstrar a função determinante da matriz de Vandermonde. Seguimos o capítulo discutindo o conceito de interpolação e de interpolação polinomial, mostrando a existência e unicidade do polinômio interpolador e,finalmente, apresentaremos o método de interpolação de Lagrange.

## 2.1 Anéis

**Definição 2.1.** *( [20], p.10) Um anel é um conjunto A, denotado $(A, +, \cdot)$, cujos elementos podem ser adicionados e multiplicados (i.e., são dadas duas operações $(x, y) \to x + y$ e $(x, y) \to x \cdot y$ aos pares de elementos de A em A) satisfazendo as seguintes condições.*

*(1)* $\forall\, x, y \in A,$ *temos* $x + y = y + x$

*(2)* $\forall\, x, y, z \in A,$ *temos* $(x + y) + z = x + (y + z)$

*(3) Existe um elemento* $e = 0 \in A$ *tal que* $x + e = x + 0 = x,\ \forall\, x \in A$. *Este é chamado de elemento neutro da adição.*

*(4) Para todo elemento* $x \in A$ *existe um elemento* $y = -x$ *tal que* $x + y = x + (-x) = 0$. *Este é chamado de simétrico de* $x$.

*(5)* $\forall\, x, y, z \in A,$ *temos* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

*(6)* $\forall\, x, y, z \in A,$ *temos* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad$ *e* $\quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + y \cdot z$

Pode-se perceber que a multiplicação não é necessariamente comutativa. Quando isso acontece, o anel A é chamado de *anel comutativo*. Nota-se também que um anel não precisa ter um elemento neutro multiplicativo, ou seja, um elemento $y \in A$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = x$ para todo $x \in A$; quando o anel A possuir tal elemento, este será chamado de *unidade do anel* e denotado por 1, e o anel A será chamado de *anel com unidade*.

Os elementos não nulos de um anel A não necessitam possuir inversos multiplicativos, i.e., existe um elemento $y \in A$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = 1$. Os elementos de um anel que possuem inversos multiplicativos são chamados de *invertíveis de A* ou *unidades de A*. Denota-se por $U(A) = \{x \in A \mid x \text{ é uma unidade de A}\}$.

**Exemplo 2.1.** *Os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, e $\mathbb{C}$ são anéis comutativos com unidade, com as operações de adição e multiplicação usuais.*

**Teorema 2.1.** *Sejam x, y e z elementos de um anel A, então:*

*(a) Vale a lei do cancelamento para a soma, ou seja, $x + y = x + z$ então $y = z$.*

*(b) o elemento neutro da adição é unico.*

*(c) o inverso aditivo é único.*

*(d) o elemento neutro da multiplicação é único.*

*(e) o inverso multiplicativo é único.*

*Demonstração.* (a) Adicionando o simétrico de $x$ a ambos os membros da igualdade, segue o resultado.

(b) Suponha que existam dois elementos neutros, $e_1$ e $e_2$. Pela definição de elemento neutro, segue que $e_1 = e_1 + e_2 = e_2$.

(c) Suponha que $x$ possua dois inversos aditivos, $x_1$ e $x_2$. Então $x + x_1 = x + x_2 = 0$. Segue do cancelamento que $x_1 = x_2$.

(d) Suponha que existam duas unidades em A: $1$ e $b$. Pela definição de unidade teremos $1 = 1 \cdot b = b$.

(e) Suponha que o elemento $x$ tenha dois inversos multiplicativos, $y_1$ e $y_2$. Assim $y_1 \cdot x = x \cdot y_1 = x \cdot y_2 = y_2 \cdot x = 1$ e $y_1 = y_1 \cdot 1 = y_1 \cdot x \cdot y_2 = 1 \cdot y_2 = y_2$, utilizando a associatividade da multiplicação.

□

**Definição 2.2.** *Seja $A$ um anel. Um elemento $a \in A$, $a \neq 0$ é um* ***divisor de zero à esquerda*** *(**divisor de zero à direita**) de $A$ se existe $b \neq 0$ em $A$ tal que $a \cdot b = 0$ ($b \cdot a = 0$).*

**Exemplo 2.2.** *( [13], p.4) Seja $A = M_2(\mathbb{Z})$, a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é um divisor de zero à esquerda pois*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*mas*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

*Isso não implica que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ não é um divisor de zero à direita, pois*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Definição 2.3.** *Um **domínio**, ou um **anel de integridade**, é um anel comutativo com unidade, sem divisores de zero. Em outras palavras, se $(A, +, \cdot)$ é um anel comutativo com unidade, para todos $a, b \in A$, se $a \cdot b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.*

**Exemplo 2.3.** *Os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, e $\mathbb{C}$ são domínios, com as operações usuais de adição e multiplicação.*

**Teorema 2.2** (Cancelamento)**.** *( [20], p.15) Sejam $a, b$ e $c$ pertencentes a um domínio $A$. Se $a \neq 0$ e $ab = ac$, então $b = c$.*

*Demonstração.* De $ab = ac$ temos $a(b - c) = 0$, e como $a \neq 0$ e estamos num domínio, então $b - c = 0 \Rightarrow b = c$. □

**Definição 2.4.** *( [20], p.15) Um anel comutativo com unidade é chamado de **corpo** se todo elemento não nulo é uma unidade.*

A definição anterior é equivalente a dizer que todo elemento não nulo do anel $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ possui inverso.

**Exemplo 2.4.** *O anel dos inteiros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não é um corpo, pois apenas os elementos $1$ e $-1$ são invertíveis. Já os anéis $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são corpos.*

**Definição 2.5** (Homomorfismo de anéis)**.** *( [13], p.15) Sejam $(A, +, \cdot)$ e $(B, \oplus, \odot)$ anéis. Uma função $\varphi : A \to B$ é um **homomorfismo de anéis** se, para todo $a, b \in A$, temos:*

$$\begin{aligned} \varphi(a + b) &= \varphi(a) \oplus \varphi(b) \\ \varphi(a \cdot b) &= \varphi(a) \odot \varphi(b) \end{aligned} \tag{2.1}$$

**Exemplo 2.5.** *A função $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $p(a, b) = a$ (chamada de **projeção**) é um homomorfismo de anéis. Realmente:*

$$p((a, b) + (c, d)) = p(a + c, b + d) = a + b = p(a, b) + p(c, d)$$

*e*

$$p((a, b) \cdot (c, d)) = p(ac, bd) = ab = p(a, b) \cdot p(cd)$$

## 2.2 Sequências

Seja $A$ um anel. Denotaremos por $A^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ a valores em $A$, isto é, cada elemento de $A^{\mathbb{N}}$ é uma sequência infinita

$$(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \tag{2.2}$$

**Exemplo 2.6.** *A sequência $(a_n) = (0, 1, 5, 19, ...)$, ou seja, $a_n = 3^n - 2^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.*

**Exemplo 2.7.** *A sequência $(a_n) = (1, 2, 6, 24, 120, 720, ...)$, isto é, $a_n = n!,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.*

**Definição 2.6.** *( [31], p.1) Dadas as sequências $(a_n),\ (b_n)\ \in \mathbb{N}$, temos a soma dada por*

$$\begin{aligned} (a_n) + (b_n) &= (a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots) \\ &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots) = (a_n + b_n), \end{aligned} \tag{2.3}$$

*e o produto*

$$(a_n) \cdot (b_n) = (c_n) \tag{2.4}$$

*por*

$$\begin{cases} a_0 b_0 = c_0 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = c_1 \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = c_2 \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i = c_n \\ \vdots \end{cases} \tag{2.5}$$

Apesar de tanto $(a_n)$ como $(b_n)$ serem sequências infinitas, a nova sequência $(c_n)$, mesmo sendo infinita, é definida utilizando, para cada $n$, apenas um número finito de valores: $a_0, \ldots, a_n$ e $b_0, \ldots, b_n$. A sequência nula $(0, \ldots, 0)$ funciona como o elemento neutro da adição e $-(a_n) = (-a_n)$, como o negativo de cada sequência.

**Proposição 2.1.** *( [31], p.2)$A^{\mathbb{N}}$ é um anel comutativo e com unidade com as operações (2.3) e (2.4).*

*Demonstração.* Apresentemos logo $1 = (1, 0, 0, \ldots)$. Verifiquemos a distributividade do produto em relação à soma. São dadas as sequências $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ e $z = (z_n)$. Calculemos o termo geral de $(w_n) = ((x_n) + (y_n)) \cdot (z_n)$. Temos

$$w_n = \sum_0^n (x_i + y_i) z_{n-i} = \sum_0^n (x_i z_{n-i} + y_i z_{n-i}) = (x_n) \cdot (z_n) + (y_n) \cdot (z_n).$$

Agora vejamos a associatividade como se estabelece:

$$\begin{aligned} ((x \cdot y)) \cdot z &= \sum_{i=0}^{n} (x \cdot y)_i z_{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left( \sum_{j=0}^{i} x_j y_{i-j} \right) z_{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} x_j y_{i-j} z_{n-i} \\ &= \sum_{j=0}^{n} x_j \sum_{i=0}^{n-j} y_i z_{n-i-j} = \sum_{j=0}^{n} x_j (y \cdot z)_{n-j} \end{aligned}$$

□

**Proposição 2.2.** *( [13], p.61) A função $\varphi : A \to A^{\mathbb{N}}$, definida por $\varphi(a) = (a, 0, 0, \ldots), \ \forall \ a \in A$, é um homomorfismo de anéis.*

*Demonstração.* De fato, para todos $a, b \in A$, temos:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \text{ pois } (a + b, 0, 0, \ldots) = (a, 0, 0, \ldots) + (b, 0, 0, \ldots)$$

e

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \text{ pois } (a \cdot b, 0, 0, \ldots) = (a, 0, 0, \ldots) \cdot (b, 0, 0, \ldots) = (c_0, c_1, \ldots),$$

onde $c_0 = a \cdot b, \ c_1 = a \cdot 0 + 0 \cdot b$ e $c_i = 0$ para todo $n \geq 1$, pois por (2.5) e, $i + j \geq 1$, implica que $i \geq 1$ ou $j \geq 1$, ou seja, $a_i = 0$ ou $b_j = 0$. Portanto, $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$. □

Dessa forma, podemos associar todo elemento $a \in A$ com as sequências $(a, 0, 0, \ldots) \in A^{\mathbb{N}}$, o que nos garante que $A \subseteq A^{\mathbb{N}}$.

## 2.3 Anel dos polinômios

**Definição 2.7.** *Seja*

$$
\begin{aligned}
& p : A^{\mathbb{N}} \\
& i \to p(i) := p_i
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

*uma sequência em $A$. Se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p(i) = 0$ para todo $i > n$, dá-se o nome de* ***polinômio*** *a essa sequência, onde os termos $p(i) := p_i$ são ditos coeficientes do polinômio. Denota-se por $A[x]$ o conjuntos dos polinômios com coeficientes no anel $A$.*

*A sequência $(0, 0, 0, \ldots)$ é o polinômio nulo de $A[x]$, assim como as sequências $(1, 0, 0, \ldots)$ e $(a, 0, 0, \ldots)$ representam, em $A[x]$, o polinômio identidade e o polinômio constante, respectivamente.*

**Definição 2.8.** *Considere a sequência*

$$x = (0, 1, 0, 0, \ldots). \tag{2.7}$$

*O produto de $x$ por si mesmo $n$ vezes será denotado por $x^n$ e adotaremos $x^0 = 1$. Desta forma*

$$
\begin{aligned}
x^2 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots) \\
x^3 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots) \\
x^4 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots).
\end{aligned}
$$

*De maneira geral, temos que $x^n$ é uma sequência onde, para cada inteiro $k \geq 0$, temos$(x^k)_n = 0$ e $(x^k)_k = 1$, para todo inteiro não negativo $n \neq k$.*

Segue da proposição 2.2 e da definição 2.7:

$$
\begin{aligned}
& (0, a_1, 0, \ldots) \cdot (0, b_1, 0, \ldots) = (0, 0, a_1 \cdot b1, 0, \ldots),\ \forall a_1, b_1 \in A \\
& (0, a_1, 0, \ldots) \cdot (0, 0, b_2, \ldots) = (0, 0, 0, a_1 \cdot b_2, \ldots), \forall\ a_1, b_2 \in A \\
& \vdots \\
& (0, \ldots, 0, a_i, 0, \ldots) \cdot (0, \ldots, 0, b_j, 0, \ldots) = (0, \ldots, 0, a_i \cdot b_j, 0, \ldots), \forall\ a_i, b_j \in A
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Sendo assim, com as notações da definição 2.8,

$$
\begin{aligned}
& (a_0, 0, 0, 0, \ldots) \longleftrightarrow a_0 x^0 \\
& (0, a_1, 0, 0, \ldots) \longleftrightarrow a_1 x \\
& (0, 0, a_2, 0, \ldots) \longleftrightarrow a_2 x^2 \\
& \vdots \\
& (0, \ldots, 0, a_i, 0, \ldots) \longleftrightarrow a_i x^i,
\end{aligned}
$$

obtemos para $(a_n) \in A[x]$:

$$\begin{aligned}
(a_n) &= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots) \\
&= (a_0, 0, 0, \ldots) + (0, a_1, 0, \ldots) + (0, 0, a_2, \ldots) + \ldots + (0, 0, 0, \ldots, a_n, 0, \ldots) \\
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_ix^i + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Como $a_i = 0$ quase sempre, temos que existe um $n \geq 0$ tal que $a_i = 0$, para todo $i > n$. Assim, podemos escrever toda sequência de $A[x]$ na forma

$$(a_n) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i. \qquad (2.10)$$

Portanto

$$A[x] = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n; a_i \in A, n \geq 0\right\} \qquad (2.11)$$

O polinômio $x$ chama-se *indeterminada* sobre A, e assim, todo elemento $p \in A[x]$ onde $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ é dito *polinômio na indeterminada x com coeficientes em A.* O polinômio $p$ pode ser representado por $p(x)$.

**Definição 2.9.** *( [13], p.63) Seja A um anel comutativo e $A[x]$ o anel dos polinômios com coeficiente em A. Seja $p \in A[x]$, $p \neq 0$, $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, com $a_n \neq 0$, então o **grau** de p é definido por $\partial(p) = n$ e $a_n$ é dito ser o **coeficiente dominante** de p.*

Dizemos que o polinômio é *mônico* se seu coeficiente dominante for igual a 1.

**Teorema 2.3.** *( [13], p.63) Se $p_1, p_2 \in A[x]$ são não nulos, então $\partial(p_1+p_2) \leq max\,\{\partial(p_1), \partial(p_2)\}$ e $\partial(p_1 \cdot p_2) \leq \partial(p_1) + \partial(p_2)$. Se A é um domínio, então $\partial(p_1 \cdot p_2) = \partial(p_1) + \partial(p_2)$.*

*Demonstração.* Se $p_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ e $p_2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$, com $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ e $n \leq m$, temos

$$p_1 + p_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \ldots + b_mx^m,$$

o que implica que $\partial(p_1 + p_2) \leq m = \max\{n, m\}$, e

$$p_1 \cdot p_2 = c_0 + c_1x + \ldots + c_{n+m}x^{n+m}, \text{onde} c_{n+m} = \sum_{i+j=n+m} = a_n \cdot b_m,$$

ou seja, $\partial(p_1 \cdot p_2) \leq n + m$.

Se A é um domínio, com $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, temos que $c_{n+m} = a_n \cdot b_m \neq 0$, o que mostra que $\partial(p_1 \cdot p_2) = n + m = \partial(p_1) + \partial(p_2)$. □

Muitas propriedades de $A$ são levadas para $A[x]$. O teorema anterior temos que se $p_1 \neq 0$ e $p_2 \neq 0$, então $p_1 \cdot p_2 \neq 0$. Isso nos garante o corolário a seguir.

**Corolário 2.1.** *Se $A$ é um domínio então $A[x]$ é um domínio.*

**Exemplo 2.8.** *Como todo corpo $K$ é um domínio, então $K[x]$ (os polinômios sobre o corpo K na indeterminada x) também é um domínio.*

**Definição 2.10.** *( [26], p.47) Sejam A um anel e $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ um polinômio com coeficientes em A. Definimos*

$$\begin{aligned} & f_p : A \to A \\ & c \to a_0 + a_1c + \ldots + a_nc^n. \end{aligned} \tag{2.12}$$

*Trata-se de uma aplicação de $A$ em $A$, usualmente denominada por* ***função polinomial definida por p****. Para $c \in A$, escreve-se $p(c)$ em vez de $f_p(c)$.*

Que não se confunda o conjunto $A[x]$ dos polinômios com com coeficientes em um anel $A$ com o conjunto $\mathcal{F}_p$ das funções polinomiais em A. Na expressão $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ os símbolos $x, x^2, \ldots, x^n$ não representam variáveis do anel $A$; sua finalidade é apenas servir como lugares convenientes para separar os elementos de A.

**Definição 2.11.** *( [26], p.47) Sejam $A$ um anel e $p(x) \in A[x]$. Um elemento $\alpha \in A$ diz-se* ***raiz do polinômio p(x)*** *se $p(\alpha) = 0$, isto é, $\alpha$ é um zero da função polinomial $f_p : A \to A$.*

**Teorema 2.4** (algoritmo da divisão para polinômios)**.** *( [20], p.36) Sejam $F$ um corpo, $f(x)$ e $g(x) \in F[x]$, com $g(x) \neq 0$. Então existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ em $F[x]$ tais que $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ com $r(x) = 0$ ou $\partial\left(r(x)\right) < \partial\left(g(x)\right)$. Tais $q(x)$ e $r(x)$ são únicos.*

*Demonstração.* Mostraremos separadamente a existência e a unicidade.

*Existência* - Se $f(x) = 0$ ou $\partial(f) < \partial(g)$ nós colocamos $q(x) = 0$ e $r(x) = f(x)$. Então vamos assumir que $\partial(f) = n > m = \partial(g)$.

Sejam $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ e $g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0$. Por indução sobre $n$ assumiremos que o resultado vale para todo polinômio de grau menor do que $n$ e mostraremos que vale para $f$.

Se $\partial(f) = 0$, $f$ e $g$ são constantes em F, tome $q(x) = f/g$ e $r(x) = 0$.

Vamos supor agora que $\partial(f) > 0$. Então $a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x)$ é um polinômio de grau $n$ com coeficiente dominante $a_nb_m$. Logo $f(x) - a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x) = f_1(x)$. Então $f_1(x) = 0$ ou $\partial(f_1) < \partial(f)$.

Por hipótese de indução, existem $q_1$ e $r_1 \in F[x]$ tais que

$$f_1(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$$

onde $r_1 = 0$ ou $\partial(r_1) < \partial(g)$. Assim

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) + f_1(x) \\ &= a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) + g(x) q_1(x) + r_1(x) \\ &= \left[ a_n b_m^{-1} x^{n-m} + q_1(x) \right] g(x) + r_1(x), \end{aligned}$$

e esta parte do teorema está provada.

*Unicidade* - Suponhamos $f(x) = q_0(x)g(x) + r_0(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$ onde $r_i = 0$ ou $\partial(r_i) = \partial(g)$, com $i = 0, 1, 2$. Subtraindo as duas equações temos que

$$0 = g(x)(q_0(x) - q_1(x)) + (r_0(x) - r_1(x))$$

ou

$$r_1(x) - r_0(x) = g(x)(q_0(x) - q_1(x))$$

Como $\partial(r_1(x) - r_0(x)) < \partial(g)$ e $g(x)$ divide $r_1(x) - r_0(x)$, isto só é possível se $r_1(x) = r_0(x)$. Assim $r_1 = r_0$ e $q_1(x) = q_0$. □

Os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ são chamados, respectivamente, de *quociente* e *resto* da divisão.

**Teorema 2.5** (do resto)**.** *( [26], p.56) Seja $F$ um corpo. Se $f(x) \in F[x]$ e $a \in F$ então o resto da divisão de $f(x)$ pelo polinômio $x - a$ é $f(a)$.*

*Demonstração.* Pelo teorema 2.4, existem $q(x),\ r(x) \in F[x]$ tais que

$$f(x) = (x - a)q(x) + r(x)$$

com $\partial(x - a) > \partial(r)$. Como $\partial(x - a) = 1$, temos que $r(x)$ é uma constante. Pela definição 2.10, obtemos

$$f(a) = (a - a)q(a) + r(a)$$

onde $f(a) = r(a)$. Como $r(x)$ é uma constante, concluímos que

$$r(x) = r(a) = f(a).$$

□

**Teorema 2.6** (do fator)**.** *( [20], p.37) Seja F um corpo, $a \in F$ e $f(x) \in F[x]$. Então $a$ é raiz de $f$ se e somente se $x - a$ é fator de f, i.e., $x - a$ divide $f(x)$ se e somente se $f(a) = 0$.*

*Demonstração.* Consequência imediata do teorema 2.5, visto que $x-a$ divide $f(x)$ se e somente se o resto da divisão de $f(x)$ por $x - a$ é $0$. □

**Definição 2.12.** *( [20], p.37) Quando $F$ é um corpo, $a \in F$ e $f(x) \in F[x]$, nós dizemos que $a$ é uma* ***raiz de multiplicidade k*** *se $(x - a)^k$ divide $f$ mas $(x - a)^{k+1}$ não divide $f$.*

**Corolário 2.2** (polinômios de grau $n$ tem no máximo $n$ raízes)**.** *Seja $F$ um corpo e $f(x) \in F[x],\ \partial(f) = n$. Então $f(x)$ tem no máximo $n$ raízes distintas.*

*Demonstração.* Provemos através de indução sobre $n$.

Se $n = 0$, então $f(x)$ é o polinômio constante, segue que $f(x)$ não tem raiz.

Se $n = 1$, suponhamos $f(x) = a_0 + a_1x,\ a_1 \neq 0$; sendo $\alpha,\ \beta \in F$ raízes de $f(x)$, então

$$\begin{aligned} f(\alpha) = f(\beta) = 0 \quad &= \quad a_0 + a_1\alpha = a_0 + a_1\beta \\ &\Rightarrow \quad a_1\alpha = a_1\beta \\ &\Rightarrow \quad a_1(\alpha - \beta) = 0, \end{aligned}$$

no corpo F. Logo,

$$\alpha - \beta = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \beta$$

Portanto, $f(x)$ tem no máximo uma raiz.

Suponhamos que o resultado seja válido para todo polinômio de grau $n > 1$. Seja $f(x)$ um polinômio de grau $n+1$ e seja $\alpha$ uma raiz de $f(x)$, então, pelo teorema 2.6, o polinômio $x - \alpha$ divide $f(x)$ e existe $g(x)$ tal que

$$f(x) = (x - \alpha)g(x).$$

Portanto, $g(x)$ tem grau $n$. Seja $\beta \neq \alpha$ também uma raiz de $f(x)$, então

$$f(\beta) = 0 = (\beta - \alpha)g(\beta),$$

de onde, no corpo F, $g(\beta) = 0$, o que implica que $\beta$ é raiz de $g(x)$. Dessa forma, todas as ráizes distintas de $\alpha$ de $f(x)$ são raizes de $g(x)$, também distintas de $\alpha$, e como por hipótese de indução $g(x)$ tem no máximo $n$ raízes distintas, $f(x)$ terá no máximo $n+1$ raízes distintas. Fica demonstrado por indução sobre $n$. □

## 2.4 Função determinante

Seja $K$ um corpo e seja $n$ um número natural, com $n \geq 2$. Denotaremos por $\mathcal{M}_K(n)$, ou simplesmente $\mathcal{M}(n)$, o conjunto das matrizes quadradas de ordem $n$ sobre o corpo $K$.

Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}(n)$, representaremos por $A_1, \ldots, A_n \in K^n$ as linhas de $A$. Assim, escrevemos

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

**Definição 2.13.** *Seja uma função $D : \mathcal{M}(n) \to K$ que associa a cada matriz $A \in \mathcal{M}(n)$ um escalar $D(A) \in K$, que possui as seguintes propriedades:*

*(P1) $D$ é uma função linear de cada linha separadamente, ou seja, $D$ é uma função linear da $j-$ésima linha quando as outras $(n-1)$ linhas são mantidas fixas. Dessa forma, se $A_j = A'_j + tA''_j$, onde $A'_j$ e $A''_j$ pertencem à $\mathcal{M}(n)$ e $t \in K$:*

$$D\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A'_j + tA''_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A'_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + tD\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A''_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

*(P2) Se duas linhas adjacentes $A_j$ e $A_{j+1}$ são iguais, então $D(A) = 0$.*

*(P3) Se $I_n$ representa a matriz identidade de $\mathcal{M}(n)$, então $D(I_n) = 1$.*

*À função $D$ dá-se o nome de **função determinante** ou **determinante**.*

**Exemplo 2.9.** *Sejam $K$ um corpo e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(2)$. A função $D : \mathcal{M}(2) \to K$ tal que*

$$D(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{2.13}$$

*é função determinante.*

**Exemplo 2.10.** *Sejam $K$ um corpo e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(3)$. A função $D : \mathcal{M}(3) \to K$ tal que*

$$D(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{2.14}$$

*é função determinante.*

**Proposição 2.3.** *( [18], p.189) Seja $j$ um número natural com $1 \leq j \leq n-1$. Se $A'$ é a matriz obtida de $A$ por meio de uma transformação elementar $L_j \leftrightarrow L_{j+1}$, então $D(A') = -D(A)$.*

*Demonstração.* Considere a matriz $B$ tal que $B_j = B_{j+1} = A_j + A_{j+1}$ e $B_i = A_i$, se $i \neq j$ e $i \neq j+1$.

Da propriedade $(P2)$ temos que $D(B) = 0$. Da propriedade $(P1)$ (utilizada duas vezes), obtemos a igualdade

$$0 = D(B) = D\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + D\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + D\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{j+1} \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + D\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{j+1} \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

da qual segue o resultado, pois sabemos que, por $(P2)$,

$$D\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{j+1} \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = 0.$$

□

**Corolário 2.3.** *( [18], p.190) Se $A$ é uma matriz com duas linhas iguais, então $D(A) = 0$.*

*Demonstração.* Com uma troca de linhas, podemos transformar a matriz $A$ em uma matriz $A'$ com duas linhas adjacentes iguais. Logo, pela proposição 2.3 e pela propriedade $(P2)$, temos que $D(A) = \pm D(A') = 0$. □

**Corolário 2.4.** *( [18], p.190) Se $A'$ é a matriz obtida de $A$ por meio de uma transformação elementar $L_i \leftrightarrow L_j$, $i, j = 1, \dots, n$, com $i \neq j$, então $D(A') = -D(A)$.*

*Demonstração.* Usando a mesma ideia da prova da proposição 2.3, considerando neste caso a matriz $B$ tal que $B_i = B_j = A_i + A_j$ e $B_k = A_k$, se $k \neq i, j$, obtemos o resultado com o auxílio do corolário 2.3. □

**Corolário 2.5.** *( [18], p.190) Se uma matriz $A'$ é obtida de uma matriz $A$ na qual somamos a uma linha um múltiplo de outra, mantendo as demais inalteradas, então $D(A') = D(A)$.*

*Demonstração.* Para $i < j$, sejam

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + tA_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Temos pela propriedade $(P1)$ que

$$D(A') = D(A) + tD(A''), \tag{2.15}$$

onde

$$A'' = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Pelo corolário 2.3, temos que $D(A'') = 0$, portanto $D(A') = D(A) + t \cdot 0 = D(A)$. $\square$

**Corolário 2.6.** *( [18], p.191) Se uma matriz $A'$ é obtida de uma matriz $A$ na qual somamos a uma linha uma combinação linear de outras, mantendo as demais inalteradas, então $D(A') = D(A)$.*

*Demonstração.* Para $i < j < k$, sejam

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + t'A_j + t''A_k \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Utilizando repetidas vezes o corolário 2.5, obtemos o resultado. $\square$

**Corolário 2.7.** *Se uma das linhas de uma matriz $A$ é combinação linear das demais, então, $D(A) = 0$.*

*Demonstração.* Para $i = 1, \ldots, n$ e $A_i = t_1A_1 + \ldots + t_jA_j + \ldots + t_nA_n$, com $t_j \in K$ e $j \neq i$, sejam

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ t_1A_1 + \ldots + t_jA_j + \ldots + t_nA_n \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Dos corolários 2.6 e 2.3, segue que $D(A) = D(A') = 0$. $\square$

### 2.4.1 Matriz de Vandermonde

**Definição 2.14.** *Chamamos de* ***matriz de Vandermonde*** *a matriz* $M = [a_i] \in \mathcal{M}(n)$ *onde*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Notemos que os expoentes dos elementos da matriz vão de $0$ a $n-1$, de forma que os elementos descrevem uma progressão geométrica em cada linha que estão posicionados. Os elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$ são ditos elementos característicos da matriz. A transposta dessa matriz também é dita de Vandermonde.

**Definição 2.15.** *Seja* $V : \mathcal{M}(n) \to K$ *tal que, para* $i < j$,

$$D(V) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_j - a_i). \tag{2.17}$$

*Essa função é chamada de* ***determinante de Vandermonde de ordem n***.

*Demonstração.* A demonstração será feita por indução sobre $n$.

Para $n = 2$ o resultado segue da igualdade 2.13:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \Rightarrow D(V) = a_2 - a_1$$

Suponhamos então que a função 2.17 seja válida para uma matriz $M$ de ordem $n-1$. Vamos provar sua validade para uma matriz de ordem $n$, tal qual a descrita em 2.16.

Utilizando o corolário 2.5 repetidas vezes e da seguinte forma, a partir da linha de índice $n$: adiciona-se à linha de índice $n$, a linha de índice $n-1$ multiplicada por $-a_1$; em seguida adiciona-se à linha de índice $n-1$, a linha de índice $n-2$ multiplicada por $-a_1$. O processo segue até a linha de índice 2, onde adiciona-se à mesma a linha de índice 1 multiplicada por $-a_1$, obtendo o determinante equivalente

$$D(V) = D \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 - a_1 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_1^2 - a_1^2 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} - a_1^{n-2} & a_2^{n-2} - a_1 a_2^{n-3} & \dots & a_n^{n-2} - a_1 a_n^{n-3} \\ a_1^{n-1} - a_1^{n-1} & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Reduzindo o determinante 2.18 a termos semelhantes, temos

$$D(V) = D\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-3}(a_n - a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{bmatrix}$$

Aplicando o Teorema de Laplace [1] na primeira linha obtemos o determinante

$$D(V) = D\begin{bmatrix} a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-3}(a_n - a_1) \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{bmatrix}$$

Podemos perceber que cada coluna é um múltiplo de um termo constante $(a_i - a_1)$, com $2 \leq i \leq n$. Evidenciando todos esses termos, obtemos

$$D(V) = \prod_{2 \leq i \leq n} (a_i - a_1) D' \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-3} & \dots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Na igualdade 2.19, o determinante

$$D' \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-3} & \dots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

é de ordem $n - 1$ e, por hipótese de indução, é dado por

$$D' = \prod_{2 \leq i \leq j \leq n} (a_j - a_i)$$

[1] Para uma demonstração do Teorema de Laplace, verificar [21], p. 59 - 65

Portanto
$$D(V) = \prod_{2\leq i\leq n}(a_i - a_1)\prod_{2\leq i\leq j\leq n}(a_j - a_i) = \prod_{1\leq i\leq j\leq n}(a_j - a_i)$$
Assim, por indução sobre n, o determinante de Vandermonde vale para toda matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. $\square$

## 2.5 Interpolação

Quando temos um conjunto discreto de pontos de uma função, mas desconhecemos sua expressão, e queremos analisar um valor intermediário deste conjunto discreto, ou quando conhecemos a expressão de uma função, mas para derivar e integrar essa função é um trabalho complicado, podemos utilizar a interpolação para resolver tais problemas.

Interpolar uma função significa aproximá-la através de uma outra função, escolhida em uma classe de funções previamente definidas tais que $f(x_i) = y_i = g(x_i)$.

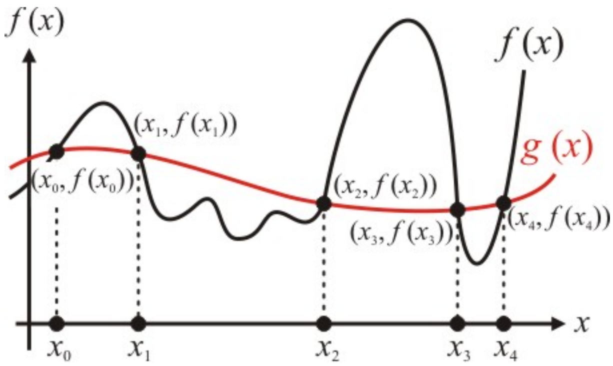


Figura 2.1: Interpolação de uma função $f(x)$ por outra função $g(x)$.[2]

**Definição 2.16** (Problema geral da interpolação)**.** *Dada uma sequência de $n$ reais $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, um conjunto de pontos $\{(x_i, y_i) \in I \times \mathbb{R}\}_{i=1}^{n}$, onde $I = [x_1, x_n]$ e uma família de funções $\mathcal{F}_I = \{\phi : I \to \mathbb{R}\}$, encontrar uma função $f \in \mathcal{F}_I$ tal que, para cada $1 \leq i \leq n$,*

$$f(x_i) = y_i. \tag{2.20}$$

Chamamos a função $f$ de **função interpoladora** dos pontos dados ou que $f$ **interpola** os pontos dados.

**Exemplo 2.11.** *( [16], p.166) Um dos problemas mais simples de interpolação consiste em encontrara a equação da reta que passa por dois pontos dados. Por exemplo, sejam dados o conjunto de pontos $(1, 1), (2, 2)$ e a família de funções $\mathcal{F}_{[1,2]}$:*

$$\mathcal{F}_{[1,2]} = \{f : [1, 2] \to \mathbb{R}\ ;\ x \in [1, 2],\ x \to f(x) = a + bx\} \tag{2.21}$$

[2]https://www.obaricentrodamente.com/2011/03/interpolacao-polinomial-parte-1.html, acesso em 16/04/2018.

*Para que uma função $f \in \mathcal{F}_{[1,2]}$ seja a função interpoladora no conjunto de pontos dados, precisamos que*

$$\begin{cases} a + bx_1 = y_1 \\ a + bx_2 = y_2 \end{cases} \tag{2.22}$$

*ou seja,*

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a + 2b = 2 \end{cases} \tag{2.23}$$

*o que nos fornece $a = 0$ e $b = 1$, logo a função interpoladora $f$ é tal que $f(x) = x$ , para todo $x \in [1, 2]$.*

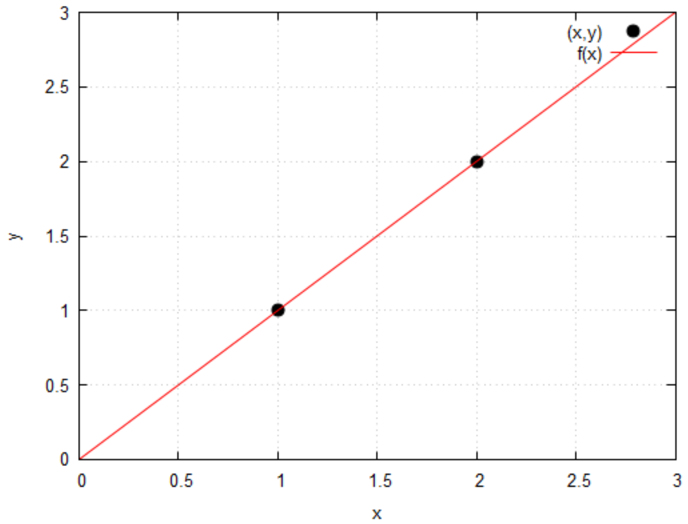


Figura 2.2: Função interpoladora $f(x) = x$.

### 2.5.1 Interpolação polinomial

A utilização dos polinômios na interpolação de funções deve-se ao fato de que estes são mais fáceis de derivar e integrar, pois também são polinômios. De forma análoga a definição 2.16 podemos seguir com os polinômios, sendo agora $\mathcal{F}_I$ a família de funções polinomiais.

**Definição 2.17.** *( [8], p.1) Dado um conjunto de $n + 1$ pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, com $x_i \neq x_j$, para todo $i \neq j$, e um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, dizemos que $p(x)$ é um* ***polinômio de interpolação*** *dos pontos dados se $p(x_i) = y_i$, para todo $i = 0, 1, \ldots, n$.*

Os pontos $(x_i, y_i)$ são ditos **nós de interpolação**.

Podemos verificar que esse polinômio é perfeitamente definido, i.e., seus coeficientes são determinados, resolvendo o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{c} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_1 = y_1 \\ \vdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \ldots + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{array}\right. \tag{2.24}$$

que é um sistema possível e determinado, pois, escrevendo 2.24 na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

podemos notar que a matriz dos coeficientes, formada pelos $x_i$, é a matriz de Vandermonde, que tem determinante diferente de zero pois $x_i \neq x_j$, para todo $i \neq j$.

Dependendo da quantidade de nós de interpolação utilizados, resolver o sistema linear 2.24 demanda muito trabalho, e pode levar a alguns erros. Para uma maneira mais rápida de encontrar o polinômio de interpolação, podemos utilizar os polinômios interpoladores de Lagrange.

**Definição 2.18.** *( [8], p.3) Sejam $n+1$ pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, com $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$. O* ***polinômio de interpolação de Lagrange*** *é dado por*

$$L(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x) \tag{2.26}$$

*onde*

$$l_j(x) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \cdot \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_j - x_n} \tag{2.27}$$

*Demonstração.* Dados os nós de interpolação $(x_i, y_i)$, mostraremos que $L(x_i) = y_i$, i.e, que

$$l_j(x_i) = \left\{\begin{array}{l} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{array}\right. \tag{2.28}$$

De fato, para $i = j$, temos

$$l_i(x_i) = \frac{x_i - x_0}{x_i - x_0} \cdots \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x_i - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x_i - x_n}{x_i - x_n} = 1.$$

Para $i \neq j$

$$l_j(x_i) = \frac{x_i - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x_i - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \cdot \frac{x_i - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \cdots \frac{x_i - x_n}{x_j - x_n} = 0,$$

pois $k \neq j$, mas para algum $k$, $k = i$ então

$$\frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} = \frac{x_i - x_i}{x_j - x_i} = 0.$$

Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} L(x_i) &= \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x_i) \\ &= y_0 l_0(x_i) + \ldots + y_{i-1} l_{i-1}(x_i) + y_i l_i(x_i) + y_{i+1} l_{i+1}(x_i) + \ldots + y_n l_n(x_i) \\ &= 0 + \ldots + 0 + y_i \cdot 1 + 0 + \ldots + 0 = y_i. \end{aligned}$$

Portanto, $L(x_i) = y_i$, para todo $i$. □

**Exemplo 2.12.** *Determinar $f \in \mathcal{F}_{[0,2]}$ sabendo que $f(0) = 2,\ f(1) = 4$ e $f(2) = -6$.*
*Solução: Primeiramente obtemos os $l_j(x)$:*

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 1 \\ l_1(x) &= \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x^2 + 2x \\ l_2(x) &= \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

*Então*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) l_0(x) + f(1) l_1(x) + f(2) l_2(x) \\ &= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 1\right) + 4\left(-x^2 + 2x\right) - 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \\ &= -6x^2 + 8x + 2. \end{aligned}$$

Das definições 2.17 e 2.18, temos o seguinte teorema.

**Teorema 2.7.** *Dados $n + 1$ pontos de interpolação, existe um único polinômio $p(x)$, de grau $\leq n$, que contém tais pontos.*

*Demonstração.* A existência de $p(x)$ é garantida pelo polinômio interpolador de Lagrange.

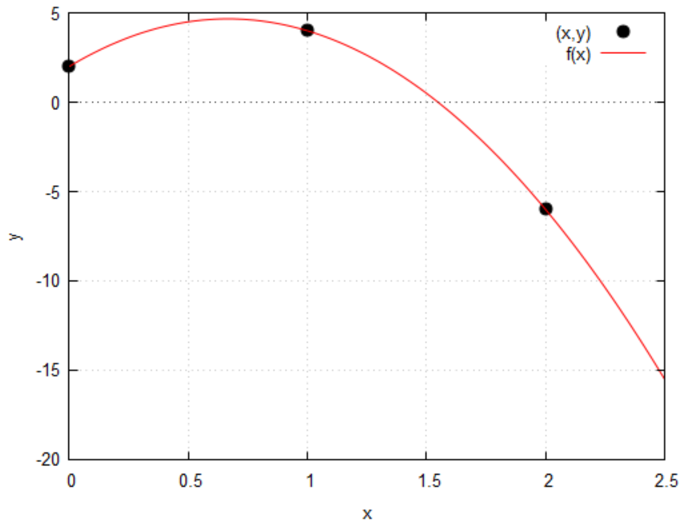


Figura 2.3: Função interpoladora $f(x) = -6x^2 + 8x + 2$.

Provemos então a unicidade. Sejam $p(x)$ e $q(x)$ dois polinômios de grau $\leq n$, de modo que dados $n+1$ pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_0, y_0)$, $p(x_i) = q(x_i) = y_i$. Seja $r(x) = p(x) - q(x)$ e supomos $r(x) \neq 0$. Então

$$r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = y_i - y_i = 0.$$

Como $r(x)$ tem também grau $\leq n$, podemos dizer que $r(x)$ tem no mínimo $n+1$ raízes distintas $x_0, \ldots, x_n$. Então

$$r(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n) \cdot s(x),$$

sendo $s(x)$ um polinômio. Mas isso implica que ou o grau de $r(x)$ seja $\geq n+1$, ou $r(x) = 0$, sendo uma contradição pois ultrapassa o grau máximo definido. Logo, a única opção é que

$$r(x) = 0 \Rightarrow p(x) - q(x) = 0 \Leftrightarrow p(x) = q(x)$$

$\square$

**Exemplo 2.13.** *( [23], p.88 - adaptação nossa) A tabela a seguir apresenta a população do Estados Unidos da América de 1940 a 1980.*

| *Ano* | *1940* | *1950* | *1960* | *1970* | *1980* |
|---|---|---|---|---|---|
| *População* | *132 165 000* | *151 326 000* | *179 323 000* | *203 302 000* | *226 542 000* |

*Estime a população no ano de 1965.*

*Solução: Definiremos $x \to$ ano e $f(x) \to$ população. Pelo teorema 2.5.1, é garantida a existência de um polinômio $p(x)$ de grau $\leq 4$ que interpola os pontos $(x, f(x))$. Utilizando o* *polinômio interpolador de Lagrange:*

$$l_{1940}(1965) = \frac{(1965-1950)(1965-1960)(1965-1970)(1965-1980)}{(1940-1950)(1940-1960)(1940-1970)(1940-1980)} = 0.0234375$$
$$l_{1950}(1965) = \frac{(1965-1940)(1965-1960)(1965-1970)(1965-1980)}{(1950-1950)(1950-1960)(1950-1970)(1950-1980)} = -0.15625$$
$$l_{1960}(1965) = \frac{(1965-1940)(1965-1950)(1965-1970)(1965-1980)}{(1960-1940)(1960-1950)(1960-1970)(1960-1980)} = 0.703125$$
$$l_{1970}(1965) = \frac{(1965-1940)(1965-1950)(1965-1960)(1965-1980)}{(1970-1940)(1970-1950)(1970-1960)(1970-1980)} = 0.46875$$
$$l_{1980}(1965) = \frac{(1965-1940)(1965-1950)(1965-1960)(1965-1970)}{(1980-1940)(1980-1950)(1980-1960)(1980-1970)} = -0.0390625$$

*Então*

$$\begin{aligned} p(1965) = & \\ & f(1940)\cdot l_{1940}(1965) + f(1950)\cdot l_{1950}(1965) + f(1960)\cdot l_{1960}(1965) + \\ & f(1970)\cdot l_{1970}(1965) + f(1980)\cdot l_{1980}(1965) \\ = & \ 191987929.6875 \end{aligned}$$

*Portanto, a população em 1965 era de aproximadamente 191 987 930 habitantes.*

# Capítulo 3

# Panorama da Matemática no Brasil e a Metodologia de Resolução de Problemas

No presente capítulo avaliamos o panorama da Matemática no Brasil sob a ótica de duas avaliações de larga escala, uma internacional e outra nacional. Em seguida, apresentamos os resultados obtidos em uma pesquisa feito com professores de Matemática, com relação às suas práticas em sala de aula. Para finalizar, expomos a metodologia de resolução de problemas e como esta pode ajudar na solução de dificuldades encontradas no ensino de Matemática na Educação Básica.

## 3.1 Panorama da Matemática no Brasil

A discussão sobre o ensino de Matemática tem se intensificado nos últimos anos. Dados obtidos de avaliações de larga escala, como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA e Prova Brasil, instrumento utilizado no Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB, mostram que os estudantes brasileiros estão sempre aquém dos resultados mínimos esperados.

Segundo o INEP:

> O *Programme for International Student Assessment (PISA)* - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - é uma iniciativa de avaliação comparada, aplicada de forma amostral a estudantes matriculados a partir do 7º ano do ensino fundamental na faixa etária dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. O Pisa é coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), havendo uma coordenação nacional em cada país participante. No Brasil, a coordenação do Pisa é responsabilidade do INEP. O objetivo do PISA é produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes, de modo a subsidiar políticas de melhoria do ensino básico. A avaliação procura verificar até que ponto as escolas de cada país participante estão preparando seus jovens para exercer o papel de cidadãos na sociedade contemporânea. As avaliações do PISA acontecem a cada três anos e abrangem três áreas do conhecimento - Leitura, Matemática e

Ciências - havendo, a cada edição do programa, maior ênfase em cada uma dessas áreas.[1]

Segundo dados obtidos nas provas do PISA realizadas no período de 2000 a 2012, o Brasil teve um aumento na pontuação média em Matemática, mas em 2015, a mesma média sofreu um decréscimo significativo de 12 pontos. Mesmo experimentando um período de aumento nas médias em Matemática, os resultados estiveram sempre abaixo da média da OCDE.


Figura 3.1: Evolução do desempenho dos estudantes no PISA nos últimos 15 anos.[2]

No PISA de 2015, foi constatado que $70,25\%$ dos estudantes brasileiros estão abaixo do nível básico de proficiência em Matemática, e destes, $43,74\%$ estão abaixo do nível mais baixo de proficiência na disciplina. Com relação ao desempenho médio em Matemática, a média do Brasil foi de $377$ pontos, muito abaixo da média dos países da OCDE, que é de $490$ pontos, ficando na penúltima posição entre os quatorze países avaliados. Considerando as unidades federativas brasileiras, o Amazonas obteve média de $378$ pontos, ficando na 10ª posição.

Conforme define o INEP:

> O Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB, instituído em 1990, é composto por um conjunto de avaliações externas em larga escala e tem como principal objetivo realizar um diagnóstico da educação básica brasileira e de alguns fatores que possam interferir no desempenho do estudante, fornecendo um indicativo sobre a qualidade do ensino ofertado. O levantamento produz informações que subsidiam a formulação, reformulação e o monitoramento das políticas públicas nas esferas municipal, estadual e federal, visando a contribuir para a melhoria da qualidade, equidade e eficiência do ensino. Além disso, procura também oferecer dados e indicadores sobre fatores de influência do desempenho dos alunos nas áreas e anos avaliados. [3]

No SAEB , o desempenho do Brasil, no período de 1995 a 2015, no ensino fundamental - anos iniciais e anos finais teve um aumento na média de 28 pontos e 3 pontos, respectivamente. No ensino médio, é observado um decréscimo nas médias, que teve seu ápice em 1997 com 289 pontos e seu menor em 2015, com 267 pontos.

[1]Fonte: http://portal.inep.gov.br/pisa

[2]Fonte:https://g1.globo.com/educacao/noticia/brasil-cai-em-ranking-mundial-de-educacao-em-ciencias-leitura-e-matematica.ghtml

[3]Fonte: http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb

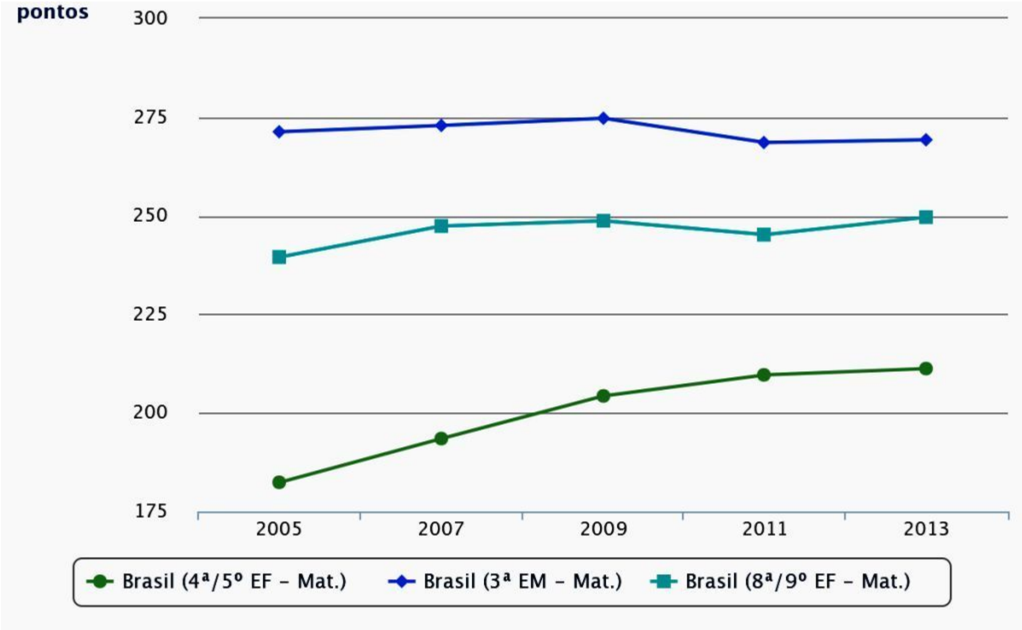


Figura 3.2: Desempenho médio em Matemática no SAEB.[4]

Para o movimento Todos pela Educação, formado por representantes de diversos setores da sociedade, o Brasil está, em média, 124 pontos abaixo da proficiência adequada em Matemática no nível de ensino médio que, baseado na escala do SAEB, deveria ser de 350 pontos.

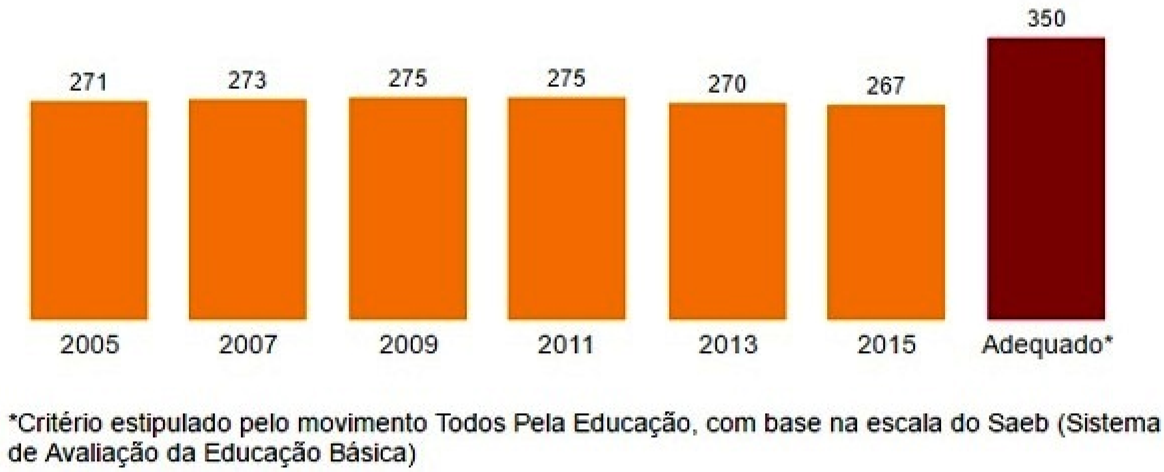


Figura 3.3: Desempenho médio em Matemática no SAEB - Ensino Médio.[5]

Nesse contexto tanto o papel do aluno quanto o do professor são questionados, do ponto de vista de suas atribuições. Segundo Oliveira [24]:

[4]Fonte: http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb/resultados

[5]Fonte:http://www.robsonpiresxerife.com/notas/desempenho-do-ensino-medio-em-matematica-e-o-pior-desde-2005/

> Na atualidade, a formação do aluno prioriza o saber pensar e este deve ser o liame da construção das diversas atividades que permitam ao aluno se identificar com as situações criadas; participar com as características e habilidades que lhe são próprias; perceber as diversas aplicações no dia a dia; atender ao desenvolvimento de suas competências; e despertar para novas habilidades. ( [24], 2017, p.22)

O papel do professor de Matemática deixa de ser o de transmissor de conteúdo, e, segundo Miguel ( [22], 2011) passa a ser de mediador do processo de construção do conhecimento matemático, criando situações pedagógicas onde o aluno possa desenvolver suas competências e habilidades para solucionar problemas propostos, e não uma mera repetição mecânica de cálculos.

Nessa mediação do conhecimento matemático, existem diversos problemas que dificultam o processo, tais como falta de apoio técnico-pedagógico, superlotação de salas de aula, tempo restrito para preparo de aulas e desinteresse e o baixo rendimento dos alunos nas aulas. Mostrar aos alunos que a Matemática não é um conjunto de regras que já surgiu pronto, mas sim que foi fruto da experiência humana ao longo do tempo é um dos principais desafios dos professores desta disciplina. Para contornar tal situação, surgem diversas correntes de ensino de matemática, tais como a Metodologia da Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, História da Matemática, e utilização de jogos, atividades lúdicas e softwares tais como Planilhas Eletrônicas, Geometria Dinâmica e os Sistemas Algébricos Computacionais ou CAS (Computer Algebra System), entre outros. Destas, destacamos a Metodologia da Resolução de Problemas.

## 3.2 A Metodologia da Resolução de Problemas

A Metodologia da Resolução de Problemas tem como objetivo tirar o aluno da sua postura tradicional passiva, para uma postura ativa e interessada, que adquiram habilidades e estratégias para obterem novos conhecimentos por si só, e não recebendo conteúdos prontos e acabados. Segundo Soares e Pinto:

> Visando-se uma sociedade mais justa, capaz de intervir no desenvolvimento da humanidade crítica e criativamente, buscando uma melhoria na qualidade de vida do cidadão, não é suficiente apresentar conhecimentos cristalizados e fora do contexto moderno. É preciso fazer com que os alunos tornem-se pessoas capazes de enfrentar situações diferentes dentro de contextos diversificados, que façam com que eles busquem aprender novos conhecimentos e habilidades. Só assim estarão mais bem preparados para adaptar-se às mudanças culturais, tecnológicas e profissionais do novo milênio. ( [29], 2001, p.1)

Diversos autores defendem a Resolução de Problemas como metodologia a ser utilizada no ensino da Matemática. Para Onuchic e Allevato [25], são razões para o uso da Resolução de Problemas:

1. Na resolução de problemas, o foco da atenção dos alunos e sobre ideias e sobre dar sentido;

2. A resolução de problemas desenvolve o *poder matemático* (avaliar, conjecturar, estimar);

3. A resolução de problemas desenvolve a crença de que os educandos são capazes de fazer Matemática e de que Matemática faz sentido;

4. A resolução de problemas provê dados para uma avaliação contínua.

Um aspecto que se pode destacar em ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, além dos citados anteriormente, é a possibilidade de mostrar como a maioria dos conceitos matemáticos estudados atualmente foram desenvolvidos, através de situações-problemas relacionadas na História da Matemática. Analisar o contexto histórico e os problemas que culminaram em conteúdos matemáticos estudados hoje mostra ao aluno, segundo a Base Nacional Comum Curricular (2018), que a matemática é fruto da experiência humana ao longo da história, e que ela não é algo que surgiu pronta, que é para poucos e que é estudada por puro deleite intelectual.

> O desenvolvimento gradual desse campo do saber, por seres humanos inseridos em culturas e sociedades específicas, confere a ela (a Matemática) valores estéticos e culturais, e fornece uma linguagem com a qual pessoas de diferentes realidades podem se comunicar, com precisão e concisão, em várias áreas do conhecimento. ( [3], 2018, p.522)

Outro aspecto da Resolução de Problemas que se pode destacar é a possibilidade de trabalhar o caráter interdisciplinar da Matemática. Segundo Machado, a fragmentação dos objetos do conhecimento e a dificuldade de enquadrar fenômenos que acontecem fora do ambiente escolar em uma única disciplina são os pontos principais da discussão acerca de interdisciplinaridade. Nesse segundo ponto ele cita:

> Hoje, a Física e a Química esmiúçam a estrutura da matéria, a entropia é um conceito fundamental na Termodinâmica, na Biologia e na Matemática da Comunicação, a Língua e a Matemática entrelaçam-se nos jornais diários, a propaganda evidencia a flexibilidade das fronteiras entre a Psicologia e a Sociologia, para citar apenas alguns exemplos. ( [19], 1993, p.24)

Miguel fala da importância do enredamento no ensino e aprendizagem de Matemática. Para ele, o enredamento é a

> organização das ideias matemáticas em articulação com as diversas áreas do conhecimento posto que elas não surgem do nada; pelo contrário, muitas ideias matemáticas nem surgiram em contextos exclusivamente matemáticos como, por exemplo, a bela teoria dos exponenciais. ( [22], 2011, p.379).

Esse enredamento nada mais é que o aspecto interdisciplinar da Matemática. No momento que o aluno percebe esse elo entre os conceitos matemáticos estudados e as outras ciências, a Matemática passa a fazer sentido para ele, e que não é apenas um conjunto de regras e técnicas, respondendo ao anseio de saber qual a utilidade de determinados conceitos aprendidos em sala de aula ( [24], 2017).

Dessa forma, a Metodologia da Resolução de Problemas tem o propósito de reformular o ensino e aprendizagem de Matemática, frente aos avanços técnicos e tecnológicos, formando no aluno o caráter investigativo, capaz de confrontar e resolver situações do cotidiano, e rompendo com as aulas tradicionais de Matemática onde se apresenta inicialmente a definição do conteúdo a ser estudado, seguido de uma série de exercícios de fixação que não passam de mera repetição mecânica.

# Capítulo 4

# O polinômio interpolador de Lagrange como instrumento motivador do ensino-aprendizagem de polinômios e funções polinomiais

Neste capítulo expomos, a princípio, os motivos que levaram ao desenvolvimento da proposta de utilização do Polinômio Interpolador de Lagrange. Em seguida, apresentamos uma proposta de intervenção no ensino de polinômios e funções polinomiais utilizando o PIL juntamente à Metodologia da Resolução de Problemas.

## 4.1 Aspectos motivadores da proposta de utilização do Polinômio Interpolador de Lagrange no processo de ensino-aprendizagem de funções polinomiais e polinômios na educação básica

Segundo a Base Nacional Comum Curricular ( [3], 2018), a área de Matemática e suas Tecnologias deve ampliar e aprofundar que os conhecimentos matemático aprendidos na etapa do ensino fundamental. Enquanto que no ensino fundamental as habilidades em Matemática estão dividas em: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, Probabilidade e Estatística, as habilidades no ensino médio estão articulados em pares de ideias fundamentais: variação e constância, certeza e incerteza, movimento e posição e relações e inter-relações. Essa organização tem como objetivo mostrar a articulação da Matemática com as outras áreas do conhecimento, principalmente com as Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

> Ao se denominar a área como sendo não só de Ciências e Matemática, mas também de suas Tecnologias, sinaliza-se claramente que, em cada uma de suas disciplinas, pretende-se promover

competências e habilidades que sirvam para o exercício de intervenções e julgamentos práticos. Isto significa, por exemplo, o entendimento de equipamentos e de procedimentos técnicos, a obtenção e análise de informações, a avaliação de riscos e benefícios em processos tecnológicos, de um significado amplo para a cidadania e também para a vida profissional.( [1], 1997, p.6)

Dessa forma, a BNCC cita as habilidades específicas de Matemática e suas Tecnologias para o ensino médio, em um total de cinco:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. 2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. 3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos (Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística) para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos: algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc., na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.( [3], 2018, p.523)

Para que essas habilidades sejam de fato geradas nos alunos, é necessário uma revisão da forma e da metodologia empregadas no ensino da Matemática, que atualmente se resume em definições exemplos, seguidos de exercícios de fixação e aplicação; essas definições são apresentadas de forma fragmentada, e faz com que o aluno não perceba ou estabeleça relações entre tais definições, mesmo abordadas de forma completa ( [1], 1997). Podemos citar como exemplo a maneira que é apresentado o conceito de Função.

De acordo com os PCN's:

> O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente. Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe,

portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.( [1], 1997, p.43,44)

A Proposta Curricular do Ensino Médio de Matemática e suas Tecnologias, da Secretaria de Estado de Educação e Qualidade do Ensino do Estado do Amazonas (SEDUC-AM), no 4º bimestre do 3º ano, no eixo temático *Situações-Problema em Matemática*[1], contempla o conteúdo programático a cerca de Funções Polinomiais e Polinômios, onde deseja-se levar o aluno à competência de "modelar e resolver problemas que envolvam variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, utilizando representações algébricas"( [2], 2012, p.54), para isso, desenvolvendo nele as habilidades de resolver situações-problema onde seja preciso modelar algébricamente, para construir argumentos e assim poder intervir na realidade.

Em contraste temos a maneira como os livros didáticos abordam o conteúdo de Funções Polinomiais e Polinômios. Para essa análise, utilizamos alguns livros que fizeram parte da escolha, para as escolas estaduais do Amazonas, do Programa Nacional do Livro Didático[2] (PNLD) em 2018. Notamos sem dificuldade que seguem a mesma disposição de tópicos para este conteúdo, que se resume em:

1. Polinômio e Função polinomial
2. Adição, subtração e multiplicação entre polinômios
3. Divisão com polinômios (Teorema do Resto, D'Alembert, Dispositivo de Briot-Rufini)
4. Equações Polinomiais
5. Relações de Girard
6. Teorema Fundamental da Álgebra
7. Raízes Complexas

Podemos perceber também que o estudo das Funções polinomiais e dos polinômios é iniciado por exemplos que, ao aluno, não fazem muito sentido, como recortes em figuras planas ou volume de sólidos geométricos cujas arestas tem uma variavél $x$; outros apenas citam situações que podem ser expressas via funções polinomiais. Chavante [10], diz que o aluno, em estudos anteriores, viu como funções que se aplicam em diversas situações do cotidiano.

Em estudos anteriores, vimos que as funções se aplicam em diversas situações do dia a dia, como modelar fenômenos naturais, analisar movimentos e trajetórias de partículas, calcular o lucro de um produto em função de seu custo de produção e das vendas realizadas ou avaliar as condições

[1]ver [2], p.54

[2]referências [6], [12], [30] e [10].

de mercado para um investimento. Além disso, você (o aluno) provavelmente estudou alguns tipos de funções polinomiais, porém, com outros nomes de função afim e quadrática. ( [10], 2016, p.212)

Em seguida é dada a definição de Função Polinomial e segue-se com a proposta do livro. De forma análoga temos Souza[3] [30], na página 258.

Apesar de o aluno haver estudado anteriormente as funções e ter visto algumas aplicações em situações-problema, isso aconteceu na etapa inicial do ensino médio, e até chegar a etapa final, onde o conteúdo é visto no último bimestre, na maioria dos casos já não consegue lembrar dessas aplicações, e apenas citá-las não desperta tanto interesse quanto ver a função e sua manipulação numérica.

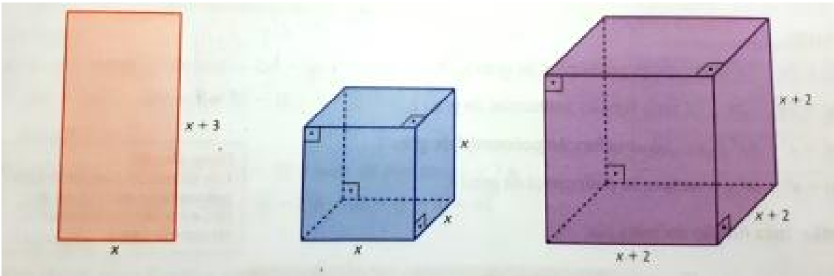


Figura 4.1: Exemplo utilizado por [12].

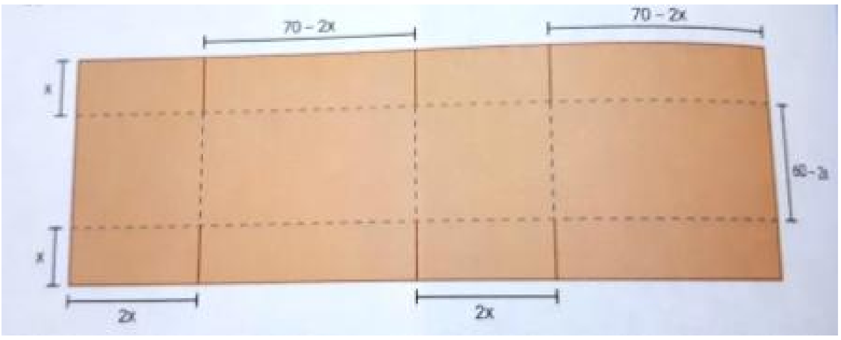


Figura 4.2: Exemplo utilizado por [6].

Dante [12] e Balestri [6] iniciam os capítulos utilizando exemplos geométricos. Em [12], página 173, utiliza-se um retângulo de arestas $x$ e $x + 3$ e pede para determinar as expressões do perímetro e área da figura; em seguida usa-se dois cubos: um de arestas $x$, e outro de arestas $x + 2$, e pede-se para as expressões das suas áreas totais e dos volumes. Em [6], página 252, pede-se a expressão do volume $V$ da figura a seguir, que representa uma folha de papelão de medidas 140 cm e 60 cm, que será recortada onde estão as linhas contínuas e dobrado onde estão as linhas tracejadas.

[3]Vale ressaltar que o autor dedica uma sessão do capítulo para uma contextualização, mas isso só é feito após as definições e exercícios de fixação serem trabalhados.

Apesar de vermos nestes últimos uma aplicação em forma de uma situação-problema, estes exemplos não trazem o sentido que o aluno atual busca encontrar, pois não apresenta um vínculo com o cotidiano do aluno. Segundo Fagundo [17], mesmo apresentando tais situações-problemas aos alunos para que resolvam em sala,

> geralmente constatamos que a resolução de problemas é tratada na escola, de forma geral, de modo desmotivador, como um conjunto de exercícios de fixação/aplicação. Nesse modo de agir, a tarefa do aluno geralmente se resume em "descobrir"a conta, fórmula ou procedimento algorítmico para a solução. Perde-se com isso o aspecto lúdico que um problema pode assumir quando é encarado como um desafio. ( [17] apud MIGUEL, 2017, p.15)

Outro ponto que se pode considerar são as prática e metodologias utilizadas por grande parte dos professores de Matemática. Foi realizada uma pesquisa através de um questionário online, onde participaram 83 professores de Matemática; esse questionário continha perguntas relacionadas às práticas utilizadas nas aulas de funções polinomiais e polinômios. A seguir temos os resultados obtidos.

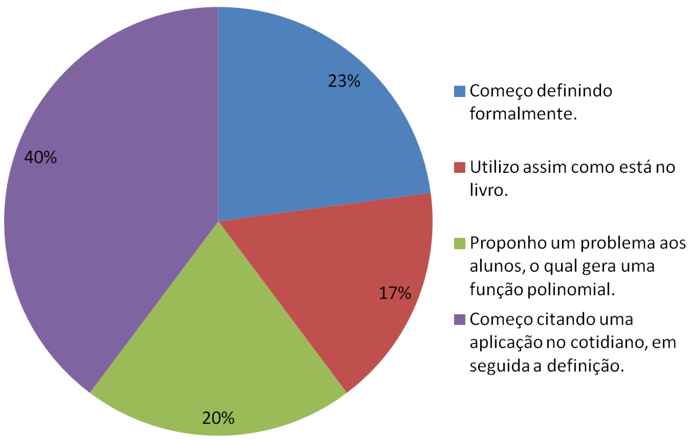


Figura 4.3: Apresentação do conteúdo aos alunos.[4]

Na figura 4.3 percebemos que, ao iniciar os conteúdos de funções polinomiais, $40\%$ dos professores entrevistados fazem apenas uma citação de uma aplicação destas funções, não permitindo aos alunos visualizar a função e tão pouco a manipular; logo em seguida, contando com $23\%$ dos entrevistados, iniciam logo pela definição. Esse tipo de prática acaba por fazer o conteúdo ser pouco atrativo ao aluno, o que acaba desestimulando o processo de aprendizagem deste conteúdo.

[4]Fonte: Elaborado pelo autor.
[5]Fonte: Elaborado pelo autor.

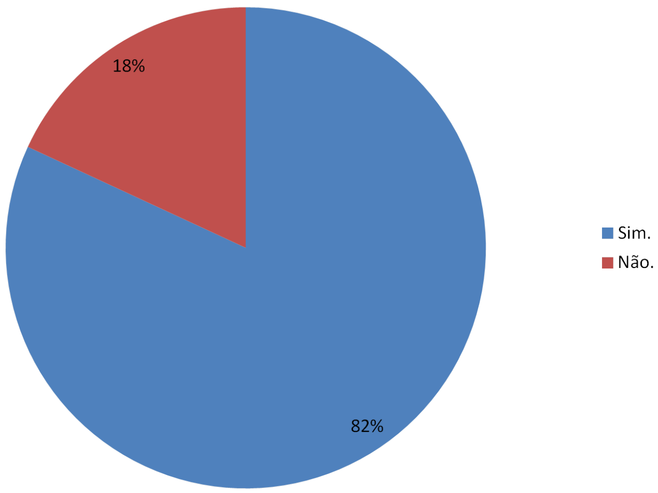


Figura 4.4: Pesquisa de problemas contextualizados para utilização nas aulas.[5]

Na figura 4.4 podemos ver que a grande maioria dos professores pesquisa problemas contextualizados para suas aulas de funções polinomiais e polinômios, o que favorece o processo de aprendizagem, uma vez que permite aos alunos visualizar aplicações do conteúdo em situações reais.

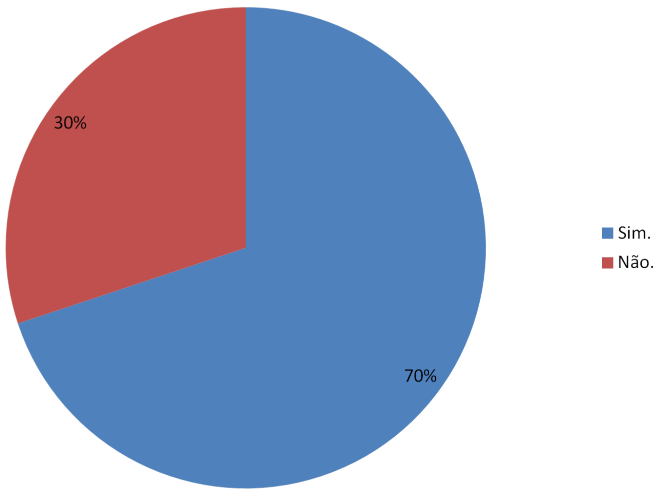


Figura 4.5: Utilização de problemas associados às Ciências da Natureza e suas Tecnologias.[6]

De forma análoga à figura 4.4, a figura 4.5 também mostra uma conduta favorável à aprendizagem de funções polinomiais e polinômios por parte dos professores entrevistados.

[6]Fonte: Elaborado pelo autor.

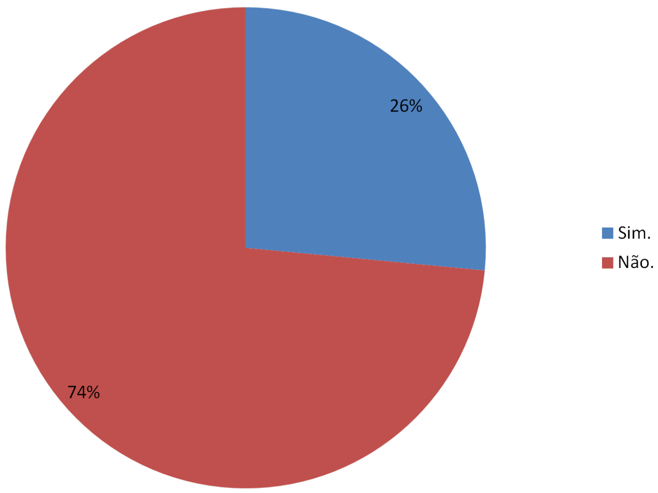


Figura 4.6: Utilização de tecnologias digitais.[7]

Na figura 4.6 vemos que poucos professores utilizam tecnologias digitais para suas aulas. Diante de uma sociedade onde a tecnologia está presente em todas as atividades cotidianas, essa prática acaba prejudicando o processos de ensino e aprendizagem não só das funções polinomiais e dos polinômios, mas de qualquer tópico da Matemática. Para justificar essa atitude, responderam os professores conforme a figura4.7.

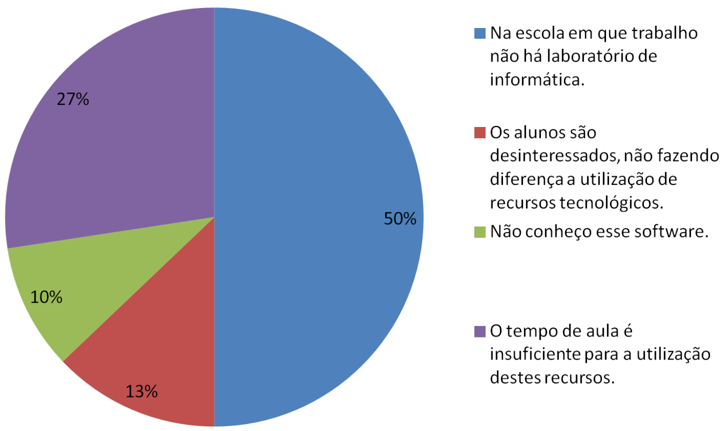


Figura 4.7: Utilização de tecnologias digitais.[8]

[7]Fonte: Elaborado pelo autor.
[8]Fonte: Elaborado pelo autor.

O maior obstáculo relacionado pelos professores para a utilização de tecnologias digitais nas aulas é a falta de laboratório de informática nas escolas em que trabalham, seguido pelo tempo insuficiente das aulas. Hoje existem diversas alternativas para contornar tal situação, como a utilização de aplicativos voltados para o ensino de Matemática desenvolvidos para *smartphones* e *tablets*, citando como exemplo o *Calculadora Gráfica GeoGebra*, que é de fácil utilização e não necessita estar conectado à internet para seu uso.

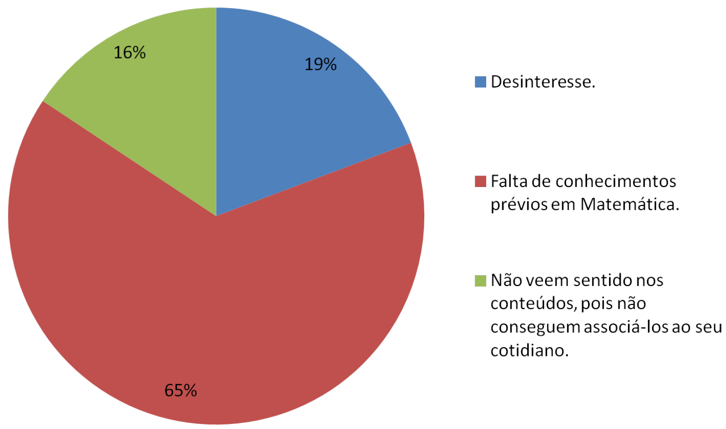


Figura 4.8: Dificuldades percebidas nos alunos para aprendizagem de funções polinomiais.[9]

Na figura 4.8 a maior causa apontada pelos professores entrevistados para a dificuldade que os alunos experimentam acerca das funções polinomiais é a falta de conhecimentos prévios de conceitos matemáticos, seguido do desinteresse e da dificuldade em reconhecer este conteúdo em situações reais. Ao iniciarmos o estudo de funções polinomiais - o mesmo para qualquer tópico em Matemática - sem utilizar recursos que o liguem à contextos reais, partindo diretamente para a definição matemática (conforme figura 4.3) acaba por desmotivar o aluno, uma vez que este pode ter suas competências e habilidades pouco desenvolvidas, e isso acaba por afastá-lo mais da Matemática.

## 4.2 A proposta de utilização do Polinômio Interpolador de Lagrange

Desse cenário surge a proposta de utilização do Polinômio Interpolador de Lagrange para motivar tanto o processo de ensino, por parte do professor, quanto o de aprendizagem, por parte do aluno.

[9]Fonte: Elaborado pelo autor.

A grande vantagem de sua utilização é o de conseguir trazer todos esses objetivos que buscam a BNCC, os PCN's e a Proposta Curricular da SEDUC-AM. Através de situações-problemas relacionadas às diversas áreas, mostra aos alunos o aspecto interdisciplinar da Matemática, possibilitando uma melhora não só na aprendizagem desta, mas também das Ciências da Natureza e suas Tecnologias; mostra como a Matemática foi desenvolvida pela humanidade: na busca de resolver problemas reais, oportunizando ao aluno a utilização de suas habilidades já desenvolvidas em Matemática na busca de uma solução para o novo problema e, assim, promovendo nele o desenvolvimento de novas habilidades e do conhecimento científico.

Outra vantagem da utilização do Polinômio Interpolador de Lagrange é o de dar aos alunos mais uma ferramenta matemática para a resolução de problemas relacionados a determinação de funções polinomiais dados alguns de seus pontos cartesianos. Como o Polinômio Interpolador de Lagrange não faz parte do conteúdo básico do ensino médio, em grande maioria quando se quer determinar uma função polinomial sabendo alguns dos seus pontos, monta-se um sistema linear para tal.

Além disso, pode-se construir os gráficos das funções interpoladoras e determinar as respectivas expressões utilizando software de geometria dinâmica, como o GeoGebra, sem deslocar os alunos da sala de aula, através da sua versão para *smartphones* e *tablets*.

A metodologia dar-se-ia assim:

1. Primeiramente é apresentada aos alunos, que podem ser organizados em grupos, uma situação-problema e pedido para que eles tentem resolvê-la.

2. Pergunta-se aos alunos se algum deles obteve uma possível solução. Se sim, a expõe e a discute juntamente com os outros alunos, para verificar sua validade; se não, pergunta-se qual foi a dificuldade que eles tiveram para não conseguirem uma possível solução.

3. Em seguida, é levantado um questionamento: "será que não existe uma maneira de se conseguir respostas para essa situação?"; após, é apresentado o Polinômio Interpolador de Lagrange.

4. Utiliza-se o Polinômio Interpolador de Lagrange para resolver o problema.

5. Propõe-se mais algumas situações-problema para os alunos aplicarem o Polinômio Interpolador de Lagrange.

É importante que as situações-problema utilizadas contemplem diversas áreas das Ciências da Natureza e áreas afins à Matemática, para que não recaia no processo de questões repetitivas, onde se resumem em alterar apenas alguns valores numéricos. O professor pode até fazer uso da modelagem matemática para elaborar essas situações-problema, envolvendo um momento de pesquisa dirigida junto aos alunos, a fim de trazer algo mais próximo do cotidiano destes. É possível também adaptar alguns exercícios de livros de Cálculo Numérico para os alunos do ensino médio.

Apesar do método exigir bastante cálculo numérico, deve ser permitida a utilização de calculadoras para efetuar as operações, uma vez que o objetivo principal não é testar a habilidade em cálculos numéricos dos alunos e sim mostra uma aplicação de funções polinomiais e polinômios.

Como exemplo de situações-problema, segue um de autoria própria, utilizando dados de pesquisa do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE, e tomando como referência o exemplo apresentado em 2.13.

**Exemplo 4.1.** *A seguir temos alguns dados acerca da população do Estado do Amazonas no período de 1970 a 2017, segundo o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística):*

| *Ano* | *1970* | *1980* | *2010* | *2015* | *2017* |
|---|---|---|---|---|---|
| *População* | *955 235* | *1 430 089* | *3 476 658* | *3 938 336* | *4 063 614* |

*(a) Com esses dados, seria possível descobrirmos qual era a população do Estado do Amazonas no ano 2000?.*

*(b) Seria possível encontrarmos uma relação matemática que nos fornecesse, para qualquer ano entre 1970 e 2017, a população neste ano requerido? Utilize o software de geometria dinâmica GeoGebra para isso.*

*(c) Faça uma pesquisa e verifique qual valor foi determinado pelo IBGE para a população amazonense neste mesmo ano e compare com o valor encontrado. Determine o erro, em termos percentuais, do valor encontrado pelo polinômio interpolador de Lagrange e o valor determinado pelo IBGE.*

*(d) Discuta com seus colegas e professor o por quê da diferença entre os valores obtidos, e sugira uma alternativa para resolver essa situação.*

*(e) Analisando o gráfico do polinômio interpolador, é seguro utilizarmos o polinômio interpolador para estimativas acima do ano de 2017?*

*Resolução: Façamos ano* $\rightarrow x$ *e população* $\rightarrow f(x)$.

*(a) Seja* $p(2000)$ *o valor estimado de habitantes no Estado do Amazonas no ano 2000. Uti-*

*lizando o polinômio interpolador de Lagrange:*

$$l_{1970}(2000) = \frac{(2000-1980)(2000-2010)(2000-2015)(2000-2017)}{(1970-1980)(1970-2010)(1970-2015)(1970-2017)} = -0,060283687$$
$$l_{1980}(2000) = \frac{(2000-1970)(2000-2010)(2000-2015)(2000-2017)}{(1980-1970)(1980-2010)(1980-2015)(1980-2017)} = 0,196911196$$
$$l_{2010}(2000) = \frac{(2000-1970)(2000-1980)(2000-2015)(2000-2017)}{(2010-1970)(2010-1980)(2010-2015)(2010-2017)} = 3,642857143$$
$$l_{2015}(2000) = \frac{(2000-1970)(2000-1980)(2000-2010)(2000-2017)}{(2015-1970)(2015-1980)(2015-2010)(2015-2017)} = -6,476190476$$
$$l_{2017}(2000) = \frac{(2000-1970)(2000-1980)(2000-2010)(2000-2015)}{(2017-1970)(2017-1980)(2017-2010)(2017-2015)} = 3,696705824$$

*Então*

$$\begin{aligned} p(2000) = & \\ & f(1970)\cdot l_{1970}(2000) + f(1980)\cdot l_{1980}(2000) + f(2010)\cdot l_{2010}(2000) + \\ & f(2015)\cdot l_{2015}(2000) + f(2017)\cdot l_{2017}(2000) \\ = & \ 2\ 405\ 554,237 \end{aligned}$$

*Portanto, a população estimada no Amazonas em 2000 era 2 405 554 habitantes.*

*(b) Para determinar a função $p(x)$ que interpola os pontos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0,1,2,3,4$, através do GeoGebra, utilizamos os passos descritos a seguir:*

*Passo 1: Na tela inicial do software GeoGebra, clique com o botão esquerdo do mouse no ícone apontado pela seta e escolha a opção Planilha de Cálculos, conforme apresentado na figura 4.9.*

*Passo 2: Faça a inserção dos dados da tabela, distribuídos em colunas, e selecione-os, conforme a figura 4.10.*

*Passo 3: Na opção de Análise, escolha a Análise Bivariada e peça para analisar os dados selecionados, assim como na figura 4.11.*

*Passo 4: Ao abrir a janela Análise de dados, na parte inferior haverá a barra de rolagem Modelo de Regressão; escolha a opção Polinomial, e, bem abaixo, como utilizamos cinco pontos, escolhemos a quantidade 4, relativo aos nós da interpolação. Nisso será gerado o gráfico e veremos a função polinomial a ele associada (figura 4.12). Caso queira obter um valor associado à função, basta utilizar a opção avaliar simbolicamente. Para o gráfico ser visualizado na Janela de Visualização, basta clicar com o botão direito do mouse e escolher essa opção.*

*Dessa forma, obtemos a função deseja, dada por*

$$p(x) = -2,92x^4 + 23262,81x^3 - 69578939,55x^2 + 92489864431,22x - 46102579101249,51 \tag{4.1}$$

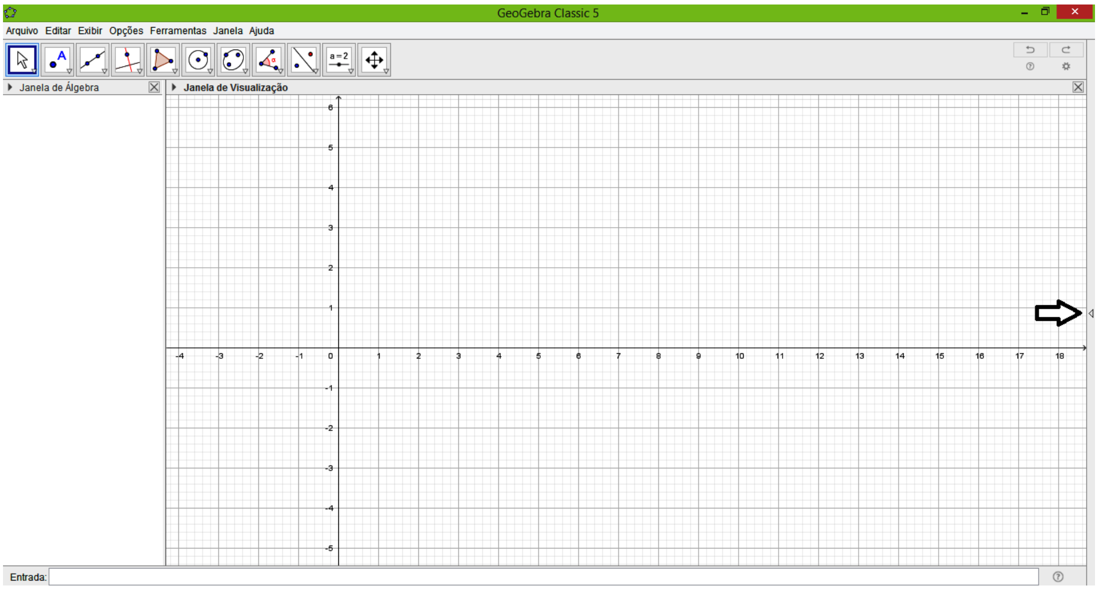


Figura 4.9: Passo 1.

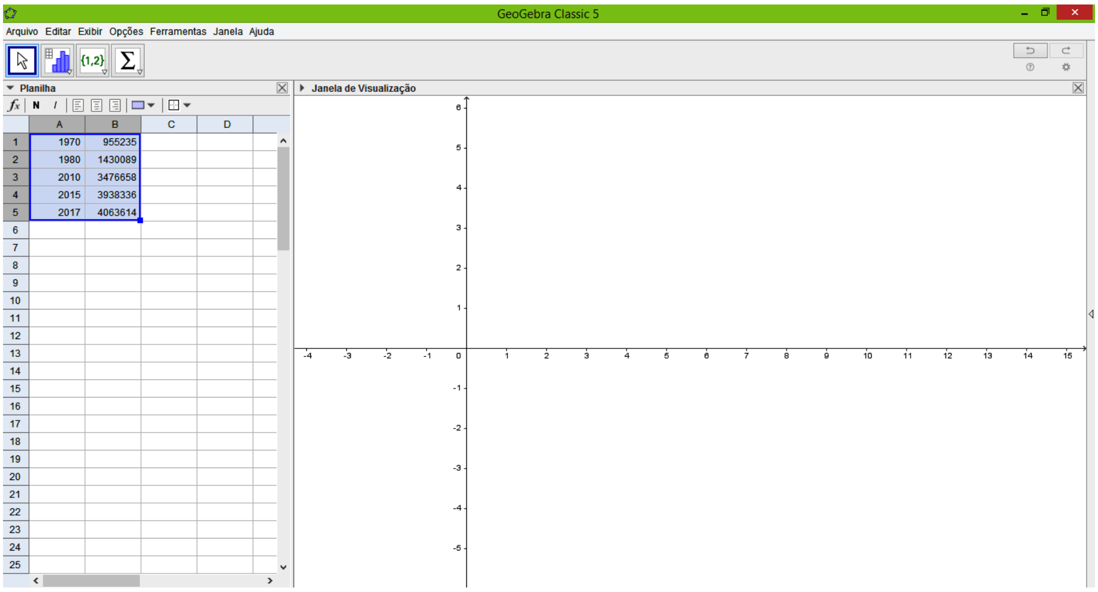


Figura 4.10: Passo 2.

*que tem o gráfico apresentado na figura 4.13.*

*(c) De acordo com o Censo 2000 realizado pelo IBGE, em 2000 a população do Amazonas era de 2 812 557 habitantes*[10]. *Chamando de $D(x)$ a diferença entre o valor obtido pelo polinômio interpolador e o do Censo, temos*

$$D(2000) = 2\ 812\ 557 - 2\ 405\ 554 = 407\ 003.$$

[10] Fonte:https://ww2.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/censo2000/tabelagrandes__regioes211.shtm. Acesso em 02/05/2018.

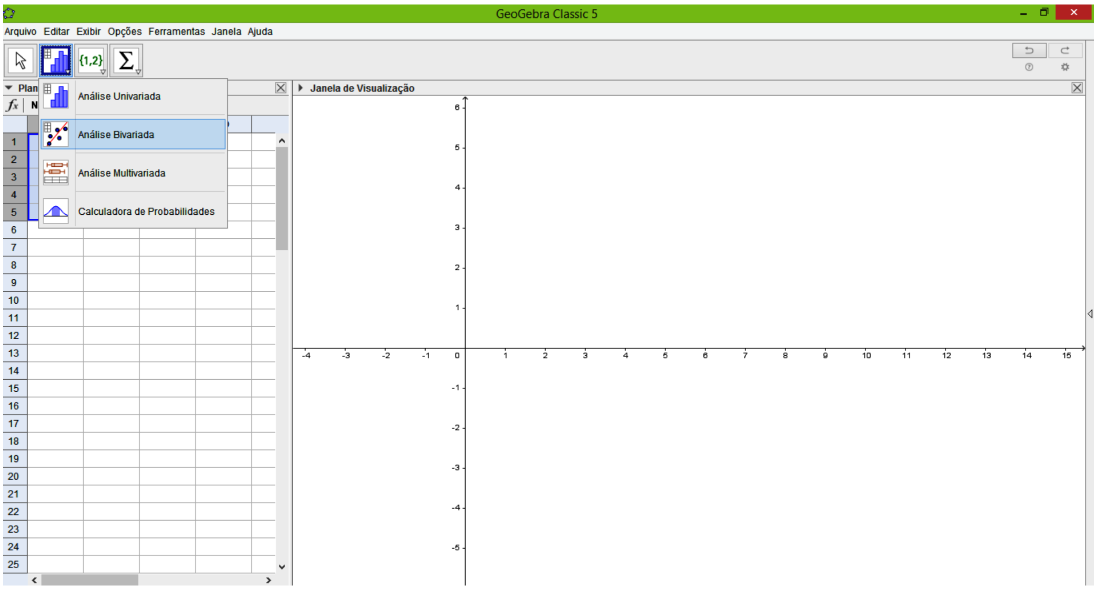


Figura 4.11: Passo 3.

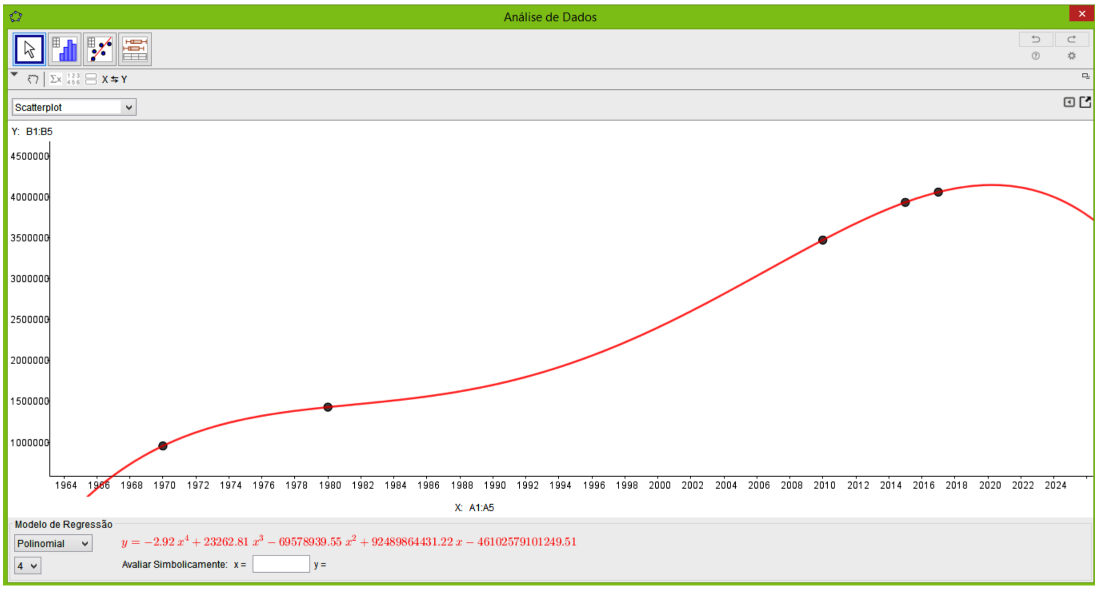


Figura 4.12: Passo 4.

*Em termos percentuais:* $D(2000) = 14,47\%$.

*(d )Espera-se que o aluno cite alguns fatores que levaram a essa diferença, como a quantidade de dados informados na tabela e os algarismos significativos dos resultados das operações realizadas. O professor pode questionar os alunos em se eles tivessem mais informações na tabela, o quanto esses dados influenciariam no cálculo numérico para determinar* $p(2000)$.

*(e) Espera-se que o aluno perceba que o uso do polinômio interpolador fora do intervalo 1970-2017 não é viável,pois a partir de 2020, os valores de* $p(x)$ *começam a decrescer, e que a*

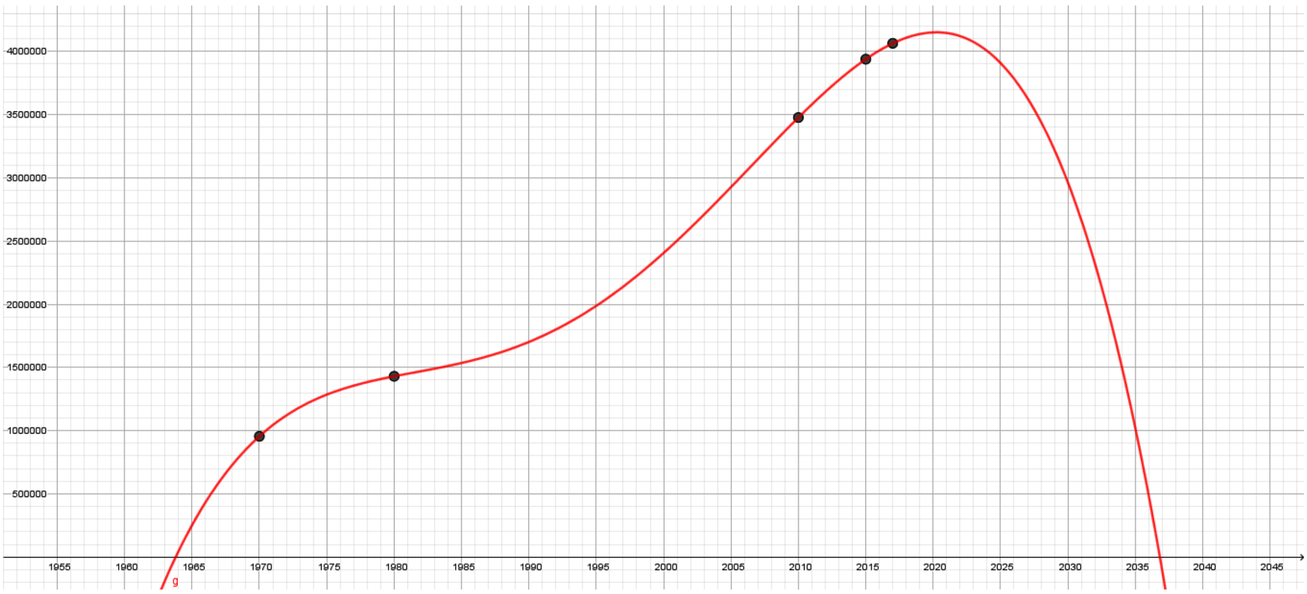


Figura 4.13: Função polinomial interpoladora $p(x)$.

*tendência natural da população é a de crescimento demográfico.*

**Exemplo 4.2.** *A tabela a seguir mostra os resultados obtidos em uma simulação virtual do movimento de um carrinho em um trilho de ar. Neste experimento, as posições ocupadas pelo carrinho estão em centímetros e a unidade de tempo (ut) é muito próxima de* $\frac{1}{30}$ *segundo; Considera-se a origem do movimento em* $t = 0$.

| *t (ut)* | *1* | *3* | *10* | *15* |
|---|---|---|---|---|
| *x (cm)* | *0,5* | *4,2* | *51,2* | *111,3* |

*(a) Estime a posição do carrinho no instante* $t = 8$ *ut.*

*(b) Escreva a função que determina a posição* $x$ *do carrinho ocupada em um instante* $t$*, e seu respectivo gráfico.*

*Resolução: Neste exercício, utilizamos o software de geometria dinâmica GeoGebra para auxiliar a visualização da variação da posição do carrinho. O objetivo é mostrar aos alunos as vantagens e praticidade dos softwares em Matemática. Dessa forma, resolvemos primeiro o item (b).*

*Sendo* $x(t)$ *a função que diz a posição* $x$ *ocupada pelo carrinho no instante* $t$*, temos, seguindo os passos descritos no exemplo 4.1:*

$$x(t) = -0,01t^3 + 0,64t^2 - 0,61t + 0,48. \tag{4.2}$$

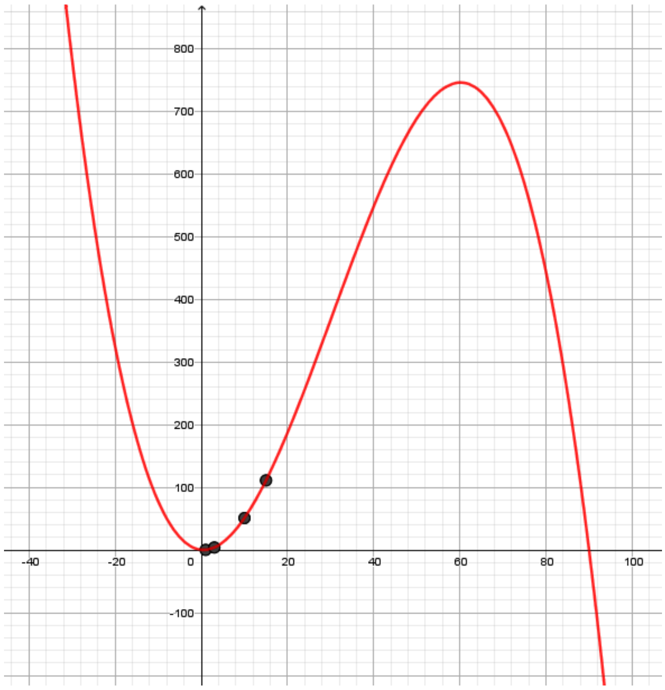


Figura 4.14: Gráfico de $X(t)$ extendido.

*Para resolvermos o item (a), basta calcularmos* $x(8)$*.Logo*

$$x(8) = -0,01 \cdot 8^3 + 0,64 \cdot 8^2 - 0,61 \cdot 8 + 0,48 = 31,44\ cm.$$

**Exemplo 4.3.** *Na fabricação de determinadas cerâmicas é muito importante saber as condições de temperatura em que o produto foi assado no forno. Supondo que não seja possível medir a temperatura do forno a todo instante, ela é medida em intervalos de tempo e esses dados são interpolados para o instante em que a peça foi queimada a fim de se conhecer a temperatura do forno nesse instante. Em um dia, este dados foram coletados*[11]*:*

| *Horário* | *7:00* | *10:00* | *13:00* | *16:00* | *21:00* |
|---|---|---|---|---|---|
| *Temperatura($^o$C)* | *232* | *251* | *263* | *255* | *228* |

*(a) Estime a temperatura do forno às 15 e às 18:30.*

*(b) Descreva a curva de aquecimento do forno entre 7:00 e 21:00.*

*Resolução: Façamos a mudança de variável horário* $\rightarrow$ $x$ *e temperatura* $\rightarrow$ $g(x)$*. Utilizando os passos descritos no exemplo 4.1, obtemos a função interpoladora* $g$ *tal que*

$$g(x) = 0,12x^4 - 3,32x^3 + 44,67x^2 - 277,84x + 872,86. \tag{4.3}$$

*A curva de aquecimento do forno é dada pela figura 4.16.*

[11]Fonte:http://bizuando.com/material-apoio/calc-num/calc-num-aula6.pdf

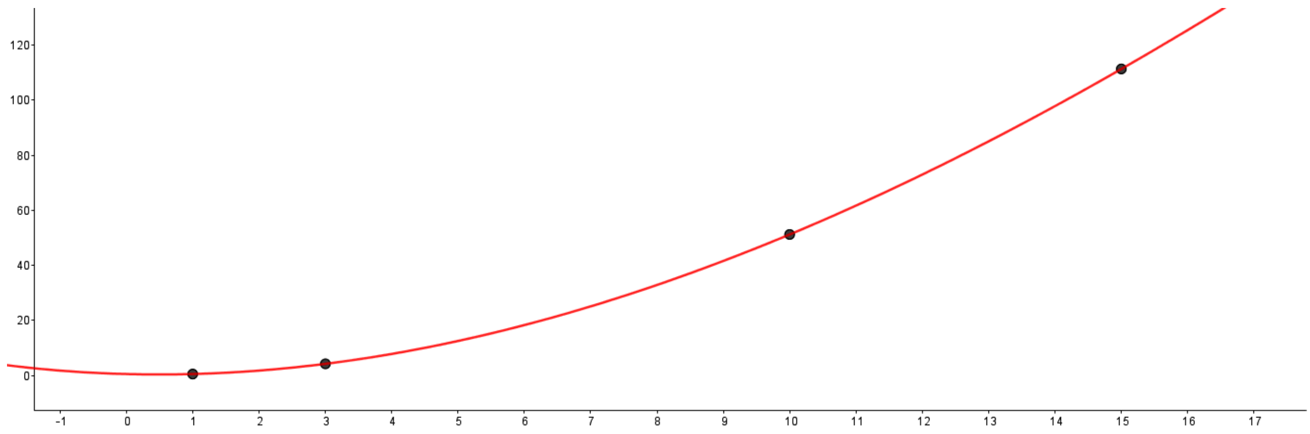


Figura 4.15: Gráfico de $X(t)$ entre 1 e 15 ut.

*Dessa forma, resolvemos imediatamente o item (b). Para o item (a), desta vez, utilizamos o comando "Avaliar Simbolicamente", localizado na parte inferior da janela de Análise de Dados do GeoGebra, bastando digitar o valor que queremos para $x$, obtendo assim $g(15) = 259,0746$ e $g(18,5) = 243,4062$.*

*Portanto, às 15:00 a temperatura do forno é aproximadamente $259,07$ $^oC$, e às 18:30, $243,41$ $^oC$.*

**Exemplo 4.4.** *( [23], p.97 - adaptado) Um braço de um robô deve passar nos instantes $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4$ e $t_5$ por posições pré-definidas $\theta(t_0), \theta(t_1), \theta(t_2), \theta(t_3), \theta(t_4)$ e $\theta(t_5)$, onde $\theta(t)$ é o ângulo (em radianos) que o braço do robô faz com o plano XOY.*

| $t_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta_i = \theta(t_i)$ | 1 | 1,25 | 1,75 | 2,25 | 3 | 3,15 |

*Determine uma função que interpole os valores tabulados (utilize o GeoGebra) e faça uma aproximação da posição do robô em $t = 1,5$.*

*Resolução: De forma análoga ao exemplo 4.1, obtemos a função*

$$\theta(t) = -0,01t^5 + 0,22t^4 - 1,38t^3 + 4,1t^2 - 5,28t + 3,35. \tag{4.4}$$

*A posição do robô em $t = 1,5$ é dada por*

$$\theta(1.5) = -0,01\cdot(1,5)^5 + 0,22\cdot(1,5)^4 - 1,38\cdot(1,5)^3 + 4,1t^2 - 5,28\cdot(1,5) + 3,35 = 1,0353125$$

*Logo, em $t = 1,5$ a posição do robô é aproximadamente $1,03$ rad.*

**Exemplo 4.5.** *( [5], p.15 - adaptado) O volume y de bactérias, em unidades de volume, existente em uma cultura após x horas, é apresentado na tabela abaixo, obtida a partir de experiência em laboratório em um período de quatro horas.*

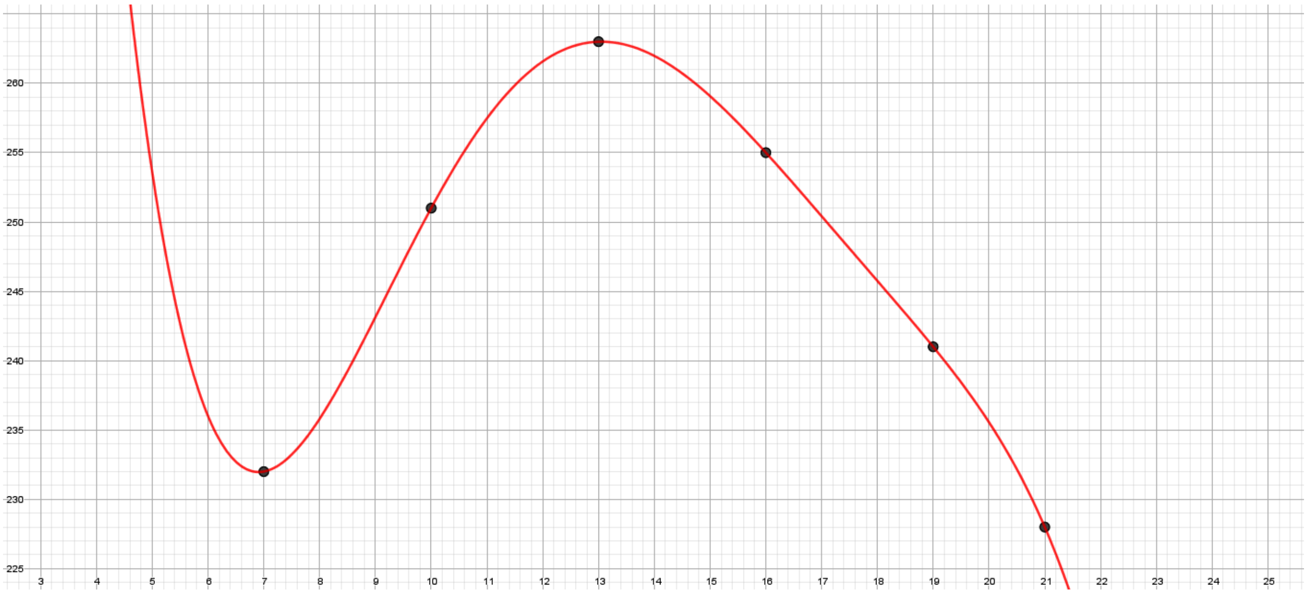


Figura 4.16: Gráfico da função interpoladora $g(x)$.

| *x (horas)* | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* |
|---|---|---|---|---|---|
| *y (volume de bactérias)* | *32* | *47* | *65* | *92* | *132* |

*(a) É possível descobrir o volume de bactérias no instante x = 3 horas e 45 minutos?*

*(b) É possível criar um modelo linear único que admita a obtenção dos valores y no intervalo* $[0, 4]$*? Se possível, obtenha-o.(Use o GeoGebra para analisar os pontos tabulados).*

*Resolução: (a) Utilizando o polinômio interpolador de Lagrange:*

$$l_0(3,75) = \frac{(3,75-1)(3,75-2)(3,75-3)(3,75-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)} = -0,037$$
$$l_1(3,75) = \frac{(3,75-0)(3,75-2)(3,75-3)(3,75-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} = 0,205$$
$$l_2(3,75) = \frac{(3,75-0)(3,75-1)(3,75-3)(3,75-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} = -0,483$$
$$l_3(3,75) = \frac{(3,75-0)(3,75-1)(3,75-2)(3,75-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)} = 0,752$$
$$l_4(3,75) = \frac{(3,75-0)(3,75-1)(3,75-2)(3,75-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)} = 0,563$$

*Então*

$$\begin{aligned} y(2000) &= 32 \cdot l_0(3,75) + 47 \cdot l_1(3,75) + 65 \cdot l_2(3,75) + 92 \cdot l_3(3,75) + 132 \cdot l_4(3,75) \\ &= 120,556 \end{aligned}$$

*(b) Utilizando o GeoGebra e os passos descritos no exemplo 4.1, é possível verificar que a função interpoladora $y(x)$ tem o gráfico na forma dada pela figura seguinte, onde*

$$y(x) = -0,08x^4 + 1,5x^3 - 2,42x^2 + 16x + 32. \tag{4.5}$$

*Podemos afirmar que podemos criar um modelo único que forneça y no intervalo $[0, 4]$, apenas, pois, para um valor de $x > 12$, a função tem valores decrescentes em y.*

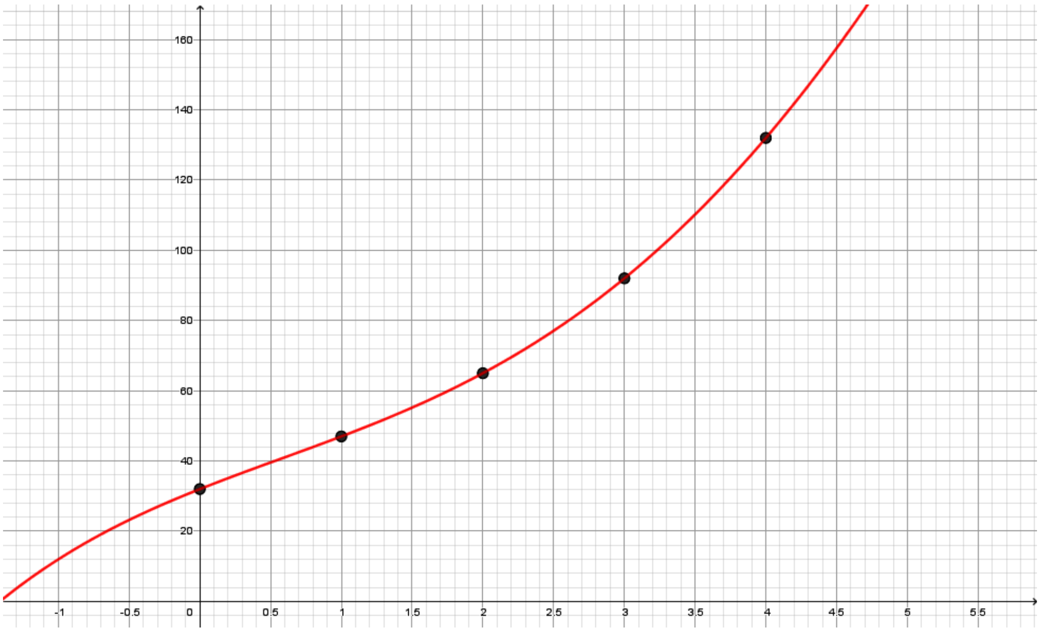


Figura 4.17: Gráfico do polinômio interpolador $y(x)$.

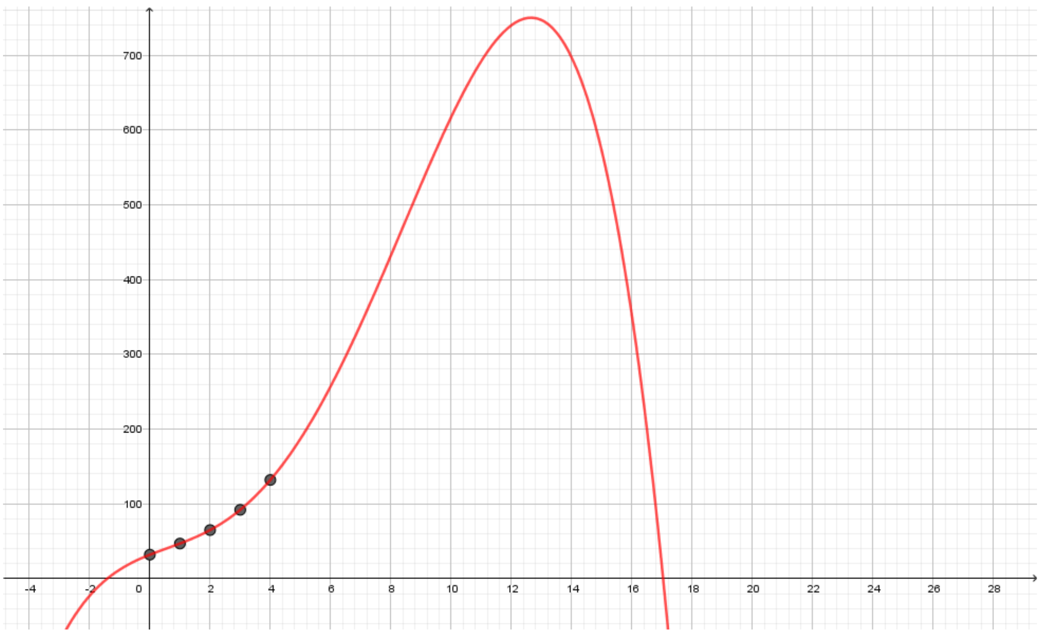


Figura 4.18: Gráfico do polinômio interpolador $y(x)$ expandido.

# Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi melhorar o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de funções polinomiais e polinômios, visto que grande maioria dos livros didáticos do ensino médio, ao introduzir estes conteúdos, o fazem de maneira semelhante e longe de uma contextualização de fato, muitas vezes realizada forçadamente, inserindo problemas que não despertam o interesse dos alunos e não mostra a característica interdisciplinar da Matemática, principalmente com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

De sorte que, inicialmente, tentamos inserir o desenvolvimento da Álgebra ao longo do tempo, desde sua fase elementar até sua fase abstrata, mostrando que sua evolução aconteceu justamente devido o fato de se resolver problemas ora de caráter puramente matemático, ora de caráter aplicado em outras ciências e situações enfrentadas por cada sociedade inserida no seu contexto histórico.

Sem demora, fizemos, em nosso trabalho, um estudo sobre polinômios em anéis e corpos, não somente da forma como é apresentada nos cursos de Matemática na educação básica, e da função determinante e suas propriedades, pois acreditamos que assim é possível maior entendimento do polinômios interpoladores, especialmente do de Lagrange.

Apresentamos um breve panorama da Matemática no Brasil, mostrando resultados nas avaliações em larga escala realizadas e expomos a Resolução de Problemas como uma metodologia útil para contornar esses resultados. Em seguida analisamos os documentos norteadores da educação em nosso país e no Estado do Amazonas, pois cremos que diante de tais informações é possível uma reflexão acerca do ato de ensinar matemática e das metodologias a serem adotadas, além de analisarmos alguns dos livros utilizados pelas escolas estaduais do Amazonas, e as práticas utilizadas por um grupo de professores entrevistados, com o objetivo de verificarmos ações que dificultam o processo de ensino e aprendizagem das funções polinomiais e dos polinômios.

Assim sendo, fizemos uma proposta para o ensino do conteúdo de funções polinomiais e polinômios utilizando o polinômio interpolador de Lagange mediante problemas contextualizados, pois é nossa opinião que o emprego desta metodologia atende às expectativas dos alunos em encontrar sentido naquilo que estudam.

Com tudo o que foi exposto, acreditamos ter contribuído favoravelmente, pois trouxemos uma nova abordagem com a utilização do polinômio interpolador de Lagrange, de modo a promover nos professores de Matemática da rede básica de ensino o constante aperfeiçoamento de suas metodologias de ensino, e, assim, despertar o interesse dos aluno com relação a Matemática.

# Referências Bibliográficas


[1] *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.*, 1997.

[2] *Proposta Curricular do Ensino Médio: Matemática e suas Tecnologias*, 2012.

[3] *Base Nacional Comum Curricular*, 2018.

[4] José Luiz Giarola Andrade and Dimas Felipe de Miranda. Modelos numéricos de aproximaccão de funccões de uma variável real: Caderno de atividades, 2014.

[5] Rodrigo Balestri. Matemática: Interaccão e tecnologia. *São Paulo: leYa*, 3, 2016.

[6] John K Baumgart. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Álgebra*. Atual Editora, 1992.

[7] Everton Boos. Interpolaçao polinomial.

[8] Carlos Alberto Callioli, Hygino Hugueros Domingues, and Roberto Celso Fabrício Costa. *Álgebra linear e aplicações*. Atual, 2007.

[9] Eduardo et al. Chavante. Matemática. *São Paulo: SM*, 3, 2016.

[10] Paulo Roberto Martins Contador. *Matemática: uma breve história*. Editora Livraria da Fisica, 2005.

[11] Luiz Roberto Dante. Matemática: contexto e aplicações. *São Paulo: Ática*, 3, 2014.

[12] Ires Dias. Teoria de anéis - notas de aula, 2011.

[13] Alessandro Borges Tatagiba et al. *Relatório Saeb (Aneb e Anresc) 2005-2015: panorama da década*. Inep/MEC, 2018.

[14] Aline Mara Fernandes et al. *Brasil no PISA 2015: Análises e reflexões sobre o desempenho do estudantes brasileiros*. Fundação Santillana, 2016.

[15] Dagoberto A. R. Justo et. al. Cálculo numérico, 2018.

[16] Ligia Maria de Campos Fagundo. A importância na vinculação de sentido ao ensino de matemática em sala de aula. *Olhares sobre o ensino da Matemática: educação básica*, 1:10–21, 2017.

[17] Abramo Hefez and Cecília de Souza Fernandez. *Introdução à álgebra linear*. 2012.

[18] Nílson José Machado. Interdisciplinaridade e matemática. *Pro-Posições*, 4(1):24–34, 1993.

[19] Cristina Maria Marques. *Introdução à Teoria de Anéis*. Departamento de Matemática - UFMG, 1999.

[20] Jamerson Fernando Confort Martins. Determinantes, propriedades e métodos de condensação. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2015.

[21] José Carlos Miguel. O ensino de matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas. *Núcleos de Ensino-PROGRAD-UNESP*, 1:375–394, 2011.

[22] M Teresa T Monteiro. Métodos numéricos: exercícios resolvidos aplicados à engenharia e outras ciências, 2012.

[23] Maria Regina de Oiveira. Ensino de matemática na educação básica. *Olhares sobre o ensino da Matemática: educação básica*, 1:22–32, 2017.

[24] Lourdes de la Rosa Onuchic and Norma Suely Gomes Allevato. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez*, pages 212–231, 2004.

[25] Jorge Picado. Apontamentos das aula: Álgebra comutativa, 2012.

[26] César Polcino Milies. Breve história da álgebra abstrata. *II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática (www. bienasbm. ufba. br/M18. pdf)*, 2004.

[27] Tatiana Roque and João Bosco Pitombeira de Carvalho. *Tópicos de história da matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[28] Maria Teresa Carneiro Soares and Neuza Bertoni Pinto. Metodologia da resolução de problemas. *24ª Reunião*, 2001.

[29] Joamir Roberto de Souza. Novo olhar matemática. *São Paulo: FTD*, 3, 2013.

[30] I. Vainsencher. Notas de aula: Álgebra linear: Aula 08 - polinomios. 2009.